Topologias maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos

Henry Jose Gullo Mercado

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Henry Jose Gullo Mercado

Topologias maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gullo Mercado, Henry Jose
G973t Topologias maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos / Henry Jose Gullo Mercado; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2016.
70 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Topologias maximais. 2. Famílias de subconjuntos. 3. Discretos, Sequências, Compactos, Densos, Conexos. 4. Linearmente Lindelöf. I. Fiorini Aurichi, Leandro , orient. II. Título.

Henry Jose Gullo Mercado

Maximal topologies with respect to some families of subsets

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2016

A la memoria de mi abuela Maria Alejandrina Herrera de Mercado,
por su fuerza y amor dedicados a toda una família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus que me concedeu força e sabedoria para vencer os obstáculos ao longo desse caminho e também por me levantar nas quedas.

Ao meu orientador, o professor Leandro Aurichi, por me acolher como orientando, pela paciência e disposição para direcionar o trabalho e por sua honestidade e integridade.

Meu reconhecimento aos professores e funcionários do ICMC pela dedicação ao crescimento acadêmico dos alunos e do instituto.

Gostaria de agradecer a toda minha família por sempre acreditar em mim e me apoiar. Especialmente a minha irmã Lorena, as minhas primas Katia e Sofia, aos meus primos José, Luis e Victor e a minha tia Rosiris, por cuidar com carinho e alegria da minha mãe, das minhas tias e dos meus avós.

À Universidade de São Paulo pela oportunidade e as agências CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Grupo de Oração Universitário (GOU) da cidade de São Carlos que foi minha família e meu apoio durante todos os momentos da minha vida, ao longo da estadia nessa cidade. Agradeço também, ao Grupo da Pastoral de Rua da Paróquia Nossa Senhora de Fátima, diocese de São Carlos, por ter me ensinado a caridade.

Aos meus colegas de doutorado que sempre me animaram e me motivaram a continuar o curso, mesmo diante das dificuldades, especialmente aos meus “irmãos” de orientador: Dione Lara e Renan Mezabarba pela disposição em ajudar quando precisava e pela alegria inspiradora com que sempre fizeram seus trabalhos.

Agradeço também a todos os amigos que fiz aqui em São Carlos que, de uma ou outra forma, ajudaram a fazer possível tudo o que eu vivi neste período de doutorado. Especialmente a Antônio Andrade, Fausto Lira, Fernando de Oliveira, José Santana, Murillo Carneiro e Rodrigo Carneiro que foram irmãos que me deram apoio e força.

Aos meus companheiros de casa, Korllvary Parra, Wilson Rosado, Eduar Carvajal e Fabian Marin por cada momento de convivência e pela ajuda quando eu mais precisei.

A todas as pessoas que passaram pela minha vida nesse período de doutorado e que deixaram um pouco de si para o meu crescimento acadêmico, profissional, espiritual e pessoal, embora seus nomes não tenham sido mencionados, estarão sempre em meu coração e na minha memória.

“Alegria, estudo e piedade
é o melhor programa para fazer você feliz
e que mais irá beneficiar a sua alma.”
(São João Bosco)

RESUMO

GULLO MERCADO, H. J.. **Topologias maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos**. 2016. 70 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Seja (X,τ) um espaço topológico e seja $\mathscr{F}$ a família de todos os subconjuntos de X que satisfazem uma propriedade topológica dada P (invariante por homeomorfismos). Se acrescentarmos abertos novos à topologia e se $\mathscr{F}'$ é a família de todos os subconjuntos do novo espaço que satisfazem a propriedade P, podemos ter que $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$. Se isto sempre acontece, dizemos que o espaço (X,τ) é maximal com respeito à família $\mathscr{F}$. Neste trabalho estudaremos os espaços topológicos maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos: discretos, compactos, densos, conexos e das sequências convergentes.

Palavras-chave: Topologias maximais, Famílias de subconjuntos, Discretos, Sequências, Compactos, Densos, Conexos, Linearmente Lindelöf.

ABSTRACT

GULLO MERCADO, H. J.. **Topologias maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos**. 2016. 70 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Let (X,τ) be a topological space and let $\mathscr{F}$ be the family of all subsets of X that satisfy a given topological property P (invariant under homeomorphisms). If we add new open sets to the topology and if $\mathscr{F}'$ is the family of all subsets of the new space which satisfy the property P, we can have $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$. If this is always the case, we say that (X,τ) is maximal with respect to the family $\mathscr{F}$. We show here some characterizations of maximal spaces with respect to the family of some of its subsets: compacts, dense, discrete and convergent sequences.

Key-words: Maximal topologies, Family of subsets, Discrete, Sequence, Compact, Dense, Connected, Nowhere dense, Linearly Lindelöf.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O estudo das topologias maximais e minimais começou quando Parhomenko (1939) introduziu o conceito de topologia minimal. Esta definição de maximalidade (minimalidade) se refere a uma propriedade topológica que satisfaz um espaço todo, isto é: dado um espaço topológico (X,τ) e uma propriedade topológica P, dizemos que o espaço topológico (X,τ) é maximal (minimal) com respeito à propriedade P ou, em outras palavras, que o espaço (X,τ) é P-maximal (minimal), se a topologia τ é um elemento maximal (minimal) no conjunto parcialmente ordenado pela inclusão de todas as topologias σ sobre X, tais que o espaço (X,σ) satisfaz a propriedade P. Assim, um espaço (X,τ) é maximal com respeito à propriedade P se, e somente se, o espaço (X,τ) satisfaz a propriedade P e, para toda topologia σ sobre X tal que $\sigma \supset \tau$ e $\sigma \neq \tau$, temos que o espaço (X,σ) não satisfaz a propriedade P.

A partir do estudo de Parhomenko (1939), diversos autores têm trabalhado amplamente nesta linha e têm conseguido resultados muito importantes como, por exemplo, mostrar a maximalidade ou minimalidade de alguns espaços com respeito a propriedades conhecidas, tais como Hausdorff e compactos (PARHOMENKO, 1939; HEWITT, 1943), bem como caracterizar alguns deles (CLARK; SCHNEIDER, 1988).

A definição de maximalidade abordada nesta tese (Definição 2.2.6) se refere a uma família de subconjuntos de um espaço topológico que satisfazem uma propriedade topológica, isto é: dado um espaço topológico (X,τ), $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos e P uma propriedade topológica, dizemos que o espaço topológico (X,τ) é maximal com respeito à família de todos os elementos de $\mathscr{F}$ que satisfazem a propriedade P no espaço (X,τ), que denotamos como $\mathscr{F}_P^\tau$, se a topologia τ é um elemento maximal no conjunto parcialmente ordenado pela inclusão de todas as topologias σ sobre X, tais que $\mathscr{F}_P^\sigma = \mathscr{F}_P^\tau$, onde $\mathscr{F}_P^\sigma$ é a família de todos os elementos de $\mathscr{F}$ que satisfazem a propriedade P no espaço (X,σ). Portanto, um espaço (X,τ) é maximal com respeito à família de todos os elementos de $\mathscr{F}$ que satisfazem a propriedade P no espaço (X,τ) se, e somente se, para toda topologia σ sobre X, tal que $\sigma \supset \tau$ e $\sigma \neq \tau$, temos que $\mathscr{F}_P^\sigma \neq \mathscr{F}_P^\tau$.

Se $\mathscr{F} = \wp(X)$, onde $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X, dizemos que o espaço (X, τ) é maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos que satisfazem a propriedade P.

Esta definição é mais geral que a definição de Parhomenko (1939) por duas razões: a primeira é que todo espaço maximal com respeito a uma propriedade topológica P, segundo a definição de Parhomenko (1939), é maximal com respeito à família $\{X\}$ de subconjuntos que satisfazem a propriedade P e a segunda é que no estudo da maximalidade com respeito a uma família de subconjuntos que satisfazem uma propriedade topológica P, não é necessário que o espaço todo satisfaça essa propriedade.

Este enfoque torna-se importante pelo fato de dar novas caracterizações para algumas propriedades clássicas como, por exemplo, os espaços maximais com respeito à família dos seus subconjuntos discretos que resultam serem os espaços fracamente discretamente gerados. Estes vêm sendo estudados amplamente por muitos autores, tais como Arhangel'skii e Buzyakova (1999), Dow *et al.* (2002), Bella e Simon (2004).

Ao longo desta tese, as definições e resultados que não estiverem referenciados correspondem a nossa autoria. A seguir apresentamos o conteúdo de cada capítulo e seção.

No capítulo 2, apresentamos parte da terminologia necessária ao desenvolvimento dos resultados, assim como algumas definições e ferramentas técnicas.

No capítulo 3, que está dividido em 5 seções, são estudados os espaços topológicos maximais com respeito a algumas famílias de subconjuntos.

- Na primeira seção é feito o estudo com respeito à família de subconjuntos discretos. É realizada a caracterização para esses espaços e são exibidas as condições necessárias e suficientes para que num espaço dado (X, τ), possam ser acrescentados abertos na topologia até o novo espaço ficar maximal com respeito à família dos seus subconjuntos discretos. Além disso, apresenta-se um espaço de Hausdorff onde isso não é possível.

  Vemos também que, se definimos o fecho de um conjunto em termos da família dos subconjuntos discretos, o resultado é um análogo ao fecho de Kuratowski (1966, p. 38), que é uma ferramenta útil para estudar as topologias nas quais podemos acrescentar os abertos até ficar maximal com respeito a essa família.

- Na segunda seção é estudada a maximalidade com respeito à família das sequências convergentes, sendo que esses espaços correspondem aos espaços sequenciais. Vemos que, nos espaços onde as sequências convergem para um único ponto, sempre podemos acrescentar abertos na topologia, mantendo a família das sequências convergentes, até que o novo espaço seja maximal com respeito a essa família.

- Na terceira seção é realizado o estudo com respeito à família dos subconjuntos compactos. Apresenta-se uma caracterização para os espaços maximais com respeito a essa família e a sua relação com os k-espaços.

- Na quarta seção trabalhamos com a família de subconjuntos densos e vemos que os espaços maximais com respeito a essa família são os espaços nodec extremamente desconexos. Os espaços nodec foram introduzidos por Douwen (1993) que provou que os espaços maximais (os espaços topológicos maximais (X,τ), são espaços sem pontos isolados onde a topologia τ é um elemento maximal no conjunto de todas as topologias sobre o conjunto X, que não possuem pontos isolados) são os espaços nodec ultradesconexos. Além disso, é mostrado que em qualquer espaço topológico pode-se acrescentar abertos à topologia, mantendo a mesma família de subconjuntos densos, até que o novo espaço seja maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos.

- Na quinta seção, o objeto de estudo é a família dos subconjuntos conexos, que apresentam uma maior dificuldade, no sentido de não se poder usar as técnicas que se utilizam com algumas das outras famílias. Além disso, a maior parte dos espaços topológicos conhecidos não são maximais com respeito à família dos seus subconjuntos conexos.

No capítulo 4 são apresentados alguns resultados adicionais, divididos em duas seções. Na primeira seção apresenta-se uma caracterização dos espaços κ-linearmente de Lindelöf via cadeias de subconjuntos discretos. Na segunda seção mostra-se que, dados um conjunto X e uma família arbitrária de subconjuntos $\mathscr{A}$ de X com certas propriedades, pode-se construir uma topologia τ sobre X tal que o espaço (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos discretos $\mathscr{A}$. Na terceira seção apresenta-se um resultado sobre os subconjuntos nunca densos.

O objetivo deste trabalho é acrescentar novas ferramentas e exemplos no estudo das topologias maximais e suas aplicações.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados algumas notações, definições e conceitos básicos que são importantes para o desenvolvimento e compreensão dos resultados obtidos. Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção apresentam-se os números ordinais bem como as ferramentas para a sua construção. Os resultados desta seção assim como as demostrações omitidas podem ser encontradas em Jech (2013). Na segunda seção são apresentadas algumas ferramentas topológicas e as principais definições para o desenvolvimento dos resultados sobre maximalidade, que é reportada no Capítulo 3.

2.1 Teoria dos conjuntos

Primeiramente, apresentamos o conceito de ordem junto com algumas propriedades até chagar no conceito da boa ordem, que é um dos pilares para o conceito de ordinal.

Definição 2.1.1. Dizemos que a relação $\leq$ é uma relação de **ordem** sobre um conjunto A se são satisfeitas as seguintes condições:

1. Para todo $a \in A$ temos que $a \leq a$ (reflexiva).
2. Para todo $a \in A$, para todo $b \in A$ e para todo $c \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva).
3. Para todo $a \in A$ e para todo $b \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (antissimétrica).

O conjunto $(A, \leq)$ é chamado de conjunto ordenado. Se $a, b \in A$, $a \leq b$ e $a \neq b$, usamos a notação $a < b$.

Definição 2.1.2. Sejam $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e $B \subset A$. Dizemos que $(B, \leq)$ é **totalmente ordenado** ou que é uma **cadeia** se, para todo $a, b \in A$, temos $a \leq b$ ou $b \leq a$. Ou seja, todos os elementos são comparáveis.

Definição 2.1.3. Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e sejam $B \subset A$ não vazio e $m \in A$. Então:

Dizemos que m é o **elemento mínimo** de B se $m \in B$ e para todo $x \in B$ temos que $m \leq x$.

Dizemos que m é um **elemento minimal** de B se $m \in B$ e não existe $x \in B$ tal que $x < m$.

Dizemos que m é o **elemento máximo** de B se $m \in B$ e para todo $x \in B$ temos que $x \leq m$.

Dizemos que m é um **elemento maximal** de B se $m \in B$ e não existe $x \in B$ tal que $m < x$.

Dizemos que m é um **limitante inferior** de B se para todo $x \in B$ temos que $m \leq x$.

Dizemos que m é um **limitante superior** de B se para todo $x \in B$ temos que $x \leq m$.

Se B possui um limitante superior dizemos que B é **limitado superiormente**. Se B possui um limitante inferior dizemos que B é **limitado inferiormente**.

Se m é o **elemento mínimo** de um conjunto B, o denotamos como $m = \min B$ e, se m é o **elemento máximo** do conjunto B, o denotamos como $m = \max B$.

Definição 2.1.4. Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma **boa ordem** se, para qualquer $B \subset A$ não vazio, B possui elemento mínimo. Chamamos $(A, \leq)$ de **conjunto bem ordenado** se $\leq$ for uma boa ordem.

Note que todo conjunto bem ordenado $(A, \leq)$ é totalmente ordenado pois se $a, b \in A$, temos que o conjunto $\{a, b\}$ possui mínimo e, portanto, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Lema 2.1.5. [Lema de Kuratowski-Zorn, ver por exemplo em Engelking (1989)]. Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e não vazio. Se toda cadeia possui um limitante superior, então o conjunto A possui um elemento maximal.

Definição 2.1.6. Sejam $(A, \leq)$ um conjunto ordenado e $B \subset A$. O **supremo** de B ($\sup A$) é o mínimo, caso exista, do conjunto dos limitantes superiores de B, i,e.:

$$\sup A = \min \{x \in A : b \leq x \text{ para todo } b \in B\}.$$

O **ínfimo** de B ($\inf A$) é o máximo, caso exista, do conjunto dos limitantes inferiores de B, i,e.:

$$\inf A = \max \{x \in A : x \leq b \text{ para todo } b \in B\}.$$

Os números ordinais são uma generalização dos números naturais que nos permitem dar uma ordem a qualquer conjunto, além de contar seus elementos (cardinais).

Definição 2.1.7. Um conjunto A é **transitivo** se todo elemento de A é um subconjunto de A, i.e., se $B \in A$ então $B \subset A$.

Definição 2.1.8. Um conjunto é um **número ordinal** ou simplesmente um ordinal se é transitivo e bem ordenado pela relação $\in$. Denotaremos os ordinais com as letras gregas minúsculas α, β, γ, etc.

Definição 2.1.9. Seja α um ordinal. Definimos o **ordinal sucessor** de α como sendo $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Teorema 2.1.10. Todo conjunto bem ordenado é isomorfo a um ordinal.

Definição 2.1.11. Se α é um ordinal que não é sucessor, então $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$. Assim, α é chamado de **ordinal limite**.

Definição 2.1.12. Denotaremos como ω ao **menor ordinal limite diferente de zero**. Os ordinais menores que ω são chamados de ordinais finitos ou números naturais. Especificamente

$$0 = \emptyset, \quad 1 = 0+1, \quad 2 = 1+1, \quad 3 = 2+1 \quad \text{etc.}$$

Dizemos que um conjunto F é finito se existe uma bijeção de F sobre n, para algum $n < \omega$.

Teorema 2.1.13. (Indução Transfinita). Seja X uma coleção de ordinais tais que:

1. $0 \in X$;
2. se $\alpha \in X$, então $\alpha+1 \in X$;
3. se α é um ordinal limite e $\beta \in X$ para todo $\beta < \alpha$, então $\alpha \in X$.

Então X é a coleção de todos os ordinais.

Definição 2.1.14. Sejam κ, β ordinais, com β limite e $f : \kappa \to \beta$ uma função. Dizemos que f é ilimitada se para cada $\alpha < \beta$, existe $\theta < \kappa$ tal que $\alpha < f(\theta) < \beta$.

Definição 2.1.15. Seja β um ordinal. Definimos a **cofinalidade** de β ($\mathrm{cof}\,\beta$) como sendo o menor ordinal θ tal que existe uma função $f : \theta \to \beta$ crescente e ilimitada.

Proposição 2.1.16. Sejam β e θ ordinais tais que $\beta = \mathrm{cof}\,\theta$. Então $\mathrm{cof}\,\beta = \beta$.

Definição 2.1.17. Seja κ um ordinal. Dizemos que κ é um **número cardinal**, ou simplesmente um cardinal, se para todo $\alpha < \kappa$ não existe bijeção $f : \kappa \to \alpha$.

Definição 2.1.18. Seja κ um cardinal. Definimos o **cardinal sucessor** de κ como sendo $\kappa^+ = \min\{\beta : \beta \text{ é cardinal e } \kappa < \beta\}$.

Definição 2.1.19. Dois conjuntos X, Y possuem a mesma cardinalidade (número cardinal), que denotamos por

$$|X| = |Y|, \tag{2.1}$$

se existe uma função bijetora de X sobre Y.

Teorema 2.1.20 (Cantor)**.** Para todo conjunto X, $|X| < |\wp(X)|$. Onde $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X.

A relação 2.1 é uma relação de equivalência e podemos definir uma ordem sobre as classes de equivalência, da seguinte forma: dados dois conjuntos X,Y, escrevemos:

$$|X| \leq |Y|, \tag{2.2}$$

se exite uma função injetora de X em Y. Definimos também a ordem estrita, que denotamos por $|X| < |Y|$, se $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$. Assim, pela Definição 2.1.17, um ordinal α é um número cardinal se $|\alpha| \neq |\beta|$ para todo $\beta < \alpha$. Usaremos as letras $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \cdots$ para denotar os ordinais que são números cardinais.

Se W é um conjunto bem ordenado, segue do Teorema 2.1.10, que existe um ordinal α tal que $|W| = |\alpha|$. Assim podemos definir $|W|$ como o menor de todos os ordinais α, tais que $|W| = |\alpha|$. Portanto, $|W|$ é um número cardinal.

Note que todo número natural é cardinal (cardinal finito), isto é, se S é um conjunto finito então $|S| = n$ para algum número natural n. Os ordinais infinitos que são cardinais são chamados de *alephs* .

Lema 2.1.21. i Para todo ordinal α existe um número cardinal maior que α.

ii Se X é um conjunto de cardinais, então $\sup X$ é um cardinal.

Usando o Lema 2.1.21 definimos uma enumeração para todos os *alephs*. Escreveremos $\aleph_\alpha$ para nos referir ao número cardinal e ω_α para denotar o tipo da ordem:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+,$$
$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal limite.}$$

Os conjuntos que tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_0$ são chamados de enumeráveis.

2.2 Topologia

Nesta seção caracterizamos a noção de topologia gerada por uma família arbitrária de conjuntos. Também caracterizamos a forma dos conjuntos abertos de uma topologia quando acrescentamos um novo aberto. Apresentamos também as definições básicas sobre a maximalidade de uma topologia com respeito a uma família de subconjuntos.

Definição 2.2.1. [Ver por exemplo em Taylor e Lay (1958, p. 59)] Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X. Considere $[\mathscr{A}]$ como a interseção de todas as topologias sobre X que contêm $\mathscr{A}$. Então $[\mathscr{A}]$ é uma topologia sobre X que chamaremos de **topologia gerada** por $\mathscr{A}$.

Lema 2.2.2. Seja $\mathscr{T}(X)$ o conjunto parcialmente ordenado pela inclusão de todas as topologias sobre o conjunto X. Se $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é um conjunto totalmente ordenado (cadeia) em $\mathscr{T}(X)$ e B_α é uma base de τ_α para todo $\alpha < \beta$, então $\cup_{\alpha<\beta} B_\alpha$ é uma base para $\sigma = [\cup_{\alpha<\beta} B_\alpha] = [\cup_{\alpha<\beta} \tau_\alpha]$.

Demonstração. Provaremos primeiro que $\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$ é uma base para $[\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha]$. Para isso, é suficiente provar que $\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$ é uma base para uma topologia sobre X:

1. Como cada B_α é uma base, temos que:
$$\bigcup_{V\in\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha} V \supset \bigcup_{V\in B_\alpha} V = X,$$
para todo $\alpha<\beta$, ou seja:
$$\bigcup_{V\in\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha} V = X.$$

2. Sejam $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2} \in \cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$. Então $A_{\alpha_1}\in B_{\alpha_1}$ e $A_{\alpha_2}\in B_{\alpha_2}$, para alguns $\alpha_1,\alpha_2<\beta$. Tomando $\alpha_*=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$, temos que $\tau_{\alpha_1},\tau_{\alpha_2}\subset\tau_{\alpha_*}$, logo $A_{\alpha_1},A_{\alpha_2}\in\tau_{\alpha_*}$ e para todo $x\in A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}$ existe $V\in B_{\alpha_*}\subset\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$ tal que $x\in V\subset A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}$.

Assim de 1 e 2 segue que $\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$ é uma base para uma topologia sobre X.

Para ver que $[\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha]=[\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha]$, observamos primeiro que $[\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha]\subset[\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha]$ e, pela Definição 2.2.1, é suficiente provar que: $\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha\subset[\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha]$. Mas isto segue do fato de que os elementos de $\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha$ são uniões de elementos de $\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha$ que é uma base para $[\cup_{\alpha<\beta}B_\alpha]$. □

Se $(X\,\tau)$ é um espaço topológico e Y é um subconjunto de X, denota-se por $\overline{Y}^\tau$ e por $\mathrm{Int}_\tau Y=\overset{\circ\tau}{Y}$ (ou simplesmente como $\overline{Y}$ e $\mathrm{Int}\,Y=\overset{\circ}{Y}$ quando a topologia for clara no contexto) o fecho e o interior de Y no espaço (X,τ). Respectivamente denota-se por $\tau_Y=\{U\cap Y : U\in\tau\}$ à topologia induzida por τ a Y e por (Y,τ_Y) ao subespaço topológico Y de (X,τ).

Proposição 2.2.3. Seja (X,τ) um espaço topológico, $A,B\subset X$ então:

1. $\sigma=[\tau\cup\{A\}]=\{U\cup(V\cap A): U,V\in\tau\}$.

2. $\tau_B=[\tau\cup\{A\}]_B$ se, e somente se, $B\cap\overline{B\cap(X\setminus A)}^\tau\subset X\setminus A$. Onde τ_B e $[\tau\cup\{A\}]_B$ são as topologias de subespaço sobre B induzidas por τ e $[\tau\cup\{A\}]$ respectivamente.

Demonstração. 1. Como $U\cup(V\cap A)\in[\tau\cup\{A\}]$, para todo $U,V\in\tau$, temos que:
$$\tau\cup\{A\}\subset\{U\cup(V\cap A): U,V\in\tau\}\subset[\tau\cup\{A\}]$$
Portanto, pela Definição 2.2.1, é suficiente provar $\sigma=\{U\cup(V\cap A): U,V\in\tau\}$ é uma topologia sobre X. De fato:

(a) Desde que $X=X\cup(\emptyset\cap A)$ e $\emptyset=\emptyset\cup(\emptyset\cap A)$. Então $\emptyset,X\in\sigma$.

(b) Seja $\{W_\alpha\}_{\alpha<\beta} \subset \sigma$, então: $W_\alpha = U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A)$, para cada $\alpha < \beta$, assim:

$$\bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha = \bigcup_{\alpha,\beta} (U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A)) = \left(\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha\right) \cup \left((\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha) \cap A \right)$$

e, como $\left(\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha\right), \left(\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha\right) \in \tau$, temos que $\bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha \in \sigma$.

(c) Considere $W_1, W_2, \cdots, W_n \in \sigma$, então:

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_i = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cup (V_i \cap A)) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cup \left((\bigcap_{i=1}^{n} V_i) \cap A \right)$$

e, como $(\bigcap_{i=1}^{n} U_i), (\bigcap_{i=1}^{n} V_i) \in \tau$, temos que: $\bigcap_{i=1}^{n} W_i \in \sigma$.

Assim, por $(a), (b)$ e (c), segue que σ é uma topologia sobre X.

2. $\Rightarrow$ Considere $A \cap B \in [\tau \cup \{A\}]_B$. Como $\tau_B = [\tau \cup \{A\}]_B$ temos que $A \cap B \in \tau_B$ e, portanto $B \setminus (A \cap B)$ é fechado em (B, τ_B), isto é, $\overline{B \setminus (A \cap B)}^{\tau_B} = B \setminus (A \cap B)$. Como $B \setminus (A \cap B) = B \cap (X \setminus A)$ e $\overline{B \setminus (A \cap B)}^{\tau_B} = B \cap \overline{B \setminus (A \cap B)}$ temos que $B \cap \overline{B \cap (X \setminus A)} = B \cap (X \setminus A)$. Assim $B \cap \overline{B \cap (X \setminus A)} \subset (X \setminus A)$.

$\Leftarrow$ Como $\tau \subset [\tau \cup \{A\}]$, temos $\tau_B \subset [\tau \cup \{A\}]_B$. Logo, é suficiente provar que $[\tau \cup \{A\}]_B \subset \tau_B$. De fato, considere $(U \cup (V \cap A)) \cap B \in [\tau \cup \{A\}]_B$. Então:

$$(U \cup (V \cap A)) \cap B = (U \cap B) \cup (V \cap A \cap B).$$

Como $B \cap \overline{B \cap (X \setminus A)} \subset X \setminus A$, temos que $(V \cap A \cap B) \cap \overline{B \cap (X \setminus A)} = \emptyset$. Portanto

$$(V \cap A \cap B) \subset (V \setminus \overline{B \cap (X \setminus A)}) \cap B.$$

Como $A \cap B = B \setminus (B \cap (X \setminus A))$, temos que $V \cap A \cap B = (V \cap B) \setminus (B \cap (X \setminus A))$. Assim, podemos escrever $V \cap A \cap B = (V \setminus B \cap (X \setminus A)) \cap B$. Como

$$V \setminus \overline{B \cap (X \setminus A)} \subset V \setminus (B \cap (X \setminus A))$$

temos que $(V \setminus \overline{B \cap (X \setminus A)}) \cap B \subset (V \cap A \cap B)$. Assim $(V \cap A \cap B) = (V \setminus \overline{B \cap (X \setminus A)}) \cap B$. Portanto:

$$(U \cup (V \cap A)) \cap B = \left(U \cup (V \setminus \overline{B \cap (X \setminus A)})\right) \cap B \in \tau_B.$$

□

Definição 2.2.4. (PARHOMENKO, 1939) Sejam (X, τ) um espaço topológico e P uma propriedade topológica, dizemos que o espaço topológico (X, τ) é **maximal (minimal) com respeito à propriedade** P, ou em outras palavras que o espaço (X, τ) é P**-maximal (minimal)**, se a topologia τ é um elemento maximal (minimal) no conjunto parcialmente ordenado pela inclusão de todas as topologias σ sobre X, tais que o espaço (X, σ) satisfaz a propriedade P.

Definição 2.2.5. (DOUWEN, 1993) Seja (X, τ) um espaço topológico sem pontos isolados. Dizemos que X é **maximal** se τ é um elemento maximal no conjunto de todas as topologias sem pontos isolados sobre X. Se $\mathscr{T}$ é um axioma de separação, dizemos que X é **maximal-**$\mathscr{T}$, se τ é maximal na classe de todas as topologias $\mathscr{T}$ e sem pontos isolados sobre X.

Note que a definição de Douwen (1993) encaixa na definição de Parhomenko (1939) se considerarmos a propriedade P de não possuir pontos isolados.

Definição 2.2.6. Sejam (X, τ) um espaço topológico, P uma propriedade topológica (invariante por homeomorfismos) e $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos de X. Denotamos como $\mathscr{F}_P^\tau$ a família de todos os elementos de $\mathscr{F}$ que satisfazem a propriedade P no espaço (X, τ). Dizemos que (X, τ) é **maximal com respeito à família** $\mathscr{F}_P^\tau$ ou simplesmente $\mathscr{F}_P^\tau$-maximal, se τ é um elemento maximal na coleção de todas as topologias σ sobre X tais que $\mathscr{F}_P^\sigma = \mathscr{F}_P^\tau$.

Observação 2.2.7. Se (X, τ) é um espaço topológico, P uma propriedade topológica e $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos de X, então o espaço topológico (X, τ) é maximal com respeito à família $\mathscr{F}_P^\tau$ se, e somente se, é maximal com respeito à família de todos os elementos de $\mathscr{F}$ que não satisfazem a propriedades P, que denotamos por $\mathscr{F}_{\neg P}^\tau$, onde $\neg P$ e a negação da propriedade P.

De fato, para toda topologia σ sobre X, temos que $\mathscr{F}_P^\sigma = \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_{\neg P}^\sigma$. Portanto, se σ é uma topologia sobre X tal que $\sigma \supset \tau$, temos que $\mathscr{F}_P^\sigma \neq \mathscr{F}_P^\tau$ se, e somente se, $\mathscr{F}_{\neg P}^\sigma \neq \mathscr{F}_{\neg P}^\tau$.

Definição 2.2.8. Sejam (X, τ) um espaço topológico, P uma propriedade topológica e $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que (X, τ) **admite maximal com respeito à família** $\mathscr{F}_P^\tau$, se o conjunto parcialmente ordenado pela inclusão:

$$\mathscr{T}\mathscr{F}(X) = \{\sigma : \sigma \text{ é uma topologia sobre } X,\, \sigma \supset \tau \text{ e } \mathscr{F}_P^\sigma = \mathscr{F}_P^\tau\},$$

possui um elemento maximal.

Definição 2.2.9. Seja P uma propriedade topológica. Se para todo espaço topológico (X, τ) e para toda topologia σ sobre X, tal que $\sigma \supset \tau$, temos que $\wp(X)_P^\sigma \supset \wp(X)_P^\tau$, onde $\wp(X)_P^\tau$ é a família de todos os subconjuntos de X que satisfazem a propriedade P no espaço (X, τ) e analogamente $\wp(X)_P^\sigma$ é a família de todos os subconjuntos de X que satisfazem a propriedade P no espaço (X, σ), então, dizemos que a propriedade P é **crescente**. Analogamente se sempre ocorre que $\wp(X)_P^\sigma \subset \wp(X)_P^\tau$, dizemos que a propriedade P é **decrescente**.

Observação 2.2.10. As propriedades topológicas estudadas no Capítulo 3 desta tese são sempre crescentes ou decrescentes. De fato, considere (X, τ) um espaço topológico e $\mathscr{D}^\tau$ a família de todos os subconjuntos discretos, $\mathscr{S}^\tau$ a família de todas as sequências convergentes, $\mathscr{K}^\tau$ a família de todos os subconjuntos compactos, $\mathscr{E}^\tau$ a família de todos os subconjuntos densos e $\mathscr{C}^\tau$ a família de todos os subconjuntos conexos, então, se σ é uma topologia sobre X, tal que $\sigma \supset \tau$, temos: $\mathscr{D}^\sigma \supset \mathscr{D}^\tau$, $\mathscr{S}^\sigma \subset \mathscr{S}^\tau$, $\mathscr{K}^\sigma \subset \mathscr{K}^\tau$, $\mathscr{E}^\sigma \subset \mathscr{E}^\tau$, $\mathscr{C}^\sigma \subset \mathscr{C}^\tau$, onde $\mathscr{D}^\sigma$ é a família de todos os subconjuntos discretos no espaço (X, σ) e analogamente para as outras notações

$\mathscr{S}^\sigma, \mathscr{K}^\sigma, \mathscr{E}^\sigma$ e $\mathscr{C}^\sigma$, isto é, sempre que refinarmos a topologia, ganhamos discretos e perdemos; sequências convergentes, compactos, densos e conexos.

Exemplo 2.2.11. A reta real $(\mathbb{R}, \tau)$ com a topologia usual τ, não é maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos densos segundo a Definição 2.2.6. De fato, se considerarmos a reta de Sorgenfrey, que é o conjunto $\mathbb{R}$ com a topologia ℓ que tem por base os intervalos semiabertos da forma $[x,z)$ onde $x < z$, temos que a topologia ℓ contem a topologia usual $\ell \supset \tau$, pois topo aberto básico de $(\mathbb{R}, \tau)$, por exemplo (a,b) com $a,b \in \mathbb{Q}$ e $a < b$, pode ser escrito da forma $(a,b) = \cup_{n<\omega}[a+\frac{b-a}{n+1}, b)$, isto é, como união de elementos de ℓ. Como a topologia ℓ não admite base enumerável (ENGELKING, 1989, p. 21), temos que $\ell \neq \tau$. Por outro lado, todo aberto básico e não vazio $[x,z)$ em $(\mathbb{R}, \ell)$ contém um aberto básico e não vazio (x,z) de $(\mathbb{R}, \tau)$. Assim, todo subconjunto denso em $(\mathbb{R}, \tau)$ é também denso em $(\mathbb{R}, \tau)$ logo, pela Observação 2.2.10 temos que os espaços $(\mathbb{R}, \tau)$ e $(\mathbb{R}, \ell)$ possuem a mesma família de subconjuntos densos. Por outro lado a reta real $\mathbb{R}$ admite maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos densos, no sentido que exite uma topologia σ sobre $\mathbb{R}$, tal que $\sigma \supset \tau$, os espaços $(\mathbb{R}, \tau)$ e $(\mathbb{R}, \sigma)$ possuem a mesma família de subconjuntos densos e o espaço $(\mathbb{R}, \sigma)$ é maximal com respeito à essa família, pois todo espaço topológico admite maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos (Proposição 3.4.1).

Como a reta real é primeiro-enumerável, regular e Hausdorff, temos que é fracamente discretamente gerada segundo a Definição 3.1.2 e sequencial segundo a Definição 3.2.5, então como veremos nas Proposições 3.1.3 e 3.2.6, a reta real é maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos discretos e de todas as suas sequências convergentes.

A reta real $\mathbb{R}$ e o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ são maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos compactos, como veremos no Corolário 3.3.8, pois são k-espaços de Hausdorff (WILLARD, 1970, Teorema 43.9).

Veremos também (Corolário 3.5.8) que a reta real não é maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos conexos, pois possui subconjuntos discretos não fechados.

CAPÍTULO

3

TOPOLOGIAS MAXIMAIS COM RESPEITO A ALGUMAS FAMÍLIAS DE SUBCONJUNTOS

Neste capítulo é estudada a maximalidade de topologias com respeito a algumas famílias de subconjuntos. Esta maximalidade refere-se ao explicitado na Definição 2.2.6.

Nas quatro primeiras seções são estudadas as famílias de subconjuntos discretos, sequências convergentes, compactos e densos. São apresentadas caracterizações da maximalidade das topologias com respeito a essas famílias e das topologias que admitem tal maximalidade segundo a Definição 2.2.8.

A maximalidade das topologias com respeito a essas famílias resultam em propriedades conhecidas. Por exemplo, os espaços maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos discretos são os espaços fracamente discretamente gerados (Proposição 3.1.3) e os espaços de Hausdorff maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos compactos são os k-espaços (Corolário 3.3.8).

Na quinta seção estuda-se a família dos subconjuntos conexos que, embora não conseguimos caracterizar a maximalidade com respeito a essa família, apresenta-se um exemplo que mostra por que não funcionam as técnicas que foram usadas para as outras famílias e vemos também que dificilmente espaços são maximais com respeito à família dos seus subconjuntos conexos (Corolário 3.5.8).

3.1 Com respeito à família dos subconjuntos discretos

O estudo da família dos subespaços discretos e a sua relação com o espaço todo começou, possivelmente, com o trabalho de A. Dow, M.G. Tkachenko, V. V. Tkachuk and R. G. Wilson (DOW *et al.*, 2002). Tais autores introduziram o conceito de espaço discretamente gerado e de fracamente discretamente gerado e provaram que todo espaço compacto de Hausforff é fracamente discretamente gerado, entre outros resultados importantes.

Definição 3.1.1. (DOW *et al.*, 2002) Dizemos que (X,τ) é **discretamente gerado** se, para todo $A \subset X$ e para todo $x \in \overline{A}$, existe subconjunto discreto $D \subset A$ tal que $x \in \overline{D}$.

Definição 3.1.2. (DOW *et al.*, 2002) Dizemos que (X,τ) é **fracamente discretamente gerado** se, para todo não fechado $A \subset X$, existe um $x \in \overline{A} \setminus A$ e um subconjunto discreto $D \subset A$ tal que $x \in \overline{D}$.

Proposição 3.1.3. Um espaço (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos discretos se, e somente se, X é fracamente discretamente gerado.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $F \subset X$ não fechado, então $A = X \setminus F \notin \tau$. Considere $\sigma = [\tau \cup \{A\}]$. Por hipótese, existe $D \subset X$ discreto em (X,σ) tal que D não é discreto em (X,τ). Então os subespaços (D,τ_D) e (D,σ_D) não são homeomorfos e, pela Proposição 2.2.3, $D \cap \overline{D \cap F} \not\subset F$. Logo $D \cap F \neq \emptyset$.

Fato 3.1.4. $D \cap F$ é discreto em (X,τ).

Tomando um $d \in D \cap F$, como D é discreto em (X,σ), existe um aberto W em σ tal que $W \cap D = \{d\}$. Da Proposição 2.2.3 podemos escrever $W = U \cup (V \cap A)$ e como $d \notin A$, temos que $d \in U$ e, assim, $U \cap (D \cap F) = \{d\}$, logo $D \cap F$ é discreto em (X,τ).

Fato 3.1.5. $\overline{D \cap F} \setminus F \neq \emptyset$.

Como $D \cap \overline{D \cap F} \not\subset F$ temos que $D \cap \overline{D \cap F} \setminus F \neq \emptyset$. Mas $D \cap \overline{D \cap F} \subset \overline{D \cap F}$. Logo $D \cap \overline{D \cap F} \setminus F \subset \overline{D \cap F} \setminus F$ e, portanto $\overline{D \cap F} \setminus F \neq \emptyset$.

Assim, pelos Fatos 3.1.4 e 3.1.5, temos que existe um um subconjunto discreto $D \cap F \subset F$ tal que $\overline{D \cap F} \setminus F \neq \emptyset$. Como F é um subconjunto não fechado arbitrário, segue que (X,τ) é fracamente discretamente gerado.

$(\Leftarrow)$ Seja $A \notin \tau$ e $\sigma = [\tau \cup \{A\}]$. Pela Observação 2.2.10, é suficiente mostrar que existe um subconjunto discreto D em (X,σ) que não é discreto em (X,τ). Uma vez que $X \setminus A$ não é fechado em (X,τ), existem $x \in \overline{X \setminus A} \setminus (X \setminus A) = A \setminus \mathring{A}$ e um subconjunto discreto $D' \subset X \setminus A$ tais que $x \in \overline{D'}$. Assim, tomando $D = D' \cup \{x\}$, o resultado segue. □

Uns dos resultados mais importantes no estudo da família dos subconjuntos discretos é o seguinte lema de reflexibilidade desenvolvido por Tkachuk (1987).

Lema 3.1.6. (TKACHUK, 1987) Se (X,τ) é um espaço topológico tal que o fecho de qualquer subconjunto discreto de X é compacto. Então o espaço X é compacto.

No que segue para referirmos ao Lema 3.1.6 escreveremos: "Lema de Tkachuk".

Corolário 3.1.7. Seja (X,τ) um espaço topológico compacto de Hausdorff. Se adicionarmos um aberto a τ, o novo espaço tem também um novo subconjunto discreto.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.3 basta mostrar que todo espaço compacto de Hausdorff é fracamente discretamente gerado. De fato seja $A \subset X$ não fechado, então A é não compacto e, pelo Lema de Tkachuk, temos que existe um discreto D em A tal que o fecho de D em A não é compacto. Como $\overline{D}$ é compacto, temos que $(\overline{A} \setminus A) \cap \overline{D} \neq \emptyset$. □

Acrescentando abertos

Seja (X,τ) um espaço topológico e $\mathscr{D}$ a família dos seus subconjuntos discretos. Em alguns casos podemos acrescentar uma família de novos abertos $\mathscr{A}$ à topologia τ, de forma que o novo espaço $(X,[\tau \cup \mathscr{A}])$ tem a mesma família de subconjuntos discretos e é $\mathscr{D}$-maximal de acordo com a Definição 2.2.6, isto é, o espaço (X,τ) admite maximal com respeito à família de todos os seus subconjuntos discretos segundo a Definição 2.2.8. Para estudar esses espaços precisamos de algumas ferramentas.

Definição 3.1.8. Seja (X,τ) um espaço topológico. Para cada $B \subset X$, definimos o **conjunto ortogonal** de B como sendo o conjunto:

$$B^{\perp} = \bigcup \{\overline{D} \setminus B : D \subset B \text{ e } D \text{ é discreto } \}$$

Observação 3.1.9. Se (X,τ) é um espaço topológico e, para todo $B \subset X$, consideramos o conjunto $T(B) = B \cup B^{\perp}$, temos que $T : \wp(X) \to \wp(X)$ é uma função, onde $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X. Como $B^{\perp} \subset \overline{B}$ temos que $T(B) \subset \overline{B}$, para todo $B \subset X$. Se $D \subset X$ é um conjunto discreto, temos que $\overline{D} \setminus D \subset (\cup \{\overline{P} \setminus D : P \subset D \text{ e } P \text{ é discreto }\})$ e, como sempre temos que $(\cup \{\overline{P} \setminus D : P \subset D \text{ e } P \text{ é discreto }\}) \subset \overline{D} \setminus D$, segue que $T(D) = D \cup D^{\perp} = \overline{D}$.

Lema 3.1.10. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $T : \wp(X) \to \wp(X)$ o operador da Observação 3.1.9. Então, para todo $A, B \subset X$, temos que:

1. $T(\emptyset) = \emptyset$
2. $B \subset T(B)$
3. $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$

Demonstração. As condições 1 e 2 seguem diretamente da definição de T. Se $x \in (A \cup B)^{\perp}$, temos que existe um subconjunto discreto $D \subset (A \cup B)$ tal que $x \in \overline{D} \setminus (A \cup B)$. Como $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ temos que $\overline{D} = \overline{(D \cap A)} \cup \overline{(D \cap B)}$. Assim

$$\overline{D} \setminus (A \cup B) \subset \left(\overline{(D \cap A)} \setminus A\right) \cup \left(\overline{(D \cap B)} \setminus B\right)$$

e, como $D \cap A$ e $D \cap B$ são subconjuntos discretos, segue que $x \in A^{\perp} \cup B^{\perp}$. Como x foi tomado arbitrário, temos que $(A \cup B)^{\perp} \subset A^{\perp} \cup B^{\perp}$ e, assim:

$$T(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^{\perp} \subset (A \cup A^{\perp}) \cup (B \cup B^{\perp}) = T(A) \cup T(B)$$

Por outro lado, se $x \in T(A)$, temos que $x \in A$ ou $x \in A^{\perp}$. Se $x \in A$, temos que $x \in T(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^{\perp}$. Se $x \in A^{\perp}$, temos que $x \in \overline{D} \setminus A$, onde D é um subconjunto discreto e $D \subset A$. Se $x \notin (A \cup B)^{\perp}$, segue da Definição 3.1.8 que $D \cup \{x\} \subset (A \cup B)$ e, portanto, $x \in B$. Logo $x \in T(A \cup B)$. Como x foi tomado arbitrário, segue que $T(A) \subset T(A \cup B)$. Análogamente mostra-se que $T(B) \subset T(A \cup B)$ e, portanto, $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. □

Observação 3.1.11. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $T : \wp(X) \to \wp(X)$ o operador da Observação 3.1.9. Como $B \subset T(B)$, para todo $B \subset X$, temos que $B \subset T(B) \subset \cdots \subset T^n(B) \subset \overline{B}$, para todo $n < \omega$, então para o ordinal limite ω, podemos definir a ω-ésima iteração de T sobre B, como sendo:

$$T^{\omega}(B) = T\left(\bigcup_{n<\omega} T^n(B)\right) = \left(\bigcup_{n<\omega} T^n(B)\right) \cup \left(\bigcup_{n<\omega} T^n(B)\right)^{\perp}.$$

que está bem definida pois T está bem definido e, além disso, $\cup_{n<\omega} T^n(B) \subset T^{\omega}(B) \subset \overline{B}$.
De forma mais geral, se κ é um ordinal limite arbitrário, podemos definir a κ-ésima iteração de T sobre B como:

$$T^{\kappa}(B) = T\left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(B)\right) = \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(B)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(B)\right)^{\perp}$$

e temos que $\cup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(B) \subset T^{\kappa}(B) \subset \overline{B}$. Como $T^{\kappa}(B) \subset \overline{B}$, para todo $B \subset X$, temos que $|T^{\kappa}(B)| \leq |\overline{B}|$. Suponhamos que todos os $T^{\alpha}(B)$'s são distintos, para todo $\alpha < \kappa$. Então $B \subsetneq T^1(B) \subsetneq \cdots \subsetneq T^{\kappa}(B)$ e, assim, para todo $\theta \leq \kappa$, podemos escolher $x_{\theta} \in T^{\theta}(B) \setminus (\cup_{\alpha<\theta} T^{\alpha}(B))$. Assim $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \leq \kappa} \subset T^{\kappa}(B)$ e, portanto, $\kappa \leq |T^{\kappa}(B)|$, logo $\kappa \leq |\overline{B}|$. Então, para todo $B \subset X$, existe um ordinal κ_B, tal que $T(\cup_{\alpha<\kappa_B} T^{\alpha}(B)) = \cup_{\alpha<\kappa_B} T^{\alpha}(B)$. Assim, fixando um ordinal κ_B para todo $B \subset X$ podemos considerar o ordinal $\kappa^* = \sup\{\kappa_B : B \subset X\}$. Para simplificar a notação escrevemos $T^*(B) = T^{\kappa^*}(B)$.

Definição 3.1.12. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $T : \wp(X) \to \wp(X)$ o operador definido na Observação 3.1.9. Para cada $B \subset X$, definimos o **conjunto dos pontos remotos de B com respeito à família dos subconjuntos discretos**, como sendo o conjunto:

$$\partial^* B = \{x \in X : x \in \overline{B \setminus \{x\}} \setminus T^*(B \setminus \{x\})\}$$

Observação 3.1.13. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $T : \wp(X) \to \wp(X)$ o operador definido na Observação 3.1.9 e σ uma topologia sobre X. Se $B \subset X$ e, para todo $x \in (\partial^* B) \cap B$, temos que $X \setminus T^*(B \setminus \{x\}) \in \sigma$. Então $(\partial^* B) \cap B$ é um subconjunto discreto em (X, σ). De fato, basta considerar $U = X \setminus T^*(B \setminus \{x\})$ para cada $x \in (\partial^* B) \cap B$. Então $x \in U \in \sigma$ e
$U \cap (\partial^* B) \cap B = \{x\}$.

Lema 3.1.14. Sejam (X,τ) um espaço topológico e σ uma topologia sobre X tal que $\sigma \supset \tau$ e o espaço (X,σ) tem a mesma família de subconjuntos discretos que (X,τ). Então, para cada $B \subset X$, temos que $(X,[\sigma \cup \{X \setminus T^{*,\tau}(B)\}])$ tem a mesma família de subconjuntos discretos que (X,τ).

Demonstração. Sejam $B \subset X$ e $A = X \setminus T^{*,\tau}(B)$. Pela Observação 2.2.10, é suficiente provar que todo subconjunto discreto em $(X,[\sigma \cup \{A\}])$ é também discreto em (X,τ).

De fato, sejam D um subconjunto discreto no espaço $(X,[\sigma \cup \{A\}])$ e $d \in D$. Existe um $W \in [\sigma \cup \{A\}]$, tal que $d \in W$ e $W \cap D = \{d\}$. Pela Proposição 2.2.3, podemos escrever $W = U \cup (V \cap A)$, onde $U,V \in \sigma$. Se $d \in U$, $U \cap D = \{d\}$.

Se $d \notin U$, $d \in (V \cap A)$ e $(V \cap A) \cap D = \{d\}$. Portanto, $d \notin T^{*,\tau}(B)$, $V \cap (D \setminus \{d\}) \subset T^{*,\tau}(B)$ e, pela Proposição 2.2.3, $V \cap (D \setminus \{d\})$ é discreto em (X,σ) e portanto discreto em (X,τ). Portanto, da definição de $T^{*,\tau}(B)$, segue que $d \notin \overline{V \cap (D \setminus \{d\})}^{\tau}$ e, como $\overline{V \cap (D \setminus \{d\})}^{\tau} \supset \overline{V \cap (D \setminus \{d\})}^{\sigma}$, segue que $d \notin \overline{V \cap (D \setminus \{d\})}^{\sigma}$ e $O = V \setminus \overline{V \cap (D \setminus \{d\})}^{\sigma}$ é um conjunto aberto em σ tal que $O \cap D = \{d\}$. Como d foi tomado arbitrário, segue que D é discreto em (X,σ) e, portanto, discreto em (X,τ). $\square$

Afirmação 3.1.15. Seja σ uma topologia sobre X. Se os espaços (X,τ) e (X,σ) têm a mesma família de subconjuntos discretos, temos que $T^{*,\tau}(A) = T^{*,\sigma}(A)$ para todo $A \subset X$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $B^{\perp,\tau} = B^{\perp,\sigma}$ para todo $B \subset X$. De fato, assumindo que $x \in B^{\perp,\tau}$, existe $D \subset B$ discreto em (X,τ) tal que $x \in \overline{D}^{\tau}$. Como D é também discreto em (X,σ), se $x \notin \overline{D}^{\sigma}$, temos que $D \cup \{x\}$ é um discreto em (X,σ) que não é discreto em (X,τ), o que é absurdo. Portanto, $x \in \overline{D}^{\sigma}$, $x \in B^{\perp,\sigma}$ e segue que $B^{\perp,\tau} \subset B^{\perp,\sigma}$. Analogamente prova-se que $B^{\perp,\tau} \supset B^{\perp,\sigma}$.

Por definição de $T^{*,\tau}(A)$, é suficiente provar que $T^{\kappa,\tau}(A) = T^{\kappa,\sigma}(A)$ para todo ordinal κ. Sabemos que $T^{0,\tau}(A) = A = T^{0,\sigma}(A)$. Seja κ um ordinal e suponha que $T^{\alpha,\tau}(A) = T^{\alpha,\sigma}(A)$ para todo $\alpha < \kappa$. Então:

$$T^{\kappa,\tau}(A) = \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha}(A)\right)^{\perp,\tau} = \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha,\sigma}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha<\kappa} T^{\alpha,\sigma}(A)\right)^{\perp,\sigma} = T^{\kappa,\sigma}(A)$$

Como κ foi tomado arbitrário, segue por indução que $T^{\kappa,\tau}(A) = T^{\kappa,\sigma}(A)$, para todo κ ordinal e, portanto, $T^{*,\tau}(A) = T^{*,\sigma}(A)$.

$\square$

Teorema 3.1.16. Um espaço (X,τ) admite maximal com respeito à família dos seus subconjuntos discretos se, e somente se, para todo $A \subset X$ temos que $(\partial^{*,\tau}A) \cap A$ é discreto.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja σ um elemento maximal no conjunto $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ de todas as topologias σ sobre X, tais que o espaço (X,σ) tem a mesma família de subconjuntos discretos que (X,τ)

e $\sigma \supset \tau$. Pelo Lema 3.1.14, temos que para todo $A \subset X$ e para todo $x \in (\partial^{*,\tau}A) \cap A$, o espaço $(X, [\sigma \cup \{X \setminus T^{*,\tau}(A \setminus \{x\})\}])$ tem a mesma família de subconjuntos discretos que (X, τ). Assim, pela maximalidade de σ, segue que $X \setminus T^{*,\tau}(A \setminus \{x\}) \in \sigma$ e, pela Observação 3.1.13, temos que $(\partial^{*,\tau}A) \cap A$ é um subconjunto discreto em (X, σ).

($\Leftarrow$) Suponha que, para todo $A \subset X$, o conjunto $(\partial^{*,\tau}A) \cap A$ é discreto. Para provar que o espaço (X, τ) admite maximal com respeito à família dos seus subconjuntos discretos usaremos o Lema de Kuratowski-Zorn para encontrar um elemento maximal em $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$. De fato, seja $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ um conjunto totalmente ordenado em $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ e considere $\sigma = [\cup_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha]$. Então $\sigma \supset \sigma_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Se mostrarmos que $\sigma \in \mathscr{T}\mathscr{D}(X)$, então σ é um limitante superior de $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ em $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ e como a cadeia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é arbitrária temos que toda cadeia em $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ possui limitante superior em $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ e portanto pelo Lema de Kuratowski-Zorn temos que o conjunto $\mathscr{T}\mathscr{D}(X)$ possui um elemento maximal.

Para ver que $\sigma \in \mathscr{T}\mathscr{D}(X)$, da Observação 2.2.10, basta mostrar que todo subconjunto discreto em (X, σ) é também discreto em (X, τ).

De fato, sejam D um subconjunto discreto em (X, σ) e $d \in D$. Suponhamos que $d \in T^{*,\tau}(D \setminus \{d\})$. Então existe $A \subset T^{*,\tau}(D \setminus \{d\})$, tal que A é discreto em (X, τ) e $d \in \overline{A}^{\tau}$. Como (X, σ_α) tem a mesma família de subconjuntos discretos que (X, τ), temos que A é discreto em (X, σ_α) e $d \in \overline{A}^{\sigma_\alpha}$ para todo $\alpha < \beta$.

Seja W um aberto em σ tal que $d \in W$. Pelo Lema 2.2.2, podemos escrever $W = \cup_{\alpha<\beta}V_\alpha$, onde $V_\alpha \in \sigma_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Assim, $d \in V_\alpha$ para algum $\alpha < \beta$. Como $d \in \overline{A}^{\sigma_\alpha}$, temos que $V_\alpha \cap A \neq \emptyset$. Por outro lado, da Afirmação 3.1.15, temos que $T^{*,\tau}(D \setminus \{d\}) = T^{*\sigma_\alpha}(D \setminus \{d\})$. Portanto, $A \subset T^{*\sigma_\alpha}(D \setminus \{d\}) \subset \overline{D \setminus \{d\}}^{\sigma_\alpha}$ e segue que $V_\alpha \cap (D \setminus \{d\}) \neq \emptyset$. Como W foi tomado de maneira arbitrária, $d \in \overline{D \setminus \{d\}}^{\sigma}$, o que é uma contradição pois D é discreto em (X, σ).

Portanto $\{d \in D : d \in \overline{D \setminus \{d\}}^{\tau}\} \subset (\partial^{*,\tau}D) \cap D$ e, como sempre temos que $(\partial^{*,\tau}D) \cap D \subset \{d \in D : d \in \overline{D \setminus \{d\}}^{\tau}\}$, segue que $\{d \in D : d \in \overline{D \setminus \{d\}}^{\tau}\} = (\partial^{*,\tau}D) \cap D$. Portanto:

$$(D \setminus ((\partial^{*,\tau}D) \cap D)) \cap \overline{((\partial^{*,\tau}D) \cap D)}^{\tau} = \emptyset$$

Por outro lado, $D \setminus ((\partial^{*,\tau}D) \cap D)$ é um discreto em (X, τ) e, pela definição de $\partial^{*,\tau}D$:

$$\overline{D \setminus ((\partial^{*,\tau}D) \cap D)}^{\tau} \cap ((\partial^{*,\tau}D) \cap D) = \emptyset$$

Portanto, $D = (D \setminus ((\partial^{*,\tau}D) \cap D)) \cup ((\partial^{*,\tau}D) \cap D)$ é um subconjunto discreto em (X, τ). □

Exemplo 3.1.17. Existe um espaço topológico de Hausdorff (X, τ) tal que τ não admite maximal com respeito à família de subconjuntos discretos.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.16, é suficiente provar que existe um espaço topológico de Hausdorff (X, τ) e $A \subset X$ tal que $(\partial^{*}A) \cap A$ não é discreto.

Considere o exemplo de Douwen (1993, p. 126) de um espaço maximal de Hausdorff X. Então X não tem pontos isolados e todo subconjunto nunca denso de X é fechado (DOUWEN, 1993, p. 130). Assim, cada subconjunto discreto de X é fechado e segue que $T^*(A) = A$ para todo $A \subset X$. Considere A, um subespaço de X sem pontos isolados, então:

$$\begin{aligned}\partial^* A &= \{x \in X : x \in \overline{A \setminus \{x\}} \setminus T^*(A \setminus \{x\})\} \\ &= \{x \in X : x \in \overline{A \setminus \{x\}} \setminus (A \setminus \{x\})\} \\ &= \{x \in X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\} = \overline{A}\end{aligned}$$

Portanto, $(\partial^* A) \cap A = A$ e, como A não é um subconjunto discreto de X, o resultado segue. □

3.2 Com respeito à família das sequências convergentes

Nesta seção, estuda-se a maximalidade com repeito à família de todas as sequências convergentes. Este estudo é feito no contexto dos espaços T_1. Caracteriza-se a maximalidade com respeito a essa família e os espaços que admitem tal maximalidade. Apresenta-se também um exemplo de um espaço T_0 que não admite maximalidade com respeito à família das suas sequências convergentes.

Definição 3.2.1. [Ver por exemplo em (STEEN; SEEBACH, 1995) e em (HÖNIG, 1961)] Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ uma sequência em X.

Dizemos que a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é **quase-constante** se existe $N < \omega$ tal que $x_n = x_N$ para todo $n \geq N$.

Se $x \in X$, dizemos que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ **converge** para x, que denotamos como $x_n \to x$, se para toda vizinhança V de x, existe $N < \omega$, tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in V$.

Se $x \in X$ e a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ converge para x, dizemos que x é um **ponto limite** da sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$. Denotamos o conjunto dos pontos limites da sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ como sendo: $\lim \langle x_n \rangle_{n<\omega} = \{x \in X : x_n \to x\}$. Dizemos também que a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é **convergente** se $\lim \langle x_n \rangle_{n<\omega} \neq \emptyset$.

Lema 3.2.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico T_1 e σ uma topologia sobre X tais que $\sigma \supset \tau$. Então o espaço (X, σ) tem a mesma família de sequências convergentes que (X, τ) se, e somente se, para toda sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset X$, temos que $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega} = \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$.

Demonstração. Seja $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência. Como $\sigma \supset \tau$ temos que $\lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset \lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega}$, então basta mostrar que $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$. De fato, considere $x \in \lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega}$, então $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ converge para x no espaço (X, τ). Considere a sequência, para todo $n < \omega$

$$y_n = \begin{cases} x_m & \text{se} \quad n = 2m, \\ & \qquad\qquad\qquad \text{para algum } m < \omega \\ x & \text{se} \quad n = 2m+1, \end{cases}$$

Se U é um aberto em τ tal que $x \in U$, existe $N < \omega$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, então $y_n \in U$ para todo $n \geq 2N$. Como U é arbitrário, temos que a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para x no espaço (X, τ). Por outro lado se $z \in X$ tal que $z \neq x$, exite um aberto U em τ tal que $z \in U$ e $x \notin U$, pois o espaço (X, τ) é T_1. Assim, para todo $n < \omega$ ímpar temos que $y_n = x \notin U$ e portanto a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para z em (X, τ). Como z foi tomado de maneira arbitrária, temos que $\lim_\tau \langle y_n \rangle_{n<\omega} = \{x\}$. Dado que os espaços (X, τ) e (X, σ) possuem a mesma família de sequências convergentes, devemos ter que $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} \neq \emptyset$ e como $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset \lim_\tau \langle y_n \rangle_{n<\omega}$, pois $\sigma \supset \tau$, temos que $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} = \{x\}$. Assim, para todo $W \in \sigma$ tal que $x \in W$, existe $N < \omega$ tal que $y_n \in W$ para todo $n \geq N$ e segue que $x_n \in W$ para todo $n \geq \left[\frac{N+1}{2}\right]$, onde $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ representa a parte inteira do número $\frac{N+1}{2}$. Portanto a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ converge para x no espaço (X, σ), ou seja, $x \in \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$. Como x foi tomado de maneira arbitraria em $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega}$, temos que $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$ logo $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega} = \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$. Como a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ foi tomada de maneira arbitrária, o resultado segue.

($\Leftarrow$) Seja $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência. Como $\lim_\tau \langle x_n \rangle_{n<\omega} = \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$ temos que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é convergente no espaço (X, τ) se, e somente se, é convergente no espaço (X, σ). Portanto os espaços (X, τ) e (X, σ) possuem a mesma família de sequências convergentes. $\square$

Exemplo 3.2.3. Existem um espaço topológico (X, τ), que é T_0, uma topologia σ sobre X, tal que $\sigma \supsetneq \tau$ e uma sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ em X, tais que os espaços (X, τ) e (X, σ) têm a mesma família de sequências convergentes mas $\lim_\tau \langle y_n \rangle_{n<\omega} \neq \lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$.

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{x_n : n < \omega\} \cup \omega$, onde ω é o conjunto dos números naturais, os elementos do conjunto $\{x_n : n < \omega\}$ são distintos dois a dois e $\{x_n : n < \omega\} \cap \omega = \emptyset$. Queremos dotar o conjunto X de uma topologia. Para isso consideremos os subconjuntos $V_k = \{x_n : n \geq k\}$, $W_p = \{m < \omega : m \leq p\}$, onde $k, p < \omega$, e a família de subconjuntos $\mathscr{B} = \{(V_k \cup W_p), \{x_n\} : k, p, n < \omega\}$, então temos a topologia sobre X gerada por $\mathscr{B}$, $\tau = [\mathscr{B}]$.

Vejamos agora que $\mathscr{B}$ é uma base para τ. Pela definição de topologia gerada basta provar que $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia sobre X. Isto é, provemos que $\mathscr{B}$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\bigcup \mathscr{B} = X$. Como $\mathscr{B}$ é uma família de subconjuntos de X, temos que $\bigcup \mathscr{B} \subset X$. Como $\{x_n\} \in \mathscr{B}$ para todo $n < \omega$, temos que $x_n \in \bigcup \mathscr{B}$ para todo $n < \omega$. Por outro lado se $p < \omega$ temos que $p \in (V_p \cup W_p)$ e como $(V_p \cup W_p) \in \mathscr{B}$, segue que $p \in \bigcup \mathscr{B}$. Assim $X \subset \bigcup \mathscr{B}$.

2. Dados $B_1, B_1 \in \mathscr{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. De fato, se $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, temos duas possibilidades:

   (a) $B_1 = \{x_n\}$ ou $B_2 = \{x_n\}$ para algum $n < \omega$. Então $B_1 \cap B_2 = \{x_n\} \in \mathscr{B}$.

   (b) $B_1 \neq \{x_n\}$ e $B_2 \neq \{x_n\}$ para todo $n < \omega$. Então $B_1 = V_{k_1} \cup W_{p_1}$ e $B_2 = V_{k_2} \cup W_{p_2}$. Assim $B_1 \cap B_2 = (V_{k_1} \cap V_{k_2}) \cup (W_{p_1} \cap V_{k_2}) \cup (V_{k_1} \cap W_{p_2}) \cup (W_{p_1} \cap W_{p_2})$. Uma vez que

$(W_{p_1} \cap V_{k_2}) = (V_{k_1} \cap W_{p_2}) = \emptyset$, $(V_{k_1} \cap V_{k_2}) = V_{k_3}$ e $(W_{p_1} \cap W_{p_2}) = W_{p_3}$, onde $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$ e $p_3 = \min\{p_1, p_2\}$, temos que $B_1 \cap B_2 = \left(V_{k_3} \cup W_{p_3}\right)$ e $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$.

Assim de 1. e 2. segue que $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia sobre X e portanto $\mathscr{B}$ é uma base para $\tau = [\mathscr{B}]$.

Vamos mostrar agora que o espaço (X, τ) é T_0. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, se $x = x_n$ ou $y = x_n$ para algum $n < \omega$ existe $\{x_n\} \in \tau$ tal que $x \in \{x_n\}$ ou $y \in \{x_n\}$ e $y \notin \{x_n\}$ ou $x \notin \{x_n\}$. Se $x \neq x_n$ e $y \neq x_n$ para todo $n < \omega$ temos que $x, y < \omega$. Sem perda de generalidade podemos supor que $x < y$ e, então $V_x \cup W_x$ é um aberto básico tal que $x \in V_x \cup W_x$ e $y \notin V_x \cup W_x$. Portanto o espaço (X, τ) é T_0.

Consideremos agora a topologia sobre X, $\sigma = [\tau \cup \{\{0\}\}]$. Como $\{0\} \notin \tau$ temos que $\sigma \supsetneq \tau$. Mostremos agora que os espaços (X, τ) e (X, σ) têm a mesa família de sequências convergentes. Para isso vamos precisar primeiro do seguinte resultado:

Afirmação 3.2.4. Sejam $\langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência e $p < \omega$ tais que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X, τ). Então a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para todo $p < k < \omega$ no espaço (X, τ).

Demonstração. De fato, se $k > p$ e $V_t \cup W_s$ é um aberto básico em (X, τ) contendo k, então $s \geq k$ e portanto $p \in W_s$, logo $p \in V_t \cup W_s$ e como $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X, τ), existe $N < \omega$ tal que $y_n \in V_t \cup W_s$ para todo $n \geq N$. Como $V_t \cup W_s$ é um aberto básico arbitrário contendo k, segue que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, τ). Como k é um número maior que p arbitrário segue que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para todo $k > p$ no espaço (X, τ). □

Considere agora uma sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ convergente no espaço (X, τ). Então temos dois casos:

1. $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é quase-constante. Então existe $N < \omega$ tal que $y_N = y_n$ para todo $n \geq N$. Então para todo aberto $V \in \sigma$ tal que $y_N \in V$ temos que $y_n \in V$ para todo $n \geq N$. Assim $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$converge para y_N no espaço (X, σ).

2. $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não é quase constante. Então para todo $n < \omega$ existe $N > n$ tal que $y_n \neq y_N$. Como $\{x_n\} \in \tau$ para todo $n < \omega$, temos que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para x_n no espaço (X, τ), para todo $n < \omega$. Então existe $p < \omega$ tal que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X, τ). Se $k > p$ seque da Afirmação 3.2.4 que a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, τ). Considere W um aberto em σ tal que $k \in W$. Pela Proposição 2.2.3 podemos escrever $W = U \cup \{0\}$, onde $U \in \tau$. Como $k > 0$, temos que $k \in U$ e, dado que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, τ), existe $N < \omega$ tal que $y_n \in U$ para todo $n \geq N$. Assim $y_n \in W$ para todo $n \geq N$ e, como W foi tomado de maneira arbitrária em σ, segue que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, σ).

De 1. e 2. temos que toda sequência convergente no espaço (X,τ) é também convergente no espaço (X,σ). Assim pela Observação 2.2.10, temos que os espaços (X,τ) e (X,σ) possuem a mesma família de sequências convergentes.

Considere agora a sequência $\langle x_n\rangle_{n<\omega} \subset X$, então $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para todo número $p<\omega$, pois dado $V_t \cup W_s$ um aberto básico contendo p temos que $x_n \in V_t \cup W_s$, para todo $n \geq t$. Por outro lado $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ não converge para 0 no espaço (X,σ), pois $\{0\} \in \sigma$. Assim $\lim_\tau \langle x_n\rangle_{n<\omega} \neq \lim_\sigma \langle x_n\rangle_{n<\omega}$ e segue o resultado.

□

Definição 3.2.5. (FRANKLIN, 1965) Dizemos que (X,τ) é **sequencial** se, para todo não fechado $A \subset X$, existem, $x \in \overline{A} \setminus A$ e uma sequência $\langle x_n\rangle_{n<\omega} \subset A$, tal que $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para x.

Proposição 3.2.6. Seja (X,τ) um espaço topológico T_1, então X é maximal com respeito à família das suas sequências convergentes se, e somente se, X é sequencial.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $F \subset X$ não fechado em (X,τ). Então $X \setminus F \notin \tau$ e existe uma sequência $\langle x_n\rangle_{n<\omega} \subset X$, que converge em (X,τ), mas não converge em (X,σ), sendo $\sigma = [\tau \cup \{X \setminus F\}]$.

Tome $x \in X$ tal que $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para x em (X,τ). Como $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ não converge em $(X,[\tau \cup \{X \setminus F\}])$, existe $W \in [\tau \cup \{X \setminus F\}]$ que, pela Proposição 2.2.3, podemos escrever como $W = U \cup (V \cap (X \setminus F))$ com U,V abertos em τ, tal que $x \in W$ e, para cada $N<\omega$, temos que $(\langle x_n\rangle_{N\leq n<\omega}) \not\subset W$. Como $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge em (X,τ), temos que $x \notin U$ e, assim, $x \in V \cap (X \setminus F)$.

Como toda subsequência de $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para x em (X,τ), é suficiente provar que $(\langle x_n\rangle_{n<\omega}) \cap F$ é um conjunto infinito. Suponhamos por absurdo que $(\langle x_n\rangle_{n<\omega}) \cap F$ é finito. Então existe $N_1<\omega$ tal que para todo $n \geq N_1$, $x_n \in X \setminus F$. Como $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para x em (X,τ), existe $N_2<\omega$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N_2$. Tomando $N_3 = \max\{N_1,N_2\}$ temos que $x_n \in V \cap (X \setminus F)$ para todo $n \geq N_3$ e portanto $(\langle x_n\rangle_{N_3\leq n<\omega}) \subset W$ o que é absurdo.

$(\Leftarrow)$ Seja $A \subset X$ tal que $A \notin \tau$. Como $X \setminus A$ não é fechado no espaço sequencial (X,τ), existe uma sequência $\langle x_n\rangle_{n<\omega} \subset X \setminus A$, que converge para um ponto x tal que $x \notin X \setminus A$. Assim, $x \in A$ e $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ não converge para x em $(X,[\tau \cup \{A\}])$. Então $\lim_\tau \langle x_n\rangle_{n<\omega} \neq \lim_\sigma \langle x_n\rangle_{n<\omega}$, onde $\sigma = [\tau \cup \{A\}]$. Portanto do Lema 3.2.2 temos que os espaços (X,τ) e $(X,[\tau \cup \{A\}])$ não possuem a mesma família de sequências convergentes. Como A é um não aberto arbitrário o resultado segue. □

Proposição 3.2.7. Todo espaço topológico T_1 admite maximal com respeito à família das suas sequências convergentes.

Demonstração. Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1 e $\mathscr{TS}(X)$ o conjunto de todas as topologias σ sobre X, tais que $\sigma \supset \tau$ e os espaços (X,σ) têm a mesma família de sequências convergentes que o espaço (X,τ). Queremos provar que o conjunto $\mathscr{TS}(X)$, parcialmente ordenado pela inclusão, possui um elemento maximal. Para fazer isso usaremos o Lema de

Kuratowski-Zorn provando que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{TS}(X)$, possui um limitante superior em $\mathscr{TS}(X)$. De fato seja $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ um conjunto totalmente ordenado em $\mathscr{TS}(X)$. Podemos considerar a topologia $\sigma = \left[\cup_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\right]$ sobre X, então $\sigma \supset \sigma_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Assim σ é um limitante superior da cadeia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. Queremos provar agora que $\sigma \in \mathscr{TS}(X)$, isto é, que o espaço (X,σ) possui a mesma família de sequências convergentes que o espaço (X,τ). Como $\sigma \supset \tau$, da Observação 2.2.10, é suficiente provar que toda sequência convergente no espaço (X,τ) é também uma sequência convergente no espaço (X,σ).

Sejam $\langle x_n\rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência convergente no espaço (X,τ) e $x \in \lim_\tau\langle x_n\rangle_{n<\omega}$. Se V é um conjunto aberto no espaço (X,σ), tal que $x \in V$, pelo Lema 2.2.2, podemos escrever $V = \cup_{\alpha<\beta}U_\alpha$, onde $U_\alpha \in \sigma_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Então existe $\alpha < \beta$ tal que $x \in U_\alpha$. Como (X,τ) é T_1 segue do Lema 3.2.2 que $\lim_\tau\langle x_n\rangle_{n<\omega} = \lim_{\sigma_\alpha}\langle x_n\rangle_{n<\omega}$. Assim $x \in \lim_{\sigma_\alpha}\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ e, portanto, existe $n < \omega$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in U_\alpha$ logo, $x_n \in V$ para todo $n \geq N$. Como V foi tomado de maneira arbitrária, temos que $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$ converge para x no espaço (X,σ). □

Exemplo 3.2.8. Se tirarmos a condição de ser T_1, não podemos usar o Lema de Kuratowski-Zorn para obter o resultado da Proposição 3.2.7.

Considere o espaço (X,τ) do Exemplo 3.2.3 e o conjunto $\mathscr{TS}(X)$ de todas as topologias σ sobre X que contém τ e tais que os espaços (X,σ) possuem a mesma família de sequências convergentes que o espaço (X,τ). Para todo $m < \omega$, considere $\sigma_m = [\tau \cup \{\{0\},\{1\},\{2\},\cdots,\{m\}\}]$.

Afirmação 3.2.9. $\{\sigma_m\}_{m<\omega}$ é um conjunto totalmente ordenado em $\mathscr{TS}(X)$.

Demonstração. Como $\sigma_{m-1} = [\tau \cup \{\{0\},\cdots\{m-1\}\}]$ e $\sigma_m = [\tau \cup \{\{0\},\cdots\{m-1\},\{m\}\}]$, para todo $m < \omega$, temos que $\sigma_{m-1} \subset \sigma_m$ e, como $\{m\} \in \sigma_m$, segue que $\sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\} \subset \sigma_m$. Então por definição de topologia gerada temos que $[\sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\}] \subset \sigma_m$. Por outro lado como $\tau \cup \{\{0\},\{1\},\cdots\{m-1\},\{m\}\} \subset \sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\}$, temos que $\sigma_m \subset [\sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\}]$. Portanto $\sigma_m = [\sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\}]$, para todo $n < \omega$. Assim $\tau \subset \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots \sigma_{m-1} \subset \sigma_m$, para todo $m < \omega$.

Por outro lado da Proposição 2.2.3 temos que os abertos de σ_0 são da forma $U \cup \{0\}$ onde $U \in \tau$. Assim os abertos de $\sigma_m = [\sigma_{m-1} \cup \{\{m\}\}]$ são da forma $U \cup \{0\} \cup \cdots \cup \{m\}$, onde $U \in \tau$.

Vejamos agora que $\sigma_m \in \mathscr{TS}(X)$, para todo $m < \omega$. Seja $\langle y_n\rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência convergente no espaço (X,τ). Então temos dois casos:

1. $\langle y_n\rangle_{n<\omega}$ é quase constante. Então existe $N < \omega$ tal que $y_n = y_N$ para todo $n \geq N$. Então para todo aberto $V \in \sigma_m$ tal que $y_N \in V$ temos que $y_n \in V$ para todo $n \geq N$. Assim $\langle y_n\rangle_{n<\omega}$ converge para y_N no espaço (X,σ_m).

2. $\langle y_n\rangle_{n<\omega}$ não é quase constante. Então para todo $n < \omega$ existe $N > n$ tal que $y_N \neq y_n$. Como $\{x_n\} \in \tau$ para todo $n < \omega$, temos que $\langle y_n\rangle_{n<\omega}$ não converge para x_n no espaço (X,τ),

para todo $n < \omega$. Então existe $p < \omega$ tal que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X, τ). Se $k > \max\{p, m\}$, seque da Afirmação 3.2.4 que a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, τ). Considere W um aberto em σ_m tal que $k \in W$. Podemos escrever $W = U \cup \{0\} \cup \cdots \{m\}$, onde $U \in \tau$. Como $k > m$, temos que $k \in U$ e, dado que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, τ), existe $N < \omega$ tal que $y_n \in U$ para todo $n \geq N$. Assim $y_n \in W$ para todo $n \geq N$ e, como W foi tomado de maneira arbitrária em σ_m, segue que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para k no espaço (X, σ_m).

De 1. e 2. temos que toda sequência convergente no espaço (X, τ) é também convergente no espaço (X, σ_m). Assim, pela Observação 2.2.10, temos que os espaços (X, τ) e (X, σ_m) possuem a mesma família de sequências convergentes. Portanto, $\sigma_m \in \mathscr{T}\mathscr{S}(X)$, para todo $m < \omega$. $\square$

Por outro lado, se $\sigma = [\cup_{m<\omega} \sigma_m]$, temos que a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ não converge em (X, σ) e, como σ é a menor topologia que contém as σ_m's, temos que a cadeia $\{\sigma_m\}_{m<\omega}$ não têm limitante superior em $\mathscr{T}\mathscr{S}(X)$. Portanto não podemos aplicar o Lema de Kuratowski-Zorn para mostrar que o espaço (X, τ) admite maximal com respeito à família das suas sequências convergentes.

Proposição 3.2.10. Existe um espaço topológico T_0 que não admite maximal com respeito à família das suas sequências convergentes.

Demonstração. Seja (X, τ) o espaço topológico do Exemplo 3.2.3 e suponhamos que (X, τ) admite maximal com respeito à família das suas sequências convergentes. Então existe σ, uma topologia sobre X, tal que $\sigma \supset \tau$, os espaços (X, τ), (X, σ) possuem a mesma família de sequências convergentes e o espaço (X, σ) é maximal com respeito à família das suas sequências convergentes.

Afirmação 3.2.11. Se $\langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência convergente no espaço (X, σ) que não é quase-constante. Então o conjunto $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é infinito e esta contido em ω.

Demonstração. Como $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é convergente, temos que $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} \neq \emptyset$. Por outro lado, $\sigma \supset \tau$ e $\{x_n\} \in \tau$ para todo $n < \omega$ logo, $\{x_n\} \in \sigma$ para todo $n < \omega$ e, como a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não é quase constante, temos que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para x_n, para todo $n < \omega$. Assim $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset \omega$.

Suponhamos que o conjunto $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é finito. Então o conjunto $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ possui um elemento máximo $q = \max \lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$. Considere agora a sequência, para todo $n < \omega$

$$z_n = \begin{cases} y_m & \text{se} \quad n = 2m, \\ & \qquad\qquad\qquad \text{para algum } m < \omega \\ q+1 & \text{se} \quad n = 2m+1, \end{cases}$$

Como a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não é quase-constante, temos que $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ também não é quase-constante. Como $\{x_n\} \in \sigma$, para todo $n < \omega$, segue que $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para x_n para todo $n < \omega$. Logo, $\lim_\sigma \langle z_n \rangle_{n<\omega} \subset \omega$.

Se $p \geq q+1$ e a sequência $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X,σ), temos que para todo aberto $E \in \sigma$, tal que $p \in E$, existe $N < \omega$, tal que $z_n \in E$ para todo $n \geq N$. Logo, $y_n \in E$ para todo $n \geq \left[\frac{N+1}{2}\right]$, onde $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ representa a parte inteira do número $\frac{N+1}{2}$. Assim, a sequência $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X,σ) logo, $p \in \lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ o que é absurdo pois $p > q$ e $q = \max \lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$. Portanto $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para $p \geq q+1$.

Se $r \leq q$, podemos escolher o aberto básico $(V_r \cup W_r) \in \tau$ tal que $r \in (V_r \cup W_r)$ mas $q+1 \notin (V_r \cup W_r)$. Como $\sigma \supset \tau$, temos que $(V_r \cup W_r) \in \sigma$. Assim para todo $N < \omega$ temos que $z_{2N+1} = q+1$ e, como $2N+1 > N$ temos que $\langle z_n \rangle_{N \leq n<\omega} \not\subset (V_r \cup W_r)$. Logo, $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ não converge para $r \leq q$.

Assim $\lim_\sigma \langle z_n \rangle_{n<\omega} = \emptyset$ e, portanto, a sequência $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ não é convergente no espaço (X,σ). Por outro lado, como $\sigma \supset \tau$ e $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é uma sequência convergente no espaço (X,σ), temos que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é uma sequência convergente no espaço (X,τ) e $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset \lim_\tau \langle y_n \rangle_{n<\omega}$. Por tanto, $q \in \lim_\tau \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ e, pela Afirmação 3.2.4 temos que a sequencia $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para todo $p > q$ no espaço (X,τ). Em particular $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para $q+1$ no espaço (X,τ). Assim para todo aberto $U \in \tau$, tal que $q+1 \in U$, existe $N < \omega$ tal que $y_n \in U$, para todo $n \geq N$. Portanto, $z_n \in U$ para todo $n \geq 2N$ e assim, a sequência $\langle z_n \rangle_{n<\omega}$ converge para $q+1$ no espaço (X,τ). Mas isso é absurdo pois, por hipótese, os espaços (X,τ) e (X,σ) possuem a mesma família de sequências convergentes. Portanto, o conjunto $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é infinito. □

Considere agora a sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega} \subset X$. Como $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é convergente no espaço (X,τ), segue que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é convergente no espaço (X,σ), pois os espaços (X,τ) e (x,σ) possuem a mesma família de sequências convergentes. Como $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ não é quase-constante, segue da Afirmação 3.2.11, que o conjunto $\lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$ é infinito e esta contido em ω. Escolha $t \in \lim_\sigma \langle x_n \rangle_{n<\omega}$, então $\{t\} \notin \sigma$ e, a topologia sobre X, $\delta = [\sigma \cup \{\{t\}\}]$, é tal que $\delta \supset \sigma$ e $\delta \neq \sigma$.

Seja $\langle y_n \rangle_{n<\omega} \subset X$ uma sequência convergente no espaço (X,σ). Se $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é quase-constante, temos que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é também uma sequência convergente no espaço (X,δ). Se $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ não é quase-constante, segue da Afirmação 3.2.11 que $\lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ é um conjunto infinito e esta contido em ω. Assim podemos escolher $p \in \lim_\sigma \langle y_n \rangle_{n<\omega}$ tal que $p > t$. Considere $E \in \delta$ um aberto, tal que $p \in E$. Pela Proposição 2.2.3 podemos escrever $E = U \cup \{t\}$ onde $U \in \sigma$. Assim $p \in U$ e, como $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X,σ), existe $N < \omega$ tal que $y_n \in U$ para todo $n \geq N$. Logo, $y_n \in E$ para todo $n \geq N$. Como E é arbitrário, segue que $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge para p no espaço (X,δ). Assim toda sequência convergente no espaço (X,σ) é também uma sequência convergente no espaço (X,δ) e como $\delta \supset \sigma$, segue da Observação 2.2.10, que os espaços (X,σ) e (X,δ) possuem a mesma família de sequências convergentes. Mas isso contradiz o fato de que o espaço (X,σ) é maximal com respeito à família das suas sequências convergentes. □

3.3 Com respeito à família dos subconjuntos compactos

Dizemos que um espaço (X,τ) é compacto maximal se τ é um elemento maximal no conjunto de todas as topologias compactas sobre X. Com respeito ao estudo dos espaços compacto maximais temos, por exemplo, Ramanathan (1948) que provou que um espaço é compacto maximal se, e somente se, é um KC-espaço, isto é: um espaço onde os subconjuntos compactos são fechados. Depois disso, Cameron (1977) fez o seguinte questionamento: quando uma topologia compacta está contida numa topologia compacta maximal. Essa questão foi resolvida por Kovar (2005).

Do ponto de vista da maximalidade com respeito a famílias de subconjuntos, os espaços compactos maximais (X,τ) são os espaços maximais com respeito à família $\{X\}$ de subconjuntos compactos. Nesta seção são estudados os espaços maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos compactos dando uma caracterização para eles e, em certo sentido, a sua relação com os espaços compactos maximais.

Lema 3.3.1. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $A\subset X$, com $A\notin\tau$. Seja $T\subset X$, T compacto em (X,τ) mas não compacto em $(X,[\tau\cup\{A\}])$. Então $T\cap(X\setminus A)$ não é compacto em (X,τ).

Demonstração. Suponhamos que $T\cap(X\setminus A)$ é compacto em (X,τ). Seja $\{V_\alpha\cup(W_\alpha\cap A)\}_{\alpha<\beta}$ uma cobertura aberta de T em $(X,[\tau\cup\{A\}])$. Vamos provar que tal cobertura admite uma subcobertura finita.

Como $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é uma cobertura aberta de $T\cap(X\setminus A)$ em (X,τ), existe uma subcobertura finita $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ de $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. Temos dois casos:

1. Se $T\subset\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$, a cobertura $\{V_\alpha\cup(W_\alpha\cap A)\}_{\alpha<\beta}$ tem a subcobertura finita $\{V_{\alpha_i}\cup(W_{\alpha_i}\cap A)\}_{i=1}^n$.

2. Se $T\not\subset\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$, considere o conjunto:

$$\Delta=\{\gamma<\beta:(V_\gamma\cup W_\gamma)\cap(T\setminus(\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}))\neq\emptyset\}$$

Então $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n\cup\{V_\gamma\cup W_\gamma\}_{\gamma\in\Delta}$ é uma cobertura aberta de T em (X,τ). Como T é compacto em (X,τ), existe uma subcobertura finita de $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n\cup\{V_\gamma\cup W_\gamma\}_{\gamma\in\Delta}$, que podemos escrever como $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n\cup\{V_{\gamma_j}\cup W_{\gamma_j}\}_{j=1}^m$. Assim, $\{V_{\gamma_j}\cup W_{\gamma_j}\}_{j=1}^m$ é uma cobertura de $T\setminus(\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i})$. Como $T\cap(X\setminus A)\subset(\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i})$, temos que $T\setminus(\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i})\subset A$, logo $\{(V_{\gamma_j}\cap A)\cup(W_{\gamma_j}\cap A)\}_{j=1}^m$ é ainda uma cobertura de $T\setminus(\cup_{i=1}^n V_{\alpha_i})$ e, assim, o conjunto $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n\cup\{(V_{\gamma_j}\cap A)\cup(W_{\gamma_j}\cap A)\}_{j=1}^m$ é uma cobertura de T. Portanto:

$$T\subset\left(\bigcup\{V_{\alpha_i}\cup(W_{\alpha_i}\cap A)\}_{i=1}^n\right)\cup\left(\bigcup\{V_{\gamma_j}\cup(W_{\gamma_j}\cap A)\}_{j=1}^m\right)$$

e segue que $\{V_{\alpha_i}\cup(W_{\alpha_i}\cap A)\}_{i=1}^n\cup\{V_{\gamma_j}\cup(W_{\gamma_j}\cap A)\}_{j=1}^m$ é uma subcobertura finita de $\{V_\alpha\cup(W_\alpha\cap A)\}_{\alpha<\beta}$. Como $\{V_\alpha\cup(W_\alpha\cap A)\}_{\alpha<\beta}$ é uma cobertura aberta arbitrária de T em $(X,[\tau\cup\{A\}])$, temos que T é compacto em $(X,[\tau\cup\{A\}])$, o que é absurdo. Portanto $T\cap(X\setminus A)$ não é compacto em (X,τ). $\square$

O seguinte resultado é análogo à Proposição 3.1.3 para a família dos subconjuntos não compactos.

Teorema 3.3.2. Um espaço (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos se, e somente se, para todo $F\subset X$ não fechado, existe $L\subset \overline{N}\setminus F$ e $N\subset F$ não compacto, tal que $N\cup L$ é compacto.

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja $F\subset X$ não fechado, então $X\setminus F\notin\tau$. Como (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos, existe $N\subset X$, compacto em (X,τ), tal que N não é compacto em $(X,[\tau\cup\{X\setminus F\}])$. Pela Proposição 2.2.3 temos que $N\cap\overline{N\cap F}^{\tau}\not\subset F$ e, como $\overline{N\cap F}^{\tau}\subset\overline{F}^{\tau}$, segue que $(N\cap\overline{N\cap F}^{\tau})\cap(\overline{F}^{\tau}\setminus F)=(N\cap\overline{N\cap F}^{\tau})\setminus F\neq\emptyset$. Tomando $L=(N\cap\overline{N\cap F}^{\tau})\setminus F$, temos que $L\subset\overline{N\cap F}^{\tau}\setminus F$ e $(N\cap F)\cup L=N\cap\overline{N\cap F}^{\tau}$. Assim, $(N\cap F)\cup L$ é fechado em N e, como N é compacto em (X,τ), segue que $(N\cap F)\cup L$ é compacto em (N,τ_N) e, portanto, compacto. Finalmente, do Lema 3.3.1, segue que $N\cap F$ não é compacto em (X,τ).

$\Leftarrow$ Para ver que o espaço (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos, é suficiente provar que, para todo $A\subset X$, $A\notin\tau$, existe $N\subset X$, compacto em (X,τ), tal que N não é compacto em $(X,[\tau\cup\{A\}])$.

De fato, seja $A\subset X, A\notin\tau$. Então $F=X\setminus A$ não é fechado. Assim, existem $B\subset F$ e $L\subset\overline{B}\setminus F$ tais que B não é compacto em (X,τ) e $N=B\cup L$ é compacto em (X,τ). Basta provar que $N=B\cup L$ não é compacto em $(X,[\tau\cup\{A\}])$.

Como B não é compacto em (X,τ), podemos escolher uma cobertura aberta de B em (X,τ) que não tem subcobertura finita, digamos $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. Uma vez que $L\subset A$, temos que $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}\cup\{A\}$ é uma cobertura aberta de N em $(X,[\tau\cup\{A\}])$. Como $A\cap B=\emptyset$, segue que a cobertura abeta $\{V_\alpha\}_{\alpha<\beta}\cup\{A\}$ não possui subcobertura finita. $\square$

Definição 3.3.3. (WHITEHEAD, 1939) Dizemos que (X,τ) é **compactamente gerado** ou que é um k**-espaço**, se a topologia é coerente com a família de todos os subespaços compactos. Isto é X satisfaz a seguinte condição:

- Para todo $F\subset X$, se $F\cap K$ é fechado em K para todo subespaço compacto $K\subset X$, então F é fechado.

Corolário 3.3.4. Se (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos, então (X,τ) é compactamente gerado.

Demonstração. Seja $F\subset X$ não fechado, pelo Teorema 3.3.2, existem $N\subset F$, não compacto e $L\subset\overline{N}\setminus F$, tais que $K=N\cup L$ é compacto. Por outro lado, $F\cap K=N$ e N não é fechado em K, pois do contrário seria um fechado dentro de um compacto e, portanto, compacto. $\square$

Exemplo 3.3.5. Existe um espaço topológico T_1 e compactamente gerado, que não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos.

Considere o conjunto ω, dos números naturais com a topologia co-finita cof. Sabemos que (ω, cof) é um espaço topológico T_1 onde os únicos subconjuntos fechados são ω e os subconjuntos finitos. Sejam $F \subset \omega$ fechado e $K \subset \omega$ compacto. Se $F = \omega$, então $F \cap K = K$ é fechado em K. Se F é finito, temos que $F \cap K$ é finito e, portanto, fechado em K. Por outro lado, se $A \subset \omega$ é não fechado, então A é infinito, $A \neq \omega$ e $\overline{A} = \omega$. Escolha um $x \in \omega \setminus A$, então $K = A \cup \{x\}$ é compacto é $K \cap A = A$ é não fechado em K.

Portanto (ω, cof) é um espaço compactamente gerado. Além disso, como todo subconjunto de ω é compacto, segue do Teorema 3.3.2 que o espaço (ω, cof) não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos.

Definição 3.3.6. (RAMANATHAN, 1948) Um espaço topológico é chamado de KC**-espaço** se todo subconjunto compacto é fechado.

Lema 3.3.7. Se (X, τ) é um KC-espaço compactamente gerado, então (X, τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos.

Demonstração. Seja $F \subset X$ não fechado. Então existe $K \subset X$ compacto tal que $F \cap K$ não é fechado em K e, portanto, $\overline{F \cap K} \not\subset F$. Assim, $F \cap K$ não é fechado e, como (X, τ) é um KC-espaço, $F \cap K$ não é compacto. Podemos escrever $N = F \cap K$ e $L = K \cap (\overline{N} \setminus F)$. Então $L \subset \overline{N} \setminus F$ e $N \cup L = K \cap \overline{N}$. Portanto $N \cup L$ é fechado no compacto K, logo $N \cup L$ é compacto. Como F é um subconjunto não fechado arbitrário, segue do Teorema 3.3.2 que (X, τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos. □

Corolário 3.3.8. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Então X é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos compactos se, e somente se, X é compactamente gerado.

3.4 Com respeito à família dos subconjuntos densos

Nesta seção estuda-se a família dos subconjuntos densos. A maximalidade com respeito a essa família está diretamente relacionada com os espaços nodec, introduzidos por Douwen (1993) e estudados amplamente por outros autores como Arhangel'skii e Collins (1995) e Dridi, Mhemdi e Turki (2015).

Proposição 3.4.1. Todo espaço topológico admite maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos.

Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathscr{E}$ a família dos seus subconjuntos densos. Considere $\mathscr{T}\mathscr{E}(X)$ o conjunto de todas as topologias sobre X que contêm τ e que têm a mesma família de subconjuntos densos $\mathscr{E}$.

Seja $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ uma cadeia em $\mathscr{TE}(X)$ e seja $\sigma = [\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha]$. Então σ é uma topologia sobre X que contém todas as τ_α's. Provemos que $\sigma \in \mathscr{TE}(X)$, isto é: todo subconjunto denso em (X,τ) é denso em (X,σ).

De fato, seja E um subconjunto denso em (X,τ) e seja $W \in \sigma$, $W \neq \emptyset$. Pelo Lema 2.2.2, temos que $\cup_{\alpha<\beta}\tau_\alpha$ é uma base para σ. Então podemos escrever $W = \cup_{\alpha<\beta}V_\alpha$, onde $V_\alpha \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Como $W \neq \emptyset$, existe $\alpha < \beta$ tal que $V_\alpha \neq \emptyset$. Como E é denso em (X,τ_α) segue que $V_\alpha \cap E \neq \emptyset$, logo $W \cap E \neq \emptyset$ e, portanto, E é denso em (X,σ). Assim, $\sigma \in \mathscr{TE}(X)$ é um limitante superior de $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ em $\mathscr{TE}(X)$. Como $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é uma cadeia arbitrária em $\mathscr{TE}(X)$ segue pelo Lema de Kuratowski-Zorn que o conjunto $\mathscr{TE}(X)$ possui um elemento maximal.

Definição 3.4.2. (GLEASON *et al.*, 1958) Dizemos que o espaço topológico X é **extremamente desconexo** se para todo subconjunto aberto V, temos que $\overline{V}$ é aberto.

Proposição 3.4.3. Todo espaço topológico maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos é extremamente desconexo.

Demonstração. Seja $A \in \tau$, $\sigma = [\tau \cup \{\overline{A}\}]$ e E um subconjunto denso em (X,τ). Seja $W \in \sigma$, $W \neq \emptyset$. Pela Proposição 2.2.3 podemos escrever $W = U \cup (V \cap \overline{A})$, onde $U,V \in \tau$. Então $U \neq \emptyset$ ou $V \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Se $U \neq \emptyset$ temos que $U \cap E \neq \emptyset$, pois E é denso em (X,τ). Se $V \cap \overline{A} \neq \emptyset$, temos que $V \cap A \neq \emptyset$, pois V é aberto. Assim, como $A \in \tau$, $(V \cap A) \cap E \neq \emptyset$, pois E é denso em (X,τ). Por outro lado, $(V \cap A) \cap E \subset (V \cap \overline{A}) \cap E$ e, portanto, $(V \cap \overline{A}) \cap E \neq \emptyset$. Assim $W \cap E \neq \emptyset$ e como W foi tomado de forma arbitrária, temos que E é denso em (X,σ). Como E foi tomado também de forma arbitrária, segue da Observação 2.2.10 que (X,σ) possui a mesma família de subconjuntos densos que (X,τ). Uma vez que $\sigma \supset \tau$, segue da maximalidade de τ que $\sigma = \tau$ e então $\overline{A} \in \tau$. □

Proposição 3.4.4. *X é extremamente desconexo se, e somente se, para todo subconjunto aberto e não fechado V temos que $\overset{\circ}{\overline{V}} \setminus V \neq \emptyset$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja V um subconjunto aberto e não fechado. Como X é extremamente desconexo, temos que $\overline{V}$ é aberto logo $\overline{V} = \overset{\circ}{\overline{V}}$ e, como V é não fechado, $\overset{\circ}{\overline{V}} \setminus V \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Seja $V \subset X$ aberto. Se V é fechado temos que $V = \overline{V}$ e segue que $\overline{V}$ é aberto. Se V é não fechado, temos por hipótese que $\overset{\circ}{\overline{V}} \setminus V \neq \emptyset$. Como $V \subsetneq \overset{\circ}{\overline{V}} \subset \overline{V}$. Se $\overset{\circ}{\overline{V}} = \overline{V}$ terminamos. Se não, tome $W_1 = \overset{\circ}{\overline{V}}$. Note que W_1 é um aberto entre V e $\overline{V}$ logo W_1 é não fechado. Assim, por hipótese $\overset{\circ}{\overline{W_1}} \setminus W_1 \neq \emptyset$ e, tomando $W_2 = \overset{\circ}{\overline{W_1}}$, temos que $V \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subset \overline{V}$.

Seja β um ordinal e suponha construídos os W_α's para todo $\alpha < \beta$. Então W_α é um aberto e $V \subsetneq W_\alpha \subset \overline{V}$, para todo $\alpha < \beta$. Assim, $V \subsetneq (\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha) \subset \overline{V}$. Se $(\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha) = \overline{V}$, terminamos. Se não, temos que $(\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha)$ é aberto e não fechado. Assim, $\overset{\circ}{\overline{\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha}} \setminus (\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha) \neq \emptyset$ e podemos escolher $W_\beta = \overset{\circ}{\overline{\cup_{\alpha<\beta}V_\alpha}}$, tal que $V \subsetneq (\cup_{\alpha<\beta}W_\alpha) \subsetneq W_\beta \subset \overline{V}$.

Por indução transfinita, podemos continuar o procedimento até um ordinal κ tal que $\overline{V} = \cup_{\alpha<\kappa} W_\alpha$ e, portanto, $\overline{V}$ é aberto. $\square$

Definição 3.4.5. (BOIS–REYMOND, 1882) Dizemos que um subconjunto A, de um espaço topológico é **raro ou denso em nenhum lugar** ou **denso em nenhum lugar** (nowhere dense) se $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$, isto é, se o interior do fecho do conjunto é vazio.

Definição 3.4.6. (DOUWEN, 1993, p. 129) Dizemos que o espaço topológico X é **nodec**, se X satisfaz uma das seguintes propriedades equivalentes:

(a) todo subconjunto raro é fechado;

(b) todo subconjunto raro é discreto e fechado;

(c) todo subconjunto que contém um conjunto aberto e denso é aberto.

Lema 3.4.7. Se para cada subconjunto não aberto Y de X temos que $Y \setminus \overline{\overset{\circ}{Y}} \neq \emptyset$. Então X é nodec.

Demonstração. Seja A um subconjunto raro de X, isto é $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$. Então, o conjunto $X \setminus \overline{A}$ é denso em X. Como $(X \overset{\circ}{\setminus} A) = X \setminus \overline{A}$ (ENGELKING, 1989, p. 15), temos:

$$(X \setminus A) \setminus \overline{(X \overset{\circ}{\setminus} A)} = (X \setminus A) \setminus X = \emptyset.$$

Então, por hipótese $X \setminus A$ é aberto e, portanto A é fechado. Como A é um subconjunto raro arbitrário, o resultado segue. $\square$

Teorema 3.4.8. Seja (X, τ) um espaço topológico. As seguintes condições são equivalentes:

1. (X, τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos.

2. (X, τ) é extremamente desconexo e nodec.

3. Para todo $V \in \tau$ e para todo $x \in \overline{V} \setminus V$, $V \cup \{x\} \in \tau$.

4. Para todo $A \subset X$, $A \setminus \overset{\circ}{A} \subset A \setminus \overline{\overset{\circ}{A}}$.

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Suponha que (X, τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos. Queremos mostrar que o espaço (X, τ) é extremamente desconexo e nodec.

(a) Sejam $A \subset X$ um subconjunto aberto em (X, τ) e $\sigma = [\tau \cup \{\overline{V}\}]$. Então σ é uma topologia sobre X tal que $\sigma \supset \tau$. Se os espaços (X, τ) e (X, σ) têm a mesma família de subconjuntos densos, segue da maximalidade de τ que $\sigma = \tau$ e, portanto, $\overline{A} \in \tau$. Assim, para ver que (X, τ) é extremamente desconexo, basta provar que os espaços (X, τ) e (X, σ) têm a mesma família de subconjuntos densos. Pela Observação 2.2.10, é suficiente provar que todo subconjunto denso em (X,τ) é ainda, um subconjunto denso em (X,σ).

De fato, sejam E um subconjunto denso em (X,τ) e $W\in\sigma$, $W\neq\emptyset$. Pela Proposição 2.2.3, podemos escrever $W=U\cup(V\cap\overline{A})$, onde $U,V\in\tau$. Se $U\neq\emptyset$ temos que $E\cap U\neq\emptyset$, pois E é denso em (X,τ). Se $V\cap\overline{A}\neq\emptyset$ temos que $V\cap A\neq\emptyset$, pois V é aberto em (X,τ). Como $V\cap A\in\tau$, temos que $(V\cap A)\cap E\neq\emptyset$, pois E é denso em (X,τ). Como $V\cap A\subset V\cap\overline{A}$, temos que $(V\cap\overline{A})\cap E\neq\emptyset$. Assim $W\cap E\neq\emptyset$ e, portanto, E é denso em (X,σ).

(b) Para ver que o espaço (X,τ) é nodec, mostraremos que todo subconjunto raro em (X,τ) é fechado. De fato, sejam A um subconjunto raro em (X,τ). Analogamente à parte (a), se os espaços (X,τ) e $(X,[\tau\cup\{X\setminus A\}])$ têm a mesma família de subconjuntos densos, então $\tau=[\tau\cup\{X\setminus A\}]$ e, portanto $X\setminus A\in\tau$, ou seja A é fechado em (X,τ).

Sejam E um subconjunto denso em (X,τ) e $V\in\tau$ tal que $V\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$. Como A é raro, temos que $\mathring{\overline{A}}=\emptyset$ e assim $X\setminus\overline{A}$ é um aberto denso. Logo $V\cap(X\setminus\overline{A})\neq\emptyset$ e $\big(V\cap(X\setminus\overline{A})\big)\cap E\neq\emptyset$, pois E é denso em (X,τ). Como $V\cap(X\setminus\overline{A})\subset V\cap(X\setminus A)$, temos que $(V\cap(X\setminus A))\cap E\neq\emptyset$. Como pela Proposição 2.2.3, os abertos de $[\tau\cup\{X\setminus A\}]$ são da forma $U\cup(V\cap(X\setminus A))$, segue que E é também denso em $(X,[\tau\cup\{X\setminus A\}])$.

$(2\Rightarrow 3)$ Sejam $V\subset X$ um subconjunto aberto e não fechado e $x\in\overline{V}\setminus V$. Como $(\overline{V}\setminus V)\setminus\{x\}\subset\overline{V}\setminus V$, temos que $\overline{(\overline{V}\setminus V)\setminus\{x\}}\subset\overline{\overline{V}\setminus V}=\overline{V}\setminus V$, pois V é aberto. Assim:

$$\mathring{\overline{(\overline{V}\setminus V)\setminus\{x\}}}\subset(\overline{V}\mathring{\setminus}V)=\emptyset.$$

Como X é nodec, o conjunto $(\overline{V}\setminus V)\setminus\{x\}$ é fechado. Por outro lado $\overline{V}$ é aberto, pois X é extremamente desconexo. Então $\overline{V}\setminus\big((\overline{V}\setminus V)\setminus\{x\}\big)=V\cup\{x\}$ é um conjunto aberto.

$(3\Rightarrow 4)$ Suponha que existe $x\in(A\setminus\mathring{A})\cap\overline{\mathring{A}}$. Então $\mathring{A}\cup\{x\}$ é aberto, pois $x\in\overline{\mathring{A}}\setminus\mathring{A}$, e assim $x\in\mathring{A}$, mas isso é absurdo.

$(4\Rightarrow 1)$ Seja $A\subset X$ tal que $A\notin\tau$. Como $\mathring{A}\subset\overline{\mathring{A}}$, temos que $A\setminus\overline{\mathring{A}}\subset A\setminus\mathring{A}$. Por hipótese, $A\setminus\mathring{A}\subset A\setminus\overline{\mathring{A}}$. Logo $A\setminus\mathring{A}=A\setminus\overline{\mathring{A}}$ e assim $A\setminus\overline{\mathring{A}}=A\cap(X\setminus\overline{\mathring{A}})\neq\emptyset$, pois $A\notin\tau$. Seja $E=X\setminus(A\setminus\mathring{A})$, então E é um subconjunto denso em (X,τ) e que não é denso em $(X,[\tau\cup\{A\}])$ porque $(A\cap(X\setminus\overline{\mathring{A}}))\cap E=\emptyset$. Como A foi tomado de forma arbitrária, segue que (X,τ) é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos. □

Vamos mostrar agora um exemplo de um espaço topológico extremamente desconexo que não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos. Primeiro necessitamos algumas ferramentas.

Definição 3.4.9. (DOUWEN, 1993, p. 126) Chamamos o espaço X de **ultradesconexo**, se não tem pontos isolados e satisfaz as seguintes condições equivalentes:

(a) Quaisquer dois subespaços disjuntos de X sem pontos isolados têm fechos disjuntos.

(b) Todo subconjunto próprio e não vazio A de X é aberto e fechado se, e somente se, A e $X \setminus A$ não têm pontos isolados.

Fato 3.4.10. (DOUWEN, 1993, p. 127) Seja X um espaço ultradesconexo. Então

(a) Todo subespaço fechado e sem pontos isolados de X é aberto.

(b) X é extremamente desconexo.

(c) Todo subespaço sem pontos isolados de X é ultradesconexo.

Fato 3.4.11. (DOUWEN, 1993, p. 127) Para $i \in \{1,2,3\}$, espaços maximais-T_i são ultradesconexos.

Corolário 3.4.12. (DOUWEN, 1993, p. 127) Espaços maximais-regulares são extremamente desconexos e, portanto, zero-dimensionais.

Teorema 3.4.13. (DOUWEN, 1993, p. 127) Um espaço é maximal-regular se, e somente se, é regular e ultradesconexo.

Teorema 3.4.14. (DOUWEN, 1993, p. 130) Se (X,τ) é um espaço topológico sem pontos isolados, então X é maximal se, e somente se, X é ultradesconexo e nodec.

Proposição 3.4.15. Todo espaço topológico maximal-regular que não é maximal, não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos.

Demonstração. Seja (X,τ) um espaço topológico maximal-regular que não é maximal. Pelo Teorema 3.4.13, X é regular e ultradesconexo. Como X não é maximal, segue do Teorema 3.4.14 que X não é nodec. Finalmente, pelo Teorema 3.4.8 temos que X não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos. □

Exemplo 3.4.16. Pelo Exemplo 1.9 em (DOUWEN, 1993, p. 127) temos que existe um espaço maximal-regular que não é maximal. Assim, pela Proposição 3.4.15, temos que esse espaço é extremamente desconexo mas não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos densos.

3.5 Com respeito à família dos subconjuntos conexos

Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que τ é uma topologia conexa maximal ou que X é um espaço conexo maximal, se τ é um elemento maximal no conjunto de todas as topologias conexas sobre X. As topologias conexas maximais foram estudadas por Thomas (1968). Neste trabalho mostra-se que todo espaço conexo maximal é T_0 e que existem espaços conexos maximais T_1. Mais adiante no ano de 1978 , Guthrie, Stone e Wage (1978) descobriram uma extensão conexa maximal para a reta real $\mathbb{R}$, mas foi no ano de 1988 que Clark e Schneider (1988) deram uma caracterização completa para os espaços conexos maximais.

Nesta seção estuda-se os espaços topológicos (X,τ) que são maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos conexos segundo a Definição 2.2.6.

Uma das principais dificuldades no estudo dos espaços topológicos maximais com respeito à família de todos os seus subconjuntos conexos é o fato de não se poder usar métodos análogos aos utilizados anteriormente para a família dos subconjuntos discretos, a família das sequências convergentes e a família dos subconjuntos compactos pois o comportamento da família de todos os subconjuntos conexos é, em certo sentido, diferente.

Por exemplo, o estudo da maximalidade com respeito à família de todos os subconjuntos discretos é feito considerando a propriedade P de *ser um subconjunto discreto*, mas pela Observação 2.2.7, podemos fazer esse estudo com a propriedade Q de *não ser um subconjunto discreto*, isto é, Q é a negação de P que denotaremos como $Q=\neg P$. Assim, foi observado que essa propriedade Q satisfaz o seguinte:

- Para todo espaço topológico (X,τ), se F é um subconjunto não fechado de X tal que para todo $D\subset F$, com D que não satisfaz a propriedade Q no espaço (X,τ) e, para todo $x\in\overline{F}\setminus F$, temos que $D\cup\{x\}$ também não satisfaz a propriedade Q no espaço (X,τ), então os espaços topológicos (X,τ) e $(X,[\tau\cup\{X\setminus F\}])$ possuem a mesma família de subconjuntos que satisfazem a propriedade Q.

Analogamente, escolhendo a propriedade adequada Q, chegamos num resultado similar no estudo da maximalidade com respeito à família de todas sequências convergentes e de todos os subconjuntos compactos.

Por outro lado, no estudo da maximalidade com respeito à família de todos os subconjuntos conexos, ocorre de maneira diferente, pois o estudo dessa família é feito com a propriedade Q de *ser um subconjunto conexo* e vale o seguinte resultado:

Afirmação 3.5.1. Existem um espaço topológico conexo (X,τ) e um subconjunto não fechado F, tais que para todo $H\subset F$, H não conexo no espaço (X,τ), e para todo $G\subset\overline{F}\setminus F$, $G\neq\emptyset$, temos que $H\cup G$ também não é conexo em (X,τ), mas os espaços (X,τ) e $(X,[\tau\cup\{X\setminus F\}])$ não possuem a mesma família de subconjuntos conexos.

Para fazer a prova da Afirmação 3.5.1 vamos precisar da seguinte definição e fatos extraídos do livro General Topology de Engelking (1989):

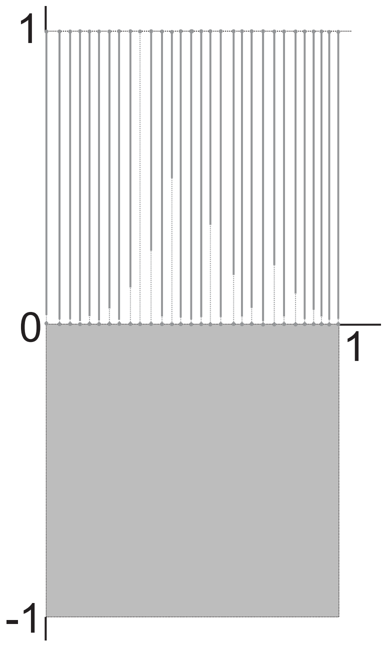
Definição 3.5.2. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $A,B\subset X$. Dizemos que os conjuntos A,B são **separados** se $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\emptyset$.

Fato 3.5.3. Seja C um subespaço conexo de um espaço topológico X, então para todo par de subconjuntos separados X_1, X_2 de X, tal que $C \subset (X_1 \cup X_2)$, temos que $C \subset X_1$ ou $C \subset X_2$.

Fato 3.5.4. Se a família $\{C_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ de subespaços conexos de um espaço topológico X tem interseção não vazia, então a união $\cup_{\alpha<\beta} C_\alpha$ é um subespaço conexo.

Fato 3.5.5. Se um subespaço C de um espaço topológico X é conexo, então para todo subespaço A de X, tal que $C \subset A \subset \overline{C}$, é conexo.

Demonstração da Afirmação 3.5.1. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $T = (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\}$, onde $\mathbb{Q}$ são os números racionais, como $\mathbb{Q}$ é enumerável escrevemos $T = \{(x_n, 0) : n < \omega\}$. Para todo $n < \omega$, o conjunto $L_n = \{x_n\} \times [\frac{1}{n+1}, 1]$ e, então $F = \cup_{n<\omega} L_n$. Finalmente considere $X = ((0,1) \times (-1,0)) \cup T \cup F$ como subespaço de $\mathbb{R}^2$, então:



$X = ((0,1) \times (-1,0)) \cup T \cup F$

- X é conexo. De fato, sejam U, V abertos em $\mathbb{R}^2$ tais que $X = (U \cap X) \dot{\cup} (V \cap X)$. Como $(0,1) \times (-1,0)$ é conexo em $\mathbb{R}^2$ e $T \subset \overline{(0,1) \times (-1,0)}^{\mathbb{R}^2}$, segue pelo Fato 3.5.5, que $(0,1) \times (-1,0) \cup T$ é conexo em $\mathbb{R}^2$. Agora, como $(0,1) \times (-1,0) \cup T$ está contido em X que é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, temos que $(0,1) \times (-1,0) \cup T$ é um subespaço conexo de X. Como os conjuntos $(U \cap X), (V \cap X)$ são separados em X, segue do Fato 3.5.3 que $(0,1) \times (-1,0) \cup T \subset (U \cap X)$ ou $(0,1) \times (-1,0) \cup T \subset (V \cap X)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $(0,1) \times (-1,0) \cup T \subset (U \cap X)$.

  Suponhamos que $V \cap X \neq \emptyset$. Então $V \cap F \neq \emptyset$ e existe $N < \omega$ tal que $V \cap L_N \neq \emptyset$. Como L_N é conexo em $\mathbb{R}^2$ e $L_N \subset X$, temos que $L_N \subset V \cap X$ e segue que $L_N \subset V$. Como L_N é compacto e V é um aberto de $\mathbb{R}^2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) \times [\frac{1}{N+1}, 1] \subset V$.

Por outro lado, $(x_N,0) \in U$ e, como U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $(x_N - \delta_1, x_N + \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2) \subset U$. Se $\theta = \min\{\varepsilon, \delta_1, \delta_2\}$ temos que $(x_N - \theta, x_N + \theta) \times (-\theta, \theta) \subset U$. Como o conjunto $\mathbb{Q} \cap (x_N - \theta, x_N + \theta)$ é infinito, existe $1 \leq M < \omega$ tal que $x_M \in (x_N - \theta, x_N + \theta)$ e $1/M < \theta$. Assim:

$$\left(L_M = \{x_M\} \times [\frac{1}{M+1}, 1]\right) \cap \left((x_N - \theta, x_N + \theta) \times (-\theta, \theta)\right) = \{x_M\} \times [\frac{1}{M+1}, \theta) \subset F$$

portanto $L_M \cap (U \cap X) \neq \emptyset$. Como $L_M \subset X$ e L_M é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, temos que L_M é conexo em X. Assim, pelo Fato 3.5.3, $L_M \subset (U \cap X)$. Por outro lado:

$$\left(L_M = \{x_M\} \times [\frac{1}{M+1}, 1]\right) \cap \left((x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) \times [\frac{1}{N+1}, 1]\right) \neq \emptyset$$

assim $L_M \cap (V \cap X) \neq \emptyset$ o que é absurdo pois, por hipótese, os conjuntos $(U \cap X)$ e $(V \cap X)$ são disjuntos. Portanto $V \cap X = \emptyset$ e, como U, V foram tomados arbitrários, segue que X é conexo.

- $\overline{F} \setminus F = (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\}$. Como $(0,1) \times (-1,0)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$, $(0,1) \times (-1,0) \subset X$, temos que $(0,1) \times (-1,0)$ é aberto em X. Como $F \cap \Big((0,1) \times (-1,0)\Big) = \emptyset$, temos que $(0,1) \times (-1,0) \subset X \setminus \overline{F}$ e, portanto, $\overline{F} \setminus F \subset \Big((\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\}\Big)$.

  Mostremos agora que $(\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\} \subset \overline{F} \setminus F$. Sejam $(x_p, 0) \in (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\}$ e W um aberto em $\mathbb{R}^2$ tal que $(x_p, 0) \in W$. Então existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que $(x_p - \varepsilon, x_p + \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \subset W$. Como $\mathbb{Q} \cap (x_p - \varepsilon, x_p + \varepsilon)$ é infinito, podemos escolher $q < \omega$ tal que $1/q < \delta$ e $x_q \in (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$, portanto:

$$\left(L_q = \{x_q\} \times [\frac{1}{q+1}, 1]\right) \cap ((x_p - \varepsilon, x_p + \varepsilon) \times (-\delta, \delta)) = \{x_q\} \times [\frac{1}{q+1}, \delta) \neq \emptyset,$$

  segue que $W \cap F \neq \emptyset$. Como $(x_p, 0)$ e W são arbitrários, temos que $(\mathbb{Q} \cap (0,1)) \times \{0\} \subset \overline{F}$.

- $(X, [\tau \cup \{X \setminus F\}])$ é desconexo pois como $(0,1) \times (0,1)$ é um aberto em $\mathbb{R}^2$ e como $F = ((0,1) \times (0,1)) \cap X$ temos que F é aberto em X. Assim temos a separação $X = (X \setminus F) \dot{\cup} F$.

- Sejam $G \subset \overline{F} \setminus F$, $G \neq \emptyset$ e $H \subset F$, $H \neq \emptyset$. Se $H \not\subset L_K$ para algum $K < \omega$, existem $M, N < \omega$ distintos tais que $H \cap L_N \neq \emptyset$ e $H \cap L_M \neq \emptyset$. Como x_N, x_M são distintos, podemos supor que $x_N < x_M$ e então escolhemos um número irracional t, tal que $x_N < t < x_M$. Considere os abertos em $\mathbb{R}^2$ $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < t\}$ e $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > t\}$. Então $L_N \subset U$, $L_M \subset V$ e $G \cup H = (U \cap (G \cup H)) \dot{\cup} (V \cap (G \cup H))$. Portanto $G \cup H$ é desconexo.

  Se $H \subset L_K$ para algum $K < \omega$, podemos escolher $0 < \varepsilon < 1/K$ e temos os abertos disjuntos em $\mathbb{R}^2$ $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \varepsilon\}$ e $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \varepsilon\}$. Assim, $H \subset O$, $G \subset W$ e $G \cup H = (O \cap (G \cup H)) \dot{\cup} (W \cap (G \cup H)) = G \dot{\cup} H$. Ou seja $G \cup H$ é desconexo. Assim, temos que $G \cup H$ é sempre desconexo em X e, como G, H foram tomados de forma arbitrária, o resultado segue.

□

Afirmação 3.5.6. A reta real $\mathbb{R}$ não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos conexos.

Demonstração. Seja τ a topologia usual de $\mathbb{R}$ e considere o conjunto $F = \{1/(n+1) : n < \omega\}$. Então F não é fechado, pois $\overline{F} \setminus F = \{0\}$. Assim $A = \mathbb{R} \setminus F \notin \tau$ e, portanto, τ está estritamente contida em $\sigma = [\tau \cup \{A\}]$. Queremos mostrar agora que os espaços $(\mathbb{R}, \tau)$ e $(\mathbb{R}, \sigma)$ têm a mesma família de subconjuntos conexos. Pela Observação 2.2.10, basta mostrar que todo subconjunto conexo de (X, τ) é também um subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, \sigma)$.

De fato, considere T um subconjunto conexo de (X, τ). Como $A \setminus \overset{\circ}{A} = \{0\}$, se $0 \notin T$ segue da Proposição 2.2.3 que T é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$. Por outro lado, como os únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos, temos que T é um intervalo e assim $T \cap (\infty^-, 0]$ e $T \cap [0, \infty^+)$ são também intervalos e, portanto, conexos em $\mathbb{R}$ pois são a interseção de intervalos.

Agora como $T \cap (\infty^-, 0] \cap (\mathbb{R} \setminus A) = T \cap (\infty^-, 0] \cap F = \emptyset$ segue que $T \cap (\infty^-, 0] \cap \overline{T \cap (\infty^-, 0] \cap F} = \emptyset \subset F$ e, como $T \cap (\infty^-, 0]$ é um intervalo e, portanto, conexo em $\mathbb{R}$, segue da Proposição 2.2.3 que $T \cap (\infty^-, 0]$ é conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$. Assim, se $T \cap (0, \infty^+) = \emptyset$ temos que $T = T \cap (\infty^-, 0]$ é conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$.

Considere o caso $T \cap (0, \infty^+) \neq \emptyset$. Como $T \cap [0, \infty^+)$ é um intervalo e $0 \in T \cap [0, \infty^+)$, existe $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ tal que $(0, b) \subset T \cap (0, \infty^+)$. Seja $W \in \sigma = [\tau \cup \{A\}]$ tal que $0 \in W$. Pela Proposição 2.2.3 podemos escrever $W = U \cup (V \cap A)$, onde $U, V \in \tau$. Se $0 \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(0, \varepsilon) \subset U$. Assim, $(0, \varepsilon) \cap (0, b) \subset U \cap (T \cap (0, \infty^+))$ e segue que $U \cap (T \cap (0, \infty^+)) \neq \emptyset$, pois $(0, \varepsilon) \cap (0, b) = (0, a)$, onde $a = \min\{\varepsilon, b\}$. Se $0 \in V \cap A$, temos que $0 \in V$. Assim existe $0 < \delta < b$ tal que $(0, \delta) \subset V$ e, como $(0, \delta) \subset T \cap (0, \infty^+)$, temos que $(0, \delta) \cap A \subset (V \cap A) \cap \Big(T \cap (0, \infty^+)\Big)$. Mas $(0, \delta) \cap A = (0, \delta) \setminus \{1/(n+1) : n < \omega\}$, portanto $(V \cap A) \cap \Big(T \cap (0, \infty^+)\Big) \neq \emptyset$. Assim, em qualquer caso, temos que $W \cap (T \cap (0, \infty^+)) \neq \emptyset$ e como W foi tomado arbitrário em σ, temos que $0 \in \overline{T \cap (0, \infty^+)}^{\sigma}$. Como $T \cap (0, \infty^+)$ é conexo em $\mathbb{R}$, pois é um intervalo, e como $0 \notin T \cap (0, \infty^+)$ segue da Proposição 2.2.3 que $T \cap (0, \infty^+)$ é conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$. Assim, do Fato 3.5.5, $T \cap [0, \infty^+)$ é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$. Agora, como $T = (T \cap (\infty^-, 0]) \cup (T \cap [0, \infty^+))$ é a união de dois subconjuntos conexos em $(\mathbb{R}, \sigma)$ e que tem um ponto em comum, segue do Fato 3.5.4, que T é conexo em $(\mathbb{R}, \sigma)$. □

Proposição 3.5.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico T_1 e $D \subset X$ discreto. Então o espaço $(X, [\tau \cup \{X \setminus D\}])$ tem a mesma família de subconjuntos conexos que (X, τ).

Demonstração. Se D for fechado, temos que $X \setminus D \in \tau$, logo $\tau = [\tau \cup \{X \setminus D\}]$ e o resultado segue. Se D não é fechado, segue da Observação 2.2.10 que é suficiente provar que todo subconjunto conexo em (X, τ) é também um subconjunto conexo em (X, σ), onde $\sigma = [\tau \cup \{A\}]$ e $A = X \setminus D$.

De fato, seja K um subconjunto conexo de (X,τ). Se K for um conjunto unitário $K=\{k\}$ ou $K=\emptyset$, segue imediatamente que K é conexo em (X,σ). Seja K um subconjunto com mais do que um elemento e suponhamos que K é desconexo em (X,σ). Então existem $L,E\in\sigma$ tais que $L\cap K\neq\emptyset$, $E\cap K\neq\emptyset$ e $K=(L\cap K)\dot{\cup}(E\cap K)$. Pela Proposição 2.2.3, podemos escrever $L=U\cup(V\cap A)$ e $E=O\cup(W\cap A)$, onde $U,V,O,W\in\tau$. Como $(L\cap K)$ e $(E\cap K)$ são disjuntos, temos que $(L\cap E)\cap K=\emptyset$, ou seja:

$$(L\cap E)\cap K=((U\cap O)\cup(U\cap W\cap A)\cup(V\cap A\cap O)\cup(V\cap W\cap A))\cap K=\emptyset.$$

Portanto:

$$(U\cap O)\cap K=(U\cap W\cap A)\cap K=(O\cap V\cap A)\cap K=(V\cap W\cap A)\cap K=\emptyset.$$

Se $(U\cap W)\cap K=(O\cap V)\cap K=(V\cap W)\cap K=\emptyset$, temos que $(U\cup V)\cap(O\cup W)\cap K=\emptyset$. Note que $L\subset(U\cup V)$, $E\subset(O\cup W)$, portanto $K=(U\cup V)\cap K\,\dot{\cup}\,(O\cup W)\cap K$ com $(U\cup V)\cap K\neq\emptyset$ e $(O\cup W)\cap K\neq\emptyset$. Logo K é desconexo em (X,τ), o que é absurdo. Então $U\cap W\cap K\neq\emptyset$ ou $O\cap V\cap K\neq\emptyset$ ou $V\cap W\cap K\neq\emptyset$.

Suponhamos que $V\cap W\cap K\neq\emptyset$. Como $(V\cap W\cap A)\cap K=\emptyset$ e $A=X\setminus D$, temos que $V\cap W\cap K\subset D$. Escolha $y\in V\cap W\cap K$. Como $y\in D$, existe $Y\in\tau$ tal que $y\in Y$ e $Y\cap D=\{y\}$. Considere $V\cap W\cap Y\in\tau$. Então $(V\cap W\cap Y)\cap K\subset Y\cap D=\{y\}$. Ou seja, $(V\cap W\cap Y)\cap K=\{y\}$ e, portanto, $K=(X\setminus\{y\})\cap K\,\dot{\cup}\,(V\cap W\cap Y)\cap K$. Como $(X\setminus\{y\})\cap K\neq\emptyset$ pois K não é unitário, segue que K é desconexo em (X,τ) o que é absurdo.

Analogamente chegamos num absurdo se $U\cap W\cap K\neq\emptyset$ ou $O\cap V\cap K\neq\emptyset$. $\square$

Corolário 3.5.8. Seja (X,τ) um espaço topológico T_1. Se X contém um subconjunto discreto não fechado, então (X,τ) não é maximal com respeito à família dos seus subconjuntos conexos.

CAPÍTULO

4

APLICAÇÕES E RESULTADOS ADICIONAIS

Neste capítulo são apresentados alguns resultados obtidos a partir das técnicas usadas no estudo da maximalidade com respeito à família dos subconjuntos discretos.

4.1 Conjuntos discretos e espaços κ-linearmente de Lindelöf

Sejam (X,τ) um espaço topológico e κ um cardinal infinito. Dizemos que X é linearmente de Lindelöf se toda cobertura aberta de X e linearmente ordenada pela inclusão, admite subcobertura de tamanho menor que κ. Nesta seção apresenta-se uma caracterização para os espaços κ-linearmente de Lindelöf via conjuntos discretos. Para isto precisa-se primeiro de algumas ferramentas.

Definição 4.1.1. Sejam (X,τ) um espaço topológico, β um ordinal e $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ uma família de subconjuntos discretos e não vazios de X. Dizemos que $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ é uma **cadeia discreta** de comprimento β se, para todo $0 < \gamma < \beta$, temos que $A_\gamma \subset (\cap_{\alpha<\gamma} A_\alpha^\perp)$. Dizemos também que a cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ colapsa se $\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp = \emptyset$.

Observação 4.1.2. Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1 e A um subconjunto discreto. Então o conjunto $A^\perp$ é fechado. De fato, pela Observação 3.1.9 temos que $A \cup A^\perp = \overline{A}$. Então, se $A^\perp$ não é fechado, temos que $\overline{A^\perp} \setminus A^\perp \subset A$. Assim se, $x \in \overline{A^\perp} \setminus A^\perp$, temos que $x \in A$ e, portanto, existe um aberto U, tal que $x \in U$ e $U \cap A = \{x\}$. Como $x \in \overline{A^\perp}$ temos que $U \cap A^\perp \neq \emptyset$. Note que $U \setminus \{x\}$ é aberto pois X é T_1. Assim, $U \setminus \{x\}$ é um aberto tal que $(U \setminus \{x\}) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ o que é absurdo.

Definição 4.1.3. Se X é um conjunto e $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é uma família de subconjuntos de X, dizemos que $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é **decrescente** se, $F_\alpha \supsetneq F_\theta$ para $\alpha < \theta < \beta$. Analogamente definimos $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ **crescente** se, $F_\alpha \subsetneq F_\theta$ para $\alpha < \theta < \beta$.

Lema 4.1.4. Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1 e $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ uma cadeia discreta. São válidas as seguintes afirmações:

1. $\{A_\alpha^\perp\}_{\alpha<\beta}$ é uma família decrescente de conjuntos fechados.

2. $\beta < |A_0^\perp|^+$, onde $|A_0^\perp|^+$ é o cardinal sucessor de $|A_0^\perp|$.

Demonstração. 1. Pela Observação 4.1.2 temos que os $A_\alpha^\perp$'s são fechados. Mostremos que os $A_\alpha^\perp$'s estão encaixados. Sejam, $\alpha_1, \alpha_2 < \beta$ tais que $\alpha_1 < \alpha_2$. Como $A_{\alpha_2} \subset (\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp)$ e $(\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp)$ é fechado, pois é interseção de conjuntos fechados, temos $\overline{A_{\alpha_2}} \subset (\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp)$. Assim, pela Observação 3.1.9, temos que $A_{\alpha_2} \cup A_{\alpha_2}^\perp \subset (\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp)$. Como $A_{\alpha_2} \cap A_{\alpha_2}^\perp = \emptyset$, segue que $A_{\alpha_2}^\perp \subsetneq (\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp)$. Por outro lado, $(\cap_{\alpha<\alpha_2} A_\alpha^\perp) \subset A_{\alpha_1}^\perp$, pois $\alpha_1 < \alpha_2$. Então $A_{\alpha_2}^\perp \subsetneq A_{\alpha_1}^\perp$.

2. Mostremos primeiro que os A_α's são disjuntos. De fato sejam $\alpha_1, \alpha_2 < \beta$, tais que $\alpha_1 < \alpha_2$. Como os $A_\alpha^\perp$'s estão encaixados, $A_{\alpha_1}^\perp \supset A_{\alpha_2}^\perp$ e como $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_1}^\perp = \emptyset$ e $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_2}^\perp \subset A_{\alpha_1}^\perp$, temos que $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \emptyset$.

   Mostremos agora que $\beta < |A_0^\perp|^+$, onde $|A_0^\perp|^+$ é o cardinal sucessor de $|A_0^\perp|$. Suponhamos que $\beta \geq |A_0^\perp|^+$. Como os A_α's são disjuntos, temos que:

$$\left|\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha\right| = \sum_{\alpha<\beta} |A_\alpha| \geq |A_0^\perp|^+.$$

   Por outro lado, pela definição de cadeia discreta, temos que $A_\alpha \subset (\cap_{\gamma<\alpha} A_\gamma^\perp) \subset A_0^\perp$, para todo $\alpha < \beta$. Logo $\cup_{\alpha<\beta} A_\alpha \subset A_0^\perp$ e assim $|A_0^\perp| \geq |\cup_{\alpha<\beta} A_\alpha| \geq |A_0^\perp|^+$. Mas isso é absurdo pois $|A_0^\perp| < |A_0^\perp|^+$.

□

Corolário 4.1.5. Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1 e $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ uma cadeia discreta em X. Então $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ está contida numa cadeia de comprimento menor que $|A_0^\perp|^+$ que colapsa.

Demonstração. Pelo Lema 4.1.4 temos que $\beta < |A_0^\perp|^+$, assim se $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ colapsa o resultado segue. Se $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ não colapsa, temos que $\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp \neq \emptyset$ e assim podemos escolher um subconjunto discreto e não vazio $A_\beta \subset (\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp)$. Se $A_\beta^\perp = \emptyset$ temos que $\cap_{\alpha<\beta+1} A_\alpha^\perp = \emptyset$ e, portanto, $\{A_\alpha : \alpha < \beta+1\}$ é a cadeia procurada. Suponhamos que $A_\beta^\perp \neq \emptyset$, como $\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp$ é fechado, pois é interseção de fechados, temos $\overline{A_\beta} \subset (\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp)$. Agora, pela Observação 3.1.9, $A_\beta^\perp \subset (\cap_{\alpha<\beta} A_\alpha^\perp)$. Assim, podemos escolher um subconjunto discreto e não vazio $A_{\beta+1} \subset A_\beta^\perp$. Como $(\cap_{\alpha<\beta+1} A_\alpha^\perp) = A_\beta^\perp$, segue que $\{A_\alpha : \alpha < \beta+1\}$ é uma cadeia discreta que contém $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$. Podemos assim continuar o processo até um ordinal $\theta < |A_0^\perp|^+$, tal que a cadeia $\{A_\alpha : \alpha < \theta\}$ colapsa. □

Proposição 4.1.6. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ uma família decrescente de conjuntos fechados. Se $M\subset X$ é tal que $M\cap F_\alpha\neq\emptyset$ para todo $\alpha<\beta$, vale um dos seguintes casos:

1. $M\cap F_\alpha\subset(\cap_{\alpha<\beta}F_\alpha)$ para algum $\alpha<\beta$.

2. $(\cap_{\alpha<\beta}F_\alpha)\cap\overline{M}\neq\emptyset$.

3. Existe um discreto bem ordenado $D=\{d_\alpha:\alpha<\phi\}$, com $\operatorname{cof}\phi=\operatorname{cof}\beta$, tal que $D\subset M$ e $\cap_{\rho<\phi}\overline{\{d_\alpha:\rho\leq\alpha<\phi\}}=\emptyset$.

4. Existe um discreto $A\subset M$ e um $\alpha<\beta$, tal que $A^\perp\supset\big(F_\alpha\setminus(\cap_{\alpha<\beta}F_\alpha)\big)\cap M$.

Demonstração. Considere o conjunto $I=\{\alpha<\beta:(F_\alpha\setminus F_{\alpha+1})\cap M\neq\emptyset\}$. Se I não é cofinal em β, temos que existe $\alpha<\beta$ tal que para todo $\alpha\leq\alpha<\beta$ temos que $(F_\alpha\setminus F_{\alpha+1})\cap M=\emptyset$. Mas $M\cap F_\alpha\neq\emptyset$ para todo $\alpha<\beta$. Então $M\cap F_\alpha\subset F_\alpha$ para todo $\alpha\leq\alpha<\beta$ e como a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente temos que $M\cap F_\alpha\subset(\cap_{\alpha<\theta}F_\alpha)$ e estamos no caso 1.

Suponhamos que I é cofinal em β. Escreva $I=\{\alpha_\delta:\delta<\gamma\}$ e escolha $x_{\alpha_0}\in F_{\alpha_0}$. Para todo $0<\delta<\gamma$, consideramos o seguinte conjunto:

$$M_\delta=\Big\{\eta\ :\ \delta<\eta<\gamma,\ \Big[F_{\alpha_\delta}\setminus\Big(F_{\alpha_\eta}\cup\{x_{\alpha_\iota}:\iota<\delta\}^\perp\Big)\Big]\cap M\neq\emptyset\Big\}$$

Se $M_\delta\neq\emptyset$ existe $\eta^*=\min M_\delta$ e podemos escolher:

$$x_{\alpha_\delta}\in\Big[F_{\alpha_\delta}\setminus\Big(F_{\alpha_{\eta^*}}\cup\{x_{\alpha_\iota}:\iota<\delta\}^\perp\Big)\Big]\cap M$$

Se $M_\delta\neq\emptyset$ para todo $\delta<\gamma$, temos um discreto bem ordenado $A=\{x_{\alpha_\delta}:\delta<\gamma\}$ tal que $A\subset M$ e o conjunto $\{\alpha_\delta:\delta<\gamma\}$ é cofinal em β e $x_{\alpha_\delta}\in F_{\alpha_\delta}$ para todo $\delta<\gamma$. Assim se considerarmos os conjuntos $A_\rho=\{x_{\alpha_\delta}:\rho\leq\delta<\gamma\}$, temos que $A_\rho\subset F_{\alpha_\rho}\cap M$ para todo $\rho<\gamma$. Assim $A_\rho\subset F_{\alpha_\rho}$, $A_\rho\subset M$, logo $\overline{A_\rho}\subset\overline{F_{\alpha_\rho}}$, $\overline{A_\rho}\subset\overline{M}$ e como $\overline{F_{\alpha_\rho}}=F_{\alpha_\rho}$, pois F_{α_ρ} é fechado, temos que $\overline{A_\rho}\subset F_{\alpha_\rho}\cap\overline{M}$, para todo $\rho<\gamma$. Portanto $\overline{A_\rho}\subset F_{\alpha_\rho}\cap\overline{M}$, para todo $\rho<\gamma$, logo $\cap_{\rho<\gamma}\overline{A_\rho}\subset(\cap_{\rho<\gamma}F_{\alpha_\rho})\cap\overline{M}$. Como o conjunto $\{\alpha_\rho:\rho<\gamma\}$ é cofinal em β, temos que $(\cap_{\rho<\gamma}F_{\alpha_\rho})=(\cap_{\alpha<\beta}F_\alpha)$, pois a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente. Assim $\cap_{\rho<\gamma}\overline{A_\rho}\subset(\cap_{\alpha<\beta}F_\alpha)\cap\overline{M}$ e, portanto se $\cap_{\rho<\gamma}\overline{A_\rho}\neq\emptyset$ estamos no caso 2 e, se $(\cap_{\rho<\gamma}\overline{A_\rho})=\emptyset$ estamos no caso 3.

Por outro lado, se $M_\delta=\emptyset$ para algum $0<\delta<\gamma$, temos que:

$$\Big[F_{\alpha_\delta}\setminus\Big(F_{\alpha_\eta}\cup\{x_{\alpha_\iota}:\iota<\delta\}^\perp\Big)\Big]\cap M=\emptyset$$

Portanto $F_{\alpha_\delta}\cap M\subset F_{\alpha_\eta}\cup\{x_{\alpha_\iota}:\iota<\delta\}^\perp$, para todo $\delta\leq\eta<\gamma$. Logo

$$F_{\alpha_\delta}\cap M\subset(\cap_{\delta\leq\eta<\gamma}F_{\alpha_\eta})\cup\{x_{\alpha_\iota}:\iota<\delta\}^\perp \tag{4.1}$$

Como o conjunto $\{\alpha_\eta : \delta \leq \eta < \gamma\}$ é cofinal em β e a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente, temos que $(\cap_{\delta\leq\eta<\gamma} F_{\alpha_\eta}) = (\cap_{\alpha<\beta} F_\alpha)$. Assim pela equação 4.1 temos que

$$F_{\alpha_\delta} \cap M \setminus \left(\cap_{\alpha<\beta} F_\alpha\right) \subset \{x_{\alpha_\iota} : \iota < \delta\}^\perp$$

Portanto $\left(F_{\alpha_\delta} \setminus (\cap_{\alpha<\beta} F_\alpha)\right) \cap M \subset \{x_{\alpha_\iota} : \iota < \delta\}^\perp$ e como o conjunto $A = \{x_{\alpha_\iota} : \iota < \delta\}$ é discreto por construção, estamos no caso 4. □

Definição 4.1.7. Sejam (X,τ) um espaço topológico e κ um cardinal infinito. Dizemos que X é **κ-linearmente Lindelöf** se toda cobertura aberta de X, linearmente ordenada pela inclusão, tem uma subcobertura de cardinalidade menor que κ.

No sentido da Definição 4.1.7, os espaços topológicos linearmente de Lindelöf são os espaços $\aleph_1$-linearmente de Lindelöf e os espaços compactos são os espaços $\aleph_0$-linearmente de Lindelöf.

Lema 4.1.8. Sejam (X,τ) um espaço topológico e κ um cardinal infinito. Então o espaço X é κ-linearmente Lindelöf se, e somente se, para toda família decrescente de conjuntos fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, com $\operatorname{cof}\beta \geq \kappa$, têm interseção não vazia.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ uma família decrescente de conjuntos fechados, tal que $\operatorname{cof}\beta \geq \kappa$. Suponhamos que $\cap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$. Considere uma sequência $\{\alpha_\rho : \rho < \operatorname{cof}\beta\}$ cofinal em β. Como a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente temos que $\cap_{\rho<\operatorname{cof}\beta} F_{\alpha_\rho} = \cap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $\beta = \operatorname{cof}\beta \geq \kappa$. Considere os abertos $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$, para todo $\alpha < \beta$. Então $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é uma cobertura aberta de X linearmente ordenada pela inclusão. De fato se $x \in X$ e $x \notin U_\alpha$, para todo $\alpha < \beta$, então $x \in F_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$, logo $x \in \cap_{\alpha<\beta} F_\alpha$, absurdo. Como X é κ-linearmente Lindelöf temos que existe uma subcobertura $\{U_{\alpha_\rho}\}_{\rho<\theta}$, de tamanho menor que κ. Então $\cap_{\rho<\theta} F_{\alpha_\rho} = \emptyset$ e $\theta < \kappa \leq \operatorname{cof}\beta$. Assim a sequência $\{\alpha_\rho : \rho < \theta\}$ não é cofinal em β e, portanto, $\cap_{\rho<\theta} F_{\alpha_\rho} \neq \emptyset$, absurdo.

$(\Leftarrow)$ Seja $\{V_\eta\}_{\eta<\mu}$ uma cobertura aberta e crescente de X. Suponhamos que $\{V_\eta\}_{\eta<\mu}$ não admite subcobertura de cardinalidade menor que κ. Assim, podemos supor os V_η's distintos. Considere uma sequência $\{\eta_\rho : \rho < \operatorname{cof}\mu\}$ cofinal em μ. Como a família $\{V_\eta\}_{\eta<\mu}$ é crescente temos que $\cup_{\rho<\operatorname{cof}\mu} V_{\eta_\rho} = \cup_{\eta<\mu} V_\eta = X$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $\mu = \operatorname{cof}\mu \geq \kappa$. Considerando os conjuntos $F_\eta = X \setminus V_\eta$ temos a família decrescente de conjuntos fechados $\{F_\eta\}_{\eta<\mu}$ com $\operatorname{cof}\mu \geq \kappa$. Por outro lado $\cap_{\eta<\mu} F_\eta = \cap_{\eta<\mu} (X \setminus V_\eta) = X \setminus (\cup_{\eta<\mu} V_\eta)$ e como $\cup_{\eta<\mu} V_\eta = X$, segue $\cap_{\eta<\mu} F_\eta = \emptyset$, o que é absurdo por hipótese. □

Corolário 4.1.9. Sejam (X,τ) um espaço topológico e κ um cardinal infinito. Se X não é κ-linearmente Lindelöf vale um dos seguintes casos:

1. Existe um discreto bem ordenado $D = \{d_\alpha : \alpha < \phi\}$, com $\operatorname{cof}\phi \geq \kappa$ tal que $\cap_{\rho<\beta} \overline{D_\rho} = \emptyset$, onde $D_\rho = \{d_\alpha : \rho \leq \alpha < \phi\}$.

2. Existe uma cadeia discreta, com a cofinalidade do comprimento maior ou igual que κ, que colapsa.

Demonstração. Como X não é κ-linearmente Lindelöf, segue do Lema 4.1.8 que existe uma família decrescente de conjuntos fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, com $\operatorname{cof}\beta \geq \kappa$, tal que $\bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$. Considere $M = F_0$, então $M \cap F_\alpha = F_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha < \beta$. Assim estamos nas condições da Proposição 4.1.6 e como $\bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$, vale um dos seguintes casos:

(a) Existe um discreto bem ordenado $D = \{d_\alpha : \alpha < \phi\}$, com $\operatorname{cof}\phi = \operatorname{cof}\beta$, tal que $D \subset M$ e $\bigcap_{\rho<\phi} \overline{\{d_\alpha : \rho \leq \alpha < \phi\}} = \emptyset$.

(b) Existe um discreto $A_0 \subset F_0$ e um $\alpha_0 < \beta$, tal que $A_0^\perp \supset F_{\alpha_0}$.

Se vale (a), terminamos. Se vale (b), podemos considerar a família decrescente de conjuntos fechados $\{F_\alpha\}_{\alpha_0 \leq \alpha<\beta}$ com $\operatorname{cof}\{\alpha : \alpha_0 \leq \alpha < \beta\} = \operatorname{cof}\beta \geq \kappa$. Assim, se $M = F_{\alpha_0}$, temos que $M \cap F_\alpha = F_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha_0 \leq \alpha < \beta$ e estamos de novo nas condições da Proposição 4.1.6. Como a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente, temos que $\bigcap_{\alpha_0<\alpha<\beta} F_\alpha = \bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$ e, portanto vale (a) ou existe um discreto $A_1 \subset F_{\alpha_0}$ e um $\alpha_0 < \alpha_1 < \beta$, tais que $A_1^\perp \supset F_{\alpha_1}$. Se vale (a) acabou. Se não, temos que A_0, A_1 são conjuntos discretos tais que $A_1 \subset F_{\alpha_0} \subset A_0^\perp$ e, portanto $\{A_0, A_1\}$ é uma cadeia discreta.

Seja μ um ordinal e suponha construída a cadeia discreta $\{A_\eta : \eta < \mu\}$, com $A_{\eta+1} \subset F_{\alpha_\eta}$, para todo $\eta < \mu$. Logo $\overline{A_{\eta+1}} \subset F_{\alpha_\eta}$, pois F_{α_η} é fechado. Pela Observação 3.1.9, $A_{\eta+1}^\perp \subset F_{\alpha_\eta}$, para todo $\eta < \mu$. Assim, $\bigcap_{\eta<\mu} A_{\eta+1}^\perp \subset (\bigcap_{\eta<\mu} F_{\alpha_\eta})$. Agora, pelo Lema 4.1.4, temos que a família $\{A_\eta^\perp\}_{\eta<\mu}$ é decrescente. Logo $\bigcap_{\eta<\mu} A_{\eta+1}^\perp = \bigcap_{\eta<\mu} A_\eta^\perp$ e, portanto, $\bigcap_{\eta<\mu} A_\eta^\perp \subset (\bigcap_{\eta<\mu} F_{\alpha_\eta})$. Se o conjunto $\{\alpha_\eta : \eta < \mu\}$ é cofinal em β, temos que $\operatorname{cof}\mu = \operatorname{cof}\beta$ e, como a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente, temos que $\bigcap_{\eta<\mu} F_{\alpha_\eta} = \bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$. Portanto, $\bigcap_{\eta<\mu} A_\eta^\perp \subset (\bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha)$ e segue que $\bigcap_{\eta<\mu} A_\eta^\perp = \emptyset$. Assim, $\{A_\eta : \eta < \mu\}$ é uma cadeia discreta com $\operatorname{cof}\mu = \operatorname{cof}\beta > \kappa$ que colapsa.

Se o conjunto $\{\alpha_\eta : \eta < \mu\}$ não é cofinal em β, temos que $\sup\{\alpha_\eta : \eta < \mu\} < \beta$. Escrevendo $\alpha_\mu = \sup\{\alpha_\eta : \eta < \mu\}$ temos que $\bigcap_{\eta<\mu} F_{\alpha_\eta} \supset F_{\alpha_\mu}$, pois a família $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ é decrescente. Assim $\bigcap_{\eta<\mu} A_\eta^\perp \supset F_{\alpha_\mu}$ e temos a família decrescente de conjuntos fechados $\{F_{\alpha_\mu}\}_{\alpha_\mu \leq \alpha<\beta}$, com $\operatorname{cof}\{\alpha : \alpha_\mu \leq \alpha < \beta\} = \operatorname{cof}\beta \geq \kappa$. Se $M = F_{\alpha_\mu}$, temos que $M \cap F_\alpha = F_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha_\mu \leq \alpha < \beta$ e assim estamos nas condições da Proposição 4.1.6. Portanto vale (a) ou existem um discreto $A_\mu \subset F_{\alpha_\mu}$ e um $\alpha_\mu < \alpha_{\mu+1} < \beta$, tais que $A_\mu^\perp \supset F_{\alpha_{\mu+1}}$. Se vale (a) terminamos. Se não, $\{A_\eta : \eta < \mu + 1\}$ é uma cadeia discreta, pois $A_\mu \subset F_{\alpha_\mu} \subset (\bigcap_{\eta<\mu} A_\mu^\perp)$. Como $\{F_\alpha\}_{\alpha_{\mu+1} \leq \alpha<\beta}$ é uma família decrescente de conjuntos fechados com $\operatorname{cof}\{\alpha : \alpha_{\mu+1} \leq \alpha < \beta\} = \operatorname{cof}\beta$, podemos continuar o processo. Se não vale (a) em cada iteração do processo, podemos construir uma cadeia discreta $\{A_\eta : \eta < \mu^*\}$, tal que o conjunto $\{\alpha_\eta : \eta < \mu^*\}$ é cofinal em β e assim $\operatorname{cof}\mu^* = \operatorname{cof}\beta \geq \kappa$ e $\bigcap_{\eta<\mu^*} F_{\alpha_\eta} = \bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha = \emptyset$. Como $\bigcap_{\eta<\mu^*} A_\eta^\perp \subset (\bigcap_{\eta<\mu^*} F_{\alpha_\eta})$ segue que $\bigcap_{\eta<\mu^*} A_\eta^\perp = \emptyset$, ou seja a cadeia discreta $\{A_\eta : \eta < \mu^*\}$ colapsa. $\square$

Teorema 4.1.10. Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1 e κ um cardinal infinito. Então X é κ-linearmente Lindelöf se, e somente se, toda cadeia discreta com a cofinalidade do comprimento maior ou igual que κ, essa cadeia não colapsa e para todo subconjunto discreto e bem ordenado $D = \{d_\alpha : \alpha < \phi\}$, com $\operatorname{cof}\phi \geq \kappa$ temos que $\cap_{\rho<\beta}\overline{D_\rho} \neq \emptyset$, onde $D_\rho = \{d_\alpha : \rho \leq \alpha < \phi\}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\{A_\eta : \eta < \mu\}$ uma cadeia discreta em X com $\operatorname{cof}\mu \geq \kappa$. Como X é T_1, segue do Lema 4.1.4 que $\{A_\eta^\perp\}_{\eta<\mu}$ é uma família decrescente de conjuntos fechados. Assim, pelo Lema 4.1.8, temos que $\cap_{\eta<\mu}A_\eta^\perp \neq \emptyset$. Ou seja, a cadeia $\{A_\eta : \eta < \mu\}$ não colapsa. Por outro lado, se $D = \{d_\alpha : \alpha < \phi\}$ é um discreto bem ordenado com $\operatorname{cof}\phi \geq \kappa$ e $D_\rho = \{d_\alpha : \rho \leq \alpha < \phi\}$ para todo $\rho < \phi$, temos que a família $\{\overline{D_\rho}\}_{\rho<\phi}$ é uma família decrescente de conjuntos fechados. Como X é κ-linearmente de Lindelöf, segue do Lema 4.1.8 que $\cap_{\rho<\beta}\overline{D_\rho} \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) A volta segue diretamente do Corolário 4.1.9.

□

4.2 Construindo uma topologia para uma família de subconjuntos discretos

Dados um conjunto X e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X, deseja-se construir uma topologia σ sobre X, tal que a família $\mathscr{A}$ seja a família de todos os subconjuntos discretos e o espaço (X,σ) seja maximal com respeito a esta família. Para fazer isso precisa-se primeiro conhecer algumas características gerais das famílias de subconjuntos discretos.

Definição 4.2.1. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathscr{A}$ é **fechada para baixo** se, para todo $A \in \mathscr{A}$ e para todo $B \subset A$, temos que $B \in \mathscr{A}$.

Lema 4.2.2. Sejam (X,τ) um espaço topológico e $\mathscr{D}$ a família de todos os subconjuntos discretos de X. Então a família $\mathscr{D}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. A família $\mathscr{D}$ é fechada para baixo.

2. Se $A\cup B,\ B\cup C,\ A\cup C\ \in \mathscr{D}$, então $A\cup B\cup C \in \mathscr{D}$.

Demonstração. 1. Segue diretamente da definição de subconjunto discreto.

2. Escolha um $x \in A\cup B\cup C$. Sem perda de generalidade suponhamos que $x \in A$. Como $A\cup B,\ A\cup C\ \in \mathscr{D}$, existem U_B e $U_C\ \in \tau$ tais que $x \in U_B\cap U_C$, $U_B\cap(A\cup B) = \{x\}$ e $U_C\cap(A\cup C) = \{x\}$. Tomando $U = U_B\cap U_C$ temos que $U\cap((A\cup B)\cup(A\cup C)) = \{x\}$, ou seja $U\cap(A\cup B\cup C) = \{x\}$ e, portanto, $A\cup B\cup C$ é discreto.

□

Para construir a topologia desejada vamos precisar da terminologia utilizada na subseção 3.1, mas com respeito a uma família arbitrária de subconjuntos.

Definição 4.2.3. (KURATOWSKI, 1966, p. 38) Sejam X um conjunto e $\mathscr{T}^*: \wp(X) \to \wp(X)$ uma função, onde $\wp(X) = \{A : A \subset X\}$ é o conjunto das partes de X. Dizemos que $\mathscr{T}^*$ é um **operador fecho de Kuratowski** se, para todo $A, B \subset X$:

1. $\mathscr{T}^*(\emptyset) = \emptyset$
2. $B \subset \mathscr{T}^*(B)$
3. $\mathscr{T}^*(A \cup B) = \mathscr{T}^*(A) \cup \mathscr{T}^*(B)$
4. $\mathscr{T}^*(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^*(A)$

Observação 4.2.4. Se X é um conjunto e $\mathscr{T}^*: \wp(X) \to \wp(X)$ é um operador fecho de Kuratowski, temos que $\mathscr{T}^*$ induz uma topologia no conjunto X, da seguinte forma: a família de todos os conjuntos fechados de X são $\mathscr{F} = \{A \subset X : \mathscr{T}^*(A) = A\}$ (KURATOWSKI, 1966, p. 43). Como $\mathscr{T}^*(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^*(A)$ para todo $A \subset X$, temos que: $\{\mathscr{T}^*(B) : B \subset X\} \subset \mathscr{F}$. Se $A \in \mathscr{F}$, temos que $A = \mathscr{T}^*(A)$, logo $A \in \{\mathscr{T}^*(B) : B \subset X\}$. Assim $\mathscr{F} = \{\mathscr{T}^*(B) : B \subset X\}$. Se $B \subset X$, temos que o fecho de B é dado por $\overline{B} = \bigcap\{F : F \in \mathscr{F} \text{ e } F \supset B\}$ i.e., a interseção de todos os conjuntos fechados que o contém. Vamos ver que $\overline{B} = \mathscr{T}^*(B)$. De fato, como $\mathscr{T}^*(B)$ é um fechado que contém B, temos que $\overline{B} \subset \mathscr{T}^*(B)$. Por outro lado, se F é um fechado que contém B temos que $F = \mathscr{T}^*(P)$ para algum $P \subset X$. Então $B \subset \mathscr{T}^*(P)$ e, portanto, $\mathscr{T}^*(B) \subset \mathscr{T}^*(\mathscr{T}^*(P)) = \mathscr{T}^*(P)$ (KURATOWSKI, 1966, p. 39). Assim, $\mathscr{T}^*(B) \subset F$ e, portanto, $\mathscr{T}^*(B) \subset \bigcap\{F : F \in \mathscr{F} \text{ e } F \supset B\} = \overline{B}$.

Definição 4.2.5. Sejam X um conjunto e $\mathscr{T}: \wp(X) \to \wp(X)$ uma função, onde $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X. Dizemos que T é um **pré-operador fecho de Kuratowski** se, para todo $A, B \subset X$:

1. $\mathscr{T}(\emptyset) = \emptyset$
2. $B \subset \mathscr{T}(B)$
3. $\mathscr{T}(A \cup B) = \mathscr{T}(A) \cup \mathscr{T}(B)$

Lema 4.2.6. Sejam X um conjunto e $\mathscr{T}: \wp(X) \to \wp(X)$ um pré-operador fecho de Kuratowski. Então existe um operador fecho de Kuratowski $\mathscr{T}^*$, associado a $\mathscr{T}$, dado pelas iterações de $\mathscr{T}$.

Demonstração. Como $B \subset \mathscr{T}(B)$, para todo $B \subset X$, segue da Observação 3.1.11, que para todo ordinal κ, podemos definir a κ-ésima iteração de $\mathscr{T}$ sobre B como $\mathscr{T}^\kappa(B) = \mathscr{T}(\cup_{\alpha<\kappa} \mathscr{T}^\alpha(B))$ e para todo $B \subset X$ existe um ordinal κ_B, tal que $\mathscr{T}(\cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^\alpha(B)) = \cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^\alpha(B)$. Assim para todo ordinal $\kappa \geq \kappa_B$ temos que $\mathscr{T}^\kappa(B) = \cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^\alpha(B)$ e, como $\{\kappa_B : B \subset X\}$ é um conjunto de ordinais, existe $\kappa^* = \sup\{\kappa_B : B \subset X\}$. Logo podemos definir o operador $\mathscr{T}^* : \wp(X) \to \wp(X)$, associado a $\mathscr{T}$ da seguinte forma: $\mathscr{T}^*(B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(B) = \cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^{\alpha}(B)$ para todo $B \subset X$.

Afirmação 4.2.7. O operador $\mathscr{T}^*$ é um operador fecho de Kuratowski.

Basta mostrar que $\mathscr{T}^*$ satisfaz as condições 1, 2, 3 e, além disso, $\mathscr{T}^*(\mathscr{T}^*(B)) = \mathscr{T}^*(B)$, para todo $B \in \wp(X)$.

(a) Como $\mathscr{T}(\emptyset) = \emptyset$ temos que $\mathscr{T}^{\kappa}(\emptyset) = \emptyset$ para todo ordinal κ. Assim $\mathscr{T}^*(\emptyset) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Seja $B \in \wp(X)$. Pela definição de $\mathscr{T}^*$ temos que $\mathscr{T}^*(B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(B) = \cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^{\alpha}(B)$. Como $\mathscr{T}$ satisfaz a condição 2, temos que $B \subset (\cup_{\alpha<\kappa_B} \mathscr{T}^{\alpha}(B))$ e portanto $B \subset \mathscr{T}^*(B)$.

(c) Sejam $A, B \in \wp(X)$. Pela propriedade 3 temos que $\mathscr{T}(A \cup B) = \mathscr{T}(A) \cup \mathscr{T}(B)$. Seja κ um ordinal e suponhamos que $\mathscr{T}^{\alpha}(A \cup B) = \mathscr{T}^{\alpha}(A) \cup \mathscr{T}^{\alpha}(B)$, para todo $\alpha < \kappa$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}^{\kappa}(A \cup B) &= \mathscr{T}\left(\cup_{\alpha<\kappa}\mathscr{T}^{\alpha}(A \cup B)\right) \\
&= \mathscr{T}\left(\cup_{\alpha<\kappa}\, \mathscr{T}^{\alpha}(A) \cup \mathscr{T}^{\alpha}(B)\right) \\
&= \mathscr{T}\left(\cup_{\alpha<\kappa}\mathscr{T}^{\alpha}(A)\ \cup\ \cup_{\alpha<\kappa}\mathscr{T}^{\alpha}(B)\right) \\
&= \mathscr{T}\left(\cup_{\alpha<\kappa}\mathscr{T}^{\alpha}(A)\right)\ \cup\ \mathscr{T}\left(\cup_{\alpha<\kappa}\mathscr{T}^{\alpha}(B)\right) \\
&= \mathscr{T}^{\kappa}(A) \cup \mathscr{T}^{\kappa}(B)
\end{aligned}$$

Assim, por indução transfinita, temos que $\mathscr{T}^{\kappa}(A \cup B) = \mathscr{T}^{\kappa}(A) \cup \mathscr{T}^{\kappa}(B)$, para todo ordinal κ. Como $\mathscr{T}^*(A \cup B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(A \cup B)$, $\mathscr{T}^*(A) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(A)$ e $\mathscr{T}^*(B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(B)$, temos que:

$$\mathscr{T}^*(A \cup B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(A \cup B) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(A) \cup \mathscr{T}^{\kappa^*}(B) = \mathscr{T}^*(A) \cup \mathscr{T}^*(B)$$

(d) Seja $A \in \wp(X)$, como $\mathscr{T}^*(A) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(A) = \cup_{\alpha<\kappa_A} \mathscr{T}^{\alpha}(A)$, segue da definição de κ_A que $\mathscr{T}(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^*(A)$. Logo, $\mathscr{T}^{\kappa}(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^*(A)$ para todo ordinal κ. Assim $\mathscr{T}^*(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^{\kappa^*}(\mathscr{T}^*(A)) = \mathscr{T}^*(A)$.

Assim $\mathscr{T}^*$ é um operador fecho de Kuratowski. $\square$

Definição 4.2.8. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X. Para cada $B \subset X$, o **conjunto ortogonal** de B com respeito à família $\mathscr{A}$ é dado por:

$$B(\mathscr{A})^{\perp} = \{x \in (X \setminus B) : \exists A \in \mathscr{A}, A \neq \emptyset, A \subset B,\ A \cup \{x\} \notin \mathscr{A}\}.$$

Podemos também definir o operador $\mathscr{A} : \wp(X) \to \wp(X)$, como sendo $\mathscr{A}(B) = B \cup B(\mathscr{A})^{\perp}$ para todo $B \in \wp(X)$.

Lema 4.2.9. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X tais que a família $\mathscr{A}$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathscr{A}$ é fechada para baixo.

2. Se $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C \in \mathscr{A}$, então $A \cup B \cup C \in \mathscr{A}$.

Então o operador $\mathscr{A} : \wp(X) \to \wp(X)$, da Definição 4.2.8 é um pré-operador fecho de Kuratowski.

Demonstração. As condições $\mathscr{A}(\emptyset) = \emptyset$ e $B \subset \mathscr{A}(B)$ para todo $B \in \wp(X)$, seguem diretamente da definição de $\mathscr{A}$. Mostraremos que $\mathscr{A}(A \cup B) = \mathscr{A}(A) \cup \mathscr{A}(B)$, para todo $A, B \subset X$. Sejam $A, B \subset X$. Se $x \in (A \cup B)(\mathscr{A})^{\perp}$, temos que $x \in X \setminus (A \cup B)$ e existe $D \in \mathscr{A}$ tal que $D \subset (A \cup B)$ e $D \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$. Considere os conjuntos $(D \cap A), (D \cap B)$ e $\{x\}$ tais que

$$D \cup \{x\} = ((D \cap A) \cup \{x\}) \cup ((D \cap B) \cup \{x\}) \cup ((D \cap A) \cup (D \cap B)).$$

Como $D = (D \cap A) \cup (D \cap A)$, segue da Condição 2 que $(D \cap A) \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$ ou $(D \cap B) \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$. Assim, $x \in A(\mathscr{A})^{\perp}$ ou $x \in B(\mathscr{A})^{\perp}$ e, portanto, $(A \cup B)(\mathscr{A})^{\perp} \subset A(\mathscr{A})^{\perp} \cup B(\mathscr{A})^{\perp}$. Logo

$$\mathscr{A}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)(\mathscr{A})^{\perp} \subset (A \cup A(\mathscr{A})^{\perp}) \cup (B \cup B(\mathscr{A})^{\perp}) = \mathscr{A}(A) \cup \mathscr{A}(B)$$

Por outro lado, se $x \in \mathscr{A}(A)$, temos que $x \in A$ ou $x \in A(\mathscr{A})^{\perp}$. Se $x \in A$, temos que $x \in (A \cup B)$ e portanto $x \in \mathscr{A}(A \cup B)$. Se $x \in A(\mathscr{A})^{\perp}$, temos que $x \in X \setminus A$ e existe $D \in \mathscr{A}$, $D \subset A$, tal que $D \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$. Se $x \notin (A \cup B)(\mathscr{A})^{\perp}$, segue da Definição 4.2.8 que $D \cup \{x\} \subset (A \cup B)$ e portanto $x \in B$, logo $x \in \mathscr{A}(A \cup B)$. Assim, $\mathscr{A}(A) \subset \mathscr{A}(A \cup B)$. Analogamente mostra-se que $\mathscr{A}(B) \subset \mathscr{A}(A \cup B)$, logo $\mathscr{A}(A) \cup \mathscr{A}(B) \subset \mathscr{A}(A \cup B)$ e segue que a condição (c) é verdadeira. □

Proposição 4.2.10. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de subconjuntos de X, tais que a família $\mathscr{A}$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathscr{A}$ é fechada para baixo.

2. Se $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C \in \mathscr{A}$, então $A \cup B \cup C \in \mathscr{A}$.

3. Se[1] $B \subset X$ e $\forall b \in B,\ b \notin (B \setminus \{b\})(\mathscr{A})^{\perp}$, então $B \in \mathscr{A}$.

Então existe uma topologia $\tau_{\mathscr{A}}$ sobre X tal que o espaço $(X, \tau_{\mathscr{A}})$ é fracamente discretamente gerado e $\mathscr{A}$ é a família de todos os seus subconjuntos discretos.

Demonstração. Pelo Lema 4.2.9, temos que o operador $\mathscr{A} : \wp(X) \to \wp(X)$ da Definição 4.2.8 é um pré-operador fecho de Kuratowski. Assim, pelo Lema 4.2.6, existe um operador de Kuratowski associado $\mathscr{A}^* : \wp(X) \to \wp(X)$. Portanto, pela Observação 4.2.4, temos que $\mathscr{A}^*$ induz uma topologia $\tau_{\mathscr{A}}$ sobre X que podemos escrever como $\tau_{\mathscr{A}} = \{X \setminus \mathscr{A}^*(B) : B \subset X\}$ e tal que $\overline{B}^{\tau_{\mathscr{A}}} = \mathscr{A}^*(B)$ para todo $B \subset X$.

Seja $\mathscr{D}$ a família de todos os subconjuntos discretos do espaço $(X, \tau_{\mathscr{A}})$. Queremos provar que $\mathscr{D} = \mathscr{A}$. De fato:

[1] Definição 4.2.8

- $(\mathscr{A} \subset \mathscr{D})$ Seja $A \in \mathscr{A}$ e $x \in A$. Se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}^{\tau_{\mathscr{A}}}$ temos que existe $A' \subset A \setminus \{x\}$ com $A' \in \mathscr{A}$ tal que $A' \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$. Mas $A' \cup \{x\} \subset A$ e $\mathscr{A}$ é fechada para baixo, então $A' \cup \{x\} \in \mathscr{A}$, o que é absurdo.

- $(\mathscr{D} \subset \mathscr{A})$ Sejam $D \in \mathscr{D}$ e $d \in D$. Como D é discreto, $d \notin \overline{D \setminus \{d\}}^{\tau_{\mathscr{A}}} = \mathscr{A}^*(D \setminus \{d\})$. Note que $\mathscr{A}^*(D \setminus \{d\}) \supset \mathscr{A}(D \setminus \{d\})$. Como $\mathscr{A}(D \setminus \{d\}) = (D \setminus \{d\}) \cup (D \setminus \{d\})(\mathscr{A})^{\perp}$, temos que $d \notin (D \setminus \{d\})(\mathscr{A})^{\perp}$ e, por hipótese, $D \in \mathscr{A}$.

Finalmente para ver que $(X, \tau_{\mathscr{A}})$ é fracamente discretamente gerado, considere um subconjunto não fechado $F \subset X$.Então $\mathscr{A}^*(F) \neq F$ e em particular $\mathscr{A}(F) \neq F$. Portanto $F(\mathscr{A})^{\perp} \neq \emptyset$. Então existe $A \in \mathscr{A}$, $A \subset F$ e $x \in X \setminus F$ tal que $A \cup \{x\} \notin \mathscr{A}$. Assim A é um subconjunto discreto e $A \cup \{x\}$ não é discreto, portanto $x \in \overline{A}^{\tau_{\mathscr{A}}}$. □

Teorema 4.2.11. Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathscr{D}$ a família de todos os seus subconjuntos discretos. Então X é fracamente discretamente gerado se, e somente se, $\tau = \tau_{\mathscr{D}}$.

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço fracamente discretamente gerado. Pelo Lema 4.2.2 e a Observação 3.1.9, a família $\mathscr{D}$ satisfaz as condições $1, 2$ e 3 da Proposição 4.2.10. Então podemos construir a topologia $\tau_{\mathscr{D}}$ para X tal que $\mathscr{D}$ é a família dos subconjuntos discretos do espaço fracamente discretamente gerado $(X, \tau_{\mathscr{D}})$. Assim, pela Proposição 3.1.3, é suficiente mostrar que $\tau \subset \tau_{\mathscr{D}}$. De fato, se $U \in \tau$, então $F = X \setminus U$ é fechado em (X, τ). Assim, para cada $A \in \mathscr{D}$ com $A \subset F$ e para cada $x \in X \setminus F$ temos que $A \cup \{x\} \in \mathscr{D}$. Desta forma, temos $F(\mathscr{A})^{\perp} = \emptyset$, logo $\mathscr{A}(F) = F$ e, portanto $\mathscr{A}^*(F) = F$. Assim $F \in \mathscr{F}_{\mathscr{D}}$ e $X \setminus F = U \in \tau_{\mathscr{D}}$.

Por outro lado se $\tau = \tau_{\mathscr{D}}$, segue da Proposição 4.2.10, que o espaço (X, τ) é fracamente discretamente gerado. □

4.3 Sobre os subconjuntos raros

No estudo de espaços discretamente gerados, uma propriedade que aparece naturalmente é quando um ponto está no fecho de algum subconjunto discreto. A partir disso, é natural perguntar sobre o análogo em relação aos subconjuntos raros.

Definição 4.3.1. (Ver por exemplo em Willard (1970)) Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é localmente conexo se todo elemento $x \in X$, possui uma base de vizinhanças de conjuntos abertos e conexos.

Teorema 4.3.2. Seja (X, τ) um espaço topológico de Hausdorff, localmente conexo e sem pontos isolados. Então todo ponto de X está no fecho de um subconjunto raro que não contém o ponto.

Demonstração. Seja $x \in X$. Como X é localmente conexo, podemos escolher um conjunto aberto e conexo W que contém x. Como X não têm pontos isolados, podemos escolher $y_0 \in W$ tal que $y_0 \neq x$. Como X é Hausdorff, existe um conjunto aberto $V_0 \subset W$ tal que $y_0 \in V_0$ e $x \notin \overline{V_0}$.

Seja $\beta > 0$ um ordinal arbitrário e suponha já construídos os V_α's para cada $\alpha < \beta$. Se $x \notin \overline{\cup_{\alpha<\beta} V_\alpha}$, podemos escolher $y_\beta \in W \setminus \overline{\cup_{\alpha<\beta} V_\alpha}$ tal que $y_\beta \neq x$, e um conjunto aberto V_β tal que $y_\beta \in V_\beta \subset W \setminus \overline{\cup_{\alpha<\beta} V_\alpha}$ e $x \notin \overline{V_\beta}$. Assim podemos continuar o processo até um ordinal κ tal que $x \in \overline{\cup_{\alpha<\kappa} V_\alpha} \setminus \cup_{\alpha<\kappa} \overline{V_\alpha}$.

Consideremos a seguinte coleção de conjuntos: $A_\alpha = (\overline{V_\alpha} \setminus V_\alpha)$, para cada $\alpha < \kappa$. Temos os seguintes resultados:

Fato 4.3.3. $A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.

Suponhamos que $A_\alpha = (\overline{V_\alpha} \setminus V_\alpha) \cap W = \emptyset$ para algum $\alpha < \kappa$. Como $V_\alpha \subset W$ temos que $\overline{V_\alpha} \cap W = V_\alpha$. Portanto V_α é um conjunto aberto e fechado em W e como $x \notin \overline{V_\alpha} \supset V_\alpha$, segue que $\emptyset \neq V_\alpha \neq W$, mas isso é um absurdo pois W é conexo.

Fato 4.3.4. Se $A = \cup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, então para cada $\alpha < \kappa$, temos que $\overline{A} \cap V_\alpha = \emptyset$.

Vamos supor que $\overline{A} \cap V_\alpha \neq \emptyset$ para algum $\alpha < \kappa$. Como V_α é um conjunto aberto, segue que $A \cap V_\alpha \neq \emptyset$. Assim existe um $\beta < \kappa$ tal que $(\overline{V_\beta} \setminus V_\beta) \cap V_\alpha \neq \emptyset$, então $\beta \neq \alpha$ e, como V_α é um conjunto aberto, $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Mas isso é absurdo, pois pela construção dos V_α's temos que $V_\beta \cap V_\alpha = \emptyset$.

Fato 4.3.5. $A = \cup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ é um subconjunto raro de X tal que $x \in \overline{A}$

Suponha que $\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \emptyset$. Como $\overset{\circ}{\overline{A}}$ é aberto e $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{A}$, temos que $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap A \neq \emptyset$. Portanto existe um $\beta < \kappa$ tal que $(\overline{V_\beta} \setminus V_\beta) \cap \overset{\circ}{\overline{A}} \neq \emptyset$. Como $\overset{\circ}{\overline{A}}$ é aberto, $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap V_\beta \neq \emptyset$. Mas, pelo Fato 4.3.4, isso é uma contradição. Então $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$, isto é, A é raro.

Se $x \notin \overline{A}$, temos que $W \cap (X \setminus \overline{A})$ é um conjunto aberto contendo x. Como X é localmente conexo, existe um conjunto aberto e conexo $E \subset W \cap (X \setminus \overline{A})$ contendo x. Como $x \in \overline{\cup_{\alpha<\kappa} V_\alpha}$, temos que $E \cap (\cup_{\alpha<\kappa} V_\alpha) \neq \emptyset$ e, portanto, existe um $\alpha < \kappa$ tal que $E \cap V_\alpha \neq \emptyset$. Como $E \cap \overline{A} = \emptyset$, temos que $E \cap (\overline{V_\alpha} \setminus V_\alpha) = \emptyset$. Logo $E \cap V_\alpha = E \cap \overline{V_\alpha}$ e assim $E \cap V_\alpha$ é aberto e fechado em E. Como $x \notin \overline{V_\alpha}$, temos que $E \cap V_\alpha \neq E$, mas isso é uma contradição pois E é conexo. $\square$

REFERÊNCIAS

ARHANGEL'SKII, A.; COLLINS, P. On submaximal spaces. **Topology and its Applications**, v. 64, n. 3, p. 219 – 241, 1995. ISSN 0166-8641. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016686419400093I>. Citado na página 44.

ARHANGEL'SKII, A. V.; BUZYAKOVA, R. Z. On linearly lindelöf and strongly discretely lindelöf spaces. **PROC. AMER. MATH. SOC**, p. 2449–2458, 1999. Disponível em: <http://www.ams.org/journals/proc/1999-127-08/S0002-9939-99-04783-8/>. Citado na página 18.

BELLA, A.; SIMON, P. Spaces which are generated by discrete sets. **Topology and its Applications**, Elsevier, v. 135, n. 1, p. 87–99, 2004. ISSN 0166-8641. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864103001561>. Citado na página 18.

BOIS–REYMOND, P. D. **Die Allgemeine Functionentheorie**. H. Laupp, 1882. Disponível em: <https://archive.org/details/dieallgemeinefu00boisgoog>. Citado na página 46.

CAMERON, D. E. A survey of maximal topological spaces. In: **Topology Proc**. [s.n.], 1977. v. 2, n. 1, p. 1–60. Disponível em: <http://www.topo.auburn.edu/tp/reprints/v02/tp02102.pdf>. Citado na página 42.

CLARK, B.; SCHNEIDER, V. A characterization of maximal connected spaces and maximal arcwise connected spaces. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 104, n. 4, p. 1256–1260, 1988. Disponível em: <http://www.ams.org/journals/proc/1988-104-04/S0002-9939-1988-0969057-8/>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 49.

DOUWEN, E. K. van. Applications of maximal topologies. **Topology and its Applications**, v. 51, n. 2, p. 125–139, 1993. ISSN 0166-8641. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166864193901454>. Citado 7 vezes nas páginas 19, 27, 35, 44, 46, 47 e 48.

DOW, A.; TKACHENKO, M.; TKACHUK, V.; WILSON, R. Topologies generated by discrete subspaces. **Glasnik matematički**, Hrvatsko matematičko društvo i PMF-Matematički odjel, Sveučilišta u Zagrebu, v. 37, n. 1, p. 187–210, 2002. Disponível em: <http://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik/vol_37/no1_16.html>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 30.

DRIDI, L.; MHEMDI, A.; TURKI, T. F-nodec spaces. **Applied General Topology**, v. 16, n. 1, p. 53–64, 2015. ISSN 1989-4147. Disponível em: <http://polipapers.upv.es/index.php/AGT/article/view/3141>. Citado na página 44.

ENGELKING, R. **General Topology**. Revised and completed. Berlin: Heldermann, 1989. v. 6. (Sigma Series in Pure Mathematics, v. 6). Citado 4 vezes nas páginas 22, 28, 46 e 49.

FRANKLIN, S. Spaces in which sequences suffice. **Fundamenta Mathematicae**, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 57, n. 1, p. 107–115, 1965. Disponível em: <https://eudml.org/doc/213854>. Citado na página 38.

GLEASON, A. M. *et al.* Projective topological spaces. **Illinois Journal of Mathematics**, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 2, n. 4A, p. 482–489, 1958. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1255454110>. Citado na página 45.

GUTHRIE, J.; STONE, H.; WAGE, M. Maximal connected expansions of the reals. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 69, n. 1, p. 159–165, 04 1978. ISSN 1446-8107. Disponível em: <http://www.ams.org/journals/proc/1978-069-01/S0002-9939-1978-0467646-4/>. Citado na página 49.

HEWITT, E. A problem of set-theoretic topology. **Duke Math. J**, v. 10, n. 19430, p. 309–333, 1943. Disponível em: <https://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077471943>. Citado na página 17.

HÖNIG, C. S. **Aplicações da topologia à análise**. [S.l.]: Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, 1961. v. 8. Citado na página 35.

JECH, T. **Set theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 21.

KOVAR, M. On maximality of compact topologies. In: KOPPERMAN, R.; SMYTH, M. B.; SPREEN, D.; WEBSTER, J. (Ed.). **Spatial Representation: Discrete vs. Continuous Computational Models**. Dagstuhl, Germany: Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum für Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Germany, 2005. (Dagstuhl Seminar Proceedings, 04351). ISSN 1862-4405. Disponível em: <http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2005/118>. Citado na página 42.

KURATOWSKI, K. **Topology, vol. I**. [S.l.]: Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 61.

PARHOMENKO, A. S. Über eineindeutige stetige Abbildungen. **Math. Sb.**, v. 47, n. 5, p. 197–210, 1939. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 26 e 27.

RAMANATHAN, A. Minimal bicompact spaces. **J. Indian Math. Soc.**, v. 19, p. 44–46, 1948. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.

STEEN, L.; SEEBACH, J. **Counterexamples in Topology**. [S.l.]: Dover Publications, 1995. (Dover books on mathematics). ISBN 9780486687353. Citado na página 35.

TAYLOR, A. E.; LAY, D. C. **Introduction to functional analysis**. [S.l.]: Wiley New York, 1958. v. 2. Citado na página 24.

THOMAS, J. P. Maximal connected topologies. **J. Austral. Math. Soc**, Cambridge Univ Press, v. 8, n. 1, p. 700–705, 11 1968. ISSN 1446-8107. Disponível em: <http://journals.cambridge.org/article_S1446788700006510>. Citado na página 48.

TKACHUK, V. V. Spaces that are projective with respect to classes of mappings. **Tr. Mosk. Mat. Obs.**, v. 50, p. 138–155, 1987. Disponível em: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=912056>. Citado na página 30.

WHITEHEAD, J. H. C. Simplicial spaces, nuclei and m-groups. **Proceedings of the London mathematical society**, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 243–327, 1939. Disponível em: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/jhcw9.pdf>. Citado na página 43.

WILLARD, S. **General topology**. [S.l.]: Addison-Wesley Pub. Co., 1970. (Addison-Wesley series in mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 28 e 64.

ÍNDICE