SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20.09.2004

Assinatura: *Ana Paula Amparo Lopes*

Imersões horo-justas de variedades

Marcelo Buosi

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática.

**USP – São Carlos
Setembro de 2004**

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Prof. Dr. Washington Luiz Marar

Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior

Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti

A Carolina e Sofia

com amor. . .

Ao professor

Mário Barone Júnior

(in memorian)

Agradecimentos¹

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que durante este período esteve sempre ao meu lado, dando força e saúde.

Agradeço a minha família: meus pais, Geraldo e Maria e meus irmãos, Renato e Greciane, por compreender, aprovar e incentivar minhas escolhas.

Agradeço a minha esposa Carolina pelo seu amor, exemplo de vida e pela sua compreensão e companheirismo irrestritos. À nossa filha Sofia que está chegando e que já é motivo de muita alegria e sonhos.

Agradeço à Profa. Maria Aparecida Soares Ruas que num primeiro instante orientou-me para um Doutorado “Sandwich” e em seguida, após o indeferimento da bolsa, continuou a orientação no trabalho outrora começado. Sou grato também pela sua disposição, seus estímulos e pela infinita paciência com que conduziu este trabalho de orientação.

Agradeço ao Prof. Shyuichi Izumiya, inicialmente por ter aceitado orientar-me num projeto de Doutorado “Sandwich”, por ter proposto o tema desta tese e, após o indeferimento da bolsa, ter passado duas semanas no Brasil, onde juntamente com a Profa. Maria Aparecida Soares Ruas, tivemos valiosas discussões.

Agradeço à Profa. Dirce Kiyomi Hayashida por ter me apresentado ao Prof. Shyuichi Izumiya e por tudo que tem feito por mim desde o meu mestrado.

Agradeço à Profa. Maria del Carmen Romero Fuster pelas sugestões e pelas discussões que tivemos durante suas visitas ao Brasil.

Agradeço ainda aos meus amigos pela convivência e companheirismo nesta longa jornada. Dentre eles eu não poderia deixar de citar aqueles que nos momentos mais difíceis me adotaram como parte de suas famílias: Fábio (Mineiro) e Maurício (Luke).

Agradeço ao meu companheiro de luta, compadre e irmão Luiz Fernando, que embora distante se manteve presente.

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Resumo

Neste trabalho estudamos as imersões horo-justas de variedades em espaços hiperbólicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow H^m$ é horo-justa se para todo h-semi-espaço $\mathfrak{h}$ a inclusão de $f^{-1}(\mathfrak{h})$ em X induz monomorfismo na homologia de Čech. Estudamos a equivalência desta definição com a propriedade que toda função altura horoesférica não-degenerada é perfeita. Introduzimos também o conceito de curvatura hiperbólica absoluta total para imersões em espaços hiperbólicos e mostramos que imersões horo-justas são imersões com curvatura hiperbólica absoluta total mínima e mostramos uma extensão parcial do Teorema de Chern-Lashof.

Uma questão importante consiste em entender se este conceito é equivalente à justeza em espaços hiperbólicos. Nossa contribuição é mostrar que a resposta é positiva quando a imersão está contida em certas variedades umbílicas. Para imersões de S^1 em H^2 , ou aquelas contidas em variedades umbílicas de H^3 , mostramos que horo-justeza e justeza são equivalentes.

Abstract

In this work we study horo-tight immersions of manifolds in hyperbolic spaces. A map f of a topological space X into H^m is called horo-tight if for every h-half-space $\mathfrak{h}$ in H^m , the induced homomorphism $H_*(f^{-1}) \rightarrow H_*(X)$ in Čech homology is injective. We show that this definition is equivalent to require that every non-degenerate horospherical height function is polar. We also introduce the concept of total absolute hyperbolic curvature of immersions into hyperbolic spaces and show that horo-tightness corresponds to minimal total absolute hyperbolic curvature. A partial extension of the Chern-Lashof theorem is then proved in this context.

A key point is to understand whether horo-tightness implies tightness. In this direction we prove that this is the case for some umbilical immersions. In the case of immersions of S^1 into H^2 or umbilical immersions into H^3 we also show that horo-tightness is equivalent to tightness.

Sumário

Introdução	1
1 Imersões Justas em Espaços Euclidianos	5
1.1 Teoria de Pontos Críticos	5
1.1.1 Desigualdades de Morse	6
1.2 Curvatura Absoluta Total	8
1.3 Aplicações Justas	12
1.4 Superfícies Justas	15
1.5 Aplicações “Taut”	17
2 Geometria Hiperbólica	19
2.1 O Espaço de Lorentz	19
2.2 O Espaço Hiperbólico	22
2.2.1 Três Classes de Funções	25
2.3 Projeção Estereográfica	27
3 Imersões Justas e “Taut” em Espaços Hiperbólicos	29
3.1 Aplicações e Imersões “Taut” em H^m	29
3.2 Imersões Justas no Espaço Hiperbólico	31
3.2.1 Imersões Justas de Esferas	31
3.2.2 Um Limite para a Codimensão de Imersões Justas	33
3.3 Observações sobre as funções L_h	33
4 Aplicações Horo-justas	35
4.1 Aplicações Horo-justas	35
4.2 A Propriedade dos Dois Pedacos em relação a horoesferas	39

4.3	Imersões Horo-justas e Umbílicas	44
5	Imersões Horo-justas de S^1 em H^m	47
5.1	Motivação e Lema Básico	47
5.2	Curvas em H^2	48
5.3	Curvas em H^3	51
6	Curvatura Hiperbólica Absoluta Total	55
6.1	Geometria Hiperbólica Local de Hipersuperfícies	55
6.2	Geometria Hiperbólica Local de Subvariedades	59
6.2.1	Hipersuperfície Canal Hiperbólica	62
6.3	Curvatura Hiperbólica Absoluta Total	66
6.3.1	Principais Resultados	69
6.4	Horoconvexidade	70
A	Programas utilizados no capítulo 5	73
	Referências Bibliográficas	75

Introdução

As subvariedades justas e “taut” formam uma importante classe de variedades com propriedades especiais de curvatura, e que são estudadas intensivamente por geômetras desde os anos cinqüenta. Em alguns aspectos, essas variedades são as figuras mais simples depois dos corpos convexos: por exemplo, as subvariedades justas do espaço euclidiano são aquelas cujas intersecções com qualquer semi-espaço é conexa. Alguns exemplos são as esferas, as superfícies de Veronese, as hipersuperfícies isoparamétricas, e as ciclides de Dupin.

O conceito de imersão justa surgiu como uma generalização de imersões com curvatura absoluta total mínima. Esta última teve origem com o trabalho de W. Fenchel em [17], no qual foi mostrado que a integral do módulo da curvatura de uma imersão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada *curvatura absoluta total* e denotada por $\tau(S^1, f)$, é maior ou igual a 2π e que este valor é atingido se, e somente se, a curva é plana e convexa. Na segunda metade da década de 40 este resultado foi generalizado para curvas em codimensão > 2 por K. Borsuk em [4].

Entretanto o resultado que realmente motivou o estudo de imersões justas foi o teorema de S. S. Chern e R. K. Lashof em [14], em que os autores generalizam os resultados de W. Fenchel e K. Borsuk para imersões de esferas em espaços euclidianos de qualquer codimensão: se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma imersão então $\tau(S^n, f) \geq 2$ e $\tau(M, f) = 2$ somente se f mergulha S^n como uma hipersuperfície convexa em algum $(n+1)$ -plano de $\mathbb{R}^m$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Chern-Lashof*.

Um importante passo no desenvolvimento da teoria de imersões com curvatura absoluta total mínima foi a reformulação do problema em termos da teoria de pontos críticos feita por Kuiper em [22]. Ele mostrou que para toda variedade compacta M , o ínfimo de $\tau(M, f)$ entre todas as imersões de M em todos os espaços euclidianos é o número de Morse de M , $\gamma(M)$, que é definido como o número mínimo de pontos críticos que uma

função de Morse definida em M pode ter. Além disso, este limite inferior é atingido se, e somente se, toda função altura linear não-degenerada, definida em M , possui $\gamma(M)$ pontos críticos. Uma tal imersão é denominada *imersão com curvatura absoluta total mínima* ou *imersão convexa*, conforme Kuiper [24, 25]. No trabalho de T. F. Banchoff [1], tais imersões foram pela primeira vez denominadas *imersões justas*, “tight immersions”.

Para uma variedade M em que $\gamma(M)$ é igual à soma dos números de Betti de M com relação a um corpo $\mathbf{F}$, Kuiper mostrou que a curvatura absoluta total mínima de uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é equivalente a requerer que para todo semi-espço fechado h em $\mathbb{R}^m$, o homomorfismo induzido

$$H_*(f^{-1}(h); \mathbf{F}) \longrightarrow H_*(M; \mathbf{F})$$

é injetivo, conforme [25, 27]. Esta abordagem permite, por um lado, generalizar o estudo de imersões justas para a categoria de aplicações contínuas cujos principais resultados são devidos a Kuiper, e por outro lado, permite caracterizar justeza de imersões em termos de funções perfeitas, como descrevemos a seguir.

Nos espaços euclidianos, há dois tipos de subvariedades umbílicas: os planos e as esferas. Cada uma delas pode ser obtida como conjunto de nível de uma função distância. Os planos são conjuntos de níveis de funções alturas lineares, $\ell_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle$, onde ξ é um vetor unitário, e as esferas são conjuntos de níveis de funções quadrado da distância euclidiana, $\ell_p(x) = \|p - x\|^2$. Em [6] S. Carter e A. West caracterizam imersões justas como aquelas em que toda função de Morse do tipo ℓ_ξ é uma função perfeita, e imersões “taut” como aquelas em que toda função de Morse do tipo ℓ_p é uma função perfeita.

Em [11], T. E. Cecil e P. J. Ryan estendem para imersões no espaço hiperbólico o estudo desenvolvido por S. Carter e A. West em da seguinte maneira: como no espaço hiperbólico há três tipos de subvariedades umbílicas, há também três famílias de funções distância, L_p, L_π, L_h , cujos conjuntos de níveis são as subvariedades umbílicas do espaço. As funções $L_p(x)$, $L_\pi(x)$ e $L_h(x)$ medem, respectivamente, o quadrado da distância hiperbólica entre os pontos p e x , a distância hiperbólica entre o ponto x e o hiperplano π e a distância hiperbólica entre x e a horoesfera h . Os autores estudam imersões em que toda função de Morse, de cada tipo, é uma função perfeita. Com relação às funções dos tipos L_π , L_p estão associados o conceitos de imersões justas e imersões “taut”, respectivamente.

T. E. Cecil e P. J. Ryan em [12], resumem os resultados conhecidos sobre imersões justas e “taut” em espaços hiperbólicos, que essencialmente estão contidos nos artigos

[7, 10, 11], e propõem algumas questões originais sobre o assunto.

Cecil e Ryan definem então que uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ é horo-justa se toda L_h não-degenerada é uma função perfeita. Eles observam que toda imersão justa e toda imersão “taut” de uma variedade compacta são imersões horo-justas, e além disso, em dimensão 2, horo-justeza coincide com a propriedade dos dois pedaços em relação a horoesferas. Estes são praticamente os únicos resultados conhecidos de imersões horo-justas. Eles também propõem o seguinte problema:

Estudar a classe das imersões horo-justas: em particular, determinar as imersões horo-justas de S^n e caracterizar quais superfícies que admitem imersão horo-justa em H^3 .

O objetivo deste trabalho é estudar imersões horo-justas. Uma aplicação $f : X \rightarrow H^m$ é horo-justa se para todo h-semi-espaço h a inclusão de $f^{-1}(h)$ em X induz monomorfismo na homologia de Čech. Estudamos a equivalência desta definição com a propriedade que toda função altura horoesférica não-degenerada é perfeita. Introduzimos também o conceito de curvatura hiperbólica absoluta total para imersões em espaços hiperbólicos e mostramos que imersões horo-justas são imersões com curvatura hiperbólica absoluta total mínima.

Uma questão importante na teoria consiste em entender se este conceito é equivalente à justeza em espaços hiperbólicos. Nossa contribuição é mostrar que a resposta é positiva quando a imersão está contida em certas variedades umbílicas.

Nos capítulos 1, 2 e 3 recordamos resultados conhecidos sobre imersões justas em espaços euclidianos, geometria hiperbólica e imersões justas e “taut” em espaços hiperbólicos, respectivamente. Os conceitos utilizados de geometria riemanniana podem ser encontrados em [5]. Para uma lista quase completa de referências sobre imersões justas, veja [21]. Os resultados originais deste trabalho aparecem nos capítulos 4, 5 e 6.

No capítulo 4 estudamos algumas propriedades gerais de aplicações horo-justas. Mostramos que toda aplicação horo-justa possui a propriedade dos dois pedaços com relação a horoesferas (PDPH). Além disso, a PDPH é equivalente a dizer que toda função altura horoesférica é polar. Para imersões de superfícies em H^m , mostramos que os três conceitos são equivalentes. Neste capítulo, a principal contribuição é o estudo de horo-justeza para variedades contidas em subvariedades umbílicas de H^m .

No capítulo 5 estudamos as imersões horo-justas de S^1 em H^m . Para imersões de S^1 em H^2 , ou aquelas contidas em variedades umbílicas de H^3 , mostramos que horo-justeza e justeza são equivalentes.

O capítulo 6 trata da teoria local de subvariedades em espaços hiperbólicos. Inicialmente, com base nos artigos de S. Izumiya e seus colaboradores [18, 19, 20], descrevemos os resultados sobre a geometria diferencial local de hipersuperfícies e subvariedades em codimensão maior no espaço hiperbólico. Neste capítulo introduzimos o conceito de curvatura hiperbólica absoluta total. Assim como no caso euclidiano, mostramos que curvatura hiperbólica absoluta total mínima e horo-justeza são equivalentes e provamos uma extensão parcial do Teorema de Chern-Lashof.

Capítulo 1

Imersões Justas em Espaços Euclidianos

O objetivo deste capítulo é introduzir os conceitos de aplicação e imersão justas em espaços euclidianos e descrever alguns resultados importantes da teoria.

Inicialmente apresentamos a terminologia básica da teoria de pontos críticos assim como alguns resultados que serão necessários neste trabalho. As principais referências são [12, 30, 31, 35].

Em seguida, apresentamos o Teorema de Chern-Lashof sobre curvatura absoluta total e introduzimos o conceito de justeza estabelecido por Kuiper em [25]. Discutimos a equivalência entre imersões com curvatura absoluta total mínima e imersões justas, que por sua vez é equivalente a exigir que toda função altura não-degenerada é uma função $\mathbb{Z}_2$ -perfeita.

Na seção 1.4 são apresentados os principais resultados da teoria para o caso de variedades bidimensionais e na última seção introduzimos o conceito de aplicação “taut”.

1.1 Teoria de Pontos Críticos

Sejam M_1, M_2 variedades diferenciáveis e $f : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $x \in M_1$ é chamado de *ponto crítico de f* se a Jacobiana f_* em x é singular (não possui posto máximo). Um ponto $y \in M_2$ é um *valor crítico de f* se algum $x \in f^{-1}(y)$ é um ponto crítico de f , os demais pontos de M_2 são chamados *valores regulares de f* .

No caso especial de uma função real φ em uma variedade M , dizer que φ tem um

ponto crítico em $x \in M$ é equivalente a dizer que $\varphi_* = 0$ em x . Em um sistema de coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$ numa vizinhança de x , isto significa que

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_1} = \dots = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_n} = 0.$$

Dizemos que um ponto crítico $x \in M$ é não-degenerado se a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(x) \right)$$

é não-singular. Esta matriz é denominada a *Hessiana* de φ em x e será denotada por $\text{Hess}_x(\varphi)$. O *índice* de φ em um ponto crítico não-degenerado $x \in M$ é o número de autovalores negativos da $\text{Hess}_x(\varphi)$.

O comportamento de φ numa vizinhança de um ponto crítico não-degenerado é completamente determinado pelo seu índice.

Lema 1.1 (Lema de Morse) *Seja $x \in M^n$ um ponto crítico não-degenerado de índice λ da função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Então existe um sistema de coordenadas locais $u_1, \dots, u_n$ em uma vizinhança U de x com $u_i(x) = 0, (i = 1, \dots, n)$, tal que*

$$\varphi(u) = \varphi(x) - u_1^2 - \dots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \dots + u_n^2, \text{ para todo } u \in U.$$

Demonstração: Veja [35], Teorema 2.2.5, pg. 144.

Portanto um ponto crítico de índice λ é um máximo local de φ se $\lambda = n$, um mínimo local se $\lambda = 0$, e os demais valores de λ correspondem a diferentes tipos de pontos de sela. Note também que os pontos críticos não-degenerados são isolados.

Uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ que tem somente pontos críticos não-degenerados é chamada de *função de Morse* ou *função não-degenerada*. Se M é compacta então toda função de Morse possui apenas um número finito de pontos críticos.

1.1.1 Desigualdades de Morse

Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse tal que o conjunto

$$M_r(\varphi) = \{x \in M \mid \varphi(x) \leq r\}$$

é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$. Isto é sempre verdade se M for compacta. Seja $\mu_k(\varphi, r)$ o número de pontos críticos de φ de índice k em $M_r(\varphi)$. Para M compacta, seja $\mu_k(\varphi)$ o

número de pontos críticos de φ de índice k em M , e $\mu(\varphi)$ o número de pontos críticos de φ . Para um corpo $\mathbf{F}$, seja

$$\beta_k(\varphi, r, \mathbf{F}) = \dim_{\mathbf{F}}(H_k(M_r(\varphi); \mathbf{F}))$$

o k -ésimo número de Betti de $M_r(\varphi)$ em relação ao corpo $\mathbf{F}$, e seja $\beta_k(M, \mathbf{F})$ o k -ésimo número de Betti de M em relação ao corpo $\mathbf{F}$. As desigualdades de Morse afirmam que

$$(1.1) \quad \mu_k(\varphi, r) \geq \beta_k(\varphi, r, \mathbf{F})$$

para todo $\mathbf{F}, r, k$. Para uma demonstração das desigualdades de Morse, veja [35], Proposição 2.7.1, pg 159. Se M é compacta, definimos o *número de Morse de M* , $\gamma(M)$, por

$$\gamma(M) = \min\{\mu(\varphi) \mid \varphi \text{ é uma função de Morse em } M\}.$$

As desigualdades de Morse implicam que

$$\gamma(M) \geq \beta(M; \mathbf{F}) = \sum_{k=0}^n \beta_k(M; \mathbf{F})$$

para todo $\mathbf{F}$.

A seguir apresentamos uma condição necessária e suficiente para que as desigualdades de Morse tornem-se igualdades.

Teorema 1.2 *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse tal que $M_r(\varphi)$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$. Então, para um corpo arbitrário $\mathbf{F}$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\mu_k(\varphi, r) = \beta_k(\varphi, r, \mathbf{F})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $r \in \mathbb{R}$.
- (ii) *A aplicação em homologia*

$$H_*(M_r(\varphi); \mathbf{F}) \longrightarrow H_*(M; \mathbf{F})$$

induzida pela inclusão de $M_r(\varphi)$ em M é injetiva para todo $r \in \mathbb{R}$.

Este resultado, cuja demonstração requer um estudo mais detalhado da teoria de pontos críticos, segue do Teorema 2.2 de [31], e foi primeiramente ressaltado no contexto de imersões justas por Kuiper em [25].

Definição 1.3 *Uma função de Morse $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $M_r(\varphi)$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$ e que satisfaz uma (e portanto ambas) das condições do Teorema 1.2, com relação a um corpo $\mathbf{F}$, é denominada uma função $\mathbf{F}$ -perfeita. Dizemos simplesmente que φ é perfeita quando φ for perfeita para algum corpo $\mathbf{F}$.*

Observe-se que nem toda variedade admite funções perfeitas, veja [25, 26].

1.2 Curvatura Absoluta Total

Nesta seção estudamos a teoria de curvatura absoluta total de imersões em espaços euclidianos. Este estudo foi iniciado por S. S. Chern e R. K. Lashof nos artigos [14, 15].

Sejam $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = n + k$, uma imersão diferenciável e S^{m-1} a esfera unitária de $\mathbb{R}^m$. Para $\xi \in S^{m-1}$, a função altura linear $\ell_\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\ell_\xi(q) = \langle \xi, q \rangle,$$

onde $\langle \xi, q \rangle$ é o produto interno euclidiano. A restrição de ℓ_ξ a M , definida por $\ell_\xi(x) = \langle \xi, f(x) \rangle$ é uma função real definida em M .

Recordemos alguns fatos fundamentais sobre subvariedades de espaços euclidianos. Como f é uma imersão, segue que f é um mergulho numa vizinhança conveniente de qualquer ponto $x \in M$. Para cálculos locais, podemos então identificar $T_x M$ e $f_*(T_x M)$. Sejam $\mathcal{X} \in T_x M$ e ξ um campo de vetores unitários normais a $f(M)$ numa vizinhança de x . Seja D a derivada covariante euclidiana em $\mathbb{R}^m$. Temos a seguinte equação

$$D_{\mathcal{X}}\xi = -A_\xi\mathcal{X} + \nabla_{\mathcal{X}}^\perp\xi,$$

onde $-A_\xi\mathcal{X}$ é a componente de $D_{\mathcal{X}}\xi$ tangente a M , e $\nabla_{\mathcal{X}}^\perp\xi$ é a componente normal a M . O operador linear A_ξ é denominado a segunda forma fundamental de f na direção ξ , e $\nabla^\perp$ é chamada a conexão normal.

Seja BM o fibrado normal unitário de M . BM é uma variedade de dimensão $m - 1$. Seja $\pi : BM \rightarrow M$ a projeção natural. A aplicação de Gauss

$$(1.2) \quad \nu : BM \rightarrow S^{m-1}$$

leva o ponto $\xi \in T_x^\perp M$ ao vetor paralelo a ξ na origem.

Teorema 1.4 *A nulidade da aplicação de Gauss ν no ponto $\xi \in BM$ é igual a nulidade de A_ξ . Em particular, ξ é um ponto crítico de ν se, e somente se, A_ξ é singular.*

Demonstração: Ver [12, Teorema 1.3.1].

Examinemos a teoria de pontos críticos das funções alturas lineares.

Teorema 1.5 *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão e $p \in S^{m-1}$.*

- (i) ℓ_p tem um ponto crítico em $x \in M$ se, e somente se, p é ortogonal a $T_x M$.

- (i) *Seja x um ponto crítico de ℓ_p . Então para $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in T_x M$, a Hessiana de ℓ_p no ponto x satisfaz*

$$\text{Hess}_x(\ell_p)(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \langle A_p \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle.$$

Demonstração: Ver [12], Teorema 3.2, pg 10.

Os seguintes resultados são consequências diretas do Teorema 1.5.

Corolário 1.6 *Seja $p \in T_x^\perp M$. Então*

- (i) *ℓ_p tem um ponto crítico degenerado no ponto x se, e somente se, A_p é singular.*
- (ii) *Se x é um ponto crítico não-degenerado de ℓ_p , então o índice de ℓ_p em x é igual ao número de autovalores negativos de A_p .*

Dos Teorema 1.4 e Corolário 1.6 segue-se o seguinte resultado.

Teorema 1.7 *Para $p \in S^{m-1}$, ℓ_p é uma função de Morse se, e somente se, p é um valor regular da aplicação de Gauss ν .*

Como BM e S^{m-1} são variedades de mesma dimensão, segue do Teorema de Sard o seguinte resultado:

Corolário 1.8

- (i) *Para quase todo $p \in S^{m-1}$, ℓ_p é uma função de Morse.*
- (ii) *Seja $x \in M$ um ponto crítico não-degenerado de índice j da função ℓ_p . Então existe uma função de Morse ℓ_q com um ponto crítico $y \in M$ de índice j , onde q e y podem ser escolhidos arbitrariamente próximos de p e x , respectivamente.*

Retornamos agora à questão da curvatura absoluta total. Para um valor regular ξ da aplicação de Gauss ν , seja $\mu(\xi)$ o número de pontos críticos da função de Morse ℓ_ξ . O ponto ξ tem uma vizinhança U tal que $\nu^{-1}(U)$ é a união disjunta dos conjuntos abertos e conexos $V_1, \dots, V_k$, $k = \mu(\xi)$, nos quais $\nu : V_i \rightarrow U$ é um difeomorfismo. A *curvatura de Lipschitz-Killing* $\mathfrak{G}$ em BM é definida pela equação

$$\nu^*(da) = \mathfrak{G}dA,$$

onde da é o elemento de volume de S^{m-1} normalizado de tal maneira que

$$\int_{S^{m-1}} da = 1,$$

e dA é o elemento de volume de BM . Portanto em V_i temos

$$\int_{V_i} \mathfrak{G} dA = \int_U da, \text{ se } \mathfrak{G} > 0 \text{ em } V_i$$

e

$$\int_{V_i} \mathfrak{G} dA = - \int_U da, \text{ se } \mathfrak{G} < 0 \text{ em } V_i$$

Ou seja,

$$(1.3) \quad \int_{V_i} |\mathfrak{G}| dA = \int_U da.$$

Seja C o conjunto de medida nula constituído dos valores críticos de ν . A função $\mu(\xi)$ é localmente contínua e portanto contínua em $S^{m-1} - C$. A *curvatura absoluta total* ou a área de S^{m-1} coberta pela imagem da aplicação de Gauss é

$$(1.4) \quad \tau(M, f) = \int_{S^{m-1}-C} \mu(\xi) da.$$

Por outro lado, da equação (1.3) e da discussão que a precede, e da teoria de integração, vemos que

$$\int_{S^{m-1}-C} \mu(\xi) da = \int_{BM} |\mathfrak{G}| dA.$$

Portanto, o estudo da curvatura absoluta total pode ser formulado em termos da função μ .

Como toda função de Morse $\ell_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\mu(\xi) \geq \gamma(M)$, onde $\gamma(M)$ é o número de Morse de M , temos

$$\tau(M, f) \geq \gamma(M).$$

Embora o seguinte resultado tenha sido descoberto por Kuiper em [22], somente com um resultado de J. P. Wilson em [37] é que foi possível demonstrá-lo.

Teorema 1.9 *Seja M uma variedade compacta. Então*

$$\gamma(M) = \inf\{\tau(M, f) : f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ é imersão}\}.$$

Como $\gamma(M)$ é a maior cota inferior para $\tau(M, f)$, temos a seguinte definição.

Definição 1.10 Uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem curvatura absoluta total mínima se $\tau(M, f) = \gamma(M)$.

O próximo teorema fornece uma condição equivalente para que uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha curvatura absoluta total mínima.

Teorema 1.11 Uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem curvatura absoluta total mínima se, e somente se, toda função altura não-degenerada ℓ_ξ possui $\gamma(M)$ pontos críticos.

Demonstração: Se toda ℓ_ξ de Morse tem $\gamma(M)$ pontos críticos então, por (1.4), $\tau(M, f) = \gamma(M)$. Reciprocamente, se $\mu(\xi) > \gamma(M)$ para alguma ℓ_ξ de Morse, então $\mu > \gamma(M)$ em um conjunto de medida positiva pois μ é constante numa vizinhança U de ξ em S^{m-1} . Como $\mu > \gamma(M)$ em $S^{m-1} - C$ segue que $\tau(M, f) > \gamma(M)$, uma contradição.

Os exemplos mais simples de subvariedades com curvatura absoluta total mínima são as hipersuperfícies convexas, aquelas que são o bordo de um conjunto convexo B de algum espaço euclidiano. Um conjunto B é convexo se para quaisquer $p, q \in B$ o segmento de reta $\overline{pq}$ está contido em B . Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 1.12 Seja $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Se $f(S^n)$ é uma hipersuperfície convexa então $\tau(S^n, f) = 2$. Em outros termos, f mergulha S^n com curvatura absoluta total mínima.

Demonstração: Veja [12], Teorema 4.8, pg 20.

A recíproca da proposição acima é um resultado bem mais profundo e é devido a S. S. Chern e R. K. Lashof [14]. Encerramos esta seção com um dos mais significativos teoremas sobre curvatura absoluta total de imersões em espaços euclidianos, a saber, o Teorema de Chern-Lashof.

Teorema 1.13 (Chern-Lashof) Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão de uma variedade fechada. Então:

- (i) $\tau(M, f) \geq 2$.
- (ii) se $\tau(M, f) < 3$ então M é homeomorfa à esfera S^n .
- (iii) se $\tau(M, f) = 2$ então f é um mergulho, $f(M)$ está contida num espaço afim A^{n+1} de $\mathbb{R}^m$ e além disso $f(M)$ é o bordo em A^{n+1} de um subconjunto aberto e convexo de A^{n+1} .

Demonstração: Como M é compacta, para todo $\xi \in S^{m-1} - C$, ℓ_ξ tem pelo menos dois pontos críticos e assim $\mu(\xi) \geq 2$. Portanto, por (1.4), $\tau(M, f) \geq 2$, o que prova (i). Se $\tau(M, f) < 3$ então $\mu(\xi) = 2$ para algum $\xi \in S^{m-1} - C$ e portanto ℓ_ξ é uma função de Morse com apenas dois pontos críticos. A prova de (ii) segue então do Teorema de Reeb, veja [30], Teorema 4.1, pg 25. O caso (iii) segue do Lema 1.14 abaixo.

O seguinte lema contém a parte mais importante do teorema de Chern-Lashof.

Lema 1.14 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão. Se toda função altura não-degenerada $\ell_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in S^{n+p-1}$, possui exatamente dois pontos críticos, então f é um mergulho, $f(M)$ está contida em um $(n+1)$ -subespaço afim $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ e é o bordo, em $\mathbb{A}$, de um conjunto aberto, convexo e limitado de $\mathbb{A}$.*

Demonstração: Veja [35], Lema 3.4.2, pg 180.

Observação 1.15 *O Teorema de Chern-Lashof generaliza resultados antigos sobre imersões com curvatura absoluta total mínima: Em 1929, no artigo [17], Fenchel provou que se $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão então $\tau(S^1, f)$ atinge o mínimo valor possível, 2π , se, e somente se, f mergulha S^1 como uma curva plana e convexa. A prova do teorema de Fenchel pode ser encontrada em [13]. O mesmo resultado vale para curvas em $\mathbb{R}^m$, conforme [4].*

1.3 Aplicações Justas

A teoria de imersões com curvatura absoluta total mínima, após o trabalho de Chern e Lashof em [14], foi reformulada e desenvolvida. Como esta noção é uma generalização de convexidade, Kuiper em [24, 25] chamava tais imersões de *immersões convexas*. O termo justa, “tight” em inglês, foi utilizado pela primeira vez em [1] por Banchoff. Em [25] Kuiper formulou o conceito de justeza em termos de intersecções com semi-espacos e injetividade em homologia de aplicações induzidas. Ele observou que sua formulação é equivalente à curvatura absoluta total mínima para variedades que satisfazem

$$(1.5) \quad \gamma(M) = \beta(M; \mathbf{F})$$

para algum corpo $\mathbf{F}$.

Kuiper também observou que toda variedade bidimensional satisfaz (1.5) com $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2$.

Seja M uma variedade compacta cujo número de Morse $\gamma(M)$ é igual a soma dos números de Betti $\beta(M, \mathbb{Z}_2)$ e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão com curvatura absoluta total mínima. Se o hiperplano π é uma superfície de nível de uma função altura linear não-degenerada e h é um semi-espço fechado determinado por π , então pelo Teorema 1.2 a aplicação

$$H_*(f^{-1}(h)) \longrightarrow H_*(M) \text{ } (\mathbb{Z}_2 - \text{homologia})$$

é injetiva. Isto motiva a seguinte definição de justeza, veja Kuiper [27].

Definição 1.16 *Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ de um espaço topológico compacto X no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ é justa se para todo semi-espço fechado h em $\mathbb{R}^m$, o homomorfismo induzido por inclusão*

$$H_*(f^{-1}(h); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é monomorfismo. Um subconjunto U de $\mathbb{R}^m$ é justo se a inclusão natural $i : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é justa.

A definição acima estende a noção de justeza para a categoria de aplicações contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ de espaços topológicos compactos. O uso da homologia de Čech é motivado pela sua propriedade de continuidade que é necessária para eliminar a hipótese de que o semi-espço h seja determinado por uma função altura não-degenerada. Ressaltamos que para espaços triangularizáveis e portanto para variedades diferenciáveis, a homologia de Čech coincide com a homologia singular.

Observação 1.17 *Justeza é uma propriedade projetiva e projeções ortogonais de aplicações justas são justas. Veja [12], Observações 5.2(b) e 5.2(c), pg 23.*

Para uso posterior incluímos a seguinte:

Proposição 1.18 *Projeções ortogonais de aplicações justas são justas.*

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação justa e $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma projeção ortogonal, então $\Phi \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ é justa. De fato, seja h o semi-espço fechado em $\mathbb{R}^k$ determinado por $\ell_p \leq r$, $p \in \mathbb{R}^k$. A mesma inequação em $\mathbb{R}^m$ determina um semi-espço h' em $\mathbb{R}^m$ tal que $\Phi^{-1}(h) = h'$. Portanto $(\Phi \circ f)^{-1}(h) = f^{-1}(h')$ e a justeza de $\Phi \circ f$ segue da justeza de f . Por outro lado, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é justa e $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é uma

inclusão, então $i \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é justa. Basta notar que se h é um semi-espço em $\mathbb{R}^{m+k}$ e $h' = h \cap \mathbb{R}^m$, então $(i \circ f)^{-1}(h) = f^{-1}(h')$.

A seguir estabelecemos o principal resultado desta seção que é devido a Kuiper, veja [27].

Teorema 1.19 *Uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de uma variedade fechada é justa se, e somente se, $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ e f tem curvatura absoluta total mínima.*

Demonstração: Se f é justa e ℓ_p é uma função altura não-degenerada então, pelo Teorema 1.2, ℓ_p possui exatamente $\beta(M; \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos. Portanto $\beta(M; \mathbb{Z}_2) \geq \gamma(M)$ e $\tau(M, f) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$. Por outro lado, pelas desigualdades de Morse, $\gamma(M) \geq \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ e assim $\tau(M, f) = \gamma(M)$, ou seja, f tem curvatura absoluta total mínima.

Reciprocamente, se f tem curvatura absoluta total mínima e $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ então, pelos Teoremas 1.11 e 1.2, para todo semi-espço h determinado por qualquer função altura não-degenerada tem-se injetividade no homomorfismo induzido

$$(1.6) \quad H_*(f^{-1}(h); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2).$$

Se $f^{-1}(h) = M_r(p)$ para alguma função altura degenerada ℓ_p e para algum $r \in \mathbb{R}$, então devemos mostrar que o homomorfismo induzido em homologia é ainda injetivo. O conjunto $M_r(p)$ pode ser aproximado por conjuntos da forma $f^{-1}(h_i)$ onde cada h_i é um semi-espço determinado por uma função de Morse e que satisfaz 1.6. Em seguida, pela continuidade da homologia de Čech, mostra-se que $M_r(p)$ também satisfaz 1.6, o que conclui a demonstração.

Durante algum tempo todo exemplo conhecido de imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ com curvatura absoluta total mínima satisfazia $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$, veja [27]. Entretanto, em [28], Kuiper e Meeks encontraram, para cada $m \geq 4$, uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{m+1}$ com curvatura absoluta total mínima $\tau = 12$ e $\beta(M; \mathbb{Z}_2) = 8$.

Analisando a demonstração do teorema anterior temos como consequência o seguinte corolário.

Corolário 1.20 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão de uma variedade fechada. Então são equivalentes:*

- (i) f é justa.

(ii) Toda ℓ_ξ não-degenerada, $\xi \in S^{m-1}$, é uma função $\mathbb{Z}_2$ -perfeita.

(iii) Toda ℓ_ξ não-degenerada, $\xi \in S^{m-1}$, possui $\gamma(M) = \beta(M, \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos.

O corolário acima explica porque muitas vezes, na literatura, se diz que uma imersão é justa quando toda função altura de Morse possui o número mínimo de pontos críticos (permitido pelas desigualdades de Morse). Este resultado também possibilita uma nova definição de justeza.

Definição 1.21 *Uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é justa se toda ℓ_ξ de Morse é uma função perfeita.*

Observe-se que, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma imersão justa, no sentido da definição 1.21, então M é compacta. Nesta linha de pesquisa indicamos o artigo [6]. Observamos também que nos restringiremos à primeira definição de justeza, Definição 1.16.

1.4 Superfícies Justas

Nesta seção apresentamos sucintamente alguns dos principais resultados sobre superfícies (variedades de dimensão 2) justas.

A seguinte definição desempenha papel importante no estudo de superfícies justas e foi introduzida por T. F. Banchoff em [1].

Definição 1.22 *Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde X é um espaço topológico conexo, tem a propriedade dos dois pedaços (PDP) se $f^{-1}(h)$ é conexo para todo semi-espaço fechado h em $\mathbb{R}^m$.*

O seguinte teorema caracteriza as superfícies justas em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.23 *Sejam M^2 uma variedade fechada e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) f é justa.
- (ii) f tem a PDP.
- (iii) toda função altura não-degenerada é polar, isto é, possui um único ponto de mínimo e um único ponto de máximo.

(iv) $\frac{1}{2\pi} \int_M |K| dA = 4 - \chi(M)$, onde K é a curvatura gaussiana de M , dA é o elemento de área de M e $\chi(M)$ é a característica de Euler de M .

(v) $\frac{1}{2\pi} \int_M |K| dA = \gamma(M)$, onde $\gamma(M)$ é o número de Morse de M .

Demonstração: Ver [3, pg 57].

Sobre a existência de imersões justas para variedades bidimensionais, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.24 *Seja M^2 uma variedade fechada e conexa. Se M é orientável ou se M não é orientável e satisfaz $\chi(M) \leq -2$, então existe uma imersão justa $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Por outro lado, não existe imersão justa de M em $\mathbb{R}^3$ se M for o plano projetivo, a garrafa de Klein ou satisfaz $\chi(M) = -1$.*

Demonstração: Ver [3], Teoremas 1.3.3 e 1.3.7, pg 67 e 70, respectivamente.

Os demais casos ainda são problemas em aberto, veja [3, pg 70], onde também são propostas várias questões originais sobre superfícies justas.

Quando se consideram imersões de codimensão maior do que 1, a seguinte definição é importante no contexto de imersões justas.

Definição 1.25 *Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é substancial se a imagem $f(X)$ não está contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{R}^m$.*

O principal resultado sobre imersões PDP e substanciais é o seguinte teorema de Kuiper que estabelece um limite superior para a codimensão destas imersões e que este limite só pode ser atingido para imersões de variedades de Veronese.

Teorema 1.26 *Sejam M^n uma variedade fechada e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão PDP e substancial. Então $m \leq n(n+3)/2$. Se $n = 2$ então $m = n(n+3)/2$ somente se M for uma variedade Veronese.*

Demonstração: Ver [12], Teorema 5.18, pg 33 para a primeira parte e [3], Teorema 1.3.6, pg 69, para a segunda parte.

A segunda parte do teorema acima também é verdadeira para $n > 2$ e foi provada por J. A. Little e W. F. Pohl em [29].

1.5 Aplicações “Taut”

Encerramos este capítulo com o conceito de aplicação “taut”. Em [2], T. F. Banchoff iniciou o estudo de imersões “taut” ao tentar encontrar todas as superfícies justas contidas na esfera euclidiana S^m em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Definição 1.27 *Seja X um espaço topológico compacto. Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é denominada “taut” se para toda bola fechada, todo complemento de bola aberta, ou semi-espaço fechado Ω em $\mathbb{R}^m$, o homomorfismo induzido*

$$H_*(f^{-1}(\Omega); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é injetivo.

Uma consequência imediata da definição acima e da definição de justeza é o seguinte teorema:

Teorema 1.28 *Toda aplicação “taut” de X em $\mathbb{R}^m$ é justa.*

Em seguida observamos que uma aplicação justa e esférica é “taut”.

Teorema 1.29 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação esférica, isto é, $f(X)$ está contida em alguma esfera euclidiana. Então f é justa somente se f é “taut”.*

Demonstração: Seja Ω uma bola fechada ou o complemento de uma bola aberta em $\mathbb{R}^m$. Então $\Omega \cap S^m = h \cap S^m$ para algum semi-espaço fechado h em $\mathbb{R}^m$. Como $f(X) \subset S^m$, tem-se

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\Omega \cap S^m) = f^{-1}(h \cap S^m) = f^{-1}(h).$$

Como f é justa segue que a aplicação $H_*(f^{-1}(h); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2)$ é injetiva e portanto f é “taut”.

As imersões “taut” assim como as imersões justas também são caracterizadas em termos de funções perfeitas. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão. Para $p \in \mathbb{R}^m$, a função quadrado da distância euclidiana é definida em $\mathbb{R}^m$ por

$$\ell_p(q) = \|p - q\|^2.$$

A restrição de ℓ_p a M é definida por $\ell_p(x) = \|p - f(x)\|^2$.

Teorema 1.30 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão de uma variedade fechada. Então são equivalentes:*

- (i) *f é “taut”.*
- (ii) *Toda ℓ_p não-degenerada, $p \in \mathbb{R}^m$, é uma função $\mathbb{Z}_2$ -perfeita.*
- (iii) *Toda ℓ_p de Morse, $p \in \mathbb{R}^m$, possui $\gamma(M) = \beta(M, \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos.*

Demonstração: Ver [12], Teorema 1.12 e Corolário 1.13, pg 118.

Tem-se também que toda imersão “taut” é um mergulho. Para uma demonstração deste resultado, assim como maiores detalhes sobre imersões “taut”, veja [12, Teorema 2.1.23] ou o artigo [6] onde os autores generalizam o conceito de imersões “taut” para variedades não-compactas.

Capítulo 2

Geometria Hiperbólica

Neste capítulo introduzimos conceitos e resultados básicos da geometria hiperbólica. São definidos o espaço de Lorentz, as transformações de Lorentz, o espaço hiperbólico H^m e uma métrica em H^m . Em especial definimos três classes de funções distância cujas superfícies de nível são as hipersuperfícies umbílicas de H^m . As principais referências são [10] e [33, capítulo 3] em que o presente capítulo foi baseado.

2.1 O Espaço de Lorentz

Sejam $x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ e $y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ vetores de $\mathbb{R}^{m+1}$ com $m > 0$. O *produto interno de Lorentz* de x e y é definido por

$$\mathfrak{b}(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_my_m.$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^{m+1}$ munido do produto interno de Lorentz recebe o nome de *espaço de Lorentz* (de dimensão $m+1$) e é denotado por $\mathbb{R}_1^{m+1}$.

A *norma lorentziana* de um vetor x em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é dada pelo número complexo

$$\|x\| = \sqrt{\mathfrak{b}(x, x)}.$$

Aqui $\|x\|$ é positivo, zero, ou imaginário. Se $\|x\|$ é imaginário, denotamos seu valor absoluto (módulo) por $|||x|||$.

A *distância de Lorentz* entre os vetores x e y em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é definida pelo número complexo

$$d_L(x, y) = \|x - y\|.$$

Note que $d_L(x, y)$ é positivo, zero, ou imaginário. O conjunto de todos os x em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ tais que $\|x\| = 0$ é o hipercone *LC* definido pela equação $x_0^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$, é denominado o

cone de luz de $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Se $x \neq 0$ e $\|x\| = 0$ então x é *tipo-luz*. Um vetor tipo-luz é *positivo* (resp. *negativo*) se $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$). O conjunto dos vetores tipo-luz positivos é denotado por LC_+^* e é denominado *cone de luz futuro*. A *esfera de luz* S_1^{m+1} é o conjunto dos pontos $x \in LC_+^*$ tais que $x_0 = 1$.

Se $\|x\| > 0$ então x é *tipo-espaco*. Assim x é tipo-espaco se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a inequação $x_0^2 < x_1^2 + \dots + x_m^2$.

O *exterior* de LC em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é o aberto de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ consistindo de todos os vetores tipo-espaco.

Se $\|x\|$ é imaginário então x é *tipo-tempo*. Assim x é tipo-tempo se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a inequação $x_0^2 > x_1^2 + \dots + x_m^2$.

Um vetor tipo-tempo é *positivo* (resp. *negativo*) se $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$). O *interior* de LC em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é o aberto de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ consistindo de todos os vetores tipo-tempo.

Proposição 2.1 *Se x e y são vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos) de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ e $t > 0$ então*

- (i) *o vetor tx é tipo-tempo positivo (resp. negativo);*
- (ii) *o vetor $x + y$ é tipo-tempo positivo (resp. negativo).*

Corolário 2.2 *O conjunto dos vetores tipo-tempo positivo (resp. negativo) é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.*

Transformações de Lorentz

Definição 2.3 *Uma função $\phi : \mathbb{R}_1^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{m+1}$ é uma transformação de Lorentz se*

$$\mathbf{b}(\phi(x), \phi(y)) = \mathbf{b}(x, y), \text{ para todo } x, y \text{ em } \mathbb{R}_1^{m+1}.$$

Uma base $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é *Lorentz ortonormal* se $\mathbf{b}(v_0, v_0) = -1$ e $\mathbf{b}(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ caso contrário. Note que a base canônica $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é Lorentz ortonormal.

Teorema 2.4 *Uma função $\phi : \mathbb{R}_1^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{m+1}$ é uma transformação de Lorentz se, e somente se, ϕ é linear e $\{\phi(e_0), \phi(e_1), \dots, \phi(e_m)\}$ é uma base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.*

A matriz real $A_{(m+1) \times (m+1)}$ é *lorentziana* se a transformação linear associada $A : \mathbb{R}_1^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{m+1}$, definida por $A(x) = Ax$, for lorentziana. O conjunto de todas as matrizes $(m+1) \times (m+1)$ Lorentzianas equipado com a multiplicação de matrizes forma um grupo $O(1, m)$, chamado o *grupo de Lorentz* das matrizes $(m+1) \times (m+1)$. Pelo Teorema 2.4, o grupo $O(1, m)$ é naturalmente isomorfo ao grupo das transformações de Lorentz de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.

O seguinte teorema segue diretamente do Teorema 2.4.

Teorema 2.5 *Seja A uma matriz $(m+1) \times (m+1)$ com coeficientes reais. Então são equivalentes:*

- (i) *A matriz A é lorentziana.*
- (ii) *As colunas de A formam uma base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.*
- (iii) *A matriz A satisfaz a equação $A^t J A = J$, sendo que J é a matriz que se obtém da matriz identidade multiplicando-se a primeira linha por -1 .*
- (iv) *A matriz A satisfaz a equação $A J A^t = J$.*
- (v) *As linhas de A formam uma base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.*

Pelo Corolário 2.2, o conjunto dos vetores tipo-tempo de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ tem duas componentes conexas, o conjunto dos vetores tipo-tempo positivos e o conjunto dos vetores tipo-tempo negativos. Uma matriz lorentziana A é *positiva* (resp. *negativa*) se A transforma vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos) em vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos). Por exemplo, a matriz J é negativa. Por continuidade, uma matriz lorentziana é positiva ou negativa.

Seja $PO(1, m)$ o conjunto de todas as matrizes positivas de $O(1, m)$. Então $PO(1, m)$ é um subgrupo de índice dois de $O(1, m)$. O grupo $PO(1, m)$ é chamado o *grupo de Lorentz positivo*.

Definição 2.6 *Dois vetores x, y em $\mathbb{R}_1^{m+1}$ são Lorentz ortogonais se $\mathbf{b}(x, y) = 0$.*

Teorema 2.7 *Sejam x, y vetores não-nulos e Lorentz ortogonais em $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Se x é tipo-tempo então y é tipo-espço.*

Definição 2.8 *Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Então V é*

- (i) *tipo-tempo* se V contém um vetor tipo-tempo,
- (ii) *tipo-espaço* se todo vetor não-nulo em V é tipo-espaço,
- (iii) *tipo-luz* se todo vetor não-nulo de V é um vetor tipo-luz ou tipo-espaço.

É conveniente classificar os hiperplanos de $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Seja

$$HP(\mathbf{v}, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{m+1} : \mathbf{b}(x, \mathbf{v}) = c\}$$

o *hiperplano Lorentz ortogonal* à $\mathbf{v}$. Em analogia com a definição anterior temos que, $HP(\mathbf{v}, c)$ é um *hiperplano tipo-tempo*, *tipo-espaço* ou *tipo-luz* se $\mathbf{v}$ for tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz, respectivamente. As hipersuperfícies umbílicas de H^m são dadas pelas interseções $H^m \cap HP(\mathbf{v}, c)$. A hipersuperfície $H^m \cap HP(\mathbf{v}, c)$ é denominada *hiperesfera*, *hiperplano* (*hiperplano eqüidistante*) ou *hiperhoroesfera* se $\mathbf{v}$ for tipo-tempo, tipo-espaço e $c = 0$ (tipo-espaço e $c \neq 0$) ou tipo-luz, respectivamente.

Os seguintes resultados são importantes na demonstração do Teorema 2.15.

Teorema 2.9 *Para cada dimensão n , a ação natural de $PO(1, m)$ no conjunto dos n -subespaços vetoriais tipo-tempo de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ é transitiva.*

Teorema 2.10 *Sejam x, y vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos) em $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Então $\mathbf{b}(x, y) \leq \|x\| \|y\|$ e a igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.*

O Ângulo Tipo-Tempo entre Vetores Tipo-Tempo

Sejam x e y vetores tipo-tempo positivos (negativos) de $\mathbb{R}_1^{m+1}$. Pelo teorema 2.10, existe um único número real não-negativo $\eta(x, y)$ tal que

$$\mathbf{b}(x, y) = \|x\| \|y\| \cosh(\eta(x, y))$$

O ângulo tipo-tempo lorentziano entre x e y é definido por $\eta(x, y)$. Note que $\eta(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = \lambda y$ com $\lambda > 0$.

2.2 O Espaço Hiperbólico

O produto interno de Lorentz induz na variedade

$$H^m = \{x \in \mathbb{R}_1^{m+1} : \mathbf{b}(x, x) = -1 \text{ e } x_0 > 0\}$$

uma métrica riemanniana e assim H^m é uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante -1 . H^m é denominado o *espaço hiperbólico*.

Sejam x, y vetores em H^m e seja $\eta(x, y)$ o ângulo tipo-tempo lorentziano entre x e y . A *distância hiperbólica* entre x e y é definida pelo número real

$$d_H(x, y) = \eta(x, y).$$

Como $\mathbf{b}(x, y) = \|x\|\|y\|\cosh(\eta(x, y))$, temos a equação

$$\cosh(d_H(x, y)) = -\mathbf{b}(x, y).$$

Provaremos que d_H é uma métrica em H^m , mas antes precisamos de alguns resultados preliminares sobre produtos vetoriais em $\mathbb{R}^3$.

Produto Vetorial Lorentziano

Sejam x, y vetores em $\mathbb{R}^3$ e seja

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O *produto vetorial lorentziano* de x e y é definido por

$$x \wedge y = J(x \times y),$$

onde $x \times y$ indica o produto vetorial usual. Observe que

$$\mathbf{b}(x, x \wedge y) = \mathbf{b}(x, J(x \times y)) = \langle x, x \times y \rangle = 0,$$

$$\mathbf{b}(y, x \wedge y) = \mathbf{b}(y, J(x \times y)) = \langle y, x \times y \rangle = 0.$$

Portanto $x \wedge y$ é Lorentz ortogonal a x e y .

Lema 2.11 *Se x e y são vetores em $\mathbb{R}^3$ então $x \wedge y = J(x) \times J(y)$.*

Teorema 2.12 *Se w, x, y, z são vetores em $\mathbb{R}^3$ então*

$$(i) \quad x \wedge y = -y \wedge x,$$

$$(ii) \quad \mathbf{b}((x \wedge y), z) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$(iii) \quad x \wedge (y \wedge z) = \mathbf{b}(x, y)z - \mathbf{b}(z, x)y,$$

$$(iv) \quad \mathbf{b}((x \wedge y), z \wedge w) = \begin{vmatrix} \mathbf{b}(x, w) & \mathbf{b}(x, z) \\ \mathbf{b}(y, w) & \mathbf{b}(y, z) \end{vmatrix}.$$

Corolário 2.13 *Se x, y são vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos) de $\mathbb{R}_1^3$, então $x \wedge y$ é tipo-espaço e $\|x \wedge y\| = -\|x\|\|y\|\sinh(\eta(x, y))$.*

Corolário 2.14 *Se x e y são vetores tipo-espaço de $\mathbb{R}^3$ então*

$$(i) \quad |\mathbf{b}(x, y)| < \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x \wedge y \text{ é tipo-tempo},$$

$$(ii) \quad |\mathbf{b}(x, y)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x \wedge y \text{ é tipo-luz},$$

$$(iii) \quad |\mathbf{b}(x, y)| > \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x \wedge y \text{ é tipo-espaço}.$$

Teorema 2.15 *A função distância hiperbólica d_H é uma métrica em H^m .*

Demonstração: A função d_H é claramente não-negativa e simétrica, e não-degenerada pelo Teorema 2.10. Só resta então provar a desigualdade triangular

$$d_H(x, z) \leq d_H(x, y) + d_H(y, z).$$

As transformações de Lorentz positivas de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ atuam em H^m e obviamente preservam distâncias hiperbólicas. Portanto, temos a liberdade de transformar x, y, z por uma transformação de Lorentz positiva. Os vetores x, y, z geram um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{m+1}$ de dimensão ≤ 3 . Pelo Teorema 2.9, podemos supor que x, y, z estão no subespaço de $\mathbb{R}^{m+1}$ gerado por e_0, e_1, e_2 . Em outras palavras, podemos assumir que $m = 2$. Pelo Corolário 2.13, temos

$$|\mathbf{b}(x \wedge y, y \wedge z)| \leq \|x \wedge y\|\|y \wedge z\|$$

e assim

$$\begin{aligned} \cosh(\eta(x, y) + \eta(y, z)) &= \cosh(\eta(x, y))\cosh(\eta(y, z)) + \sinh(\eta(x, y))\sinh(\eta(y, z)) \\ &= \mathbf{b}(x, y)\mathbf{b}(y, z) + \|x \wedge y\|\|y \wedge z\| \\ &\geq \mathbf{b}(x, y)\mathbf{b}(y, z) + \mathbf{b}(x \wedge y, y \wedge z) \\ &= \mathbf{b}(x, y)\mathbf{b}(y, z) + \mathbf{b}(x, z)\mathbf{b}(y, y) - \mathbf{b}(x, y)\mathbf{b}(y, z) \\ &= -\mathbf{b}(x, z) = \cosh(\eta(x, z)). \end{aligned}$$

Portanto, temos $\eta(x, z) \leq \eta(x, y) + \eta(y, z)$.

A métrica d_H em H^m é chamada *métrica hiperbólica*. A topologia de H^m determinada por d_H é a mesma que provém da métrica euclidiana.

Teorema 2.16 *Toda transformação de Lorentz positiva de $\mathbb{R}_1^{m+1}$ restringe-se a uma isometria de H^m , e toda isometria de H^m estende-se a uma única transformação de Lorentz positiva de $\mathbb{R}_1^{m+1}$.*

2.2.1 Três Classes de Funções

Nesta seção introduzimos três classes de funções distância que permitem caracterizar as subvariedades umbílicas do espaço hiperbólico H^m , veja [10].

Para p em H^m , defina a função L_p em H^m por,

$$L_p(x) = (\cosh(-\mathbf{b}(x, p)))^2 \text{ para } x \in H^m$$

isto é, $L_p(x)$ é o quadrado da distância em H^m de p à x . Seja

$$S(p, r) = \{x \in H^m \mid L_p(x) = r^2\}.$$

Então para $0 < r < \infty$,

- (i) $S(p, r)$ é uma hipersuperfície umbílica, compacta e de curvatura constante $\sinh^{-2}(r)$, denominada *hiperesfera*.
- (ii) A distância de $S(p, r)$ à $S(p, s)$ é $|r - s|$ para $0 < s < \infty$.
- (iii) Toda hipersuperfície completa de curvatura positiva é da forma $S(p, r)$ com p e r sendo unicamente determinados.

Os hiperplanos hiperbólicos e suas hipersuperfícies eqüidistantes também podem ser caracterizados como conjuntos de nível. Seja S_1^m o *espaço de Sitter* definido por

$$S_1^m = \{x \in \mathbb{R}_1^{m+1} \mid \mathbf{b}(x, x) = 1\}.$$

Para cada hiperplano π existe um ponto σ em S_1^m tal que

$$\pi = \{x \in H^m \mid \mathbf{b}(x, \sigma) = 0\}.$$

O ponto σ é denominado polo do hiperplano π , e σ é determinado por π a menos de sinal. Fixe um polo σ de π , e seja

$$L_\pi(x) = \sinh^{-1}(\mathbf{b}(x, \sigma)), \text{ para } x \in H^m,$$

isto é, $L_\pi(x)$ é a distância de x ao hiperplano π , e seja

$$\Omega(\sigma, r) = \{x \in H^m \mid L_\pi(x) = r\}.$$

Portanto $\pi = \Omega(\sigma, 0)$. Então para $-\infty < r < \infty$,

- (i) $\Omega(\sigma, r)$ é uma hipersuperfície umbílica, completa e de curvatura constante $\frac{-1}{\cosh^2(r)}$.
- (ii) A distância de $\Omega(\sigma, r)$ à $\Omega(\sigma, s)$ é $|r - s|$ para $-\infty < s < \infty$.
- (iii) Toda hipersuperfície umbílica completa de curvatura negativa é da forma $\Omega(\sigma, r)$, com σ e r sendo determinados a menos de sinal. Na verdade, $\Omega(-\sigma, -r) = \Omega(\sigma, r)$, e uma escolha de σ ou r determina o outro.

Finalmente, consideramos as horoesferas, i.e. as hipersuperfícies umbílicas, completas de curvatura seccional constante nula de H^m . Considere o cone de luz futuro

$$LC_+^\infty \{x \in \mathbb{R}_1^{m+1} \mid \mathbf{b}(x, x) = 0, x_0 > 0\}.$$

Através de um argumento simples pode-se mostrar que se $v \in V^m$, $x \in H^m$, então $\mathbf{b}(x, v) < 0$. Seja h uma horoesfera arbitrária de H^m . Então existe um único $v \in V^m$ tal que

$$h = \{x \in H^m \mid \mathbf{b}(x, v) = -1\}.$$

Seja

$$L_h(x) = \ln(-\mathbf{b}(x, v)), \text{ para } x \in H^m.$$

isto é, $L_h(x)$ é a distância de x à horoesfera h , e seja

$$H(v, r) = \{x \in H^m \mid L_h(x) = r\}.$$

Portanto $h = H(v, 0)$. Então para $-\infty < r < \infty$,

- (i) $H(v, r)$ é uma horoesfera.
- (ii) A distância de $H(v, r)$ à $H(v, s)$ é $|r - s|$ para $-\infty < s < \infty$.
- (iii) Toda horoesfera ocorre como uma $H(v, r)$. Entretanto, v é determinado a menos de um fator positivo. Uma vez escolhido v , r é unicamente determinado.

2.3 Projecção Estereográfica

Sejam $p \in H^m$, $E_p^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \mathfrak{b}(x, p) = 0\}$ o hiperplano tangente a H^m no ponto p trasladado para a origem, $D_p^m = \{y \in E_p \mid \mathfrak{b}(y, y) < 1\}$ a bola aberta de raio 1 e centrada na origem de E_p^m , que é denominada a *bola de Poincaré*.

Definição 2.17 *O difeomorfismo*

$$P : H^m \rightarrow D_p^m; \quad P(x) = -p + e^\sigma(x + p) \text{ onde } e^{-\sigma} = 1 - \mathfrak{b}(x, p)$$

é denominado projecção estereográfica com pólo $-p$.

Geometricamente $P(x)$ é a intersecção de D_p^m com a reta que passa pelos pontos $-p$ e x , veja Figura 2.1. A inversa da projecção estereográfica é

$$P^{-1} : D_p^m \rightarrow H^m; \quad P^{-1}(x) = -p + e^\delta(x + p) \text{ onde } e^{-\delta} = \frac{1 - \mathfrak{b}(x, x)}{2}.$$

Figura 2.1: Projecção estereográfica com $p = e_0$.

Observamos que $U \subset H^m$ é uma subvariedade umbílica se, e somente se, $P(U)$ é uma subvariedade umbílica de E_p^m pois P é uma aplicação conforme. Para maiores detalhes indicamos o artigo [9].

Capítulo 3

Imersões Justas e “Taut” em Espaços Hiperbólicos

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados conhecidos sobre imersões justas e “taut” em espaços hiperbólicos. Estes resultados datam do final da década de 70 e estão essencialmente contidos nos artigos [7, 10, 11] de T. E. Cecil e P. J. Ryan.

Dentre as referências citadas acima, o artigo [11] é o que contém os principais resultados da teoria e desempenhou um papel fundamental no nosso trabalho. Nesse artigo os autores generalizam para imersões em H^m o estudo de imersões justas e “taut” em espaços euclidianos desenvolvida por S. Carter e A. West em [6].

Um dos principais resultados é o seguinte teorema, que estabelece uma condição equivalente para que uma imersão na bola de Poincaré seja um mergulho “taut” no sentido euclidiano.

Teorema 3.1 *Sejam $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão de uma variedade fechada e conexa, e P uma projeção estereográfica com polo arbitrário. Então $P \circ f$ é um mergulho “taut” no sentido euclidiano se, e somente se, toda função não-degenerada de cada um dos três tipos (L_p, L_π, L_h) é uma função perfeita.*

Demonstração: Ver [11, Teorema 2.1].

3.1 Aplicações e Imersões “Taut” em H^m

Definição 3.2 *Seja X um espaço topológico compacto. Uma aplicação $f : X \rightarrow H^m$ é “taut” se para toda bola fechada ou complemento de bola aberta Ω em H^m , o homomor-*

fismo induzido

$$H_*(f^{-1}(\Omega); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é injetivo.

Para imersões no espaço hiperbólico, assim como no caso euclidiano, pode-se provar o seguinte resultado.

Proposição 3.3 *Sejam M uma variedade fechada e $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão. Então f é “taut” se, e somente se, toda L_p de Morse, $p \in H^m$, é uma função perfeita.*

Por intermédio das funções perfeitas pode-se generalizar o conceito de imersões “taut” para variedades não-compactas. Para maiores detalhes veja [11, 12]. Quando $\dim(M) = 2$, para que $f : M \rightarrow H^m$ seja “taut” é necessário e suficiente que f possua a propriedade dos dois pedaços com respeito a hiperesferas de H^m .

Em [7], o autor utiliza a teoria de Morse para caracterizar as esferas métricas de H^m , como consequência tem-se o seguinte resultado, veja [7, Teorema 2].

Teorema 3.4 *Seja $f : S^n \rightarrow H^m$ uma imersão. Se f é “taut” então f mergulha S^n como uma esfera métrica de H^m .*

Assim como no caso euclidiano, as imersões “taut” são mergulhos.

Lema 3.5 *Toda imersão “taut” $f : M \rightarrow H^m$ é um mergulho.*

A demonstração deste resultado segue as mesmas linhas do análogo euclidiano, conforme [11, Lema 3.2].

Em [2], Banchof provou que uma superfície fechada e “taut” em $\mathbb{R}^3$ deve ser uma esfera ou uma ciclode de Dupin. Para encerrar esta seção apresentamos o principal resultado sobre superfícies “taut” em H^3 obtido por Cecil e Ryan em [11]. Observe-se que este teorema não segue diretamente dos resultados de Banchof sobre superfícies “taut” em $\mathbb{R}^3$ e é um dos mais profundos teoremas de [11].

Teorema 3.6 *Seja $f : M^2 \rightarrow H^3$ uma imersão “taut” de uma superfície fechada e conexa. Seja $P : H^3 \rightarrow D^3$ uma projeção estereográfica com polo arbitrário. Então $P \circ f$ mergulha M em D^3 como uma esfera euclidiana ou uma ciclode de Dupin.*

3.2 Imersões Justas no Espaço Hiperbólico

Definição 3.7 *Uma aplicação $f : X \rightarrow H^m$ de um espaço topológico compacto X no espaço hiperbólico H^m é justa se para todo semi-espaço hiperbólico fechado h em H^m , o homomorfismo induzido por inclusão*

$$H_*(f^{-1}(h); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é monomorfismo.

Quando $X = M^n$ é uma variedade diferenciável fechada e $f : M \rightarrow H^m$ é uma imersão então tem-se a seguinte caracterização:

Teorema 3.8 *Uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ de uma variedade fechada é justa se, e somente se, toda função de Morse L_π , onde π é um hiperplano de H^m , é uma função perfeita.*

Observemos que se $f : M^n \rightarrow H^m$ é uma imersão e se toda função de Morse do tipo L_π é uma função perfeita então M é compacta. Quando $n = 2$, justeza é equivalente a propriedade dos dois pedaços em relação a hiperplanos e hipersuperfícies equidistantes.

O seguinte resultado relaciona justeza hiperbólica com justeza euclidiana e mostra que a primeira é uma condição mais forte que a segunda, veja [11, Teorema 4.1].

Teorema 3.9 *Uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ é justa se, e somente se, $P \circ f : M \rightarrow D^m$ é justa no sentido euclidiano para toda projeção estereográfica P .*

A seguinte reformulação do Teorema 3.9 em termos da métrica de Poincaré $\mathbf{g} = P^*\mathbf{b}$ em D^m pode ser verificada, conforme [11, Corolário 4.2].

Corolário 3.10 *Seja $f : M \rightarrow D^m$ uma imersão. Seja $\mathbf{g}$ a métrica de Poincaré em D^m . Então f é uma imersão justa em $(D^m, \mathbf{g})$ se, e somente se, $\Phi \circ f : M \rightarrow D^m$ é justa no sentido euclidiano para toda isometria Φ de $(D^m, \mathbf{g})$.*

3.2.1 Imersões Justas de Esferas

Nesta subseção são caracterizadas as imersões justas de esferas S^n em H^m . O seguinte lema será necessário.

Lema 3.11 *Seja $f : M^n \rightarrow H^m$ uma imersão justa tal que $f(M^n)$ está contida em uma subvariedade umbílica de H^m . Então*

- (i) f é um mergulho “taut” de M^n em H^m ;
- (ii) $P \circ f$ é um mergulho “taut” no sentido euclidiano para toda escolha de projeção estereográfica P .

Demonstração: Pelo Teorema 3.1, $(ii) \Rightarrow (i)$. Para provar (ii) , seja V a subvariedade umbílica em questão. Podemos supor que V é uma hipersuperfície completa. Escolha uma projeção estereográfica P_q de H^m em D_q^m tal que

$$P_q(V) = S^{m-1} \cap D_q^m,$$

para alguma esfera euclidiana S^{m-1} . Como f é justa segue-se do Teorema 3.9 que $P_q \circ f$ é justa no sentido euclidiano. Como $P_q \circ f(M)$ está contida na esfera S^{m-1} , o Teorema 1.29 garante que $P_q \circ f$ é um mergulho “taut” no sentido euclidiano. Portanto, pelo Teorema 3.1, $P \circ f$ é “taut” no sentido euclidiano para qualquer escolha de projeção estereográfica P .

O Lema 3.11 fornece um interessante contraste entre justeza e justeza euclidiana. No caso euclidiano a justeza de uma imersão não é alterada quando se aumenta a codimensão da mesma. Mais precisamente, dado

$$M^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{m+k},$$

onde i é a aplicação de inclusão, então $i \circ f$ é justa se, e somente se, f é justa, veja Proposição 1.18. Agora considere uma imersão

$$M^n \xrightarrow{f} H^m \xrightarrow{i} H^{m+k},$$

onde i mergulha H^m como uma subvariedade totalmente geodésica de H^{m+k} . Pelo Lema 3.11, se f é justa então $i \circ f$ será justa somente se f for “taut”. Os próximos dois teoremas ilustram este fenômeno para M^n homeomorfa à S^n .

Teorema 3.12 *Seja $f : M^n \rightarrow H^{n+1+k}$, $k > 1$, uma imersão. Se M^n é homeomorfa à esfera S^n , então f é justa se, e somente se, f mergulha M^n como uma esfera métrica de dimensão n .*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que f seja justa. Pelo Teorema 3.9, $P \circ f$ é justa no sentido euclidiano para qualquer escolha de projeção estereográfica P e assim,

pelo Teorema de Chern-Lashof, $P \circ f$ mergulha M^n como uma hipersuperfície convexa do espaço euclidiano $E^{n+1} \subset E^{n+k}$. Portanto f mergulha M^n na subvariedade umbílica $P^{-1}(E^{n+1})$. Pelo Lema 3.11, f é “taut” e portanto segue do Teorema 3.4 que $f(M^n)$ é uma esfera métrica.

Reciprocamente, se $f(M)$ é uma esfera métrica, então $P \circ f(M)$ é uma esfera euclidiana. Portanto $P \circ f$ é “taut” no sentido euclidiano e pelo Teorema 3.1 f é justa.

O próximo teorema, cuja demonstração será omitida, trata de imersões de S^n em H^{n+1} .

Teorema 3.13 *Seja M uma variedade homeomorfa à S^n . Uma imersão $f : M \rightarrow H^{n+1}$ é justa se, e somente se, f é um mergulho cujas curvaturas principais, com respeito a um conveniente campo de vetores normais, satisfazem $\lambda \geq 1$ em M .*

3.2.2 Um Limite para a Codimensão de Imersões Justas

Recordemos que uma imersão num espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ é substancial se sua imagem não está contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{R}^m$. Kuiper provou em [23] que uma imersão substancial de M^n em $\mathbb{R}^m$ é justa somente se $m \leq n(n+3)/2$. Além disso, este limite superior é atingido somente se M é uma variedade Veronese, como demonstrado para $n=2$ por Kuiper em [25] e para $n > 2$ por Little e Pohl em [29].

Utilizando o Teorema 3.9 e o Lema 3.11 obtêm-se resultados análogos para subvariedades de espaço hiperbólico. Uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ é *substancial* se $f(M)$ não está contida em nenhum hiperplano de H^m .

Teorema 3.14 *Seja $f : M^n \rightarrow H^m$ uma imersão justa e substancial. Então $m \leq n(n+3)/2$. Além disso, se $m = n(n+3)/2$, então $P \circ f$ mergulha M^n como uma variedade Veronese para toda projeção estereográfica P .*

A demonstração segue do caso euclidiano, veja [11, Teorema 4.4].

3.3 Observações sobre as funções L_h

Como consequência do fato de que toda horoesfera pode ser arbitrariamente aproximada por uma família de esferas ou por uma família de hipersuperfícies eqüidistantes, Cecil e Ryan anunciaram o seguinte resultado, veja [11, Teorema 5.1].

Teorema 3.15 *Seja $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão de uma variedade fechada. Se f é justa ou “taut”, então toda L_h não-degenerada é perfeita.*

Eles também observaram que se $f : M^2 \rightarrow H^m$ é uma imersão, então para que toda L_h de Morse seja uma função perfeita é necessário e suficiente que f tenha a propriedade dos dois pedaços em relação a horoesferas.

Na década seguinte, em 1985, Cecil e Ryan no livro [12] fornecem um compêndio dos resultados conhecidos sobre imersões justas e “taut” em espaços euclidianos e hipersuperfícies isoparamétricas. Nesse livro os autores também tratam de imersões justas e “taut” em espaços hiperbólicos, embora os resultados conhecidos sejam aqueles contidos nas referências [7, 10, 11].

Com relação à família de funções L_h , eles definem que uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ é horo-justa se toda L_h não-degenerada é uma função perfeita. Enfatizam que o principal resultado conhecido da teoria é que toda imersão justa e toda imersão “taut” de uma variedade compacta são imersões horo-justas, e propõem então o seguinte:

Estudar a classe das imersões horo-justas: em particular, determinar as imersões horo-justas de S^n e caracterizar quais superfícies que admitem imersão horo-justa em H^3 .

Este é o objeto de estudo do nosso trabalho, que tem início no próximo capítulo.

Capítulo 4

Aplicações Horo-justas

Iniciamos neste capítulo o estudo de imersões horo-justas, tema central deste trabalho.

Definimos horo-justeza para aplicações contínuas em espaços hiperbólicos em termos de injetividade em homologia. Consideramos apenas os modelos H^m e a bola de Poincaré D^m . Em dimensão 2 ou 3 é visualmente vantajoso trabalhar com o modelo D^m , enquanto que para utilizar a teoria de Morse é conveniente trabalhar com o modelo H^m .

Mostramos que toda aplicação horo-justa possui a propriedade dos dois pedaços com relação a horoesferas. Além disso, a PDPH é equivalente a dizer que toda função altura horoesférica é polar. Para imersões de superfícies em H^m , mostramos que os três conceitos são equivalentes. Mostramos também que uma imersão é horo-justa se, e somente se, toda L_h não-degenerada é uma função perfeita.

Como nas teorias de imersões justas no espaço euclidiano e no espaço hiperbólico, consideramos neste capítulo as imersões umbílicas e horo-justas. Mostramos que toda imersão horo-justa cuja imagem está contida numa esfera ou horoesfera é justa e “taut”.

4.1 Aplicações Horo-justas

Definição 4.1 *Uma aplicação f do espaço compacto X em H^m é horo-justa se para todo h -semi-espaço fechado $\mathcal{H}$ em H^m , o homomorfismo induzido*

$$H_*(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é injetivo. Um subconjunto $U \subset H^m$ é horo-justo se a inclusão $i : U \rightarrow H^m$ é horo-justa.

A definição acima faz sentido para qualquer modelo de espaço hiperbólico, em particular para o modelo da bola de Poincaré. Recordemos que para todo $p \in H^m$, $E_p^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \mathbf{b}(x, p) = 0\}$ é o hiperplano tangente a H^m no ponto p trasladado para a origem, $D_p^m = \{y \in E_p^m \mid \mathbf{b}(y, y) < 1\}$ é a bola aberta de raio 1 e centrada na origem de E_p^m e $P_p : H^m \rightarrow D_p^m$ é a projeção estereográfica com polo $-p$. Então temos a seguinte definição.

Definição 4.2 *Uma aplicação f do espaço compacto X em D_p^m é horo-justa se para todo h-semi-espaço fechado $\mathcal{H}$ em D_p^m , o homomorfismo induzido*

$$H_*(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2)$$

na homologia de Čech é injetivo.

O difeomorfismo P_p leva h-semi-espaços de H^m em h-semi-espaços de D_p^m e assim, naturalmente, as definições 4.1 e 4.2 são equivalentes.

A vantagem da definição 4.1 é que quando M^n é uma variedade fechada e $f : M^n \rightarrow H^m$ é uma imersão, pode-se obter uma equivalência de horo-justeza em termos de funções perfeitas. Mais precisamente, uma imersão $f : M^n \rightarrow H^m$ com M^n fechada, será horo-justa se, e somente se, toda função altura horoesférica L_h não-degenerada for uma função $\mathbb{Z}_2$ -perfeita. O ponto central é mostrar que para uma tal imersão, a injetividade em homologia de h-semi-espaços determinados pelas funções altura não-degeneradas acarreta a injetividade em homologia de h-semi-espaços determinados pelas funções altura degeneradas. Para isto faremos uso da continuidade da homologia de Čech e do lema abaixo. Fixemos as notações:

$$M_r(v) = \{x \in M \mid L_h(x) \leq r\}$$

$$M_r^-(v) = \{x \in M \mid L_h(x) < r\}$$

Lema 4.3 *Seja $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão da variedade fechada M . Suponha que U é um aberto de M que contém $M_r(v)$ para algum $v \in S^{m-1}$, $r \in \mathbb{R}$. Então existe uma função altura horoesférica não-degenerada $L_{h'}$ e $s \in \mathbb{R}$ tais que*

$$M_r(v) \subset M_s^-(v') \subset M_s(v') \subset U.$$

Demonstração: Como $M - U - U^c$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $M_{r+\varepsilon}(v) \subset U$; caso contrário, existiria uma sequência $\{x_n\}$ em U^c com a seguinte propriedade

$$x_n \in M_{r+\frac{1}{n}}(v) \cap U^c.$$

Por compacidade, existe uma subsequência x_{n_j} tal que $x_{n_j} \rightarrow x \in U^c$, e por continuidade $x \in M_r(v)$, uma contradição.

Seja $K = \max\{\langle f(x), \xi \rangle = \ell_\xi(x); x \in M \text{ e } \xi \in S^m\}$ e como todo $w \in S_+^{m-1}$ é da forma $(1, a)$ com $a \in 0 \times S^{m-1}$, podemos escolher $q \in 0 \times S^{m-1}$ ortogonal a p , onde $v = (1, p)$. Seja $p' = \cos(\theta)p + \sin(\theta)q$, $|\theta| < \pi/2$. Então, $p = \sec(\theta)p' - \tan(\theta)q$, e dado $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} |L_h(x) - L_{h'}(x)| &= |\mathbf{b}(v, f(x)) - \mathbf{b}(v', f(x))| = |\langle (-1, p), f(x) \rangle - \langle (-1, p'), f(x) \rangle| \\ &= |\langle p - p', f(x) \rangle| = |\langle (\sec(\theta) - 1)p' - \tan(\theta)q, f(x) \rangle| \\ &= |(\sec(\theta) - 1)\ell_{p'}(x) - \tan(\theta)\ell_q(x)| \\ &\leq |\sec(\theta) - 1||\ell_{p'}(x)| + |\tan(\theta)||\ell_q(x)| \\ &\leq (|\sec(\theta) - 1| + |\tan(\theta)|)K. \end{aligned}$$

Escolha θ pequeno tal que

$$|\sec(\theta) - 1| < \varepsilon/2K, \text{ e } |\tan(\theta)| < \varepsilon/2K.$$

Então,

$$|L_h(x) - L_{h'}(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in M$, e portanto

$$M_r(v) \subset M_{r+\frac{\varepsilon}{2}}^-(v') \subset M_{r-\frac{\varepsilon}{2}}(v') \subset M_{r+\varepsilon}(v) \subset U$$

para todo v' numa vizinhança de v em S_+^{m-1} determinada por θ , e portanto para algum v' com $L_{h'}$ não-degenerada.

Teorema 4.4 *Uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ de uma variedade fechada é horo-justa se, e somente se, toda função altura horoesférica L_h de Morse é uma função perfeita.*

Demonstração: Se f é horo-justa e L_h é uma função altura horoesférica de Morse, então, para todo h-semi-espço fechado $\mathcal{H}$ determinado por L_h tem-se a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow H_*(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

ou seja, L_h é uma função perfeita, conforme definição 1.3.

Reciprocamente, suponhamos que toda função altura horoesférica não-degenerada seja uma função perfeita. Assim, para todo h-semi-espço fechado $\mathcal{H}$ determinado por uma dessas funções, a inclusão de $f^{-1}(\mathcal{H})$ em M induz um monomorfismo na homologia de Čech. Suponhamos então que $f^{-1}(\mathcal{H}) = M_r(v)$ para uma função altura horoesférica degenerada L_h e $r \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que o homomorfismo

$$H_*(M_r(v); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

é ainda injetivo. Para tanto, faremos uso da continuidade da homologia de Čech e do Lema 4.3. Com o auxílio do Lema 4.3 produziremos uma seqüência encaixante

$$(4.1) \quad f^{-1}(\mathcal{H}_i) \supset f^{-1}(\mathcal{H}_{i+1}) \supset \cdots \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}(\mathcal{H}_j) = M_r(v), \quad i = 1, 2, \dots$$

tal que os homomorfismos na homologia de Čech com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

$$(4.2) \quad H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_i)) \longrightarrow H_*(M), \quad i = 1, 2, \dots$$

sejam injetivos. Se 4.1 e 4.2 estiverem satisfeitas, então

$$(4.3) \quad H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_i)) \longrightarrow H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_j)) \text{ é injetivo para todo } i > j.$$

Pela continuidade da homologia de Čech, veja página 261 de [16], temos

$$H_*(M_r(v)) = \varinjlim_{i \rightarrow \infty} H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_i)).$$

Por 4.3 e pelo Teorema 3.4 de [16] sobre limites inversos segue-se que o homomorfismo

$$H_*(M_r(v)) \longrightarrow H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_i))$$

é injetivo para todo i . Portanto também será injetivo o homomorfismo

$$H_*(M_r(v)) \longrightarrow H_*(M).$$

Para concluir a demonstração basta construir uma tal seqüência. Para $i = 1$ seja $U_1 = M_{r+1}^-(v)$. Pelo Lema 4.3 existem L_{h_1} não-degenerada e $s_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$M_r(v) \subset M_{s_1}^-(v_1) \subset M_{s_1}(v_1) \subset U_1.$$

Tomemos $\mathcal{H}_1 = \{x \in H^m; L_{h_1}(x) \leq s_1\}$. Claramente $f^{-1}(\mathcal{H}_1) = M_{s_1}(v_1) \supset M_r(v)$ e além disso vale

$$0 \longrightarrow H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_1); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

pois L_{h_1} é uma função $\mathbb{Z}_2$ -perfeita.

Para $i = 2$, seja $U = M_{s_1}^-(v_1)$. Pelo Lema 4.3 e parte de sua demonstração, existem L_{h_2} não-degenerada, $s_2 \in \mathbb{R}$ e m_2 natural tal que

$$M_r(v) \subset M_{s_2}(v_2) \subset M_{s_2}(v_2) \subset M_{r+\frac{1}{m_2}}(v) \subset U$$

Tomemos $\mathcal{H}_2 = \{x \in H^m; L_{h_2}(x) \leq s_2\}$. Claramente $f^{-1}(\mathcal{H}_1) \supset f^{-1}(\mathcal{H}_2) \supset M_r(v)$ e além disso vale

$$0 \longrightarrow H_*(f^{-1}(\mathcal{H}_i); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(M; \mathbb{Z}_2), \quad i = 1, 2,$$

pois L_{h_i} , $i = 1, 2$, são funções perfeitas.

Repetindo indutivamente os argumentos acima obtemos uma seqüência encaixante $\{f^{-1}(\mathcal{H}_i)\}$ tal que, (4.2) se verifica e além disso, como $M_r(v) \subset f^{-1}(\mathcal{H}_i) \subset M_{r+\frac{1}{m_i}}$ com $\{m_i\}$ crescente, segue-se que $\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(\mathcal{H}_i) = M_r(v)$.

Corolário 4.5 *Sejam M uma variedade fechada e $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão. Para que f seja horo-justa, é necessário e suficiente que toda L_h não-degenerada possua $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos em M .*

O próximo teorema foi o primeiro resultado publicado, sobre imersões horo-justas, ver [11, Teorema 5.1], onde os autores apresentam um esboço da prova.

Teorema 4.6 *Sejam M uma variedade fechada e $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão. Se f é justa ou “taut” então f é horo-justa.*

Demonstração: Se f não fosse horo-justa existiria uma função L_h de Morse com mais do que $\gamma(M)$ pontos críticos. Consequentemente, existiriam funções altura lineares ℓ_v de Morse próximas a L_h com mais do que $\gamma(M)$ pontos críticos. Como v pode ser tipo-tempo ou tipo-espaco, f não seria justa nem “taut”, uma contradição.

4.2 A Propriedade dos Dois Pedacos em relação a horoesferas

Banchoff introduziu em [1] a propriedade dos dois pedacos: uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ de um espaço topológico conexo possui a propriedade dos dois pedacos (PDP) se $f^{-1}(\mathcal{H})$

é conexo para todo semi-espço fechado $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^m$. A importância desta propriedade está no fato de que, em dimensão dois, ela coincide com justeza.

Os hiperplanos de $\mathbb{R}^m$ são as subvariedades umbílicas de curvatura nula, e cada hiperplano em $\mathbb{R}^m$ determina dois semi-espços fechados.

No caso hiperbólico, as horoesferas são as subvariedades umbílicas de curvatura seccional nula. Assim como hiperplanos em $\mathbb{R}^m$, cada horoesfera de H^m determina dois h-semi-espços fechados: $\mathcal{H} = \{y \in H^m \mid L_h(y) \geq r\}$ ou $\mathcal{H} = \{y \in H^m \mid L_h(y) \leq r\}$

Nesta seção, analogamente ao caso euclidiano, estudamos a propriedade dos dois pedaços em relação a horoesferas e a relacionamos com horo-justeza.

Definição 4.7 *Seja X um espaço topológico conexo. Uma aplicação $f : X \rightarrow H^m(D^m)$ tem a propriedade dos dois pedaços em relação a horoesferas (PDPH) se $f^{-1}(\mathcal{H})$ é conexo para todo h-semi-espço fechado $\mathcal{H}$ em $H^m(D^m)$.*

Como no caso euclidiano, horo-justeza é uma condição suficiente para a PDPH.

Teorema 4.8 *Sejam X um espaço topológico conexo e $f : X \rightarrow H^m$ uma aplicação contínua. Se f é horo-justa então f tem a PDPH.*

Demonstração: O número de componentes conexas de $f^{-1}(\mathcal{H})$ é dado por $\beta_0(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2)$; logo, devemos mostrar que $\beta_0(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) = 1$ para todo h-semi-espço fechado $\mathcal{H}$. Como f é horo-justa, temos a seguinte seqüência exata

$$0 \rightarrow H_0(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_0(X; \mathbb{Z}_2).$$

A conexidade de X garante que $\beta_0(X; \mathbb{Z}_2) = 1$, portanto $\beta_0(f^{-1}(\mathcal{H}); \mathbb{Z}_2) = 1$.

A recíproca do teorema acima é falsa conforme o seguinte exemplo:

Considere em D^3 o anel X dado por

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{16}, \text{ e } -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Claramente o conjunto X tem a PDPH. Seja $\mathcal{H}$ a horoesfera dada pela equação

$$(x + \frac{3}{4})^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{16}$$

e seja $\mathfrak{h}$ o h-semi-espço determinado pela inequação

$$(x + \frac{3}{4})^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{16}.$$

Figura 4.1: Anel com buraco.

A horoesfera $\mathcal{H}$ não intersecta os círculos da fronteira de X e portanto, $\mathfrak{h} \cap X$ é um anel com buraco, veja Figura 4.1. Portanto $H_1(\mathfrak{h} \cap X; \mathbb{Z}_2)$ tem dois geradores, isto é, $H_1(\mathfrak{h} \cap X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ enquanto que $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e assim X não é horo-justo.

Observação 4.9 *Não determinamos se existe ou não um exemplo de uma variedade sem fronteira que possui a PDPH e que não é horo-justa.*

A partir de agora estabelecemos uma série de resultados fundamentais para a demonstração do Teorema 4.15, que caracteriza imersões horo-justas de superfícies e mostra que para variedades fechadas de dimensão 2, a recíproca do teorema anterior é verdadeira. Estes resultados, inclusive o próprio Teorema 4.15, são análogos ao caso euclidiano. Para demonstrar o Teorema 4.15, traduzimos conceitos e resultados de justeza euclidiana para o contexto de horo-justeza. Observamos ainda que o Teorema 4.15 foi anunciado mas não demonstrado em [11].

Lema 4.10 *Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow H^m$ uma aplicação contínua. Dados $v \in S_+^{m-1}$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $N \subset S_+^{m-1}$ de v tais que,*

$$|\mathbf{b}(v, f(x)) - \mathbf{b}(w, f(x))| < \varepsilon, \quad \forall x \in M, \quad \forall w \in N$$

Demonstração: Sejam $v \in S_+^{m-1}$ e $\varepsilon > 0$.

A projeção $(x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto (0, x_1, \dots, x_m)$ restrita a S_+^{m-1} determina um difeomorfismo $\Psi : S_+^{m-1} \rightarrow S^{m-1} \subset 0 \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Seja $k = \max\{|\mathbf{b}(u, f(x))|, x \in M, u \in S_+^{m-1}\}$.

Sejam $p = \Psi(v)$ e $p' = \Psi(v')$ tais que $\langle p, p' \rangle = 0$. Se $q = \cos(\theta)p + \sin(\theta)p'$, com $\cos(\theta) \neq 0$ e $\Psi(w) = q$, então $p = \sec(\theta)q - \tan(\theta)p'$. Assim, para todo θ suficientemente

pequeno que satisfaz $|\sec(\theta) - 1| < \frac{\varepsilon}{2k}$ e $|\operatorname{tg}(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2k}$, tem-se

$$|\mathbf{b}(v, f(x)) - \mathbf{b}(w, f(x))| = |\mathbf{b}(p - q, f(x))| < \varepsilon, \quad \forall x \in M.$$

O conjunto $N' = \{q = \cos(\theta)p + \sin(\theta)p' \mid \theta \text{ satisfaz as condições acima}\}$ é uma vizinhança de p e assim $N = \Psi^{-1}(N')$ cumpre as condições requeridas.

Lema 4.11 *Sejam $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão e $W, U \subset M$ tais que U é aberto e $W \subset U \subset \overline{U} \subset M$. Suponha que para algum $v \in S_+^{m-1}$ tenha-se $L_h|_W \equiv a$ e $L_h(x) < a$, $\forall x \in \overline{U} - W$. Então existe uma vizinhança N de v em S_+^{m-1} tal que, para todo $v' \in N$, os pontos de máximo global de $L_{h'}|_{\overline{U}}$ ocorrem em U .*

Demonstração: Seja $a - 3\varepsilon = \max\{-\mathbf{b}(v, f(x)), x \in \operatorname{Fr}(U)\}$. Pelo lema 4.10 existe uma vizinhança N de v em S_+^{m-1} tal que,

$$|\mathbf{b}(v, f(x)) - \mathbf{b}(v', f(x))| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{U}, \quad \forall v' \in N.$$

Então, para cada $x \in W$, tem-se $-\mathbf{b}(v', f(x)) > a - \varepsilon$, enquanto que para $x \in \operatorname{Fr}(U)$, tem-se $-\mathbf{b}(v', f(x)) < a - 2\varepsilon$. Portanto $-\mathbf{b}(v', f(y))$ é um máximo global de $L_{h'}$ somente se $y \in U$.

Proposição 4.12 *Seja $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão de uma variedade compacta e conexa. Uma função L_h não-degenerada é polar se, e somente se, $f^{-1}(\mathcal{H})$ é conexo para todo h-semi-espço fechado $\mathcal{H}$ determinado por L_h .*

Demonstração: Seja L_h não-degenerada e polar.

Suponhamos que exista um h-semi-espço $\mathcal{H} = \{x \in H^m \mid L_h(x) \leq r\}$ tal que $f^{-1}(\mathcal{H})$ tenha pelo menos duas componentes conexas, V_1 e V_2 . Segue daí que L_h possui um ponto de mínimo local em V_1 e outro em V_2 ; uma contradição. O caso $\mathcal{H} = \{x \in H^m \mid L_h(x) \geq r\}$ é análogo. Portanto $f^{-1}(\mathcal{H})$ é conexo para todo h-semi-espço $\mathcal{H}$ determinado por L_h .

Reciprocamente, suponhamos que uma função L_h não-degenerada tenha, pelo menos, dois pontos de mínimo local, x_1 e x_2 com $r_1 = L_h(x_1) \leq L_h(x_2) = r_2$. Pelo lema de Morse existe uma vizinhança U de x_2 que não contém x_1 tal que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto fechado $V = \{x \in \overline{U} \mid L_h(x) \leq r_2 + \varepsilon\}$ é conexo e satisfaz $V \subset U$. Seja $\mathcal{H}$ o h-semi-espço fechado determinado pela desigualdade $L_h \leq r_2 + \varepsilon$. Então V é uma componente de $f^{-1}(\mathcal{H})$ e $x_1 \in f^{-1}(\mathcal{H}) - V$, ou seja, $f^{-1}(\mathcal{H})$ é desconexo. Analogamente mostra-se que L_h possui um único ponto de máximo local. Portanto L_h é polar.

Teorema 4.13 *Seja $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão de uma variedade fechada e conexa. Então f possui a PDPH se, e somente se, toda L_h não-degenerada é polar.*

Demonstração: Se f tem a PDPH então, pela Proposição 4.12, toda L_h não-degenerada é polar. Reciprocamente, suponhamos que f não tem a PDPH. Então existe um h-semi-espaço fechado $\mathcal{H}$ tal que $f^{-1}(\mathcal{H})$ é desconexo.

Suponhamos que $\mathcal{H}$ seja dado pela inequação $L_h \geq r$.

Sejam V_1 e V_2 duas componentes de $f^{-1}(\mathcal{H})$. Como V_1 e V_2 são compactos, existem abertos disjuntos U_1 e U_2 com $V_i \subset U_i$. Os pontos de máximo global de $L_h|_{U_i}$ ocorrem em V_i . Aplicando o Lema 4.11 para U_1 e U_2 , concluímos que existe uma $L_{h'}$ não-degenerada que possui um máximo local em U_1 e outro em U_2 . Segue-se daí que $L_{h'}$ não é polar.

Como corolário do teorema acima obtemos o seguinte: se $\dim(M) = 2$ então horo-justeza é equivalente a PDPH. Antes, porém, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 4.14 *Seja M^2 uma superfície fechada e conexa. Então:*

- (i) $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2) = 4 - \chi(M)$.
- (ii) *Para uma função não-degenerada φ em M , $\mu(\varphi) = \gamma(M)$ se, e somente se, φ é polar.*

Demonstração: Ver [12], Proposição 5.6, pg 27.

Teorema 4.15 *Sejam M^2 uma superfície fechada e conexa e $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *f é horo-justa.*
- (ii) *f tem a PDPH.*
- (iii) *toda L_h não-degenerada é polar.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.8, (i) $\Rightarrow$ (ii). A equivalência (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) decorre do Teorema 4.13.

Como toda L_h não-degenerada é polar, segue da Proposição 4.14 que toda L_h não-degenerada possui $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos em M . Portanto, pelo Corolário 4.5, (iii) $\Rightarrow$ (i).

Finalizamos esta seção com a seguinte observação.

Observação 4.16 *Se $f : S^1 \rightarrow H^m$ é uma imersão e L_h é de Morse e polar então L_h é automaticamente uma função perfeita. Portanto o Teorema 4.15 também se aplica para imersões $S^1 \rightarrow H^m$.*

4.3 Imersões Horo-justas e Umbílicas

Uma imersão $f : M \rightarrow N$ é umbílica se existe uma subvariedade umbílica W de N tal que $f(M) \subset W$. As imersões umbílicas desempenham um papel importante nas teorias de justeza euclidiana e hiperbólica.

Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma imersão justa e $f(M)$ está contida em uma esfera então f é um mergulho “taut”, ver [6, Teorema 2.1]. Por outro lado, se $f(M)$ está contida em um subespaço afim A^{m-1} de $\mathbb{R}^m$ então, em geral, não se pode dizer muito sobre f , a não ser é claro que f não é substancial e que $f : M^n \rightarrow A^{m-1}$ também é justa.

No caso hiperbólico a situação é completamente diferente. Se $f : M^n \rightarrow H^m$ é justa e $f(M)$ está contida em uma subvariedade umbílica de H^m , então f é um mergulho “taut” e $P \circ f$ é um mergulho “taut” no sentido euclidiano para toda projeção estereográfica P , conforme Lema 3.11.

Nesta seção investigamos a questão análoga no contexto de imersões horo-justas, i.e., como umbilicidade influencia horo-justeza. O seguinte teorema juntamente com o seu corolário são os principais resultados.

Teorema 4.17 *Sejam M^n uma variedade fechada e $f : M \rightarrow H^m$ uma imersão horo-justa cuja imagem está contida numa hipersfera ou em uma hiperhoroesfera. Então $P \circ f$ é justa no sentido euclidiano, onde P é a projeção estereográfica com polo $p = (-1, 0, \dots, 0)$. Em particular $P \circ f$ é um mergulho “taut” no sentido euclidiano.*

Demonstração: Notemos inicialmente que temos uma imersão $P \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e para que $P \circ f$ seja justa é suficiente mostrar que toda função altura $\ell_\xi(x) = \langle P \circ f(x), \xi \rangle$ não-degenerada é uma função perfeita.

Seja $\xi \in S^{m-1}$ tal que ℓ_ξ é uma função de Morse e consideremos o semi-espaco fechado Ω_r dado pela inequação $\ell_\xi \leq r$.

Devemos mostrar que o homomorfismo induzido

$$(4.4) \quad H_*((P \circ f)^{-1}(\Omega_r)) \longrightarrow H_*(M)$$

na homologia de Čech com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ é injetivo.

Se $f(M)$ está contida numa hipersfera então $P \circ f(M)$ está contida numa hipersfera euclidiana S . Podemos obter um h-semi-espaço fechado $\mathcal{H}$ na bola de Poincaré D^m tal que

$$(4.5) \quad (P \circ f)^{-1}(\Omega_r) = (P \circ f)^{-1}(\Omega_r \cap S) \cup (P \circ f)^{-1}(\mathcal{H} \cap S) = (P \circ f)^{-1}(\mathcal{H}).$$

Como f é horo-justa, concluímos que o homomorfismo em 4.4 é injetivo e portanto ℓ_ξ é uma função perfeita. Provamos assim que $P \circ f$ é justa. Como $P \circ f$ é justa e está contida numa esfera euclidiana segue de [6, Teorema 2.1] que $P \circ f$ é um mergulho “taut”.

O caso em que $f(M)$ está contida numa hiperhoro-esfera é semelhante. Neste caso, $P \circ f(M)$ está contida numa hiperhoro-esfera h de D^m e além disso h é uma esfera euclidiana menos um ponto c , ponto esse que tangencia o bordo de D^m .

Se L_h é de Morse e o hiperplano A determinado pela equação $\ell_\xi = r$ não contém o ponto c então Ω_r satisfaz (4.5) para algum h-semi-espaço fechado $\mathcal{H}$. Por outro lado, se $c \in A$ então não é possível obter Ω que satisfaça (4.5). Para contornar este problema lançamos mão da teoria de Morse.

Seja $M_r(\xi) = (P \circ f)^{-1}(\Omega_r)$. Se r é um valor regular de ℓ_ξ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ contém apenas valores regulares de ℓ_ξ . Logo, por [30, Teorema 3.1], existe $s \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ tal que $M_r(\xi)$ e $M_s(\xi)$ são difeomorfos e assim (4.4) está satisfeita para $M_r(\xi)$. Se r é um valor crítico de ℓ_ξ então por [30, pg 20] concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $M_r(\xi)$ é um retrato por deformação de $M_{r+\varepsilon}(\xi)$. Também neste caso (4.4) está satisfeita. Portanto ℓ_ξ é uma função perfeita.

Corolário 4.18 *Considerando as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos:*

- (i) f é um mergulho justo e “taut”.
- (ii) $P \circ f$ é um mergulho “taut” para toda projeção estereográfica P .

Demonstração: Seja P_0 a projeção estereográfica com polo $(-1, 0, \dots, 0)$, então, pelo Teorema 4.17, $P_0 \circ f$ é um mergulho “taut”. Portanto, pelo Teorema 3.1, f é um mergulho justo, “taut” e horo-justo. Aplicando novamente o Teorema 3.1, obtemos que $P \circ f$ é um mergulho “taut” para toda projeção estereográfica P .

Como toda imersão justa também é horo-justa, veja Teorema 3.15, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.19 *Seja $f : M^n \rightarrow H^m$ uma imersão de uma variedade fechada cuja imagem está contida numa hiperesfera ou numa hiperhoro-esfera. Então f é horo-justa se, e somente se, f é justa.*

O corolário acima motiva a seguinte questão:

Toda imersão horo-justa é justa?

Para responder esta questão devemos considerar as imersões $f : M \rightarrow H^m$ cuja imagem está contida em um hiperplano (ou hiperplano eqüidistante) de H^m e as imersões não-umbílicas. Outra questão a ser abordada é saber como horo-justeza influencia na codimensão de uma imersão.

Capítulo 5

Imersões Horo-justas de S^1 em H^m

O objetivo deste capítulo é estudar os mergulhos horo-justos de S^1 em H^m .

Para curvas contidas em H^2 ou em superfícies umbílicas de H^m , mostramos que horo-justeza é equivalente à justeza (hiperbólica).

5.1 Motivação e Lema Básico

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana fechada e parametrizada por comprimento de arco. Seja

$$t(s) = \cos(\theta(s))e_1 + \sin(\theta(s))e_2$$

o vetor tangente unitário a $\gamma(s)$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, e $\theta(s)$ é uma função diferenciável. A curvatura de γ é definida por $k(s) := \theta'(s)$.

A *curvatura absoluta total* de γ é

$$\tau(\gamma) = \int_a^b |k(s)| ds.$$

O comprimento da curva $t(s)$ no círculo unitário é dado por $\tau(\gamma)$. O valor mínimo possível para $\tau(\gamma)$ é 2π , e este mínimo é atingido precisamente quando γ é uma curva convexa. Este resultado é devido a Fenchel [17] e pode-se dizer que foi o primeiro sobre imersões justas.

Motivados por estas observações e pela ausência, na literatura, de resultados sobre imersões horo-justas $S^1 \rightarrow H^m$, iniciamos, cronologicamente, nosso trabalho com o estudo destas imersões.

Conforme observamos após o Teorema 4.15, temos:

Proposição 5.1 *Seja $f : S^1 \rightarrow H^m$ uma imersão. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) *f é horo-justa.*
- (ii) *f tem a PDPH.*
- (iii) *toda L_h não-degenerada é polar, i.e., possui em único ponto de mínimo local e um único ponto de máximo local.*

No seguinte lema mostramos que é suficiente considerar mergulhos de S^1 em H^m .

Lema 5.2 (Lema Básico) *Toda imersão horo-justa $S^1 \rightarrow H^m$ é um mergulho.*

Demonstração: Seja $f : S^1 \rightarrow H^m$ uma imersão horo-justa. No caso em questão, basta mostrar que f é injetiva. Suponhamos o contrário, i.e., existe $p \in H^m$ com mais de uma pré-imagem.

Seja L_h não-degenerada tal que $\mathfrak{h}_s = \{y \in H^m \mid L_h(y) = s\}$ intersecta $f(S^1)$ nos pontos distintos p e q .

Como f é horo-justa segue que $A = M_s(L_h) = \{x \in S^1 \mid L_h(x) \leq s\}$ é conexo, ou seja, A é um arco fechado de S^1 . Logo existe z no interior de A tal que $f(z) \in \mathfrak{h}_s$ e assim $L_h(z) = s$. Portanto z é um ponto crítico de L_h e conseqüentemente L_h não é polar, uma contradição com a Proposição 5.1.

5.2 Curvas em H^2

A primeira questão que abordamos sobre mergulhos horo-justos de S^1 em H^2 foi com respeito à convexidade. Mais precisamente, fizemos a seguinte pergunta:

Sejam $f : S^1 \rightarrow H^2$ um mergulho e $P : H^2 \rightarrow D^2$ a projeção estereográfica com polo $-p = (-1, 0, 0)$. A convexidade da curva $\alpha = P \circ f$ implica que f é horo-justo?

Recordemos a definição de curvas planas convexas. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Dizemos que γ é convexa se, para todo $s \in I$, a imagem $\gamma(I)$ está totalmente contida em um dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente em $\gamma(s)$.

A resposta à questão anterior é negativa conforme Proposição 5.1 e a Figura 5.1.

Em seguida, naturalmente, abordamos a questão recíproca, ou seja, a convexidade de $\alpha = P \circ f$ é uma condição necessária para o mergulho f ser horo-justo?

Figura 5.1: Exemplo de curva convexa que não é horo-justa.

Seja $f : S^1 \rightarrow H^2$ uma imersão, se f é justa então, pelo Teorema 4.6, f também é horo-justa e além disso, pelo Teorema 3.9, $P \circ f$ é justa no sentido euclidiano para qualquer projeção estereográfica P . Portanto para que exista uma curva horo-justa não-convexa é necessário que exista uma curva horo-justa que não seja justa.

Para curvas em H^2 , o Teorema 3.13 fornece um critério simples para verificar justeza, que consiste em saber se a curvatura geodésica da curva, k_g , satisfaz $|k_g| \geq 1$.

Utilizando o software Maple produzimos um programa, veja o apêndice A, que calcula a curvatura geodésica da curva $\gamma = P^{-1} \circ \alpha$ em H^2 onde α é uma curva no disco de Poincaré. Uma aplicação direta do referido programa é mostrar um exemplo de uma curva em D^2 que é convexa (justa no sentido euclidiano) mas não é justa, veja Figura 5.2.

Figura 5.2: $|k_g|$ da elipse $\alpha(t) = (0.5 \cos(t) + 0.31, 0.4 \sin(t))$.

Para saber se um mergulho $\gamma : S^1 \rightarrow H^2$ é ou não horo-justo, o único critério de que dispomos é a Proposição 5.1. O item (iii) da Proposição 5.1 pode ser implementado computacionalmente pois consiste basicamente na análise de funções reais definidas em intervalos fechados. Mais precisamente devemos olhar para a família de funções

$$F : S^1 \times S_+^1 \rightarrow \mathbb{R}; F(t, \mathbf{v}) = \mathbf{b}(\gamma(t), \mathbf{v})$$

e descobrir se há ou não alguma função de Morse com mais do que dois pontos críticos. Como $\mathbf{v}(\theta) = (1, \cos(\theta), \sin(\theta))$ é uma parametrização de S^1 , podemos fazer um pro-

grama que determine, para vários valores de θ , o gráfico das duas primeiras derivadas de $F(t, \mathbf{v}(\theta))$ em relação a t ; este processo permite detectar funções de Morse com mais do que dois pontos críticos. Veja o apêndice A para mais detalhes sobre o programa.

Em todos os exaustivos testes computacionais realizados, todo mergulho $S^1 \rightarrow H^2$ que não era justo também não era horo-justo.

Conjecturamos então que todo mergulho horo-justo $S^1 \rightarrow H^2$ é justo.

A resposta à esta questão é positiva e segue diretamente da seguinte proposição.

Proposição 5.3 *Sejam $f : S^1 \rightarrow H^2$ um mergulho horo-justo e P uma projeção estereográfica com polo arbitrário. Então $\alpha = P \circ f$ é convexa.*

Demonstração: A demonstração é feita por contradição. Suponhamos α não-convexa. Suponhamos também, sem perda de generalidade, que a orientação de α é positiva.

Seja k a curvatura euclidiana da curva plana α . Como α não é convexa, existem pontos de curvatura positiva e pontos de curvatura negativa. Sejam p um ponto da curva tal que $k(p) < 0$ e r a reta tangente a α em p .

Sejam $\mathcal{H}$ o horocírculo tangente a α em p e que localmente está contido no interior de α , e seja $\mathfrak{h}$ o h-semi-espço que contém o interior de $\mathcal{H}$, veja Figura 5.3.

Figura 5.3: $(P \circ f)^{-1}(\mathfrak{h})$ não é conexo.

O horocírculo $\mathcal{H}$ intersecta α em pelo menos três pontos e como, localmente, $\alpha \cap \mathcal{H} = p$ segue que $(P \circ f)^{-1}(\mathfrak{h})$ não é conexo. Portanto f não satisfaz a PDPH e assim f não é horo-justo.

Utilizando a proposição acima estabelecemos diretamente o principal resultado desta seção.

Teorema 5.4 *Seja $f : S^1 \rightarrow H^2$ uma imersão. Então f é horo-justa se, e somente se, f é justa.*

Demonstração: Toda imersão justa é horo-justa pelo Teorema 4.6. Reciprocamente, pela Proposição 5.3, $P \circ f$ é justa no sentido euclidiano para qualquer projeção estereográfica P . Portanto, pelo Teorema 3.9, f é justa.

5.3 Curvas em H^3

Na seção anterior provamos que em H^2 , justeza e horo-justeza são propriedades equivalentes. Uma questão natural é saber se o mesmo ocorre para mergulhos $S^1 \hookrightarrow H^3$.

De acordo com o Teorema 4.18, se $f : S^1 \rightarrow H^3$ é horo-justo e $f(S^1)$ está contida numa horoesfera ou numa esfera então f também é justo. Portanto, para responder a questão acima, devemos considerar três casos:

- (i) $f(S^1)$ está contida num plano de H^3 .
- (ii) $f(S^1)$ está contida numa superfície eqüidistante.
- (iii) f não é uma imersão umbílica.

Analisemos o primeiro caso. Inicialmente podemos supor que $P \circ f(S^1) \subset D^2 \subset D^3$, onde P é a projeção estereográfica com polo $-p = (-1, 0, 0)$, caso contrário existiria uma isometria $\Phi : H^3 \rightarrow H^3$ tal que $\Phi \circ f$ ainda seria horo-justo e além disso teríamos $(P \circ \Phi \circ f)(S^1) \subset D^2 \subset D^3$.

Em seguida observamos que $P \circ f : S^1 \rightarrow D^2$ é horo-justo e assim, pelo Teorema 5.4, $P \circ f$ é justo. Portanto $P \circ f$ tem a propriedade dos dois pedaços em relação a retas e em relação a círculos que não estejam inteiramente contidos no disco D^2 .

O que dizer sobre a propriedade dos dois pedaços em relação aos círculos inteiramente contidos no disco D^2 ? Esta questão, como veremos, é fundamental para os nossos propósitos.

Em [2], T. F. Banchoff definiu a propriedade dos dois pedaços em relação a círculos:

Um conjunto A no plano $\mathbb{R}^2$ possui a propriedade dos dois pedaços em relação a círculos (PDPC) se todo círculo ou reta em $\mathbb{R}^2$ separa A em no máximo dois pedaços.

Com esta definição, o autor provou o seguinte resultado, veja [2, Proposição 1.6].

Proposição 5.5 *Seja A uma curva simples e fechada em $\mathbb{R}^2$. Se A possui a PDPC então A é um círculo.*

Afirmamos que $P \circ f$ possui a PDPC. Com efeito, se existisse um círculo S contido no disco D^2 que separasse $P \circ f(S^1)$ em mais do que dois pedaços, então existiria uma horoesfera h , com $h \cap D^2 = S$, que dividiria $P \circ f(S^1)$ em mais do que dois pedaços, contrariando o fato de $P \circ f$ ser horo-justo. Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 5.6 *Seja $f : S^1 \rightarrow H^3$ um mergulho horo-justo. Se $f(S^1)$ está contida em algum plano hiperbólico então f é justo.*

Se $f(S^1)$ está contida numa superfície eqüidistante então, como antes, podemos supor que $P \circ f(S^1) \subset D_k^2 = \{(x, y, z) \in D^3 \mid z = k\}$ e a demonstração segue-se analogamente. Portanto temos o seguinte resultado:

Teorema 5.7 *Seja $f : S^1 \rightarrow H^3$ uma imersão cuja imagem está contida numa superfície umbílica de H^3 . Então f é horo-justa se, e somente se, f é justa.*

A seguinte questão ainda não pôde ser respondida:

Todo mergulho horo-justo $S^1 \hookrightarrow H^3$ é um mergulho umbílico?

Acreditamos que a resposta seja positiva. E nesse caso teríamos que um mergulho $S^1 \hookrightarrow H^3$ é horo-justo se, e somente se, é justo.

Caso seja confirmado o resultado acima, o próximo passo é considerar mergulhos $S^1 \hookrightarrow H^m$ de codimensão maior do que 2.

Encerramos este capítulo com a seguinte observação:

Um exemplo de mergulho $\gamma : S^1 \hookrightarrow H^3$ horo-justo que não é justo, se existir, está “longe” de qualquer mergulho justo $S^1 \hookrightarrow H^3$.

Os únicos mergulhos justos $S^1 \hookrightarrow D^3$ são os círculos. Seja $\alpha : S^1 \rightarrow D^2 \subset D^3$ um mergulho justo e $\gamma = P^{-1} \circ \alpha$, onde P^{-1} é a inversa da projeção estereográfica. O conjunto bifurcação Γ_γ da família de funções alturas

$$F : S^1 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad F(t, \xi) = \langle \gamma(t), \xi \rangle$$

contém vetores tipo-espaco, tipo-tempo e tipo-luz e é homeomorfo ao círculo S^1 .

Uma perturbação $\bar{\gamma}$ não-plana suficientemente próxima de γ que é genérica possui, com relação à família de funções acima, um conjunto bifurcação $\Gamma_{\bar{\gamma}}$ que está próximo de Γ_γ e, portanto, também contém vetores tipo-espaco, tipo-tempo e tipo-luz.

Necessariamente $\bar{\gamma}$ não é justo. Portanto existem funções de Morse $\ell_\eta(t) = \langle \gamma(t), \eta \rangle$ com pelo menos quatro pontos críticos. É razoável esperar que a componente conexa que contém η contenha também vetores tipo-luz. Portanto a $\bar{\gamma}$ não seria horo-justo.

Capítulo 6

Curvatura Hiperbólica Absoluta Total

Nas duas primeiras seções deste capítulo apresentamos a teoria local de subvariedades em espaços hiperbólicos, como nos artigos de S. Izumiya, M. C. R. Fuster, D. Pei e T. Sano [18, 19, 20]. Introduzimos os conceitos de curvatura horoesférica e a relação das singularidades da aplicação de Gauss hiperbólica com as singularidades da família de funções alturas horoesféricas.

Nossa principal contribuição neste capítulo é a introdução da curvatura hiperbólica absoluta total e o Teorema 6.20, em que provamos uma extensão parcial do Teorema de Chern-Lashof para imersões em espaços hiperbólicos. Provamos também que a curvatura hiperbólica absoluta total satisfaz $\tau_h(M, f) = \gamma(M)$ se, e somente se, f é horo-justa.

Na seção final introduzimos o conceito de horoconvexidade e obtivemos que todo mergulho horoconvexo de S^m em H^{m+1} é um mergulho justo e portanto horo-justo.

6.1 Geometria Hiperbólica Local de Hipersuperfícies

Nesta seção apresentamos a geometria horoesférica de hipersuperfícies no espaço hiperbólico de dimensão n , como nos artigos [18, 19, 20]. Como não há perigo de confusão com o produto interno euclidiano, neste capítulo, vamos indicar o produto interno de Lorentz por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, isto é, se $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ são vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$ então

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

Como nos capítulos anteriores, o espaço $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle)$ será denotado por $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

Dados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, definimos o vetor $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n$ por

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

onde $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\mathbf{w} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n$ então

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

e portanto $\mathbf{w}$ é Lorentz ortogonal a qualquer $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Recordemos algumas subvariedades de $\mathbb{R}_1^{n+1}$: o conjunto $LC = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ é o cone de luz, $LC_+^* = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in LC \mid x_0 > 0\}$ é o cone de luz futuro e $S_+^{n-1} = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in LC_+^* \mid x_0 = 1\}$. Portanto podemos definir a projeção $\Pi : LC_+^* \rightarrow S_+^{n-1}$ pela regra

$$\Pi(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Agora consideramos da geometria diferencial local de hipersuperfícies em H^n . Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ um mergulho onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto aberto. Faremos a seguinte identificação $M \cong \mathbf{x}(U)$. Como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1$, temos $\langle \mathbf{x}_{u_i}(u), \mathbf{x}(u) \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), para todo $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U$. Portanto, se definirmos

$$\mathbf{e}(u) = \frac{\mathbf{x}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}(u) \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}(u)}{\|\mathbf{x}(u) \wedge \mathbf{x}_{u_1}(u) \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{u_{n-1}}(u)\|},$$

teremos $\langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_{u_i} \rangle \equiv \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle \equiv 0$, $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \equiv 1$. Portanto o vetor $\mathbf{x}(u) \pm \mathbf{e}(u)$ é tipo-luz. Como $\mathbf{x}(u) \in H^n$, $\mathbf{e}(u) \in S_1^n$ e U é conexo, tem-se $\mathbf{x}(u) \pm \mathbf{e}(u) \in LC_\pm^*$ e portanto podemos definir a aplicação

$$\mathbb{L}^\pm : U \longrightarrow LC_+^*$$

por $\mathbb{L}^\pm(u) = \mathbf{x}(u) \pm \mathbf{e}(u)$ que é denominada a *indicatriz hiperbólica de Gauss* de $\mathbf{x}$. A aplicação

$$\widetilde{\mathbb{L}}^\pm : U \longrightarrow S_+^{n-1}$$

definida por $\widetilde{\mathbb{L}}^\pm(u) = \widetilde{\mathbb{L}^\pm(u)}$ é denominada a *aplicação de Gauss hiperbólica* de $\mathbf{x}$. Também definimos a aplicação $\mathbb{E} : U \rightarrow S_1^n$ dada por $\mathbb{E}(u) = \mathbf{e}(u)$ que é denominada a *indicatriz de Gauss de Sitter* de $\mathbf{x}$.

Para definir a curvatura de Gauss-Kronecker hiperbólica e a curvatura média hiperbólica da hipersuperfície $M = \mathbf{x}(U)$, o seguinte lema é fundamental. A demonstração é simples e pode ser encontrada em [18].

Lema 6.1 *Para todo $p = \mathbf{x}(u_0) \in M$ e $\mathbf{v} \in T_p M$, tem-se $D_{\mathbf{v}}\mathbf{e} \in T_p M$ e $D_{\mathbf{v}}\mathbb{L}^\perp \in T_p M$, onde $D_{\mathbf{v}}$ denota a derivada covariante com respeito ao vetor tangente $\mathbf{v}$.*

Recordemos que uma hipersuperfície dada pela interseção de H^n e um hiperplano tipo-espaco, um hiperplano tipo-tempo (pela origem) ou um hiperplano tipo-luz é uma hiperesfera, um hiperplano eqüidistante (hiperplano) ou uma hiperhoroesfera, respectivamente.

Proposição 6.2 *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ uma hipersuperfície de H^n .*

- (i) *Se a indicatriz de Gauss hiperbólica $\mathbb{L}^\perp$ é constante então a hipersuperfície M é parte de uma hiperhoroesfera.*
- (ii) *Se a indicatriz de Gauss de Sitter é constante então a hipersuperfície M é parte de um hiperplano.*

Demonstração: Ver [20, Proposição 2.1].

Através da identificação de U e M pelo mergulho $\mathbf{x}$, a derivada $d\mathbf{x}(u_0)$ pode ser identificada com o operador identidade $id_{T_p M}$ no espaço tangente $T_p M$, onde $p = \mathbf{x}(u_0)$. Portanto $d\mathbf{E}(u_0)$ pode ser considerada como um operador linear no espaço tangente $T_p M$. Isto significa que $d\mathbb{L}^\pm(u_0) = id_{T_p M} \pm d\mathbf{E}(u_0)$ também é um operador linear no espaço tangente $T_p M$. O operador linear $S_p^\pm = -d\mathbb{L}(u_0) : T_p M \rightarrow T_p M$ é denominado o *operador de Weingarten hiperbólico* de $M = \mathbf{x}(U)$ em $p = \mathbf{x}(u_0)$, e o operador linear $A_p = -d\mathbf{E}(u_0) : T_p M \rightarrow T_p M$ é denominado o *operador de Weingarten de Sitter* de M em $p = \mathbf{x}(u_0)$. Denotamos um autovalor de $S_p^\pm$ por $\bar{\kappa}_p^\pm$ e um autovalor de A_p por κ_p . A relação $S_p^\pm = -id_{T_p M} \pm A_p$ implica que $S_p^\pm$ e A_p possuem os mesmos autovetores, além disso $\bar{\kappa}_p^\pm = -1 \pm \kappa_p$.

Agora definimos as curvaturas hiperbólicas: a *curvatura de Gauss-Kronecker hiperbólica* de $M = \mathbf{x}(U)$ em $p = \mathbf{x}(u_0)$ é definida por

$$K_h^\perp(u_0) = \det(S_p^\pm).$$

A *curvatura média hiperbólica* de M em p é definida por

$$H_h^\pm(u_0) = \frac{1}{n-1} \text{traço}(S_p^\pm).$$

A *curvatura de Gauss-Kronecker de Sitter* é definida por

$$K_d(u_0) = \det(A_p),$$

e a *curvatura média de Sitter* é

$$H_d(u_0) = \frac{1}{n-1} \text{traço}(A_p).$$

O objetivo agora é obter a fórmula de Weingarten hiperbólica. Como $\mathbf{x}_{u_i}$ ($i = 1, \dots, n-1$) são vetores tipo-espaco, induzimos em $M = \mathbf{x}(U)$ a métrica riemanniana (primeira forma fundamental hiperbólica) $ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$ onde $g_{ij}(u) = \langle \mathbf{x}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ para todo $u \in U$. Também definimos o *segundo invariante fundamental hiperbólico* por $\bar{h}_{ij}^\pm(u) = \langle -\mathbb{L}_{u_i}^\pm(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ para todo $u \in U$. Se definirmos o *segundo invariante fundamental (ordinário)* por $h_{ij}(u) = -\langle \mathbf{e}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$, então temos a relação

$$\bar{h}_{ij}^\pm(u) = -g_{ij}(u) \pm h_{ij}(u).$$

Proposição 6.3 *Considerando as notações acima, tem-se a seguinte fórmula de Weingarten:*

$$\mathbb{L}_{u_i}^\pm = \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{h}^\pm)_i^j \mathbf{x}_{u_j},$$

onde $\left((\bar{h}^\pm)_i^j \right) = (\bar{h}_{ik}^\pm) (g^{kj})$ e $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}$.

Demonstração: Ver [20, Proposição 2.3].

Como corolário da proposição acima, obtém-se uma expressão explícita da curvatura de Gauss-Kronecker hiperbólica que depende da métrica riemanniana e do segundo invariante fundamental hiperbólico.

Corolário 6.4 *Com as mesmas notações da proposição acima, a curvatura de Gauss-Kronecker hiperbólica é dada por*

$$K_h^\pm = \frac{\det(\bar{h}_{ij}^\pm)}{\det(g_{\alpha\beta})}.$$

Para encerrar esta seção relacionamos a matriz $\bar{h}_{ij}^\pm$ com a jacobiana da aplicação $\tilde{\mathbb{L}}$.

Sejam $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ uma hipersuperfície e $\mathbf{v}_0^\pm = \mathbb{L}^\pm(u_0)$, a *função altura horoesférica* $h_{\mathbf{v}^\pm}$ é definida por $h_{\mathbf{v}^\pm}(u) = \langle \mathbf{x}(u), \mathbf{v}^\pm \rangle$. Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 6.5 *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ uma hipersuperfície e $\mathbf{v}_0^\pm := \mathbb{L}^\pm(u_0)$. Então*

$$\text{Hess}_{u_0}(h_{\mathbf{v}_0^\pm}) = h_{\tilde{e}_j}^\pm.$$

Demonstração: Por definição, temos

$$\text{Hess}_{u_0}(h_{\mathbf{v}_0^\pm}) = (\langle \mathbf{x}_{u_i u_j}(u_0), \mathbb{L}^\pm(u_0) \rangle) = \left(- \langle \mathbf{x}_{u_i}(u_0), \mathbb{L}_{u_j}^\pm(u_0) \rangle \right).$$

Pela fórmula de Weingarten, Proposição 6.3, tem-se

$$\langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbb{L}_{u_j}^\pm \rangle = - \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\tilde{h}^\pm)^\alpha_i \langle \mathbf{x}_{u_\alpha}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\tilde{h}^\pm)^\alpha_i g_{\alpha j} = \tilde{h}_{ij}^\pm.$$

Proposição 6.6 *Existem coordenadas locais $(U, (u_1, \dots, u_{n-1}))$ de M e $(V, (v_1, \dots, v_{n-1}))$ de S_+^{n-1} tais que a correspondente matriz $\frac{-1}{\ell_0}(\tilde{h}_i^j)$ é a matriz jacobiana de $\tilde{\mathbb{L}}$, onde $\mathbb{L}(p) = \mathbf{x}(p) + \mathbf{e}(p) = (\ell_0(p), \ell_1(p), \dots, \ell_n(p))$ e $(\tilde{h}_i^j) = ((h^\pm)_i^j)$ é a matriz dada na Proposição 6.3.*

Demonstração: Seja $\Pi : LC_+^* \rightarrow S_+^{n-1}$ a projecção dada por $\Pi(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}}$. Observamos que o espaço tangente de LC_+^* no ponto $\mathbf{v} \in LC_+^*$ é o hiperplano $HP(\mathbf{v}, 0)$. Como $\langle \mathbb{L}, \mathbf{x}_{u_i} \rangle = 0$, $\mathbf{x}_{u_i}(u)$ é um vetor tangente de LC_+^* no ponto $\mathbb{L}(u)$ e assim $\{\mathbb{L}(u), \mathbf{x}_{u_1}(u), \dots, \mathbf{x}_{u_{n-1}}(u)\}$ é uma base do espaço tangente de LC_+^* no ponto $\mathbb{L}(u)$. A direção tangente da fibra de Π é dada pelo vetor tipo-luz $\mathbb{L}(u)$, portanto $\{d\Pi(\mathbf{x}_{u_1}), \dots, d\Pi(\mathbf{x}_{u_{n-1}})\}$ é uma base do espaço tangente de S_+^{n-1} no ponto $\Pi(\mathbb{L}(u))$. Por outro lado, pela fórmula de Weingarten hiperbólica, temos que $\mathbb{L}_{u_i}^\pm = - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{h}_i^j \mathbf{x}_{u_j}$. Como $\mathbb{L} = \ell_0 \tilde{\mathbb{L}}$, obtemos $\ell_0 \tilde{\mathbb{L}}_{u_i} = \mathbb{L}_{u_i} - \ell_{0u_i} \tilde{\mathbb{L}}$. Portanto

$$d\Pi(\tilde{\mathbb{L}}(u)) = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\ell_0} \tilde{h}_i^j d\Pi(\mathbf{x}_{u_j}(u)).$$

Podemos escolher coordenadas $(V, (v_1, \dots, v_{n-1}))$ de S_+^{n-1} ao redor de $\Pi(u)$ tais que $(\partial/\partial v_i) = d\Pi(\mathbf{x}_{u_j}(u))$. Isto significa que a matriz Jacobiana de $\tilde{\mathbb{L}}$ em $u \in U$ nas coordenadas locais $(U, (u_1, \dots, u_{n-1}))$ de M e $(V, (v_1, \dots, v_{n-1}))$ de S_+^{n-1} é $\frac{-1}{\ell_0}(\tilde{h}_i^j)$.

6.2 Geometria Hiperbólica Local de Subvariedades

Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ um mergulho de codimensão $(r+1)$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^s(s+r+1=n)$. Escrevemos $M = \mathbf{x}(U)$ e identificamos M e U pelo mergulho $\mathbf{x}$.

Para todo $p = \mathbf{x}(u) \in M \subset H^n$, temos $\langle \mathbf{x}(u), \mathbf{x}(u) \rangle = -1$, portanto $\langle \mathbf{x}_{u_i}(u), \mathbf{x}(u) \rangle = 0$, onde $u = (u_1, \dots, u_s)$. O espaço tangente de M em $p = \mathbf{x}(u)$ é dado por

$$T_p M = \langle \mathbf{x}_{u_1}(u), \mathbf{x}_{u_2}(u), \dots, \mathbf{x}_{u_s}(u) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Seja $N_p(M) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ o espaço normal de M em $p = \mathbf{x}(u)$ e definimos $N_p^h(M) = N_p(M) \cap T_p H^n$. Como o fibrado normal $N(M)$ é trivial, podemos escolher uma seção normal e unitária $\mathbf{n}(u)$ na esfera $S^r \subset N_p^h(M)$. Nosso objetivo é considerar a geometria diferencial de subvariedades no espaço hiperbólico que generaliza a geometria de hipersuperfícies apresentadas na seção anterior. Como $\langle \mathbf{n}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 1$ e $\langle \mathbf{x}(u), \mathbf{n}(u) \rangle = 0$, $\mathbf{n}_{u_i}(u)$ ($i = 1, \dots, s$) são ortogonais a ambos os vetores $\mathbf{n}(u)$ e $\mathbf{x}(u)$. Portanto temos $\mathbf{n}_{u_i}(u) \in T_p M \oplus N_p^h(M)$. Agora consideramos as projeções ortogonais $\pi^T : T_p M \oplus N_p^h(M) \rightarrow T_p M$ e $\pi^N : T_p M \oplus N_p^h(M) \rightarrow N_p^h(M)$. Seja $d\mathbf{n}_u : T_u U \rightarrow T_p M \oplus N_p^h(M)$ a derivada de $\mathbf{n}$, temos assim $d\mathbf{n}_u^T = \pi^T \circ d\mathbf{n}_u$ e $d\mathbf{n}_u^N = \pi^N \circ d\mathbf{n}_u$. A *segunda forma fundamental* de $M = \mathbf{x}(U)$ em $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ na direção $\mathbf{n}$ é o operador linear $A_{p_0}(\mathbf{n}) = -d\mathbf{n}_{u_0}^T : T_{p_0} M \rightarrow T_{p_0} M$. Como identificamos U e M , a derivada $d\mathbf{x}_u$ pode ser identificada com o operador identidade $id_{T_p M}$. A *segunda forma fundamental horoesférica* de M em p_0 com relação a $\mathbf{n}$ é o operador $S_{p_0}(\mathbf{n}) = -(id_{T_{p_0} M} \cdot d\mathbf{n}_{u_0}^T) : T_{p_0} M \rightarrow T_{p_0} M$. A aplicação $d\mathbf{n}_u^N$ é denominada a *conexão normal* de M com relação a $\mathbf{n}$. Denotamos o autovalor de $A_{p_0}(\mathbf{n})$ por $\kappa_{p_0}(\mathbf{n})$ e o autovalor de $S_{p_0}(\mathbf{n})$ por $\bar{\kappa}_{p_0}(\mathbf{n})$. Pela definição de $A_{p_0}(\mathbf{n})$ e $S_{p_0}(\mathbf{n})$ tem-se a relação $\bar{\kappa}_{p_0}(\mathbf{n}) = \kappa_{p_0}(\mathbf{n}) - 1$. O valor $\bar{\kappa}_{p_0}(\mathbf{n})$ é denominado a *curvatura horoesférica principal* em p_0 com relação a $\mathbf{n}$. A *curvatura horoesférica (ou hiperbólica)* em p_0 com relação a $\mathbf{n}$ é definida por

$$K_h(\mathbf{n})(u_0) = K_h(\mathbf{n})_{p_0} = -\det S_{p_0}(\mathbf{n}).$$

Dizemos que um ponto $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ é $\mathbf{n}$ -umbílico se $S_{p_0}(\mathbf{n}) = \bar{\kappa}_{p_0} id_{T_{p_0} M}$. Como $S_{p_0}(\mathbf{n})$ e $A_{p_0}(\mathbf{n})$ possuem os mesmos autovetores relacionados aos mesmos autovalores, a condição acima é equivalente a condição $A_{p_0}(\mathbf{n}) = \kappa_{p_0} id_{T_{p_0} M}$. Dizemos que $M = \mathbf{x}(U)$ é totalmente $\mathbf{n}$ -umbílica se todos os pontos de M são $\mathbf{n}$ -umbílicos. Dizemos que um campo de vetores unitários normais $\mathbf{n}$ é *paralelo* em p_0 se $d\mathbf{n}_{u_0}^N = 0$; se $\mathbf{n}$ é paralelo em todos os pontos de M então $\mathbf{n}$ é denominado simplesmente *paralelo*.

Proposição 6.7 *Sejam $M = \mathbf{x}(U)$ totalmente $\mathbf{n}$ -umbílica e $\mathbf{n}$ um campo de vetores normais unitários paralelo em M . Então $\kappa_p(\mathbf{n})$ é uma constante $\bar{\kappa}$. Sob estas condições, temos*

(i) Suponha $\kappa \neq 0$.

(a) Se $\kappa \neq -1$ e $|\kappa + 1| < 1$, então M está contida num hiperplano equidistante.

(b) Se $\kappa \neq -1$ e $|\kappa + 1| > 1$, então M está contida numa hipersfera.

(c) Se $\kappa = -1$, então M está contida num hiperplano.

(ii) Se $\kappa = 0$, então M está contida numa hiperhoroesfera.

Estabelecemos a seguir a fórmula de Weingarten. Como $\mathbf{x}_{u_i}$ ($i = 1, \dots, s$) são vetores tipo-espaco, induzimos em $M = \mathbf{x}(U)$ a métrica riemanniana (*primeira forma fundamental hiperbólica*) $ds^2 = \sum_{i,j=1}^s g_{ij} du_i du_j$, onde $g_{ij}(u) = \langle \mathbf{x}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ para todo $u \in U$. Definimos também o *segundo invariante fundamental horoesférico (hiperbólico) com relação ao campo de vetores normais unitários $\mathbf{n}$* por $\bar{h}_{ij}(\mathbf{n})(u) = \langle -(\mathbf{x} + \mathbf{n})_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$ para todo $u \in U$. Se definirmos o *segundo invariante fundamental com relação ao campo de vetores normais unitários $\mathbf{n}$* por $h_{ij}(\mathbf{n})(u) = -\langle \mathbf{n}_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle$, então temos a seguinte relação:

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{n})(u) = -g_{ij}(u) + h_{ij}(\mathbf{n})(u), (i = 1, \dots, s).$$

Proposição 6.8 *Com as notações acima, temos a seguinte fórmula de Weingarten horoesférica (ou, hiperbólica):*

$$\pi^T \circ (\mathbf{x} + \mathbf{n})_{u_i} = - \sum_{j=1}^s \bar{\kappa}_i^j(\mathbf{n}) \mathbf{x}_{u_j},$$

onde $(\bar{h}_i^j(\mathbf{n})) = (\bar{h}_{ik}(\mathbf{n})) (g^{kj})$ e $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}$.

Demonstração: Ver [19, Proposição 3.2].

Como corolário da proposição acima temos uma expressão explícita da curvatura horoesférica em termos da métrica riemanniana e do segundo invariante fundamental hiperbólico.

Corolário 6.9 *Com as mesmas notações da proposição acima, a curvatura horoesférica é dada por*

$$K_h(\mathbf{n}) = \frac{\det(h_{ij}(\mathbf{n}))}{\det(g_{\alpha\beta})}.$$

Como $-\langle (\mathbf{x} + \mathbf{n})_{u_i}(u), \mathbf{x}_{u_j}(u) \rangle = 0$, temos $\bar{h}_{ij}(\mathbf{n})(u) = \langle \mathbf{x}(u) + \mathbf{n}(u), \mathbf{x}_{u_i u_j}(u) \rangle$. Portanto o segundo invariante fundamental hiperbólico no ponto $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ depende apenas de $\mathbf{x}(u_0) + \mathbf{n}(u_0)$ e $\mathbf{x}_{u_i u_j}(u_0)$. Pelo corolário acima, a curvatura horoesférica também

depende apenas de $\mathbf{x}(u_0) - \mathbf{n}(u_0)$ e $\mathbf{x}_{n,u_j}(u_0)$. Denotamos por $K_h(\mathbf{n}_0)(u_0)$ a curvatura horoesférica em $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ com relação a $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(u_0)$. Podemos dizer que um ponto $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ é $\mathbf{n}_0$ -umbílico pois a segunda forma fundamental horoesférica em relação a $\mathbf{n}$ é independente da escolha do campo de vetores normais $\mathbf{n}$ (depende apenas do vetor normal $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(u_0)$).

Dizemos que o ponto $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ é *parabólico horoesférico com relação a $\mathbf{n}_0$* (ou, simplesmente um *ponto $H(\mathbf{n}_0)$ -parabólico*) de $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n(-1)$ se $K_h(\mathbf{n}_0)(u_0) = 0$. Também dizemos que o ponto p_0 é horoesférico com relação a $\mathbf{n}_0$ (ou, simplesmente um *ponto $e(u_0, \mu_0)$ -horoesférico*) se for um ponto $\mathbf{n}_0$ -umbílico e $K_h(\mathbf{n}_0)(u_0) = 0$.

6.2.1 Hipersuperfície Canal Hiperbólica

Agora tomamos arbitrariamente seções ortonormais $\mathbf{n}_j(u) \in S^r \subset N_p^h(M)$, $j = 1, \dots, r+1$. Temos assim

$$N_p(M) = \langle \mathbf{x}(u), \mathbf{n}_1(u), \dots, \mathbf{n}_{r+1}(u) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Como $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_{u_1}, \dots, \mathbf{x}_{u_s}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{r+1}\}$ é um referencial Lorentz ortonormal de TR_1^{n+1} ao longo de M , temos $(\mathbf{n}_j)_{u_i} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{x}_{u_i} + \sum_{k=1}^{r+1} \mu_k \mathbf{n}_k - \mu_{r+2} \mathbf{x}$ para certos $\lambda_i, \mu_k \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, r+2$, onde $(\mathbf{n}_j)_{u_i} = (\partial \mathbf{n}_j / \partial u_i)(u)$. Como $\langle \mathbf{n}_j, \mathbf{n}_j \rangle = 1$ segue que $\langle (\mathbf{n}_j)_{u_i}, \mathbf{n}_j \rangle = 0$. Portanto $\mu_j = 0$. Pela relação $\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_j \rangle = 0$, tem-se $\langle \mathbf{x}, (\mathbf{n}_j)_{u_i} \rangle = -\langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{n}_j \rangle = 0$. Portanto $\mu_{r+2} = 0$ e vale a seguinte relação

$$(\mathbf{n}_j)_{u_i}(u) \in \langle \mathbf{x}_{u_1}(u), \dots, \mathbf{x}_{u_s}(u), \mathbf{n}_1(u), \dots, \mathbf{n}_{j-1}(u), \mathbf{n}_{j+1}(u), \dots, \mathbf{n}_{r+1}(u) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

O bordo da vizinhança tubular de M com raio suficientemente pequeno é denominada a *hipersuperfície canal hiperbólica* de M que, em geral, é a imagem de um mergulho do fibrado normal unitário de M em H^n . Como estamos considerando a parametrização local $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$, podemos explicitamente escrever tal mergulho como segue: definimos uma aplicação $\tilde{\mathbf{x}} : U \times S^r \rightarrow H^n$ por

$$\mathbf{x}(u, \mu) = \cosh \theta \mathbf{x}(u) + \sinh \theta \sum_{j=1}^{r+1} \mu_j \mathbf{n}_j(u)$$

onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1}$ com $\sum_{j=1}^{r+1} \mu_j^2 = 1$, $u = (u_1, \dots, u_s)$ e θ é um número real fixado. Para $|\theta| > 0$ suficientemente pequeno pode-se mostrar que $\tilde{\mathbf{x}}$ é um mergulho. A imagem $\tilde{\mathbf{x}}(U \times S^r) = CM$ é denominada a *hipersuperfície canal hiperbólica* de $M = \mathbf{x}(U)$. Para simplificar notações escreveremos $e(u, \mu) = \sum_{j=1}^{r+1} \mu_j \mathbf{n}_j(u)$ através do

referencial Lorentz ortonormal $\{\mathbf{x}(u), \mathbf{n}_1(u), \dots, \mathbf{n}_{r+1}(u)\}$ de $N_p(M)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$ com $\sum_{j=1}^{r+1} \mu_j^2 = 1$. A função altura horoesférica em uma subvariedade de H^n é definida como segue: seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n (U \subset \mathbb{R}^s)$ um mergulho, definimos a função

$$H : U \times LC_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

por $H(u, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}(u), \mathbf{v} \rangle + 1$, onde $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in LC_+^*$. H é a função altura horoesférica em M . Denotamos $H(u, \mathbf{v}_0)$ por $h_{\mathbf{v}_0}(u)$, para todo $\mathbf{v}_0 \in LC_+^*$.

Proposição 6.10

(i) $h_{\mathbf{v}}(u) = 0$ se, e somente se, existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_{r+1}$ tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{x}_{u_i} + \sum_{j=1}^{r+1} \mu_j \mathbf{n}_j.$$

(ii) $h_{\mathbf{v}}(u) = (\partial h_{\mathbf{v}} / \partial u_i)(u) = 0 (i = 1, \dots, s)$ se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{x}(u) + \mathbf{e}(u, \mu)$.

Demonstração: Ver [19], Proposição 3.4.

Indiquemos por $\Sigma_*(H)$ o conjunto

$$\Sigma_*(H) = \left\{ (u, \mathbf{v}) \in U \times LC_+^* : \mathbf{v} = \mathbf{x}(u) + \mathbf{e}(u, \mu), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1}) \text{ com } \sum_{j=1}^{r+1} \mu_j^2 = 1 \right\}.$$

Então $D_H = \{\mathbf{x}(u) + \mathbf{e}(u, \mu) \mid (u, \mu) \in U \times S^r\}$ é o discriminante de H . Definimos a aplicação

$$HS_{\mathbf{x}} : U \times S^r \longrightarrow LC_+^*$$

por $HS_{\mathbf{x}}(u, \mu) = \mathbf{x}(u) + \mathbf{e}(u, \mu)$. A aplicação $HS_{\mathbf{x}}$ é denominada a *hipersuperfície horoesférica de M* . Claramente, $HS_{\mathbf{x}}$ depende da escolha do referencial Lorentz ortonormal $\{\mathbf{x}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{r+1}\}$ de $N(M)$. Seja $\{\mathbf{x}, \mathbf{n}'_1, \dots, \mathbf{n}'_{r+1}\}$ outro referencial Lorentz ortonormal de $N(M)$. Então tem-se $\mathbf{n}_i = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_{ij} \mathbf{n}'_j$ onde $\lambda_{ij} = \langle \mathbf{n}_i(u), \mathbf{n}'_j(u) \rangle$. Podemos então definir um difeomorfismo $\Phi : U \times S^r \rightarrow U \times S^r$ pela regra

$$\Phi(u, \mu) = \left(u, \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j^1(u) \mu_j, \dots, \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j^{r+1}(u) \mu_j \right),$$

onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$. Também definimos $\mathbf{e}'(u, \mu) = \sum_{i=1}^{r+1} \mu_i \mathbf{n}'_i$. Segue da definição acima que $\mathbf{e}(u, \mu) = \mathbf{e}' \circ \Phi(u, \mu)$. Portanto tem-se

$$HS_{\mathbf{x}}(u, \mu) = HS'_{\mathbf{x}} \circ \Phi(u, \mu).$$

onde $HS'_{\mathbf{x}}(u, \mu) = \mathbf{x}(u) + \mathbf{e}'(u, \mu)$. Isto significa que $HS'_{\mathbf{x}}$ é uma reparametrização de $HS_{\mathbf{x}}$.

Como estamos interessados na singularidade de $HS_{\mathbf{x}}(U \times S^r)$ fixamos, nesta seção, um referencial Lorentz ortonormal

$$\{\mathbf{x}(u), \mathbf{n}_1(u), \dots, \mathbf{n}_{r-1}(u)\}$$

de $N(M)$.

Proposição 6.11 *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ uma subvariedade. Então existe uma aplicação diferenciável $\mu : U \rightarrow S^r$ tal que $HS_{\mathbf{x}}(u, \mu(u))$ é constante se, e somente se, $M = \mathbf{x}(U)$ está contida numa hiperhoroesfera. Pela Proposição 6.7, a condição acima é equivalente a M ser totalmente $\mathbf{e}(u, \mu(u))$ -umbílica, com o campo de vetores normais $\mathbf{e}(u, \mu(u))$ paralelo e $K_h(\mathbf{e}(u, \mu(u))) = 0$.*

Demonstração: Ver [19], Proposição 3.5.

Como a imagem da hipersuperfície horoesférica $HS_{\mathbf{x}}$ de M é o conjunto discriminante da função altura horoesférica H em M , o conjunto singular de $HS_{\mathbf{x}}$ corresponde ao conjunto dos pontos singulares não-degenerados da matriz Hessiana da função altura horoesférica. Portanto temos a seguinte proposição.

Proposição 6.12 *O conjunto singular de $HS_{\mathbf{x}}$ é dado por*

$$\Sigma(HS_{\mathbf{x}}) = \{(u, \mu) \in U \times S^r \mid K_h(\mathbf{e}(u, \mu(u)))(u) = 0\}.$$

Demonstração: Ver [19], Proposição 3.6.

Pela prova da proposição acima, temos a seguinte proposição.

Proposição 6.13 *Sejam $\mathbf{x} : U \rightarrow H^n$ uma subvariedade e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{x}(u_0) + \mathbf{e}(u, \mu(u))$ um vetor tipo-luz, então*

- (i) $p_0 = \mathbf{x}(u_0)$ é um ponto $\mathbf{e}(u_0, \mu_0)$ -horoesférico se, e somente se, $\text{Hess}(h_{\mathbf{v}_0})(u_0) = 0$.
- (ii) p_0 é um ponto $H(\mathbf{e}(u_0, \mu_0))$ -parabólico se, e somente se, $\det \text{Hess}(h_{\mathbf{v}_0})(u_0) = 0$, onde $\text{Hess}(h_{\mathbf{v}_0})(u_0)$ é a matriz hessiana de $h_{\mathbf{v}_0}(u)$ em u_0 .

Demonstração: Ver [19], Proposição 3.7.

Um método útil na teoria de singularidades é relacionar as singularidades da família H definida sobre M , com as singularidades da família de funções altura sobre a canal de M . Isto vai permitir relacionar o caso de codimensão > 2 com a geometria de hipersuperfícies, já estudada na seção anterior. Seja $\bar{H}$ a função altura horoesférica na hipersuperfície canal hiperbólica CM , isto é :

$$\bar{H} : CM \times LC_+^* \longrightarrow \mathbb{R}; \bar{H}((u, \mu), \mathbf{v}) = \langle \bar{x}(u, \mu), \mathbf{v} \rangle + 1.$$

Vamos denotar $\bar{H}((u, \mu), \mathbf{v})$ por $\bar{h}_{\mathbf{v}}(u, \mu)$ para todo $\mathbf{v} \in LC_+^*$ e seja $\mathbf{N}(u, \mu) = \sinh \theta \mathbf{x}(u) + \cosh \theta \mathbf{e}(u, \mu)$, então temos a seguinte proposição.

Proposição 6.14

- (i) $\bar{h}_{\mathbf{v}}(u, \mu) = 0$ se, e somente se, existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \rho$ tais que $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{n-r-1} \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_{u_i}(u, \mu) + \sum_{j=1}^r \lambda_{n-r-1+j} \bar{\mathbf{x}}_{\mu_j}(u, \mu) + \rho \mathbf{N}(u, \mu)$ e $\sum_{i=1}^{n-r-1} \lambda_i^2 + \rho^2 = 1$.
- (ii) $\bar{h}_{\mathbf{v}}(u, \mu) = (\partial \bar{h}_{\mathbf{v}} / \partial u_i)(u, \mu) = (\partial \bar{h}_{\mathbf{v}} / \partial \mu_j)(u, \mu) = 0$ ($i = 1, \dots, n-r-1; j = 1, \dots, r$) se, e somente se, $\mathbf{v} = \mathbf{x}(u, \mu) \pm \mathbf{N}(u, \mu) = (\sinh \theta \pm \cosh \theta)(\mathbf{x}(u) \pm \mathbf{e}(u, \mu))$.

Demonstração: Ver [19, Proposição 3.8].

Como o campo de vetores normais unitários da hipersuperfície canal hiperbólica CM é dado por $\mathbf{N}$, a indicatriz hiperbólica de Gauss da hipersuperfície canal hiperbólica CM é a aplicação

$$\mathbb{L}_{CM} : U \times S^r \longrightarrow LC_+^*$$

dada por

$$\mathbb{L}_{CM}(u, \mu) = \bar{\mathbf{x}}(u, \mu) + \mathbf{N}(u, \mu) = (\sinh \theta + \cosh \theta)(\mathbf{x}(u) + \mathbf{e}(u, \mu)).$$

Podemos definir o difeomorfismo

$$\mathcal{M}_c : LC_+^* \longrightarrow LC_+^*$$

por $\mathcal{M}_c(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ para um número real positivo e fixado c . Temos então o seguinte lema:

Lema 6.15 *Com as notações acima, tem-se*

$$\mathcal{M}_c \circ HS_{\mathbf{x}}(u, \mu) = \mathbb{L}_{CM}(u, \mu),$$

onde $c = \cosh \theta + \sinh \theta$.

Pelo lema anterior, a hipersuperfície horoesférica de M é difeomorfa à indicatriz hiperbólica da hipersuperfície canal hiperbólica CM de M .

6.3 Curvatura Hiperbólica Absoluta Total

Nesta seção, introduzimos o conceito de *curvatura hiperbólica absoluta total* e damos uma interpretação desta em termos de funções alturas horoesféricas. Esta abordagem nos permite mostrar uma extensão parcial do Teorema de Chern-Lashof e caracterizar as imersões horo-justas.

Seja $f : M^n \rightarrow H^{n+p}$ uma imersão isométrica.

O fibrado normal unitário de f é definido por

$$\nu M = \{(x, \xi) \in M \times S_1^{n+p} \mid \xi \in (T_x M)^\perp\}.$$

A indicatriz de Gauss hiperbólica (generalizada) é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} : \nu M &\longrightarrow LC_+^* \\ (x, \xi) &\longmapsto x + \xi. \end{aligned}$$

A aplicação de Gauss hiperbólica (generalizada) é dada por $\tilde{\mathfrak{G}} = \Pi \circ \mathfrak{G} : \nu M \rightarrow S_+^{n+p-1}$ onde $\Pi : LC_+^* \rightarrow S_+^{n+p-1}$ é a projeção $\Pi(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}}$.

Definição 6.16 *Seja $f : M^n \rightarrow H^{n+p}$ uma imersão. A curvatura hiperbólica absoluta total de f é dada por*

$$\tau_h(M, f) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{\nu M} |\tilde{\mathfrak{G}}^* d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}}| = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{\nu M} |\det \mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}| d\mathbf{v}_{\nu M}$$

onde c_{n+p-1} é o volume da esfera unitária S_+^{n+p-1} , $\mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}$ é a matriz jacobiana de $\tilde{\mathfrak{G}}$ e $d\mathbf{v}$ denota os elementos de volume de cada variedade.

O seguinte resultado é essencial para relacionar $\tau_h(M, f)$ com as funções alturas horoesféricas e seus pontos críticos.

Proposição 6.17 *Seja $\tilde{\mathfrak{G}} : \nu M \rightarrow S_+^{n+p-1}$ a aplicação de Gauss hiperbólica da imersão $f : M \rightarrow H^{n+p}$. Para $(x, \xi) \in \nu M$ com $\tilde{\mathfrak{G}}(x, \xi) = \mathbf{v}$, temos*

$$\text{Hess}_x(h_{\mathbf{v}}) = -\ell_0(g_{ij})J_{\tilde{\mathfrak{G}}}(x, \xi)$$

onde $\mathbb{L} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n+p+1})$ é uma parametrização local de $\mathfrak{G}$ e g_{ij} é a primeira forma fundamental hiperbólica.

Demonstração: Sejam $\mathbf{x} : U \rightarrow H^{n+p}$ uma parametrização de f numa vizinhança U de x , e $\tilde{\mathbf{x}} : U \times S^p \rightarrow H^{n+p}$ a hipersuperfície canal hiperbólica de $\mathbf{x}(U)$. Portanto segue da definição de hipersuperfície horoesférica e do Lema 6.15 que

$$(6.1) \quad \mathbb{L}(u, \mu) - HS_{\mathbf{x}}(u, \mu) = \frac{1}{\sinh \theta + \cosh \theta} \mathbb{L}_{CM}(u, \mu)$$

onde $|\theta| > 0$ é suficientemente pequeno para tornar $\tilde{\mathbf{x}}$ um mergulho.

Após compor a projeção Π com as aplicações em (6.1) e em seguida calcular as respectivas matrizes jacobianas segue das Proposições 6.5 e 6.6 que

$$\text{Hess}_x(h_{\mathbf{v}}) = -\ell_0(g_{ij})\mathcal{J}_{\tilde{\mathbf{x}}}(u, \mu).$$

O que encerra a demonstração.

O objetivo agora é interpretar a curvatura hiperbólica absoluta total em termos das funções alturas horoesféricas e seus pontos críticos. Notemos que x é um ponto crítico de $h_{\mathbf{v}}$ se, e somente se, existe um vetor ξ normal a M em x tal que $a(x + \xi) = \mathbf{v}$ para algum $a > 0$, ou seja, o conjunto de pontos críticos de $h_{\mathbf{v}}$ é dado por $\tilde{\mathfrak{G}}^{-1}(\mathbf{v})$. Portanto segue da Proposição 6.17 o seguinte resultado:

Proposição 6.18 *Seja x um ponto crítico de $h_{\mathbf{v}}$. Então x é não-degenerado se, e somente se, (x, ξ) é um ponto regular de $\tilde{\mathfrak{G}}$.*

Como consequência da proposição anterior e do Teorema de Sard temos:

Corolário 6.19 *Dada uma imersão $f : M \rightarrow H^{n+p}$ existe um subconjunto $D \subset S_+^{n+p-1}$ tal que*

- (i) $S_+^{n+p-1} - D$ tem medida de Lebesgue nula, e portanto D é denso em S_+^{n+p-1} .
- (ii) D é um aberto de S_+^{n+p-1} .
- (iii) para todo $\mathbf{v} \in D$, a função altura horoesférica $h_{\mathbf{v}}$ é uma função de Morse.

Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{I}}$ uma coleção de abertos conexos de νM tais que, $\bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} U_\lambda$ é igual, exceto por um conjunto de medida nula, ao conjunto dos pontos regulares de $\tilde{\mathfrak{G}}$ e, além disso, $\tilde{\mathfrak{G}}|_{U_\lambda}$ é injetiva para todo $\lambda \in \mathcal{I}$; uma tal coleção existe porque o conjunto dos pontos regulares é um aberto de νM . Então temos que

$$\int_{\tilde{\mathfrak{G}}(U_\lambda)} d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} = \int_{U_\lambda} |\tilde{\mathfrak{G}}^* d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}}| = \int_{U_\lambda} |\det \mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}| d\mathbf{v}_{\nu M}.$$

Pela escolha dos U 's temos que $\det \mathcal{J}_{\mathfrak{G}}(x, \xi) \neq 0$ para todo $(x, \xi) \in U_\lambda$. Por outro lado, pela Proposição 6.17, o índice de x como ponto crítico de $h_{\mathbf{v}}$, é uma constante k para todo $(x, \xi) \in U_\lambda$ pois U_λ é conexo.

Seja $\mu_j(U_\lambda)(\mathbf{v})$ o número de pontos x em M tais que

- (i) $(x, \xi) \in U_\lambda$;
- (ii) $\tilde{\mathfrak{G}}(x, \xi) = \mathbf{v}$;
- (iii) x é um ponto crítico não-degenerado de índice j da função altura horoesférica $h_{\mathbf{v}}$.

A função $\mu_l(U_\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{I}$ está bem definida e além disso, como $\tilde{\mathfrak{G}}|_{U_\lambda}$ é injetiva, segue-se que $\mu_l(U_\lambda)(\mathbf{w}) = 1$ se, e somente se, $(x, \xi') \in U_\lambda$, $\tilde{\mathfrak{G}}(x, \xi') = \mathbf{w}$ e x é ponto crítico de índice l de $h_{\mathbf{w}}$. Também $\mu_l(U_\lambda)(\mathbf{w}) = 0$, $l = 0, 1, \dots, n$ se $\mathbf{w} \notin \tilde{\mathfrak{G}}(U_\lambda)$.

$$\begin{aligned} \int_{U_\lambda} |\det \mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}| d\mathbf{v}_{\nu M} &= \int_{\tilde{\mathfrak{G}}(U_\lambda) \cap D} d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} = \int_{\tilde{\mathfrak{G}}(U_\lambda) \cap D} \mu_k(U_\lambda) d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} \\ &= \int_{\tilde{\mathfrak{G}}(U_\lambda) \cap D} \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda) d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} = \int_D \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda) d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, podemos expressar a curvatura hiperbólica absoluta total de uma imersão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tau(M, f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{\nu M} |\det \mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}| d\mathbf{v}_{\nu M} \\ &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \sum_{\lambda \in \mathcal{I}} \int_{U_\lambda} |\det \mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{G}}}| d\mathbf{v}_{\nu M} \\ &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \sum_{\lambda \in \mathcal{I}} \int_D \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda) d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}}. \end{aligned}$$

Agora definimos $\mu_l(\mathbf{v})$ como o número de pontos críticos x em M de $h_{\mathbf{v}}$ de índice l , e $\mu(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^n \mu_l(\mathbf{v})$. Estes números são finitos pois os pontos críticos de uma função de Morse são isolados e M é compacta. Temos também que $\mu_l(U_\lambda)(\mathbf{v}) = 0$ exceto para um número finito de λ 's. Logo temos que

$$\begin{aligned} \tau(M, f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_D \sum_{i=0}^n \sum_{\lambda \in \mathcal{I}} \mu_i(U_\lambda) d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} \\ (6.2) \quad &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_D \sum_{i=0}^n \mu_i d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}} \\ &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_D \mu d\mathbf{v}_{S_+^{n+p-1}}. \end{aligned}$$

6.3.1 Principais Resultados

Com a caracterização da curvatura hiperbólica absoluta total em termos dos pontos críticos das funções horoesféricas (6.2), podemos estender parcialmente o Teorema de Chern-Lashof para o caso de imersões em espaços hiperbólicos. Além disso também podemos relacionar horo-justeza com a curvatura hiperbólica absoluta total.

Teorema 6.20 (Chern-Lashof (hiperbólico)) *Seja $f : M \rightarrow H^{n+p}$ uma imersão de uma variedade fechada n -dimensional. Então,*

- (i) $\tau_h(M, f) \geq \gamma(M)$, e em particular, $\tau(M, f) \geq 2$;
- (ii) Se $\tau_h(M, f) < 3$, então M é homeomorfa a uma n -esfera.

Demonstração:

(i) Toda função altura horoesférica não-degenerada φ possui $\mu(\varphi) \geq \gamma(M)$ pontos críticos. Portanto

$$\tau_h(M, f) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_D \mu d\mathbf{v}_{S^{n+p-1}_+} \geq \gamma(M).$$

(ii) Se $\tau_h(M, f) < 3$, então existe um conjunto $W \subset S^{n+p-1}_+$ de medida positiva tal que $\mu|_W \equiv 2$. Existe assim uma $h_{\mathbf{v}}$ não-degenerada com exatamente dois pontos críticos. Portanto M é homeomorfa a S^n pelo Teorema de Reeb (veja [30, pg 25]).

A seguir relacionamos horo-justeza em termos da curvatura hiperbólica absoluta total.

Teorema 6.21 *Uma imersão $f : M \rightarrow H^m$ de uma variedade fechada é horo-justa se, e somente se, $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2) = \tau_h(M, f)$, onde $\tau_h(M, f)$ é a curvatura hiperbólica absoluta total de f .*

Demonstração: Se f é horo-justa e $h_{\mathbf{v}}$ é uma função altura horoesférica não-degenerada, então $h_{\mathbf{v}}$ é uma função perfeita e assim possui $\beta = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos. Portanto $\beta \geq \gamma = \gamma(M)$ e $\tau_h(M, f) = \beta$. Por outro lado, pelas desigualdades de Morse, $\gamma \geq \beta$, e assim $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2) = \tau_h(M, f)$.

Reciprocamente, como toda $h_{\mathbf{v}}$ não-degenerada possui $\gamma(M) = \beta(M; \mathbb{Z}_2)$ pontos críticos, segue do Corolário 4.5 que f é horo-justa.

6.4 Horoconvexidade

As imersões justas de esferas, no sentido euclidiano, são precisamente as imersões convexas. Nesta seção abordamos o tema análogo no contexto de imersões horo-justas: isto é, definimos horoconvexidade e a relacionamos com horo-justeza.

Definição 6.22 *Seja V um subconjunto de $H^m(D^m)$. Uma hiperhoroesfera $\mathcal{H}$ que passa por um ponto $x \in V$ é denominada horoesfera suporte de V em x se V está inteiramente contido em um dos h -semi-espacos determinados por $\mathcal{H}$.*

Definição 6.23 *Um mergulho $f : M^m \rightarrow H^{m+1}(D^{m+1})$ é denominado horoconvexo se para todo $x \in M$, as duas hiperhoroesferas tangentes a $f(M)$ em $f(x)$ são horoesferas suporte de $f(M)$.*

Temos o seguinte resultado:

Teorema 6.24 *Todo mergulho horoconvexo de S^m em H^{m+1} é justo. Em particular, todo mergulho horoconvexo é horo-justo.*

Demonstração: Sejam $f : S^m \rightarrow H^{m+1}$ um mergulho horoconvexo e $P : H^{m+1} \rightarrow D^{m+1}$ uma toda projeção estereográfica com polo arbitrário. Claramente $P \circ f$ é um mergulho horoconvexo.

Sejam $x \in P \circ f(S^m)$ e $\mathcal{H}$ a horoesfera suporte no ponto x cujo interior contém pontos de $P \circ f(S^m)$. Como $\mathcal{H}$ é convexa segue que o hiperplano tangente a $P \circ f(S^m)$ no ponto x é um plano suporte. Logo $P \circ f(S^m)$ é convexo. Portanto segue do Teorema 3.9 que f é justo.

Corolário 6.25 *Seja $f : S^m \rightarrow H^{m+1}$ em mergulho horoconvexo. Então $\tau_h(S^m, f) = 2$.*

Observação 6.26 *As seguintes questões permanecem sem resposta, e podem ser objeto de estudo futuro:*

- (i) *Todo mergulho justo de S^m em H^{m+1} é horoconvexo?*
- (ii) *Todo mergulho horo-justo de S^m em H^{m+1} é horoconvexo? Uma resposta positiva a esta questão completaria o Teorema de Chen-Lashof para o caso hiperbólico e mostraria que, como o caso de S^1 em H^2 , todo mergulho $S^m \hookrightarrow H^{m+1}$ é justo se, e somente se, é horo-justo.*

(iii) *Seja M uma variedade fechada. O ínfimo de $\tau_h(M, f)$ entre todas as imersões de M em todos os espaços hiperbólicos é o número de Morse de M ?*

Apêndice A

Programas utilizados no capítulo 5

Cálculo da Curvatura Geodésica

Sejam $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva no disco de Poincaré D^2 e $\gamma(t) = P^{-1} \circ \alpha(t)$, onde P^{-1} é a inversa da projeção estereográfica de polo $(-1, 0, 0)$. A curvatura geodésica de γ , k_g , é dada pela fórmula

$$k_g(t) = \frac{\mathbf{b}(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t), \gamma(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são fornecidas pelo usuário, então o seguinte programa calcula k_g plota o gráfico do seu valor em módulo juntamente com a função constante $c = 1$, permitindo assim verificar se $|k_g| \geq 1$.

```
> with(plots):with(linalg):
> P:=(x,y)->[(1+x^2+y^2)/(1-x^2-y^2),2*x/(1-x^2-y^2),2*y/(1-x^2-y^2)]:
> x:=t-> local onde deve ser digitado a função x(t) :
> y:=t-> local onde deve ser digitado a função y(t) :
> f:=t->P(x(t),y(t)):
> nf:=t->([f(t)[1],f(t)[2],f(t)[3]]):
> Df:=unapply(diff(f(t),t),t):
> nDf:=t->([-Df(t)[1],Df(t)[2],Df(t)[3]]):
> DDf:=unapply(diff(f(t),t,t),t):
> k:=unapply(innerprod(crossprod(Df(t),DDf(t)),nf(t))/(innerprod(Df(t),nDf(t))^(3/2)),t):
> plot([abs(k(t)),1],t=0..2*Pi);
```

Teste de Horo-justeza

Sejam $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva no disco de Poincaré D^2 e $f(t) = P^{-1} \circ \alpha(t)$, onde P^{-1} é a inversa da projeção estereográfica de polo $(-1, 0, 0)$. Para saber se f é horo-justa

devemos olhar para a família de funções

$$F : S^1 \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad F(t, u) = \mathbf{b}(f(t), (1, \cos(u), \sin(u)))$$

e descobrir se há ou não alguma função de Morse com mais do que dois pontos críticos.

O seguinte programa produz, para vários valores de u , os gráficos das duas primeiras derivadas de $F(t, u)$ em relação a t e em seguida produz uma animação destes pares de gráficos. Observe-se que a quantidade de gráficos é estipulada pelo usuário, por exemplo, "frames = 100" faz com que o programa produza uma animação com 100 pares de gráficos.

```
> with(plots):with(linalg):
> P:=(x,y)->[(1+x^2+y^2)/(1-x^2-y^2),2*x/(1-x^2-y^2),2*y/(1-x^2-y^2)]:
> x:=t-> [local onde deve ser digitado a função x(t)] :
> y:=t-> [local onde deve ser digitado a função y(t)] :
> c:=t->[x(t),y(t)]:
> Pc:=t->P(c(t)[1],c(t)[2]):
> V:=u->[-1,cos(u),sin(u)]:
> F:=(t,u)->innerprod(Pc(t),V(u)):
> dF:=(t,u)->diff(F(t,u),t):
> ddF:=(t,u)->diff(F(t,u),t,t):
> A:=animate(dF(t,u),t=0..2*Pi,u=0..2*Pi,frames=100,color=red):
> B:=animate(ddF(t,u),t=0..2*Pi,u=0..2*Pi,frames=100,color=blue):
> display(A,B):
```

Por exemplo a curva $\alpha(t) = (0.6 \cos(t), 0.5 \sin(t))$ não é horo-justa pois para $u = \frac{3}{2}\pi$, a função

$$F'(t, u) = \frac{1 + 0.36 \cos^2(t) - 0.16 \sin^2(t) - 1.2 \cos(t) \cos(u) - 0.8 \sin(t) \sin(u)}{-1 + 0.36 \cos^2(t) + 0.16 \sin^2(t)}$$

é de Morse mas não é perfeita, veja Figura A.1.

Figura A.1: $F(t, u)$ com 4 pontos críticos não-degenerados.

Referências Bibliográficas

- [1] BANCHOFF, T. F., Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds, *Amer. J. Math.* 87 (1965), 462–472.
- [2] BANCHOFF, T. F., The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres, *J. Differential Geometry* 4 (1970), 193–205.
- [3] BANCHOFF, T. F. e KÜHNEL, W., Tight submanifolds, smooth and polyhedral, *Tight and taut submanifolds*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 32, (1997), 51–118.
- [4] BORSUK, K., Sur la courbure totale des courbes fermées, *Ann. de la Soc. Math. Pol.*, 20 (1947), 251–265.
- [5] CARMO, M. P., *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1985).
- [6] CARTER, S. e WEST, A., Tight and taut immersions, *Proc. London Math. Soc.* (3) 25 (1972), 701–720.
- [7] CECIL, T. E., A characterization of metric spheres in hyperbolic space by Morse theory, *Tohoku Math. J.* 26 (1974), 341–351.
- [8] CECIL, T. E. e CHERN, S. S., Tight and taut submanifolds, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 32 (1997).
- [9] CECIL, T. E. e RYAN, P. J., Focal sets of submanifolds, *Pacific J. Math.* 78 (1978), 27–39.
- [10] CECIL, T. E. e RYAN, P. J., Distance functions and umbilic submanifolds of hyperbolic space, *Nagoya Math. J.* 74 (1979), 67–75.

- [11] CECIL, T. E. e RYAN, P. J., Tight and taut immersions into hyperbolic space, *J. London Math. Soc.* 19 (1979), 561–572.
- [12] CECIL, T. E. e RYAN, P. J., *Tight and Taut Immersions of Manifolds*, Research Notes in Mathematics, 107 (1985).
- [13] CHERN, S. S., Curves and surfaces in Euclidean space, *Studies in global geometry and analysis, MAA Studies in Mathematics*, 4 (1967), 16–56.
- [14] CHERN, S. S. e LASHOF, R. K., On the total curvature of immersed manifolds I, *Amer. J. Math.* 79 (1957), 306–318.
- [15] CHERN, S. S. e LASHOF, R. K., On the total curvature of immersed manifolds II, *Mich. Math. J.* 5 (1958), 5–12.
- [16] EILENBERG, S. e STEENROD, N., *Foundations of algebraic topology*, Princeton U. Press, 1952.
- [17] FENCHEL, W., Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven, *Math. Ann.*, 101 (1929), 238–252.
- [18] IZUMIYA, S., PEI, T. e SANO, T., Singularities of hyperbolic Gauss Maps. *Proc. the London Math. Soc.* 86 (2003), 485–512.
- [19] IZUMIYA, S., FUSTER, M. C. R. e TAKAHASHI, M., The horospherical geometry of submanifolds in Hyperbolic space. *preprint*, (2004).
- [20] IZUMIYA, S. e FUSTER, M. C. R., The hyperbolic Gauss-Bonnet type theorem. *preprint*, (2004).
- [21] KÜHNEL, W. e CECIL, T. E., Bibliography on tight, taut and isoparametric submanifolds, *Tight and taut submanifolds*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 32, (1997), 51–118.
- [22] KUIPER, N. H., Immersions with minimal total absolute curvature, *Coll. de géométrie diff., Centre Belge de Recherches Math., Bruxelles*, (1958), 75–88.
- [23] KUIPER, N. H., La courbure d’indice k et les applications convexes, *Séminaire de topologie et géométrie différentielle dirigé par Ch. Ehresmann, Faculté des Sciences, Paris*, (1960), 1–15.

- [24] KUIPER, N. H., Convex immersions of closed surfaces in E^3 , *Comm. Math. Helv.* 35 (1961), 85–92.
- [25] KUIPER, N. H., On convex maps, *Nieuw Archief voor Wisk.* 10 (1962), 147–164.
- [26] KUIPER, N. H., Minimal total absolute curvature for immersions, *Invent. Math.* 10 (1970), 209–238.
- [27] KUIPER, N. H., Tight embeddings and maps. Submanifolds of geometrical class three in E^n , The Chern Symposium 1979. *Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif.*, 1979, 97–145, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [28] KUIPER, N. H. e MEEKS III, W., Total curvature for knotted surfaces, *Invent. Math.* 77 (1984), 25–69.
- [29] LITTLE, J. A. e POHL, W. F., On tight immersions of maximal codimension, *Invent. Math.* 13 (1971), 179–204.
- [30] MILNOR, J. W., *Morse theory*, Ann. Math. Stud. 51, Princeton U. Press, 1963.
- [31] MORSE, M. e CAIRNS, S., *Critical point theory in global analysis and differential topology*, Academic Press, New York, 1969.
- [32] NOGUEIRA, A. C., Imersões Justas de Variedades em Espaços Euclidianos, *Dissertação de Mestrado*, ICMC-USP (1993).
- [33] RATCLIFFE, R. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Math., 149 (1994).
- [34] RODRÍGUEZ, L., *Geometria das Subvariedades*, Monografias de Matemática 26, IMPA, 1976.
- [35] TAUSK, D.V., MERCURI, F. e PICCIONE, P., *Notes on Morse Theory*, Publicações Matemáticas, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2001.
- [36] TEUFEL, E., Differential topology and the computation of total absolute curvature, *Math. Ann.* 258 (1982), 471–480.
- [37] WILSON, J. P., The total absolute curvature of an immersed manifold, *J. London Math. Soc.* 40 (1966), 362–366.

- [38] WEINER, J. L., 'The Gauss map in spaces of constant curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* 38 (1973), 157–161.
- [39] WEINER, J. L., 'Total curvature and total absolute curvature of immersed submanifolds of spheres, *J. Differential Geometry* 9 (1974), 391–400.