ESTUDO DE MÓDULOS DE NÓS
E ENLAÇAMENTOS

Aylton Pagamisse

Orientador : Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em
Matemática

SÃO CARLOS

1987

ABSTRACT

The Complement of Knots and Links in codimension 2 have many covering spaces and their homology groups become modules over rings like $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ or $\Lambda_n = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$.

The study of these rings and modules are then very important because many invariants of the Knots and Links are defined through these modules.

The purpose of this work is to collect and develop properties of these rings and modules, find some relationship between them and give some examples.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos companheiros
que por vários motivos não conseguiram concluir este curso no I.C.M.S.C.
na esperança que chegue o dia em que
todos tenham oportunidades iguais e
que os processos de avaliação sejam
mais humanos, reais e justos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	i
CAPÍTULO I - ANÉIS COMUTATIVOS E MÓDULOS FINI TAMENTE GERADOS.....	1
I - 1. Anéis.....	1
I - 2. Módulos.....	8
CAPÍTULO II - MÓDULOS DE NÓS E ENLAÇAMENTOS.....	51
II - 1. Módulos sobre Λ_n	51
II - 2. Módulos sobre Λ	71
II - 3. Λ - módulos de tipo K.....	92
II - 4. Ideais Elementares.....	98
CAPÍTULO III - APLICAÇÕES.....	109
BIBLIOGRAFIA.....	115

INTRODUÇÃO

Dado um nó $K: S^n \rightarrow S^{n+2}$, ou mais geralmente um enlaçamento $L: \bigcup_{i=1}^m S_i \rightarrow S^{n+2}$, denotamos $X(L)$ o complementar da imagem de L em S^{n+2} .

São chamados invariantes abelianos do enlaçamento as homologias de certos espaços de revestimento de $X(L)$, onde o grupo de revestimento é abeliano, por exemplo, no caso de nós, o revestimento abeliano universal $\tilde{X}$ que corresponde ao Kernel da abelianização $\pi_1(X(K)) \rightarrow H_1(X(K)) \cong \mathbb{Z}$, e no caso de enlaçamentos, ao Kernel da abelianização $\pi_1(X(L)) \rightarrow H_1(X(L)) \cong \mathbb{Z}^K$.

No primeiro caso $H_i(\tilde{X})$ tornam-se módulos finitamente gerados sobre $\Lambda \cong \mathbb{Z}[Z] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, e no segundo caso são módulos finitamente gerados sobre $\Lambda_n \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$.

No Capítulo II deste trabalho apresentamos propriedades de Λ e Λ_n , bem como de seus módulos finitamente gerados, que são muito úteis para se estudar os invariantes acima citados.

O capítulo I contém pré-requisitos de álgebra que são utilizados nos capítulos posteriores. Este material básico foi colecionado e colocado neste capítulo inicial também por razões didáticas e para que esse trabalho fosse o mais auto-suficiente possível.

No capítulo III mostramos como os grupos de homologia $H_i(\tilde{X})$ se tornam módulos sobre Λ e Λ_n e mostramos cer

tos aspéctos de algebrização dos problemas da teoria de Nós e Enlaçamentos.

Para o leitor familiarizado com os conceitos básicos de Álgebra Homológica e Álgebra Comutativa, é interessante começar a leitura deste trabalho pelo capítulo II, e na medida em que for necessário certos conceitos e resultados, então dirigir-se ao capítulo I na busca dos mesmos.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo contém a maioria dos resultados básicos utilizados neste trabalho, além disso, levo em consideração que a pessoa que vá lê-lo tenha algum conhecimento de estruturas algébricas.

Alguns resultados são demonstrados, enquanto outros não. Isto se deve ao fato de que os métodos utilizados nestas demonstrações tenham ou não relação com o trabalho em si, ou então por não ter encontrado uma prova nos textos utilizados. Pode-se notar, dentro deste espírito, que as partes mais exploradas são aquelas que tratam de módulos projetivos, dimensão projetiva e Ext, que essencialmente é o que mais se utiliza nesse trabalho.

1. ANÉIS

Todos os anéis aqui considerados são comutativos com elemento unidade.

1.1. (Anel de Frações)

Seja A um anel. Um subconjunto $S \subset A$ é fechado multiplicativamente se $1 \in S$, e se $x, y \in S$, então $x \cdot y \in S$.

Definamos a relação $\equiv$ em $A \times S$ da seguinte maneira:

$$(a,s) \equiv (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S \text{ tal que } (at - bs)u = 0.$$

A relação $\equiv$ é de equivalência e o conjunto das classes de equivalência desta relação formam um anel chamado de anel de frações e denotado $S^{-1}A$. Identificamos o par (a,s) com o elemento $\frac{a}{s}$; $[(a,s) \leftrightarrow \frac{a}{s}]$.

Se A é domínio de integridade e $S = A - \{0\}$, então $S^{-1}A$ é o corpo de frações de A .

Se $S = A - p$, onde p é um ideal primo, então denotaremos $S^{-1}A$ por A_p .

i) Existe uma aplicação natural $\Phi: A \rightarrow S^{-1}A$ dada por

$$\Phi(x) = \frac{x}{1},$$

e para cada ideal $a \subset A$, o ideal gerado por $\Phi(a)$ em $S^{-1}A$, será denotado por $S^{-1}a$ ou a_p , dependendo de S . Se A é domínio de integridade, então Φ é injetiva.

ii) Os ideais primos de $S^{-1}A$ estão em correspondência 1 a 1 ($p \leftrightarrow S^{-1}p$) com os ideais primos de p em A tais que $p \cap S = \emptyset$ [[1] 3.11], e portanto, se $S = A - p$, os ideais primos de A_p estão em correspondência 1 a 1 com os ideais primos de A contidos em p .

iii) Dados dois ideais $a, b \subset A$ então $(a.b)_p = a_p.b_p$, onde p é ideal primo de A .

Demonstração:

Temos: $(a.b)_p = \left\{ \sum \frac{a_i b_i}{s} \right\}$, onde $a_i b_i \in a.b$ e $s \in A-p$, enquanto que

$$a_p.b_p = \left\{ \sum \frac{a_i}{s_i} \cdot \frac{b_i}{t_i} \right\}, \text{ onde } a_i \in a, b_i \in b \text{ e } s_i, t_i \in A-p.$$

Mas na realidade esses dois conjuntos são o mesmo.

1.2. (Anel Local)

Um anel A é dito local se tem apenas um ideal maximal. O corpo $\frac{A}{m}$, onde m é o ideal maximal de A , é chamado de corpo residual de A .

- i) Se p é um ideal primo, então o anel A_p é local, sendo que seu ideal maximal é o ideal gerado por p em A_p , isto é, $S^{-1}p$.

1.3. (Anel Noetheriano)

Um anel A é Noetheriano se todo ideal de A é finitamente gerado, ou equivalentemente, se toda cadeia de ideais $0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$ é estacionária, isto é, tem um elemento maximal.

- i) Se A é Noetheriano, então $A[t]$ é Noetheriano [[1] 7.5].
ii) Se A é Noetheriano, então $S^{-1}A$ é Noetheriano [[1] 7.3].

1.4. (Anel Integralmente Fechado)

Seja B um anel contendo o anel A . Um elemento $x \in B$ é dito integral sobre A se x satisfaz uma equação da forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \text{ onde } a_i \in A.$$

Seja A um domínio de integridade e K o corpo de frações de A . Dizemos que A é integralmente fechado se todo elemento de K é integral sobre A .

1.5. (Anel de Valorização Discreta)

Seja K um corpo. Uma valorização discreta em K é uma aplicação $v: K - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, tal que:

a) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$

b) $v(x+y) \geq \min \{v(x), v(y)\}$

O conjunto consistindo de 0 e dos elementos $x \in K - \{0\}$ tal que $v(x) \geq 0$ é um anel e é chamado de anel de valorização de v .

Um domínio de integridade A é chamado anel de valorização discreta se existir uma avaliação discreta v em seu corpo de frações $Q(A)$ tal que A é o anel de valorização de v .

1.6.(Dimensão de Krull)

Seja p um ideal primo do anel A . A altura de p é o comprimento da maior cadeia de ideais primos

$$p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_r = p \quad \text{que termina em } p.$$

A dimensão de Krull de A é o supremo das alturas dos ideais primos de A . Denotaremos a dimensão de Krull de A por $\dim_K(A)$.

$$i) \dim_K(A_p) = \text{altura de } p$$

Demonstração

Segue imediatamente de 1.1.(ii).

1.7.(Domínio de Krull)

Um domínio de integridade A é chamado de domínio de Krull se existir uma família $(v_i)_{i \in I}$ de avaliações discretas no corpo de frações $Q(A)$ com as seguintes propriedades:

a) para todo $x \in Q(A) - \{0\}$, o conjunto de índices $i \in I$ tal que $v_i(x) \neq 0$ é finito;

b) a interseção dos anéis de valorização das v_i é igual a A .

- i) Se A é domínio de Krull, então $A[t_1, \dots, t_n]$ é domínio de Krull [[4] pag. 488].
- ii) Se A é domínio de Krull, então $S^{-1}A$ é domínio de Krull [[4] pag. 483 - prop. 6].
- iii) Se A é domínio de Krull, então $A = \bigcap_p A_p$, onde p percorre todos os ideais primos de A de altura 1.
- iv) Se A é Noetheriano, então A é domínio de Krull $\Leftrightarrow A$ é integralmente fechado.

1.8. (Decomposição Primária)

Um ideal $q \subset A$ é primário se $q \neq A$ e se $x \cdot y \in q$, então ou $x \in q$ ou $y^n \in q$ para algum $n > 0$.

Seja $r(q)$ o ideal $\{x \in A \mid x^n \in q \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}\}$. Se p é um ideal primo, q é primário e $r(q) = p$, então q é dito ser p -primário.

Uma decomposição primária de um ideal a em A é uma expressão de a como uma interseção finita não superflua de ideais primários, isto é,

$$a = \bigcap_{i=1}^n q_i$$

onde q_i é primário.

- i) Se A é Noetheriano, então todo ideal $a \subset A$ tem uma decomposição primária [[1] 7.13].
- ii) Se q é um ideal primário, então $r(q)$ é o menor ideal primo contendo q [[1] 4.1].

iii) Seja A um anel Noetheriano, m um ideal maximal de A e q um ideal qualquer, então as seguintes condições são equivalentes:

a) q é m -primário

b) $r(q) = m$

c) $m^n \subseteq q \subseteq m$ para algum $n > 0$. [[1] 7.16].

1.9. Seja A um domínio local Noetheriano de dimensão de Krull igual a 1 e m seu ideal maximal. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

a) A é um anel de avaliação discreta

b) A é integralmente fechado.

c) $\exists x \in A$ tal que todo ideal não zero em A é da forma (x^k) , $k \geq 0$, e neste caso, $(x)=m$ [[1]9.2].

1.10.

i) Seja $p_1, \dots, p_n$ ideais primos de A e a um ideal contido em

$$\bigcup_{i=1}^n p_i.$$

Então $a \subseteq p_i$ para algum i . [[1] 1.11].

ii) Seja $a_1, \dots, a_n$ ideais de A e p um ideal primo contendo

$$\bigcap_{i=1}^n a_i.$$

Então $p \supseteq a_i$ para algum i . Se $p = \bigcap_{i=1}^n a_i$ então $p=a_i$ para algum i . [[1] 1.11].

1.11. Seja A um Domínio de Fatoração Única. Então $a \in A$ é irreduzível se e somente se (a) é primo.

Demonstração

Suponhamos $x \in A$ irreduzível. Se $x.y \in (a)$, então, $xy = \alpha a$, ou seja, a divide xy , e como a é irreduzível, segue que a divide x ou a divide y e portanto, $x \in (a)$ ou $y \in (a)$.

Suponhamos que (a) é um ideal primo e que a não é irreduzível, ou seja, $a = u.b_1 \dots b_n$, onde u é uma unidade em A , $b_1, \dots, b_n$ são irreduzíveis e $n \geq 2$, logo $(a) = (u.b_1 \dots b_n) = (b_1 \dots b_n)$.

Como A é anel com unidade, segue que $b_1 \dots b_n \in (a)$ e como (a) é primo, temos que $b_i \in (a)$ para algum i . Daí, $b_i = \alpha a$, e como b_i é irreduzível, isto é um absurdo.

2. MÓDULOS

Todos os módulos aqui considerados são módulos finitamente gerados sobre um anel A , onde A é comutativo com unidade e Noetheriano.

2.1. $(\text{Ann}(M))$

Dado um A -módulo M , definimos:

$$\text{Ann}(M) = \{x \in A \mid x.m = 0 \text{ para todo } m \in M\} \quad \text{e}$$

$$\text{Ann}(m) = \{x \in A \mid x.m = 0\}$$

2.2. (Lema de Nakayama)

Seja M um A -módulo e a um ideal de A contido na interseção de todos os ideais maximais de A . Então, $a.M = M$ implica que $M = 0$.

Demonstração

Mostremos primeiro que se $x \in a$, então $1-xy$ é unidade em A para todo $y \in A$.

Se $1-xy$ não for unidade, então $1-xy$ pertence a algum ideal maximal m . Como a está contido na interseção de todos os ideais maximais e $x \in a$, segue que $x \in m$, logo, $xy \in m$ e $1-xy+xy \in m$, ou seja, $1 \in m$ (absurdo).

Suponhamos $M \neq 0$ e seja $u_1, \dots, u_n$ um conjunto minimal de geradores de M . Então, $u_n \in a.M = M$, e portanto temos uma equação da forma $u_n = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$, onde $a_i \in a$, ou seja, $(1-a_n)u_n = a_1 u_1 + \dots + a_{n-1} u_{n-1}$. Como $a_n \in a$, segue que $1-a_n$ é unidade em A , logo, $u_n = b_1 u_1 + \dots + b_{n-1} u_{n-1}$, o que é um absurdo pois o conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ é minimal.

2.3. Seja A um anel local e m seu ideal maximal. Se

x_i ($1 \leq i \leq n$) são elementos de um A -módulo M cujas imagens em $\frac{M}{m.M}$ formam uma base desse espaço ve

torial, então os x_i geram M [[1] 2.8].

2.4. (Módulos sobre D.I.P. - Caracterização)

Um A -módulo M é livre se $M \simeq A^n = A \oplus \dots \oplus A$ (n somandos). Convencionamos $A^0 = 0$ — o módulo nulo.

$T(M) = \{m \in M \mid x.m = 0 \text{ para algum } x \neq 0 \in A\}$ é chamado de submódulo de torção de M . Dizemos que M é com torção se $T(M) \neq 0$, de torção se $T(M) = M$ e livre de torção se $T(M) = 0$.

i) Seja A um Domínio de Ideais Principais e M um A -módulo. Então $M \simeq T(M) \oplus L$, onde L é um A -módulo livre. [[17] pag. 87].

ii) Seja A um D.I.P. e M um A -módulo. Se $M \simeq T_1 \oplus L_1$ onde T_1 é de torção e L_1 é livre, então $T_1 \simeq T(M)$ e $L_1 \simeq L$ [[17] pag. 87].

iii) Seja A um D.I.P. e M um A -módulo. Então existe um inteiro $n \geq 0$ e elementos não inversíveis $p_1, \dots, p_s \in A$ tais que

$$a) M \simeq A^n \oplus \frac{A}{(p_1)} \oplus \dots \oplus \frac{A}{(p_s)}$$

$$b) p_i \mid p_{i-s} ; 2 \leq i \leq s. \quad [[17] \text{ pag. } 100].$$

iv) Um A -módulo M é cíclico se $M = (m)$: Se A é D.I.P. então

tão M cíclico implica $M \simeq \frac{A}{(a)}$ pois: seja $\phi: A \rightarrow M$ dada por $\phi(x) = x.m$. Temos que ϕ é sobrejetora e $\text{Ker } \phi = \text{Ann}(m)$, e como $\text{Ann}(m) = (a)$, segue que $M \simeq \frac{A}{(a)}$

2.5. (Produto Tensorial)

Seja M, N e P A -módulos. Uma aplicação $f: M \times N \rightarrow P$ é dito ser A -bilinear se para cada $x \in M$ a aplicação $y \mapsto f(x, y)$ de N em P é A -linear e para cada $y \in N$ a aplicação $x \mapsto f(x, y)$ de M em P é também A -linear.

i) Existe um par (T, g) consistindo de um A -módulo T e uma aplicação $g: M \times N \rightarrow T$, para todo par de A -módulos M e N , com as seguintes propriedades:

a) Dado qualquer A -módulo P e qualquer aplicação A -bilinear $f: M \times N \rightarrow P$, existe uma única aplicação A -linear $f': T \rightarrow P$ tal que $f = f' \circ g$.

b) Se (T, g) e (T', g') são dois pares com esta propriedade, então existe um único isomorfismo $j: T \rightarrow T'$ tal que $j \circ g = g'$ [[1] 2.12].

O módulo T é chamado de produto tensorial de M e N e denotado por $M \otimes_A N$ ou simplesmente por $M \otimes N$ se não houver ambiguidade.

ii) Seja M, N e P A -módulos. Então existem isomorfismos:

- a) $M \otimes N \simeq N \otimes M$; $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.
- b) $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P) \simeq M \otimes N \otimes P$;
 $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$
- c) $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$;
 $(x \oplus y) \otimes z \mapsto (x \otimes y) \oplus (y \otimes z)$
- d) $A \otimes M \simeq M$; $x \otimes y \mapsto y$ [[1] 2.14].

2.6. (Sequência Exata)

Uma sequência de A-módulos e A-homomorfismos

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

é dita exata em M_i se $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$. A sequência será exata se for exata em cada M_i .

- i) $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata se e somente se f é injetiva
- ii) $M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é exata se e somente se g é sobrejetiva
- iii) $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ é exata se e somente se f é injetiva, g é sobrejetiva e g induz um isomorfismo de $\text{Coker}(f) = \frac{M}{f(M')}$ sobre M'' .

Dizemos que uma sequência exata

$$\dots \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow \dots$$

cinde no módulo M se $M \simeq \text{Im}(f) \oplus B$, isto é, $\text{Im}(f)$ é um so

mando direto de M .

iv) Se uma sequência exata $\dots \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow \dots$ de A -módulos cinde no módulo M , então $M \simeq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ [[10] pag. 34].

v) Se uma sequência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ cinde, então $M \simeq \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) \simeq M' \oplus M''$.

vi) Dado uma sequência exata $\dots \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow \dots$, esta sequência cinde no módulo M se:

a). Existir um homomorfismo $h: M \rightarrow M'$ tal que a composta $h \circ f$ é automorfismo em M' . Neste caso teremos $M \simeq M' \oplus \text{Im}(g)$.

b) Existir um homomorfismo $K: M'' \rightarrow M$ tal que a composta $g \circ K$ é automorfismo em M . Neste caso teremos $M \simeq \text{Im}(f) \oplus M''$. [[10] pag. 34].

2.7. $(\text{Hom}_A(M, N))$

Dados dois A -módulos M e N , o conjunto $\text{Hom}_A(M, N) = \{ \phi: M \rightarrow N \mid \phi \text{ é homomorfismo} \}$ é um A -módulo. O A -módulo $\text{Hom}_A(M, A)$ será denotado por M^* .

i) Se a sequência $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ é exata, então pa

ra qualquer A-módulo N a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}_A(M', N) \quad \text{é exata}$$

onde, dado $f: M'' \rightarrow N$, $g: M' \rightarrow N$ e $i: N \rightarrow N$,

$$\bar{v}(f) = \text{Hom}(v, i)(f) = i \circ v \circ f \text{ e } \bar{u}(g) = \text{Hom}(u, i)(g) = i \circ u \circ g.$$

ii) Se a sequência $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ é exata, então para qualquer A-módulo M, a sequência

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Hom}_A(M, N'') \quad \text{é exata,}$$

onde $\bar{u} = \text{Hom}(i, u)$ e $\bar{v} = \text{Hom}(i, v)$.

2.8. (Lema da Cobra)

Consideremos as sequências exatas

$0 \rightarrow B \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} D \rightarrow 0$, $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{Ker}(a) & \xrightarrow{u_1} & \text{Ker}(b) & \xrightarrow{v_1} & \text{Ker}(C) & \\ & \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{v} & D \longrightarrow 0 \\ & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{Coker}(a) & \xrightarrow{f_1} & \text{Coker}(b) & \xrightarrow{g_1} & \text{Coker}(C) & \end{array}$$

onde u_1, v_1 são induzidas por u, v e f_1, g_1 são induzidas por f, g respectivamente. Então existe $d: \text{Ker}(C) \rightarrow \text{Coker}(a)$ tal que a sequência $\text{Ker}(a) \xrightarrow{u_1} \text{Ker}(b) \xrightarrow{v_1} \text{Ker}(C) \xrightarrow{d} \text{Coker}(a) \longrightarrow \text{Coker}(b) \longrightarrow \text{Coker}(C)$ é exata [[4] pag. 6].

2.9. (Módulos Flat)

i) Por 2.5-a), temos que os elementos do conjunto

$S = \{ \phi: M \times N \rightarrow P, \text{ onde } \phi \text{ é } A\text{-bilinear} \}$ estão em correspondência 1 a 1 com as aplicações A -lineares de $M \otimes_A N \rightarrow P$, onde M, N e P são A -módulos, ou seja, $S \leftrightarrow \text{Hom}_A(M \otimes N, P)$.

Seja $f: M \times N \rightarrow P$ uma aplicação A -bilinear, isto é, $f \in S$. Para cada $x \in M$ associamos a aplicação linear $g_x \in \text{Hom}_A(N, P)$ dada por $g_x(y) = f(x, y)$. Inversamente, qualquer A -homomorfismo $\phi: M \rightarrow \text{Hom}_A(N, P)$ define uma aplicação bilinear $f: M \times N \rightarrow P$ se fizermos $f(x, y) = \phi(x).(y)$. Portanto, o conjunto S está em correspondência 1 a 1 com $\text{Hom}_A(M, \text{Hom}(N, P))$, daí, temos o isomorfismo canônico:

$$\text{Hom}_A(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_A(M, \text{Hom}(N, P))$$

ii) Seja $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata de A -módulos e N um A -módulo qualquer. Então a sequência $M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes I} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes I} M'' \otimes N \rightarrow 0$ é exata [[1] 2.18].

Um A -módulo N é dito flat se para qualquer sequência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de A -módulos, a sequência tensorializada $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ é exata.

2.10.

i) Seja A, B anéis, M um A -módulo, P um B -módulo e N um

(A,B) -bimódulo (isto é, N é A -módulo e B -módulo e as duas estruturas são compatíveis no sentido que $a(xb) = (ax)b$ para todo $a \in A$, $b \in B$ e $x \in N$). Então $(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P)$ [[1] 2.15].

ii) Seja A um anel, a um ideal e M um A -módulo. Então $\frac{A}{a} \otimes_A M$ é isomorfo a $\frac{M}{a.M}$.

Demonstração

Basta tensorializar a sequência $0 \rightarrow a \rightarrow A \rightarrow \frac{A}{a} \rightarrow 0$ por M e usar que $a \otimes_A M \simeq a.M$.

iii) Seja A um anel local, M e N A -módulos. Então $M \otimes_A N = 0$ implica $M = 0$ ou $N = 0$.

Demonstração

Seja m o ideal maximal de A , $K = \frac{A}{m}$ o corpo residual e $M_K = K \otimes_A M$. Por ii) temos que $M_K \simeq \frac{M}{m.M}$ e por 2.2) que se $M_K = 0$ então $M = 0$. Mas se $M \otimes_A N = 0$, então $(M \otimes_A N)_K = 0$. Como K é um (A,K) -bimódulo, $K \otimes_A N$ é um K -módulo e M um A -módulo, segue por i) que $(M \otimes_A N)_K \simeq M_K \otimes_K N_K$. Assim, $M_K \otimes_K N_K = 0$, e como M_K e N_K são espaços vetoriais sobre o corpo K , segue que $M_K = 0$ ou $N_K = 0$.

2.11. (Módulos de Frações)

A construção de $S^{-1}A$ pode ser imitado no caso de

A-módulos.

Seja M um A -módulo e S um subconjunto fechado multiplicativamente de A . Definamos a relação $\equiv$ em $M \times S$ da seguinte maneira: $(m,s) \equiv (m',s') \iff \exists t \in S$ tal que $t(sm' - s'm) = 0$. O elemento $\frac{m}{s}$ denota a classe de equivalência do par (m,s) enquanto que $S^{-1}M$ denota o conjunto das classes de equivalência, além disso, $S^{-1}M$ é um $S^{-1}A$ -módulo.

Se $S = A - p$, escrevemos M_p ao invés de $S^{-1}M$.

i) A operação S^{-1} é exata, ou seja, se a sequência $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ é exata em M , então a sequência $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ é exata em $S^{-1}M$ [[1] 3.3].

ii) Seja M um A -módulo. Então os $S^{-1}A$ -módulos $S^{-1}M$ e $S^{-1}A \otimes_A M$ são isomorfos. O isomorfismo é da seguinte forma:
 $f((\frac{a}{s}) \otimes m) = \frac{a \cdot m}{s}$, onde $a \in A$, $m \in M$ e $s \in S$.
 [[1] 3.5].

iii) Se N é um submódulo do A -módulo M , então $S^{-1}(\frac{M}{N}) \simeq \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$ [[1] 3.4].

iv) $S^{-1}A$ é um A -módulo Flat.

Demonstração

Seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata.

Ao tensorializarmos por $S^{-1}A$ temos a sequência
 $0 \rightarrow M' \otimes_A S^{-1}A \rightarrow M \otimes_A S^{-1}A \rightarrow M'' \rightarrow 0$, que é o mesmo que a
 sequência $0 \rightarrow S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M \rightarrow S^{-1}M'' \rightarrow 0$ que é exata pois a
 operação S^{-1} é exata.

2.12.

Seja M um A -módulo, as seguintes afirmações são
 equivalentes:

- a) $M = 0$
- b) $M_p = 0$ para todo ideal primo p de A
- c) $M_m = 0$ para todo ideal maximal m de A

Demonstração

Claramente $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$. Suponhamos $c)$ satisfei-
 ta e $M \neq 0$. Seja $x \in M$, $x \neq 0$, e $a = \text{Ann}(x)$. Temos que
 $a \neq (1)$ e portanto a está contido em algum ideal maximal
 m . Tomando $\frac{x}{1} \in M_m$, como $M_m = 0$, segue que $\frac{x}{1} = 0$ e por-
 tanto x é anulado por algum elemento em $A-m$, o que é ab-
surdo pois $\text{Ann}(x) \subset m$.

2.13. (Módulos Projetivos)

Um A -módulo X é dito projetivo se para todo homo-
 morfismo $f: X \rightarrow B$ e todo homomorfismo sobrejetor $g: M \rightarrow B$
 de módulos sobre A , existe um homomorfismo $h: X \rightarrow M$ satis-
 fazendo $goh = f$.

Em linguagem de diagramas, dizemos que X é proje

tivo se para todo diagrama

de homomorfismos de A -módulos, onde a linha é exata, existe um homomorfismo $h: X \rightarrow M$ tal que o diagrama

i) Todo A -módulo livre é projetivo.

Demonstração

Seja X um A -módulo livre e consideremos o diagrama

ma

onde a linha é exata.

Seja $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base de X e $b_i = f(e_i)$. Como g é sobre, existe $m_i \in M$ tal que $b_i = g(m_i)$. Definamos $h: X \rightarrow M$ por

$$h\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i.$$

Temos $(goh)(\sum \lambda_i e_i) = g(\sum \lambda_i m_i) = \sum \lambda_i g(m_i) = \sum \lambda_i b_i =$
 $= \sum \lambda_i f(e_i) = f(\sum \lambda_i e_i)$ e portanto $goh = f$.

ii) Se $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$, então X é projetivo se e somente se
 cada X_i é projetivo [[11] pag. 78]

iii) Se P é projetivo, então toda sequência exata curta
 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ de módulos sobre A cinde.

Demonstração

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow I_d & \\ Y & \xrightarrow{g} & P \rightarrow 0 \end{array}$$

Como P é projetivo e g é sobre, existe $h: P \rightarrow Y$ tal que
 $goh = I_d$, ou seja, goh é automorfismo, daí, de 2.6 vi)
 segue que a sequência cinde.

iv) Se P é projetivo, então P é somando direto de um módulo
 livre F sobre A .

Demonstração

$P = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Definamos $\Phi: A^n \rightarrow P$ por $\Phi(e_i) = x_i$,
 onde $\{e_i\}$ é a base canônica de A^n . Temos que Φ é sobre,
 logo, $P \cong \frac{A^n}{\text{Ker } \Phi}$ e portanto a sequência

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\Phi) \rightarrow A^n \rightarrow P \rightarrow 0$$

é exata. Por iii) segue que a sequência cinde, ou seja,
 $A^n \simeq P \oplus \text{Ker}(\Phi)$

v) Se P é projetivo e $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ é uma sequência exata, então a sequência $0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, X) \rightarrow \text{Hom}_A(P, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(P, Z) \rightarrow 0$ é exata. [[11] pag. 79].

vi) P é projetivo se e somente se a localização P_p é livre para todo ideal primo p de A . [[4] pag 109].

vii) Se P é projetivo, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow h & & \\ B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

onde $goh = 0$ e a linha é exata, então existe $K: P \rightarrow B$ tal que $foK = h$.

Demonstração

$goh = 0$ implica $h(P) \subset \text{Ker } g$ e como a linha é exata, segue que $\text{Ker } g = \text{Im } f$. Assim, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ B & \longrightarrow & f(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tem a linha exata e como P é projetivo, segue que existe $K: P \rightarrow B$ tal que $foK = h$.

viii) Se as seqüências de A-módulos $0 \rightarrow K_1 \rightarrow P_1 \rightarrow B \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow K_2 \rightarrow P_2 \rightarrow B \rightarrow 0$ são exatas onde P_1 e P_2 são projetivos, então $K_1 \oplus P_2 \simeq K_2 \oplus P_1$ [[20] pag. 62].

2.14. (Módulos Injetivos)

Um A-módulo X é dito injetivo se para todo homomorfismo $f: B \rightarrow X$ e todo homomorfismo injetivo $g: B \rightarrow C$ de módulos sobre A , existe um homomorfismo $h: C \rightarrow X$ satisfazendo $h \circ g = f$.

Em linguagem de diagrama, dizemos que X é injetivo se para todo diagrama

de homomorfismos de A-módulos onde a linha é exata, existe um homomorfismo $h: C \rightarrow X$ tal que o diagrama

comuta.

i) Todo somando direto de um A-módulo injetivo é injetivo.
[[11] pag. 83].

ii) Todo produto direto de A-módulos injetivos é injetivo.
[[11] pag. 84].

iii) Toda sequência exata de A -módulos $0 \rightarrow X \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 0$, onde X é injetivo, cinde. [[11] pag. 85].

iv) Se X é injetivo e $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ uma sequência exata, então a sequência $0 \rightarrow \text{Hom}_A(D, X) \rightarrow \text{Hom}_A(C, X) \rightarrow \text{Hom}_A(B, X) \rightarrow 0$ é exata. [[11] pag. 85].

v) Considere o seguinte diagrama de homomorfismos de A -módulos

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D \\ & & \downarrow h & & \\ & & X & & \end{array}$$

onde X é injetivo, $\text{hof} = 0$ e a linha é exata. Então, existe um homomorfismo $K: D \rightarrow X$ tal que $Kog = h$.

Demonstração

Como $\text{hof} = 0$ e a linha do diagrama é exata, segue que $\text{Im } f \subset \text{Ker } h$ e $\text{Im } f = \text{Ker } g$ e portanto os homomorfismos $\bar{h}(x+f(B)) = h(x)$ e $\bar{g}(x+f(B)) = g(x)$, onde $x \in C$, estão bem definidos, logo, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{C}{f(B)} & \xrightarrow{\bar{g}} & D \\ & & \downarrow \bar{h} & & \\ & & X & & \end{array}$$

tem a linha exata, e como X é injetivo, segue que existe $K: D \rightarrow X$ tal que $Ko\bar{g} = \bar{h}$.

Temos $(K \circ g)(x) = K(\bar{g}(x + f(B))) = \bar{h}(x + f(B)) = h(x)$.

vi) Seja X um A -módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) X é injetivo

b) Para todo ideal I e todo homomorfismo $f: I \rightarrow X$, existe um homomorfismo $g: A \rightarrow X$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{I_n} & A \\ f \downarrow & & \searrow g \\ & & X \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $g \circ I_n = f$.

Demonstração

$a \Rightarrow b$; Definição.

$b \Rightarrow a$ Suponhamos que T é um submódulo de um A -módulo B e $\phi: T \rightarrow X$ um homomorfismo. Basta mostrar que ϕ pode ser estendida a um homomorfismo $\bar{\phi}: B \rightarrow X$.

Seja Σ o conjunto de todos os pares (C, ψ) , onde C é um A -módulo entre T e B e ψ é um homomorfismo de C em X que estende ϕ . Claramente $(T, \phi) \in \Sigma$. Se (C_1, ψ_1) e (C_2, ψ_2) pertencem a Σ , dizemos que $(C_1, \psi_1) \leq (C_2, \psi_2)$ se $C_1 \subseteq C_2$ e ψ_2 estende ψ_1 . Σ torna-se então parcialmente ordenado, além disso, toda cadeia em Σ tem um limite superior, e portanto, pelo lema de Zorn, segue que Σ tem um elemento maximal (C^*, ψ^*) . Por construção segue que

$T \subseteq C^* \subseteq B$. Mostremos que $B = C^*$.

Suponhamos que $B \neq C^*$ e tomemos $\beta \in B$ tal que $\beta \notin C^*$. Seja $I = \{ \lambda \in A \mid \lambda.\beta \in C^* \}$; temos que I é um ideal de A .

Definamos $f(\lambda) = \Psi^*(\lambda.\beta)$. A aplicação f é um A -homomorfismo e por hipótese pode ser estendido a um A -homomorfismo $g: A \rightarrow X$. Assim, $g(\lambda) = \Psi^*(\lambda.\beta)$ se $\lambda \in I$.

Façamos $C = C^* + \lambda.\beta$. Se $c \in C$, então podemos escrever $c = c^* + \lambda.\beta$, onde $c^* \in C^*$ e $\lambda \in A$. Seja $c_1 = c_1^* + \lambda_1.\beta$ uma segunda tal representação. Então $\lambda - \lambda_1 \in I$ e portanto $\Psi^*(c^*) + g(\lambda) = \Psi^*(c_1^*) + g(\lambda_1)$. Podemos portanto definir $\Psi: C \rightarrow X$ por $\Psi(c^* + \lambda.\beta) = \Psi^*(c^*) + g(\lambda)$ e Ψ será um A -homomorfismo.

Se $t \in T$, então $\Psi(t) = \Psi(t + 0.\beta) = \Psi^*(t) = f(t)$. Assim, $(C, \Psi) \in \Sigma$. Como $C^* \subset C$ e Ψ estende Ψ^* isto contradiz a maximalidade de (C^*, Ψ^*) .

2.15. (Primos Associados)

Seja M um A -módulo, onde A é anel Noetheriano. Um ideal primo p de A é um primo associado de M se existir $x \in M$ tal que $\text{Ann}(x) = p$. Notação: $\text{Ass}_A(M)$.

i) $p \in \text{Ass}(M)$ se e somente se M contém um submódulo isomorfo a $\frac{A}{p}$.

Demonstração

$p \in \text{Ass}(M)$, então $p = \text{Ann}(x)$ para algum $x \in A$.
Seja $\phi: A \rightarrow M$ dada por $\phi(a) = a.x$. Temos que $\text{Ker } \phi = \text{Ann}(x) = p$ e que $\text{Im } \phi$ é submódulo de M , logo,

$$\text{Im } \phi \simeq \frac{A}{\text{Ker } \phi} \simeq \frac{A}{p}$$

Reciprocamente se $N \subset M$ e $N \simeq \frac{A}{p}$, então
 $N = \{a+p \mid a \in A\}$. Seja $M \in N$, $M \neq 0$, então $M = a+p$,
logo, $\text{Ann}(n) = \{x \in A \mid x.n = 0\} = \{x \in A \mid x(a+p) = 0\} =$
 $= \{x \in A \mid x.a \in p\} = \{x \in A \mid x \in p\} = p$, visto que $a \notin p$.

ii) Seja p um elemento maximal do conjunto de ideais
 $\{\text{Ann}(x) \mid x \in M \text{ e } x \neq 0\}$. Então $p \in \text{Ass}(M)$.

Demonstração

Basta mostrar que p é primo. Suponhamos $p = \text{Ann}(x)$,
 $a.b \in p$ e $b \notin p$. Como $b \notin p$, segue que, $bx \neq 0$ e $abx=0$.
Mas $\text{Ann}(bx) \supset \text{Ann}(x)$, logo, $\text{Ann}(bx) = p$ pois p é maximal
no conjunto $\{\text{Ann}(x)\}$. Portanto $a \in \text{Ann}(bx) = p$.

iii) $\text{Ass}(M) = \emptyset$ se e somente se $M = 0$.

Demonstração

$M = 0$, então claramente $\text{Ass}(M) = \emptyset$

Reciprocamente, suponhamos $M \neq 0$, então o conjunto de ideais da forma $\text{Ann}(x)$, onde $x \in M$ e $x \neq 0$ é não vazio e estes ideais são diferentes de A . Como A é Noetheriano

riano, este conjunto tem um elemento maximal, logo, o resultado segue de i).

iv) Seja M um A -módulo onde A é anel Noetheriano e $M \neq 0$.

Então existe uma cadeia de submódulos

$$(0) = M_0 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M \quad \text{tal que} \quad \frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \frac{A}{p_i}$$

para algum ideal primo p_i de A ($1 \leq i \leq n$).

Demonstração

Como $M \neq 0$, existe $p_1 \in \text{Ass}(M)$, logo, existe $M_1 \subset M$ tal que $M_1 \simeq \frac{A}{p_1}$.

Se $M_1 \neq M$, então aplicamos o mesmo procedimento para $\frac{M}{M_1}$ e portanto existe M_2 tal que $M_2 \simeq \frac{A}{p_2}$. Como M é finitamente gerado, o processo deve terminar com um número finito de passos.

v) $p \in \text{Ass}_A(M)$ se e somente se $S^{-1}p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$ ($S^{-1}p = p \cdot A_p$)

Demonstração

Se $p \in \text{Ass}_A(M)$, então $\exists N \subset M$ tal que $N \simeq \frac{A}{p}$, ou seja, $\frac{A_p}{p \cdot A_p} \simeq N_p \subset M_p$, mas isto implica que $p \cdot A_p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$.

Reciprocamente, suponhamos que p é ideal primo de A e que $S^{-1}p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$. Como A é Noetheriano, segue que $p = (a_1, \dots, a_n)$ e como $S^{-1}p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$, segue que existe $x \in M$ e $t \in S$ tal que $S^{-1}p = \text{Ann}(\frac{x}{t})$, assim,

$\frac{a_i}{1} \cdot \frac{x}{t} = 0$, o que implica que $\exists s_i \in S$ tal que $s_i \cdot a_i \cdot x = 0$.
 Seja $s = s_1 \dots s_n$. Se $a \in p$, então $s \cdot a \cdot x = 0$, logo,
 $p \subset \text{Ann}(s \cdot x)$.

Se $b \in A$ e $b \in \text{Ann}(sx)$, então $b \cdot s \cdot x = 0$, ou seja,
 $\frac{b}{1} \cdot \frac{x}{t} = 0$ e portanto $\frac{b}{1} \in \text{Ann}(\frac{x}{t}) = S^{-1}p$, o que implica
 que $b \in p$. Assim, $p = \text{Ann}(sx)$ e portanto $p \in \text{Ass}_A(M)$.

2.16. (Suporte)

Seja M um A -módulo. O conjunto dos ideais primos p de A tais que $M_p \neq 0$ é chamado de Suporte de M e denotado por $\text{Supp}(M)$.

i) $\text{Ass}(M) \subset \text{Supp}(M)$ e qualquer elemento minimal de $\text{Supp}(M)$ está contido em $\text{Ass}(M)$.

Demonstração

Seja $p \in \text{Ass}(M)$, então existe uma sequência exata $0 \rightarrow \frac{A_p}{p \cdot A_p} \rightarrow M_p$. Como a operação S^{-1} é exata, temos que

$0 \rightarrow \frac{A_p}{p \cdot A_p} \rightarrow M_p$ é exata. Mas $\frac{A_p}{p \cdot A_p} \neq 0$ pois do contrário, $A_p = p \cdot A_p$ e p conteria uma unidade. Portanto $M_p \neq 0$ e $p \in \text{Supp}(M)$.

Seja p um elemento minimal de $\text{Supp}(M)$. Como $p \in \text{Ass}(M)$ se e somente se $p \cdot A_p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$ podemos substituir A por A_p e M por M_p nas hipóteses, assumir que (A, p) é um anel local, $M \neq 0$ e que $M_q = 0$ para qualquer

primo $q \subset p$ (visto que p é um elemento minimal de suporte). Assim, $\text{Supp}(M) = \{p\}$ e como $\text{Ass}(M)$ é não vazio e está contido em $\text{Supp}(M)$, segue que $p \in \text{Ass}(M)$.

2.17. (Resolução Projetiva)

Uma resolução projetiva de um A -módulo X é uma seqüência exata da forma $\dots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$, onde cada C_i é um A -módulo projetivo.

Se C_i é livre para todo i , então a seqüência acima é chamada de resolução livre do módulo X .

i) Todo A -módulo X tem uma resolução livre (e portanto projetiva).

Demonstração

$X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ e portanto existe uma seqüência exata $0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{I_0} F_0 \xrightarrow{\Phi_0} X \rightarrow 0$ onde Φ_0 é sobrejeção, F_0 é um A -módulo livre, $X_0 = \text{Ker}(\Phi_0)$ e I_0 é a inclusão. Da mesma forma, sendo X_0 finitamente gerado, obtemos uma seqüência exata $0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{I_1} F_1 \xrightarrow{\Phi_1} X_0 \rightarrow 0$. Assim, sucessivamente, obtemos para todo $n > 0$ uma seqüência exata $0 \rightarrow X_n \xrightarrow{I_n} F_n \xrightarrow{\Phi_n} X_{n-1} \rightarrow 0$ onde F_n é livre.

Definamos a seqüência

$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ da seguinte forma:

$$C_n = \begin{cases} X & \text{se } n = -1 \\ F_n & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < -1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\partial_n = \begin{cases} \Phi_0 & \text{se } n = 0 \\ I_{n-1} \circ \Phi_n & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Para provar que C é uma resolução livre de X , falta mostrar que ela é exata, ou seja, mostrar que $\text{Im}(\partial_{n+1}) = \text{Ker}(\partial_n)$ para todo $n \geq 0$.

Como I_n é injetiva e Φ_n é sobre para todo $n \geq 0$, temos: $\text{Im}(\partial_{n+1}) = \text{Im}(I_n) = \text{Ker}(\Phi_n) = \text{Ker}(\partial_n)$.

Consideremos duas sequências exatas:

$$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$D: \dots \rightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} D_n \xrightarrow{\bar{\partial}_n} D_{n-1} \rightarrow \dots$$

Um homomorfismo $f: C \rightarrow D$ é uma família de homomorfismos $f = \{f_n: C_n \rightarrow D_n; n \in \mathbb{Z}\}$ em que vale a relação comutativa $\bar{\partial}_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$.

ii) Seja $h: X \rightarrow Y$ um homomorfismo dos A -módulos X e Y . Se lecionemos duas resoluções projetivas C e D de X e Y respectivamente. Então existe um homomorfismo $f: C \rightarrow D$ tal que $f_{-1} = h$.

Demonstração

Definamos $f_{-1} = h$, e como $C_n = 0$ para $n < -1$, definamos $f_n = 0$ se $n < -1$.

Para o caso $n = 0$ vamos considerar o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h = f_{-1} & & \\ D_0 & \xrightarrow{\bar{\partial}_0} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como C_0 é projetivo e $\bar{\partial}_0$ é sobre, existe $f_0: C_0 \rightarrow D_0$ tal que $\bar{\partial}_0 \circ f_0 = f_{-1} \circ \partial_0$.

Para $n > 0$, suponhamos por indução que exista $f_n: C_m \rightarrow D_m$, para todo $m < n$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_m & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1} & & \\ \downarrow f_m & & \downarrow f_{m-1} & & \\ D_m & \xrightarrow{\bar{\partial}_m} & D_{m-1} & & \end{array} \quad \text{comuta.}$$

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\ D_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} & D_{n-2} \end{array}$$

Pela hipótese de indução, segue que

pleta a indução.

2.18. (Homologia-Cohomologia)

Uma seqüência $\dots \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow \dots$ de A-mód

dulos e homomorfismos é semi-exata se $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Se inteiros decrescentes são usados como índices, a seqüência é chamada decrescente. Se os inteiros são crescentes, então a seqüência é chamada crescente.

Dado uma seqüência semi-exata decrescente,

$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$, o Kernel de ∂_n

é denotado por $Z_n(C)$ e a imagem de ∂_{n+1} é denotado por

$B_n(C)$.

O módulo $H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$ é chamado de módulo de Ho

mologia n-dimensional de C.

Seqüência semi-exata crescente.

e $\bar{\partial}_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$. Então, $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ e

$$f_n(B_n(C)) \subset B_n(D).$$

Demonstração

Temos a seguinte situação

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \dots & \rightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & D_{n-1} \rightarrow \dots \end{array}$$

onde os quadrados são comutativos.

Se $x \in Z_n(C)$, então $\partial_n(x) = 0$, logo

$$(f_{n-1} \circ \partial_n)(x) = 0, \text{ ou seja, } (\bar{\partial}_n \circ f_n)(x) = 0 \text{ e portanto}$$

$$f_n(x) \in \text{Ker } \bar{\partial}_n = Z_n(D).$$

Se $x \in B_n(C)$, então $x = \partial_{n+1}(y)$, onde $y \in C_{n+1}$,

$$f_n(x) = (f_n \circ \partial_{n+1})(y) = (\bar{\partial}_{n+1} \circ f_{n+1})(y) =$$

iii) Se $f: C \rightarrow D$ e $g: D \rightarrow E$ são homomorfismos de seqüências decrescentes, então a família

$h = \{g_n \circ f_n: C_n \rightarrow E_n\}$ é um homomorfismo de seqüências e $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

iv) Se $h: C \rightarrow D$ é o homomorfismo nulo entre seqüências, isto é, $h = \{0: C_n \rightarrow D_n, n \in \mathbb{Z}\}$, então $H_n(h) \equiv 0$.

Uma seqüência curta de seqüências decrescentes

$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ é exata se a seqüência
 $0 \rightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \rightarrow 0$ é exata para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

v) Se a seqüência de seqüências decrescentes

$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ é exata, então a seqüência
 $H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$ é exata.

Demonstração

Temos o seguinte diagrama onde cada quadrado co

Como $g \circ f = 0$, segue que $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0$. Falta mostrar então que $\text{Ker}(H_n(g)) \subset \text{Im}(H_n(f))$.

Seja α um elemento de $H_n(D)$ tal que $\alpha \in \text{Ker}(H_n(g))$.

Temos: $\alpha = z + B_n(D)$, onde $z \in \text{Ker}(\bar{\partial}_n)$,

$0 = (H_n(g))(\alpha) = g_n(z) + B_n(E)$, ou seja, $g_n(z) \in B_n(E)$.

Assim, existe $y \in E_{n+1}$ tal que $g_n(z) = \bar{\partial}_{n+1}(y)$. Como g_{n+1} é sobre, existe $x \in D_{n+1}$ tal que $y = g_{n+1}(x)$. Temos

$$\begin{aligned} \text{então: } g_n(z - \bar{\partial}_{n+1}(x)) &= g_n(z) - g_n(\bar{\partial}_{n+1}(x)) = \\ &= g_n(z) - \bar{\partial}_{n+1}(g_{n+1}(x)) = g_n(z) - \bar{\partial}_{n+1}(y) = g_n(z) - g_n(z) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $z - \bar{\partial}_{n+1}(x) \in \text{Ker}(g_n) = \text{Im}(f_n)$, logo, existe um elemento $w \in C_n$, tal que $z - \bar{\partial}_{n+1}(x) = f_n(w)$. Assim,

$$\begin{aligned} f_{n-1}(\partial_n(w)) &= \bar{\partial}_n(f_n(w)) = \bar{\partial}_n(z - \bar{\partial}_{n+1}(x)) = \\ &= \bar{\partial}_n(z) - \bar{\partial}_n(\bar{\partial}_{n+1}(x)) = 0. \end{aligned}$$

Como f_{n-1} é injetiva, segue que $\partial_n(w) = 0$, ou seja, $w \in Z_n(C)$. Sendo $\alpha = z + B_n(D)$ e $\bar{\partial}_{n+1}(x) \in B_n(D)$, segue que $H_n(f)(w + B_n(C)) = f_n(w) + B_n(D) = z - \bar{\partial}_{n+1}(x) + B_n(D) = z + B_n(D) = \alpha$, e portanto, $\text{Ker}(H_n(g)) \subset \text{Im}(H_n(f))$.

v) Nas condições acima, existe $\delta_n: H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$ tal que a sequência

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C) \rightarrow H_n(D) \rightarrow H_n(E) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C) \rightarrow \dots$$

é exata. δ_n é chamado homomorfismo de conexão

[[11] pag. 49].

2.19. (Tor_n^A)

Seja X e Y A -módulos, $C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ uma resolução projetiva de X e consideremos o produto tensorial:

$$C \otimes_A Y: \dots \rightarrow C_{n+1} \otimes Y \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes I} C_n \otimes Y \xrightarrow{\partial_n \otimes I} C_{n-1} \otimes Y \rightarrow \dots$$

Como $(\partial_n \otimes I) \circ (\partial_{n+1} \otimes I) = (\partial_n \circ \partial_{n+1}) \otimes (I) = 0$, segue que a sequência $C \otimes Y$ é semi exata decrescente, logo, podemos considerar as homologias $H_n(C \otimes Y)$.

i). Se $D: \dots \rightarrow D_{n+1} \rightarrow D_n \rightarrow D_{n-1} \rightarrow \dots$ é outra resolução projetiva de X , então $H_n(C \otimes Y) \simeq H_n(D \otimes Y)$.

[[11] pag. 131].

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o módulo $H_n(C \otimes_A Y)$ é chamado "produto torção n -dimensional sobre A dos módulos X e Y , e será denotado por $\text{Tor}_n^A(X, Y)$.

ii) $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$ para todo $n \leq 0$.

Demonstração

Temos $C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \rightarrow 0$ exata e portanto

também é exata, logo, segue o resultado.

iii) Se X é projetivo, então $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

iv) $\text{Tor}_n(X, Y) \simeq \text{Tor}_n(Y, X)$. [[11] pag. 142].

2.20. (Ext_A^n)

Seja X e Y A -módulos e $C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ uma resolução projetiva de X . Temos a aplicação identidade $i: Y \rightarrow Y$ e consideremos a sequência $\text{Hom}_A(C, Y): \dots \rightarrow \text{Hom}_A(C_n, Y) \xrightarrow{\delta_n} \text{Hom}_A(C_{n+1}, Y) \rightarrow \dots$, onde $\delta_n = \text{Hom}(\partial_n, i)$, isto é, se $\phi \in \text{Hom}(C_n, Y)$, então $\delta_n(\phi) = \phi \circ \partial_n$.

Temos $(\delta_{n+1} \circ \delta_n)(\phi) = \delta_{n+1}(\phi \circ \partial_n) = \phi \circ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, logo, a sequência $\text{Hom}_A(C, Y)$ é semi exata e crescente.

i) Se $D: \dots \rightarrow D_{n+1} \rightarrow D_n \rightarrow D_{n-1} \rightarrow \dots$ é outra resolução projetiva de X , então $H^n(\text{Hom}(C, Y)) \simeq H^n(\text{Hom}(D, Y))$.

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o módulo $H^n(\text{Hom}(C, Y))$ é chamado produto extensão n -dimensional sobre A dos módulos X e Y e denotado por $\text{Ext}_A^n(X, Y)$. Por conveniência, definimos $\text{Ext}_A^0(X, Y) = \text{Hom}_A(X, Y)$.

ii) $H^n(\text{Hom}(C, Y)) = 0$ para todo $n \leq 0$.

iii) Se X é projetivo, então $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ para todo $n > 0$.

Demonstração

Seja $C: 0 \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow 0$ uma resolução projetiva de X , daí, $\text{Hom}(C, Y)$ é exata e portanto $H^n(\text{Hom}(C, Y)) = 0 \forall n > 0$.

iv) Se o módulo Y é injetivo, então $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ para todo $n > 0$.

Demonstração

Seja $C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ uma resolução projetiva de X . A seqüência $\text{Hom}(C, Y)$ é semi-exata. Mostremos que esta seqüência é exata. Para isto basta mostrar que $\text{Ker}(\delta_n) \subset \text{Im}(\delta_{n-1})$, onde $\delta_K(\Phi) = \text{Hom}(\partial_K, i)(\Phi) = \Phi \circ \partial_K$.

Seja $f \in \text{Hom}(C_{n-1}, Y)$ tal que $f \in \text{Ker}(\delta_n)$, ou seja, $f \circ \partial_n = 0$. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} \\ & & \downarrow f & & \\ & & Y & & \end{array}$$

Por 2.14 - v) segue que existe $\psi: C_{n-2} \rightarrow Y$ tal que $\psi \circ \partial_{n-1} = f$, ou seja, $\delta_{n-1}(\psi) = f$ e portanto $f \in \text{Im}(\delta_{n-1})$.

v) Se o módulo X tem uma resolução projetiva C tal que $C_n = 0$ para todo $n > m$, então $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ para todo $n > m$ e todo módulo Y . Além disso, $\text{Ext}^m(X, Y) = \text{Coker} [\text{Hom}(\partial_m, i)] = \text{Coker}(\delta_m)$.

Demonstração

Como $\text{Hom}(C_n, Y) = 0$ para todo $n > m$, a primeira afirmação é óbvia.

A sequência $\text{Hom}(C, Y)$ termina da seguinte maneira

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(C_{m-1}, Y) \xrightarrow{\delta_m} \text{Hom}(C_m, Y) \xrightarrow{\delta_{m+1}} 0, \text{ logo,}$$

$\text{Ker } \delta_{m+1} \simeq \text{Hom}(C_m, Y)$, enquanto que $\text{Ext}^m(X, Y) =$

$$= \frac{\text{Ker}(\delta_{m+1})}{\text{Im}(\delta_m)} = \frac{\text{Hom}(C_m, Y)}{\text{Im}(\delta_m)} = \text{Coker}(\delta_m)$$

$$\text{Seja } C: \dots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\delta_0} X \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva de X . A sequência $\text{Hom}(C, Y)$ é semi exata crescente e como $H^n(\text{Hom}(C, Y)) = 0$ para $m \leq 0$, podemos trabalhar com a sequência

$$C^*: \dots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \rightarrow 0, \text{ e ainda teremos}$$

$H^n(\text{Hom}(C^*, Y)) \simeq H^n(\text{Hom}(C, Y))$. A sequência C^* é chamada de resolução projetiva reduzida de X .

vi) Para todo A -módulo X e toda sequência exata

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0 \text{ de } A\text{-módulos, temos que a sequência:}$$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}^n(X, U) &\xrightarrow{f_n^*} \text{Ext}^n(X, V) \xrightarrow{g_n^*} \text{Ext}^n(X, W) \xrightarrow{\delta^n} \\ &\rightarrow \text{Ext}^{n+1}(X, U) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

é exata, onde

$$f^* = \text{Ext}^n(i, f) = H^n(f)$$

$$g^* = \text{Ext}^n(i, g) = H^n(g) \quad \text{e}$$

δ^n é o homomorfismo de conexão.

Seja C^* uma resolução projetiva reduzida de X , então a sequência

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_n^*, U) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(C_n^*, V) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(C_n^*, W) \rightarrow 0 \quad \text{onde}$$

$f^* = \text{Hom}(I_n, f)$, $g^* = \text{Hom}(i_n, g)$ é exata, visto que C_n^* é projetivo. Assim, a sequência

$0 \rightarrow \text{Hom}(C^*, U) \rightarrow \text{Hom}(C^*, V) \rightarrow \text{Hom}(C^*, W) \rightarrow 0$ é uma sequência exata de seqüências crescentes, e portanto, de maneira análoga à de 2.18 - v) temos uma sequência exata das cohomologias,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^n(\text{Hom}(C^*, U)) &\xrightarrow{f_n^*} H^n(\text{Hom}(C^*, V)) \xrightarrow{g_n^*} H^n(\text{Hom}(C^*, W)) \\ &\xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(\text{Hom}(C^*, U)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Esta seqüência começa com $0 \rightarrow \text{Hom}(X, U) \rightarrow \text{Hom}(X, V) \rightarrow \text{Hom}(X, W) \xrightarrow{\delta^1} \text{Ext}^1(X, U) \rightarrow \dots$

vii) Para todo A -módulo Y e toda seqüência exata curta

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0 \quad \text{de } A\text{-módulos, a seqüência}$$

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^n(W, Y) \xrightarrow{g_n^*} \text{Ext}^n(V, Y) \xrightarrow{f_n^*} \text{Ext}^n(U, Y) \xrightarrow{\delta^n}$$

$\text{Ext}^{n+1}(W, Y) \rightarrow \dots$ é exata. Esta seqüência começa

$$\text{com } 0 \rightarrow \text{Hom}(W, Y) \rightarrow \text{Hom}(V, Y) \rightarrow \text{Hom}(U, Y) \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\text{Ext}^1(W, Y) \rightarrow \dots$$

viii) Seja X e Y A -módulos e $S = A - p$ onde p é um ideal primo de A . Então $\text{Ext}_A^n(X, Y)_p = \text{Ext}_{A_p}^n(X_p, Y_p)$. [[16] 3.E].

ix) A multiplicação por $\alpha \in A$ em $\text{Ext}_A^i(M, A)$ é induzida pela multiplicação por α em A ou pela multiplicação por α em M .

Demonstração

Tomemos uma resolução projetiva de M .

$$\begin{array}{ccccccc} C: & \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & M & \rightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \\ C: & \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e a multiplicação por $\alpha \in A$ em M .

Existe um homomorfismo $f: C \rightarrow C$ tal que $f_{-1} = \alpha$ e $\partial_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial_i$. Mas a multiplicação por α satisfaz a comutatividade dos quadrados, logo $f_i = \alpha$.

Consideremos as seqüências induzidas, onde

$i: A \rightarrow A$ é a identidade

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \delta_0 = \text{Hom}(\partial_1, i) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 0 \rightarrow & \text{Hom}_A(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_0, A) & \xrightarrow{\delta_0} & \text{Hom}_A(P_1, A) & \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, A) \rightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\alpha, i) & & \downarrow \text{Hom}(\alpha, i) & \downarrow \text{Hom}(\alpha, i) \\ 0 \rightarrow & \text{Hom}_A(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_0, A) & \xrightarrow{\delta_0} & \text{Hom}_A(P_1, A) & \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, A) \rightarrow \dots \end{array}$$

$e^1(M)$ é a Homologia em $\text{Hom}_A(P_1, A)$ definida da seguinte maneira

$$\text{Hom}(\alpha, i) : \frac{\text{Hom}_A(P, A)}{\text{Im } \delta_0} \rightarrow \frac{\text{Hom}_A(P, A)}{\text{Im } \delta_0}$$

$$\begin{aligned} \Phi + \text{Im } \delta_0 &\xrightarrow{\text{Hom}(\alpha, i)^*} \text{Hom}(\alpha, i)(\Phi) + \text{Im } \delta_0 = \\ &= \Phi \circ \alpha + \text{Im } \delta_0 = \alpha \cdot \Phi + \text{Im } \delta_0 \end{aligned}$$

Para o caso de $\alpha: A \rightarrow A$, consideremos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \dots & \rightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \rightarrow 0 \end{array} \quad \text{e as induzidas}$$

$$\delta_0 = \text{Hom}(\partial_1, \alpha)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_A(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_0, A) & \xrightarrow{\delta_0} & \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, A) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(i, \alpha) \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_A(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_0, A) & \rightarrow & \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_2, A) \rightarrow \dots \end{array}$$

Como $\text{Hom}(i, \alpha)(\Phi) = \alpha \circ \Phi = \alpha \cdot \Phi$ e portanto análogo ao que foi feito acima.

2.21. (Dimensão Projetiva)

Seja m um inteiro tal que $m \geq -1$. Um A -módulo X é dito ter dimensão projetiva (ou dimensão homológica) $\leq m$ se existir uma resolução projetiva C de X satisfazendo $C_n = 0$ para todo $n > m$. Se nenhum inteiro m satisfizer estas condições, então X é dito ter dimensão projetiva ∞ . O menor inteiro m tal que dimensão projetiva de $X \leq m$ é chamado de dimensão projetiva do módulo X e denotado por

$\dim_A(X)$, ou simplesmente $\dim(X)$ quando não houver ambiguidade.

i) O módulo nulo tem resolução projetiva C com $C_n = 0$ para todo n , logo, $\dim(0) = -1$.

ii) Se X é projetivo, então X tem uma resolução projetiva $0 \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow 0$ e portanto $\dim(X) = 0$.

iii) Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, X um A -módulo e $i: X \rightarrow X$ a identidade. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) X é de dimensão projetiva $\leq m$

b) Para toda sequência exata $0 \rightarrow B \rightarrow C_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ de A -módulos, onde os C_i são projetivos, o módulo B é projetivo.

c) $\text{Ext}^{m+1}(X, Y) = 0$ para todo A -módulo Y .

Demonstração

$a \Rightarrow c$) Como $\dim(X) \leq m$, existe uma resolução projetiva C de X , com $C_n = 0$ para todo $n > m$, ou seja, $\text{Hom}(C_n, Y) = 0$ para todo $n > m$. Consequentemente $\text{Ext}_A^n(X, Y) = H^n(\text{Hom}(C, Y)) = 0$ para todo $n > m$.

$b \Rightarrow a$) Seja C uma resolução projetiva de X e $A = \text{Im}(\partial_m)$ onde $\partial_m: C_m \rightarrow C_{m-1}$. Por b) segue que $0 \rightarrow A \rightarrow C_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de X e por

tanto $\dim(X) \leq m$.

$c \Rightarrow b$) Tomemos a seqüência exata $0 \rightarrow B \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \rightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} X \rightarrow 0$ onde C_i é projetivo e suponhamos que B não é projetivo. Portanto qualquer resolução projetiva de B será da forma $\dots \rightarrow D_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} D_0 \xrightarrow{\bar{\partial}_0} B \rightarrow 0$, com D_1 e D_0 não nulos. Como $\bar{\partial}_0: D_0 \rightarrow B$ é sobrejetiva e $B \simeq \text{Im}(\partial_m)$, segue que a seqüência $\dots \rightarrow D_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} D_0 \xrightarrow{\bar{\partial}_0} C_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de X . Temos então que $\text{Ext}^{m+1}(X, Y)$ é a Cohomologia em $\text{Hom}_A(D_1, Y)$, mas $\text{Ext}_A^1(B, Y)$ também é a cohomologia em $\text{Hom}_A(D_1, Y)$, ou seja $\text{Ext}_A^{m+1}(X, Y) = \text{Ext}_A^1(B, Y) = 0$.

Seja $\Phi: F \rightarrow B$, onde F é livre e Φ é sobrejeção. Temos então a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Ker}(\Phi) \xrightarrow{I_n} F \rightarrow B \rightarrow 0$. Esta seqüência induz a seqüência exata $\text{Hom}(F, \text{Ker}(\Phi)) \xrightarrow{s} \text{Hom}(I_n, I) \rightarrow \text{Hom}(\text{Ker} \Phi, \text{Ker} \Phi) \rightarrow \text{Ext}_A^1(B, \text{Ker} \Phi) \rightarrow \dots$. Mas $\text{Ext}_A^1(B, Y) = 0 \quad \forall$ A -módulo Y , logo $\text{Ext}_A^1(B, \text{Ker} \Phi) = 0$, ou seja, existe $g: F \rightarrow \text{Ker} \Phi$ tal que $s(g) = \text{Id}_{(\text{Ker} \Phi)}$, e portanto por 2.6 - vi) segue que a seqüência $0 \rightarrow \text{Ker}(\Phi) \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow 0$ cinde, isto é, $F \simeq B \oplus \text{Ker} \Phi$ e consequentemente B é projetivo, o que contradiz nossa afirmação inicial.

iv) $\text{Dim}(X) = \sup_m \{\dim \text{homológica}(X_m)\}$ onde m é ideal maximal.

Demonstração

Suponhamos que $\dim.\text{homol.}(X) = n$, então existe uma resolução projetiva minimal $0 \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ de X , e dado m , ideal maximal de A , segue que

$0 \rightarrow (C_n)_m \rightarrow (C_{n-1})_m \rightarrow \dots \rightarrow (C_0)_m \rightarrow X_m \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de X_m (2.13 vi) , logo $\dim.\text{homol.}(X) \geq \dim.\text{homol.}(X_m)$ para todo m maximal, ou seja,

$$\dim(X) \geq \sup_m \{ \dim(X_m) \} \quad (1)$$

Suponhamos que $\sup_m \{ \dim(X_m) \} = K$, ou seja $\dim(X_m) \leq K \quad \forall \quad m$ maximal de A . Por iii) segue que $\text{Ext}_{A_m}^{K+1}(X_m, Y) = 0$ para todo A_m -módulo Y . Em particular, para todo A_m -módulo da forma B_m , onde B é A -módulo, temos que $\text{Ext}_{A_m}^{K+1}(X_m, B_m) = 0$ ou seja, $\text{Ext}_A^{K+1}(X, B)_m = 0 \quad \forall \quad m$ maximal, o que implica por 2.12 que

$$\text{Ext}_A^{K+1}(X, B) = 0$$

$$\text{e portanto } \dim(X) \leq K = \sup_m \{ \dim(X_m) \} \quad (2)$$

Por (1) e (2) segue o resultado.

2.22. (Dimensão Global)

A dimensão global do anel A é o inteiro (ou ∞)
 $\dim(A) = \sup \{ \dim(X) \mid X \text{ é } A\text{-módulo} \}$

a) $\text{Dim}(A) \leq m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.

b) $\text{Dim}(X) \leq m$ para todo A-módulo X .

c) $\text{Ext}_A^{m+1}(X, Y) = 0$ para todo par de A-módulos X e Y .

Este fato decorre imediatamente da definição de $\text{dim}(A)$ e 2.21 - iii).

ii) $\text{Dim}(A) = \sup_m \{\text{dim}(A_m)\}$ onde m é ideal maximal de A .

Isto decorre imediatamente de 2.21 - iv).

2.23. (Depth(M))

Seja M um A-módulo. Uma sequência $a_1, \dots, a_r$ de elementos de A é chamado M-regular se para cada $1 \leq i \leq r$, a_i não é divisor do zero em $M/(a_1M + \dots + a_{i-1}M)$, ou seja, não existe $y \in M/(a_1M + \dots + a_{i-1}M)$ tal que $a_i \cdot y = 0$.

Quando todos os a_i pertencem a um ideal I , dizemos que $a_1, \dots, a_r$ é uma sequência M-regular em I . Se, além disso, não existir $b \in I$ tal que $a_1, \dots, a_r, b$ seja M-regular, então $a_1, \dots, a_r$ é chamada de sequência M-regular maximal em I .

i) O comprimento de uma sequência M-regular maximal em I depende de M e de I apenas e é igual ao número n tal que $\text{Ext}_A^i(A/I, M) = 0$ ($i < n$) e $\text{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0$ [[16] pag. 97].

O comprimento de uma sequência M regular maximal em I é chamado de I -depth de M e denotado por $\text{depth}_I(M)$. Quando (A, m) é um anel local, escrevemos $\text{depth}(M)$ ou $\text{depth}_A(M)$ ao invés de $\text{depth}_m(M)$.

ii) $\text{Depth}(M) = 0$ se e somente se $m \in \text{Ass}(M)$, onde (A, m) é anel local Noetheriano.

($\Leftarrow$) Se $m \in \text{Ass}(M)$, então $m = \text{Ann}(x)$ para algum $x \in M$, ou seja, dado $y \in m$, y é divisor do zero em M , e portanto $\text{depth}(M) = 0$.

($\Rightarrow$) $\text{Depth}(M) = 0$ significa que $\forall x \in M$, x é divisor do zero em M , ou seja, m é elemento maximal do conjunto de ideais $\{\text{Ann}(x) \mid x \in M \text{ e } x \neq 0\}$, logo, por 2.15 - ii) segue que $m \in \text{Ass}(M)$.

iii) $\text{Depth}(M_p) = 0$ como A_p -módulo se e somente se $p.A_p \in \text{Ass}_{A_p}(M_p)$ se e somente se $p \in \text{Ass}(M)$.

Segue imediatamente de 2.16 - v) e de ii) acima.

2.24. (Lattices)

Seja A um domínio de integridade comutativo, K seu corpo de frações e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K . Uma Lattice de V com respeito a A (ou simplesmente Lattice de V) é qualquer sub- A -módulo M de V satisfazendo a seguinte condição:

existem dois sub-A-módulos livres L_1, L_2 de V tal que $L_1 \subset M \subset L_2$ e $\text{rank}_A(L_1) = \text{rank}_K(V)$ onde $\text{rank}_A(L_1) = \text{dimensão do espaço vetorial } L_1 \otimes_A K \text{ sobre } K$ e $\text{rank}_K(V) = \text{dimensão de } V \text{ sobre } K$.

Um A-módulo M é reflexivo se $M^{**} \simeq M$, onde $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$.

i) M^* é reflexivo [[4] pag. 517].

ii) Se F é livre, então $F^* \simeq F$ [[11] 8.4 pag. 70].

iii) Seja M uma Lattice de V , as seguintes afirmações são equivalentes:

a) M é reflexivo

b) $M = \sum_{p \in P} M_p$, onde $P = \text{primos de } A \text{ de altura } 1$

c) $\text{Ass}(\frac{V}{M}) \subset P$ [[4] pag. 518].

iv) Seja M um A-módulo e $V = \text{Hom}_A(M, K)$. Então V é espaço vetorial sobre K de dimensão finita e M^* identificado com um sub-A-módulo de V é uma Lattice de V . [[4] pag 518].

2.25. Seja M um A-módulo e Σ o conjunto dos sub-módulos de M , ordenado pela relação $(\subseteq)$. M é dito Noetheriano se M satisfaz uma das seguintes condições equivalentes.

a) Toda sequência crescente $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ em Σ é estacio

nária.

b) Todo subconjunto não vazio de Σ tem um elemento maxi
mal.

i) Se M é finitamente gerado então M é Noetheriano
[[1] 6.2].

ii) Se $\Phi: M \rightarrow M$ é um A -homomorfismo sobrejetor, então Φ
é isomorfismo.

Demonstração

$\text{Ker } \Phi \subset \text{Ker } \Phi \circ \Phi$ pois se $x \in \text{Ker } \Phi$, então $(\Phi \circ \Phi)(x) =$
 $= \Phi(\Phi(x)) = \Phi(0) = 0$.

Consideremos então a cadeia de submódulos de M ,
 $\text{Ker } \Phi \subseteq \text{Ker } \Phi^2 \subseteq \text{Ker } \Phi^3 \subseteq \dots$. Como M é Noetheriano, esta
cadeia é estacionária, ou seja, $\exists N \in \mathbb{Z}$ tal que
 $\text{Ker } \Phi^N = \text{Ker } \Phi^{N+1} \dots$

Seja $x \in \text{Ker } \Phi \cap \text{Im } \Phi^N$, então $\Phi(x) = 0$ e
 $x = \Phi^N(y)$, logo, $0 = \Phi(x) = \Phi^{N+1}(y)$ e portanto $y \in$
 $\text{Ker } \Phi^{N+1} = \text{Ker } \Phi^N$, ou seja, $x = \Phi^N(y) = 0$. Como Φ é so
bre, segue que Φ^N também é sobre, e portanto $\text{Ker } \Phi \cap M = 0$,
sendo então Φ injetiva.

2.26. Um A -módulo M é pseudo-nulo se $\forall x \in M$, $\text{ann}(x)$
não está contido em qualquer ideal principal.

Seja M e N dois A -módulos e $f: M \rightarrow N$ um homomorfismo.
Se $\text{Ker}(f)$ e $\text{Coker}(f)$ forem pseudo-nulos, então f é

chamada de pseudo-isomorfismo.

i) Existe um pseudo isomorfismo $\phi: M \rightarrow M^{**}$ [[4] pag.524 exemplo 3].

ii) Seja T um A -módulo finitamente gerado. Então existem duas famílias finitas $(n_i)_{i \in I}$ e $(p_i)_{i \in I}$ onde os n_i são inteiros ≥ 1 e os p_i são ideais primos de A de altura 1 tal que, se fizermos $T' = \bigoplus_{i \in I} \frac{A}{p_i^{n_i}}$, existe um pseudo isomorfismo $\phi: T \rightarrow T'$ [[4] pag. 526].

2.27. Se I é um ideal principal em um anel de integridade local A e $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = I = (x)$, então $(\alpha_i) = I$ para algum i .

Demonstração

Como I é ideal principal e A é anel de integridade comutativo, segue que $I \simeq A$ como A -módulos.

Seja m o ideal maximal de A . De [2.10.ii] vem que

$\frac{I}{m.I} \simeq \frac{A}{m} \otimes_A I \simeq \frac{A}{m} \otimes_A A \simeq \frac{A}{m}$, ou seja, $\frac{I}{m.I}$ é espaço vetorial de dimensão 1 sobre o corpo $\frac{A}{m}$.

Temos que $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ geram $\frac{I}{m.I}$ sobre $\frac{A}{m}$, logo, existe $\bar{\alpha}_i$ tal que $(\bar{\alpha}_i) = \frac{I}{m.I}$ e portanto, por 2.3. segue que $(\alpha_i) = I$.

CAPÍTULO II

INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos um estudo das propriedades do anel Λ_n e de seus módulos, a seguir, particularizaremos e aumentamos estes resultados para o importante caso $n = 1$. Dentro desse espírito, estudamos os módulos de tipo K, que são importantes pelo fato dos módulos de Alexander serem de tipo K, e os ideais elementares, visto que tais ideais nos dão algumas propriedades complementares dos Λ -módulos.

As principais ferramentas utilizadas são: o funtor Ext, seqüências exatas, a dimensão de Λ_n , o fato que todo Λ_n -módulo projetivo é livre e os resultados já desenvolvidos no capítulo anterior.

Quanto à notação, escrevemos $e^i(M)$ para $\text{Ext}_{\Lambda_n}^i(M, \Lambda_n)$, $\dim \Lambda_n$ para dimensão global de Λ_n e $\dim_K \Lambda_n$ para a dimensão de Krull de Λ_n .

1.2. Λ_n é Noetheriano:

Seja $S_i = \{1, t_i, t_i^2, \dots\}$; $i = 1, 2, \dots, n$, então $\Lambda_n = S_n^{-1}(S_{n-1}^{-1}(\dots(S_1^{-1} Z[t_1, \dots, t_n])\dots))$. Como $Z[t_1, \dots, t_n]$ é Noetheriano [cap. I - 1.3-i], segue que Λ_n é Noetheriano [I-1.3-ii].

1.3. Λ_n é Domínio de Krull:

Por [I - 1.7 - i] temos que $Z[t_1, \dots, t_n]$ é domínio de Krull e por [I - 1.7 - ii] segue que Λ_n é domínio de Krull.

1.4. Λ_n é Domínio de Fatoração Única:

Demonstração

A demonstração será feita num caso mais geral, isto é, se A é domínio de fatoração única, então $S^{-1}A$ é domínio de fatoração única, onde $S = \{1, t, t^2, \dots\}$.

Seja $x \in S^{-1}A$, então $x = t^m a$, onde $a \in A$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se, além disso, supormos que $t \nmid a$ (t não divide a), então $x = t^m a$ de forma única, pois caso contrário, $x = at^m = bt^n$, ou seja, $at^{m-n} = b$ e portanto $t \mid b$ (absurdo).

Como A é domínio de fatoração única, segue que $a = t^{k_1} a_1 \dots a_i$, ou seja, $x = t^k a_1 \dots a_i$, onde cada a_i é irreduzível em A .

Se c é irreduzível em A , então c é irreduzível

em $S^{-1}A$, pois caso contrário, teríamos $c = t^{K_2} h_1 \dots h_2$ onde $h_i \in S^{-1}A$ e $K_2 \in \mathbb{Z}$. Mas $h_i = t^{m_i} f_i$, onde $m_i \in \mathbb{Z}$ e $f_i \in A$, logo, $c = t^{K_2} t^{m_1} \dots t^{m_2} f_1 \dots f_2 = t^{K_3} f_{11} \dots f_{11} f_{21} \dots f_{2p}$, onde f_{ij} é irreduzível em A . Mas isto é uma contradição pois $c \in A$ e c é irreduzível em A .

Assim, temos que $x = t^n a$ de forma única e $t^n a = t_{a_1}^n \dots a_m$ de forma única, onde a_j é irreduzível em $S^{-1}A$, ou seja, $S^{-1}A$ é domínio de fatoração única.

Particularizando para $A = \Lambda_n$, a prova segue indutivamente como em 1.2.

1.5. $\dim_K \Lambda_n = n+1$ (dimensão de Krull):

Demonstração

Seja p um primo em $\mathbb{Z}$, temos: $Z_p \approx \frac{\mathbb{Z}}{(p)} \approx \frac{\mathbb{Z}[t_1]}{(p, t_1-1)} \approx \dots$

$$\approx \frac{\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]}{(p, t_1-1, \dots, t_n-1)} \quad \text{e portanto } m = (p, t_1-1, \dots, t_n-1)$$

é maximal visto que Z_p é corpo.

A altura de m em $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ é $n+1$ pois $0 \subset (p) \subset (p, t_1-1) \dots \subset m$ é uma cadeia de ideais primos maximal em m , e como $m \cap S_i = \emptyset$, onde $S_i = \{1, t_i, t_i^2, \dots\}$, segue que a cadeia acima é uma cadeia de ideais primos em Λ_n , ou seja, $\dim_K \Lambda_n \geq n+1$ (i)

Em [[16] pag. 83] temos que $\dim_K \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] = n+1$, e por [I-1.1.ii] temos que $\dim_K S^{-1}A \leq \dim_K A$, ou

seja, $\dim_K \Lambda_n \leq \dim_K Z[t_1, \dots, t_n] = n+1$. (ii)

Comparando (i) e (ii) segue o resultado.

1.6. Se p é ideal primo de altura 1 em Λ_n , então p é principal:

Demonstração

Seja $a \in p$ e $a \neq 0$. Λ_n é domínio de fatoração única, logo, $a = u \cdot \pi_1 \dots \pi_n$ onde u é uma unidade e π_i é irredutível em Λ_n .

Temos então, $p \supset (a) = (u \cdot \pi_1 \dots \pi_n) = (\pi_1 \dots \pi_n)$ e portanto $\pi_1 \dots \pi_n \in p$. Como p é primo, segue que $\pi_i \in p$ para algum i . Mas (π_i) é primo [I.1.11] e como altura de $p = 1$, segue que $(\pi_i) = p$, ou seja, p é principal.

1.7. Se M é Λ_n -módulo projetivo ou $Z[t_1, \dots, t_n]$ -módulo projetivo, então M é livre:

Veja [[11] pag. 147].

1.8. Definição: Um anel local (A, m) tal que $\dim_K A = d$ é dito regular se m é gerado por d elementos. Se A não for local, então A é regular se para todo ideal maximal m , o anel local A_m é regular.

1.9. Se A é regular, então $\dim A = \dim_K A$:

Veja [[2] teo.4.7].

1.10. Um anel A de dim finita é regular:

Veja [[2] prop.4.5].

1.11. Se A é um anel tal que para todo ideal primo p a localização A_p é regular, então, o anel polinomial $A[t_1, \dots, t_n]$ tem a mesma propriedade.

Veja [[16] pag. 126].

1.12. $Z[t_1, \dots, t_n]$ é regular:

Demonstração

Por 1.11., basta mostrar que para todo ideal primo (p) a localização $Z_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$, onde $m \in Z$ e $n \in Z - (p)$ é regular.

Temos que $Z_{(p)}$ é domínio de ideais principais, logo, $\dim_K Z_{(p)} = 1$, além disso, seu ideal maximal é o ideal gerado por $\left(\frac{p}{1} \right)$. Portanto $Z_{(p)}$ é regular.

1.13. $\dim \Lambda_n = n+1$:

Demonstração

Basta demonstrar que a dimensão global de Λ_n é finita. Temos $Z[t_1, \dots, t_n]$ regular e portanto $\dim Z[t_1, \dots, t_n] = \dim_K Z[t_1, \dots, t_n] = n+1$.

Dado um Λ_n -módulo M , temos que M é $Z[t_1, \dots, t_n]$ -módulo, e como $\dim Z[t_1, \dots, t_n] = n+1$, segue que existe uma resolução projetiva $0 \rightarrow P_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, onde P_j é $Z[t_1, \dots, t_n]$ -módulo projetivo e portanto livre.

Seja $S_i = \{1, t_i, t_i^2, \dots\}$; $1 \leq i \leq n$. A operação S_i^{-1} é exata, logo, $0 \rightarrow S_n^{-1} \dots S_1^{-1} P_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow S_n^{-1} \dots S_1^{-1} P_0$

$\rightarrow S_n^{-1} \dots S_1^{-1} M \rightarrow 0$ é exata (1). Como $P_j \cong [t_1, \dots$

$\dots, t_n]^{n_j}$, segue que $S_n^{-1} \dots S_1^{-1} P_j = \Lambda_n^{n_j}$, e como M é um Λ_n -módulo, segue que $S_n^{-1} \dots S_1^{-1} M = 0$, ou seja, a sequência (1) acima é uma resolução projetiva de M em Λ_n e portanto $\dim \Lambda_n \leq \dim Z[t_1, \dots, t_n]$.

Assim, a dimensão global de Λ_n é finita e portanto Λ_n é regular, logo, $\dim \Lambda_n = \dim_K \Lambda_n = n+1$.

1.14. Λ_n é integralmente fechado:

Demonstração

Seja $Q(\Lambda_n)$ o corpo de frações de Λ_n e $x \in Q(\Lambda_n)$ tal

que x é integral sobre A . Temos $S = \frac{a}{b}$, onde $a, b \in \Lambda_n$ e x satisfaz um polinômio $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ onde $a_i \in \Lambda_n$, além disso, podemos tomar x tal que $(a, b) = 1$.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots$$

$$\dots + a_n = 0 \Rightarrow a^n + a_1 a^{n-1} b + \dots + a_n b^n = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 a^{n-1} b + \dots + a_n b^n = -a^n, \text{ ou seja, } b | a^n. \text{ Como } \Lambda_n \text{ é}$$

domínio de fatoração única, temos que $b = \pi_1 \dots \pi_m$, onde $\pi_j \in \Sigma_n$ e é irredutível. Como $b | a^n$, segue que $\pi_i | a^n$, logo, $\pi_i | a \ \forall i$, e como $b \nmid a$, isto é um absurdo a menos que π_i seja unidade $\forall i$. Neste caso temos então que b é unidade e portanto $x \in \Lambda_n$.

1.15. $Q(\Lambda_n)$ é injetivo:

Demonstração

Por [I-2.14 - vi] basta mostrar que se $f: I \rightarrow Q(\Lambda_n)$ é um Λ_n -homomorfismo e I um ideal de Λ_n , então, $Q(\Lambda_n)$ é injetivo se f pode ser estendida a um Λ_n -homomorfismo $\Phi: \Lambda_n \rightarrow Q(\Lambda_n)$.

Suponhamos $I \neq (0)$ e seja $a, b \in I$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Como f é Λ_n -homomorfismo, segue que $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$, ou seja, $\frac{f(x)}{x} = q$ independentemente da escolha de x . Definamos $\Phi: \Lambda_n \rightarrow Q(\Lambda_n)$ dada por: $\Phi(r) = r.q$. Temos que Φ

é Λ_n -homomorfismo, além disso se $c \in I$, $\phi(c) = c.q =$
 $= c \cdot \frac{f(x)}{x} = f(c)$, e portanto ϕ estende f .

1.16. Definição: Dado um Λ_n -módulo M , o submódulo de M definido por $N(M) = \{m \in M \mid \text{Ann}(m) \text{ não está contido em qualquer ideal principal}\}$ é chamado o submódulo pseudo nulo de M .

Um módulo é pseudo nulo se $M = N(M)$ e é livre de pseudo nulo se $N(M) = 0$.

1.17. Definição: Dado um Λ_n -módulo M , o submódulo de M definido por $T(M) = \{m \in M \mid x.m = 0 \text{ para algum } x \in \Lambda_n, x \neq 0\}$ é chamado de submódulo de torção de M .

M é um módulo de torção se $M = T(M)$ e é livre de torção se $T(M) = 0$.

1.18. M é pseudo nulo $\Leftrightarrow M_p = 0$ para todo primo p de altura 1

Demonstração

($\Rightarrow$) Seja p um ideal primo de altura 1, então p é principal, logo, $\text{Ann}(m)$ não está contido em p , ou seja,

$\text{Ann}(m) \cap A-p \neq \emptyset$ e portanto $[\text{Ann}(m)]_p = (\Lambda_n)_p$.

Mas $\text{Ann}(M) = \bigcap_{m \in M} \text{Ann}(m)$ e portanto $\text{Ann}(M_p) =$

$$= \text{Ann}(M)_p = \bigcap_{m \in M} \text{Ann}(m)_p = (\Lambda_n)_p, \text{ ou seja, } M_p = 0$$

($\Leftarrow$) $M_p = 0 \ \forall$ primo p de altura 1 $\Rightarrow \frac{m}{s} = 0 \ \forall m \in M, \forall s \in A-p$, ou seja, $\exists t \in A-p$ tal que $tm = 0 \ \forall m \in M$. Assim, $\text{Ann}(m) \not\subset p$.

Seja b um ideal principal, logo, $b \subset q$ onde q é ideal primo de altura 1. Como $\text{Ann}(m) \not\subset q$, segue que $\text{Ann}(m) \not\subset b$, logo, $N(M) = M$, isto é, M é pseudo nulo.

1.19. Se M é pseudo nulo, então M é torção:

Demonstração

Este fato está implícito na demonstração acima.

1.20. Se M é pseudo nulo, então $a = \text{Ann}(M)$ é um ideal $\neq (0)$ e $\Lambda_n: a = \{x \in Q(\Lambda_n) \mid xa \subset \Lambda_n\} = \Lambda_n$:

Demonstração

Temos $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$ e seja p um ideal primo de altura 1. Como M é pseudo nulo, segue que $M_p = 0$ e portanto para cada m_i , existe $t_i \in \Lambda_n - p$ tal que $t_i \cdot m_i = 0$, logo,

$$\bigcap_{i=1}^k t_i \cdot m = 0 \ \forall m \in M, \text{ ou seja, } \text{Ann}(M) \neq (0).$$

Claramente, $\Lambda_n \subset \Lambda_n : a$.

Seja $x = \frac{x_1}{x_2} \neq 0 \in Q(\Lambda_n)$ tal que x_1 e x_2 não tenham fatores em comum e $x \in \Lambda_n : a$. Suponhamos que exista um ideal primo p de altura 1 tal que $p \ni x_2$ e seja $t \in A-p$ tal que $t \in a$. Temos $\frac{x_1}{x_2} \cdot t \in \Lambda_n$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} \cdot t = c \in \Lambda_n$. Em $Q(\Lambda_n)$, isto significa que $x_1 \cdot t = x_2 \cdot c$, e como $x_1, x_2, t, c \in \Lambda_n$, segue que $x_1 \cdot t = x_2 \cdot c$ em Λ_n . Mas $x_2 \in p$ e $t \notin p$, logo, $x_1 \in p$. Como p é primo de altura 1, temos que p é principal, o que significa que x_1 e x_2 tem fator em comum (absurdo).

Assim, não existe primo p de altura 1 tal que $p \ni x_2$, ou seja, x_2 é unidade em Λ_n e portanto $x \in \Lambda_n$.

1.21. Se T é um Λ_n -módulo de torção, então

$$e^1(T) \simeq \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \text{ e } e^0(T) = 0:$$

Demonstração

Consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow \Lambda_n \rightarrow Q(\Lambda_n) \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n} \rightarrow 0$, ela induz a seqüência exata

$$0 \rightarrow e^0(T) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(T, Q(\Lambda_n)) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow e^1(T) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(T, Q(\Lambda_n)) \rightarrow \dots \quad \text{Mas } \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}),$$

$$\text{Ext}_{\Lambda_n}^1(T, Q(\Lambda_n)) = 0 \text{ pois } Q(\Lambda_n) \text{ é injetivo [II - 1.15] e}$$

$\text{Ext}_{\Lambda_n}^0(T, Q(\Lambda_n)) = \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, Q(\Lambda_n)) = 0$ pois, como T é torção, dado $\phi \in \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, Q(\Lambda_n))$ e $t \in T$, temos que $\exists \alpha \neq 0 \in \Lambda_n$ tal que $\alpha \cdot t = 0$, logo, $0 = \phi(\alpha \cdot t) = \alpha \phi(t) \in Q(\Lambda_n)$, e como $Q(\Lambda_n)$ é corpo, segue que $\phi(t) = 0$, ou seja, $\phi \equiv 0$.

Substituindo esses resultados na sequência exata, segue que $e^0(T) = 0$ e $e^1(T) \cong \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})$.

1.22. Se N é um Λ_n -módulo pseudo nulo, então $e^1(N) = e^0(N) = 0$

Demonstração

$e^0(N) = 0$ pois N é torção, logo,

por-1.21. basta mostrar que $\text{Hom}_{\Lambda_n}(N, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$.

Seja $\phi: N \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ e $\alpha \in \text{Ann}(N)$ (vimos que

$\text{Ann}(N) \neq (0)$ $\alpha \neq 0$. Temos $\phi(x) = [\frac{\lambda(t_1, \dots, t_n)}{u(t_1, \dots, t_n)}]$, onde os colchetes significam a classe do elemento $\frac{\lambda}{u}$ módulo Λ_n .

Como $\alpha x = 0$, segue que $\phi(\alpha x) = 0$, ou seja, $\alpha[\frac{\lambda}{u}] = 0$ e portanto $\alpha \frac{\lambda}{u} \in \Lambda_n$. Como $\alpha \in \text{Ann}(N)$, segue por [II - 1.20] que

$$\frac{\lambda(t_1, \dots, t_n)}{u(t_1, \dots, t_n)} \in \Lambda_n \text{ e portanto } \phi \equiv 0.$$

1.23. Se M é livre de pseudo nulo, então $\text{Ext}_{\Lambda_n}^i(M, P) = 0$
para todo Λ_n -módulo P e todo $i \geq n+1$:

Demonstração

Como M é livre de pseudo nulo, segue que $\text{Ann}(x)$ está contido em um ideal principal $\forall x \in M$, ou seja, se $p \in \text{Ass}(M)$, então p tem altura 0 ou 1, logo, dado um ideal maximal m em Λ_n , como $\text{Depth}(M_p) = 0 \Leftrightarrow p \in \text{Ass}(M)$

[I - 2.23 - iii] segue que $\text{Depth}_{(\Lambda_n)_m}(M_m) \geq 1$.

Temos por [[2] teo. 2.3] que $\text{Depth}_{(\Lambda_n)_m}(M_m) =$
 $= \dim(\Lambda_n)_m - \dim \text{proj}(M_m)$, e como $\dim(\Lambda_n)_m \leq n+1$, segue que $1 \leq \text{Depth}_{(\Lambda_n)_m}(M_m) \leq n+1 - \dim \text{proj}(M_m)$, ou seja, $\dim \text{proj}(M_m) \leq n$.

De [I - 2.21 - iv] temos que $\dim \text{proj } M =$
 $= \sup_m \{\dim \text{proj}(M_m)\}$, logo, $\dim \text{proj}(M) \leq n$ e portanto por [I - 2.22 - i] segue o resultado.

1.24. Seja M um Λ_n -módulo e $\text{FN}(M) = \frac{M}{N(M)}$, então

$$\text{Hom}_{\Lambda_n}(\text{FN}(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \cong \text{Hom}_{\Lambda_n}(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}):$$

Demonstração

Consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow N(M) \rightarrow M \rightarrow \text{FN}(M) \rightarrow 0$,

ela induz a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(\text{FN}(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow$

$$\rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \dots$$

Por 1.22, temos que $\text{Ext}_{\Lambda_n}^0(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$, logo, segue o resultado.

1.25. $\text{Ext}_{\Lambda_n}^{n+2}(M, P) = 0$ para todo Λ_n -módulo M e P :

Demonstração

Caso particular de [I - 2.22 - i].

1.26. $e^1(\text{FN}(M)) \simeq e^1(M)$:

Demonstração

Basta considerar a mesma seqüência exata de 1.24.

$$\text{e usar que } \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$$

$$1.27. \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \simeq \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(\text{FN}(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}):$$

Demonstração

Da seqüência exata $0 \rightarrow N(M) \rightarrow M \rightarrow \text{FN}(M) \rightarrow 0$ e de 1.24. te

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(FN(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \dots \text{ é exata, e por 1.21. e 1.22.}$$

segue que $\text{Ext}_{\Lambda_n}^1(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$, logo, temos o resulta
do.

$$1.28. \text{Ext}_{\Lambda_n}^i(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = e^{i+1}(M) \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ e}$$

$$\text{Ext}_{\Lambda_n}^{n+1}(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$$

Demonstração

$$\text{A sequência exata } 0 \rightarrow \Lambda_n \rightarrow Q(\Lambda_n) \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n} \rightarrow 0 \text{ induz}$$

$$\text{a sequência exata } \dots \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(M, Q(\Lambda_n)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^1(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow e^2(M) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^2(M, Q(\Lambda_n)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^2(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow e^3(M) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^{n+1}(M, Q(\Lambda_n)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^{n+1}(M, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow e^{n+2}(M) \rightarrow 0. \text{ Mas } \text{Ext}_{\Lambda_n}^i(M, Q(\Lambda_n))$$

$$1.29. e^{n+1}(N(M)) \simeq e^{n+1}(M):$$

Demonstração

Usando a seqüência $0 \rightarrow N(M) \rightarrow M \rightarrow FN(M) \rightarrow 0$ temos a seqüência exata $\dots \rightarrow e^{n+1}(FN(M)) \rightarrow e^{n+1}(M) \rightarrow e^{n+1}(N(M)) \rightarrow e^{n+2}(FN(M)) \rightarrow \dots$. Mas por 1.23. segue que $e^{n+1}(FN(M))$ e $e^{n+2}(FN(M))$ são iguais a zero

$$1.30. e^1(T(M)) \simeq \text{Hom}_{\Lambda_n}(T(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \simeq \text{Hom}_{\Lambda_n}(FN(T(M)), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}):$$

$$\frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}):$$

Demonstração

$e^1(T(M)) \simeq \text{Hom}_{\Lambda_n}(T(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})$ segue imediatamente de 2.21.

Consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow N(T(M)) \rightarrow T(M) \rightarrow FN(T(M)) \rightarrow 0$; ela induz a seqüência exata

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(FN(T(M)), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(T(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda_n}^0(N(T(M)), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) \rightarrow \dots$$

Mas por 1.21. e 1.22. segue que $\text{Ext}_{\Lambda_n}^0(N(T(M)), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}) = 0$.

$$1.31. \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(M, Q(\Lambda_n)) \simeq \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(FT(M), Q(\Lambda_n)) \simeq$$

$$\simeq \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(FT(M)^{**}, Q(\Lambda_n)):$$

Demonstração

A seqüência exata $0 \rightarrow T(M) \rightarrow M \rightarrow FT(M) \rightarrow 0$ induz a seqüência exata $0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(FT(M), Q(\Lambda_n)) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(M, Q(\Lambda_n)) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(T(M), Q(\Lambda_n)) \rightarrow \dots$, e como $\operatorname{Hom}_{\Lambda_n}(T(M), Q(\Lambda_n)) = 0$, segue o primeiro isomorfismo.

Por [I - 2.26 - i] temos que existe um pseudo isomorfismo $\phi: FT(M) \rightarrow FT(M)^{**}$, ou seja, $\operatorname{Ker} \phi$ é pseudo nulo. Mas $FT(M)$ é livre de torção e portanto livre de pseudo nulo, isto é, $\operatorname{Ker} \phi = 0$. Assim, a seqüência $0 \rightarrow FT(M) \rightarrow FT(M)^{**} \rightarrow \operatorname{Coker} \phi \rightarrow 0$ é exata, logo, tomando a seqüência induzida dos Ext e usando que $\operatorname{Coker} \phi$ é pseudo nulo, segue o segundo isomorfismo.

1.32. Se T é um Λ_n -módulo de torção e $x \in T - N(T)$, então

existe um homomorfismo $\phi: T \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ tal que $\phi(x) \neq 0$:

Demonstração

Suponhamos primeiramente que $N(T) = 0$.

Se $T = \frac{\Lambda_n}{(p^m)}$, onde p gera um ideal primo de altura 1, tomemos $\phi: \Lambda_n \rightarrow Q(\Lambda_n)$ tal que $\phi(1) = \frac{q(t_1, \dots, t_n)}{p^m}$

onde $(q(t_1, \dots, t_n), p) = (1)$ (basta tomar por exemplo, $q(t_1, \dots, t_n) = t_1 + p$).

A aplicação induzida $\phi: \frac{\Lambda_n}{(p^m)} \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ dada por

$$\phi([1]) = \left[\frac{q(t_1, \dots, t_n)}{p^m} \right] = [\varphi(1)] \text{ é um monomorfismo,}$$

pois $\text{Ker } \phi = (p^m)$, e portanto não nula.

Se $T \simeq \bigoplus_{i=1}^K \frac{\Lambda_n}{(p_i^m)}$, basta projetar em algum fator e usar o argumento anterior.

Por [I - 2.26 - ii] temos que existe um pseudo-

-isomorfismo $j: T \rightarrow \bigoplus_{i=1}^K \frac{\Lambda_n}{(p_i^m)}$ que é monomorfismo pois

$N(T) = 0$. Seja $W = \bigoplus_{i=1}^K \frac{\Lambda_n}{(p_i^m)}$. Se $x \in T$, $x \neq 0$, então

$j(x) \neq 0$ em W , logo, pelo que foi visto acima, existe

$\phi: W \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ tal que $\phi(j(x)) \neq 0$, assim, basta tomar

$\psi = \phi \circ j$ e teremos $\psi(x) = \phi(j(x)) \neq 0$.

Se $N(T) \neq 0$, seja $f: T \rightarrow \frac{T}{N(T)}$ a projeção. Dado

$x \in T$, existe $\bar{\phi}: \frac{T}{N(T)} \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ satisfazendo $\bar{\phi}(\bar{x}) \neq 0$, logo,

definindo $\phi: T \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ por $\phi = \bar{\phi} \circ f$, temos

$$\Phi(x) = \bar{\Phi}(f(x)) = \bar{\Phi}(\bar{x}) \neq 0.$$

1.33. Seja M e P Λ_n -módulos, então $e^{n+1}(M)$ e $\text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M), P)$ são pseudo nulos:

Demonstração

Por 1.29. e 1.28. temos que $[e^{n+1}(M)]_p \simeq [e^{n+1}(N(M))]_p \simeq$

$\simeq \text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})_p$, para todo p de altura 1. Mas por

[1.2.20. viii] segue que $\text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M), \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})_p =$

$$= \text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M)_p, (\frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})_p) = \text{Ext}_{\Lambda_n}^n(0, (\frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})_p) = 0$$

Além disso, $\text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M), P)_p = \text{Ext}_{\Lambda_n}^n(N(M)_p, P_p) = 0$.

1.34. Se M é um Λ_n -módulo livre de torção, então $e^n(M)$ é pseudo nulo e portanto Λ_n -torção:

Demonstração

Demonstraremos primeiro que M pode ser mergulhado em um Λ_n -módulo F livre.

Seja $\phi: M \rightarrow M \otimes_{\Lambda_n} Q(\Lambda_n)$ definida por $\phi(m) =$

$= m \otimes_{\Lambda_n} 1$. Por [[5] pag. 314, 26.- ii] segue que ϕ é in

jetiva.

Tomemos $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $M \otimes_{\Lambda_n} Q(\Lambda_n)$ sobre $Q(\Lambda_n)$, $\{m_1, \dots, m_t\}$ uma base de M e $f_i = \Phi(m_i)$. Temos que $f_j = \sum \frac{a_{ij}}{b_{ij}} e_j$.

Seja $s = \prod_j b_{ij}$, para cada i temos que

$$f_i = \frac{a_{i1} \prod_{j \neq 1} b_{ij} e_1 + \dots + a_{in} \prod_{j \neq n} b_{ij} e_n}{s},$$

ou seja, $f_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \left(\frac{e_j}{s} \right)$, onde $c_{ij} \in \Lambda_n$.

Como $\left(\frac{e_j}{s} \right)_{1 \leq j \leq n}$ é um conjunto linearmente independente sobre $Q(\Lambda_n)$, com mais razão este conjunto é linearmente independente sobre Λ_n . Seja F o Λ_n -módulo livre gerado por $\left\{ \frac{e_1}{s}, \dots, \frac{e_n}{s} \right\}$. Como cada elemento da base de M é combinação linear de $\left\{ \frac{e_j}{s} \right\}$, segue que $M \subset F$ (aqui identificamos M com $\Phi(M)$).

Como M pode ser mergulhado em um módulo livre F , então a sequência $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow \frac{F}{M} \rightarrow 0$ é exata. Esta sequência induz a sequência exata

$$\dots \rightarrow e^n(F) \rightarrow e^n(M) \rightarrow e^{n+1}\left(\frac{F}{M}\right) \rightarrow e^{n+1}(F) \rightarrow \dots$$

Mas F livre $\Rightarrow F$ projetivo e portanto $e^n(F) = e^{n+1}(F) = 0$, ou seja, $e^n(M) \simeq e^{n+1}\left(\frac{F}{M}\right)$ que é pseudo nulo por 1.33.

1.35. Se T é um Λ_n -módulo de torção, então $e^1(T)$ é livre de pseudo nulo:

Demonstração

Como $e^1(T) \simeq \text{Hom}_{\Lambda_n}(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})$, basta mostrar que

$\text{Hom}_{\Lambda_n}(T, \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n})$ é livre de pseudo nulo.

Seja $f: T \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)}{\Lambda_n}$ e consideremos a induzida

$f_p: T_p \rightarrow \frac{Q(\Lambda_n)_p}{(\Lambda_n)_p}$. Se $f_p = 0$ para todo primo p de altura

1, então para $t \in T$, $f_p(t) = 0$, ou seja, $\frac{f(t)}{1} = 0$ em

$\frac{Q(\Lambda_n)_p}{(\Lambda_n)_p}$, isto é, $\frac{f(t)}{1} \in (\Lambda_n)_p$ para todo p de altura 1

e portanto $\frac{f(t)}{1} \in \bigcap (\Lambda_n)_p = \Lambda_n$, ou seja, $\forall t \in T, f(t) \in$

Λ_n , logo, $f \equiv 0$. Assim, nenhum elemento de $e^1(T)$ é pseudo nulo, ou seja, $N(e^1(T)) = 0$.

1.36. Para todo Λ_n -módulo M , existe uma seqüência exata

$0 \rightarrow M^* \rightarrow F \rightarrow \frac{F}{M^*} \rightarrow 0$ onde F é livre e $\frac{F}{M^*}$ é livre de pseudo nulo:

Demonstração

Por [I - 2.24 - i] e [I - 2.24 - iv] temos que M^* é reflexivo e é uma Λ_n -rede no espaço vetorial $V = \text{Hom}_{\Lambda_n}(M, Q(\Lambda_n))$ sobre o corpo $Q(\Lambda_n)$, assim, obtemos um Λ_n -módulo livre F tal que $F \subset V$ e $M^* \subset F$. Além disso, de [I.2. 24 iii] temos que $\text{Ass}(\frac{V}{M^*})$ tem apenas ideais primos de altura 1 e portanto $\text{Ass}(\frac{F}{M^*})$ tem apenas ideais primos de altura 1, pois $F \subset V$, ou seja, $\frac{F}{M^*}$ é pseudo nulo, visto que $\text{Ass}(\frac{F}{M^*}) \subset \text{Supp}(\frac{F}{M^*})$.

2. O Anel Λ

2.1. Definição: Λ é o anel de polinômios nas variáveis t, t^{-1} com coeficientes inteiros, ou seja, $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

As propriedades abaixo que estão assinalados com um asterisco (*) são casos particulares de propriedades de Λ_n .

(*) 2.2. Λ é Noetheriano :

(*) 2.3. Λ é Domínio de Krull :

(*) 2.4. Dimensão de Krull de $\Lambda = 2$:

(*) 2.5. Λ é Domínio de Fatoração Única :

(*) 2.6. Todo ideal primo de altura 1 em Λ é principal:

2.7. Todo ideal maximal em Λ é da forma $(p, g(t))$ onde

$P \in Z$ é primo e $g(t)$ é irredutível quando reduzido a $Z_p[t, t^{-1}]$, e portanto tem altura 2 :

Demonstração

Como os ideais maximais em $Z[t, t^{-1}]$ são da forma $S^{-1}m$ onde m é maximal em $Z[t]$ e $m \cap S = \emptyset$ e o fato de demonstrado em - 1.4. de que se $l(t)$ é irredutível em $Z_p[t]$ então $l(t)$ é irredutível em $Z_p[t, t^{-1}]$, basta mostrar que os ideais maximais em $Z[t]$ são da forma $(p, g(t))$ onde p é primo em Z e $g(t)$ é irredutível quando reduzido a $Z_p[t]$.

Seja m um ideal maximal de $Z[t]$. Temos que $m \cap Z \neq 0$ pois do contrário m não seria maximal. Assim, existe $a_0 \in m \cap Z$, $a_0 \neq 0$ e $a_0 \neq 1$. Como Z é domínio de fatoração única, $a_0 = p_1^{K_1} \dots p_n^{K_n}$, onde os p_i são primos de Z .

$(a_0) = \bigcap_{i=1}^n (p_i^{K_i})$, logo por [I - 1.10 - ii] temos que

$m \supset p_{i_0}^{K_{i_0}}$ para algum i_0 e portanto $m \supset p_{i_0}$. Façamos $p = p_{i_0}$.

$Z[t]$ é Noetheriano, logo, m é finitamente gerado, ou seja, $m = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_j(t))$.

Seja $\Phi : Z[t] \rightarrow \frac{Z[t]}{(p)} \simeq Z_p[t]$ a projeção, temos que

$\bar{m} = \Phi(m)$ é ideal maximal em $Z_p[t]$ e como $Z_p[t]$ é domínio de ideais principais, segue que $\bar{m} = (\bar{g}_1(t), \dots, \bar{g}_j(t)) = (\bar{l}(t))$.

$\bar{m}$ maximal implica que $\bar{l}(t)$ é irredutível em

$Z_p[t]$. Mas $\Phi^{-1}((\bar{l}(t))) = (p, \bar{l}(t))$ e como $(\bar{l}(t)) = \Phi(m)$, segue que $m \subset \Phi^{-1}(\Phi(m)) = (p, \bar{l}(t))$; contudo $\Phi^{-1}(\Phi(m))$ é ideal maximal, e como m também é ideal maximal, temos que $m = \Phi^{-1}(\Phi(m)) = (p, \bar{l}(t))$.

2.8. Se $m = (p, g(t))$ é maximal, então $\frac{\Lambda}{m}$ é espaço vetorial de dimensão finita sobre Z_p e portanto finito:

Demonstração

Como $(p, g(t))$ é maximal e Λ é domínio de integridade, segue que $\frac{\Lambda}{(p, g(t))}$ é corpo, além disso, claramente Z_p atua linearmente sobre $\frac{\Lambda}{(p, g(t))}$ e portanto $\frac{\Lambda}{(p, g(t))}$ é espaço vetorial sobre Z_p . Temos também $\frac{Z[t, t^{-1}]}{(p, g(t))} \cong$

$$\frac{Z_p[t, t^{-1}]}{(\bar{g}(t))}.$$

Seja $[h(t, t^{-1})] \in \frac{Z_p[t, t^{-1}]}{(\bar{g}(t))}$. Temos que

$h(t, t^{-1}) = f_1(t) + f_2(t^{-1})$, onde $f_1(t) \in Z_p[t]$ e $f_2(t) \in Z[t^{-1}]$. Na demonstração de 2.6. ficou implícito que $g(t) \in Z[t]$, ou seja, $\bar{g}(t) \in Z_p[t]$. Pelo algoritmo da divisão, segue que $f_1(t) = a(t) \cdot \bar{g}(t) + r(t)$ onde grau $r(t) <$ grau $\bar{g}(t)$, e portanto $[f_1(t)] = [r(t)]$.

$$f_2(t) = h_0 + h_{-1}t^{-1} + \dots + h_{-n}t^{-n} \quad e$$

$$\bar{g}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s.$$

Como $[\bar{g}(t)] = 0$ e Z_p é corpo, segue que $[f_2(t)] =$

$$= [f_2(t) - (\frac{h-n}{a_0} \bar{g}(t)) t^{-n}] = [h_1(t)], \text{ onde o "grau nega}$$

tivo" de $h_1(t)$ é menor que o "grau negativo" de $h(t)$.

Repetindo esse processo vamos desaparecer com os termos em t^{-1} de $f_2(t)$.

Portanto, dado $[h(t)] \in \frac{Z_p[t, t^{-1}]}{(\bar{g}(t))}$ temos que

$[h(t)] = [r(t)]$ onde $r(t) \in Z_p[t]$ e grau $r(t) <$ grau $\bar{g}(t)$; ou seja, dimensão de $\frac{\Lambda}{(p, g(t))} <$ grau $g(t)$ e portanto finita.

(*) 2.9. Todo Λ -módulo projetivo é livre:

(*) 2.10. $\dim \Lambda = 2$:

(*) 2.11. $Q(\Lambda)$ é injetivo:

(*) 2.12. Um Λ -módulo M é pseudo nulo se e somente se

$$M_p = 0 \text{ para todo primo } p \text{ de altura } 1.$$

2.13. M é pseudo nulo se e somente se M é finito:

Demonstração

Se M é pseudo nulo, então qualquer submódulo de M e qualquer quociente de M é pseudo-nulo, pois se $N \subset M$,

temos, $N_p \subset M_p = 0$ e $(\frac{M}{N})_p = \frac{M_p}{N_p} = 0$.

Por [I - 2.15 - iv] temos que existe uma cadeia de submódulos de M , $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ onde

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \frac{\Lambda}{p_i} \text{ e } p_i \text{ é ideal primo de } \Lambda.$$

Para $i=1$, temos $M_1 \simeq \frac{\Lambda}{p_1}$, e como M_1 é pseudo nulo, segue que $\frac{\Lambda}{p_1}$ é pseudo nulo. Assim, se $x \in \frac{\Lambda}{p_1}$, então $\text{Ann}(x) = p_1$ e como $\frac{\Lambda}{p_1}$ é pseudo nulo, temos que $\text{Ann}(x)$ não está contido em qualquer ideal principal, ou seja, p_1 é maximal, e por - 2.7 segue que $M_1 \simeq \frac{\Lambda}{p_1}$ é finito.

Este raciocínio pode ser feito para todo i , ou seja, $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ é finito.

Se B é um submódulo de A , B e $\frac{A}{B}$ são finitos, então A é finito pois, seja $\phi : A \rightarrow \frac{A}{B}$ a projeção canônica e $\frac{A}{B} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K\}$. Temos $\phi^{-1}(\bar{x}_i) = \{y \in A \mid \phi(y) = \bar{x}_i\} = \{y \in A \mid \bar{y} = \bar{x}_i\} = \{y \in A \mid y = x_i + b \text{ onde } b \in B\}$, e como B é finito, segue que $\phi^{-1}(\bar{x}_i)$ é finito. Além disso, temos que $\phi^{-1}(\frac{A}{B}) = A$, ou seja, $A = \bigcup_i \phi^{-1}(\bar{x}_i)$, $1 \leq i \leq K$, e portanto A é finito.

Usando que M_1 é finito, $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ é finito e este resultado, segue que M_i é finito $\forall i$, ou seja, M é finito.

Reciprocamente, por [I: 2.15. i.] se $p \in \text{Ass}(M)$, então $\frac{A}{p} \simeq N \subset M$, e como M é finito, segue que $\frac{A}{p}$ é finito. Mas $\frac{A}{p}$ é domínio de integridade e portanto $\frac{A}{p}$ é corpo, ou seja, p é maximal. Isto prova que $\text{Ass}(m)$, $m \in M$ são ideais maximais.

Por [I - 2.16 - i] temos que os primos minimais de $\text{Supp}(M)$ estão contidos em $\text{Ass}(M)$, ou seja, todo elemento de $\text{Supp}(M)$ é maximal e portanto tem altura 2, logo, se p tem altura 1, então $p \notin \text{Supp}(M)$, ou seja, $M_p = 0$.

(*) 2.14. Λ é integralmente fechado:

(*) 2.15. Se T é um Λ -módulo de torção, então $e^1(T) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(T, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda})$:

(*) 2.16. Se N é pseudo nulo, então $e^0(N) = e^1(N) = 0$:

(*) 2.17. Se M é livre de pseudo nulo, então

$\text{Ext}_{\Lambda}^i(M, P) = 0$ para todo Λ -módulo P e $i \geq 2$:

(*) 2.18. $\text{Hom}_{\Lambda}(F(N(M)), \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(M, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda})$:

(*) 2.19. $e^1(FN(M)) \simeq e^1(M)$:

(*) 2.20. $\text{Ext}_{\Lambda}^1(M, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) \simeq \text{Ext}_{\Lambda}^1(F(N(M)), \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda})$:

(*) 2.21. $\text{Ext}_{\Lambda}^1(M, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) \simeq e^2(M)$ e $\text{Ext}_{\Lambda}^2(M, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) = 0$:

(*) 2.22. $e^2(N(M)) \simeq e^2(M)$:

(*) 2.23. $e^1(T(M)) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(T(M), \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(FN(T(M)), \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda})$:

$$(*) \text{ 2.24. } \operatorname{Hom}_{\Lambda}(M, Q(\Lambda)) \simeq \operatorname{Hom}_{\Lambda}(F(T(M)), Q(\Lambda)) \simeq$$

$$\operatorname{Hom}_{\Lambda}(F(T(M))^{**}, Q(\Lambda)) :$$

2.25. Cokernel $(t-1): M \rightarrow M \simeq M \oplus_{\Lambda} Z$ (em particular $Z \oplus_{\Lambda} Z \simeq Z$):

Demonstração

Mostremos primeiro que a seqüência $0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(t-1)} \Lambda \xrightarrow{\epsilon} Z \rightarrow 0$, onde $\epsilon(\sum a_i t^i) = \sum a_i$ e $(t-1)(x)$ é a multiplicação por $t-1$, é exata.

Cada elemento de Λ pode ser visto como $x(t)$, assim, $\operatorname{Ker} \epsilon = \{x(t) \in \Lambda \mid \epsilon(x(t)) = 0\} = \{x(t) \in \Lambda \mid \sum a_i = 0\}$, onde $x = \sum a_i t^i\} = \{x(t) \in \Lambda \mid x(1) = 0\} = \{x(t) \in \Lambda \mid x(t) = (t-1).y(t)\} = \operatorname{Im}(t-1)$. Como Λ é domínio de integridade, segue que $(t-1)$ é injetiva, além disso, ϵ é claramente sobrejetiva.

Como $0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(t-1)} \Lambda \rightarrow Z \rightarrow 0$ é exata, segue que $M \otimes_{\Lambda} \Lambda \xrightarrow{I \cdot (t-1)} M \otimes_{\Lambda} \Lambda \xrightarrow{I \otimes \epsilon} M \otimes_{\Lambda} Z \rightarrow 0$ é exata. Mas $M \otimes_{\Lambda} \Lambda \simeq M$ e portanto $M \xrightarrow{(t-1)} M \xrightarrow{\epsilon^*} M \otimes_{\Lambda} Z$ é exata, ou seja,

$$M \otimes_{\Lambda} Z \simeq \frac{M}{(t-1).M} = \operatorname{Cokernel} (t-1)$$

2.26. $e^1(Z) \simeq Z$:

Demonstração

A seqüência exata $0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{t-1} \Lambda \rightarrow Z \rightarrow 0$ induz a seqüência exata

$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(Z, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, \Lambda) \rightarrow e^1(Z) \rightarrow e^1(\Lambda) \rightarrow$
 $\rightarrow \dots$. Mas, Λ é livre, logo, $e^1(\Lambda) = 0$. Z é Λ -torção e
 portanto $\text{Hom}_{\Lambda}(Z, \Lambda) = 0$, além disso $\text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, \Lambda) \simeq \Lambda$ e
 $\text{Hom}(t-1, i) \simeq (t-1)$, ou seja,

$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{t-1} \Lambda \rightarrow e^1(Z) \rightarrow 0$ é exata, daí,

$$e^1(Z) \simeq \frac{\Lambda}{(t-1)\Lambda} \simeq Z.$$

(*) 2.27. Se T é Λ -módulo de torção, então

$$\text{Ext}_{\Lambda}^i(T, Q(\Lambda)) = 0 \text{ para todo } i:$$

(*) 2.28. Se T é Λ -módulo de torção e $x \in T - N(T)$, então
 existe um homomorfismo $\phi : T \rightarrow \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}$ tal que
 $\phi(x) \neq 0$:

(*) 2.29. Para quaisquer Λ -módulos M e P , temos que $e^2(M)$
 e $\text{Ext}_{\Lambda}^1(N(M), P)$ são pseudo-nulos:

(*) 2.30. Se M é livre de torção, então $e^1(M)$ é pseudo
 nulo:

(*) 2.31. Se T é um Λ -módulo de torção, então $e^1(T)$ é li
 vre de pseudo-nulo:

(*) 2.32. Para todo Λ -módulo M , existe uma seqüência exa
 ta $0 \rightarrow M^* \rightarrow F \rightarrow \frac{F}{M^*} \rightarrow 0$, onde F é livre e $\frac{F}{M^*}$ é
 livre de pseudo-nulo:

2.33. Se M é um Λ -módulo, então M^* é livre:

Demonstração

Tomando a seqüência exata $0 \rightarrow M^* \rightarrow F \rightarrow \frac{F}{M^*} \rightarrow 0$, ela induz a seqüência exata $\dots \rightarrow e^1(F) \rightarrow e^1(M^*) \rightarrow e^2(\frac{F}{M^*}) \rightarrow e^2(F) \rightarrow e^2(M^*) \rightarrow 0$. Como F é livre, $e^i(F) = 0 \forall i$, logo, $e^1(M^*) \simeq e^2(\frac{F}{M^*})$. Mas $e^2(\frac{F}{M^*}) = 0$ pois $\frac{F}{M^*}$ é livre de pseudo-nulo - 2.17.

Como $e^1(M^*) = e^2(M^*) = 0$, segue por [I - 2.21 - iii] que $\dim \text{proj.}(M^*) \leq 0$, o que significa que M^* é projetivo ou livre, e portanto livre.

2.34. Se M é um Λ -módulo e $x \in M - N(M)$, então existe um homomorfismo $\phi : M \rightarrow \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}$ tal que $\phi(x) \neq 0$:

Demonstração

Usando o mesmo argumento de - 1.32 podemos supor $N(T) = 0$, ou seja, que M é livre de pseudo-nulo.

Se M é um módulo de torção, então este resultado já foi provado em - 2.28.

Se M é livre de torção, temos por [I-2.27-i] que existe $\psi : M \rightarrow M^{**}$ tal que ψ é pseudo-isomorfismo, e como M é livre de pseudo nulo, segue que ψ é injetiva. Para M^{**} , o resultado é válido pois como M^{**} é livre, segue que $M^{**} \simeq \Lambda^r$ e para $r=1$, o resultado é claramente válido. Seja $x \in M^{**}$, $x \neq 0$. Então alguma coordenada de x é diferente de zero; seja $p : \Lambda^r \rightarrow \Lambda$ a projeção nesta coordenada e $\alpha : \Lambda \rightarrow \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}$ tal que $\alpha(p(x)) \neq 0$. Temos que $\psi \circ p$

é o homomorfismo procurado para M^{**} .

Assim, dado $x \neq 0 \in M$, temos que $\psi(x) \neq 0$ em M^{**} .
Tomando $\phi: M^{**} \rightarrow \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}$ tal que $\phi(\psi(x)) \neq 0$, temos que $\phi \circ \psi$ é o homomorfismo procurado.

Se M não é torção nem livre de torção, por [[4] pag. 524 teo.4] existe um pseudo isomorfismo $f: M \rightarrow T(M) \oplus F(T(M))$ que é injetivo pois M é livre de pseudo nulo. Mas para $x \neq 0 \in T(M)$, existe $\psi: T(M) \rightarrow \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}$ tal que $\psi(x) \neq 0$. Assim, basta tomar $\psi \circ f$.

2.35. Um Λ -módulo M é pseudo nulo se e somente se

$$\text{Hom}_{\Lambda}(M, \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda}) = 0:$$

Demonstração

Decorre imediatamente de 2.34. e 2.16.

2.36. Se N é um Λ -módulo pseudo nulo e $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ é uma seqüência exata onde F é livre, então $F \simeq M^*$.

Demonstração

$0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ exata induz $0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(N, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(F, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(M, \Lambda) \rightarrow e^1(N) \rightarrow \dots$ exata. Mas $\text{Hom}_{\Lambda}(N, \Lambda) = e^1(N) = 0$ logo, $F^* \simeq M^*$, e como $F^* \simeq F$, segue que $F \simeq M^*$.

2.37. Para qualquer Λ -módulo M , existe uma seqüência exata $0 \rightarrow e^1(F(T(M))) \rightarrow e^1(M) \rightarrow e^1(T(M)) \rightarrow 0$ e $e^1(M)$ é Λ -torção:

Demonstração

A seqüência exata $0 \rightarrow T(M) \rightarrow M \rightarrow F(T(M)) \rightarrow 0$ induz a seqüência exata $\dots \rightarrow e^0(T(M)) \rightarrow e^1(F(T(M))) \rightarrow e^1(M) \rightarrow e^1(T(M)) \rightarrow e^2(F(T(M))) \rightarrow \dots$. Mas, $e^0(T(M))=0$, e como livre de torção implica livre de pseudo nulo, segue que $e^2(F(T(M))) = 0$.

Assim, $0 \rightarrow e^1(F(T(M))) \rightarrow e^1(M) \rightarrow e^1(T(M)) \rightarrow 0$ é exata.

Temos que $e^1(F(T(M)))$ é pseudo nulo e portanto Λ -torção, $e^1(T(M)) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(T(M), \frac{Q(\Lambda)}{\Lambda})$ e portanto Λ -torção, além disso, $e^1(T(M)) \simeq \frac{e^1(M)}{e^1(F(T(M)))}$, ou seja, dado $y \in$

$e^1(M)$, temos que existe $x \neq 0 \in \Lambda$ tal que $x\bar{y} = 0$, onde $\bar{y} = y + e^1(M)$, ou seja, $xy \in e^1(F(T(M)))$ que é Λ -torção, logo, $\exists \alpha \neq 0 \in \Lambda$ tal que $\alpha xy = 0$, ou seja, αx anula y e $\alpha x \neq 0$ pois Λ é domínio de integridade, Logo, $e^1(M)$ é Λ -torção.

2.38. Se M é um Λ -módulo, então $e^2(e^2(M)) \simeq N(M)$:

Demonstração

$e^2(M) \simeq e^2(N(M))$ e portanto $e^2(e^2(M)) \simeq e^2(e^2(N(M)))$, além disso, $e^1(N(M)) = 0 = N(M)^*$.

Tomemos uma apresentação livre de $N(M)$;

$0 \rightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} N(M) \rightarrow 0$. Esta seqüência induz a seqüência exata

$0 \rightarrow N(M)^* \xrightarrow{d_1^*} F_0^* \xrightarrow{d_1^*} F_1^*$ e como $\text{Im } d_1^* = \text{Ker } d_2^*$, pois

$\frac{\text{Ker } d_2^*}{\text{Im } d_1^*} = e^1(N(M)) = 0$ [I - 2.20], segue que a seqüência

$0 \rightarrow F_0^* \xrightarrow{d_1^*} F_1^* \xrightarrow{d_2^*} F_2^* \xrightarrow{\frac{F_2^*}{\text{Im } d_2^*}} 0$ é exata. Mas por

[I. 2.20.v] temos que $\frac{F_2^*}{\text{Im } d_2^*} \simeq e^2(N(M))$, ou seja, a

seqüência $0 \rightarrow F_0^* \xrightarrow{d_1^*} F_1^* \xrightarrow{d_2^*} F_2^* \rightarrow e^2(N(M)) \rightarrow 0$ é exata, e portanto uma apresentação livre para $e^2(N(M))$, logo, $e^2(e^2(M)) \simeq e^2(e^2(N(M))) \simeq \text{Cokernel } d_0^{**} \simeq \text{Cokernel } d_0 \simeq N(M)$

2.39. Seja M um Λ -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $N(M) = 0$

b) $e^2(M) = 0$

c) dimensão homológica de $M \leq 1$

Demonstração

(a $\Leftrightarrow$ b) pois $e^2(M) \simeq e^2(N(M))$ e $e^2(e^2(N(M))) \simeq N(M)$

(b $\Leftrightarrow$ c) segue de [I - 2.21 - iii].

2.40. Se M é um Λ -módulo, então $e^1(e^1(M)) \simeq F(N(M))$:

Demonstração

Por - 2.19, temos que $e^1(M) \simeq e^1(FN(M))$ e

por 2.39. segue que dimensão homológica de $F(N(M)) \leq 1$. Temos então uma apresentação livre de $F(N(M))$,

$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \rightarrow F(N(M)) \rightarrow 0$. Esta sequência induz a sequência exata

$0 \rightarrow F(N(M))^* \rightarrow F_0^* \xrightarrow{d^*} F_1^* \rightarrow e^1(F(N(M))) \rightarrow 0$ que é uma apresentação livre de $e^1(F(N(M)))$, logo, $e^1(e^1(M)) \cong e^1(e^1(F(N(M)))) \cong \text{Cokernel } d^{**} \cong \text{Cokernel } d \cong F(N(M))$.

2.41. Definição: Seja M um Λ -módulo, então

$t(M) = \{x \in M \mid x \cdot n = 0 \text{ para algum } n \neq 0 \in \mathbb{Z}\}$ e

$f(M) = \frac{M}{t(M)}$ são chamados de submódulo de $\mathbb{Z}$ -torção de M e submódulo livre de $\mathbb{Z}$ -torção de M , respectivamente.

2.42. Para todo Λ -módulo M temos o seguinte diagrama

Demonstração

Falta provar apenas que $N(M) = 0$ quando $t(M) = 0$. Mostremos mais geralmente que $N(M) \subset t(M)$.

Seja $m \in N(M)$, então $\text{Ann}(m)$ não está contido em qualquer ideal principal. Tomemos então uma decomposição primária de $\text{Ann}(m)$, [I - 1.8 - i], ou seja, $\text{Ann}(m) = q_1 \cap$

$q_2 \cap \dots \cap q_K$, onde q_i é m_i -primário. Como $\text{Ann}(m)$ não está contido em qualquer ideal principal, segue que m_i é maximal, isto é, $m_i = (p_i, g_i(t))$. Por [I - 1.8 - iii] temos que para cada i , existe um inteiro $n_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p_i^{n_i} \subset q_i$. Seja $x = \prod_{i=1}^K p_i^{n_i}$, temos que $x \in \bigcap_{i=1}^K q_i$, ou seja,

$x \in \text{Ann}(m)$ e $x \in \mathbb{Z}$, logo, $m \in t(M)$ e portanto $N(M) \subset t(M)$.

2.43. Para um Λ -módulo M , $e^1(e^2(M)) = 0$ e para um Λ -módulo de torção T , $e^2(e^1(T)) = 0$:

Demonstração

$e^1(e^2(M)) \simeq e^1(F(N(e^2(M)))) = e^1(0) = 0$, pois $e^2(M)$ é pseudo nulo.

$e^2(e^1(T)) \simeq e^2(N(e^1(T))) = e^2(0) = 0$, pois $e^1(T)$ é livre de pseudo nulo.

2.44. Se F , T e M são Λ -módulos tais que F é livre, T é torção e a seqüência $0 \rightarrow M \xrightarrow{\Psi} F \xrightarrow{\Phi} T \rightarrow 0$ é exata, então $M^{} \simeq \Phi^{-1}(N(T))$:**

Demonstração

$e^1(e^1(T)) \simeq F(N(T))$, (2.41), e portanto a sequência $0 \rightarrow N(T) \rightarrow T \rightarrow e^1(e^1(T)) \rightarrow 0$ é exata.

Como $T^* = 0$ e $e^1(F) = 0$, a sequência $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow T \rightarrow 0$ induz a sequência exata $0 \rightarrow F^* \rightarrow M^* \rightarrow e^1(T) \rightarrow 0$, que é portanto uma apresentação livre de $e^1(T)$. Temos então o seguinte diagrama comutativo, onde as linhas e as colunas são exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & 0 & \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & & \text{Ker } a & & 0 & & N(T) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & F & \xrightarrow{\phi} & T \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M^{**} & \longrightarrow & F^{**} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & e^1(e^1(T)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{M^{**}}{M} & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Por [I - 2.8] temos que $\frac{M^{**}}{M} \simeq N(T)$ e $\phi^{-1}(N(T)) \simeq W^{-1}(M^{**}) \simeq M^{**}$.

OBS:

a) Se T é livre de pseudo nulo, temos que $W^{-1}(M^{**}) \simeq$

$\phi^{-1}(0) = \text{Im } \psi$ e $\frac{M^{**}}{M} = 0$, ou seja, $M^{**} \simeq M$ e portanto M é livre.

b) Se $T = N(T)$, temos que $W^{-1}(M^{**}) \simeq \phi^{-1}(T) = F$ e $T \simeq \frac{M^*}{M}$.

2.45. Definição: Seja M um Λ -módulo e:

i) $[M]$ a classe dos Λ -módulos N tais que $\exists F_1, F_2$ livres de modo que $M \oplus F_1 \simeq N \oplus F_2$. $[M]$ é chamada de classe estável de M .

ii) $\{M\}$ a classe dos Λ -módulos N tais que $M \simeq N$. $\{M\}$ é chamada de classe dos isomorfismos de M .

2.46. Existe uma correspondência 1 a 1 entre a classe de isomorfismos dos Λ -módulos pseudo-nulos e a classe estável dos Λ -módulos livres de torção dada por: $\{N\}$ corresponde a $[M]$ ($\{N\} \longleftrightarrow [M]$) se e somente se existe uma sequência exata $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ com F livre:

Demonstração

Pela observação b) podemos supor $F = M^{**}$ pois W é isomorfismo e N pseudo nulo, portanto torção.

Seja $[M_1] = [M_2]$, $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1^{**} \rightarrow N_1 \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2^{**} \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ seqüências exatas. Existe um isomorfismo $\phi : M_1 \oplus F_1 \rightarrow M_2 \oplus F_2$, onde F_1 e F_2 são livres, e portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 \oplus F_1 & \longrightarrow & M_1^{**} \oplus F_1^{**} & \longrightarrow & N_1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \Phi \text{ is} & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M_2 \oplus F_2 & \longrightarrow & M_2^{**} \oplus F_2^{**} & \longrightarrow & N_2 \longrightarrow 0
\end{array}$$

pode ser completado usando-se aplicações induzidas por Φ que são isomorfismos duais, pois, $M_1 \oplus F_1 \simeq M_2 \oplus F_2 \Rightarrow$

$$M_1^{**} \oplus F_1^{**} \simeq M_2^{**} \oplus F_2^{**} \text{ e}$$

$$N_1 \simeq \frac{M_1^{**} \oplus F_1^{**}}{M_1 \oplus F_1} \simeq \frac{M_2^{**} \oplus F_2^{**}}{M_2 \oplus F_2} \simeq N_2. \text{ Portanto } \{N_1\} = \{N_2\}.$$

Tomemos agora $\{N_1\} = \{N_2\}$, isto é, existe isomorfismo $\Phi : N_1 \rightarrow N_2$, e consideremos as seqüências exatas

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1^{**} \xrightarrow{\pi_1} N_1 \rightarrow 0 \text{ e } 0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2^{**} \xrightarrow{\pi_2} N_2 \rightarrow 0$$

Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{w_1} & M_1^{**} & \xrightarrow{\pi_1} & N_1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ is} \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M_1^{**} \oplus M_2^{**} & \xrightarrow{(\Phi \circ \pi_1) + \pi_2} & N_2 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & L_1 & & M_2^{**} & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

onde $K = \text{Ker}((\Phi \circ \pi_1) + \pi_2)$; $L_1 = \text{Coker } \Psi_1$, sendo Ψ_1 definida por $\Psi_1(x) = (w_1(x), 0)$ pois se $x \in M_1$, então $w_1(x) \in$

$$\begin{aligned} & \text{Ker}((\Phi \circ \pi_1) + \pi_2) \text{ visto que } ((\Phi \circ \pi_1) + \pi_2)(w_1(x)) = \\ & = (\Phi \circ \pi_1 \circ w_1)(x) + (\pi_2 \circ w_1)(x) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{w_2} & M_2^{**} & \xrightarrow{\pi_2} & N_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 2 & & \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M_1^{**} \oplus M_2^{**} & \xrightarrow{(\Phi \circ \pi_1) + \pi_2} & N_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & L_2 & & M_1^{**} & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

onde $K = \text{Coker}((\Phi \circ \pi_1) + \pi_2)$, $\Psi_2(x) = (w_2(x), 0)$ e
 $L_2 = \text{Coker } \Psi_2$. Por [I - 2.8.] temos que $L_1 \approx M_2^{**}$ e
 $L_2 \approx M_1^{**}$, ou seja, L_1 e L_2 são livres, logo, por [I -
 2.13 - iii] o diagrama cinde, isto é, $M_1 \oplus L_1 \approx K \approx M_2 \oplus$
 L_2 e portanto $[M_1] = [M_2]$.

2.47. Seja N um Λ -módulo pseudo-nulo e Z o anel dos in
 teiros, então $\text{Tor}_\Lambda^i(N, Z)$ e $N \otimes_\Lambda Z$ são finitos.

Demonstração

Consideremos a sequência exata

$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(t-1)} \Lambda \rightarrow Z \rightarrow 0$, ela induz a seqüência exata

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_{\Lambda}^1(N, \Lambda) \rightarrow \text{Tor}_{\Lambda}^1(N, Z) \rightarrow N \otimes_{\Lambda} \Lambda \xrightarrow{(t-1)^*} N \otimes_{\Lambda} \Lambda \rightarrow N \otimes_{\Lambda} Z \rightarrow 0.$$

Por [I - 2.19 - iii e iv], $\text{Tor}_{\Lambda}^1(N, \Lambda) = 0$,

além disso, $N \otimes_{\Lambda} \Lambda \simeq N$, logo, $\text{Tor}_{\Lambda}^1(N, Z) = \text{Ker}(t-1)^* \subset N$, e N é finito pois é pseudo-nulo.

Em 2.43. ficou provado que $N \subset t(N)$, ou seja, $N = t(N)$. Assim, para cada $n \in N$, $\exists m \in Z$ tal que $m.n = 0$, além disso, para cada $z \in Z$, temos que $z = a.m + c$ onde $c < m$, portanto, para cada $n \in N$, o conjunto $A_n = \{n \otimes_{\Lambda} z ; z \in Z\}$ tem no máximo m elementos, onde m é o menor inteiro positivo tal que $m.n = 0$. Como $N \otimes_{\Lambda} Z = \bigcup_{n \in N} A_n$, segue que $N \otimes_{\Lambda} Z$ é finito.

2.48. Definição: O rank de um R -módulo B , onde R é um anel comutativo com unidade, é a dimensão do espaço vetorial $B \otimes_R Q(R)$ sobre o corpo $Q(R)$.

2.49. Se M é um Λ -módulo livre de torção, então

$$\text{rank}_Z(M \otimes_{\Lambda} Z) = \text{rank}_{\Lambda}(M):$$

Demonstração

Consideremos a seqüência exata induzida pelo pseudo-isomorfismo $\phi : M \rightarrow M^{**}$, $0 \rightarrow M \rightarrow M^{**} \rightarrow \frac{M^{**}}{M} \rightarrow 0$. Es

ta seqüência induz a seqüência exata

$0 \rightarrow M \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow M^{**} \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow \frac{M^{**}}{M} \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow 0$, visto que $Q(\Lambda)$ é flat. Como $\frac{M^{**}}{M}$ é pseudo-nulo, segue que $\frac{M^{**}}{M} \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) = 0$, além disso, $M \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \simeq Q(\Lambda)^r$ e $M^{**} \simeq \Lambda^n$, ou seja, $M^{**} \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \simeq Q(\Lambda)^n$ e portanto, da seqüência exata, temos que $n=r$, isto é, $M^{**} \simeq \Lambda^r$, onde $r = \text{rank}_{\Lambda}(M)$.

A seqüência exata $0 \rightarrow M \rightarrow M^{**} \rightarrow \frac{M^{**}}{M} \rightarrow 0$ também induz a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Tor}_{\Lambda}^1(N, Z) \rightarrow M \otimes_{\Lambda} Z \rightarrow Z^r \rightarrow$

$N \otimes_{\Lambda} Z \rightarrow 0$. Como $\text{Tor}_{\Lambda}^1(N, Z)$ e $N \otimes_{\Lambda} Z$ são finitos, segue que são pseudo nulos, ou seja, são Z-torção = 2.43.

Assim, ao tensorializarmos a seqüência acima por Q (corpo dos racionais), teremos a seqüência exata

$0 \rightarrow (M \otimes_{\Lambda} Z) \otimes_Z Q \rightarrow Z^r \otimes_Z Q \rightarrow 0$, e como $Z^r \otimes_Z Q \simeq Q^r$, segue que $\text{rank}_Z(M \otimes_{\Lambda} Z) = r$.

2.50. Se M é um Λ -módulo que não é livre de torção, então

$$\text{rank}_{\Lambda}(M) = \text{rank}_{\Lambda}(F(T(M))) = \text{rank}_Z(F(T(M)) \otimes_{\Lambda} Z):$$

Demonstração

A última igualdade segue do resultado anterior.

Para a primeira igualdade consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow T(M) \rightarrow M \rightarrow F(T(M)) \rightarrow 0$, ela induz a seqüência exata $0 \rightarrow T(M) \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow M \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow F(T(M)) \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \rightarrow 0$. Mas $T(M) \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) = 0$ e $M \otimes_{\Lambda} Q(\Lambda) \simeq Q^r$, onde $r = \text{rank}_{\Lambda}(M)$.

2.51. Seja $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \rightarrow Z^r \rightarrow 0$ uma seqüência exata de Λ -módulos tal que $M_2 \otimes_{\Lambda} Z \approx Z^r$. Então,

$$\phi(M_1) = (t-1) \cdot M_2:$$

Demonstração

Como a seqüência é exata, segue que $Z^r \approx \frac{M_2}{\phi(M_1)}$ e portanto $(t-1)Z^r \approx (t-1) \cdot \left(\frac{M_2}{\phi(M_1)}\right) = 0$, ou seja, $(t-1)M_2 \subset \phi(M_1)$.

A seqüência exata $\Lambda \xrightarrow{t-1} \Lambda \rightarrow Z \rightarrow 0$ induz a seqüência exata $M_2 \otimes_{\Lambda} \Lambda \rightarrow M_2 \otimes_{\Lambda} \Lambda \rightarrow M_2 \otimes_{\Lambda} Z \rightarrow 0$, que é o mesmo que $M_2 \xrightarrow{t-1} M_2 \rightarrow Z^r \rightarrow 0$, ou seja, $Z^r = \frac{M_2}{(t-1)M_2}$.

Como $(t-1)M_2 \subset \phi(M_1)$ e $\phi(M_1) \subset M_2$ segue que a seqüência

$$0 \rightarrow \frac{\phi(M_1)}{(t-1)M_2} \rightarrow \frac{M_2}{(t-1)M_2} \rightarrow \frac{M_2}{\phi(M_1)} \rightarrow 0 \text{ é exata.}$$

Substituindo nesta seqüência os isomorfismos com Z^r , temos que

$$0 \rightarrow \frac{\phi(M_1)}{(t-1)M_2} \rightarrow Z^r \xrightarrow{\psi} Z^r \rightarrow 0 \text{ é exata.}$$

Por [I - 2.25 - ii] segue que ψ é isomorfismo, logo, $\frac{\phi(M_1)}{(t-1)M_2} = 0$ e portanto $\phi(M_1) = (t-1) \cdot M_2$.

3. Λ -módulos de tipo K:

3.1. Definição: Um Λ -módulo M é dito de tipo K se a multiplicação $(t-1): M \rightarrow M$ é isomorfismo.

Por 2.25 segue que tipo K é equivalente a $M \otimes_{\Lambda} Z = 0$.

3.2. Se M é tipo K, então M é Λ -torção:

Demonstração

Como M é finitamente gerado, segue que $M = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, além disso, sendo $(t-1): M \rightarrow M$ isomorfismo, segue que

$$\alpha_i = (t-1) \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \alpha_j, \text{ ou seja,}$$

$$\alpha_i = (t-1)(\lambda_{i1}\alpha_1 + \dots + \lambda_{im}\alpha_m) \text{ e portanto}$$

$$0 = (t-1)\lambda_{i1}\alpha_1 + \dots + (-1 + (t-1)\lambda_{ii})\alpha_i + \dots +$$

$$+ (t-1)\lambda_{im}\alpha_m.$$

$$\text{Seja } u_{ij} = \begin{cases} (t-1)\lambda_{ij} & \text{se } i \neq j \\ (t-1)\lambda_{ij} - 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Podemos ver M como $\frac{\Lambda^n}{K}$, onde $0 \rightarrow K \rightarrow \Lambda^n \rightarrow M \rightarrow 0$ é exata e os geradores de $M, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, são identificados com as classes de $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ em $\frac{\Lambda^n}{K}$.

A matriz $u = [u_{ij}] : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ induz $\bar{u} : \frac{\Lambda^n}{K} \rightarrow \frac{\Lambda^n}{K}$,

isto é, $\bar{u} : M \rightarrow M$, de modo que $\bar{u}(\alpha_i) = 0 \ \forall i$.

Seja $\Delta = \det \bar{u}$. Temos que $\Delta \cdot I_{n \times n} = \bar{u} \cdot \text{adj } \bar{u}$, logo,

$(\Delta \cdot I_{n \times n}) \cdot M \subset [u_{ij}] \cdot M = 0$, ou seja $\Delta \cdot \alpha_i = 0 \ \forall i$.

Vejam os agora que $\Delta \neq 0$.

Seja $\epsilon : \Lambda \rightarrow Z$ dada por $\epsilon(x(t)) = x(1)$. Temos que $\epsilon(\bar{u}_{ij}) = -\delta_{ij}$, e como ϵ é homomorfismo, segue que $\epsilon(\Delta) = \pm 1$, ou seja, $\Delta \neq 0$.

3.3. Se M é tipo K , então $\text{Tor}_\Lambda(M, Z) = 0$ para todo i :

Demonstração

A seqüência exata $0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(t-1)} \Lambda \xrightarrow{\epsilon} Z \rightarrow 0$ induz a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^2(M, \Lambda) \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^2(M, Z) \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^1(M, Z) \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^1(M, \Lambda) \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^1(M, \Lambda) \rightarrow \text{Tor}_\Lambda^1(M, Z) \rightarrow M \otimes_\Lambda \Lambda \xrightarrow{(t-1)^*} M \otimes_\Lambda \Lambda \rightarrow M \otimes_\Lambda Z \rightarrow 0$. Temos: $\text{Tor}_\Lambda^2(M, \Lambda) = \text{Tor}_\Lambda^1(M, \Lambda) = 0$, pois Λ é projetivo e $(t-1)^*$ é isomorfismo, logo, $\text{Tor}_\Lambda^2(M, Z) = \text{Tor}_\Lambda^1(M, Z) = M \otimes_\Lambda Z = 0$.

3.4. Se M é tipo K , então $t(M)$ é finito:

Demonstração

Seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ um conjunto de geradores de T . Como T é $\mathbb{Z}$ -torção, segue que $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $m.T = 0$

(basta tomar $m = \prod_{i=1}^n m_i$, onde $m_i y_i = 0$).

Vamos supor inicialmente que m é primo. Podemos considerar T como um módulo finitamente gerado sobre $\frac{\Lambda}{(m)} = \mathbb{Z}_m[t, t^{-1}]$ da seguinte forma: $\bar{x}t = xt$, onde $x \in \Lambda$, $t \in T$ e $\bar{x}$ = classe de x em $\frac{\Lambda}{(m)}$. Observe que se $\bar{x} = \bar{y}$, então $x - y \in (m)$, e daí $x.t = y.t$, ou seja, a atuação de $\frac{\Lambda}{(m)}$ em T está bem definida.

Como $\frac{\Lambda}{(m)}$ é um domínio de ideais principais, segue por [I - 2.4 - iii e iv] que T é uma soma direta finita de $\frac{\Lambda}{(m)}$ -módulos cíclicos. Cada um destes $\frac{\Lambda}{(m)}$ -módulos cíclicos, ou é finito, pois é espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{Z}_p$, ou é livre, sendo que esta última possibilidade está excluída pois $(t-1)$ é um automorfismo.

O caso geral segue pela seguinte indução: seja $m = p_1^{n_1} \dots p_j^{n_j}$ a decomposição em primos irredutíveis de m e definamos $|m| = \sum_{i=1}^j n_i$.

Se $|m| = 1$, então m é primo e já foi provado acima que T é finito.

Suponhamos por indução que $|m| = \alpha$, $m.T = 0$ e que o resultado é verdadeiro para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a.T = 0$ e $|a| \leq \alpha - 1$.

Seja p um primo da decomposição de m . Temos $0 = m.T = (\frac{m}{p}).(p.T)$ e como $|\frac{m}{p}| = \alpha - 1$, segue que $p.T$ é

finito. Mas $p.T \subset T$ e $p(\frac{T}{p.T}) = 0$, ou seja, $\frac{T}{p.T}$ é finito.

Daí, por um resultado provado em - 2.13 segue que T é finito.

3.5. Se M é tipo K , então $t(M) = N(M)$:

Demonstração

Vimos em - 2.43 que $N(M) \subset t(M)$, além disso, como $t(M) \subset M$, segue que $N(t(M)) \subset N(M)$. Mas $t(M)$ é finito e portanto por - 2.13, $t(M)$ é pseudo nulo, ou seja, $N(t(M)) = t(M)$. Daí, temos: $N(M) \subset t(M) = N(t(M)) \subset N(M)$.

3.6. Seja M um Λ -módulo de tipo K , então:

- i) $e^1(M) = 0$ se $f(M) = 0$
- ii) $e^2(M) = 0$ se $t(M) = 0$.

Demonstração

i) Se $f(M) = 0$, então $M = t(M)$ e portanto M é pseudo nulo, logo, por - 2.16, segue que $e^1(M) = 0$.

ii) É um caso particular de - 2.17 visto que $t(M) = N(M)$.

3.7. Seja M um Λ -módulo de tipo K , então $e^1(M) \approx e^1(f(M))$

é livre de Z -torção:

Demonstração

$e^1(M) \approx e^1(f(M))$ segue de - 2.19 .

Seja $m \in Z$, $m \neq 0$ e consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow f(M) \xrightarrow{m} \frac{f(M)}{m \cdot f(M)} \rightarrow 0$. Esta seqüência induz a se

qüência exata $\dots \rightarrow e^1\left(\frac{f(M)}{m \cdot f(M)}\right) \rightarrow e^1(f(M)) \xrightarrow{m^*} e^1(f(M)) \rightarrow$

$\dots$ onde m^* nada mais é que a multiplicação por m [I-2.20 - ix]. Como $m \cdot \left(\frac{f(M)}{m \cdot f(M)}\right) = 0$, segue que $\frac{f(M)}{m \cdot f(M)}$ é

Z -torção, o que implica por - 3.6 que $e^1\left(\frac{f(M)}{m \cdot f(M)}\right) = 0$, ou

seja, m^* é injetiva e conseqüentemente $e^1(f(M))$ é livre de Z -torção.

3.8. $e^2(M) \approx e^2(t(M))$ é Z -torção:

Demonstração

$e^2(M) \approx e^2(t(M))$ segue de - 2.22 .

Seja $m \in Z$ tal que $m \cdot t(M) = 0$. Então $m: e^2(t(M)) \rightarrow e^2(t(M))$ é induzida pelo homomorfismo nulo, [I - 2.20 - ix], e portanto é a aplicação nula, ou seja, $e^2(t(M))$ é Z -torção.

3.9. Seja M um Λ -módulo não nulo de tipo K , então as seguintes afirmações são equivalentes:

$$i) t(M) = 0$$

$$ii) N(M) = 0$$

$$iii) e^2(M) = 0$$

iv) dimensão homológica de $M = 1$:

Demonstração

Usando - 2.42 e o fato que $t(M) = N(M)$, falta mostrar apenas que dimensão homológica de $M \neq 0$.

Se dimensão homológica de $M = 0$, então M é projetivo e portanto livre, mas isto é um absurdo a não ser que M seja nulo, visto que M é tipo K e consequentemente Λ -torção.

3.10. Se M é tipo K , então $e^1(e^1(M)) \approx f(M)$:

Demonstração

Caso particular de - 2.40.

3.11. Se M é tipo K , então $\text{Ext}_{\Lambda}^i(M, Z) = 0$ para todo i :

Demonstração

Consideremos a seqüência exata $0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(t-1)} \Lambda \xrightarrow{\epsilon} Z \rightarrow 0$. Ela induz a seqüência exata $0 \rightarrow \text{Hom}(M, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(M, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(M, Z) \rightarrow e^1(M) \xrightarrow{(t-1)^*} e^1(M) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^1(M, Z) \rightarrow$

Temos:

$\text{Hom}(M, \Lambda) = 0$ pois M é Λ -torção.

$\text{Hom}(M, Z) = 0$ pois dado $\phi : M \rightarrow Z$ homomorfismo, como

$(t-1): M \rightarrow M$ é isomorfismo, segue que $\phi(y) = \phi((t-1)x) = (t-1)\phi(x) = 0 \quad \forall y \in M$.

$(t-1)^*$ e $(t-1)^{**}$ são aplicações nulas devido a [I - 2.20-ix]. Aplicando-se estes resultados na seqüência exata acima, segue que $\text{Ext}_{\Lambda}^i(M, Z) = 0 \quad \forall i$.

4. Ideais Elementares

4.1. Definição: Uma apresentação finita de um Λ -módulo M é uma seqüência exata de Λ -módulos e homomorfismos do tipo

$$\Lambda^p \xrightarrow{Q} \Lambda^q \xrightarrow{\Phi} M \rightarrow 0.$$

Como Λ é Noetheriano, dado um Λ -módulo, sempre existe uma apresentação finita de M .

A apresentação acima tem deficiência $(p-q)$ e é chamada de resolução livre curta de M se a aplicação Q for injetiva.

A matriz da aplicação Q , $([Q])$, é uma matriz $(p \times q)$, e a imagem da p -upla $(x_1, \dots, x_p)$ pela aplicação Q é dada por $(x_1, \dots, x_p) \cdot [Q]$, para que as relações fiquem explicitadas nas linhas da matriz de apresentação do módulo.

4.2. A soma alternada dos ranks dos termos de uma seqüência exata é zero:

Demonstração

Dada uma seqüência exata curta $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$, temos que $M_2 \cong \frac{M_1}{M_0}$, e portanto, $\text{rank}(M_2) = \text{rank}(\frac{M_1}{M_0})$.

Segue de [I.2.11 iieiii] que

$$Q(\Lambda) \otimes_{\Lambda} \left(\frac{M_1}{M_0} \right) \cong \frac{Q(\Lambda)^{r_1}}{Q(\Lambda)^{r_0}} \quad \text{onde } r_i = \text{rank}(M_i), \text{ logo,}$$

$\text{rank}(M_2) = \text{rank}(M_1) - \text{rank}(M_0)$ e neste caso a afirmação é verdadeira.

Em uma seqüência exata longa, $\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$, para cada M_i podemos considerar a seqüência exata curta $0 \rightarrow \text{Ker}(f_{i-1}) \rightarrow M_i \rightarrow \text{Im}(f_i) \rightarrow 0$ e daí, $\text{rank}(M_i) = \text{rank}(\text{Ker}(f_{i-1})) + \text{rank}(\text{Im}(f_i))$. Temos então, $\sum (-1)^i \text{rank}(M_i) = \sum (-1)^i (\text{rank}(\text{Ker } f_{i-1}) + \text{rank}(\text{Im } f_i)) = 0$ pois $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$.

4.3. Seja M um Λ -módulo de rank r e deficiência d . Então $e^2(M)$ pode ser gerado, como um Λ -módulo, por $(r-d)$ elementos:

Demonstração

Tomemos $0 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ uma apresentação livre de M , onde $\text{rank}(F_i) = r_i$ e portanto $d = r_0 - r_1$.

Como a soma alternada dos ranks dos termos da sequência exata é zero, temos que $r_2 = r + r_1 - r_0 = r - d$.

A sequência exata acima, induz a sequência semi exata $0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(F_0, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(F_1, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(F_2, \Lambda) \rightarrow 0$, sendo

que $e^2(M)$ é um quociente de $\text{Hom}_\Lambda(F_2, \Lambda)$, que é livre de rank $r_2 = r - d$, e portanto pode ser gerado por $(r - d)$ elementos.

4.4. Definição: Para cada $K \geq 0$, $K \in \mathbb{Z}$, seja $E_K(M)$ o ideal gerado pelos subdeterminantes de ordem $(q - K)$ da matriz $[Q]$ de uma apresentação de M , além disso, se $p < (q - K)$, $E_K = 0$ e se $(q - K) < 1$, $E_K = \Lambda$. O ideal $E_K(M)$ é chamado de K -ésimo ideal elementar de M .

Este ideal depende apenas de M e não da apresentação escolhida [[8]], e como um determinante é uma combinação linear de seus subdeterminantes, segue que $E_K(M) \leq E_{K+1}(M)$.

4.5. Se M é um Λ -módulo, então $E_0(M) \leq \text{Ann}(M)$:

Demonstração

Podemos supor $E_0(M) \neq 0$.

Seja $\Lambda^p \xrightarrow{Q} \Lambda^q \xrightarrow{\Phi} M \rightarrow 0$ uma apresentação de M e D uma submatriz $q \times q$ da matriz $[Q]$ tal que $\det D \neq 0$ (D existe pois $E_0(M) \neq 0$). Se fizermos $\delta = \det D$ temos:

$\delta \cdot I = D \cdot \text{Adj} \cdot D$ e portanto $\delta \cdot I(\Lambda^q) \subset D(\Lambda^q) \subset Q(\Lambda^P)$, ou seja,

$\delta \cdot \phi(u) = \phi(\delta u) \in \text{Im}(\phi_0 Q) = 0$ para todo $u \in \Lambda^q$. Assim,

$\delta \in \text{Ann}(M)$, e como $E_0(M)$ é gerado pelos determinantes das submatrizes de ordem q da matriz $[Q]$, segue que $E_0(M) \subset \text{Ann}(M)$.

4.6. Definição: O divisorial Hull $\tilde{I}$ de um ideal I de Λ é a interseção dos ideais principais de Λ que contém I .

Como Λ é fatorial, $\tilde{I}$ é o menor ideal principal que contém I , ou seja, $\tilde{I}$ é o ideal gerado pelo m.m.c. dos elementos de I .

4.7. i) $(\tilde{I})_S = \tilde{I}_S$

ii) $\tilde{I} = \cap I_p$, onde p percorre todos os ideais primos de altura 1 em Λ :

Demonstração

i) $\tilde{I} = \cap a_i$, onde a_i é ideal principal contendo I , assim,

$$(\tilde{I})_S = (\cap a_i)_S = \cap (a_i)_S = \tilde{I}_S$$

ii) Como Λ é Domínio de Krull, segue que $\Lambda = \cap \Lambda_p$, para todo primo p de altura 1 [I.1.7 iii]. Cada Λ_p é um domínio de ideais principais, ou seja, se I é um Ideal de Λ , temos que $\tilde{I}_p = I_p$, e portanto $\tilde{I} \subset \cap (\tilde{I})_p =$

Se $I \subset (a)$, então $n I_p \subset n (a)_p = (a) \cap \Lambda_p =$

$(a) \cap \Lambda = (a)$ ou seja, $n I_p$ está contido em qualquer

ideal principal e portanto $n I_p \subset \tilde{I}$.

4.8. Se B e C são Ideais de Λ , então $B \cdot C = \tilde{B} \cdot \tilde{C}$:

Demonstração:

Se $a \in n (B_p) \cdot n (C_p)$, então $a = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, onde $x_i \in n (B_p)$ e $y_i \in n (C_p)$, assim, fixado i_0 , temos $x_{i_0} \in B_p$ e $y_{i_0} \in C_p \forall p$, logo, $x_{i_0} y_{i_0} \in B_p \cdot C_p \forall p$, o que implica que $x_{i_0} y_{i_0} \in n (B_p \cdot C_p)$, ou seja,

$$a = \sum x_i y_i \in n (B_p \cdot C_p).$$

Se $a \in n (B_p \cdot C_p)$, então $a \in (B_p \cdot C_p) \forall p$, onde $a = \sum x_i y_i$, sendo que $x_i \in B_p$ e $y_i \in C_p \forall p$, assim, fixado i_0 , temos: $x_{i_0} \in B_p$ e $y_{i_0} \in C_p \forall p$, daí,

$$x_{i_0} \in n B_p \text{ e } y_{i_0} \in n C_p, \text{ ou seja, } x_{i_0} \cdot y_{i_0} \in (n B_p) \cdot (n C_p),$$

o que implica que $a = \sum x_i y_i \in (n B_p) \cdot (n C_p)$.

4.9. Seja $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ uma seqüência exata de Λ -módulos

tal que A é um módulo de torção e $\text{rank}(B) =$

$= \text{rank}(C) = r$. Então $E_r^{\sim}(B) = E_0^{\sim}(A) \cdot E_r^{\sim}(C)$:

Demonstração

Seja p um ideal primo de altura 1, então $0 \rightarrow A_p \rightarrow B_p \rightarrow C_p \rightarrow 0$ é exata. Se $[P]$ e $[Q]$ forem matrizes de apresentação de A_p e C_p respectivamente, teremos que uma matriz de apresentação de B_p será do tipo

$$\begin{bmatrix} [P] & 0 \\ * & [Q] \end{bmatrix}$$

Como Λ_p é domínio de ideais principais e p é principal, segue que $A_p \simeq \bigoplus_{i=1}^k \frac{\Lambda_p}{p^{e(i)}}$, onde

$0 < e(i) \leq e(i+1)$ e $C_p \simeq \Lambda_p^r \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^n \frac{\Lambda_p}{p^{f(j)}} \right)$ onde

$0 < f(j) \leq f(j+1)$; [I.1.9] e [I.2.4.i e iii]

As matrizes

$$\begin{bmatrix} p^{e(1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & p^{e(k)} \end{bmatrix}_{k \times k} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} p^{f(1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & p^{f(n)} \\ & & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}_{(n+r) \times (n+r)}$$

são matrizes de apresentação de A_p e C_p respectivamente, logo, $E_r(B_p)$ é o ideal gerado pelos subdeterminantes de

ordem $(k+n+r-r) = k+n$, da matriz.

Diagram illustrating a matrix structure, likely representing a system of equations or a partitioned matrix. The matrix is defined by dimensions $(k+N+r) \times (K+n+r)$.

The matrix is partitioned into four quadrants:

- Top-left quadrant: $p^e(1)$
- Top-right quadrant: 0
- Bottom-left quadrant: A sub-matrix with a horizontal axis labeled $p^e(k)$ and a vertical axis labeled $p^f(1)$.
- Bottom-right quadrant: A sub-matrix with a horizontal axis labeled $p^f(n)$ and a vertical axis labeled 0 .

e pertanto $E_r(B_p) = \langle p^{e(1)} \dots p^{e(k)} \cdot p^{r(1)} \dots p^{f(n)} \rangle =$

$$= E_o(A_p) \cdot E_r(C_p) \cdot$$

Assim, $E_r^{\sim}(B) = n \cdot E_r(B)_p = n \cdot E_r(B_p) = (E_o(A_p))$.

$$E_r(C_p) = n(E_0(A) \cdot E_r(C))_p = E_0(A) \cdot E_r(C) =$$

$$= E_0^{\sim}(A) \cdot E_r^{\sim}(C) \cdot$$

4.10. i) Um Λ -módulo M é pseudo nulo se e somente se

$$A_{n\tilde{n}}(M) = \Lambda :$$

ii) Se N é pseudo nulo, então $E_k^-(M) \approx E_k^-(\frac{M}{N})$ para

cada $K \geq 0$ e $M \supset N$:

Demonstração

i) ($\Rightarrow$) Se M é pseudo nulo, então $M_p = 0 \forall p$ de altura 1, 10

$$\text{go, } \text{Ann}(\tilde{M}) = \cap \text{Ann}(M)_p = \cap \text{Ann}(M_p) = \cap \text{Ann}(0) = \cap \Lambda_p = \Lambda$$

($\Leftarrow$) Se $\text{Ann}(M) = \Lambda$, então a interseção de todos os ideais principais de Λ que contém $\text{Ann}(M)$ é Λ , logo, $\text{Ann}(M) = \Lambda$ ou $\text{Ann}(M)$ tem altura 2. No primeiro caso $M=0$ e no segundo, $\text{Ann}(M)$ não está contido em qualquer ideal principal, ou seja, em ambos os casos M é pseudo nulo.

ii) Se N é pseudo nulo, então $(\frac{M}{N})_p \approx \frac{M_p}{N_p} \approx \frac{M_p}{0} \approx M_p$, assim,

$$E_K^{\sim}(M) = \cap E_K(M)_p = \cap E_K(M_p) = \cap E_K(\frac{M}{N})_p \approx E_K^{\sim}(\frac{M}{N}).$$

4.11. Seja A uma matriz $b \times c$ com entradas em Λ e $\text{rank} A = d$. Suponha que existe uma submatriz D de ordem d tal que $\det(D)$ divide todo subdeterminante de ordem d de A . Então existem matrizes quadradas invertíveis B e C tais que

$$B \cdot A \cdot C = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

Veja [[10] pag. 33].

4.12. Seja M um Λ -módulo de rank r . Então $E_r(M)$ é principal se e somente se $P = \frac{M}{TM}$ é livre e TM tem dimensão projetiva no máximo 1. Neste caso, $M \approx P \oplus TM$ e $E_{r+j}(M) = E_r(TM)$ para cada $j \geq 0$:

Demonstração

Suponhamos $E_r(M)$ principal e $\Lambda^p \xrightarrow{Q} \Lambda^q \xrightarrow{\Phi} M \rightarrow 0$ uma apresentação finita de M .

Seja p um ideal primo de Λ . Como $E_r(M)$ é principal, segue que $E_r(M)_p$ também é principal, mas $E_r(M)_p = E_r(M_p)$ e é gerado pelos subdeterminantes α_i de ordem $(q-r) \times (q-r)$ da matriz Q_p da apresentação $\Lambda_p^p \rightarrow \Lambda_p^q \rightarrow M_p \rightarrow 0$ de M_p , isto é, $E_r(M)_p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Λ_p é anel de integridade local, e portanto, por [I. 2.27] segue que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_j)$ onde $\alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, ou seja, α_j divide cada α_i , logo, por 4.11., segue que

$$Q_p = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que implica que $M_p \simeq \Lambda_p^r \oplus A$. Mas $\det D_p$ anula A e

$\det D_p \neq 0$, ou seja, $A = TM_p$. Assim, $M_p \simeq R_p^r \oplus TM_p$, implica que $P_p = \frac{M_p}{TM_p}$ é livre e portanto por [I.2.13 vi] P

é projetivo, o que em Λ é o mesmo que livre.

D_p é matriz quadrada $(q-r) \times (q-r)$ e nos dá uma apresentação finita de TM_p , e como $\det D_p = \alpha_j \neq 0$, segue que D_p é injetiva, ou seja, $0 \rightarrow \Lambda_p^{q-r} \xrightarrow{D_p} \Lambda_p^{q-r} \rightarrow TM_p \rightarrow 0$ é uma resolução livre de TM_p .

Seja $\psi : \Lambda^t \rightarrow TM$ sobrejetiva, então, $0 \rightarrow \text{Ker } \psi$

$\Lambda^t \rightarrow TM \rightarrow 0$ é exata, e conseqüentemente $0 \rightarrow (\text{Ker } \Psi)_p \rightarrow \Lambda_p^t \rightarrow TM_p \rightarrow 0$ é exata.

Utilizando as duas seqüências exatas em que TM_p aparece e o lema de Schanuel [20] pag. 92], temos que

$$(\text{Ker } \Psi)_p \oplus \Lambda_p^{q-r} \simeq \Lambda_p^t \oplus \Lambda_p^{q-r}, \text{ ou seja, } (\text{Ker } \Psi)_p \text{ é livre,}$$

donde se conclue que $\text{Ker } \Psi$ é livre e que portanto TM tem dimensão projetiva ≤ 1 .

Reciprocamente, se $P = \frac{M}{TM}$ é livre, segue que a seqüência $0 \rightarrow TM \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde, ou seja,

$M \simeq P \oplus TM$, além disso, se tensorializarmos esta seqüência por $Q(\Lambda)$ teremos que $P \simeq \Lambda^r$ e portanto $M \simeq \Lambda^r \oplus TM$.

Seja $0 \rightarrow \Lambda^{t_1} \xrightarrow{D} \Lambda^{t_2} \rightarrow TM \rightarrow 0$ uma apresentação finita de TM (existe pois TM tem dimensão projetiva no máximo 1). Se tensorializarmos esta seqüência por $Q(\Lambda)$, teremos que $t_1 = t_2$, ou seja, a matriz D é quadrada.

Como $M \simeq \Lambda^r \oplus TM$, então $0 \rightarrow \Lambda^{t_1} \xrightarrow{Q} \Lambda^{t_1} \oplus \Lambda^r \rightarrow \Lambda^r \oplus TM \rightarrow 0$ é uma apresentação finita de M , onde

$$[Q] = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e portanto, } E_r(M) \simeq E_r(\Lambda^r \oplus TM) \simeq$$

$\simeq E_0(TM)$ que é principal pois D é uma matriz quadrada.

4.13. M é livre se e somente se $E_r(M) = \Lambda$:

Demonstração

Se M é livre, tomemos a apresentação finita
 $\Lambda \xrightarrow{Q} \Lambda^{r+1} \rightarrow M \rightarrow 0$ onde $r = \text{rank } M$ e $[Q] = [1, 0, \dots, 0]$ é a matriz de apresentação $1 \times (r+1)$, daí, $E_r(M) = (1) = \Lambda$

Reciprocamente se $E_r(M) = \Lambda$, então $E_r(M)$ é principal, logo, por-4.12. segue que $M \simeq \Lambda^r \oplus TM$ e portanto ,
 $E_r(M) \simeq E_0(TM) = \Lambda$. Mas $E_0(TM) \subset \text{Ann}(TM)$ -4.5., ou seja,
 $\text{Ann}(TM) = \Lambda$, donde se conclue que $TM = 0$ e que $M \simeq \Lambda^r$.

CAPITULO 3

O objetivo deste capítulo é mostrar certos aspectos da algebrização dos problemas de Teoria de Nós e Enlaçamentos.

Alguns exemplos são feitos relacionados com a álgebra estudada nos capítulos anteriores sem entrar em muitos detalhes geométricos.

Um nó de dimensão n é uma sub-variedade diferenciável $K^n \subset S^{n+2}$ onde K^n é homeomorfo à S^n . Um enlaçamento de dimensão n é uma reunião disjunta $L = K_1^n \cup K_2^n \cup \dots \cup K_r^n \subset S_i^n$ é homeomorfo à esfera S^n e r é denominado multiplicidade do enlaçamento L .

Dois enlaçamentos $L = \bigcup_{i=1}^m K_i^n$ e $M = \bigcup_{i=1}^m J_i^n$ de mesma multiplicidade dizem-se equivalentes se existe um homeomorfismo $h: S^{n+2} \rightarrow S^{n+2}$ tal que $h(K_i) = J_i$ (outras equivalências podem ser consideradas mas não o faremos aqui). Denotaremos esta equivalência por $(\sim)$.

Um invariante de classe de Nós (ou enlaçamentos) é uma função f que associa a cada nó K um objeto $f(K)$ tal que, para nós (ou enlaçamentos) equivalentes, f associa o mesmo objeto.

Dado um enlaçamento L , denotamos $X(L)$ o seu complementar e $\{X(L)\}$ a sua classe topológica. Então se dois enlaçamentos L_1 e L_2 são equivalentes, temos que $\{X(L_1)\} = \{X(L_2)\}$, ou seja $\{X(L)\}$ é um invariante.

Deste exemplo surgem muitos outros invariantes tais como:

- a) $\pi_1 (X(L))$
- b) $\pi_n (X(L))$, $n > 1$
- c) Espaços de Revestimento de $X(L)$, etc.

Focalizaremos nossa atenção, neste capítulo, apenas em certos espaços de revestimento de $X(L)$ onde L é um enlaçamento ou particularmente um nó.

Um espaço de revestimento bastante utilizado como fonte para construção de invariantes é o Espaço de Revestimento Abelian Universal, que corresponde ao abelianizador $[\pi_1 (X(L)), \pi_1 (X(L))]$ que em geral é denotado $\tilde{X}(L)$.

Outro espaço de revestimento que será interessante aqui é o Espaço de Revestimento do Número de Enlaçamentos que corresponde ao Kernel (φ) , onde $\varphi: \pi_1 (X) \rightarrow \mathbb{Z}$ é dado por $\varphi(g) = \sum_{i=1}^r \text{link}(g, K_i^n)$ onde $L = \bigcup_{i=1}^r K_i^n$ é um enlaçamento e $\text{link}(g, K_i^n)$ é o número de enlaçamentos que cada componente K_i tem com o elemento $g \in \pi_1(X)$. A notação para este revestimento é $\hat{X}(L)$ (ou apenas $\hat{X}$).

Proposição: Seja K^n um nó, $X = S^{n-2} - K^n$ e $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ o Espaço de Revestimento Abelian Universal, então $H_q(\tilde{X})$ é Λ -módulo de forma natural.

Demonstração:

Segue da dualidade de Alexander [[9] pag.174] que X tem a homologia do círculo S^1 , logo, $H_0(X) = \mathbb{Z} = H_1(X)$ e $H_i(X) = 0$ se $i \geq 2$.

Como X é conexo por caminhos, temos por [[9] pag. 48] que existe uma sobrejeção $\psi: \pi_1(X) \rightarrow H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ tal que

$\text{Ker } \Psi = [\Pi_1(X), \Pi_1(X)]$. Por [[15] pag. 163] segue que o espaço de revestimento $\tilde{X}$ associado à $\text{Ker } \Psi$ é o grupo de revestimento $A(\tilde{X}, P) \simeq Z$, visto que $[\Pi_1(X), \Pi_1(X)]$ é normal.

Seja T um gerador de $A(\tilde{X}, P)$, ou seja, T é homeomorfismo de $\tilde{X}$ e portanto $T_* : H_*(\tilde{X}) \rightarrow H_*(\tilde{X})$ é isomorfismo.

Identificando T_* com $T \in Z[t, t^{-1}] = \Lambda$, podemos definir a atuação de $t \in \Lambda$ em $a \in H_q(\tilde{X}, Z)$ da seguinte forma $t \cdot a = T_*(a)$, ou mais geralmente, se $p(t) = \sum_{i=n_0}^{n_1} b_i t^i$; $n_0, n_1 \in Z$, então $p(t) \cdot a = \sum_{i=n_0}^{n_1} b_i T_*^i(a)$. Isto torna cada $H_q(\tilde{X})$ um Λ -módulo.

Observações:

1) Da mesma forma prova-se que se $\tilde{X}$ é Espaço de Revestimento Abelian Universal de um enlaçamento de multiplicidade r , então $H_q(\tilde{X})$ é um Λ_r -módulo

2) As homologias $H_q(\hat{X}, Z)$ do Espaço de Revestimento do Número Total de Enlaçamentos, tornam-se também módulos sobre o anel Λ .

3) Os módulos $H_q(\tilde{X})$ são finitamente gerados [[13] prop.1.1], além disso, $H_q(\tilde{X}) = 0$ para $q > n$.

Estes módulos são geralmente chamados de módulos de Alexander pois generalizam (ou contém) os polinômios de Alexander que são bastante estudados em Teoria Clássica de Nós ($n = 1$).

Dos módulos acima podemos extrair muitos invari

antes para os enlaçamentos, e estes em geral são ditos Invariantes Abelianos dos Enlaçamentos.

Muitos trabalhos se desenvolvem no sentido de utilizar estes invariantes para distinguir enlaçamentos ou se caracterizar estes módulos; o que segue são alguns exemplos destes trabalhos.

Exemplo 1 :

O polinômio de Alexander que classicamente se calcula de uma projeção do nó através de um algoritmo, na da mais é que o primeiro ideal elementar $E_0(H_1(\tilde{X}))$, donde concluímos que $H_1(\tilde{X})$ carrega dentro de si todas as informações que se obtinha dos polinômios de Alexander.

Exemplo 2 :

Seja Λ_k um gerador do ideal principal $E_k^{\sim}(M)$, onde M é um Λ -módulo. Neste trabalho mostramos que $E_0(M) \subset \text{Ann}(M)$ para qualquer Λ -módulo M , enquanto que R.H.Crowel mostra em [[7]] que para $H_1(\tilde{X})$, temos que $\text{Ann}(H_1(\tilde{X})) = (\Lambda_0/\Lambda_1)$. No mesmo trabalho ele calcula para o nó quadrado, $\Lambda_0 = (t^2 - t + 1)^2$ e $\Lambda_1 = t^2 - t + 1$, e portanto $\text{Ann}(H_1(\tilde{X})) = t^2 - t + 1$; faz o mesmo para o nó 8_{20n} , obtendo $\Lambda_0 = (t^2 - t + 1)^2$ e $\Lambda_1 = 1$, logo, $\text{Ann}(H_1(\tilde{X})) = (t^2 - t + 1)^2$. Estes dois cálculos de $\text{Ann}(H_1(\tilde{X}))$ mostram que os ideais elementares são mais eficientes para se distinguir nós do que os polinômios de Alexander e que em geral $E_0(H_1(\tilde{X})) \not\subset \text{Ann}(H_1(\tilde{X}))$.

Exemplo 3 :

Levine em [[13] prop. 1.1 e 1.2] mostra que os módulos de Alexander, (que denotou A_q) de um n -nó são do tipo K para $q > 0$, além disso, eles se relacionam através de sequências exatas curtas $0 \rightarrow e^0(A_{n-q}) \rightarrow \bar{A}_q \rightarrow e^1(A_{n+1-q}) \rightarrow 0$, onde $0 < q \leq n$ e $\bar{M}$ é o Λ -módulo cujo grupo abeliano subjacente é M com a ação conjugada de Λ , isto é $t_* \bar{m} = \overline{t^{-1} \cdot m}$ para todo $m \in M$.

Como vimos em [II.3.7 e 3.8], se M é tipo K , então $e^2(M)$ é Z -torção e $e^1(M)$ é livre de Z -torção, logo; da sequência exata acima, concluímos que $e^2(A_{n-q})$ é o submódulo de Z -torção de A_q , enquanto $e^1(A_{n+1-q})$ é a parte livre de Z -torção.

Neste trabalho Levine dá uma caracterização algébrica completa destes módulos de Alexander com excessão da parte de Z -torção de A_1 .

Exemplo 4 :

Um n -link L de Multiplicidade u é dito geometricamente K -cindível (splittable) ($0 \leq K \leq u-1$) se existir uma coleção de bolas B_i^{n+2} ; $i = 1, 2, \dots, K$ disjuntas em S^{n+2} tal que:

i) $B_i^{n+2} \cap L \neq \emptyset$; $1 \leq i \leq K$

ii) $\partial B_i \cap L = \emptyset$

iii) $L \subset \bigcup_{i=1}^K B_i$

iv) K é maximal com respeito às propriedades acima.

Se $K = u-1$, dizemos que L é completamente cindível, e se $K = 0$, dizemos que L é não cindível

Y. Shinohara e D.W. Sumners mostram em [[22]] que se $L = K_1^n \cup K_2^n$ é um enlaçamento de multiplicidade 2 cindível, então:

$$H_i(\tilde{X}, Z) \simeq H_i(\tilde{X}(K_1), Z) \oplus H_i(\tilde{X}(K_2), Z) \quad ; \quad 2 \leq i \leq n$$

$$H_1(\tilde{X}, Z) \simeq H_1(\tilde{X}(K_1), Z) \oplus H_1(\tilde{X}(K_2), Z) \oplus \Lambda$$

$$H_{n+1}(\tilde{X}, Z) \simeq \Lambda$$

Neste mesmo artigo eles dão exemplos de enlaçamentos de 2 componentes em S^4 obtido por rotação, cujas apresentações são $(t^2 + t + 1, 2)$ e $(t^2 + t + 1, 0)$ e portanto ambos são não cindíveis. Os exemplos são as rotações de

ao redor de R_0^2

Aplicações mais profundas dos resultados aqui apresentados podem ser vistos por exemplo em [[13]], [[14]], [[10]] e [[22]].

Neste trabalho nos restringimos a algumas aplicações apenas para efeito de ilustração.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ATIYAH, M.F. - MACDONALD, I.G. - Introduction to Comu
tative Algebra - Addison Wesley Publishing Company
(1969).
- [2] AUSLANDER, M and BUCHSBAUM, D.A. - Homological Dimen
sion in Local Rings - Trans. Amer. Math. Soc. - Vol.
85 (1957).
- [3] AUSLANDER, M and BUCHSBAUM, D.A. - Homological Dimen
sion in Noetherian Rings II - Trans. Amer. Moth.Soc.
Vol. 88 (1958).
- [4] BOURBAKI, N. - Elements of Math. - Comutative Algebra
- Addison Wesley - (1972).
- [5] BOURBAKI, N. - Elements of Math.- Algebra Part 1 - Ad
dison Wesley - (1973).
- [6] Cartan, H. and EILENBERG, S. - Homological Algebra -
Princeton (1955).
- [7] CROWELL, R.H. - The Annihilator of a Knot Module -
Proc. of A.M.S. Vol 15 (1964).
- [8] CROWELL, R.H. and FOX, R.H. - Introduction to Knot
Theory-G.T.M. 57 (1963).

- [9] GREENBERG, M.J. - Lectures on Algebraic Topology
W.A. Benjamin, INC. (1966).
- [10] HILLMAN, J.A. - Alexander Ideals of Links - Lecture
Notes of Mathematics vol.
- [11] HU, SZE - TSEN - Introduction to Homological Algebra -
Holden - Day, Inc. (1968).
- [12] LAM, T.Y. - Serre's Conjecture - L.N.M. Vol. 635.
- [13] LEVINE, J. - Knot Módulos I - Trans. of the A.M.S.
vol. 229 (1977).
- [14] MANZOLI, O.N. - Total Linking Number Modules - Ph .D.
Thesis - Brandeis University (1982).
- [15] MASSEY, W.S. - Algebraic Topology : An Introduction -
G.T.M. 56 (1967).
- [16] MATSUMURA, H. - Comutative Algebra - The Benjamin/Cum
mings Publishing Company (1970).
- [17] POLCINO MILIES, F.C. - Anéis e Módulos - Publicações
do I.M.E. - U.S.P. (1972).
- [18] NORTHCOOTT, D.G. - A First Course of Homological Alge
bra - Cambridge University Press - (1973).

- [19] ROLFSEN, D. - Knots and Links - Publish or Perish ,
Inc. (1976).
- [20] ROTMAN, J.J. - Notes on Homological Algebra - Van Nos-
trand Reinhold Mathematical Studies - 26 (1970).
- [21] SESHADRI, C. - Triviality of Vector Bundles Over the
Affine Space K - Proc. Nat. Ac. Science - U.S.A. 44
(1958).
- [22] SHINOHARA, Y. and SUMNERS, D.W. - Homology Invariants
of Cyclic Coverings with Application to Links
Trans. of A.M.S. vol. 163 (1972).