UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

VARIEDADES INTEGRAIS EM SISTEMAS
COM DICOTOMIA EXPONENCIAL

JAIR SILVÉRIO DOS SANTOS

ORIENTADOR:

Prof.Dr. José Gaspar Ruas Filho.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SÃO CARLOS

1987

VARIEDADES INTEGRAIS EM SISTEMAS
COM DICOTOMIA EXPONENCIAL

JAIR SILVÉRIO DOS SANTOS

"Decreta-se: que nada será obrigado nem proibido. Tudo será permitido, sobretudo brincar com rinocerontes e caminhar pelas tardes com uma imensa begônia na lapela".

T. de Mello

À minha irmã Olinda (in memo
rian).

À Célia e Higor.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof.Dr. José Gaspar Ruas Filho, pela orientação segura e confiança depositada desde os momentos iniciais no ICMSC-USP.

Aos professores e colegas do ICMSC-USP e do Setor de Matemática da FFCLRP-USP, pelo ambiente acolhedor, incentivo e dedicação à nossa formação profissional.

Aos colegas da pós-graduação, pela compreensão e grande apoio nos momentos difíceis.

À Sonia, Elizabeth, Laura e Giselda, funcionárias do ICMSC-USP, por não medirem esforços ao nos proporcionar um atendimento exemplar e eficiente.

Aos meus pais, pelo incentivo perseverante dado através do trabalho, amor e carinho.

À Sonia Aparecida Nali, pelo excelente trabalho de datilografia, a despeito de sua constante e imensa responsabilidade junto à secretaria do Setor de Matemática na FFCLRP-USP.

Este trabalho dependeu parcialmente dos auxílios das seguintes entidades:

FAPESP, CAPES, CNPq.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO.....	i
CAPÍTULO I - Fatos Básicos.....	01
CAPÍTULO II - Variedades Integrais.....	30
CAPÍTULO III - Linearização.....	60
BIBLIOGRÁFIAS.....	83

A B S T R A C T

Integral Manifolds for Systems with Exponential Dichotomy

In this work condition are imposed to obtain integral manifolds for systems

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$

$$\dot{y} = A(t, x)y + g(t, x, y)$$

when the $\dot{y} = A(t, x)y$ has an exponential dichotomy for every x .

In the second parte we study a linearization of this system.

I N T R O D U Ç Ã O

O estudo de variedades invariantes é um dos principais capítulos da Teoria Geométrica de Equações Diferenciais. Em uma primeira vez, se estuda variedades invariantes para sistemas autônomos hiperbólicos. A hipótese natural correspondente para sistemas não autônomos é a dicotomia exponencial.

Algumas questões devem ser tratadas previamente, tais como, a preservação de dicotomia exponencial por uma perturbação linear, e a existência e unicidade de solução para equação linear forçada por uma função contínua e limitada ou localmente integrável. Isto é feito nos Lemas 1.5, 1.6 e 1.7 respectivamente, e estes são os resultados de maior destaque do primeiro capítulo.

Este trabalho tem dois objetivos bem determinados.

O primeiro é o estudo na determinação de uma variedade invariante para sistemas da forma,

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$

$$\dot{y} = A(t, x)y + g(t, x, y),$$

que é dada pelo gráfico de uma função v das variáveis t e x . Isto é feito pelo Teorema 2.1, que é uma consequência direta do Teorema 2.2. Este último nos dá um método para obter função v , que difere do método original de Bogolyubov e Mitropolski, e opera diretamente com a solução individualmente. Estes são os principais resultados do capítulo 2. Fechamos este capítulo provando o Teorema 2.3, que dá uma periodicidade na primeira variável de v , e uma certa invariança por translação na segunda variável, desde que sejam feitas hipóteses semelhantes para as funções em questão.

O segundo objetivo é estabelecer um homeomorfismo entre soluções de sistemas da forma

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, x, y),$$

e soluções de sistemas da forma

$$\dot{x} = f(t, x, v(t, x))$$

$$\dot{y} = A(t)y.$$

Esta questão é tratada no capítulo 3, cujo principal resultado é o Teorema 3.1.

C A P Í T U L O I

Apresentamos neste capítulo alguns resultados básicos que serão usados no decorrer do trabalho.

Seja $Y(t)$ uma matriz fundamental para a equação diferencial

$$(1.1) \quad \dot{Y} = A(t)Y.$$

Definição 1.1

A equação (1.1) possui dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente α , se existirem, projeção P , e constantes positivas K e α , tais que,

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (a) \quad & |Y(t)PY^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para } t \geq s, \\ (b) \quad & |Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} \quad \text{para } s \geq t. \end{aligned}$$

Lema 1.1

Sejam β e τ constantes positivas. Se para cada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, definimos

$$\|f\| = \sup_{-\infty < t < \infty} \{e^{-\beta|t-\tau|} |f(t)|\},$$

então $\|\cdot\|$ é uma norma no espaço $\mathcal{B}$ das funções contínuas tal que $\|f\| < \infty$, e $\mathcal{B}$ é um espaço Banach.

Demonstração

É fácil ver que $\|\cdot\|$ é uma norma.

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}$. Então existe $C > 0$ tal que,

$$e^{-\beta|t-\tau|} |f_n(t)| \leq \|f_n\| \leq C.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$. Fixemos arbitrariamente $t \in \mathbb{R}$, a sequência $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Isto define uma aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é o limite simples da sequência (f_n) . De

$$e^{-\beta|t-\tau|} |f_n(t)| \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in \mathbb{R}$, fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$e^{-\beta|t-\tau|} |f(t)| < C$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $f \in \mathcal{B}$. Resta mostrar que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$, temos

$$e^{-\beta|t-\tau|} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $m \rightarrow \infty$, concluímos que se $n > n_0$,

$$e^{-\beta|t-\tau|} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Para entender melhor o que significa uma dicotomia exponencial num caso geral, é conveniente reescrever as condições (1.2) na forma equivalente,

- $$\begin{aligned} (a) \quad & |Y(t)P\xi| \leq K'e^{-\alpha(t-s)} |Y(s)P\xi| \quad \text{para } t \geq s, \\ (1.3) \quad (b) \quad & |Y(t)(I-P)\xi| \leq K'e^{-\alpha(s-t)} |Y(s)(I-P)\xi| \quad \text{para } s \geq t, \\ (c) \quad & |Y(t)PY^{-1}(t)| \leq K' \quad \text{para todo } t, \end{aligned}$$

onde K' , é uma constante positiva e ξ é um vetor arbitrário.

Vamos provar esta equivalência.

Suponhamos (1.2) verdadeira e seja ξ um vetor arbitrário. Então para $t \geq s$ teremos,

$$\begin{aligned} |Y(t)P\xi| &= |Y(t)PY\bar{Y}(s)^{-1}Y(s)P\xi| \\ &\leq |Y(t)PY\bar{Y}(s)^{-1}| |Y(s)P\xi| \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} |Y(s)P\xi|. \end{aligned}$$

Analogamente prova-se a desigualdade (1.3.b).

Para provar (1.3.C) é suficiente fazer $t=s$ na primeira desigualdade em (1.2).

Reciprocamente, para cada vetor arbitrário ξ , podemos tomar $\xi' = Y\bar{Y}(s)^{-1}\xi$. Por (1.3.C) $|Y(s)PY\bar{Y}(s)^{-1}| \leq K'$, então,

$$\begin{aligned} |Y(t)PY\bar{Y}(s)^{-1}\xi| &\leq K'e^{-\alpha(t-s)} |Y(s)P\xi'| \\ &\leq K'e^{-\alpha(t-s)} |Y(s)PY\bar{Y}(s)^{-1}\xi| \\ &\leq K'K'e^{-\alpha(t-s)} |\xi|, \text{ para } t \geq s. \end{aligned}$$

Isto mostra (1.2.a). Lembrando que $|Y(s)(I-P)Y\bar{Y}(s)^{-1}| \leq K'$ para todo s , a condição (1.2.b), pode ser provada de maneira análoga. $\square$

Suponhamos que, a equação (1.1) possui uma dicotomia exponencial, com projeção P ($\text{tr}(P) = k$), constante K e expoente α . Então as condições (1.3.a) e (1.3.b) dizem que existe um subespaço k -dimensional e outro $(n-k)$ -dimensional, de soluções que aproximam de zero quando $t \rightarrow \infty$, e $t \rightarrow -\infty$, respectivamente.

Uma propriedade que terá um papel relevante a desempenhar neste trabalho, é a não-limitação das soluções não nulas da equação (1.1) quando ela possui uma dicotomia exponencial. Isto será tratado no próximo resultado.

Lema 1.2

Suponhamos que a equação (1.1) possui dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 2α . Então, se $0 < \beta < 2\alpha$, nenhuma solução não nula $y(t)$ da equação (1.1) é tal que

$$|y(t)| = o(e^{\beta|t|}) \text{ quando } t \rightarrow \pm\infty$$

Demonstração

Seja $y(s)$ solução de (1.1) tal que $y(t) = \xi \neq 0$. Então $P\xi \neq 0$ ou $(I-P)\xi \neq 0$. Suponhamos que $(I-P)\xi \neq 0$ e provemos que, $e^{-\beta s} |y(s)| \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$.

Para cada $s \in \mathbb{R}$, é fácil ver que,

$$\begin{aligned} y(s) &= Y(s) P Y^{-1}(t) \xi + Y(s) (I-P) Y^{-1}(t) \xi \\ &= y_1(s) + y_2(s), \end{aligned}$$

ainda

$$y_2(s) = Y(s) (I-P) Y^{-1}(s) y(s).$$

Usando (1.3.c) com $(I-P)$ em lugar de P , e (1.3.b), teremos para todo $s \geq t \geq 0$.

$$\begin{aligned} e^{-\beta s} |y(s)| &\geq e^{-\beta s} |Y(s) (I-P) Y^{-1}(s)|^{-1} |y_2(s)| \\ &\geq \frac{e^{-\beta s}}{K'} |Y(s) (I-P) Y^{-1}(t) \xi| \\ &\geq \frac{e^{-\beta s}}{K' K'} e^{2\alpha(s-t)} |Y(t) (I-P) Y^{-1}(t) \xi| \\ &\geq \frac{e^{-2\alpha t}}{K' K'} e^{(2\alpha-\beta)s} |y_2(t)| \end{aligned}$$

Como $2\alpha - \beta > 0$, $e^{-\beta s} |y(s)| \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$. Supondo $P\xi \neq 0$, podemos provar que, $e^{-\beta s} |y(s)| \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$. Isto prova que

$$|y(t)| \neq o(e^{\beta|t|}) \text{ quando } t \rightarrow \pm\infty.$$

□

Lema 1.3

A função $H(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}$, $\beta > 0$ satisfaz as seguintes desigualdades,

$$\frac{1}{2} + \beta^{-1} \leq H(\beta) \leq 1 + \beta^{-1}$$

Demonstração

A função $\psi(\beta) = H(\beta) - \frac{1}{\beta}$ é crescente, pois

$$\begin{aligned} \psi'(\beta) &= - \frac{-e^{-\beta}}{[1 - e^{-\beta}]^2} + \frac{1}{\beta^2} \\ &= - \frac{1}{[2 \sinh \frac{\beta}{2}]^2} + \frac{1}{\beta^2}, \end{aligned}$$

e $\frac{\beta}{2} \leq \sinh \frac{\beta}{2}$. Como $\psi(\beta) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $\beta \rightarrow 0$ e $\psi(\beta) \rightarrow 1$ quando $\beta \rightarrow \infty$, o Lema está provado.

Lema 1.4

Sejam $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções contínuas. Suponhamos que existem constantes positivas L, N , tais que,

$$|h(t, x_1) - h(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq N |t_1 - t_2|.$$

Então, dado $p > 0$ existe $q > 0$ tal que,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} h(t, x(t)) dt \right| \leq p \quad \text{para } |t_1 - t_2| \leq 1,$$

sempre que,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} h(t, x) dt \right| \leq q \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^m \text{ e } |t_1 - t_2| \leq 1.$$

Além disso,

$$q \leq \frac{1}{2} p^2 (p + LN)^{-1}.$$

Demonstração

Sejam, $p > 0$, $s_j = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{k} j$, $j = 0, 1, \dots, k$, então
para $|t_2 - t_1| \leq 1$,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} h[t, x(t)] dt \right| \leq \sum_{j=1}^k \left| \int_{s_{j-1}}^{s_j} h[t, x(s_j)] dt \right| +$$

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} |h[t, x(t)] - h[t, x(s_j)]| dt$$

$$\leq kq + \sum_{j=1}^k LN \int_{s_{j-1}}^{s_j} (s_j - t) dt$$

$$= kq + \sum_{j=1}^k \frac{LN}{2} (s_j - s_{j-1})^2$$

$$\leq kq + \frac{LN}{2k}.$$

Se escolhermos $k > 0$ tal que,

$$LNp^{-1} \leq k \leq LNp^{-1} + 1$$

então, tomando

$$q \leq \frac{1}{2} p^2 (p + LN)^{-1},$$

$$kq + \frac{LN}{2k} \leq \frac{k}{2} p^2 (p + LN)^{-1} + \frac{LN}{2k}$$

$$\leq \frac{pLN + p}{2[LN + p]} + \frac{p}{2} = p$$

Agora vamos estudar a equação (1.1) perturbada, mas com perturbações convenientes, afim de satisfazer apenas os nossos interesses.

Dado que a equação (1.1) possui uma dicotomia exponencial, com projeção P e constante K e expoente α , queremos saber se esta propriedade é preservada, por uma perturbação linear "integralmente pequena" na equação original. A resposta para esta questão é dada no próximo resultado de Coppel A, e a demonstração aqui apresentada deve-se a H.M.Rodrigues.

Lema 1.5

Seja $A(t)$ uma função matricial contínua tal que,

$$|A(t)| \leq N$$

para $-\infty < t < \infty$, e suponhamos que a equação linear,

$$(1.1) \quad \dot{y} = A(t)y$$

possui uma dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 4α . Então, existe uma constante positiva $\delta = \delta(N, K, \alpha)$ tal que, se $B(t)$ é uma função matricial contínua satisfazendo,

$$|B(t) - A(t)| \leq N \text{ para todo } -\infty < t < \infty,$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} [B(t) - A(t)] dt \right| \leq \delta \text{ para } |t_2 - t_1| \leq h \leq 1,$$

a equação linear,

$$(1.4) \quad \dot{y} = B(t)y,$$

possui uma dicotomia exponencial com projeção P , constante $M = M(K) \geq 1$ e expoente 2α .

Demonstração

A fim de simplificar as expressões, façamos

$$R(t) = B(t) - A(t)$$

e mostremos que a equação linear,

$$(1.5) \quad \dot{y} = (A(t) + B(t))y,$$

equivalente à equação (1.4), tem dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 2α . É fácil ver que, colocando $x = e^{\gamma t}y$, para $0 < \gamma < \alpha$, a equação linear,

$$(1.6) \quad \dot{x} = [A(t) + \gamma I]x$$

possui dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente $\mu = \alpha - \gamma$.

Consideremos a equação diferencial

$$(1.7) \quad \dot{y} = (A(t) + \gamma I)y + R(t)y,$$

e a aplicação T , que a cada função matricial $n \times n$ contínua $Z(t)$, associa a função matricial

$$\begin{aligned} TZ(t) &= \int_0^t Y(t) P Y^{-1}(s) R(s) Z(s) ds \\ &\quad - \int_t^\infty Y(t) (I - P) Y^{-1}(s) R(s) Z(s) ds, \end{aligned}$$

onde $Y(t)$ é matriz fundamental de (1.6). É fácil ver que, se $Z(t)$

satisfaz a equação

$$(1.8) \quad Z(t) = Y(t)P + TZ(t),$$

então $Z(t)$ é solução para a equação (1.7).

O passo mais importante é provar que a equação (1.9), tem uma única solução limitada. Com efeito, seja $Z(t)$ solução limitada de

$$(1.9) \quad \dot{Z} = C(t)Z + R(t).F(t)$$

onde $C(t) = (A(t) + \gamma I)$, $F(t)$ é uma função matricial $n \times n$ contínua. Vamos estimar TZ . Se $n = [\frac{t}{h}]$ é o maior inteiro contido em $\frac{t}{h}$, então,

$$\begin{aligned} \int_0^t Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)ds &= \int_0^{t-nh} Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)ds \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{t-(j-1)h}^{t-jh} Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)ds \end{aligned}$$

Para cada ϵ tal que $0 < \epsilon \leq h$, definimos por conveniência

$$G(t, \epsilon) = \begin{cases} \int_a^{a+\epsilon} Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)ds & \text{se } s \leq t \\ \int_0^{a+\epsilon} Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)R(s)ds & \text{se } s > t \end{cases}$$

Calculando uma integral por partes, teremos para $t \geq s$,

$$\begin{aligned}
 |G(t, \epsilon)| &= \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) P Y^{-1}(s) \left[\int_a^s R(u) du \right] Z(s) ds \right| \\
 &\leq \left| \left[Y(t) P Y^{-1}(s) \int_a^s R(u) du Z(s) \right]_a^{a+\epsilon} \right| \\
 &+ \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) P Y^{-1}(s) C(s) \int_a^s R(u) du Z(s) ds \right| \\
 &+ \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) P Y^{-1}(s) \int_a^s R(u) du [C(s) Z(s) + R(s) F(s)] ds \right| \\
 &\leq K \delta e^{-\mu(t-a-\epsilon)} \|Z\| + 2K \delta (N+\gamma) \int_a^{a+\epsilon} e^{-\mu(t-s)} ds \\
 &+ K \delta N \|F\| \int_0^{a+\epsilon} e^{-\mu(t-s)} ds \\
 &\leq [K \delta \|Z\| + 2K \delta (N+\gamma) \mu^{-1} \|Z\| + K \delta N \mu^{-1} \|F\|] e^{-\mu(t-a-\epsilon)} \\
 &\leq [K + 2K(N+\gamma) \mu^{-1}] \delta [\|Z\| + \|F\|] e^{-\mu(t-a-\epsilon)}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $a+\epsilon = t-jh$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $Q = K + 2K(N+\gamma) \mu^{-1}$, teremos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t Y(t) P Y^{-1}(s) R(s) Z(s) ds \right| &\leq Q \delta [\|Z\| + \|F\|] e^{-\mu h n} \\
 &+ \sum_{j=1}^n Q \delta [\|Z\| + \|F\|] e^{-\mu h j} \\
 &\leq Q \delta [\|Z\| + \|F\|] \\
 &= Q \delta [1 - e^{-\mu h}]^{-1} [\|Z\| + \|F\|].
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, teremos,

$$\begin{aligned}
 |G(t, \epsilon)| &= \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) (I-P) Y^{-1}(s) \left[\int_{a+\epsilon}^s R(u) du \right]' Z(s) ds \right| \\
 &\leq K \delta e^{-\mu(a-t)} \|Z\| \\
 &\quad + 2K \delta \mu^{-1} (N+\gamma) e^{-\mu(a-t)} \|Z\| + K \delta \mu^{-1} N \|F\| \\
 &\leq Q \delta [\|Z\| + \|F\|] e^{-\mu(a-t)}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $a = t+jh$, $j = 1, 2, \dots, n$, teremos

$$\left| \int_t^\infty Y(t) (I-P) Y^{-1}(s) R(s) Z(s) ds \right| \leq Q_Y [1 - e^{-\mu h}]^{-1} [\|Z\| + \|F\|].$$

Portanto, provamos que se $Z(t)$ é solução limitada de (1.9) para $t \geq 0$, então,

$$\|TZ\| \leq 2Q_Y (1 - e^{-\mu h})^{-1} [\|Z\| + \|F\|].$$

Seja (Z_p) , $p \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções matriciais $n \times n$ contínuas, tais que,

$$Z_0(t) = 0 \quad \text{e} \quad Z_{p+1}(t) = Y(t) + TZ_p(t)$$

então, a sequência (Z_p) , $p \in \mathbb{N}$ converge uniformemente, se e somente se, a série

$$\sum_{p=0}^{\infty} (Z_{p+1} - Z_p) \text{ converge. Mostremos por indução que}$$

$$\|z_{p+1} - z_p\| \leq 2^{p_{KH}} \left[\frac{p+1}{2} \right]$$

onde,

$$H = \frac{[K+2\mu^{-1}(N+\gamma)K]}{1-e^{-\mu h}}$$

e $\left[\frac{p+1}{2} \right]$ é o maior inteiro de $\frac{p+1}{2}$. Se $p=0$ não há o que demonstrar. Suponhamos que

$$\|z_p - z_{p-1}\| \leq 2^{p-1_{KH}} \left[\frac{p}{2} \right]$$

então, como $z_p - z_{p-1}$ é solução de (1.9) com $F(t) = z_{p-1}(t) - z_{p-2}(t)$

$$\begin{aligned} \|z_{p+1} - z_p\| &= \|Tz_p - Tz_{p-1}\| \\ &\leq H[2^{p-1_{KH}} \left[\frac{p}{2} \right] + 2^{p-2_{KH}} \left[\frac{p-1}{2} \right]] \\ &\leq 2^{p-1_{KH}} \left[\frac{p+1}{2} \right] + 2^{p-2_{KH}} \left[\frac{p+1}{2} \right] \\ &= 2^{p_{KH}} \left[\frac{p+1}{2} \right] \end{aligned}$$

Portanto, se δ e h são escolhidos convenientemente teremos

$$\|z_{p+1} - z_p\| \leq 2^{p_{KH}} \left[\frac{p+1}{2} \right]$$

e então a série $\sum_{p=1}^{\infty} (z_{p+1} - z_p)$ converge. Suponhamos que, z e w sejam soluções de (1.7). Fazendo $U = z - w$ teremos $U = TU$ e consequentemente,

$$\|U\| = \|TU\| \leq 2H\|U\|.$$

Portanto $\|U\| = 0$ e então, $Z=W$.

Como,

$$\begin{aligned} |Z(t)| &\leq |Y(t)| + |TZ(t)| \\ &\leq Ke^{-\alpha t} + 2H\|Z\|, \end{aligned}$$

$Z(t)$ é a única solução de (1.7), definida em $(-\infty, \infty)$ e limitada em $(0, \infty)$. Além disso

$$\|Z\| \leq \frac{K}{1-2H}.$$

Para cada $p \in N$, $Z_p(t)(I-P) = 0$ ($Z_p(t)P = Z_p(t)$), então $Z(t)(I-P) = 0$ ($Z(t)P = Z(t)$). Indiquemos por $Z_+(t)$ a solução acima.

De maneira completamente análoga podemos definir,

$$\begin{aligned} TZ(t) &= Y(t)(I-P) + \int_{-\infty}^t Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)ds \\ &\quad + \int_{\infty}^t Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)R(s)Z(s)ds, \end{aligned}$$

e provar que,

$$\|TZ\| \leq 2Q\delta(1-e^{-\mu h})^{-1}[\|Z\| + \|F\|],$$

e existe uma única solução $Z_-(t)$ de (1.7) definida em $(-\infty, \infty)$, limitada em $(-\infty, 0)$, e tal que, $Z_-(t)P = 0$ ($Z_-(t)(I-P) = Z_-(t)$).

Além disso,

$$\|Z_-\| \leq \frac{K}{1-2H}.$$

Seja $Z(t) = Z_+(t) + Z_-(t)$, onde

$$\begin{aligned} Z_+(t) &= Y(t)P + \int_0^t Y(t)PY(\bar{s})^{-1}R(s)Z_+(s)ds \\ &\quad + \int_t^\infty Y(t)(I-P)Y(\bar{s})^{-1}R(s)Z_+(s)ds \\ Z_-(t) &= Y(t)(I-P) + \int_{-\infty}^t Y(t)(I-P)Y(\bar{s})^{-1}R(s)Z_-(s)ds \\ &\quad + \int_t^\infty Y(t)PY(\bar{s})^{-1}R(s)Z_-(s)ds. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} Z(0) &= Y(0) + \int_{-\infty}^0 Y(0)PY(\bar{s})^{-1}R(s)Z_-(s)ds \\ &\quad + \int_{+\infty}^0 Y(0)(I-P)Y(\bar{s})^{-1}R(s)Z_+(s)ds \stackrel{\text{def}}{=} Y(0)+D. \end{aligned}$$

Como,

$$\|TZ\| \leq \|TZ_+\| + \|TZ_-\|$$

$$\leq \frac{4Q\delta}{1-e^{-\mu h}} \cdot \|Z\|$$

$$\leq \frac{4Q\delta}{1-e^{-\mu h}} \cdot \frac{K}{1-2H},$$

e,

$$\|D\| \leq \|TZ_+\| + \|TZ_-\|$$

$$\leq \frac{4Q\delta}{1-e^{-\mu h}} \cdot \frac{K}{1-2h}$$

Então para h e δ convenientes o determinante de $Z(0)$ é não nulo, e portanto $Z(t)$ é matriz fundamental de (1.6).

Seja $Z_+(t)$ solução limitada para $t \geq 0$ da equação (1.7), então

$$\begin{aligned} Z_+(t) &= Y(t)Y(\bar{s})^{-1}Z(s) + \int_s^t Y(t)Y(\bar{u})^{-1}R(u)Z_+(u)du \\ &= Y(t)PY(\bar{s})^{-1}Z_+(s) + \int_s^t Y(t)PY(\bar{u})^{-1}R(u)Z_+(u)du \\ &\quad + Y(t)(I-P)Y(\bar{s})^{-1}Z_+(s) + \int_s^t Y(t)(I-P)Y(\bar{u})^{-1}R(u)Z_+(u)du, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} Z_+(t) &= Y(t)Y(\bar{s})^{-1}Z(s) + \int_s^t Y(t)PY(\bar{u})^{-1}R(u)Z_+(u)du \\ &\quad + \int_s^t Y(t)(I-P)Y(\bar{u})^{-1}R(u)Z_+(u)du, \end{aligned}$$

desde que,

$$|Y(t)(I-P)Y(\bar{s})^{-1}Z_+(s)| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}|Z_+(s)|,$$

e

$$\left| \int_s^t Y(t) (I-P) Y(u)^{-1} R(u) Z_+(u) du \right| \leq K |Z_+(t)| \int_s^t e^{-\alpha(u-t)} du.$$

Como $Z_+(t) = Z(t)P$

$$\begin{aligned} Z(t)PZ(s)^{-1} &= Y(t)PY(s)^{-1}PZ(s)^{-1} + \int_s^t Y(t)PY(u)^{-1}R(u)Z(u)PZ(s)^{-1} du \\ &+ \int_s^t Y(t)(I-P)Y(u)^{-1}R(u)Z(u)PZ(s)^{-1} ds, \end{aligned}$$

fazendo $U(t) = Z(t)PZ(s)^{-1}$ e olhando $U(t)$ como incógnita, podemos provar como antes que a equação integral

$$U(t) = Y(t)PY(s)^{-1}U(s) + TU(s),$$

tem uma única solução limitada para $t \geq s$, tomando aqui a sequência (U_p) $p \in \mathbb{N}$, tal que $U_0(s) = 0$ e $U_{p+1}(t) = Y(t)PY(s)^{-1}U_p(s) + TU_p(s)$.

Então,

$$|Z(t)PZ(s)^{-1}| \leq \frac{K}{1-2H} |Z(s)PZ(s)^{-1}| \text{ para } t \geq s,$$

desde que

$$\begin{aligned} |U(t)| &\leq |Y(t)PY(s)^{-1}U(s)| + |TU(t)| \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} |U(s)| + 2H|U(t)|. \end{aligned}$$

Analogamente

$$|Z(t)(I-P)Z^{-1}(s)| \leq \frac{K}{1-2H} |Z(s)(I-P)Z^{-1}(s)| \text{ para } t \leq s.$$

Mostremos agora que $[Z(s)PZ^{-1}(s)]$ e $[Z(s)(I-P)Z^{-1}(s)]$ são limitadas.

$$\begin{aligned} Z(t)PZ^{-1}(t) &= Y(t)PY^{-1}(s) + \int_0^t Y(t)PY^{-1}(s)R(s)Z(s)PZ^{-1}(t)ds \\ &+ \int_{-\infty}^t Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)R(s)PZ^{-1}(t)ds, \end{aligned}$$

multiplicando a esquerda por $Y(t)(I-P)Y^{-1}(t)$ teremos,

$$Y(t)(I-P)Y^{-1}(t)Z(t)PZ^{-1}(t) = \int_{-\infty}^t Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)R(s)Z(s)PZ^{-1}(t)ds,$$

uma integração por partes produz,

$$|Y(t)(I-P)Y^{-1}(t)Z(t)PZ^{-1}(t)| \leq \eta |Z(t)PZ^{-1}(t)|,$$

onde $\eta = \frac{2HK}{1-2H}$. Analogamente,

$$|Y(t)PY^{-1}(t)Z(t)(I-P)Z^{-1}(t)| \leq \eta |Z(t)(I-P)Z^{-1}(t)|.$$

sejam $\gamma_1(t) = |Z(t)PZ^{-1}(t)|$ e $\gamma_2(t) = |Z(t)(I-P)Z^{-1}(t)|$,

como

$$\begin{aligned} Z(t)PZ^{-1}(t) - Y(t)PY^{-1}(t) &= Y(t)(I-P)Y^{-1}(t)Z(t)PZ^{-1}(t) \\ &- Y(t)PY^{-1}(t)Z(t)(I-P)Z^{-1}(t), \end{aligned}$$

então

$$|Z(t)PZ^{-1}(t) - Y(t)PY^{-1}(t)| \leq \eta [\gamma_1(t) + \gamma_2(t)],$$

portanto

$$\gamma_1(t) \leq K + \eta [\gamma_1(t) + \gamma_2(t)]$$

Analogamente

$$\gamma_2(t) \leq K + \eta [\gamma_1(t) + \gamma_2(t)],$$

disto segue que

$$\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \leq 2K + 2\eta [\gamma_1(t) + \gamma_2(t)],$$

então

$$\gamma_1(t), \gamma_2(t) \leq \frac{2K}{1-2\eta}$$

Portanto

$$|Z(t)PZ^{-1}(s)| \leq \frac{K}{1-2\eta} \cdot \frac{2K}{1-2\eta} \quad \text{para } t \geq s$$

$$|Z(t)(I-P)Z^{-1}(s)| \leq \frac{K}{1-2\eta} \cdot \frac{2K}{1-2\eta} \quad \text{para } s \geq t$$

como $Z(t) = e^{\gamma t} W(t)$ onde W satisfaz

$$W = [A(t_1) + R(t)]W,$$

$$|W(t)PW^{-1}(s)| \leq Le^{-\gamma(t-s)} \quad \text{para } t \geq s,$$

$$|W(t)(I-P)W(s)^{-1}| \leq L e^{-\gamma(s-t)} \quad \text{para } s \geq t,$$

onde

$$L = \left[\frac{2H}{1-2H} \right]^2 \cdot \frac{1}{1-2\eta} . \quad \square$$

Suponhamos que a equação (1.1) possui uma dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente α . O que podemos dizer, sobre existência e unicidade de soluções, para a equação (1.1) forçada, por uma função em B , ou por uma função localmente integrável? Estas perguntas serão respondidas nos dois próximos resultados.

Lema 1.6

Seja $B(t)$ uma função matricial contínua em $t \in \mathbb{R}$, tal que a equação linear

$$(1.5) \quad \dot{y} = B(t)y$$

possui uma dicotomia exponencial com projeção P , constante M e expoente 2α . Se $0 < \beta < 2\alpha$ e $f \in B$, então para cada $f \in B$ a equação

$$(1.11) \quad \dot{y} = B(t)y + f(t)$$

tem uma única solução $G(f) \in B$. Além disso a aplicação linear $G: B \rightarrow B$ é contínua e

$$\|G\| \leq \frac{2}{2\alpha - \beta} M .$$

Demonstração

É fácil ver que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t Y(t) P Y(s)^{-1} f(s) ds + \int_t^{\infty} Y(t) (I-P) Y(s)^{-1} f(s) ds$$

é solução de (1.11). Nós vamos encontrar uma estimativa de $|G(f(t))|$ somente para $t \geq \tau$, uma vez que para $t \leq \tau$ o procedimento é completamente análogo.

Escrevendo

$$\int_{-\infty}^t Y(t) P Y(s)^{-1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{\tau} Y(t) P Y(s)^{-1} f(s) ds + \int_{\tau}^t Y(t) P Y(s)^{-1} f(s) ds,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} |G(f(t))| &\leq \int_{-\infty}^{\tau} |Y(t) P Y(s)^{-1}| |f(s)| ds + \int_{\tau}^t |Y(t) P Y(s)^{-1}| |f(s)| ds \\ &\quad + \int_t^{\infty} |Y(t) (I-P) Y(s)^{-1}| |f(s)| ds \\ &\leq M \left[\int_{-\infty}^{\tau} e^{-2\alpha(t-s)} \|f\| e^{\beta(\tau-s)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau}^t e^{-2\alpha(t-s)} \|f\| e^{\beta(s-\tau)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\infty} e^{-2\alpha(s-t)} \|f\| e^{\beta(s-\tau)} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M \|f\| \left\{ \frac{1}{2\alpha-\beta} [\exp(\beta\tau - 2\alpha\tau + 2\alpha\tau - \beta t) \right. \\
 &\quad \left. + \exp(2\alpha t - \beta\tau - 2\alpha t + \beta t)] \right\} \\
 &+ \frac{1}{2\alpha+\beta} M \|f\| \frac{1}{2\alpha+\beta} \exp[2\alpha t - \beta\tau + 2\alpha t + \beta t] \\
 &\leq \frac{2}{2\alpha-\beta} M \|f\| e^{\beta(t-\tau)}
 \end{aligned}$$

A linearidade é trivial, portanto $G(f) \in B$, e

$$\|G\| \leq \frac{2}{2\alpha-\beta} M.$$

A boa definição da aplicação linear G segue do Lema (1.2), e isto completa a prova.

Lema 1.7

Seja $B(t)$ função matricial contínua, tal que $|B(t)| \leq 2N$ para $-\infty < t < \infty$, onde $N \geq 1$, e suponhamos que a equação linear (1.5), possui dicotomia exponencial com projeção P , constante M e expoente 2α . Se $0 < \beta < \alpha$, e f é contínua tal que

$$\left| \int_t^{t+h} f(s) ds \right| \leq re^{\beta|t-\tau|} \quad \text{para } |h| < 1,$$

e se $t > \tau$, $h > 0$ e se $t < \tau$, $h < 0$. Então a equação não homogênea (1.11) tem uma única solução $y(t)$ tal que $\|y\| < \infty$. Além disso

$$\|y\| \leq 8NM\gamma r,$$

onde $\gamma = H(\alpha) = (1-e^{-\alpha})^{-1}$.

Demonstração

A unicidade segue do Lema (1.2). Uma solução da equação (1.7) é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t Y(t) P Y(\bar{s})^{-1} f(s) ds + \int_t^{\infty} Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} f(s) ds.$$

Suponhamos $t \geq \tau$,

$$\int_t^{\infty} Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} f(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t+n}^{t+n+1} Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} f(s) ds.$$

Seja $0 < \epsilon \leq 1$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} f(s) ds \right| &= \left| \int_a^{a+\epsilon} Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} \left[\int_a^s f(u) du \right]' ds \right| \\ &\leq \left| Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} \int_a^s f(u) du \right|_a^{a+\epsilon} \\ &+ \left| \int_a^{a+\epsilon} [Y(t) (I-P) Y(\bar{s})^{-1} B(s) \int_a^s f(u) du] ds \right| \\ &\leq M r e^{-2\alpha(a-t+\epsilon)} e^{\beta(a-\tau)} \\ &+ \int_a^{a+\epsilon} [M r e^{-2\alpha(s-t)} 2N e^{\beta(a-\tau)}] ds \\ &= M r [e^{-2\alpha(a+\epsilon-t)} e^{\beta(a-\tau)} \\ &+ 2N e^{\beta(a-\tau)} \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha(a-t)} (1-e^{-2\alpha\epsilon})]. \end{aligned}$$

Fazendo $a = t+n$, $\varepsilon = 1$, teremos

$$\left| \int_{t+n}^{t+n+1} Y(t) (I-P) Y^{-1}(s) f(s) ds \right| \leq Mre^{\beta(t-\tau)} e^{-(2\alpha-\beta)n} [e^{-2\alpha} + N\alpha^{-1}(1-e^{-2\alpha})].$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \int_t^\infty Y(t) (I-P) Y^{-1}(s) f(s) ds \right| &\leq Mre^{\beta(t-\tau)} \sum_{n=0}^\infty e^{-(2\alpha-\beta)n} [e^{-2\alpha} + N\alpha^{-1}(1-e^{-2\alpha})] \\ &= Mre^{\beta(t-\tau)} (1-e^{-(2\alpha-\beta)})^{-1} e^{-2\alpha} + N\alpha^{-1}(1-e^{-2\alpha}) \\ &= Mr \gamma [1+N(1-e^{-2\alpha})] e^{\beta(t-\tau)} \\ &\leq 3NM\gamma re^{\beta(t-\tau)}, \end{aligned}$$

onde, $[1-e^{-(2\alpha-\beta)}]^{-1} \leq (1-e^{-\alpha})^{-1} = \gamma$,

$$[1+N(1-e^{-2\alpha})\alpha^{-1}] \leq N(1+(1-e^{-2\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-1}) \leq N(2+e^{-\alpha}) \leq 3N.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \left| \int_b^{b+\varepsilon} Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds \right| &\leq |Y(t) PY^{-1}(b+\varepsilon)| \left| \int_b^{b+\varepsilon} f(u) du \right| \\ &+ \int_b^{b+\varepsilon} |Y(t) PY^{-1}(s)| |B(s)| \left| \int_b^s f(u) du \right| ds \end{aligned}$$

$$\leq Mr[e^{-2\alpha[t-(b+\epsilon)]} e^{\beta(\tau-b)} + 2Ne^{\beta(\tau-b)} \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha(t-b)} (e^{2\alpha\epsilon} - 1)].$$

Fazendo $b = \tau - n - 1$ e $\epsilon = 1$ teremos,

$$\left| \int_{\tau-n-1}^{\tau-n} Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds \right| \leq Mr[e^{-2\alpha(t-\tau)} e^{-(2\alpha-\beta)n} [e^{-2\alpha} + N(1-e^{-2\alpha})]]$$

então

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds \right| \leq 3NM_Y re^{-2\alpha(t-\tau)}$$

$$\leq 3NM_Y re^{\beta(t-\tau)}$$

Finalmente,

$$\int_{\tau}^t Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds = \sum_{j=1}^m \int_{\tau+j-1}^{\tau+j} Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds$$

$$+ \int_{\tau+m}^t Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds,$$

onde m é o único número inteiro não negativo tal que $\tau+m \leq t < \tau+m+1$, então

$$\left| \int_b^{b+\epsilon} Y(t) PY^{-1}(s) f(s) ds \right| \leq \left| [Y(t) PY^{-1}(s)] \int_b^s f(u) du \right|_b^{b+\epsilon}$$

$$+ \int_b^{b+\epsilon} |Y(t) PY^{-1}(s)| |B(s)| \left| \int_b^s f(u) du \right| ds$$

$$\leq Mr[e^{-2\alpha(t-b)}e^{\beta(b-\tau)} + 2N \int_b^{b+\epsilon} e^{-2\alpha(t-s)}e^{\beta(s-\tau)}ds$$

$$= Mr[e^{-\alpha(t-b)}e^{\beta(b-\tau)} + 2N \int_b^{b+\epsilon} e^{(2\alpha+\beta)(s-\tau)}ds$$

Fazendo $b = \tau + j - 1$ e $\epsilon = 1$, depois $b = \tau + m$ e $b + \epsilon = t$

teremos

$$\left| \int_{\tau}^t Y(t) P Y^{-1}(s) f(s) ds \right| \leq M r e^{-\alpha(t-\tau)} \left[\sum_{j=1}^m e^{(2\alpha+\beta)(j-1)} + e^{(2\alpha+\beta)m} \right.$$

$$+ 2N \sum_{j=1}^m \int_{\tau+j-1}^{\tau+j} e^{(2\alpha+\beta)(s-\tau)} ds$$

$$+ 2N \int_{\tau+m}^t e^{(2\alpha+\beta)(s-\tau)} ds]$$

$$= M r e^{-2\alpha(t-\tau)} \left[\sum_{j=1}^m e^{(2\alpha+\beta)j} \right.$$

$$+ 2N \int_{\tau}^t e^{(2\alpha+\beta)(s-\tau)} ds]$$

$$\leq M r e^{\beta(t-\tau)} \{ [1 - e^{-(2\alpha+\beta)}]^{-1}$$

$$+ 2N(2\alpha+\beta)^{-1} \}$$

$$\leq 2MrN\gamma e^{\beta(t-\tau)},$$

desde que $0 < \beta < \alpha$, implica que $[1 - e^{-(2\alpha + \beta)}]^{-1} \leq (1 - e^{-2\alpha})^{-1}$.

Então

$$|y(t)| \leq 8MNr\gamma e^{\beta(t-\tau)}$$

e portanto,

$$\|y\| \leq 8MNr\gamma.$$

□

Os dois próximos resultados tem um caráter meramente técnico.

Lema 1.8

Se, $\beta > 0$, $u(t)$ uma função continuamente diferenciável, tal que $\|u\| + \|\dot{u}\| < \infty$, e $G(t)$ uma matriz contínua, tal que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} G(s) ds \right| \leq p \quad \text{para } |t_2 - t_1| \leq 1;$$

então a função

$$u(t) = \int_{\tau}^t G(s) u(s) ds$$

satisfaz

$$\|u\| \leq p-H[\|u\| + \|\dot{u}\|],$$

onde $H = H(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}$.

Demonstração

Vamos pensar somente no caso $t > \tau$. Seja m o único número inteiro positivo tal que $\tau + m \leq t \leq \tau + m + 1$, então

$$\int_{\tau}^t G(s)u(s)ds = \sum_{j=1}^m \int_{\tau+j-1}^{\tau+j} G(s)u(s)ds + \int_{\tau+m}^t G(s)u(s)ds.$$

Seja $\varepsilon \in (0,1]$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+\varepsilon} G(s)u(s)ds \right| &= \left| \int_a^{a+\varepsilon} u(s) \left(- \int_s^{a+\varepsilon} G(\lambda)d\lambda \right)' ds \right| \\ &\leq \left| \int_a^{a+\varepsilon} G(\lambda)d\lambda \right| |u(a)| + \int_a^{a+\varepsilon} \left| \int_s^{a+\varepsilon} G(\lambda)d\lambda \right| |\dot{u}(s)| ds \\ &\leq p|u(a)| + p \int_a^{a+\varepsilon} |\dot{u}(s)| ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon = 1$, $a = \tau + j - 1$, e usando o Lema 1.3 teremos,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau}^t G(s)u(s)ds \right| &\leq p \left[\sum_{j=1}^m |u(\tau+j-1)| + |u(\tau+m)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \int_{\tau+j-1}^{\tau+j} |\dot{u}(s)| ds + \int_{\tau+m}^t |\dot{u}(s)| ds \right] \\ &= p \left[\sum_{j=0}^m |u(\tau+j)| + \int_{\tau}^t |u(s)| ds \right] \\ &\leq p \left[\|u\| \sum_{j=1}^m e^{\beta j} + \|\dot{u}\| \int_{\tau}^t e^{\beta(s-\tau)} ds \right] \end{aligned}$$

$$\leq p \|u\| e^{\beta m} e^{\beta} (e^{\beta} - 1)^{-1} + p \beta^{-1} \|\dot{u}\| e^{\beta(t-\tau)}$$

$$\leq p H_1 [\|u\| + \|\dot{u}\|] e^{+\beta(t-\tau)}.$$

Para $t < \epsilon$, a prova é completamente análoga. Portanto

$$\|u\| \leq p H_1 [\|u\| + \|\dot{u}\|].$$

Lema 1.9

Se $\beta > 0$, $u(t)$ é continuamente diferenciável tal que $\|u\| + \|\dot{u}\| < \infty$ e $G(t)$ é uma matriz contínua, tal que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} G(s) ds \right| \leq p \quad \text{para} \quad |t_2 - t_1| \leq 1.$$

Então,

$$\left| \int_t^{t+h} G(s) u(s) ds \right| \leq p \beta^{-1} (e^{\beta} - 1) (\|u\| + \|\dot{u}\|) e^{\beta|t-\tau|}$$

para $|h| < 1$, e se $\tau \leq t$, $h > 0$; e se $\tau \geq t$, $h < 0$.

Demonstração

Suponhamos $t > \tau$. Então

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} G(s) u(s) ds \right| &\leq \left| \int_t^{t+h} G(u) du \right| \|u(t+h)\| \\ &+ \int_t^{t+h} \left| \int_t^s G(u) du \right| \cdot e^{\beta(s-\tau)} \|\dot{u}\| ds \\ &\leq p \cdot e^{\beta h} \|u\| e^{\beta(t-\tau)} + p \int_t^{t+h} e^{\beta(s-\tau)} ds \|\dot{u}\| \end{aligned}$$

$$\leq p\beta^{-1}(e^{\beta}-1)(\|u\|+\|\dot{u}\|)e^{\beta(t-\tau)}.$$

Portanto

$$\left| \int_t^{t+h} G(s)u(s)ds \right| \leq p\beta^{-1}(e^{\beta}-1)(\|u\|+\|\dot{u}\|)e^{\beta(t-s)}.$$

Lema 1.10

Suponhamos que a equação (1.1) possui uma dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente α . Seja F função contínua de $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^n$, com valores em $\mathbb{R}^m$. Então, se existe $\gamma > 0$ tal que

$$|F(t,y)| < \gamma|y|,$$

onde $\theta = \gamma K\alpha^{-1} < \frac{1}{4}$, toda solução limitada de

$$y = A(t)y + F(t,y)$$

tal que $|y(t)| < C$ para todo $t \geq t_0$, satisfaz

$$|y(t)| \leq (1-\theta)^{-1}Ke^{-\delta(t-s)}|y(s)|, \text{ para } t \geq s \geq t_0,$$

onde $\delta = \alpha - (1-\theta)^{-1}\gamma K$.

Este resultado está provado em [2] página 80.

Neste capítulo, as nossas atenções estarão voltadas para o sistema de equações diferenciais,

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = A(t, x)y + g(t, x, y), \end{cases}$$

com o objetivo de obter condições para a existência de uma variedade integral, numa vizinhança de $\{(x, y), y=0\}$. Será desenvolvido um método direto que opera com a solução individualmente.

Para que este objetivo seja atingido é necessário dar uma definição precisa de variedade integral, bem como selecionar algumas hipóteses sobre, as funções em questão, e a equação diferencial,

$$(2.2) \quad \dot{y} = A(t, x)y$$

Definição 2.1

Um conjunto S em um (z, t) - espaço, é uma variedade integral de um sistema de equações diferenciais $\dot{z} = Z(z, t)$, se para todo ponto P em S , a solução $z(t)$ da equação passando por P é tal que $(z(t), t)$ está em S para todo t no intervalo de definição da solução $z(t)$.

Sejam $f(t, x, y), g(t, x, y)$, funções contínuas de $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, e com derivadas parciais de primeira ordem em relação a x e y , $A(t, x)$ uma função matricial $n \times n$ contínua de $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, satisfazendo as seguintes hipóteses.

H1 - A equação (2.2) possui uma dicotomia exponencial, com projeção P , constante K e expoente 4α , qualquer que seja a função continuamente diferenciável $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, $\max \{ \|x\|, \|\dot{x}\| \} < \infty$, e as constante K e α independem da função x .

H2 - Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ existem, uma constante $L \geq 0$ e uma função $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, satisfazendo

$$0 \leq \gamma(|x_1 - x_2|) \leq L, \quad \lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow 0} \gamma(|x_1 - x_2|) = 0$$

tal que,

$$|A(t, x_1) - A(t, x_2)| \leq \gamma(|x_1 - x_2|) |x_1 - x_2|$$

H3 - Para todo $t \in \mathbb{R}$, $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, existem constantes $L, N \geq 1$, tal que

$$\max \{ |f(t, x, y)|; |g(t, x, y)|; |f_x(t, x, y)|; |A(t, x)| \} \leq N$$

$$|f_x(t, x_1, y_1) - f_x(t, x_2, y_2)| \leq L[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$$

e as mesmas desigualdades envolvendo f_x , valem para f_y, g_x e g_y .

H4 - Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $|t_1 - t_2| \leq 1$, existe $q \geq 0$ tal que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} g(t, x, 0) dt \right| \leq q$$

e a mesma desigualdade vale para f_x, g_x, g_y .

A luz destas hipóteses, podemos provar o resultado que estabelece uma variedade integral para o sistema (2.1). Além disso são obtidas propriedades de suavidade da variedade integral.

Teorema 2.1

Suponhamos que H_1, H_2, H_3, H_4 estejam satisfeitas. Para cada β ($0 < \beta < \frac{1}{2}\alpha$) existe $\mu_0 = \mu_0(N, K, L, \alpha, \beta)$ tal que se $\mu < \mu_0$, e se $q < q_0(N, K, L, \alpha, \beta, \mu)$, então existe uma função diferenciável $V: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que,

$$S = \{ (\tau, \xi, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^n, y = V(\tau, \xi) \}$$

é uma variedade integral para o sistema (2.1), e S é o maior conjunto invariante para o sistema (2.1) no conjunto

$$\{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n ; |y(t)| \leq \mu\}$$

Além disso estão satisfeitas as desigualdades,

$$\begin{aligned} (a) \quad & |v(t, x_1)| \leq \mu, \\ (b) \quad & |v_x(t, x)| \leq 2C^{-1}, \\ (2.3) \quad (c) \quad & |v_x(t, x_1) - v_x(t, x_2)| \leq D|x_1 - x_2|, \\ (d) \quad & |v_t(t, x_1) - v_t(t, x_2)| \leq (D+3)N|x_1 - x_2|, \\ (e) \quad & |v_t(t, x)| \leq (\mu+2)N, \end{aligned}$$

O Teorema 2.1 é uma consequência do seguinte resultado.

Teorema 2.2

Suponhamos que H_1, H_2, H_3 e H_4 estejam satisfeitas. Para cada β ($0 < \beta < \frac{1}{2}\alpha$), existe uma constante $\mu_0 = \mu_0(N, K, L, \alpha, \beta)$ tal que, se $\mu < \mu_0$ e se $q < q_0(N, K, L, \alpha, \beta, \mu)$, então o sistema (2.1) tem uma única solução $x^*(t) = x^*(t, \xi, \tau)$, $y^*(t) = y^*(t, \xi, \tau)$ para o qual

$$(2.4) \quad x^*(\tau) = \xi, \quad |y^*(t)| < \mu \quad \text{para todo } -\infty < t < \infty.$$

Além disso as derivadas parciais x_ξ^*, y_ξ^* existem e satisfazem

$$\begin{aligned} (a) \quad & |x_\xi^*(t, \xi, \tau)| \leq 2e^{\beta|t-\tau|}, \\ (b) \quad & |y_\xi^*(t, \xi, \tau)| \leq 2C^{-1}e^{\beta|t-\tau|} \\ (2.5) \quad (c) \quad & |x_\xi^*(t, \xi_1, \tau) - x_\xi^*(t, \xi_2, \tau)| \leq CD|\xi_1 - \xi_2|e^{2\beta|t-\tau|} \\ (d) \quad & |y_\xi^*(t, \xi_1, \tau) - y_\xi^*(t, \xi_2, \tau)| \leq D|\xi_1 - \xi_2|e^{2\beta|t-\tau|} \end{aligned}$$

$$(e) \quad |x^*(t, \xi_1, \tau) - x^*(t, \xi_2, \tau)| \leq 2|\xi_1 - \xi_2| e^{\beta|t-\tau|}$$

(2.5)

$$(f) \quad |y^*(t, \xi_1, \tau) - y^*(t, \xi_2, \tau)| \leq 2C^{-1}|\xi_1 - \xi_2| e^{\beta|t-\tau|}$$

onde $C = 4N(1-e^{-\beta})^{-1}$ e $D = 4L(N^{-1} + 4\alpha^{-1}M)$.

Aqui $\delta = \delta(K, N, \alpha) > 0$, $M = M(K) \geq 1$ estão definidos no Lema 1.5.

A demonstração desse resultado será desenvolvida através de alguns Lemas, ainda neste capítulo. Vamos provar agora o Teorema 2.1.

Seja $v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função dada por

$$(2.6) \quad v(\tau, \xi) = \bar{y}^*(\tau, \xi, \tau).$$

Segue trivialmente do Teorema 2.2, a existência e continuidade de v_ξ , bem como as desigualdades, (2.3a), (2.3b), (2.3c).

Mostremos agora que existe derivada parcial de v em relação a τ , e v é uma solução da equação diferencial parcial

$$(2.7) \quad v_\tau + v_\xi f(\tau, \xi, v) = A(\tau, \xi)v + g(\tau, \xi, v).$$

Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixadas, e $h \in \mathbb{R}$ pequeno.

Então existem $\xi_1 = \xi_1(h) \in \mathbb{R}^m$ e $\xi_2 = \xi_2(h) \in \mathbb{R}^n$ tais que,

$$\begin{aligned} x^*(\tau, \xi, \tau+h) - \xi &= - \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x^*(s, \xi, \tau+h), y^*(s, \xi, \tau+h)) ds \\ &= - \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x^*(s, \xi, \tau) + h \cdot \xi_1, y^*(s, \xi, \tau) + h \cdot \xi_2) ds \\ &= - \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x^*(s, \xi, \tau), y^*(s, \xi, \tau)) ds + O(h^2) \\ &\quad + \int_{\tau}^{\tau+h} [f_x, f_y](s, x^*(s, \xi, \tau), y^*(s, \xi, \tau)) \cdot (\xi_1, \xi_2) h ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x^*(s, \xi, \tau), y^*(s, \xi, \tau)) ds + O(h^2) \\
 &= - \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x^*(\tau, \xi, \tau), y^*(\tau, \xi, \tau)) ds + O(h^2) \\
 &= -f(\tau, \xi, v(\tau, \xi))h + o(|h|).
 \end{aligned}$$

desde que a função

$$\Gamma(t) = \int_{\tau}^t f(s, x^*(\tau, \xi, \tau), y^*(\tau, \xi, \tau)) ds + O(h^2),$$

é diferenciável e

$$\Gamma'(\tau)h = \Gamma(\tau+h) - \Gamma(\tau) - o(|h|).$$

Fixado arbitrariamente $t \in \mathbb{R}$, temos

$$x^*(t, \tilde{\xi}, \tau) = x^*(t, \xi, \tau) + x_{\xi}^*(t, \xi, \tau)(\tilde{\xi} - \xi) + o(|\tilde{\xi} - \xi|^2).$$

Então tomando $\tilde{\xi} = x^*(\tau, \xi, \tau+h)$, teremos

$$\begin{aligned}
 x^*(t, \xi, \tau+h) &= x^*(t, \tilde{\xi}, \tau) \\
 &= x^*(t, \xi, \tau) + x_{\xi}^*(t, \xi, \tau)(\tilde{\xi} - \xi) + o(|\tilde{\xi} - \xi|^2) \\
 &= x^*(t, \xi, \tau) - x_{\xi}^*(t, \xi, \tau)f(\tau, \xi, v(\tau, \xi))h + o(|h|),
 \end{aligned}$$

portanto x_{τ}^* existe e

$$x_{\tau}^*(t, \xi, \tau) = -x_{\xi}^*(t, \xi, \tau) \cdot f(\tau, \xi, v(\tau, \xi)).$$

Segue da unicidade de solução assegurada no Teorema 2.2 que, dado $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$,

$$x^*(t, x^*(s, \xi, \tau), s) = x^*(t, \xi, \tau)$$

$$y^*(t, x^*(s, \xi, \tau), s) = y^*(t, \xi, \tau),$$

fazendo $s=t$,

$$\begin{aligned} v(t, x^*(t, \xi, \tau)) &= y^*(t, x^*(t, \xi, \tau), t) \\ &= y^*(t, x^*(s, \xi, \tau), s). \end{aligned}$$

Portanto

$$(2.8) \quad v(t, x^*(t, \xi, \tau)) = y^*(t, \xi, \tau),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Este fato, e a existência de x_τ^* , implicam que, y_τ^* existe, e mais ainda,

$$y_\tau^*(t, \xi, \tau) = v_\xi(t, x^*(t, \xi, \tau)) \cdot x_\tau^*(t, \xi, \tau),$$

consequentemente v_τ existe e

$$\begin{aligned} v_\tau(\tau, \xi) &= y_\tau^*(\tau) + v_\xi(\tau, x^*(\tau, \xi, \tau)) \cdot x_\tau^*(\tau, \xi, \tau) \\ &= A(\tau, \xi) \cdot v(\tau, \xi) \\ &\quad + g(\tau, \xi, v(\tau, \xi)) - v_\xi(\tau, \xi) f(\tau, \xi, v(\tau, \xi)). \end{aligned}$$

Portanto v é solução da equação diferencial parcial (2,7). Segue trivialmente da expressão de v_τ que

$$(2.3.e) \quad |v_{\tau}(\xi, \tau)| \leq N(\mu+2).$$

Provemos agora que S é uma variedade integral para o sistema (2.1). Para cada $(\tau, \xi, y_0) \in S$ consideremos a solução $x(t) = x(t, \tau, \xi, y_0)$, $y(t) = y(t, \tau, \xi, y_0)$ de (2.1) tal que

$$x(\tau) = \xi, \quad y(\tau) = y_0.$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, as funções

$$\bar{x}(t) = x^*(t, \xi, \tau); \quad \bar{y}(t) = v(t, \bar{x}(t)),$$

são tais que $(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in S$. Também,

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}^*(t, \tau, \xi)$$

$$= f(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = v_t(t, \bar{x}(t)) + v_x(t, \bar{x}(t)) \dot{\bar{x}}(t)$$

$$= A(t, \bar{x}(t))v(t, \bar{x}(t)) + g(t, \bar{x}(t), v(t, \bar{x}(t)))$$

Então $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ é solução de (2.1), além disso é fácil ver que $\bar{x}(\tau) = \xi$, $\bar{y}(\tau) = y_0$. Do teorema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais ordinárias, segue que, $\bar{x}(t) = x(t)$ e $\bar{y}(t) = y(t)$, isto implica em $(t, x(t), y(t)) \in S$ para todo t no intervalo de definição da solução $x(t)$, $y(t)$. Portanto S é uma variedade integral do sistema (2.1).

Seja $x(t)$, $y(t)$ solução do sistema (2.1) tal que $|y(t)| \leq \mu$ e fixemos $t_0 \in \mathbb{R}$, tomemos $\xi = x(t_0)$ e $y_0 = v(t_0, \xi)$. Então $(t_0, \xi, y_0) \in S$, e por (2.8), $v(t, x(t, \xi, t_0)) = y(t, \xi, t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ em particular $y(t_0) = y_0$. De fato

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y(t_0, \xi, t_0) \\ &= v(t_0, x(t_0, \xi, t_0)) \\ &= v(t_0, x(t_0)) \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Então $(t, x(t), y(t)) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto prova que S é o maior conjunto invariante no conjunto

$$\{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; |y(t)| \leq \mu\}.$$

Resta apenas provar que a desigualdade (2.3.d) está satisfeita.

Segue das desigualdades (2.3.a), (2.3.b), (2.3.c), (2.10.a) e (2.10.b) que

$$\begin{aligned} |v_\tau(\tau, \tilde{\xi}) - v_\tau(\tau, \xi)| &\leq |A(\tau, \xi)| |v(\tau, \tilde{\xi}) - v(\tau, \xi)| \\ &\quad + |A(\tau, \tilde{\xi}) - A(\tau, \xi)| |v(\tau, \tilde{\xi})| \\ &\quad + |v_\xi(\tau, \tilde{\xi}) - v_\xi(\tau, \xi)| |f(\tau, \tilde{\xi}, v(\tau, \tilde{\xi}))| \\ &\quad + |v_\xi(\tau, \xi)| |f(\tau, \tilde{\xi}, v(\tau, \tilde{\xi})) - f(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| \\ &\quad + |g(\tau, \tilde{\xi}, v(\tau, \tilde{\xi})) - g(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}N + ND\right) |\tilde{\xi} - \xi| \\ &\quad + \frac{1}{2} |f_y(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| |v(\tau, \tilde{\xi}) - v(\tau, \xi)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} |F(\tau, \xi, v(\tau, \tilde{\xi})) - F(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| \\
 & + \frac{1}{2} |G(\tau, \xi, v(\tau, \tilde{\xi})) - G(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| \\
 & + |g_y(\tau, \xi, v(\tau, \tilde{\xi})) - g_y(\tau, \xi, v(\tau, \xi))| \\
 & \leq \left(\frac{5}{4}N + ND + \mu L\right) |\tilde{\xi} - \xi| \\
 & \leq (D+3)N |\tilde{\xi} - \xi|.
 \end{aligned}$$

Isto completa a prova do Teorema 2.1.

Passemos a prova do Teorema 2.2, e vamos começar enunciando a determinação das constantes μ_0 e q_0 .

Sejam ,

$$v = 8N^{-1} \quad R = 8N\mu\alpha^{-1}e^\alpha,$$

e tomemos $\mu_0 > 0$ de maneira que,

$$\mu_0 L > \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad 32\mu_0 NC(2v+R) \leq 1.$$

Qualquer que seja μ ($0 < \mu < \mu_0$), escolhemos p_0 tal que

$$p_0 < \frac{\delta}{2}, \quad 16N\mu\gamma p_0 \leq \mu, \quad 32p_0 NC(2v+R) \leq 1,$$

onde $\gamma = H(\alpha) = (1-e^{-\alpha})^{-1}$. Então tomamos

$$q_0 = \frac{1}{2} p_0^2 \min\{p_0 + LN^{-1}, (p_0 + N^2)^{-1}\}.$$

Usando a fórmula de Maclaurin podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 f(t, x, y) &= f(t, x, 0) + f_y(t, x, 0)y + F(t, x, y) \\
 (2.9) \quad g(t, x, y) &= g(t, x, 0) + g_y(t, x, 0)y + G(t, x, y)
 \end{aligned}$$

onde $F(t, x, 0) = 0 = G(t, x, 0)$.

Se $\max\{|y_1|, |y_2|, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n\} < \mu$, as F e G satisfazem,

$$(2.10) \quad \begin{aligned} (a) \quad & |F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| \leq 2\mu L[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] \\ (b) \quad & |G(t, x_1, y_1) - G(t, x_2, y_2)| \leq 2\mu L[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] \end{aligned}$$

Vamos provar este fato.

Segue de (2.9) e da desigualdade do valor médio que, para algum $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| &\leq |f_y(t, x_1, \theta y_1) - f_y(t, x_2, \theta y_2)| |y_1| \\ &\quad + |f_y(t, x_1, \theta y_2) \\ &\quad - f_y(t, x_2, \theta y_2)| |y_1 - y_2| \\ &\quad + |f_y(t, x_1, 0) - f_y(t, x_2, 0)| |y_2| \\ &\leq 2\mu L|x_1 - x_2| + 2\mu L\theta|y_1 - y_2| \\ &\leq 2\mu L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

Analogamente prova-se a outra desigualdade.

Para cada β tal que $0 < \beta < \frac{1}{2}\alpha$, seja,

$$\Sigma = \{ (x, y); x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), y \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \text{ com}$$

$$\|x\| + \|\dot{x}\| + \|y\| < \infty \}.$$

Com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, e com a norma

$$|(x, y)| = \|x\| + v\|\dot{x}\| + C\|y\|,$$

o conjunto Σ torna-se um espaço de Banach. Seja F o conjunto dado por,

$$F = \{(x, y) \in \Sigma; |x(t)| \leq N, |y(t)| \leq \mu, \text{ para todo } -\infty < t < \infty\}$$

É fácil ver que F é um conjunto fechado em Σ .

Ainda, para cada $(x, y) \in F$, segue do Lema 1.4 e de $q < q_0$ que,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} g_y(t, x(t), y(t)) dt \right| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} g_y(t, x(t), y(t)) - g_y(t, x(t), 0) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} g_y(t, x(t), 0) dt \right| \\ &\leq L|y(t)| |t_1 - t_2| + p_0 \\ &\leq LM + p_0 \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

para todo $|t_1 - t_2| \leq 1$. Portanto a função

$$B(t) = A(t, x(t)) + g_y(t, x(t), y(t))$$

satisfaz as hipóteses do Lema 1.5, para cada $(x, y) \in F$.

Lema 2.1

A aplicação T , que a cada $(x, y) \in F$ associa $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que,

$$\bar{x}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s), y(s)) ds$$

e $\hat{y}(t)$ é solução da equação diferencial,

$$\dot{y} = [A(t, x(t)) + g_y(t, x(t), 0)]y + h(t)$$

onde ξ é um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^m$, e

$$h(t) = g(t, x(t), 0) + G(t, x(t), y(t))$$

é uma contração e aplica F em F .

Demonstração

Dado $(x, y) \in F$ sejam

$$\hat{x}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s), y(s)) ds$$

e $\hat{y}(t)$ uma solução da equação diferencial

$$\dot{y} = [A(t, x(t)) + g_y(t, x(t), 0)]y + h(t)$$

onde ξ é um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^m$, e

$$\begin{aligned} h(t) &= g(t, x(t), y(t)) - g_y(t, x(t), 0)y(t) \\ &= g(t, x(t), 0) + G(t, x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Desde que, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|t_1 - t_2| \leq 1$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} g(t, x(t), 0) dt \right| \leq p_0,$$

e

$$|G(t, x, y)| \leq \int_0^1 |g_y(t, x, \theta y) - g_y(t, x, 0)| |y| d\theta$$

$$\leq L|y|^2 \int_0^1 \theta d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2} \mu^2 L,$$

segue dos Lemas 1.6 e 1.7, e do princípio da superposição que, $\hat{y}(t)$ é a única solução limitada da equação diferencial,

$$\dot{y} = [A(t, x(t)) + g_y(t, x(t), 0)y + h(t)].$$

Além disso,

$$|\hat{y}(t)| \leq \frac{1}{2} \mu L M \alpha^{-1} + 8 N M \gamma_0$$

$$\leq \mu.$$

Ainda,

$$|\dot{\hat{x}}(t)| = |f(t, x(t), y(t))| \leq N.$$

A unicidade da solução $\hat{y}(t)$ nos dá a boa definição da função T e das duas últimas desigualdades segue que $(\hat{x}, \hat{y}) \in F$.

Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ elementos em F , e

$$(2.11) \quad z(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad , \quad w(t) = y_1(t) - y_2(t).$$

Analogamente,

$$\hat{z}(t) = \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) \quad , \quad \hat{w}(t) = \hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t).$$

Então

$$\hat{z}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x_1(s), y_1(s)) ds - \xi - \int_{\tau}^t f(s, x_2(s), y_2(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\tau}^t [f(s, x_1(s), 0) - f(s, x_2(s), 0)] ds \\
 &+ \int_{\tau}^t [f_y(s, x_1(s), 0) - f_y(t, x_2(s), 0)] (y_1(s) - y_2(s)) ds \\
 &+ \int_{\tau}^t [F(s, x_1(s), y_1(s)) - F(s, x_2(s), y_2(s))] ds \\
 &= J_1 + J_2 + J_3
 \end{aligned}$$

Vamos agora fazer uma estimativa de J_1, J_2, J_3 .

$$\begin{aligned}
 |J_1| &= \left| \int_{\tau}^t [f(s, x_1(s), 0) - f(s, x_2(s), 0)] ds \right| \\
 &= \left| \int_{\tau}^t \int_0^1 f_x(s, x_2(s) + \theta z(s), 0) z(s) d\theta ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 \left| \int_{\tau}^t f_x(s, x_2(s) + \theta z(s), 0) z(s) ds \right| d\theta.
 \end{aligned}$$

Por hipótese

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f_x(s, x_2(s), 0) ds \right| < q_0 \text{ para todo } |t_1 - t_2| \leq 1,$$

e como $|\dot{x}(t)| < N$,

$$|z(t_1) - z(t_2)| \leq 2N|t_1 - t_2|,$$

então pelo Lema 1.4

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f_x(s, x_2(s), 0) ds \right| < p_0, \text{ para todo } |t_1 - t_2| \leq 1.$$

Portanto segue do Lema 1.8 que

$$\left| \int_{\tau}^t f_x(s, x_2(s) + z(s), 0) z(s) ds \right| \leq p_0 H(\|z\| + \|\dot{z}\|) e^{\beta|t-\tau|}$$

onde, $H = H(\beta) = (1 - e^{-\beta})^{-1}$, conseqüentemente

$$|J_1| \leq p_0 H(\|z\| + \|\dot{z}\|) e^{\beta|t-\tau|}$$

Para estimar J_3 usaremos a definição de F e G , (2.10.a) e (2.10.b)

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \left| \int_{\tau}^t [F(s, x(s), y_1(s)) - G(s, x_1(s), y_1(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau}^t 2\mu L[|z(s)| + w(s)] ds \right| \\ &\leq 2\mu L \beta^{-1} [\|z\| + \|w\|] e^{\beta|t-\tau|}. \end{aligned}$$

Então,

$$|\dot{z}(t)| \leq e^{\beta|t-\tau|} H \{ 3\mu L[\|z\| + \|w\|] + p_0[\|z\| + \|\dot{z}\|] + N\|w\| \},$$

e como

$$\dot{z}(t) = f(t, x_1(t), y_1(t)) - f(t, x_2(t), y_2(t)),$$

segue da desigualdade do valor médio que,

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &\leq |f_y(t, x_1(t), y_1(t))| |y_1(t) - y_2(t)| \\ &\quad + |f_x(t, x_2(t), y_2(t))| |x_1(t) - x_2(t)| \\ &\leq N[\|z\| + \|w\|] e^{\beta|t-\tau|}. \end{aligned}$$

Portanto

$$(2.13) \quad \|\dot{\hat{z}}\| \leq [\|z\| + \|w\|].$$

Consideremos a diferença $\hat{w}(t) = \hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)$, que é uma solução da equação diferencial,

$$(2.14) \quad \dot{\hat{w}} = \{A(t, x_1(t)) + g_y(t, x_1(t), 0)\}w + \phi(t) + \psi(t) + \sigma(t),$$

onde

$$\phi(t) = g(t, x_1(t), 0) - g(t, x_2(t), 0),$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= [g_y(t, x_1(t), 0) - g_y(t, x_2(t), 0)] \dot{\hat{y}}_2(t) \\ &\quad + G(t, x_1(t), y_1(t)) - G(t, x_2(t), y_2(t)), \end{aligned}$$

$$\sigma(t) = \{A(t, x_1(t)) - A(t, x_2(t))\} \hat{y}_2(t).$$

Então, por H3 e (2.10.b)

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq \mu L [|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)|] \\ &\quad + 2\mu L [|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)|] \\ &\leq 3\mu L \{ |z(t)| + |w(t)| \}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|\psi\| \leq 3\mu L [\|z\| + \|w\|].$$

Como $|x(t+h)-x(t)| \leq N|h|$ para $|h| < 1$, o Lema 1.4 implica que

$$\left| \int_t^{t+h} g_x(s, x(s), 0) ds \right| \leq p_0$$

Então segue do Lema 1.9 e da fórmula integral de Taylor que,

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} \phi(s) ds \right| &\leq \left| \int_t^{t+h} [g(s, x_1(s), 0) - g(s, x_2(s), 0)] ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t+h} \int_0^1 g_x(s, x_2(s) + \theta z(s), 0) z(s) d\theta ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_t^{t+h} g_x(s, x_2(s) + \theta z(s), 0) z(s) ds d\theta \right| \\ &\leq p_0 \beta^{-1} (e^{-\beta} - 1) [\|z\| + \|\dot{z}\|] e^{\beta|t-\tau|} \end{aligned}$$

Finalmente, por H2

$$|\sigma(t)| \leq \mu L |x_1(t) - x_2(t)|,$$

portanto

$$\|\sigma\| \leq \mu L \|z\|.$$

Com a limitação das funções ψ e σ , as hipóteses do Lema 1.8 estão satisfeitas e com a condição

$$\left| \int_t^{t+h} \phi(s) ds \right| \leq p \beta^{-1} (e^{-\beta} - 1) [\|z\| + \|\dot{z}\|] e^{\beta|t-\tau|}$$

as hipóteses do Lema 1.9 são completadas, então usando isto e o princípio de superposição teremos que, $\hat{w}$ é a única solução da equação diferencial (2.13), e

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad \|\hat{w}\| &\leq 2(2\alpha - \beta^{-1})M \cdot 3\mu L(\|z\| + \|w\|) + 8MN\gamma p_0 \beta^{-1}(e^\beta - 1)(\|z\| - \|\dot{z}\|) \\
 &\quad + 2(2\alpha - \beta^{-1})M\mu L\|z\| \\
 &\leq 6\alpha^{-1}\mu LM(\|z\| + \|w\|) + p_0 R(\|z\| + \|\dot{z}\|) + 2\alpha^{-1}\mu LM\|z\|,
 \end{aligned}$$

desde que $(2\alpha^{-1} - \beta^{-1}) \leq \alpha^{-1}$ e $\gamma\beta^{-1}(e^\beta - 1) \leq \alpha^{-1} \cdot e^\alpha$. Agora por (2.12), (2.13) e (2,15) obtemos

$$\begin{aligned}
 |(\hat{z}, \hat{w})| &\leq \|\hat{z}\| + \nu \|\dot{\hat{z}}\| + C\|z\| \\
 &\leq H\{2\mu L(\|z\| + \|w\|) + p_0 R(\|z\| + \|\dot{z}\|) + N\|w\|\} \\
 &\quad + \nu N(\|z\| + \|w\|) \\
 &\quad + 6C\alpha^{-1}\mu LM(\|z\| + \|w\|) + p_0 CR(\|z\| + \|\dot{z}\|) \\
 &\quad + 2\alpha^{-1}\mu LM\|z\| \\
 &= 3\mu L(H + 2\alpha^{-1}MC)(\|z\| + \|w\|) + NH\|w\| + \nu N(\|z\| + \|w\|) \\
 &\quad + p_0(H + CR)(\|z\| + \|\dot{z}\|) + 2\alpha^{-1}L\mu M\|z\| \\
 &\leq 3\mu L(H + 2\alpha^{-1}MC + \frac{2}{3}\alpha^{-1}M)(\|z\| + \|w\|) \\
 &\quad + NH\|w\| + \nu N(\|z\| + \|w\|) + p_0(H + CR)(\|z\| + \|\dot{z}\|) \\
 &\leq \frac{1}{8}(\|z\| + \|w\|) + \frac{C}{4}\|w\| + \frac{1}{8}(\|z\| + \|w\|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{32} (\|z\| + \|\dot{z}\|) \\
 & \leq \frac{9}{32} (\|z\| + \frac{1}{4} \|\dot{z}\| + \frac{1}{4} (C+1) \|w\|) \\
 & \leq \frac{1}{2} [\|z\| + \|\dot{z}\| + \frac{1}{4} C \|w\|] \\
 & \leq \frac{1}{2} |(z, w)|
 \end{aligned}$$

Isto prova o Lema 2.1.

Desse Lema segue a unicidade da solução, $x^*(t)$, $y^*(t)$ do sistema (2.1) que satisfaz (2.4).

Consideremos (x_1, x_2) , (y_1, y_2) pontos fixos de T quando ξ é substituído por ξ_1 e ξ_2 , respectivamente.

Se colocarmos

$$(2.11) \quad z(t) = x_1(t) - x_2(t) ; w(t) = y_1(t) - y_2(t),$$

teremos

$$z(t) = \xi_1 - \xi_2 + \int_{\tau}^t [f(s, x_1(s), y_1(s)) - f(s, x_2(s), y_2(s))] ds,$$

e $w(t)$ a única solução da equação (2.14) com $y(t) = \hat{y}(t)$. Com o mesmo argumento usado na prova do Lema 2.1, obtemos

$$|(z, w)| \leq |\xi_1 - \xi_2| + \frac{1}{2} |(z, w)|$$

portanto

$$|(z, w)| \leq \frac{1}{2} |\xi_1 - \xi_2|,$$

em particular

$$(2.5.e) \quad |x(t, \xi_1, \tau) - x(t, \xi_2, \tau)| \leq \|z\| e^{\beta|t-\tau|} \\ \leq |(z, w)| \leq 2|\xi_1 - \xi_2| e^{\beta|t-\tau|}$$

$$(2.5.f) \quad |y(t, \xi_1, \tau) - x(t, \xi_2, \tau)| \leq \|z\| e^{\beta|t-\tau|} \\ \leq |(z, w)| \leq 2C^{-1}|\xi_1 - \xi_2| e^{\beta|t-\tau|}$$

Analogamente, sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos fixos de T , quando τ em (2.4) é substituído por $\tau+h$ e τ respectivamente. Definindo $z(t)$ e $w(t)$ como em (2.11) teremos

$$z(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x_1(s), y_1(s)) ds - \xi - \int_{\tau}^t f(s, x_2(s), y_2(s)) ds \\ = \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x_1(s), y_1(s)) ds \\ + \int_{\tau}^t [f(s, x_1(s), y_1(s)) - f(s, x_2(s), y_2(s))] ds,$$

e $w(t)$ é a única solução limitada da equação (2.14) com $\tilde{y}_2(t) = y(t)$. Além disso

$$|(z, w)| \leq \left| \int_{\tau}^{\tau+h} f(s, x_1(s), y_1(s)) ds + \frac{1}{2} |(z, w)| \right|,$$

então

$$|z, w| \leq 2N|h|.$$

Em particular,

$$(2.16) \quad \begin{aligned} (a) \quad & |x(t, \xi, \tau+h) - x(t, \xi, \tau)| \leq \|z\| e^{\beta|t-\tau|} \leq 2N|h|e^{\beta|t-\tau|} \\ (b) \quad & |y(t, \xi, \tau+h) - y(t, \xi, \tau)| \leq \|w\| e^{\beta|t-\tau|} \leq \frac{1}{2}(1-e^{-\beta})|h|e^{\beta|t-\tau|}. \end{aligned}$$

As condições do Teorema 2.2 obtidas até agora, são suficientes para assegurar a existência de uma variedade integral para o sistema (2.1). Vamos encerrar esta prova, mostrando que existem as derivadas parciais x_ξ , y_ξ , as quais, como vimos na prova do Teorema 2.1, trazem como consequência, propriedades de suavidade da variedade integral.

Lema 2.3

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F_1(t)x + F_2(t)y + \eta(t) \\ \dot{y} &= G_1(t)x + G_2(t)y + \zeta(t), \end{aligned}$$

onde, F_k , G_k ($k = 1, 2$) são funções matriciais contínuas de t em $\mathbb{R}$,

$$\max \{ \|F_1(t)\|, \|F_2(t)\|, \|G_1(t)\| \} \leq N, \|G_2(t)\| \leq 2N; \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e as funções η, ζ são contínuas e $\max \{ \|\eta\|, \|\zeta\| \} < \infty$.

Suponhamos ainda que,

$$\max \left\{ \left| \int_{t_2}^{t_1} F_1(s) ds \right|, \left| \int_{t_2}^{t_1} G_1(s) ds \right| \right\} \leq r \text{ para todo } |t_1 - t_2| \leq 1,$$

e a equação linear

$$(2.18) \quad y = G_2(t)y$$

tem dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 4α . Se r é tal que

$$(2.19) \quad |6NC(2N+R)| \leq 1,$$

então o sistema (2.17) tem uma única solução $(x(t), y(t))$ em Σ tal que $x(\tau) = \xi$.

Demonstração

Para cada $(x, y) \in \Sigma$ consideremos

$$\hat{x}(t) = \xi + \int_{\tau}^t \{F_1(s)x(s) + F_2(s)y(s) + n(s)\} ds.$$

e $\hat{y}(t)$ a única solução limitada da equação

$$\dot{y} = G_2(t)y + G_1(t)x(t) + \zeta(t).$$

Isto define uma aplicação $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$. Reeditando a prova do Lema 2.2, concluímos que aplicação T assim definida é uma contração. Isto completa a prova.

Seja (x_0, y_0) o ponto fixo de T , então

$$x_0(t) = \xi + \int_{\tau}^t [F_1(s)x_0(s) + F_2(s)y_0(s) + n(s)] ds$$

e $y_0(t)$ é a única solução limitada da equação

$$\dot{y} = G_2(t)y + G_1(t)x_0(t) + \zeta(t).$$

usando o Lema 1.8 teremos

$$|x_0(t)| \leq |\xi| + \left| \int_{\tau}^t F_1(s)x_0(s) ds \right| + \left| \int_{\tau}^t F_2(s) \|y_0(s)\| ds \right| + \left| \int_{\tau}^t n(s) ds \right|$$

$$\leq |\xi| + rH[(\|x_0\| + \|\dot{x}_0\|) + N\beta^{-1}\|y_0\| + \|y\|]e^{\beta|t-\tau|}$$

Assim,

$$|\dot{x}_0(t)| \leq N[(\|x_0\| + \|y_0\|)\|y\|]e^{\beta|t-\tau|}.$$

Finalmente, usando os Lemas 1.6, 1.7 e 1.8 e o princípio da superposição, teremos

$$\|y_0\| \leq rR(\|x_0\| + \|\dot{x}_0\| + 2\alpha^{-1}M\|\zeta\|),$$

juntando as duas últimas desigualdades concluímos que

$$\begin{aligned} |(x_0, y_0)| &\leq |\xi| + rH(\|x_0\| + \|\dot{x}_0\| + N\beta^{-1}\|y_0\| + H\|\eta\| + \\ &\quad vN\|x_0\| + vN\|y_0\| + Hv\|\eta\| + CrR(\|x_0\| + \|\dot{x}_0\|) + \\ &\quad 2\alpha^{-1}MC\|\zeta\|). \end{aligned}$$

portanto

$$(2.20) \quad |(x_0, y_0)| \leq 2|\xi| + C(N^{-1}\|\eta\| + 4\alpha^{-1}M\|\zeta\|).$$

Se

$$\begin{aligned} F_1(t) &= f_x(t, x(t, \xi, \tau), y(t, \xi, \tau)), \\ F_2(t) &= f_y(t, x(t, \xi, \tau), y(t, \xi, \tau)), \\ (2.21) \quad G_1(t) &= g_x(t, x(t, \xi, \tau), y(t, \xi, \tau)), \\ G_2(t) &= A(t, x(t, \xi, \tau) + g_y(t, x(t, \xi, \tau), y(t, \xi, \tau)), \end{aligned}$$

então podemos tomar $r = p_0 + \mu L$ e a desigualdade (2.19) continua

válida. Além disso, (2.18) possui dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 4α . Seja $X_0(t)$, $Y_0(t)$ solução correspondente em Σ do sistema

$$\dot{X} = F_1(t)X + F_2(t)Y,$$

$$\dot{Y} = G_1(t)X + G_2(t)Y,$$

tal que $X_0(\tau) = I$. Usando a desigualdade (2.20) teremos

$$(2.22) \quad \|X_0\| + C\|Y_0\| \leq 2.$$

sejam

$$x_1(t) = x(t, \tilde{\xi}, \tau) \quad , \quad y_1(t) = y(t, \tilde{\xi}, \tau),$$

$$x_2(t) = x(t, \xi, \tau) \quad , \quad y_2(t) = y(t, \xi, \tau),$$

$z(t)$, $w(t)$ definidos como em (2.11) e

$$\phi(t) = z(t) - X_0(t)(\tilde{\xi} - \xi) \quad , \quad \psi(t) = w(t) - Y_0(t)(\tilde{\xi} - \xi)$$

é fácil ver que,

$$\dot{\phi} = F_1(t)\phi + F_2(t)\psi + n(t)$$

$$\dot{\psi} = G_1(t)\phi + G_2(t)\psi + \zeta(t)$$

onde

$$n(t) = f(t, x_1(t), y_1(t)) - f(t, x_2(t), y_2(t)) + F_1(t)z(t) +$$

$$F_2(t)w(t).$$

e

$$\begin{aligned} \zeta(t) = & g(t, x_1(t), y_1(t)) - g(t, x_2(t), y_2(t)) - \\ & g_x(t, x_1(t), y_1(t))z(t) - g_y(t, x_1(t), y_2(t))w(t) + \\ & [A(t, x_1(t)) - A(t, x_2(t))]y_2(t). \end{aligned}$$

Então usando a fórmula integral de Taylor teremos,

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \int_0^1 [f_x, f_y][t, x_2(t), y_2(t)] + \lambda(0, z(t), w(t))(z(t), w(t)) d\lambda \\ & + F_2(t)z(t) + F_2(t)w(t) \\ = & \int_0^1 \{f_x(t, x_2(t) + \lambda z(t), y_2(t) + \lambda w(t)) - f_x(t, x_2(t), y_2(t))\} d\lambda \\ & + \int_0^1 \{f_y(t, x_2(t) + \lambda z(t), y_2(t) + \lambda w(t)) - f_y(t, x_2(t), y_2(t))\} d\lambda \end{aligned}$$

Portanto

$$|\eta(t)| \leq L[|z(t)| + |w(t)|]^2.$$

Analogamente

$$|\zeta(t)| \leq L[|z(t)| + |w(t)|]^2 + M_Y(|z(t)| \cdot |z(t)|).$$

Portanto usando as condições (2.5.e), (2.5.f) e a norma

$$\|f\|_2 \leq \sup_{-\infty < t < \infty} \{e^{-2\beta|t-\tau|} |f(t)|\}$$

teremos,

$$\|\eta\|_2 \leq 4L|\tilde{\xi} - \xi|^2$$

$$\|\zeta\|_2 \leq 4L|\tilde{\xi} - \xi|^2 + M\gamma(|\tilde{\xi} - \xi|)|\tilde{\xi} - \xi|.$$

Como $H_2 = H(2\beta) \leq H$, $C_2 = 4NH_2 \leq C$ e $\phi(\tau) = 0$, segue da desigualdade (2.20) que

$$\|\phi\|_2 \leq 4LC_2[N^{-1} + 4\alpha^{-1}M]|\tilde{\xi} - \xi|^2$$

$$\|\eta\|_2 \leq 4LC_2[N^{-1} + 4\alpha^{-1}M]|\tilde{\xi} - \xi|^2 + 2\mu\alpha^{-1}MC_2\gamma(|\tilde{\xi} - \xi|)|\tilde{\xi} - \xi|.$$

Então pelas definições de ϕ e ψ ,

$$|x(t, \tilde{\xi}, \tau) - x(t, \xi, \tau) - X_0(t)(\tilde{\xi} - \xi)| \leq CD|\tilde{\xi} - \xi|^2 e^{2\beta|t-\tau|}$$

$$|y(t, \tilde{\xi}, \tau) - y(t, \xi, \tau) - Y_0(t)(\tilde{\xi} - \xi)| \leq [D|\tilde{\xi} - \xi|^2 +$$

$$\theta\gamma(|\tilde{\xi} - \xi|)|\tilde{\xi} - \xi|]e^{2\beta|t-\tau|}$$

onde $D = 4L(N^{-1} + 4\alpha^{-1}M)$ e $\theta = 2\alpha^{-1}\mu MC_2$. Portanto existem as derivadas parciais $x_{\xi}(t, \xi, \tau)$ e $y_{\xi}(t, \xi, \tau)$ e são iguais a $X_0(t), Y_0(t)$ respectivamente.

Mostremos a seguir que, as derivadas parciais x_{ξ} e y_{ξ} satisfazem uma condição de Lipschitz.

Sejam

$$\tilde{X}_0(t) = x_{\xi}(t, \tilde{\xi}, \tau), \quad \tilde{Y}_0(t) = y_{\xi}(t, \tilde{\xi}, \tau),$$

então $\tilde{X}_0(t), \tilde{Y}_0(t)$ e solução em Σ do sistema

$$\dot{X} = \tilde{F}_1(t)X + \tilde{F}_2(t)Y$$

$$\dot{Y} = \tilde{G}_1(t)X + \tilde{G}_2(t)Y$$

com $\tilde{X}_0(\tau) = I$. É fácil ver que $Z(t) = X_0(t) - \tilde{X}_0(t)$, $W(t) = Y_0(t) - \tilde{Y}_0(t)$ é solução do sistema

$$\dot{Z} = F_1(t)Z + F_2(t)W + \eta(t)$$

$$\dot{W} = G_1(t)Z + G_2(t)W + \zeta(t)$$

onde

$$\eta(t) = (F_1(t) - \tilde{F}(t))\tilde{X}_0(t) + (F_2(t) - \tilde{F}_2(t))\tilde{Y}_0(t)$$

$$\zeta(t) = (G_1(t) - \tilde{G}_1(t))\tilde{X}_0(t) + (G_2(t) - \tilde{G}_2(t))\tilde{Y}_0(t).$$

Então,

$$|\eta(t)|, |\zeta(t)| \leq L[2|z(t)| + |w(t)|][|\tilde{X}_0(t)| + |\tilde{Y}_0(t)|]$$

e como $C \geq 0$, segue de (2.5.e), (2.5.f) e (2.21) que,

$$\|\eta\|_2 \|\zeta\|_2 \leq 6|\tilde{\xi} - \xi|.$$

Desde que $Z(\tau) = 0$, segue da desigualdade de (2.22) que,

$$\|z\|_2 + C_2 \|w\|_2 \leq C_2 [N^{-1} \|\eta\|_2 + 4\alpha^{-1} M \|\zeta\|_2]$$

$$\leq 8LC_2 [N^{-1} + 4\alpha^{-1} M] |\tilde{\xi} - \xi|$$

$$\leq 2C_2 D |\tilde{\xi} - \xi|.$$

Portanto

$$(c) |x_{\xi}(t, \tilde{\xi}, \tau) - x_{\xi}(t, \xi, \tau)| \leq CD |\tilde{\xi} - \xi| e^{2\beta|t-\tau|}$$

(2.5)

$$(d) |y_{\xi}(t, \tilde{\xi}, \tau) - y_{\xi}(t, \xi, \tau)| \leq D |\tilde{\xi} - \xi| e^{2\beta|t-\tau|}$$

Observação 2.1: Sob as hipóteses do Teorema 2.1, vale a seguinte desigualdade.

$$|v_{\xi}(\tau+h, \xi) - v_{\xi}(t, \xi)| \leq (D+4e^{\beta})N|h|.$$

Demonstração

Para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $h > 0$,

$$\begin{aligned} v_{\xi}(\tau+h, \xi) - v_{\xi}(\tau, \xi) &= y_{\xi}^*(\tau+h, \xi, \tau+h) - y_{\xi}^*(\tau, \xi, \tau+h) \\ &+ y_{\xi}^*(\tau, \xi, \tau+h) - y_{\xi}(\tau, \xi, \tau). \end{aligned}$$

usando (2.21) e a equação diferencial satisfeita por y_{ξ} , temos para $0 \leq h \leq 1$,

$$\begin{aligned} |y_{\xi}(\tau+h, \xi, \tau+h) - y_{\xi}(\tau, \xi, \tau+h)| &\leq N \int_{\tau}^{\tau+h} |x_{\xi}(t, \xi, \tau+h)| dt \\ &\leq 2N \int_{\tau}^{\tau+h} e^{\beta(\tau+h-t)} dt \\ &\leq 2N e^{\beta \tau} (e^{\beta h} - 1) \\ &\leq 2N e^{\beta} h. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |v_{\xi}(\tau+h, \xi) - v_{\xi}(\tau, \xi)| &\leq (2N e^{\beta} - 2(e^{\beta} - 1) + ND) |h| \\ &\leq (D + 4e^{\beta}) N |h| \end{aligned}$$

Esta desigualdade é facilmente obtida para quais quer valores de h .

Observação 2.2: A função $v(\tau, \xi)$ possui derivada de primeira ordem contínua.

Demonstração:

A continuidade de v_ξ decorre imediatamente das duas condições de Lipschitz por ele satisfeita, e a continuidade de v_τ , segue do fato que v é solução da equação diferencial parcial (2.7).

O próximo resultado fecha este capítulo respondendo a seguinte pergunta: Tomando a função $t \rightarrow (A(t,x), f(t,x,y), g(t,x,y))$, p - periódica ($p > 0$), teríamos a mesma propriedade para a variedade de integral?

Teorema 2.3

Consideremos a aplicação

$$\psi(t,x) = (A(t,x), f(t,x,y), g(t,x,y)).$$

(i) Se ψ é p - periódica em t , ($p > 0$), então a aplicação $v(\tau, \xi)$ é p - periódica em τ .

(ii) Se $\psi(t, x+w) = \psi(t, x)$ para algum $w \in \mathbb{R}$ então

$$v(\tau, \xi+w) = v(\tau, \xi).$$

Demonstração

(i) O Teorema 2.2 garante que,

$$(x^*(t), y^*(t)) = (x^*(\tau, \xi)(t), y^*(\tau, \xi)(t))$$

é a única solução de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y) \\ (2.1) \quad \dot{y} &= A(t, x)y + g(t, x, y), \end{aligned}$$

tal que $|\dot{x}^*(t)| \leq N$, $|y^*(t)| < \mu$ para todo t , e $x^*(\tau) = \xi$.

Seja $(x_1^*(t), y_1^*(t)) = (x^*(\tau+p, \xi)(t), y^*(\tau+p, \xi)(t))$. É fácil ver que

$(x_1^*(t), y_1^*(t))$ é solução de (2.1), com as propriedades acima.

Portanto, $x_1^*(t) = x^*(t)$ e $y_1^*(t) = y^*(t)$, para todo t . Isto prova que, $y^*(\tau, \xi)(t) = y^*(\tau+p, \xi)(t+p)$ para todo t . Em particular, $v(\tau+p, \xi) = y^*(\tau+p, \xi)(\tau+p) = y^*(\tau, \xi)(\tau) = v(\tau, \xi)$.

(ii) Fixemos arbitrariamente $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, e consideremos $(x^*(t), y^*(t)) = (x^*(\tau, \xi)(t), y^*(\tau, \xi)(t))$, a única solução de (2.1) garantida pelo Teorema 2.2.

Seja $(x_1^*(t), y_1^*(t)) = (x^*(\tau, \xi+w)(t)-w, y^*(\tau, \xi+w)(t))$. É fácil ver que, (x_1^*, y_1^*) é solução de (2.1) tal que

$$|\dot{x}_1^*(t)| \leq N, \quad |y_1^*(t)| < \mu \quad \text{para todo } t$$

e $x_1^*(\tau) = \xi$. Então $(x_1^*(t), y_1^*(t)) = (x^*(t), y^*(t))$ para todo t . Em particular $v(\tau, \xi+w) = y^*(\tau, \xi+w)(\tau) = y^*(\tau, \xi)(\tau) = v(\tau, \xi)$.

Suponhamos que, a equação diferencial $\dot{y} = A(t)y$, possui uma dicotomia exponencial, e as funções $f(t,x,y)$ e $g(t,x,y)$ são Lipschitzianas com constantes pequenas em x e y . No capítulo anterior, mostramos que o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= A(t)y + g(t,x,y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

possui uma variedade invariante dada pelo gráfico de uma função $y = v(t,x)$. O objetivo deste capítulo é mostrar que existe uma função contínua de (t,x,y) , que para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, aplica o espaço (x,y) homeomorficamente sobre si próprio, associando a cada solução do sistema (3.1), uma solução do sistema linearizado,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,v(t,x)) \\ \dot{y} &= A(t)y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Neste capítulo faremos uso sistemático das normas,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sup_{-\infty \leq t < \infty} \{ |h(t)| e^{\alpha t} \}, \\ \|h\|^+ &= \sup_{t \geq 0} \{ |h(t)| e^{\alpha t} \}, \\ \|h\|^- &= \sup_{t \leq 0} \{ |h(t)| e^{-\alpha t} \}. \end{aligned}$$

Apresentamos a seguir um resultado, com caráter meramente técnico.

Lema 3.1

Sejam $\psi(t,x)$, $k(t,x)$ funções contínuas de $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e

tais que,

$$(3.3) \quad |k(t, x_1) - k(t, x_2)| \leq v |x_1 - x_2|$$

para todo t, x_1, x_2 . Suponhamos que a equação $\dot{x} = \psi(t, x)$ tem solução $x(t)$ tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \{|\psi(t, x(t)) - k(t, x(t))| e^{\alpha t}\} < \infty$$

Então, se $v < \alpha$ existe uma única solução $z(t)$ de

$$(3.4) \quad \dot{x} = k(t, x)$$

tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \{|z(t) - x(t)| e^{\alpha t}\} < \infty$$

Além disso se $k(t, x) = k(t, x, \zeta)$, $x(t) = x(t, \zeta)$, $\psi(t, x) = \psi(t, x, \zeta)$, dependem continuamente do parâmetro ζ , num subconjunto de um espaço euclidiano, tal que v em (3.3) independe de ζ e

$$\sup_{t \geq 0} \{|\psi(t, x(t, \zeta), \zeta) - k(t, x(t, \zeta), \zeta)| e^{\alpha t}\} < \infty$$

uniformemente em ζ , então a solução $z(t) = z(t, \zeta)$ encontrada acima é contínua em (t, ζ) .

Demonstração

Coloquemos $M = \sup_{t \geq 0} \{|\psi(t, x(t)) - k(t, x(t))| e^{\alpha t}\}$.

Seja S conjunto de funções contínuas $z(t)$ definidas para $t \geq 0$, tais que $\|z - x\|^+ < \infty$. Para cada z em S , coloquemos

$$z(t) = x(t) - \int_t^{\infty} [k(s, z(s)) - \psi(s, x(s))] ds$$

É fácil ver que $\dot{z}(t) = k(t, z(t))$, e mais

$$\begin{aligned} |z(t) - x(t)| &\leq \int_t^{\infty} v |z(s) - x(s)| ds + \int_t^{\infty} |k(s, x(s)) - \psi(s, x(s))| ds \\ &\leq v \|z - x\|^+ \int_t^{\infty} e^{-\alpha s} ds + M \int_t^{\infty} e^{-\alpha s} ds \\ &\leq [v \cdot \alpha^{-1} \|z - x\|^+ + \alpha^{-1} M] e^{-\alpha t} . \end{aligned}$$

Isto define uma aplicação $T: S \rightarrow S$. Mostremos que T é uma contração. Sejam $z_1, z_2 \in S$ com z_1, z_2 suas imagens por T respectivamente.

$$\begin{aligned} |z_1(t) - z_2(t)| &\leq \int_t^{\infty} |k(s, z_1(s)) - k(s, z_2(s))| ds \\ &\leq v \cdot \alpha^{-1} \|z_1 - z_2\|^+ e^{-\alpha t} . \end{aligned}$$

É fácil ver que S torna-se um espaço métrico completo com a métrica $d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|^+$, portanto T possui um único ponto fixo $z(t)$ que é solução de (3.4) e satisfaz $\|z - x\|^+ < \infty$.

Vamos provar a unicidade. Seja $z_1(t)$, solução de (3.4) tal que $\|z_1 - x\|^+ < \infty$. Então para cada n inteiro positivo

$$z_1(t) = z(t) - z(n) - z_1(n) - \int_t^n [k(s, z_1(s)) - k(s, z(s))] ds$$

Como $\|z_1 - z\|^+ \leq \|z_1 - x\|^+ + \|z - x\|^+ < \infty$,

$$|z_1(n) - z(n)| \leq \|z_1 - z\|^+ \cdot e^{-\alpha n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty .$$

Então fazendo $n \rightarrow \infty$ teremos,

$$z_1(t) = z(t) - \int_t^{\infty} [k(s, z_1(s)) - k(s, z(s))] ds,$$

e conseqüentemente

$$\|z_1 - z\|^+ \leq \alpha^{-1} v \|z_1 - z\|^+.$$

Como $\alpha^{-1} v < 1$, $\|z_1 - z\|^+ = 0$, e portanto $z_1(t) = z(t)$ para todo t .

Para provar a continuidade de $z(t, \zeta)$. Nós definimos S como o conjunto das funções contínuas $z(t, \zeta)$, definida para todo ζ em um espaço Euclidiano e $t \geq 0$, tal que

$$\sup_{t \geq 0, \zeta} \{|z(t, \zeta) - x(t, \zeta)| e^{\alpha t}\} < \infty.$$

De maneira analoga ao que já foi feito nesta demonstração, podemos provar que a equação integral,

$$z(t, \zeta) = x(t, \zeta) - \int_t^{\infty} [k(s, z(s, \zeta), \zeta) - f(s, z(s, \zeta), \zeta)] ds$$

tem uma única solução $z(t, \zeta)$ em S . Então para cada ζ , $z(t) = z(t, \zeta)$ é a única solução de $\dot{x} = k(t, x, \zeta)$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \{|z(t) - x(t, \zeta)| e^{\alpha t}\} < \infty,$$

e além disso $z(t, \zeta)$ é contínua para todo ζ e $t \geq 0$. Dos Teoremas de continuidade com relação a parâmetros e condições iniciais segue que $z(t, \zeta)$ é contínua para todo ζ e t . $\square$

Antes de enunciar o principal resultado deste capítulo, vamos relacionar as hipóteses sobre as funções A, f, g com maior precisão.

Sejam $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$, funções contínuas de $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, com valores em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente, e $A(t)$ função matricial $n \times n$ contínua de $t \in \mathbb{R}$.

H_1 Suponhamos que a equação diferencial

$$(3.5) \quad \dot{y} = A(t)y,$$

possui dicotomia exponencial com projeção P , constante K e expoente 2α .

H_2 Para todo $t \in \mathbb{R}$, $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, existem constantes positivas q_1, q_2, μ, N tais que

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq q_1 |x_1 - x_2| + N |y_1 - y_2|,$$

$$|g(t, x, y)| \leq \mu$$

$$|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leq q_2 [|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|].$$

Teorema 3.1

Suponhamos válidas as hipóteses H_1, H_2 acima. Então, se

$$(3.6) \quad q_1 \leq \alpha/4, \quad q_2 \leq \min\{\alpha^2/32NK, \alpha/8K\},$$

(i) existe uma função $v(t,x)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo,

$$|v(t,x)| \leq K\mu\alpha^{-1}, \quad |v(t,x_1) - v(t,x_2)| \leq 8K\alpha^{-1}q_2|x_1 - x_2|,$$

para todo t, x, x_1, x_2 , tal que $y = v(t,x)$ determina uma variedade integral para o sistema (3.1), isto é, se $x(t)$ é solução da equação

$$\dot{x} = f(t, x, v(t, x)),$$

então $x(t), v(t, x(t))$ é solução de (3.1). Além disso, se $x(t), y(t)$, é solução de (3.1) tal que $\sup_{-\infty < t < \infty} |y(t)| < \infty$, então

$$y(t) = v(t, x(t)) \text{ para todo } t.$$

(ii) existe uma função contínua

$$H(t, x, y) = (H_1(t, x, y), H_2(t, x, y))$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tal que se $x(t), y(t)$ é uma solução de (3.1) então $H_1(t, x(t), y(t)), H_2(t, x(t), y(t))$ é uma solução do sistema linearizado (3.2). Para cada t fixado, $H_t(x, y) = H(t, x, y)$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

$$L(t, x, y) = (L_1(t, x, y), L_2(t, x, y)) = H_t^{-1}(x, y),$$

é contínuo em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, e se $z(t), w(t)$ é solução de (3.2), $L_1(t, z(t), w(t)), L_2(t, z(t), w(t))$ é solução de (3.1).

A primeira parte segue facilmente do Teorema 2.1.

A idéia básica da prova da segunda parte é a seguinte. Dado uma solução $x(t), y(t)$ de (3.1), encontramos uma outra solução $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ de (3.1) sobre a "variedade estável" de (3.1), isto é, $\hat{y}(t)$ limitado quando $t \rightarrow +\infty$, tal que $x(t), y(t)$ aproxima $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ exponencialmente quando $t \rightarrow -\infty$. Então encontramos uma solução $z(t)$ sobre a variedade integral de (3.1) tal que $\hat{x}(t)$ aproxima $z(t)$ exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$, e nós tomamos a única solução $w(t)$ de $\dot{y} = A(t)y$, tal que $w(t) - y(t)$ é limitado para todo t real. Então,

$$H_1(t, x(t), y(t)) = z(t) \text{ e } H_2(t, x(t), y(t)) = w(t).$$

A prova desta segunda parte do Teorema 3.1 é uma consequência dos tres próximos resultados, e será desenvolvida no final deste capítulo.

Lema 3.2

Suponhamos válidas as hipóteses H_1, H_2 deste capítulo.

Seja $x(t) = x(t, \xi, \eta, \zeta), y(t) = y(t, \xi, \eta, \zeta)$ solução de (3.1) tal que $x(\tau) = \xi, y(\tau) = \eta$, e seja $q(t) = q(t, \zeta)$, para cada ζ em um espaço Euclidiano, uma solução da equação linear (3.5), tal que $q(t, \zeta)$ é contínua em (t, ζ) . Então se

$$(3.6) \quad q_1 < \alpha/2 \quad q_2 \leq \min\{\alpha/8K, \alpha^2/16NK\}$$

existe para cada (ξ, η, τ, ζ) tal que $y(t, \xi, \eta, \tau) - q(t, \zeta)$ é limitado em $t \geq 0$, uma única solução $\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta), \hat{y}(t) = \hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ de (3.1) tal que

$$\sup_{t \geq 0} \{|\hat{x}(t) - x(t)| e^{\alpha t}\} < \infty, \quad \sup_{-\infty < t < \infty} \{|\hat{y}(t) - q(t)|\} < \infty$$

Além disso $\hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta), \hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ são contínuas em $(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ e estão satisfeitas as desigualdades,

$$(3.7) \quad \begin{aligned} |\hat{x}(t) - x(t)| &\leq 8NK\alpha^{-1} |\hat{y}(s) - y(s)| e^{-\alpha(t-s)} \text{ se } s \leq t \\ |\hat{y}(t) - y(t)| &\leq 4K |\hat{y}(s) - y(s)| e^{-\alpha(t-s)} \text{ se } s \leq t. \end{aligned}$$

Demonstração

Fixemos ξ, η, τ, ζ arbitrariamente. Seja S o conjunto das funções contínuas $w(t)$ tais que,

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |w(t) - q(t)| < K\alpha^{-1} \quad \text{e} \quad \|w - y\|^+ < \infty$$

Este conjunto torna-se um espaço métrico completo com a métrica $d(w_1, w_2) = \|w_1 - w_2\|$, que está bem definida pois

$$|w_1(t) - w_2(t)| \leq |w_1(t) - q(t)| + |w_2(t) - q(t)| \leq 2K\mu\alpha^{-1}$$

se $t \leq 0$, e $\|w_1 - w_2\|^+ \leq \|w_1 - y\|^+ + \|w_2 - y\|^+ < \infty$.

Seja $w \in S$. Como

$$|f(t, x(t), y(t)) - f(t, x(t), w(t))| \leq N\|w - y\|^+ e^{-\alpha t},$$

para todo $t \leq 0$, fazendo $\psi(t, x) = f(t, x, y(t))$ e $k(t, x) = f(t, x, w(t))$ no Lema 3.1, teremos $z(t)$ a única solução de $\dot{x} = f(t, x, w(t))$ tal que $\|z - x\|^+ < \infty$. Então

$$(3.8) \quad z(t) = x(t) - \int_t^\infty [f(t, z(t), w(s)) - f(s, x(s), y(s))] ds$$

Seja $v(t)$ a única solução limitada de

$$\dot{v} = A(t)v + g(t, z(t), w(t)),$$

isto é

$$v(t) = \int_{-\infty}^t Y(t)PY^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds - \\ - \int_t^\infty Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds.$$

Então $|v(t)| \leq K\mu\alpha^{-1}$. Finalmente coloquemos,

$$W(t) = v(t) + q(t),$$

então

$$|W(t) - q(t)| \leq K\mu\alpha^{-1},$$

$$\dot{W} = A(t)W + g(t, z(t), w(t)),$$

coloquemos ainda,

$$u(t) = W(t) - y(t) = W(t) - q(t) + q(t) - y(t),$$

então u é limitada em $t \geq 0$ e u é solução de

$$(3.9) \quad \dot{u} = A(t)u + h(t)$$

onde,

$$h(t) = g(t, z(t), w(t)) - g(t, x(t), y(t)),$$

por H_2

$$\|h\|^+ \leq q_2[\|z-x\|^+ + \|w-y\|^+].$$

Portanto

$$u(t) = Y(t)PY^{-1}(0)u(0) + \int_0^t Y(t)PY(s)h(s)ds - \int_t^\infty Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)h(s)ds,$$

é tal que

$$(3.10) \quad \|u\|^+ \leq K|u(0)| + 2K\alpha^{-1}\|h\|^+.$$

Isto define uma aplicação $T: S \rightarrow S$, que a cada $w \in S$ associa $W \in S$. Mostremos que T é contração. Sejam $w_1, w_2 \in S$, e z_1, z_2, W_1, W_2 seus correspondentes como acima.

$$z_1(t) - z_2(t) = \int_t^{\infty} [f(s, z_1(s), w_1(s)) - f(s, z_2(s), w_2(s))] ds$$

para todo t . Assim

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq q_1 \int_t^{\infty} |z_1(s) - z_2(s)| ds + N\alpha^{-1} \|w_1 - w_2\| e^{-\alpha t}.$$

Pelo Lema de Gronwall, temos

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq N(\alpha - q_1)^{-1} \|w_1 - w_2\| e^{-\alpha t}, \text{ para todo } t.$$

Portanto usando a condição (3.6) teremos

$$\|z_1 - z_2\| \leq 2N\alpha^{-1} \|w_1 - w_2\|.$$

É fácil ver que $u(t) = w_1(t) - w_2(t)$ é a única solução de (3.9) tal que $\|u\| < \infty$, onde

$$h(t) = g(t, z_1(t), w_1(t)) - g(t, z_2(t), w_2(t)),$$

é tal que

$$\|h\| \leq q_2 [\|z_1 - z_2\| + \|w_1 - w_2\|] \leq q_2 (1 + 2N\alpha^{-1}) \|w_1 - w_2\|.$$

Então,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t Y(t) P Y^{-1}(s) h(s) ds - \int_t^{\infty} Y(t) (I - P) Y^{-1}(s) h(s) ds.$$

usando as condições (3.6) teremos,

$$\|w_1 - w_2\| = \|u\| \leq 2K\alpha^{-1} q_2 (1 + 2N\alpha^{-1}) \|w_1 - w_2\| \leq \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|.$$

Portanto T é uma contração. Seja $\hat{y}(t)$ o único ponto fixo de T .

Então

$$|\hat{y}(t) - q(t)| \leq K_{\mu} \alpha^{-1}$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = A(t) \hat{y}(t) + g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)),$$

onde $\hat{x}(t)$ é a única solução de

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t))$$

tal que $\|\hat{x} - x\|^+ < \infty$.

Vamos provar a unicidade. Seja $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ outra solução de (3.1) tal que

$$\|\tilde{x} - x\|^- < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{-\infty < t < \infty} |y(t) - q(t)| < \infty.$$

Então

$$\|\hat{x} - \tilde{x}\|^+ \leq \|\hat{x} - x\|^+ + \|\tilde{x} - x\|^+ < \infty,$$

ainda

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{y}(t) - \tilde{y}(t)| \leq \sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{y}(t) - y(t)| + \sup_{-\infty < t < \infty} |y(t) - \tilde{y}(t)| < \infty.$$

Seja $u(t) = \hat{y}(t) - \tilde{y}(t)$. Então $u(t)$ é uma solução limitada da equação diferencial

$$\dot{u} = A(t)u + h(t) + F(t, u)$$

onde,

$$|h(t)| = |g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - g(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))|$$

$$\leq q_2 \|\hat{x} - \tilde{x}\|^+ e^{-\alpha t} \quad \text{se } t \geq 0$$

$$F(t, u) = g(t, \hat{x}(t), \tilde{y}(t) + u) - g(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)),$$

então,

$$|F(t, u)| \leq q_2 |u|.$$

Usando o Lema (1.10) teremos,

$$|\hat{y}(t) - \tilde{y}(t)| = |u(t)| \leq 2K[|u(0)| + 2K\alpha^{-1} \|h\|^+] e^{-\alpha t}, \quad \text{se } t \geq 0$$

Com o mesmo argumento usado na prova da unicidade no Lema (3.1), podemos mostrar que,

$$\hat{x}(t) - \tilde{x}(t) = - \int_t^\infty [f(s, \hat{x}(s), \hat{y}(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))] ds,$$

e que

$$u(t) = \hat{y}(t) - \tilde{y}(t) \text{ é a única solução de}$$

$$\dot{u}(t) = A(t)u + g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - g(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)).$$

$$= A(t)u + h(t).$$

Então,

$$|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)| \leq q_1 \int_t^\infty |\hat{x}(s) - \tilde{x}(s)| ds + N\alpha^{-1} \|\hat{y} - \tilde{y}\| e^{-\alpha t},$$

pelo Lema de Gronwall,

$$|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)| \leq N(\alpha - q_1)^{-1} \|\hat{y} - \tilde{y}\| e^{-\alpha t} \text{ para todo } t,$$

portanto

$$\|\hat{x} - \tilde{x}\| \leq 2N\alpha^{-1} \|\hat{y} - \tilde{y}\|.$$

Como

$$h(t) = g(t, \hat{x}(t), \hat{y}(t)) - g(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)),$$

$$\|h\| \leq q_2 [\|\hat{x} - \tilde{x}\| + \|\hat{y} - \tilde{y}\|] \leq q_2 [1 + 2N\alpha^{-1}] \|\hat{y} - \tilde{y}\|,$$

então,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t Y(t) P Y^{-1}(s) h(s) ds - \int_t^{\infty} Y(t) (I - P) Y^{-1}(s) h(s) ds,$$

é tal que

$$\|u\| \leq 2K\alpha^{-1} q_2 (1 + 2N\alpha^{-1}) \|\hat{y} - \tilde{y}\| \leq \frac{1}{2} \|u\|.$$

Portanto $\hat{y}(t) = \tilde{y}(t)$ para todo t , conseqüentemente $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$ para todo t .

Vamos provar agora as desigualdades (3.7).

Seja

$$\|h\|_s = \sup_{t \geq s} |h(t)| e^{\alpha(t-s)} \quad \text{para algum } s \in \mathbb{R} \text{ fixado.}$$

Segue novamente do Lema (1.10) que se $s \leq t$,

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq 2K[|\hat{y}(s), y(s)| + 2q_2\alpha^{-1} \|\hat{x} - x\| e^{\alpha(t-s)}].$$

Então

$$(3.11) \quad \|\hat{y}-y\|_s \leq 2K|\hat{y}(s)-y(s)| + 4K\alpha q_2 \alpha^{-1} \|\hat{x}-x\|_s.$$

Agora

$$\hat{x}(t) = x(t) - \int_t^{\infty} [f(\lambda, \hat{x}(\lambda), y(\lambda)) - f(\lambda, x(\lambda), y(\lambda))] d\lambda.$$

Portanto

$$(3.12) \quad \|\hat{x}-x\|_s \leq \alpha^{-1} q_1 \|\hat{x}-y\|_s + N \alpha^{-1} \|\hat{y}-y\|_s.$$

Combinando (3.11) e (3.12) obtemos

$$\|\hat{y}-y\|_s \leq 4K|\hat{y}(s)-y(s)|$$

$$\|\hat{x}-x\|_s \leq 8NK\alpha^{-1} |\hat{y}(s)-y(s)|.$$

Resta provar a continuidade de $\hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$, $\hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$.

Seja B um subconjunto do espaço euclidiano (ξ, η, τ, ζ) .

Então $q(0, \zeta) - y(0, \xi, \eta, \tau)$ é limitado em B. Seja S o conjunto das funções $w(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$, contínuas em $R \times B$, tais que

$$|w(t, \xi, \eta, \tau, \zeta) - q(t, \zeta)| \leq K\mu\alpha^{-1}, \text{ e}$$

$$\sup_B \sup_{-\infty < t < \infty} |w(t, \xi, \eta, \tau, \zeta) - y(t, \xi, \eta, \tau)| e^{\alpha t} < \infty.$$

Se $w \in S$, nos definimos $z(t) = z(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ para cada (ξ, η, τ, ζ) fixado, como a única solução de

$$\dot{x} = f(t, x, w(t, \xi, \eta, \tau, \zeta))$$

tal que

$$\sup_{t \geq 0} |z(t) - x(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)| e^{\alpha t} < \infty.$$

Segue do Lema (3.1) que $z(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ é contínua. Então colocamos

$$W(t, \xi, \eta, \tau, \zeta) = q(t, \zeta) + v(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$$

onde $v(t) = v(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ é, para cada (ξ, η, τ, ζ) fixado, a única solução limitada de

$$\dot{v} = A(t)v + g(t, z(t, \xi, \eta, \tau, \zeta), w(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)).$$

Segue do Lema 1 em [5] que $v(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ é contínua. Então podemos provar da mesma forma que antes que $W \in S$, onde usamos o fato de $q(0, \zeta) - y(0, \xi, \eta, \tau)$ ser limitado em B . Finalmente, provamos que a aplicação T que a cada $w \in S$ associa $W \in S$ é uma contração. Agora S torna-se um espaço métrico completo com a métrica,

$$d(w_1, w_2) = \sup_{t \in \mathbb{R} \times B} |w_1(t, \xi, \eta, \tau, \zeta) - w_2(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)| e^{\alpha t}.$$

Portanto T tem um único ponto fixo $y(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$, e pela unicidade já provada, $\hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ é contínuo em $\mathbb{R} \times B$, segue também que $\hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ é contínuo em $\mathbb{R} \times B$. Da arbitrariedade na escolha de B segue que $\hat{x}, \hat{y}$ é contínua em $(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$. Isto completa a prova do Lema 3.2.

Um análogo do Lema 3.2 para $t \rightarrow -\infty$ pode ser enunciado da seguinte forma.

Lema 3.3

Suponhamos válidas as hipóteses do Lema 3.2, com $y(t, \xi, \eta, \tau) - q(t, \zeta)$ limitado em $t \leq 0$, para cada (ξ, η, τ, ζ) fixado.

Então existe uma única solução

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta), \quad \hat{y}(t) = \hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$$

de (3.1) tal que

$$\sup_{t \leq 0} \{ |\hat{x}(t) - x(t)| e^{-\alpha t} \} < \infty; \quad \sup_{-\infty < t < \infty} \{ |\hat{y}(t) - y(t)| \} < \infty.$$

Além disso $\hat{x}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$, $\hat{y}(t, \xi, \eta, \tau, \zeta)$ são contínuas e estão satisfeitas as desigualdades,

$$(3.7) \quad |\hat{x}(t) - x(t)| \leq 8NK\alpha^{-1} |\hat{y}(s) - y(s)| e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{se } s \leq t,$$

$$|\hat{y}(t) - y(t)| \leq 4K |\hat{y}(s) - y(s)| e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{se } s \leq t.$$

Usando os Lemas 3.2 e 3.3 podemos provar o seguinte resultado.

Lema 3.4

Seja $x(t) = x(t, \xi, \eta, \tau)$, $y(t) = y(t, \xi, \eta, \tau)$ solução de (3.1) tal que $x(\tau) = \xi$, $y(\tau) = \eta$. Então com as condições (3.6) sobre q_1 e q_2 existe uma única solução $\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \xi, \eta, \tau)$, $\hat{y}(t) = \hat{y}(t, \xi, \eta, \tau)$ de (3.1) com $\sup_{t \geq 0} |\hat{y}(t)| < \infty$ e tal que

$$\sup_{t \leq 0} \{ |\hat{x}(t) - x(t)| e^{-\alpha t} \} < \infty, \quad \sup_{t \leq 0} |\hat{y}(t) - y(t)| < \infty.$$

Além disso estão satisfeitas as desigualdades (3.7) e $\hat{x}, \hat{y}$ são contínuas em (t, ξ, η, τ) .

Demonstração

Seja $x(t)$, $y(t)$ solução de (3.1) tal que $x(\tau) = \xi$, $y(\tau) = \eta$. Então é fácil ver que a função definida por

$$q(t) = Y(t)PY^{-1}(t) \left\{ Y(t) - \int_{-\infty}^t Y(t)PY^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds \right\}$$

é solução de (3.5), $q(t) = q(t, \xi, \eta, \tau)$ e contínua em (t, ξ, η, τ) .

Ainda, tomando $\tau = 0$

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leq |Y(t)PY^{-1}(t)[Y(t)Y^{-1}(\tau)\eta \\ &\quad + \int_{\tau}^t Y(t)PY^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds| \\ &\quad + \left| \int_{-\infty}^t Y(t)PY^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds \right| \\ &\leq [K + K\mu 2\alpha^{-1}]e^{-2\alpha(t-\tau)} + K\mu\alpha^{-1} < \infty, \text{ se } t \geq 0 \end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que,

$$\begin{aligned} y(t) - q(t) &= Y(t)(I-P)Y^{-1}(t)y(t) \\ &\quad + \int_{\infty}^t Y(t)PY^{-1}(s)g(s, x(s), y(s))ds \end{aligned}$$

é limitado em $t \leq 0$. Então pelo Lema 3.3, existe uma única solução $\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \xi, \eta, \tau)$, $\hat{y}(t) = \hat{y}(t, \xi, \eta, \tau)$ de (3.1) tal que $\|\hat{x} - x\|^{-} < \infty$,

$\sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{y}(t) - q(t)| < \infty$, $\hat{x}, \hat{y}$ são contínuas em (t, ξ, η, τ) e

$$|\hat{y}(t)| \leq |\hat{y}(t) - q(t)| + |q(t)| < \infty \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, as desigualdades (3.7) estão satisfeitas.

Suponhamos que $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ é solução de (3.1) tal que

$$\sup_{t \geq 0} |\tilde{y}(t)| < \infty, \quad \|\tilde{x} - x\|^- < \infty, \quad \sup_{t \leq 0} |\tilde{y}(t) - y(t)| < \infty,$$

então, se $t \geq 0$

$$|\tilde{y}(t) - q(t)| \leq |\tilde{y}(t)| + |q(t)| < \infty,$$

se $t \leq 0$

$$|\tilde{y}(t) - q(t)| \leq |\tilde{y}(t) - y(t)| + |y(t) - q(t)| < \infty.$$

Portanto

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |\tilde{y}(t) - q(t)| < \infty.$$

Da unicidade do Lema 3.3 segue que $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t)$ e $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto completa a demonstração do Lema. $\square$

Passemos à prova do Teorema.

Seja $x(t)$, $y(t)$ solução de (3.1) tal que

$$x(\tau) = \xi, \quad y(\tau) = \eta.$$

Pelo Lema 3.4, existe uma única solução $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ de (3.1) tal que

$$(3.13) \quad \|x - \hat{x}\|^- < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\hat{y}(t)| < \infty; \quad \sup_{t \leq 0} |\hat{y}(t) - y(t)| < \infty.$$

Usando o Lema 3.2 com $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ como solução de (3.1) e $q(t) = 0$, obtemos uma única solução de $z(t)$, $w_1(t)$ de (3.1) tal que

$$(3.14) \quad \|z - \hat{x}\|^+ < \infty, \quad \sup_{-\infty < t < \infty} |w_1(t)| < \infty.$$

Finalmente, tomemos $w(t)$ a única solução de (3.5) tal que

$$(3.15) \quad \sup_{-\infty < t < \infty} |w(t) - y(t)| < \infty.$$

Então

$$\begin{aligned} w(t) = y(t) - & \left[\int_{-\infty}^t Y(t) P Y^{-1}(s) g(s, x(s), y(s)) ds - \right. \\ & \left. - \int_t^{t+\infty} Y(t) (I-P) Y^{-1}(s) g(s, x(s), y(s)) ds \right] \end{aligned}$$

é tal que

$$(3.16) \quad |w(t) - y(t)| \leq K \mu \alpha^{-1}.$$

Seja $H_1(\tau, \xi, \eta) = z(\tau)$, $H_2(\tau, \xi, \eta) = w(\tau)$. Segue do Lema 3.2 que $z(\tau)$ é função contínua de $(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau))$, e por sua vez $\hat{x}(\tau)$, $\hat{y}(\tau)$ são funções contínuas de (τ, ξ, η) . Portanto H_1, H_2 são contínuas e por (3.16) temos

$$|H_2(\tau, \xi, \eta) - \eta| \leq K \mu \alpha^{-1}.$$

Da unicidade do Lema (3.4) segue que,

$$\hat{x}(t, s, x(s, \tau, \xi, \eta), y(s, \tau, \xi, \eta)) = \hat{x}(t, \tau, \xi, \eta),$$

$$\hat{y}(t, s, x(s, \tau, \xi, \eta), y(s, \tau, \xi, \eta)) = \hat{y}(t, \tau, \xi, \eta),$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Então segue do Lema 3.3 que,

$$z(t, s, \hat{x}(s, \tau, \xi, \eta), \hat{y}(s, \tau, \xi, \eta)) = z(t, \tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau))$$

$$w_1(t, s, \hat{x}(s, \tau, \xi, \eta), \hat{y}(s, \tau, \xi, \eta)) = w_1(t, \tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau))$$

para todo t, s . Em particular,

$$\begin{aligned} H_1(t, x(t), y(t)) &= z(t, \hat{x}(t, x(t), y(t)), \hat{y}(t, x(t), y(t))) \\ &= z(t, \tau, \hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)). \end{aligned}$$

Portanto $H_1(t, x(t), y(t)) = z(t)$ para todo t .

Mostremos agora que $H_2(t, x(t), y(t)) = w(t)$ para todo t .

Coloquemos

$$\begin{aligned} h(t, \psi, (\tau, \xi, \eta)) &= g(t, x(t, \tau, \xi, \eta), y(t, \tau, \xi, \eta) + \psi) - \\ &- g(t, x(t, \tau, \xi, \eta), y(t, \tau, \xi, \eta)). \end{aligned}$$

Seja $\psi(t) = \psi(t, \tau, \xi, \eta)$

$$\dot{\psi} = A(t)\psi - h(t, \psi, (\tau, \xi, \eta)),$$

tal que $\psi(\tau) = w(\tau) - \eta$. Então, do Lema 1 em [6] segue que $w(t) - \psi(t, \tau, \xi, \eta)$ é a única solução limitada de

$$\dot{\psi} = A(t)\psi + h(t, \psi, (\tau, \xi, \eta)).$$

De acordo com a nossa definição,

$$H_2(t, x(t), y(t)) = y(t) + \psi(t, t, x(t), y(t)).$$

Agora $\psi(s, t, x(t), y(t))$ é a única solução da equação diferencial,

$$\dot{\psi} = A(s)\psi - h(s, \psi, t, x(t), y(t)).$$

Mas $h(s, \psi, t, x(t), y(t)) = h(s, \psi, \tau, \xi, \eta)$, pois

$$x(s, t, x(t), y(t)) = x(s, \tau, \xi, \eta) \text{ e } y(s, t, x(t), y(t)) = y(s, \tau, \xi, \eta).$$

Então

$$\psi(s, t, x(t), y(t)) = \psi(s, \tau, \xi, \eta), \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

Em particular

$$\psi(t, t, x(t), y(t)) = \psi(t, \tau, \xi, \eta).$$

Portanto

$$H_2(t, x(t), y(t)) = y(t) + \psi(t, \tau, \xi, \eta) = w(t) \text{ para todo } t.$$

Reciprocamente, seja $z(t), w(t)$ solução de (3.2) tal que $z(\tau) = \xi$, $w(\tau) = \eta$. Não é difícil ver que o Lema 3.2 pode ser aplicado para $z(t), v(t, z(t))$ como solução de (3.1), então existe uma única solução $\tilde{z}(t), \tilde{w}(t)$ de (3.1) tal que

$$(3.17) \quad \|\tilde{z} - z\|^+ < \infty, \quad \sup_{-\infty < t < \infty} |\tilde{w}(t) - Y(t)PY^{-1}(t)w(t)| < \infty.$$

Finalmente como

$$\tilde{w}(t) - w(t) = \tilde{w}(t) - Y(t)PY^{-1}(t)w(t) + Y(t)(I-P)Y^{-1}(\tau)\eta,$$

o Lema 3.3 pode ser aplicado para $\tilde{z}(t), \tilde{w}(t)$ como solução de (3.1) e $w(t)$ como solução de (3.5), então existe uma única solução $x(t), y(t)$ de (3.1) tal que

$$(3.18) \quad \|x - \tilde{z}\|^- < \infty, \quad \sup_{-\infty < t < \infty} |y(t) - w(t)| < \infty.$$

Seja $L_1(\tau, \xi, \eta) = x(\tau)$; $L_2(\tau, \xi, \eta) = y(\tau)$. Da mesma forma que H_1 , H_2 , concluímos que L_1 , L_2 são contínuas, e também

$$L_1(t, z(t), w(t)) = x(t); L_2(t, z(t), w(t)) = y(t)$$

para todo t .

Resta provar que $H = (H_1, H_2)$ e $L = (L_1, L_2)$ são inversos um do outro, isto é,

$$H_t \circ L_t = L_t \circ H_t = \text{identidade}$$

onde,

$$H_t(x, y) = (H_1(t, x, y), H_2(t, x, y))$$

$$L_t(x, y) = (L_1(t, x, y), L_2(t, x, y)).$$

Seja $x(t)$, $y(t)$ solução de (3.1) com

$$z(t) = H_1(t, x(t), y(t)), w(t) = H_2(t, x(t), y(t)).$$

Como já provamos, à solução $x(t)$, $y(t)$, de (3.1) está associado $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, e à solução $z(t)$, $w(t)$ de (3.2) está associado $\tilde{z}(t)$, $\tilde{w}(t)$. Vamos provar que $\hat{x}(t) = \tilde{z}(t)$ e $\hat{y}(t) = \tilde{w}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como,

$$\|\tilde{z} - \hat{x}\|^+ \leq \|\tilde{z} - z\|^+ + \|z - \hat{x}\|^+$$

e

$$\begin{aligned} |\tilde{w}(t) - \hat{y}(t)| &\leq |\tilde{w}(t) - Y(t)PY^{-1}(t)w(t)| \\ &\quad + |Y(t)PY^{-1}(t)(w(t) - y(t))| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \int_{-\infty}^t Y(t) P Y^{-1}(s) g(s, x(s), y(s)) ds \right| \\
 & + \left| \hat{y}(t) - Y(t) P Y^{-1}(s) \{ y(t) - \right. \\
 & \left. - \int_{-\infty}^t Y(t) P Y^{-1}(s) g(s, x(s), y(s)) ds \} \right|,
 \end{aligned}$$

por (3.14) e (3.17), $\|\tilde{z} - \hat{x}\|^+ < \infty$, e $\sup_{-\infty < t < \infty} |\tilde{w}(t) - \hat{y}(t)| < \infty$.

Da mesma forma que provamos a unicidade no Lema 3.2, podemos mostrar que $\hat{x}(t) = \tilde{z}(t)$; $\hat{y}(t) = \tilde{w}(t)$. Denotando a solução de (3.1) correspondente à solução $z(t)$, $w(t)$ de (3.2) por

$$\bar{x}(t) = L_1(t, z(t), w(t)), \quad \bar{y}(t) = L_2(t, z(t), w(t)),$$

temos por (3.13) e (3.18) que

$$\|\bar{x} - x\|^- \leq \|\bar{x} - z\|^- + \|\hat{x} - x\|^- < \infty$$

e por (3.13) e (3.18)

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |\bar{y}(t) - y(t)| \leq \sup_{-\infty < t < \infty} |\bar{y}(t) - w(t)| + \sup_{-\infty < t < \infty} |w(t) - y(t)| < \infty,$$

segue novamente que $\bar{x}(t) = x(t)$; $\bar{y}(t) = y(t)$.

Consequentemente L_t o H_t é a identidade para todo t . Semelhantemente podemos provar que H_t o L_t é a identidade para todo t .

Isto completa a prova do teorema.

B I B L I O G R A F I A S

- [1] - W.A.Coppel and K.J.Palmer, Averaging and integral manifolds, Bull. Austral.Math. Soc., vol.2, 197-222 (1970).
- [2] - W.A.Coppel, Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, D.C. Heath and Company Boston, 1965.
- [3] - W.A.Coppel, Dichotomies in Stability Theory, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 629, 1978.
- [4] - J.K.Hale, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons Inc., 1980.
- [5] - K.J.Palmer, Linearization Near an Integral Manifolds, Journal of Mathematics Analysis and Applications, 51, 243-255 (1975).
- [6] - K.J.Palmer, A Generalization of Hartman's Linearization Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 41, 753-758 (1973).