Topologia de singularidades e o estudo de seus
invariantes.

Grazielle Feliciani Barbosa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 17/03/2008

Assinatura: _____

Topologia de singularidades e o estudo de seus invariantes.¹

Grazielle Feliciani Barbosa

Orientador: *Prof. Dr. Marcelo José Saia*

Co-Orientador: *Prof. Dr. Joachim Herbert Rieger*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Março/2008

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

*Ao Mauricio com
imenso amor ...*

Agradecimentos

A Deus, meu eterno companheiro, que esteve ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço aos professores Marcelo José Saia e Joachim Herbert Rieger pela orientação, pela paciência, pela dedicação e, principalmente, pela amizade. Agradeço ao professor Joachim pela acolhida e atenção que me dedicou quando estive em Halle. Agradeço à professora Roberta pela dedicação, por ter ido comigo para Alemanha, por me ouvir e por acreditar em mim mesmo quando eu não acreditava. Você será sempre minha orientadora. Obrigada!

Agradeço aos meus pais, José Lourenço e Inês, por todo amor e carinho que me dedicam, por terem me ensinado o caminho a seguir e por acreditarem em mim. À minha irmã Giselle, agradeço pela amizade e compreensão. Agradeço à toda minha família, pelas orações que me dispensaram e por me amarem do jeito que eu sou. Amo vocês!

Ao meu namorado Mauricio, agradeço por estar sempre ao meu lado, com muita dedicação, carinho e amor. Te amo coração...

Agradeço a Deus todos os dias pelos amigos que me deu, não são muitos, nem poucos, mas são especiais para mim... e eu amo cada um de vocês.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e sempre me incentivaram a prosseguir em meus estudos sem desistir de meus objetivos. Agradeço em especial à professora Maria Aparecida Soares Ruas.

Aos funcionários do ICMC por toda atenção dispensada e por serem pessoas tão gentis.

À Capes pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

Algumas relações entre $\mathcal{A}$ -invariantes de germes de aplicações de coposto 1 equidimensionais $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ são descritas. O principal resultado estabelece que a soma alternada de números de Milnor dos fechos dos conjuntos A_i na fonte de f é igual a multiplicidade local de f menos $n + 1$. E existem fórmulas correspondentes para os s -tipos estáveis locais $A_{(k_1, \dots, k_s)}$. As relações nos garantem condições para a $\mathcal{A}$ -finitude de f e para a $\mathcal{A}$ -trivialidade topológica de deformações de f . Também classificamos os germes de aplicações $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3.

Abstract

Some new relations between $\mathcal{A}$ -invariants of equidimensional corank-1 map-germs $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ are described. The main local result states that the alternating sum of the Milnor numbers of the closures of the A_i sets in the source of f is equal to the local multiplicity of f minus $n + 1$. And there are corresponding formulas for the s -local stable types $A_{(k_1, \dots, k_s)}$. The relations provide simplified (or weaker) conditions for the $\mathcal{A}$ -finiteness of f and for the topological $\mathcal{A}$ -triviality of deformations of f . We also classify the $\mathcal{A}$ -simple germs $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$, for multiplicities 1, 2 and 3.

Sumário

Introdução	iii
1 Teoria de Singularidades	1
1.1 Germes e $\mathcal{A}$ -equivalência	1
1.2 Espaço Tangente e Determinação finita	3
1.3 Equivalência de contato	5
1.4 Desdobramentos	6
2 Invariantes	9
2.1 Preliminares	9
3 Relações entre invariantes de germes de coposto 1 de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$	15
3.1 Relações entre invariantes	15
4 Aplicações	27
4.1 Germes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n > p$	27
4.2 Determinação finita e equisingularidade	28
5 Classificação de germes de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 5$	31
5.1 Classificação de germes de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^5$	31
Referências Bibliográficas	47

Introdução

Uma questão relevante em teoria de singularidades é o estudo dos invariantes associados a um germe de aplicação. O primeiro invariante que surgiu foi o número de Milnor de um germe de uma função analítica $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$. Este invariante pode ser definido de várias maneiras. Algébricamente é definido por

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle}$$

Sua finitude é uma condição necessária e suficiente para a determinação finita e, além disso, ele aparece associado à geometria da singularidade em duas formas: como números de pontos críticos de Morse em uma deformação estável e como o posto da homologia média da fibra de Milnor de f . Na teoria de singularidades de germes de aplicações $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, com $p > 1$, não encontramos um invariante assim tão completo. Uma razão para isto está no fato de que, enquanto para funções aparece apenas um tipo de singularidade estável, ou seja, a singularidade de Morse, para $p > 1$ a complexidade da classificação dos germes e multigerms estáveis aumenta com n e p .

As singularidades de germes de aplicações do plano no plano foram primeiramente estudadas por H. Whitney, em 1955 e, posteriormente, por J. Mather. Os trabalhos de Whitney e Mather versam sobre singularidades estáveis. A classificação dos germes simples de coposto 1 (caso real ou complexo) foi obtida por J. H. Rieger em [25].

Quando um germe finitamente determinado não estável de $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ é perturbado de modo a se tornar estável, um certo número de cúspides e dobras aparecem no discriminante, que é uma curva. Na tabela 1 em [25] alguns invariantes foram calculados para cada germe simples f , por exemplo, o número de cúspides $c(f)$, o número de dobras $d(f)$, a multiplicidade local $m_f(0)$ e o número de Milnor $\mu(\Sigma_f)$ do conjunto crítico. Também mostrou que alguns desses invariantes satisfazem certas relações, por exemplo, temos $c(f) = \mu(\Sigma_f) + m_f(0) - 2$. Gaffney e Mond mostraram em [11] que esta formula também vale para germes de coposto 2 (o que havia sido conjecturado por J. Rieger, baseado em seu trabalho com M.A.S. Ruas sobre a classificação de germes simples de coposto 2 no plano [29]).

Para germes quase-homogêneos equidimensionais de coposto 1, Marar, Montaldi e Ruas [22] apresentaram fórmulas para os invariantes 0-estáveis em termos dos pesos e grau de f . Mais geralmente, usando as equações que definem o fecho do conjunto dos pontos do tipo $A_{(k_1, \dots, k_s)}$, podemos obter fórmulas para os invariantes 0-estáveis $r_{(k_1, \dots, k_s)}(f)$, onde $\sum_i k_i = n$, de qualquer germe de coposto 1 equidimensional f , como em [26]. Fórmulas relacionando os invariantes 0-estáveis $r_{(k_1, \dots, k_s)}(f)$, a multiplicidade de f e certos números de Milnor generalizam, por exemplo, a fórmula $c(f) = \mu(\Sigma_f) + m_f(0) - 2$ para $n = 2$ (provada para o caso semi-quase-homogêneo em [27]).

Nos capítulos 2 a 4 desta tese (baseados em um trabalho em conjunto com Rieger, ver [3]) provamos essas fórmulas no caso geral (sem a hipótese de semi-quase-homogeneidade) e aplicamos estas à problemas de determinação finita e equisingularidade.

Também apresentamos neste trabalho a classificação de germes $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3, e uma conjectura de Rieger para generalizar essa classificação.

No capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados da Teoria de Singularidades que são de grande importância para o início do trabalho

O objetivo do capítulo 2 é apresentar os invariantes v e r relacionados a um germe de aplicação equidimensional de coposto 1. Apresentamos também a fórmula de Lê-Greuel, de grande importância para obtenção dos resultados apresentados no capítulo 3, e demonstramos um lema sobre aditividade de codimensões.

No capítulo 3 apresentamos relações entre $\mathcal{A}$ -invariantes de germes de aplicações de coposto 1 equidimensionais. O principal resultado estabelece que a soma alternada de números de Milnor dos fechos dos conjuntos A_i na fonte de f é igual a multiplicidade local de f menos $n + 1$. E existem fórmulas correspondentes para os s -tipos estáveis locais $A_{(k_1, \dots, k_s)}$.

O capítulo 4 contém algumas extensões a germes $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, $n > p$ e aplicações à determinação finita e equisingularidade.

No capítulo 5 classificamos os germes $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3, e apresentamos uma conjectura para generalizar essa classificação para o caso de germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2, 0$ em $\mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 5$.

Capítulo 1

Teoria de Singularidades

Neste capítulo apresentamos alguns tópicos da teoria de singularidades necessários para o desenvolvimento deste trabalho. A principal referência é Gibson [12].

1.1 Germes e $\mathcal{A}$ -equivalência

Seja $S \subset \mathbb{C}^n$. Consideremos o conjunto das aplicações analíticas definidas numa vizinhança aberta de S em $\mathbb{C}^n$ com valores em $\mathbb{C}^p$. Introduzimos neste conjunto a seguinte relação de equivalência: dadas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ em tal conjunto, dizemos que f e g são equivalentes se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de S tal que $f|_W = g|_W$.

Definição 1.1.1 Definimos o multigerme de uma aplicação holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, onde U é uma vizinhança aberta de S em $\mathbb{C}^n$, como a classe de equivalência de f segundo a relação acima. Denotamos o multigerme de f por $f : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^p, y$. Se $S = \{x\}$, esta classe de equivalência é chamada de germe de aplicação ou, simplesmente, germe.

A derivada do germe $f : \mathbb{C}^n, x \rightarrow \mathbb{C}^p, y$ é a derivada em x de qualquer um de seus representantes.

Definição 1.1.2 Dizemos que um germe $f : \mathbb{C}^n, x \rightarrow \mathbb{C}^p, y$ é um germe de difeomorfismo se um de seus representantes, e portanto todos, é um difeomorfismo local em x .

Definição 1.1.3 O posto de um germe $f : \mathbb{C}^n, x \rightarrow \mathbb{C}^p, y$ é definido como o posto da matriz de sua derivada em x e é denotado como posto f . O coposto do germe f é definido como $\min\{n, p\} - \text{posto } f$.

Definição 1.1.4 Dizemos que dois germes $f_1 : \mathbb{C}^n, x_1 \rightarrow \mathbb{C}^p, y_1$ e $f_2 : \mathbb{C}^n, x_2 \rightarrow \mathbb{C}^p, y_2$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes, e denotamos por $f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2$, se existem germes de difeomorfismos $\phi : \mathbb{C}^n, x_1 \rightarrow \mathbb{C}^n, x_2$ e $\psi : \mathbb{C}^p, y_1 \rightarrow \mathbb{C}^p, y_2$ para os quais o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n, x_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{C}^p, y_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{C}^n, x_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{C}^p, y_2 \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$.

Como consequência da Definição 1.1.4, todo germe $\mathbb{C}^n, x \rightarrow \mathbb{C}^p, y$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a algum germe $\mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$. O conjunto dos germes $\mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Quando $p = 1$, denotamos por $\mathcal{O}_n$. $\mathcal{O}_n$ é um anel local cujo ideal maximal é $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n / f(0) = 0\}$. O conjunto dos germes de difeomorfismos de $\mathcal{O}_{n,n}$ é um grupo com a operação de composição e é denotado por $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$. Definimos o grupo $\mathcal{A} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$

Um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ induz o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} f^* : \mathcal{O}_p & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

Definição 1.1.5 A multiplicidade local de um germe de aplicação $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é

$$m_f(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{f^* \mathcal{M}_p}.$$

Definição 1.1.6 Denotamos por $J^k(n, p)$ o espaço vetorial complexo das aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ onde cada componente f_i de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados k -jatos.

Definimos $H^k(n, p)$ como o espaço vetorial complexo das aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ onde cada componente f_i de f é um polinômio homogêneo de grau k nas coordenadas $x_1, \dots, x_n$.

Para cada aplicação holomorfa $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$, onde U é um aberto de $\mathbb{C}^n$ e $a \in U$, a expansão em séries de potências de $f(x + a)$ em torno da origem é dada por

$$f(a) + d_a f \cdot x + \frac{1}{2!} d_a^2 f \cdot x^2 + \dots$$

Definição 1.1.7 *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. O k -jato de f em a , denotado por $j^k f(a)$, é definido por*

$$d_a f.x + \frac{1}{2!} d_a^2 f.x^2 + \cdots + \frac{1}{k!} d_a^k f.x^k$$

isto é, $j^k f(a)$ é a expansão em série de potências de $f(x+a) - f(a)$ em torno da origem truncada no termo de grau k .

1.2 Espaço Tangente e Determinação finita

Definição 1.2.1 *Uma ação de um grupo G em um conjunto M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$, denotada por $\varphi(g, x) = g.x$, tal que para todo $x \in M$ e $g, h \in G$ temos:*

- (i) $1.x = x$, com 1 identidade de G ;*
- (ii) $(gh).x = g.(h.x)$.*

Dado $x \in M$, o conjunto $G.x = \{g.x \in M / g \in G\}$ é chamado órbita de x em M . A relação dada por $y \sim x$ se $y \in G.x$ é uma relação de equivalência.

Definição 1.2.2 *Um grupo de Lie é um grupo multiplicativo G que é uma variedade diferenciável e as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis. Uma ação de grupo de Lie é uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M que seja diferenciável.*

Em geral, as órbitas de uma ação de grupo de Lie numa variedade não são subvariedades e sim subvariedades imersas, mas nos casos em que $G.x$ é variedade, vale o seguinte resultado:

Teorema 1.2.3 *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de grupo de Lie G em uma variedade M . Se as órbitas são subvariedades de M , então para todo $x \in M$ a aplicação $\varphi_x : G \rightarrow G_x$ dada por $\varphi_x(g) = g.x$ é uma submersão. E mais, o espaço tangente à órbita $G.x$ em x é a imagem de $d_1 \varphi_x : T_1 G \rightarrow T_x M$, isto é, $T_x G.x = d_1 \varphi_x(T_1 G)$.*

Demonstração: Ver [12].

No que segue definiremos uma relação de equivalência entre k -jatos de maneira análoga à definida para germes.

Definição 1.2.4 *Dois k -jatos $f, g \in J^k(n, p)$ são equivalentes se existem $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$ tais que $j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) = j^k g(0)$.*

A relação de equivalência definida acima provém de uma ação do grupo de Lie $\mathcal{A}^k$, que é o grupo dos k -jatos de elementos de $\mathcal{A}$, na variedade $J^k(n, p)$. O grupo $\mathcal{A}^k$ age em $J^k(n, p)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}^k \times J^k(n, p) &\longrightarrow J^k(n, p) \\ (j^k\phi(0), j^k\psi(0), f) &\longmapsto j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) \end{aligned}$$

Definimos o grupo $\mathcal{A}_1$ como sendo o subgrupo de $\mathcal{A}$ cujos elementos têm o 1-jato igual a identidade.

Proposição 1.2.5 *O espaço tangente à órbita de $f \in J^k(n, p)$ segundo a ação do grupo $\mathcal{A}^k$, que denotamos por $T\mathcal{A}^k.f$, é*

$$T\mathcal{A}^k.f = \{j^k(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i)(0)/g = (g_1, \dots, g_n) \in J^k(n, n)\} + \{j^k(h \circ f)(0)/h \in J^k(p, p)\}.$$

Agora consideramos a órbita de um germe segundo a ação do grupo $\mathcal{A}$. Lembramos que este grupo não é de Lie e as órbitas não são subvariedades.

Definição 1.2.6 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$.*

1. *O espaço tangente à órbita de f segundo a ação do grupo $\mathcal{A}$ é*

$$T\mathcal{A}.f = \{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i/g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n}\} + \{h \circ f/h \in \mathcal{M}_p \mathcal{O}_{p,p}\}.$$

2. *O espaço tangente estendido é*

$$T\mathcal{A}_e.f = \{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i/g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n}\} + \{h \circ f/h \in \mathcal{O}_{p,p}\}.$$

Definição 1.2.7 *Definimos a $\mathcal{A}$ -codimensão de f , que denotamos por $\mathcal{A}\text{-cod } f$, por*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}.f}$$

e a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f , que denotamos por $\mathcal{A}_e\text{-cod } f$, por

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}_e.f}.$$

Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é estável se $T\mathcal{A}_e.f = \mathcal{O}_{n,p}$.

Definição 1.2.8 Um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é $\mathcal{A}$ - k -determinado se para todo $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ temos que g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f . Dizemos que um germe f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se f é $\mathcal{A}$ - k -determinado para algum k .

Teorema 1.2.9 ([31]) Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. São equivalentes:

- (i) O germe f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado,
- (ii) Existe um inteiro positivo k tal que $\mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_{n,p} \subset T\mathcal{A}.f$,
- (iii) A $\mathcal{A}$ -codimensão de f é finita,
- (iv) A $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f é finita.

O próximo resultado é uma caracterização geométrica dos germes finitamente determinados.

Teorema 1.2.10 Um germe $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ é finitamente determinado se, e somente se, existe uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}^n$ tal que para todo subconjunto finito $S \subset V - \{0\}$, o multigerme de f em S é estável.

1.3 Equivalência de contato

Introduzimos nesta seção uma outra relação de equivalência entre germes $\mathbb{C}^n, x \rightarrow \mathbb{C}^p, y$. Esta relação é chamada de equivalência de contato ou $\mathcal{K}$ -equivalência.

Definição 1.3.1 Dizemos que dois germes $f_1 : \mathbb{C}^n, x_1 \rightarrow \mathbb{C}^p, y_1$ e $f_2 : \mathbb{C}^n, x_2 \rightarrow \mathbb{C}^p, y_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes, e denotamos por $f_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2$, se existem germes de difeomorfismos $h : \mathbb{C}^n, x_1 \rightarrow \mathbb{C}^n, x_2$ e $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1) \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_2, y_2)$ para os quais o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n, x_1 & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}^n, x_1 \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C}^n, x_2 & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_2, y_2) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{C}^n, x_2 \end{array}$$

é comutativo, onde i_k é o germe em x_k da inclusão $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ dada por $x \mapsto (x, y_k)$ e π_k é o germe em (x_k, y_k) da projeção $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $(x, y) \mapsto x$, $k = 1, 2$. Em outras palavras, H é dado por

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$$

com $\theta(x, y_1) = y_2$. Dizemos que f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes se existem h e H como acima tais que

$$H(1, f_1) = (1, f_2) \circ h$$

Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado se existe $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^l g(0) = j^l f(0)$ temos que g é $\mathcal{K}$ -equivalente a f .

Além disso, dois germes $\mathcal{A}$ -equivalentes também são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

1.4 Desdobramentos

Seja $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$. Um desdobramento a s -parâmetros de f_0 é um germe de uma aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \\ (x, u) &\longmapsto (f(u, x), u) \end{aligned}$$

satisfazendo $f(0, x) = f_0(x)$. O germe $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é chamado deformação de f_0 .

Definição 1.4.1 *Dois desdobramentos $F, G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0$ de f_0 são isomorfos se existem germes de difeomorfismos $\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0$ e $\psi : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0$, desdobramentos a s -parâmetros dos germes das identidades em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente, tais que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.*

Seja F um desdobramento a s -parâmetros de $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ e $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ um germe. Definimos h^*F como o desdobramento a t -parâmetros de f_0 dado por

$$\begin{aligned} h^*F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^t, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^t, 0 \\ (x, v) &\longmapsto (f(h(v), x), v) \end{aligned}$$

Se G é um desdobramento a t -parâmetros de f_0 , dizemos que G é induzido de F se existe um germe $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F . Em particular, se $h : \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ é um germe de difeomorfismo, dizemos que F e G são equivalentes.

Dizemos que F é um desdobramento versal de f_0 se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos de F . Quando F é versal com um número mínimo de parâmetros dizemos que F é miniversal.

O desdobramento F é trivial se é isomorfo ao desdobramento constante $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0$, $G(x, u) = (f_0(x), u)$.

Definição 1.4.2 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,n}$ um germe $\mathcal{A}$ -finitamente determinado. Então existe um desdobramento a um parâmetro de f*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto (f_t(\mathbf{x}, t), t) \end{aligned}$$

tal que f_t é estável para t suficientemente pequeno. A aplicação f_t é chamada de perturbação estável de f . Assim, $\{f_t, t \in \mathbb{C}\}$ é uma família de germes em $\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n}$ com $f_0 = f$ e f_t estável para todo $t \neq 0$.

Definição 1.4.3 Dizemos que um germe $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ é $\mathcal{A}$ -simples se existe um número finito de classes de equivalência tal que se f é mergulhado em qualquer família $F : \mathbb{C}^n \times P, (0, p_0) \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, então para todo (x, p) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0, p_0)$, o germe de $f_p = F(x, p)$ em x está em uma dessas classes de equivalência.

Capítulo 2

Invariantes

2.1 Preliminares

Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ um germe de aplicação de coposto 1 dado pela pré-forma normal

$$(\mathbf{x}, y) \mapsto (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, y)),$$

$(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ e seja

$$\tilde{f} = \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^n, q,$$

onde $S = \{p_1, \dots, p_s\}$, $\tilde{f}(S) = \{q\}$ e $\tilde{f}_i(\mathbf{x}, y) = (\mathbf{x}, \tilde{g}_i(\mathbf{x}, y))$, $i = 1, \dots, s$, um s -germe aparecendo numa deformação de f .

As $\mathcal{K}$ -classes de germes equidimensionais de coposto 1 são as do tipo A_k , com representantes $(\mathbf{x}, y^{k+1})$, e as $\mathcal{K}$ -classes de s -germes são do tipo $A_{(k_1, \dots, k_s)}$, onde os s pontos p_i , $i = 1, \dots, s$, da fonte são singularidades do tipo A_{k_i} , $i = 1, \dots, s$, de $\tilde{f}_i$ e têm a mesma imagem.

Os multigerms equidimensionais estáveis de coposto 1 são aqueles que são transversais às suas $\mathcal{K}$ -classes $A_{(k_1, \dots, k_s)}$ e as singularidades estáveis isoladas são, entre essas, aquelas em que $\sum_{i=1}^s k_i = n$, ver [12, pag. 206].

Para relações envolvendo multigerms também consideramos $(s + l)$ -germes compostos por s -germes do tipo $A_{(k_1, \dots, k_s)}$ e l pontos regulares $p_{s+1}, \dots, p_{s+l}$ (e todos os p_i são levados no mesmo ponto da meta), denotamos esses $(s + l)$ -germes por $A_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)}$.

Para germes $\mathcal{A}$ -finitamente determinados os fechos dos conjuntos de germes do tipo $A_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)}$ são interseções completas em $(\mathbb{C}^n)^{s+l}$ de codimensão $n - \sum_{i=1}^s k_i$. Para $l = 0$ as equações que definem $\bar{A}_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)}$ foram descritas em [26] e em [14]. No que segue vamos descrevê-las e estendê-las ao caso $l > 0$.

Para $(s + l)$ -germes de coposto 1 podemos identificar $(\mathbb{C}^n)^{s+l}$ com $\mathbb{C}^{n+s+l-1}$, com coordenadas $(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{s+l})$. E para este último usaremos coordenadas $(\mathbf{x}, y_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{s+l})$, onde

$e_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 2, \dots, s+l$. Um ponto $(\mathbf{x}, y, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{s+l}) \in \mathbb{C}^{n+s+l-1}$ corresponde a:

$$((\mathbf{x}, y_1), (\mathbf{x}, y_1 + \epsilon_2), \dots, (\mathbf{x}, y_1 + \sum_{i=2}^{s+l} \epsilon_i)) \in (\mathbb{C}^n)^{s+l}.$$

Seja $k(s, m) = (k_1, \dots, k_s)$ uma partição de m de comprimento s . Denotamos por $(k_1, \dots, k_s, 0_l) = k(s, m), 0_l$, a partição $k(s, m)$ aumentada por uma sequência de zeros de comprimento l . Quando s , m e l são claramente identificados no contexto, vamos denotar $k(s, m), 0_l$ por σ .

Os conjuntos $\bar{A}_{k(s, m), 0_l} \subset \mathbb{C}^{n+s+l-1}$ são dados pelos zeros das aplicações

$$G_{k(s, m), 0_l} = (G_1, \dots, G_{m+s+l-1}) : \mathbb{C}^{n+s+l-1} \rightarrow \mathbb{C}^{m+s+l-1},$$

cujas funções componentes G_i são definidas como segue. Definimos $g_1^{(i)} = \partial^i g / \partial y_1^i$, $i \geq 1$ e para $j = 1, \dots, s+l-1$

$$g_{j+1}^{(0)} := \sum_{\alpha \geq k_j+1} g_j^{(\alpha)} \epsilon_{j+1}^{\alpha-k_j-1} / \alpha!, \quad g_{j+1}^{(i)} := \partial^i g_{j+1}^{(0)} / \partial \epsilon_{j+1}^i, \quad i \geq 1.$$

Então as funções componentes de $G_{k(s, m), 0_l}$ são, nesta ordem, $g_1^{(i)}$ ($i = 1, \dots, k_1$) e $g_j^{(i)}$ ($i = 0, \dots, k_j$, $j = 2, \dots, s+l$). Observamos que $k_j \geq 1$ para $j = 2, \dots, s$ e $k_j = 0$ para $j > s$.

Exemplo 2.1.1 Para um germe $\mathcal{K}$ -finitamente determinado de multiplicidade local $m_f(0) = d$ com pré-forma normal $f = (\mathbf{x}, y_1^d + P_1(\mathbf{x})y_1 + \dots + P_{d-2}(\mathbf{x})y_1^{d-2})$, obtemos para $j = 1, \dots, s+l-1$

$$g_{j+1}^{(0)} = \epsilon_{j+1}^{d-k_1-\dots-k_j-j} + Q(\mathbf{x}, y_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j) \epsilon_{j+1}^{d-k_1-\dots-k_j-j-1} + \dots,$$

ou seja, polinômios mônicos em ϵ_{j+1} de grau $d - k_1 - \dots - k_j - j$ cujos coeficientes são funções suaves em $(\mathbf{x}, y_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j)$.

O seguinte resultado está em [26]:

Lema 2.1.2 *Dado um par de germes de coposto 1 equidimensionais f e f' os correspondentes pares de germes $G_{k(s, m)}$ e $G'_{k(s, m)}$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Ou seja, $\mathcal{K}$ -invariantes de $G_{k(s, m)}$ são $\mathcal{A}$ -invariantes de f e o mesmo é válido para as aplicações $G_{k(s, m), 0_l}$ (pelo mesmo argumento). Sejam $\mu_\sigma(f)$ e $\tau_\sigma(f)$ os números de Milnor e de Tjurina de G_σ , respectivamente.

Definição 2.1.3 (i) *Sejam $\mathcal{M}_{m+s+l-1}$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_{m+s+l-1}$ e $\bar{A}_\sigma$ o conjunto dos zeros do ideal $G_\sigma^* \mathcal{M}_{m+s+l-1}$. Definimos $\mathcal{I}(A_\sigma) = G_\sigma^* \mathcal{M}_{m+s+l-1}$.*

(ii) *Seja $J(G_\sigma)$ o ideal gerado pelos determinantes das maiores submatrizes de $dG_\sigma(\mathbf{x}, y, \epsilon)$ então*

$$v_\sigma(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+s+l-1}}{\mathcal{I}(A_\sigma) + J(G_\sigma)},$$

Teorema 2.1.4 ([31], Teorema 4.5.1) (i) Para um germe quase-homogêneo f e $m < n$, temos que

$$\mu_\sigma(f) = v_\sigma(f),$$

(ii) Para $m = n$ temos que

$$v_\sigma(f) = \mu_\sigma(f) = m_{G_\sigma}(0) - 1$$

Definição 2.1.5 O número de A_σ -pontos isolados aparecendo em uma perturbação estável de f é dado por

$$r_\sigma(f) = c^{-1} \cdot m_{G_\sigma}(0) = c^{-1}(v_\sigma + 1) = c^{-1}(\mu_\sigma + 1),$$

onde c denota o número de permutações dos $s + l$ pontos na fonte que preservam σ . Então, para

$$\sigma = (\underbrace{k_1, \dots, k_1}_{b_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{k_r, \dots, k_r}_{b_r \text{ vezes}}, 0_l), \quad b_1 k_1 + \dots + b_r k_r = n, \quad \sum_{i=1}^r b_i = s$$

temos $c = l! \prod_{i=1}^r (b_i!)$.

Este fator c é igual ao grau da aplicação $f^{s+l} : \bar{A}_\sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$, que é dado pela restrição da aplicação $\mathbb{C}^{n+s+l-1} \rightarrow (\mathbb{C}^n)^{l+s}$, definida por

$$(\mathbf{x}, y, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{s+l}) \mapsto (f(\mathbf{x}, y), f(\mathbf{x}, y + \epsilon_2), \dots, f(\mathbf{x}, y + \sum_{i=2}^{s+l} \epsilon_i)),$$

à interseção da diagonal principal na meta com o extrato A_σ do discriminante de f .

Teorema 2.1.6 ([26], Teorema 2.6) Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, um germe de aplicação de posto 1.

(i) São equivalentes:

(a) f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado.

(b) $v_{k(s,m)}(f) < \infty$ para todas as partições $k(s, m)$, $2 \leq m \leq n$ e $m + s \leq m_f(0)$.

(c) $v_{k(s,m)}(f) < \infty$ para todas as partições de $m = 2, \dots, n$ com parcelas $k_i \in \{1, 2\}$ e $m + s \leq m_f(0)$.

(ii) Os números $v_{k(s,m)}(f)$ são $\mathcal{A}$ -invariantes.

Concluimos este capítulo com algumas observações sobre os invariantes definidos acima: em 2.1.1 descrevemos algumas relações entre os invariantes e a $\mathcal{A}$ -finitude de f . Observamos que os números de Milnor dos conjuntos A_σ são $\mathcal{A}$ -invariantes topológicos de f , e no Lema 2.1.8 descrevemos algumas propriedades algébricas desses números de Milnor (um tipo de aditividade de codimensões). E 2.1.12 contém uma observação sobre a semi-quasi-homogeneidade de f e as aplicações associadas G_σ .

Observações 2.1.1 São equivalentes:

1. A_σ é uma ICIS.
2. A aplicação G_σ é $\mathcal{K}$ -finitamente determinada.
3. $v_\sigma(f) < \infty$ (de fato, $v_\sigma(f)$ é a codimensão do ideal cujos zeros estão no conjunto dos $\mathcal{K}$ -pontos instáveis de G_σ na fonte, e a codimensão é finita se, e somente se, 0 é um $\mathcal{K}$ -ponto instável).
4. $\mu_\sigma(f) < \infty$.

Segue do Teorema acima que: f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, as aplicações associadas G_σ são $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas para toda partição $\sigma = (k_1, \dots, k_s)$ de $m = 2, \dots, n$ com parcelas $k_i \in \{1, 2\}$.

Agora vamos discutir uma propriedade algébrica dos invariantes $\mu_\sigma(f)$ e $v_\sigma(f)$. Seja $R = \mathcal{O}_{n+s+l-1}$ e $\text{col}(\mathcal{I}) = \dim_{\mathbb{C}} R/\mathcal{I}$ denota a codimensão de um ideal $\mathcal{I}$ no anel local R . Sejam h_0 a última função componente da aplicação G_σ , z a última coordenada em $\mathbb{C}^{n+s+l-1}$ (que é dada por y ou ϵ_{s+l}) e $h = \partial h_0 / \partial z$. Além disso, seja $A := \mathcal{I}(A_\sigma)$, e B e C denotam os ideais gerados pelos determinantes das maiores submatrizes de dG_σ sem a última coluna (para B) e sem a última linha e a última coluna (para C). Quando o número de linhas excede o número de colunas de dG_σ , consideraremos B e C como ideais nulos. Então

$$v_\sigma(f) = \text{col}(A + J(G_\sigma)) = \text{col}(A + B + hC).$$

O próximo Teorema é de grande importância para demonstrar o principal resultado deste trabalho:

Teorema 2.1.7 (Lê [19], Greuel [15])

Seja X uma ICIS com singularidade na origem, X' uma ICIS definida em X por $f_k = 0$, e sejam $f_1, \dots, f_{k-1}$ os geradores do ideal que define X . Então:

$$\mu(X, 0) + \mu(X', 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_{k-1}, J(f_1, \dots, f_k) \rangle}$$

O teorema acima é, na verdade, somente um lema usado para calcular números de Milnor de ICIS. E uma boa referência para tal também é encontrada em Looijenga [20].

Para os números de Milnor $\mu_\sigma(f) = \mu(G_\sigma)$ e $\mu_\sigma(f') = \mu((x_1, G_\sigma))$ temos, pela fórmula de Lê e Greuel que

$$\mu_\sigma(f) + \mu_\sigma(f') = \text{col}(A + J(G'_\sigma)) = \text{col}(A + B' + hC'),$$

onde h e A são como acima e B' e C' denotam os ideais gerados pelos determinantes das maiores submatrizes de dG_σ sem a primeira e a última coluna (para B') e sem a primeira coluna, a última linha e a última coluna (para C').

Lema 2.1.8 *Sejam R um domínio, $a \in R$ e I, J e J' ideais em R , com $J \subset J'$. Então existe um inteiro não negativo δ tal que*

$$\text{col}(I + J + aJ') = \text{col}(I + J + (a)) + \text{col}(I + J') - \delta.$$

Demonstração:

Consideramos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow R/(I + J) : a + J' \longrightarrow R/I + J + aJ' \longrightarrow R/I + J + (a) \longrightarrow 0.$$

A terceira aplicação é o epimorfismo cujo núcleo é gerado pelas classes de a módulo $I + J + aJ'$. Este núcleo é isomorfo a $(a)/(a) \cap (I + J + aJ')$, que é igual a

$$(a)/(I + J) \cap (a) + aJ' \cong (a)/a((I + J) : a + J')$$

(usando a lei modular e a fórmula $a(\mathcal{I} : a) = \mathcal{I} \cap (a)$). A aplicação

$$R/(I + J) : a + J' \rightarrow (a)/a((I + J) : a + J'),$$

dada por multiplicação por a , é um isomorfismo. Então:

$$\text{col}(I + J + aJ') = \text{col}(I + J + (a)) + \text{col}((I + J) : a + J')$$

Como $I + J' \subset (I + J) : a + J'$ segue que existe $\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{col}(I + J + aJ') = \text{col}(I + J + (a)) + \text{col}(I + J') - \delta.$$

□

Corolário 2.1.9 *Tomando $I = A$, $J = B'$, $J' = C'$ e $a = h$, temos*

$$\mu_\sigma(f) + \mu_\sigma(f') = \text{col}(A + B' + hC') = \text{col}(A + B' + (h)) + \text{col}(A + C'),$$

isto é, $\delta = 0$

Demonstração:

Lembramos o seguinte fato sobre ideais determinantaes em um anel Cohen-Macaulay R (veja, por exemplo, [5]). Seja $\mathcal{I}_r$ o ideal gerado pelos maiores menores de uma matriz r por t ($r \leq t$) com entradas em R . O ideal $\mathcal{I}_r$ tem codimensão no máximo $t - r + 1$, e $R/\mathcal{I}_r$ é Cohen-Macaulay se $\mathcal{I}_r$ tem codimensão exatamente $t - r + 1$. No caso μ_σ as dimensões de $R/A+B$, $R/A+B+hC$ e $R/A+B+(h)$ são pelo menos 1, 0 e 0, e da finitude de $\mu_\sigma(f) + \mu_\sigma(f')$ vemos que essas dimensões são de fato iguais a esses números.

Neste caso, $R/A + B'$ é Cohen-Macaulay de dimensão 1 e $A + B' + (h)$ tem comprimento finito, logo h não é um divisor de zero em $A + B'$, ou seja, não é um divisor de zero em $(A + B') : h = A + B'$. Mas $A + B' + C' = A + C'$, portanto $\delta = 0$. □

Observação 2.1.10 No caso v_σ temos (para $v_\sigma(f) < \infty$) que $A + B$ tem comprimento finito, e o comprimento de $A + B + (h)$ é em geral não nulo. Portanto $(A + B) : h \neq A + B$, em geral. Em muitos casos temos $(A + B) : h + C = A + C$, tal que $\delta_\sigma = 0$, mas aqui segue um exemplo simples onde isto não ocorre. Considere $v_{(2)}(f)$ para $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ dado por $f = (x, y^4 + x^2y)$. Então $A = (4y^3 + x^2, y^2)$, $B = 0$, $C = (x)$ e $h = (y)$. Portanto $\text{col}(A + B + hC) = 3$, mas $\text{col}(A + B + (h)) = 2 = \text{col}(A + C)$, e $\delta_{(2)} = \text{col}(A + C) - \text{col}((A + B) : h + C) = 1$.

Definição 2.1.11 Um germe f é semi-quase-homogêneo (em relação à $\mathcal{A}$ -equivalência) se $f = f_0 + f_+$, onde a parte inicial f_0 é quase homogênea e $\mathcal{A}$ -finitamente determinada e f_+ tem grau pesado mais alto do que f_0 .

Observação 2.1.12 As aplicações associadas $G_{k(s,m),0_l}$ então serão semi-quase homogêneas em relação à $\mathcal{K}$ -equivalência (com os pesos de x_i e y iguais para f_0 e $\text{grau}(\epsilon_i) = \text{grau}(y)$, $j = 2, \dots, s + l$) – observamos que as partes iniciais das aplicações $G_{k(s,m),0_l}$, correspondentes a f_0 , são $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas, porque f_0 é $\mathcal{A}$ -finitamente determinada. Para f com parte inicial não $\mathcal{A}$ -finitamente determinada, as partes iniciais de $G_{k(s,m),0_l}$ ainda podem ser $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas.

Capítulo 3

Relações entre invariantes de germes de coposto 1 de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$

Lembramos que as relações aqui apresentadas generalizam os resultados de Gaffney e Mond para o números de cúspides e o número de pontos duplos presentes numa deformação estável de germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$, ver [11].

3.1 Relações entre invariantes

Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 3.1.1 (Proposição 5.12, [20]) *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, um germe de aplicação de coposto 1, que define uma ICIS X com singularidade na origem. Então*

$$\mu(X, 0) = m_f(0) - 1,$$

onde $m_f(0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(f_1, \dots, f_n)}$.

Como o germe f tem coposto 1, $f(\mathbf{x}, y) \mapsto (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, y))$, sua multiplicidade se reduz ao menor expoente de um monômio puro em y , encontrado em $g(\mathbf{x}, y)$.

As fórmulas a seguir relacionam números de Milnor de certas aplicações e a multiplicidade local de um germe de coposto 1. Este teorema é o principal resultado do nosso trabalho e usam fortemente as fórmulas obtidas por Lê e Greuel.

Teorema 3.1.2 ([3]) *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 1$, um germe de aplicação de coposto 1 e multiplicidade local $m_f(0) = r$, seja $k(s, n)$ uma partição de n como anteriormente. Suponhamos que $\mu_{(k(s, n))} < \infty$, ou seja, todos os invariantes que aparecem nas fórmulas são finitos. Então*

(i) *Se $s = 1$ e $r \geq n + 1$ temos:*

$$\mu_{(n)}(f) - \mu_{(n-1)}(f) + \dots + (-1)^{n+1} \mu_{(1)}(f) = m_f(0) - n - 1. \quad [F_n(r)]$$

(ii) Se $s = 1$ e $r \leq n$ temos:

$$\mu_{(r-1)}(f) - \mu_{(r-2)}(f) + \dots + (-1)^r \mu_{(1)}(f) = 0. \quad [F_n(r)]$$

(iii) Se $s > 1$, $k_1 + \dots + k_s = n$, $k_i \geq 1$ (para $i < s$) e $k_s \geq 0$, e $r \geq n + s$ temos:

$$\begin{aligned} & \mu_{(k_1, \dots, k_s)}(f) - \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) + \dots + (-1)^{k_s} \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f) \\ & + (-1)^{k_s+1} (m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) = m_f(0) - n - s \quad [F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)] \end{aligned}$$

(iv) Suponhamos $r < n + s$. Seja

$$t = \begin{cases} r - (k_1 + \dots + k_{s-1} + s) & \text{se } r > k_1 + \dots + k_{s-1} + s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} & \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t)}(f) - \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t-1)}(f) + \dots + (-1)^t \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f) \\ & + (-1)^{t+1} (t + 1) \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) = 0 \quad [F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)] \end{aligned}$$

Demonstração:

- (i) A demonstração é por indução sobre n . Para $n = 1$ a afirmação segue da Proposição 3.1.1, portanto consideremos $n \geq 2$ e suponhamos que $F_{(n-1)}(r)$ vale. A condição de que todos os invariantes presentes em $F_{(n)}(r)$ são finitos nos garante que $r < \infty$ e que cada conjunto $\bar{A}_{(i)}$ não vazio é uma interseção completa com um ponto singular isolado na origem (no mínimo). Escolhendo coordenadas $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ na fonte tal que $f = (x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}, y))$, onde $g(\mathbf{x}, y) = y^r + P_1(x)y + \dots + P_{r-2}(x)y^{r-2}$, $P_i \in \mathcal{M}_{n-1}$, e $x_1 = 0$ é um hiperplano genérico para a sequência encaixante de subconjuntos

$$\bar{A}_{(n-1)} \subset \bar{A}_{(n-2)} \subset \dots \subset \bar{A}_{(1)} = \Sigma_f \subset \mathbb{C}^n, 0.$$

(Note que a propriedade “ $\bar{A}_{(i)}$ é uma ICIS implica $\bar{A}_{(i)} \cap \{x_1 = 0\}$ é uma ICIS”, $i = 1, \dots, n-1$, é suficientemente “genérica”). Segue da hipótese de indução que a fórmula $F_{(n-1)}(r)$ vale para $f' := f|_{\{x_1=0\}}$, pois os invariantes de f' em $F_{(n-1)}(r)$ são finitos. Sejam $G_{(i)}$ e $G'_{(i)}$ as aplicações como em 2.1 relativas a f e f' , respectivamente, consideremos $\mu_{(i)} := \mu_{(i)}(f) = \mu(G_{(i)})$ e $\mu'_{(i)} := \mu_{(i)}(f') = \mu(G'_{(i)}) = \mu(x_1, G_{(i)})$.

Sejam $\mathcal{I}(M_{(i)})$ e $\mathcal{I}(\tilde{M}_{(i)})$ os ideais gerados pelos determinantes das maiores submatrizes do Jacobiano de $G_{(i)}$, omitindo a primeira e a última coluna de $dG_{(i)}$ no caso $\mathcal{I}(M_{(i)})$ e somente a primeira coluna no caso $\mathcal{I}(\tilde{M}_{(i)})$ (observamos que a primeira e a última coluna correspondem a $\partial/\partial x_1$ e $\partial/\partial y$, respectivamente).

Seja $\mathcal{I}(A_{(i)})$ o ideal em $\mathcal{O}_n$ definido pelas funções componentes da aplicação $G_{(i)}$. Se $\text{col}(\mathcal{I})$ denota o comprimento do ideal $\mathcal{I}$ em $\mathcal{O}_n$, ou seja, $\text{col}(\mathcal{I}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/\mathcal{I}$. Segue de 2.1.7 que

$$\mu_{(i)} + \mu'_{(i)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(i)}) + \mathcal{I}(\tilde{M}_{(i)}))$$

para $i = 1, \dots, n-1$. A soma dos números de Milnor $\mu_{(i)} + \mu'_{(i)}$ no lado esquerdo dessa fórmula é finito, portanto o comprimento no lado direito da fórmula também é finito. Para $i = 2, \dots, n-2$ isto implica que

$$\mu_{(i)} + \mu'_{(i)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(i+1)}) + \mathcal{I}(M_{(i)})) + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(i)}) + \mathcal{I}(M_{(i-1)})). \quad [(1)]$$

Observamos que, módulo $\mathcal{I}(A_{(i)})$, podemos escrever $\mathcal{I}(\tilde{M}_{(i)}) = g_{i+1}\mathcal{I}(M_{(i-1)}) + \mathcal{I}(M_{(i)})$. Podemos então aplicar o Lema 2.1.8 para $R = \mathcal{O}_n$, $A = \mathcal{I}(A_{(i)})$, $B = \mathcal{I}(M_{(i)})$, $C = \mathcal{I}(M_{(i-1)})$ e $h = g_{i+1}$.

Para $i = n-1$ temos $\mathcal{I}(\tilde{M}_{(n-1)}) = g_n\mathcal{I}(M_{(n-2)})$ módulo $\mathcal{I}(A_{(n-1)})$, portanto

$$\mu_{(n-1)} + \mu'_{(n-1)} = \mu_{(n)} + 1 + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(n-1)}) + \mathcal{I}(M_{(n-2)})). \quad [(2)]$$

(Aqui $\text{col}(\mathcal{I}(A_{(n)})) = \mu_{(n)} + 1$ e, na notação do Lema 2.1.8, J é o ideal nulo.)

Para $i = 1$ temos

$$\mu_{(1)} + \mu'_{(1)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(2)}) + \mathcal{I}(M_{(1)})). \quad [(3)]$$

Considerando as somas alternadas de (1), (2) e (3) para $i = n-1, n-2, \dots, 1$ e aplicando $F_{(n-1)}(r)$ para f' obtemos a fórmula $F_{(n)}(r)$.

Com o intuito de facilitar o entendimento faremos o caso $n=3$. Devemos mostrar então que:

$$\mu_{(3)}(f) - \mu_{(2)}(f) + \mu_{(1)}(f) = m_f(0) - 3 - 1. \quad [F_3(r)]$$

Escolhendo coordenadas (x_1, x_2, y) na fonte tal que $f = (x_1, x_2, g(x_1, x_2, y))$, então $f' = f|_{\{x_1=0\}}(x_2, y) = (x_2, g(0, x_2, y))$. Observe que as multiplicidades locais de f e f' são iguais. Por hipótese de indução o Teorema vale para f' e temos:

$$\mu_{(2)}(f') - \mu_{(1)}(f') = m_{f'}(0) - 2 - 1 = m_f(0) - 3. \quad [F_2(r)]$$

onde $\mu_{(2)}(f') = \mu(x_1, G_{(2)}) = \mu(x_1, g_y, g_{yy})$ e $\mu_{(1)}(f') = \mu(x_1, G_{(1)}) = \mu(x_1, g_y)$. Segue do Teorema 2.1.7 que

$$\mu_{(2)}(f) + \mu_{(2)}(f') = \mu(G_{(2)}) + \mu(x_1, G_{(2)}) = \text{col}(G_{(2)}, J(x_1, G_{(2)}))$$

onde

$$J(x_1, G_{(2)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{yx_1} & g_{yx_2} & g_{yy} \\ g_{yyx_1} & g_{yyx_2} & g_{yyy} \end{vmatrix} = g_{yx_2}g_{yyy} - g_{yy}g_{yyx_2}.$$

Então

$$\mu_{(2)}(f) + \mu_{(2)}(f') = \text{col}(g_y, g_{yy}, g_{yx_2}g_{yyy} - g_{yy}g_{yyx_2}) = \text{col}(g_y, g_{yy}, g_{yx_2}g_{yyy}) =$$

$$= \text{col}(G_{(3)}) + \text{col}(G_{(2)}, g_{yx_2}) = \mu_{(3)}(f) + 1 + \text{col}(G_{(2)}, g_{yx_2}) \quad [(1)]$$

Segue do Teorema 2.1.7 que:

$$\mu_{(1)}(f) + \mu_{(1)}(f') = \mu(G_{(1)}) + \mu(x_1, G_{(1)}) = \text{col}(G_{(1)}, J(x_1, G_{(1)})) \quad [(2)]$$

onde $J(x_1, G_{(1)}) = (g_{yx_2}, g_{yy})$.

De (1) e (2) temos:

$$\mu_{(3)}(f) + 1 = \mu_{(2)}(f) - \mu_{(1)}(f) + \mu_{(2)}(f') - \mu_{(1)}(f')$$

e usando a hipótese de indução

$$\mu_{(3)}(f) - \mu_{(2)}(f) + \mu_{(1)}(f) = m_f(0) - 3 - 1.$$

- (iii) A prova é novamente por indução sobre n . Vamos supor que a fórmula vale para $n - k_s$ e vamos mostrar que vale para n . Os dois últimos números de Milnor na soma alternada do lado esquerdo de $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$ são números de Milnor de interseções completas que estão contidos em espaços de diferentes dimensões. Estes números de Milnor são relacionados como segue. Consideramos para $k_1 + \dots + k_{s-1}$ as multiplicidades locais das aplicações equidimensionais:

$$m_{G_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}}(0) = (m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) m_{G_{(k_1, \dots, k_{s-1})}}(0).$$

Para os correspondentes números de Milnor segue da Proposição 3.1.1 que

$$\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} = (m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})} + m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1) - 1,$$

onde $\sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1) + 1 = k_1 + \dots + k_{s-1} + s$. Suponhamos $k_s \geq 1$. O passo de indução é então análogo ao caso $s = 1$, porque os números de Milnor no lado esquerdo de $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$ – exceto o primeiro e o último – são aqueles das interseções completas da sequência encaixante

$$\bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s-1)} \subset \bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s-2)} \subset \dots \subset \bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} \subset \mathbb{C}^{n+s-1}, 0.$$

O primeiro e o segundo número de Milnor em $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$ são relacionados por

$$\begin{aligned} \mu_{(k_1, \dots, k_s-1)} + \mu'_{(k_1, \dots, k_s-1)} = \\ \mu_{(k_1, \dots, k_s)} + 1 + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s-1)}) + \mathcal{I}(M_{(k_1, \dots, k_s-2)})), \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, k_s - 2$ temos

$$\begin{aligned} \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i)} + \mu'_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i+1)}) + \mathcal{I}(M_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i)})) \\ + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i)}) + \mathcal{I}(M_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i-1)})). \end{aligned}$$

Os dois últimos números de Milnor em $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$ são relacionados como segue

$$\begin{aligned} \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} + \mu'_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)}) + \mathcal{I}(M_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)})) \\ + (m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) (\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})} + \mu'_{(k_1, \dots, k_{s-1})}). \end{aligned}$$

Tomando a soma alternada das fórmulas acima e trocando a soma alternada resultante dos μ' por $m_f(0) - (n-1) - s$ (usando a fórmula $F_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(r)$ em dimensão $n-1$) temos a fórmula $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$.

(ii) e (iv) Aqui temos as sequências encaixantes de inclusões para $s = 1$

$$\emptyset = \bar{A}_{(r)} \subset \bar{A}_{(r-1)} \neq \emptyset \subset \dots \subset \bar{A}_{(1)} = \Sigma_f \subset \mathbb{C}^n, 0$$

e para $s > 1$

$$\emptyset = \bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t+1)} \subset \bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t)} \neq \emptyset \subset \dots \subset \bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} \subset \mathbb{C}^{n+s-1}, 0.$$

As fórmulas seguem por indução sobre $n \geq r - s$. Segue da Proposição 2.1.7 que

$$\mu_{(r-1)} + \mu'_{(r-1)} = 0 + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(r-1)}) + \mathcal{I}(M_{(r-2)}))$$

ou, para $s > 1$,

$$\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t)} + \mu'_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t)} = 0 + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t)}) + \mathcal{I}(M_{(k_1, \dots, k_{s-1}, t-1)})).$$

Fazendo a soma alternada das fórmulas acima o lado direito da expressão resultante é zero e o lado esquerdo é igual a soma do lado esquerdo da fórmula desejada e uma expressão idêntica onde μ' substitui μ , mas a expressão em μ' é zero pela hipótese de indução.

□

Observação 3.1.3 O que acontece com as fórmulas do Teorema anterior quando um dos invariantes é infinito? Se $m_f(0) = \infty$ então o eixo dos y corresponde a uma reta de pontos do tipo $A_{(n)}$ (respectivamente $A_{(k_1, \dots, k_s)}$), logo o invariante $\mu_{(n)}(f)$ (respectivamente $\mu_{(k_1, \dots, k_s)}(f)$) é infinito. Portanto as fórmulas valem. Observe que se $n = 1$ temos $\mu_{(1)}(f) = \infty$ se, e somente se, $m_f(0) = \infty$. Suponhamos que $m_f(0) < \infty$ e $n > 1$. Seja $X_i = \bar{A}_{(i)}$, para $s = 1$, ou $\bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, i)}$, para $s > 1$, e $X'_i = X_i \cap \{x_1 = 0\}$. Consideramos as sequências de inclusões

$$\dots \subset X_{i+1} \subset X_i \subset X_{i-1} \subset \dots$$

Se $\mu(X_i) = \infty$ segue que $\mu(X_{i-1}) = \mu(X_{i+1}) = \infty$. Logo $m_f(0) = \infty$. Portanto se $m_f(0)$ for finita todos os número de Milnor são finitos.

O teorema estabelece as seguintes fórmulas para os invariantes 0-estáveis de germes de aplicações equidimensionais de coposto 1 (por exemplo, para $n = 2$ e $s = 1$ obtemos a conhecida fórmula $c(f) = \mu(\Sigma_f) + m_f(0) - 2$ que relaciona o número de cúspides, o número de Milnor do conjunto crítico e a multiplicidade local de um germe f do plano no plano, ver [11]). Como $m_{G_{(k_1, \dots, k_s)}}(0) = \mu_{(k_1, \dots, k_s)}(f) + 1$ e $m_{G_{(k_1, \dots, k_s)}}(0) = c \cdot r_{(k_1, \dots, k_s)}(f)$ temos o seguinte:

Corolário 3.1.4 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 1$, um germe de aplicação de coposto 1 com multiplicidade local $m_f(0) = r$. Então*

(i) *Se $s = 1$ e $r \geq n + 1$ temos*

$$r_{(n)}(f) = \mu_{(n-1)}(f) - \mu_{(n-2)}(f) + \dots + (-1)^n \mu_{(1)}(f) + m_f(0) - n.$$

(ii) *Se $s = 1$ e $r < n + 1$ temos $r_{(n)}(f) = 0$.*

(iii) *Se $s > 1$ e $r \geq n + s$ temos*

$$r_{(k_1, \dots, k_s)}(f) = \frac{1}{c} \left(\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) - \mu_{(k_1, \dots, k_{s-2})}(f) + \dots + (-1)^{k_s+1} \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f) \right. \\ \left. + (-1)^{k_s} (m_f(0) - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) + m_f(0) - n - s + 1 \right).$$

onde c denota a ordem do subgrupo de S_s que fixa a partição $k_1 + \dots + k_s$ de n .

(iv) Se $s > 1$ e $r < n + s$ temos $r_{(k_1, \dots, k_s)}(f) = 0$.

Observação 3.1.5 Para germes de aplicações quase homogêneas f podemos substituir os números de Milnor μ nas fórmulas acima pelos correspondentes números de Tjurina τ ou pelos invariantes v , pois μ , τ e v coincidem no caso de ICIS de dimensão positiva.

O próximo corolário é importante para obtermos as aplicações da próxima seção.

Corolário 3.1.6 *Seja f_t uma deformação de um germe de aplicação de coposto 1 $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 2$, de multiplicidade local constante $m_{f_t}(0) = m_f(0)$. Se os números de Milnor $\mu_{\sigma,0}(f_t)$ são constantes para todas as partições σ de $n-1, n-3, \dots, r$ ($r = 1$ para n par e $r = 2$ para n ímpar) então os números de Milnor $\mu_{\sigma}(f_t)$ e $\mu_{\sigma,0}(f_t)$ são constantes para todas as partições σ de $m \leq n$ (em particular, os números de Milnor de todos os tipos estáveis são constantes).*

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração para $m_f(0) \geq 2n$ (o caso $m_f(0) < 2n$ é análogo). Considerando $n = 2l$ ou $n = 2l+1$, a prova é por indução sobre l . Usando as fórmulas do Teorema 3.1.2 temos que para $n = 2$ a constância de $\mu_{(1,0)}$ implica na constância dos outros invariantes e para $n = 3$ a constância de $\mu_{(2,0)}$ e de $\mu_{(1,1,0)}$ implica a constância dos outros invariantes. Consideremos $n \geq 4$ e suponhamos que a afirmação vale para dimensões menores. Seja $k_1 + \dots + k_s = n$ reescrevemos as fórmulas $F_{(k_1, \dots, k_s)}(r)$ de modo que em cada lado da igualdades só aparecem termos positivos e ignoramos a constante $m_f(0) - n - s$.

Das fórmulas $F_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)}$ temos que a constância de $\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}$ implica na constância de $\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)}(f)$ e $\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f)$.

Para $k_s \geq 2$ a fórmula $F_{(k_1, \dots, k_s)}$ está relacionada com a fórmula $F_{(k_1, \dots, k_{s-2})}$ em dimensão $n-2$ da seguinte maneira:

$$\mu_{(k_1, \dots, k_s)}(f) + \mu_{(k_1, \dots, k_{s-2})}(f) \cdots = \mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) + \cdots$$

Da hipótese de indução temos que a constância dos $\mu_{\sigma,0}$ para todas as partições σ de $n-3, n-5, \dots$ implica (para $n-2$) na constância de todos os termos da fórmula. Este fato mais a constância dos $\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1})}$ (que segue da constância de $\mu_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}$) isto implica que todos os números de Milnor em dimensão n são constantes.

□

Observação 3.1.7 O corolário anterior ainda é válido se considerarmos os invariantes de f e substituírmos “constante” por “finito”.

Similarmente à demonstração do Teorema 3.1.2 obtemos a seguinte fórmula para os invariantes $v_{(i)}(f) = v(G_{(i)})$

$$v_{(n)}(f) - v_{(n-1)}(f) + \dots + (-1)^{(n+1)}v_{(1)}(f) + \kappa = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / \mathcal{I}(A_{(n+1)}),$$

onde κ é um “termo de correção” definido como segue.

Considere, na notação do Lema 2.1.8, o caso v_σ , $R = \mathcal{O}_{n+s+l-1}$, $A = \mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)})$, $B = \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)})$, $l = 0, 1$, $C = \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1})})$, $l = 0$, ou $C = J(G_{(k_1, \dots, k_s)})$, $l = 1$, e h a derivada da última componente de $G_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)}$ com relação à última variável, e $\delta_{(k_1, \dots, k_s, 0_l)} = \text{col}(A + C) - \text{col}((A + B) : h + C)$. Então, para $s = 1$, o “termo de correção” citado acima é dado por

$$\kappa = \delta_{(k_1)} - \delta_{(k_1-1)} + \dots + (-1)^{k_1} \delta_{(2)},$$

e para $s > 1$,

$$\kappa = \delta_{(k_1, \dots, k_s)} - \delta_{(k_1, \dots, k_{s-1})} + \dots + (-1)^{k_s} \delta_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}.$$

Proposição 3.1.8 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 1$, um germe de aplicação de coposto 1 e assumamos que para cada $v_{k(s,m), 0_l}(f)$ aparecendo nas fórmulas acima o correspondente conjunto $\bar{A}_{k(s,m), 0_l}$ é não vazio e é uma ICIS. Suponhamos que $v_{(k(s,n))} < \infty$, ou seja, todos os invariantes que aparecem nas fórmulas são finitos. Então, para qualquer $s > 1$, $k_s > 0$*

$$\begin{aligned} & v_{(k_1, \dots, k_s)}(f) - v_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) + \dots + (-1)^{k_s} v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f) + \kappa + \\ & (-1)^{k_s+1} (m_f - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)) v_{(k_1, \dots, k_{s-1})}(f) = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s+1})}) + \mathcal{I}') \end{aligned}$$

e para $s = 1$, $k_1 > 0$ temos

$$v_{(k_1)}(f) - v_{(k_1-1)}(f) + \dots + (-1)^{k_1+1} v_{(1)}(f) + \kappa = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1+1)}) + \mathcal{I}'),$$

onde $\mathcal{I}' = 0$, para $\sum_{i=1}^s k_i = n$, e $\mathcal{I}' = \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_s)})$, para $\sum_{i=1}^s k_i < n$.

Demonstração:

Esta demonstração é similar à do Teorema 3.1.2. Seja $\mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_s)})$ o ideal gerado pelos determinantes das maiores submatrizes de $dG_{(k_1, \dots, k_s)}$ com a última coluna, a coluna $\partial/\partial \epsilon_s$ (para $s > 1$) ou a coluna $\partial/\partial y$ (para $s = 1$), omitida (para $\sum_{i=1}^s k_i < n$).

Sejam $v_{k(s,m)} := v_{k(s,m)}(f)$ e h a última função componente de $G_{(k_1, \dots, k_s+1)}$. Para $k_s > 0$ e $\sum_i k_i = 2, \dots, n-1$ temos

$$\begin{aligned} v_{(k_1, \dots, k_s)} &= \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s)}) + h\mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1})}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_s)})) \\ &= \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s+1})}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_s)})) \\ &\quad + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1})})) - \delta_{(k_1, \dots, k_s)}. \end{aligned}$$

Para $k_s > 0$ e $\sum_i k_i = n$ temos

$$v_{(k_1, \dots, k_s)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s)}) + h\mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1})})) =$$

$$\text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s+1})})) + \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_s)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1})})) - \delta_{(k_1, \dots, k_s)},$$

e para $s = 1$ e $k_1 = 1$ obtemos $v_{(1)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(2)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(1)}))$.

Finalmente, para $k_s = 0$, $s > 1$, os invariantes $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}$, $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)}$ e $v_{(k_1, \dots, k_{s-1})}$ são relacionados como segue:

$$\begin{aligned} v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} &= \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)})) \\ &+ \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}) + J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1})})) - \delta_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}, \end{aligned}$$

onde $J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1})})$ é o ideal dos maiores menores de $dG_{(k_1, \dots, k_{s-1})}$.

O segundo termo no lado direito é o comprimento de um ideal em $\mathcal{O}_{n+s-1}$, que é da forma

$$\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1})}) + J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1})}) + (h),$$

onde h é um polinômio mônico em ϵ_s de grau $m_f - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1)$ e as duas primeiras parcelas definem um ideal em $\mathcal{O}_{n+s-2}$ de comprimento finito, de fato de comprimento $v_{(k_1, \dots, k_{s-1})} < \infty$. Portanto,

$$\text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}) + J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1})})) = (m_f - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1))v_{(k_1, \dots, k_{s-1})},$$

e logo

$$\begin{aligned} v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)} - v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} &+ (m_f - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1))v_{(k_1, \dots, k_{s-1})} \\ &= \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 2)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 1)})) - \delta_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}. \end{aligned}$$

Agora, tomando somas alternadas:

$$v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s)} - v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_{s-1})} + \dots + (-1)^{k_s+1} (m_f - \sum_{i=1}^{s-1} (k_i + 1))v_{(k_1, \dots, k_{s-1})}$$

temos a fórmula para $s > 1$. Finalmente, para $s = 1$ temos $v_{(k_1)} - v_{(k_1-1)} + \dots + (-1)^{k_1+1} v_{(1)}$. $\square$

Observação 3.1.9 (i) Apesar dos termos de correção, as fórmulas acima relacionando os invariantes v implicam a finitude de certos invariantes. Por exemplo, para $n = 3$ a finitude de $v_{(1,1)}(f)$ e de $v_{(3)}(f)$ implica a finitude de $v_{(1,2)}(f)$. Seja $B_{(k_1, k_2)} = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(k_1, k_2)}) + \mathcal{I}(\bar{M}_{(k_1, k_2-1)}))$. Então $v_{(1,1)}(f) < \infty$ e

$$v_{(1,1)}(f) = B_{(1,2)} + B_{(1,1)} - \delta_{(1,1)}$$

implica $B_{(1,2)} < \infty$. Como $v_{(3)}(f) < \infty$, obtemos $\text{col}(\mathcal{I}(A_{(1,3)})) < \infty$. Agora

$$v_{(1,2)}(f) = \text{col}(\mathcal{I}(A_{(1,3)})) + B_{(1,2)} - \delta_{(1,2)},$$

implica $v_{(1,2)}(f) < \infty$, como queríamos. (Por outro lado, a fórmula $F_{(3)}$ para os números de Milnor vale para f $\mathcal{K}$ -finitamente determinado que $v_{(3)}(f)$ e $v_{(1)}(f)$ são finitos se $v_{(2)}(f)$ é finito. Isto é difícil de mostrar para v diretamente, mas é claro que $v_{(i)}(f)$ é finito se, e somente se, $\mu_{(i)}(f)$ é finito.)

(ii) Consideramos os conjuntos $\bar{A}_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)} \subset \mathbb{C}^{n+s-1}$ consistindo de $s-1$ pontos singulares p_i (do tipo $A_{\geq k_i}$) e um ponto regular p_s tendo a mesma imagem por f . Se

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}) + J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)})$$

(o comprimento de $\mathcal{I}$ é $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f)$) temos pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{n+s-1}/(\mathcal{I} : \epsilon_s) \longrightarrow \mathcal{O}_{n+s-1}/\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{n+s-1}/(\mathcal{I} + (\epsilon_s)) \longrightarrow 0$$

que $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f) = v_{(k_1, \dots, k_{s-1}+1)}(f) + \text{col}(\mathcal{I} : \epsilon_s)$.

Portanto o invariante $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, 0)}(f)$ tem uma diagonal e uma contribuição fora da diagonal. De modo geral, tomando

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(A_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s)}) + J(G_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s)})$$

(com $k_s \geq 0$) obtemos da mesma forma $v_{(k_1, \dots, k_{s-1}, k_s)}(f) = v_{(k_1, \dots, k_{s-1}+k_s+1)}(f) + \text{col}(\mathcal{I} : \epsilon_s)$.

Para germes de aplicações semi-quasehomogêneas temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.10 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ um germe de aplicação semi quase homogênea e seja c o fator gerado pelas permutações que fixam uma dada partição $k(s, n)$ de comprimento $s \geq 2$, então:*

$$\begin{aligned} r_{k(s, n)}(f) &= c^{-1} \prod_{i=n+1}^{n+s-1} (m_f(0) - i) r_{(n)}(f) \\ &= c^{-1} \prod_{i=n+1}^{n+s-1} (m_f(0) - i) \left(m_f(0) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \mu_{(n-j)}(f) - n \right). \end{aligned}$$

(Mais geralmente, se f tem uma decomposição $f = f_0 + f_+$ com f_0 e os correspondentes $G_{k(s, m)}$, para $k(s, m)$ aparecendo em ambos os lados das fórmulas, $\mathcal{K}$ -finitamente determinados então as fórmulas ainda são válidas.)

Demonstração: Uma deformação de uma germe semi-quase-homogêneo $f = f_0 + f_+$ para f_0 induz deformações simultaneas das aplicações $G_{k(s, m)}$ as suas partes iniciais $\mathcal{K}$ -finitamente determinados, que são topologicamente triviais por um resultado de Damon [6]. (Alternativamente, isto segue diretamente do fato das partes iniciais de $G_{k(s, m)}$ serem $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas.) E os números de Milnor de $G_{k(s, m)}$ e a multiplicidade local $m_f(0)$ envolvidas

na fórmula são invariantes topológicos. Isto é então suficiente para provar a fórmula no caso semi-quase-homogêneo.

Consideremos a pré-forma normal para um germe quase-homogêneo equidimensional de coposto 1

$$f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0, \quad (\mathbf{x}, y) \mapsto (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, y)) = (\mathbf{x}, y^k + P_1(\mathbf{x})y + \dots + P_{k-2}(\mathbf{x})y^{k-2}),$$

com pesos $w_1, \dots, w_{n-1}, 1$ para $x_1, \dots, x_{n-1}, y$ e graus pesados $\delta_1 = w_1, \dots, \delta_{n-1} = w_{n-1}, \delta_n = m_f(0)$. Usando os mesmos pesos w_i , para $i = 1, \dots, n$, como para f , e colocando nas variáveis adicionais ϵ_j peso 1 as aplicações

$$G_{k(s,n)} = (G_1, \dots, G_{n+s-1}) : \mathbb{C}^{n+s-1}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^{n+s-1}$$

tem graus pesados

$$m_f(0) - 1, m_f(0) - 2, \dots, m_f(0) - (n + s - 1).$$

A primeira igualdade na proposição segue quando expressamos as multiplicidades locais nas fórmulas $r_{k(s,n)}(f) = c^{-1}m_{G_{k(s,n)}}(0)$ e $r_{(n)}(f) = m_{G_{(n)}}(0)$ por pesos e graus pesados (usando a fórmula de Bezout generalizada) e comparando as expressões resultantes. $\square$

Observação 3.1.11 A hipótese de semi-quase-homogeneidade de f na Proposição 3.1.10 é necessária: os germes $f_k = (x, xy^2 + y^4 + x^k y)$ não são semi-quase-homogêneos para $k \geq 2$ e tem número de pontos de dobra $r_{(1,1)}(f_k) = d(f_k) = k$, mas $m_{f_k}(0) = 4$ e $r_{(2)}(f_k) = c(f_k) = 3$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Germes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n > p$.

Para germes de coposto 1 de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ com $n < p$ as dimensões dos conjuntos $\bar{A}_{(i-1)}$ e $\bar{A}_{(i)}$ diferem por mais do que 1 (na verdade, por $p - n + 1$). Portanto é improvável que existam fórmulas como somas alternadas de números de Milnor como as que encontramos no Teorema 3.1.2. Para germes de coposto $n - p + 1$ (isto é, mínimo) em dimensões (n, p) , onde $n \geq p$, as fórmulas no Teorema 3.1.2 provavelmente se generalizam.

As fórmulas para germes de coposto 1 equidimensionais também são válidas para germes $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$, $n > p$, de posto $p - 1$ se trocamos a multiplicidade local $m_f(0)$ por $\mu(f) + 1$, pois observamos que um tal germe f é dado pela pré-forma normal $(x, g(x, y) + \sum_{i=1}^{n-p} z_i^2)$, onde $(x, g(x, y))$ define um germe $\mathcal{A}$ -simples equidimensional $\mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ de coposto 1, ver [30], Lema 4.1. As fórmulas que valem para $(x, g(x, y))$ são as mesmas para $(x, g(x, y) + \sum_{i=1}^{n-p} z_i^2)$, pois os conjuntos $\bar{A}_{(i)}$ não se alteram.

A condição extra do germe ser $\mathcal{A}$ -simples provavelmente não é necessária, por exemplo para $p = 2$ e $s = 1$, temos a seguinte:

Proposição 4.1.1 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, $n \geq 2$, um germe de posto 1. Então*

$$\mu_{(2)}(f) - \mu_{(1)}(f) = \mu(f) - 2, \quad r_{(2)}(f) = \mu(f) + \mu_{(1)}(f) - 1.$$

Observamos que para $n = 2$ temos $\mu(f) = m_f(0) - 1$, então reestabelecemos as fórmulas do Teorema 3.1.2 e Corolário 3.1.4 no caso $n = p = 2$, $s = 1$.

Demonstração:

Consideramos um germe $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ de posto 1 dado pela pré-forma normal $f = (x, g(x, y_1, \dots, y_{n-1}))$ e sejam $g_i = \frac{\partial g}{\partial y_i}$ e $g_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}$. Então

$$\mu_{(1)}(f) + \mu'_{(1)}(f) = \text{col}((g_1, \dots, g_{n-1}, \det(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1})) = r_{(2)}(f) = \mu_{(2)}(f) + 1.$$

Além disso, $\mu'_{(1)}(f) = \text{col}((x, g_1, \dots, g_{n-1})) - 1$, onde

$$\text{col}((x, g_1, \dots, g_{n-1})) = \mu(g(0, y_1, \dots, y_{n-1})) = \mu(f)$$

(note que f é $\mathcal{K}$ -equivalente a uma suspensão de $g(0, y_1, \dots, y_{n-1})$). $\square$

Exemplo 4.1.2 Considere a série de germes $\mathcal{A}$ -unimodais na classificação de Rieger em [28] dada por

$$f_k = (x, xy + y^3 + z^3 + y^k z), \quad k \geq 3.$$

Os f_k estão na $\mathcal{K}$ -órbita de D_4 , portanto $\mu(f_k) = 4$, e $\mu_{(1)}(f_k) = k - 1$. Portanto concluímos da segunda fórmula que $r_{(2)}(f_k) = k + 2$, o que confere com o número de cúspides calculado em [28].

4.2 Determinação finita e equisingularidade

Agora consideramos aplicações das fórmulas na Seção 3.1 para a determinação finita. Lembremos que $\bar{A}_\sigma$, onde σ é uma partição de $m \leq n$, é uma ICIS se, e somente se, $\mu_\sigma(f) < \infty$ (ou equivalentemente, $v_\sigma(f) < \infty$).

De [26] sabemos que um germe $\mathcal{K}$ -finitamente determinado $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ de coposto 1 é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, $v_\sigma(f) < \infty$ para todas as partições σ de $m = 2, \dots, n$ com parcelas em $\{1, 2\}$. Como consequência imediata do Corolário 3.1.6 temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ um germe de coposto 1 $\mathcal{K}$ -finitamente determinado de multiplicidade local $m_f(0) \geq 2n$. Então f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, os conjuntos $\bar{A}_{\sigma,0}$ são interseções completas com (pelo menos) a origem como ponto singular isolado para todas as partições σ de $n-1, n-3, \dots, r$ ($r = 1$ para n par e $r = 2$ para n ímpar).*

Observamos que o critério para $\mathcal{A}$ -finitude de f em [26] envolve somente o conjunto de pontos múltiplos $\bar{A}_\sigma$ na fonte, e não envolve os conjuntos de pontos múltiplos $\bar{A}_{\sigma,0}$ correspondentes aos pontos regulares e singulares. Usando as fórmulas do Teorema 3.1.2 (ou alternativamente as fórmulas da Proposição 3.1.8, veja Observação 3.1.9, parte (i)) também podemos simplificar o critério em [26]. Por exemplo, para $n = 3$ podemos eliminar a condição de finitude em $v_{(1,2)}(f)$ em [26] e obter o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2 *Seja $f : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ um germe de coposto 1 $\mathcal{K}$ -finitamente determinado. Então f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, os conjuntos $\bar{A}_{(2)}$, $\bar{A}_{(1,1)}$ e $\bar{A}_{(1,1,1)}$ são interseções completas com (pelo menos) a origem como ponto singular isolado ou são vazios.*

Demonstração:

Usando as fórmulas $F_{(3)}(r)$ e $F_{(1,2)}(r)$ do Teorema 3.1.2 para um germe de aplicação f de multiplicidade local finita r vemos que a hipótese da proposição implica que $\mu_{(1,2)}(f) < \infty$, e portanto, $v_{(1,2)}(f) < \infty$, ou $\bar{A}_{(1,2)} = \emptyset$. $\square$

Outro critério para f ser $\mathcal{A}$ -finitamente determinado é dado a seguir.

Proposição 4.2.3 *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ um germe de coposto 1 de multiplicidade local $m_f(0)$. Então f é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, para $l = 2, \dots, \min(m_f(0), 2n)$, os conjuntos $\bar{A}_{0_l}$ são interseções completas com (pelo menos) a origem como ponto singular isolado.*

Demonstração:

As condições no conjunto $\bar{A}_{0_l}$ implicam que eles são não vazios e que $v_{0_l}(f) < \infty$. Usando a parte (ii) da Observação 3.1.9, temos que $v_\sigma(f) < \infty$ para todas as partições σ de $m \leq n$ correspondentes a conjuntos não vazios $\bar{A}_\sigma$, e isto é equivalente ao fato de f ser $\mathcal{A}$ -finitamente determinado.

Reciprocamente, para $m_f(0) > 2n$ podemos obter $v_\sigma(f) < \infty$ para todas as partições σ de $m \leq n$ para $v_{0_l}(f) < \infty$, $l = 2, \dots, 2n$. $\square$

As aplicações mais interessantes do Teorema 3.1.2 são as que envolvem trivialidade topológica e equisingularidade de famílias de germes de coposto 1 de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$.

Observe, por exemplo, que o Corolário 3.1.6 também implica a excelência da deformação f_t no sentido de [10]. Para $n = 2$ temos:

Proposição 4.2.4 *Seja f_t uma deformação de um germe $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ de coposto 1 com multiplicidade constante $m_{f_t}(0) = m_f(0)$, então temos o seguinte:*

- (i) *A constância de $\mu_{(1,0)}(f_t)$ implica na constância dos números de Milnor de todos os tipos estáveis (isto é, $\mu_\sigma(f_t)$ é constante para todas as partições σ de $m = 1, 2$).*
- (ii) *$\mu_{(1,0)}(f_t)$ é constante se, e somente se, f_t é Whitney equisingular (ao longo do eixo de parâmetros). E a Whitney equisingularidade de f_t implica a trivialidade topológica.*

Demonstração:

- (i) Segue do Corolário 3.1.6 e do fato de germes de multiplicidade menor ou igual a 2 serem dobras ou difeomorfismos.
- (ii) Segue de (i) e da equivalência entre a Whitney equisingularidade de f_t e a constância de $c(f_t) = r_{(2)}(f_t)$ e $d(f_t) = r_{(1,1)}(f_t)$, ver [11].

$\square$

Observação 4.2.5 Em [7] Damon e Mond definem o número de Milnor do discriminante, $\mu_\Delta(f)$, de um germe $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$, $n \geq p$, como o número de $(p-1)$ -esferas no discriminante de uma estabilização de f .

Para um germe $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ temos de [7] (usando a notação da tese) que

$$\mu_\Delta(f) = \mu_{(1)}(f) + r_{(1,1)}(f)$$

e para $n = 3$ segue de [17] que

$$\mu_\Delta(f) = \mu_{(1)}(f) + \frac{1}{2}(\mu_{(1,1)}(f) + \mu_{(3)}(f)) + r_{(1,1,1)}(f).$$

Portanto, suponhamos que f_t é uma deformação de f satisfazendo as condições do Corolário 3.1.6, então $\mu_\Delta(f_t)$ é constante. Por outro lado, para $n = 2$ e 3 , a constância de $\mu_\Delta(f_t)$ e $m_{f_t}(0)$ implicam $\mu_\sigma(f_t)$ constante para todos os tipos estáveis σ (isto segue das fórmulas para $\mu_\Delta(f)$ acima e das fórmulas do Teorema 3.1.2).

Capítulo 5

Classificação de germes de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 5$

5.1 Classificação de germes de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^5$

Um grande número de classificações de germes $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{K}^n, 0 \rightarrow \mathbb{K}^p, 0$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, podem ser encontrados na literatura.

Singularidades simples de curvas planas foram classificadas por J. W. Bruce e T. J. Gaffney [4], e singularidades simples de curvas espaciais foram classificadas por C. G. Gibson and C. A. Hobbs [13]. Em [1] Arnol'd estendeu os resultados acima classificando singularidades simples de curvas em qualquer dimensão.

Em [24] D. Mond classificou os germes $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$. Para germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ temos a classificação de J. H. Rieger em [25].

Os autores C.A. Hobbs e N.P. Kirk em [16], usaram teoria de transversal completa e obtiveram a $\mathcal{A}$ -classificação de multigerms simples de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. No caso complexo esta classificação foi obtida por R.G. Wik-Atique em [32].

Em [18] C. Klotz, O. Pop and J. H. Rieger apresentam a classificação dos germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$, e também as modificações que devem ser feitas para obter esta classificação no caso complexo. Com a classificação apresentada neste trabalho podemos obter a lista dos germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2, 0$ em $\mathbb{C}^4, 0$, como segue.

Teorema 5.1.1 ([18]) *Todo germe $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^4, 0$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes germes:*

$$\begin{aligned}
& (x, y, 0, 0) \\
& (x, xy, y^2, y^{2k+1}), k \geq 1 \\
& (x, y^2, y^3, x^k y), k \geq 2 \\
& (x, y^2, y^3 + x^k y, x^l y), l > k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y + y^{2k+1}, xy^3), k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y, y^5) \\
& (x, y^2, x^3 y + y^5, xy^3) \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3), k \geq 1 \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3), k \geq 1 \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3), k \geq 1 \\
& (x, xy, y^3, y^4) \\
& (x, xy, y^3, y^5) \\
& (x, xy + y^3, xy^2 + y^{2k+1}, y^4), k \geq 2 \\
& (x, x^2 y + y^4 + y^5, xy^2, y^3) \\
& (x, x^2 y + y^4, xy^2, y^3)
\end{aligned}$$

No que segue exibiremos alguns resultados sobre a classificação de germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 5$. Começamos com a classificação de germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^5$ de multiplicidade 2.

Teorema 5.1.2 *Todo germe $\mathcal{A}$ -simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$, de multiplicidade 2, é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes germes:*

$$\begin{aligned}
& (x, xy, y^2, y^{2k+1}, 0), k \geq 1 \\
& (x, y^2, y^3, x^k y, 0), k \geq 2 \\
& (x, y^2, y^3 + x^k y, x^l y, 0), l > k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y + y^{2k+1}, xy^3, 0), k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y, xy^3, y^{2k+1}), k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y, y^5, 0) \\
& (x, y^2, x^2 y + y^5, xy^5, y^7) \\
& (x, y^2, x^2 y, xy^5, y^7) \\
& (x, y^2, x^3 y + y^5, xy^3, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y, xy^3, y^5) \\
& (x, y^2, x^3 y, xy^3, y^7) \\
& (x, y^2, x^3 y + xy^3, y^5, x^4 y) \\
& (x, y^2, x^3 y, x^2 y^3, y^5) \\
& (x, y^2, xy^3, x^4 y, y^5)
\end{aligned}$$

Para demonstrar o Teorema acima vamos utilizar o método da Transversal Completa descrito a seguir.

Proposição 5.1.3 (Transversal Completa para Jatos) *Sejam $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ e $T \subset H^{k+1}(n,p)$ tais que*

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{O}_{n,p} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_n^{k+2} \mathcal{O}_{n,p}$$

então todo $(k+1)$ -jato $j^{k+1}g(0)$, com $j^k g(0) = j^k f(0)$, está na mesma $\mathcal{A}_1^{k+1}$ -órbita de $j^{k+1}f(0) + t$ para algum $t \in T$.

Segue alguns detalhes da prova da classificação.

Lema 5.1.4 *Dado um germe $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^5, 0$ de multiplicidade 2 então seu 2-jato é $\mathcal{A}^2$ -equivalente a $(x, xy, y^2, 0, 0)$ ou $(x, y^2, 0, 0, 0)$.*

Demonstração:

Seja $(x, 0, 0, 0, 0)$ o 1-jato de f em $J^1(2, 5)$. Primeiro vamos encontrar T usando o método da Transversal Completa:

$$\mathcal{M}_2^2 \mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_2^3 \mathcal{O}_{2,5}$$

onde

$$T\mathcal{A}_1 f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + f^* \mathcal{M}_5^2 \{e_1, \dots, e_5\}$$

onde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima coordenada e zero nas demais.

Logo, $T = \{xy.e_i, y^2.e_i, i = 2, \dots, 5\}$. Então o 2-jato de f é equivalente a:

$$(x, a_1xy + b_1y^2, a_2xy + b_2y^2, a_3xy + b_3y^2, a_4xy + b_4y^2)$$

Se $a_1 \neq 0$ então através de mudanças de coordenadas na meta removemos o termo xy das 3 últimas coordenadas e obtemos $(x, a_1xy + b_1y^2, \bar{b}_2y^2, \bar{b}_3y^2, \bar{b}_4y^2)$. Se $\bar{b}_i \neq 0$, para algum $i = 2, 3, 4$, removemos o termo y^2 da segunda coordenada e obtemos após mudanças apropriadas $(x, xy, y^2, 0, 0)$. Se $\bar{b}_i = 0$, para $i = 2, 3, 4$, temos $(x, a_1xy + b_1y^2, 0, 0, 0)$, então podemos completar o quadrado na segunda coordenada e através de mudança de coordenada na fonte obtemos $(x, y^2, 0, 0, 0)$.

Os 2-jatos $(x, xy, 0, 0, 0)$ e $(x, 0, 0, 0, 0)$ dão origem a germes de multiplicidade maior que 2.

□

Lema 5.1.5 *Todo germe cujo 2-jato é $(x, xy, y^2, 0, 0)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$f = (x, xy, y^2, y^{2k+1}, 0),$$

para algum $k \geq 1$. Além disso, f é simples, para todo $k \geq 1$.

Demonstração:

Vamos calcular $T \subset H^{2k+1}(2, 5)$, para $k \geq 1$, satisfazendo

$$\mathcal{M}_2^{2k+1} \mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_2^{2k+2} \mathcal{O}_{2,5}$$

onde

$$T\mathcal{A}_1 f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} o \\ x \\ 2y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + f^* \mathcal{M}_5^2 \{e_1, \dots, e_5\}$$

Logo, $T = \{y^{2k+1}.e_4, y^{2k+1}.e_5\}$ e após mudanças de coordenadas temos que os possíveis $(2k+1)$ -jatos são

1. $((x, xy, y^2, y^{2k+1}, 0))$
2. $(x, xy, y^2, 0, 0)$

O germe (1) é finitamente determinado, pois $T = \emptyset$ em $H^n(2, 5)$, para todo $n \geq 2k+2$.

Assim obtemos os germes $(x, xy, y^2, y^{2k+1}, 0)$, $k \geq 1$.

Temos que

$$\left\{ \begin{array}{lll} x^i y^j . e_l & i > 0, j \geq 0 & l = 1, \dots, 5 \\ y^{2i} . e_l & i > 0 & l = 1, \dots, 5 \\ y^{2i+1} . e_l & i > 0 & l = 1, 2, 3 \\ y^{2i+1} . e_l & i \geq k & l = 4, 5 \end{array} \right\} \subset T\mathcal{A}f$$

Logo o desdobramento versal de f é

$$f_{uv} = (x, xy, y^2, y^{2k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} u_i y^{2i+1}, \sum_{j=1}^{k-1} v_j y^{2j+1})$$

Temos que f_{uv} pertence às seguintes órbitas: $f_{2k+1}, f_{2k-1}, \dots, f_3$ e imersão. Como são finitas órbitas, o germe é simples.

□

Lema 5.1.6 *Dado o 2-jato $(x, y^2, 0, 0, 0)$. Obtemos as seguintes $\mathcal{A}^3$ -órbitas:*

1. $(x, y^2, y^3, x^2y, 0)$, $\mathcal{A}\text{-cod} = 7$
2. $(x, y^2, y^3 + x^2y, 0, 0)$, $\mathcal{A}\text{-cod} = 9$
3. $(x, y^2, y^3, 0, 0)$, $\mathcal{A}\text{-cod} = 10$
4. $(x, y^2, xy^2, 0, 0)$, $\mathcal{A}\text{-cod} = 10$
5. $(x, y^2, 0, 0, 0)$, $\mathcal{A}\text{-cod} = 13$

Demonstração:

Seja $T \subset H^3(2, 5)$ satisfazendo

$$\mathcal{M}_2^3 \mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_2^4 \mathcal{O}_{2,5}$$

onde

$$T\mathcal{A}_1 f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + f^* \mathcal{M}_5^2 \{e_1, \dots, e_5\}$$

Logo, $T = \{x^2y.e_i, y^3.e_i, \ i = 3, 4, 5\}$ e o 3-jato de f é equivalente a

$$(x, y^2, a_1x^2y + b_1y^3, a_2x^2y + b_2y^3, a_3x^2y + b_3y^3).$$

Se $a_1 \neq 0$ então através de mudanças de coordenadas na meta removemos o termo x^2y das 2 últimas coordenadas e obtemos

$$(x, y^2, a_1x^2y + b_1y^3, \overline{b_2}y^3, \overline{b_3}y^3)$$

Se $\overline{b_i} \neq 0$, para algum $i = 2, 3$, removemos o termo y^3 da terceira coordenada e obtemos, após mudanças apropriadas, $(x, y^2, x^2y, y^3, 0)$.

Se $\overline{b_i} = 0$, para $i = 2, 3$, obtemos $(x, y^2, x^2y + y^3, 0, 0)$.

Se $\overline{b_i} = 0$, para $i = 2, 3$, e $b_1 = 0$, obtemos $(x, y^2, x^2y, 0, 0)$.

Se $b_1 \neq 0$ então com mudanças de coordenadas na fonte e na meta removemos o termo y^3 das 2 últimas coordenadas e obtemos

$$(x, y^2, a_1x^2y + b_1y^3, \overline{a_2}x^2y, \overline{a_3}x^2y).$$

Se $\overline{a_i} \neq 0$, para algum $i = 2, 3$, obtemos, após mudanças apropriadas, $(x, y^2, y^3, x^2y, 0)$ (já obtido anteriormente).

Se $\overline{a_i} = 0$, para $i = 2, 3$, temos $(x, y^2, x^2y + y^3, 0, 0)$ (já obtido anteriormente).

Se $\bar{a}_i = 0$, $i = 2, 3$, e $a_1 = 0$, obtemos $(x, y^2, y^3, 0, 0)$.

Também obtemos $(x, y^2, 0, 0, 0)$ quando todos os coeficientes são nulos.

□

O germe (1) é finitamente determinado e simples.

Lema 5.1.7 *Todo germe cujo 3-jato é $(x, y^2, y^3 + x^2y, 0, 0)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$(x, y^2, y^3 + x^2y, x^ly, 0)$$

para algum $l \geq 3$. Além disso, o germe é simples.

Demonstração:

Vamos calcular $T \subset H^{l+1}(2, 5)$, para $l \geq 3$, satisfazendo

$$\mathcal{M}_2^{l+1}\mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1f + T + \mathcal{M}_2^{l+2}\mathcal{O}_{2,5}$$

onde

$$T\mathcal{A}_1f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2y \\ 3y^2 + x^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + f^* \mathcal{M}_5^2\{e_1, \dots, e_5\}$$

Logo, $T = \{x^ly.e_4, x^ly.e_5\}$ e após mudanças de coordenadas temos que os possíveis $(l+1)$ -jatos são

1. $(x, y^2, y^3 + x^2y, x^ly, 0)$
2. $(x, y^2, y^3 + x^2y, 0, 0)$

O germe (1) é finitamente determinado, pois $T = \emptyset$ em $H^{l+2}(2, 5)$, para todo $l \geq 3$.

Assim obtemos os germes $(x, y^2, y^3 + x^2y, x^ly, 0)$, $l \geq 3$.

□

As $\mathcal{A}$ -órbitas sobre 3. são completamente determinadas pelas séries $(x, y^2, y^3, x^ky, 0)$, $k \geq 3$ e $(x, y^2, y^3 + x^ky, x^ly, 0)$, $l > k \geq 3$. Podemos combinar a série $(x, y^2, y^3, x^ky, 0)$, $k \geq 3$ com a órbita em 1., tomando $k \geq 2$. Da mesma forma agrupamos a série $(x, y^2, y^3 + x^ky, x^ly, 0)$, $l > k \geq 3$ com a série $(x, y^2, y^3 + x^2y, x^ly, 0)$, $l \geq 3$, tomando $l > k \geq 2$

Sobre o 3-jato em 4. obtemos:

$$4.1 \quad (x, y^2, xy^2, xy^3, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 10$$

$$4.2 \quad (x, y^2, xy^2, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 12$$

As órbitas sobre 4.1 dão origem às séries $(x, y^2, x^2y, xy^3, y^{2k+1}), k \geq 2$ e $(x, y^2, x^2y + y^{2k+1}, xy^3, 0), k \geq 2$.

Sobre o 4-jato em 4.2 obtemos:

$$4.2.1 \quad (x, y^2, xy^2, y^5, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 12$$

$$4.2.2 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 14$$

$$4.2.3 \quad (x, y^2, xy^2, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 15$$

A órbita em 4.2.1 é 5-determinada.

Sobre o 5-jato em 4.2.2 obtemos:

$$4.2.2.1 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, xy^5, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 14$$

$$4.2.2.2 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 15$$

Sobre o 6-jato em 4.2.2.1 obtemos:

$$4.2.2.1.1 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, xy^5, y^7), \mathcal{A}\text{-cod} = 14 \text{ germe simples}$$

$$4.2.2.1.2 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, xy^5 + \alpha y^7, 0) \text{ germe com modalidade } f_\alpha$$

$$4.2.2.1.3 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, xy^5, 0) \text{ adjacente ao anterior e portando não simples}$$

Volto ao 6-jato 4.2.2.2 e obtemos:

$$4.2.2.2.1 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, y^7, 0) \text{ adjacente a } f_\alpha$$

$$4.2.2.2.2 \quad (x, y^2, xy^2 + y^5, 0, 0)$$

Logo obtemos órbitas não simples, que estão no fecho de f_α . Sobre o 5-jato em 4.2.3 obtemos :

$$4.2.3.1 \quad (x, y^2, xy^2, xy^5, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 15$$

$$4.2.3.2 \quad (x, y^2, xy^2, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 17$$

Sobre o 6-jato em 4.2.3.1 obtemos o germe simples $(x, y^2, xy^2, xy^5, y^7)$ e germes não simples. Sobre o 6-jato em 4.2.3.2 obtemos apenas germes não simples.

Sobre o 3-jato em 5. obtemos

$$5.1 \quad (x, y^2, x^3y, xy^3, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 13$$

$$5.2 \quad (x, y^2, x^3y + xy^3, 0, 0), \mathcal{A}\text{-cod} = 15$$

5.3 $(x, y^2, x^3y, 0, 0)$, $\mathcal{A}$ -cod = 16

5.4 $(x, y^2, xy^3, 0, 0)$, $\mathcal{A}$ -cod = 16

5.5 $(x, y^2, 0, 0, 0)$, $\mathcal{A}$ -cod = 19

Em 5.1 obtemos duas séries de germes:

$(x, y^2, x^3y, xy^3, y^{2k+1})$ simples para $k = 2$ e $k = 3$ e não simples para $k \geq 4$

$(x, y^2, x^3y + y^{2k+1}, xy^3, 0)$ simples para $k = 2$ e não simples para $k \geq 3$

Sobre o 4-jato em 5.2 obtemos

5.2.1 $(x, y^2, x^3y + xy^3, y^5, x^4y)$, $\mathcal{A}$ -cod = 15 germe simples

5.2.2 $(x, y^2, x^3y + xy^3, y^5 + \alpha x^4y, 0)$, germe com modalidade g_α

A partir de então obtemos órbitas não simples, que estão no fecho de g_α .

Sobre o 4-jato em 5.3 obtemos

5.3.1 $(x, y^2, x^3y, x^2y^3, y^5)$, $\mathcal{A}$ -cod = 16

5.3.2 $(x, y^2, x^3y, x^2y^3 + y^5, 0)$, adjacente a g_α

Logo obtemos órbitas não simples, que estão no fecho de g_α .

Sobre o 4-jato em 5.4 obtemos

5.4.1 $(x, y^2, xy^3, x^4y, y^5)$, germe simples

5.4.2 $(x, y^2, xy^3, x^4y + y^5, 0)$, adjacente a g_α

Segue que obtemos órbitas não simples, que estão no fecho de g_α .

Sobre o 4-jato em 5.5 obtemos

5.5.1 $(x, y^2, x^4y, x^2y^3, y^5)$, adjacente a $(x, y^2, x^4y, 0, x^3y + xy^3)$ que por sua vez esta no fecho de g_α , portanto não simples.

Os diagramas a seguir dão uma idéia da classificação que foi feita utilizando o método da transversal completa, começamos com o 2-jato $(x, y^2, 0, 0, 0)$.

Encontramos as séries de germes simples:

$$(x, y^2, y^3, x^k y, 0), \quad k \geq 2$$

$$(x, y^2, y^3 + x^k y, x^\ell y, 0), \ell > k \geq 2$$

Encontramos as séries de germes simples:

$$(x, y^2, x^2y, xy^3, y^{2k+1}), k \geq 2$$

$$(x, y^2, x^2y + y^{2k+1}, xy^3, 0), k \geq 2$$

Obtemos também a lista dos germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^6$, multiplicidade 2, usando o Método da Transversal Completa. Esta lista consiste dos germes $(f, 0)$, onde f é um germe simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^5$.

Teorema 5.1.8 *Todo germe $\mathcal{A}$ -simples $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^6, 0)$, de multiplicidade 2, é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes germes:*

$$\begin{aligned}
& (x, xy, y^2, y^{2k+1}, 0, 0), k \geq 1 \\
& (x, y^2, y^3, x^k y, 0, 0), k \geq 2 \\
& (x, y^2, y^3 + x^k y, x^l y, 0, 0), l > k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y + y^{2k+1}, xy^3, 0, 0), k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y, xy^3, y^{2k+1}, 0), k \geq 2 \\
& (x, y^2, x^2 y, y^5, 0, 0) \\
& (x, y^2, x^2 y + y^5, xy^5, y^7, 0) \\
& (x, y^2, x^2 y, xy^5, y^7, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y + y^5, xy^3, 0, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y, xy^3, y^5, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y, xy^3, y^7, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y + xy^3, y^5, x^4 y, 0) \\
& (x, y^2, x^3 y, x^2 y^3, y^5, 0) \\
& (x, y^2, xy^3, x^4 y, y^5, 0)
\end{aligned}$$

Além disso, fazendo a classificação para $n \geq 6$, multiplicidade 2, obtemos apenas germes $\mathcal{A}$ -simples do tipo $(f, 0)$, onde $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ é um germe $\mathcal{A}$ -simples de multiplicidade 2.

Teorema 5.1.9 *Todo germe $\mathcal{A}$ -simples $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 6$, de multiplicidade 2, é $\mathcal{A}$ -equivalente a um germe do tipo*

$$(f, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-5 \text{ vezes}})$$

onde $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^5, 0)$ é um germe simples.

Consideramos agora os germes $\mathcal{A}$ -simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^5$, com multiplicidade 3. Temos o seguinte:

Teorema 5.1.10 *Todo germe $\mathcal{A}$ -simples $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^5, 0)$, de multiplicidade 3, é $\mathcal{A}$ -equivalente a um germe do tipo*

$$\begin{aligned}
& (x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+2} + y^{3\ell+1}), \quad 1 < k < \ell < 2k \\
& (x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+2}), \quad k \geq 1 \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3, y^{3m+1} + y^{3\ell+2}), \quad 1 < k < m \leq \ell < 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3, y^{3m+1}), \quad 1 \leq k < m \leq 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3, 0), \quad k \geq 1 \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3, y^{3m+2} + y^{3\ell+1}), \quad 1 < k < m < \ell \leq 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+2}, y^3, y^{3m+2}), \quad 1 < k < m < 2k \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3, y^{3\ell+1} + y^{3m+2}), \quad 1 \leq k < \ell \leq m \leq 2k \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3, y^{3\ell+1}), \quad 1 \leq k < \ell \leq 2k \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3, y^{3\ell+2} + y^{3m+1}), \quad 1 < k < \ell < m \leq 2k \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3, y^{3\ell+2}), \quad 1 \leq k < \ell \leq 2k \\
& (x, xy + y^{3k+2}, xy^2, y^3, 0), \quad k \geq 1 \\
& (x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+1} + y^{3\ell+2}), \quad 1 < k \leq \ell < 2k - 1 \\
& (x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+1}), \quad k \geq 1 \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3, y^{3m+2} + y^{3\ell+1}), \quad 1 < k \leq m < \ell < 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3, y^{3m+2}), \quad 1 \leq k \leq m < 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3, y^{3\ell+1} + y^{3m+2}), \quad 1 < k < \ell \leq m < 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3, y^{3\ell+1}), \quad 1 < k < \ell < 2k \\
& (x, xy, xy^2 + y^{3k+1}, y^3, 0), \quad k \geq 1 \\
& (x, xy, y^3, y^4, y^5) \\
& (x, xy, y^3, y^4, 0) \\
& (x, xy, y^3, y^5, y^7) \\
& (x, xy, y^3, y^5, 0) \\
& (x, xy + y^3, xy^2, y^4, y^{2k+1}), \quad k \geq 2 \\
& (x, xy + y^3, xy^2 + y^{2k+1}, y^4, y^{2k+3}), \quad k \geq 2 \\
& (x, xy + y^3, xy^2 + y^{2k+1}, y^4, 0), \quad k \geq 2 \\
& (x, x^2y, xy^2, y^3, y^4) \\
& (x, x^2y + y^4, xy^2, y^3, y^5) \\
& (x, x^2y + y^4, xy^2, y^3, xy^4) \\
& (x, x^2y + y^4 + y^5, xy^2, y^3, 0) \\
& (x, x^2y + y^4, xy^2, y^3, 0)
\end{aligned}$$

Neste caso faremos apenas algumas observações, omitindo o processo de classificação.

Lema 5.1.11 *As $\mathcal{A}^3$ -órbitas de germes simples de multiplicidade 3 são equivalentes a um dos seguintes germes:*

1. $(x, xy, xy^2, y^3, 0)$
2. $(x, xy, y^3, 0, 0)$
3. $(x, xy + y^3, xy^2, 0, 0)$
4. $(x, xy + y^3, 0, 0, 0)$

Demonstração:

Em [18], vimos que um germes simples de multiplicidade 3 tem 2-jato equivalente a $(x, xy, 0, 0, 0)$. Seja $T \subset H^3(2, 5)$ satisfazendo

$$\mathcal{M}_2^3 \mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_2^4 \mathcal{O}_{2,5}$$

onde

$$T\mathcal{A}_1 f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + f^* \mathcal{M}_5^2 \{e_1, \dots, e_5\}$$

Logo, $T = \{xy^2.e_i, i = 3, 4, 5, y^3.e_j, j = 2, 3, 4, 5\}$. Então o 3-jato de f é equivalente a

$$(x, xy + b_0 y^3, a_1 xy^2 + b_1 y^3, a_2 xy^2 + b_2 y^3, a_3 xy^2 + b_3 y^3).$$

Se $b_i \neq 0$, para algum $i = 1, 2, 3$, digamos $b_3 \neq 0$ removemos o termo y^3 das coordenadas e_2, e_3 e e_4 e obtemos, após mudanças apropriadas, $(x, xy, \overline{a}_1 x^2 y, \overline{a}_2 xy^2, a_3 xy^2 + b_3 y^3)$.

Se $\overline{a}_i \neq 0$, para algum $i = 1, 2$, obtemos $(x, xy, xy^2, y^3, 0)$.

Se $\overline{a}_i = 0$, para $i = 1, 2$, obtemos $(x, xy, xy^2 + y^3, 0, 0)$.

Se $\overline{a}_i = 0$, para $i = 1, 2$, e $a_3 = 0$, obtemos $(x, xy, y^3, 0, 0)$, que é equivalente ao germe $(x, xy, xy^2 + y^3, 0, 0)$. Use a mudança de coordenada na fonte $y \mapsto y - cx$.

Suponhamos agora que $b_0 \neq 0$. Então removemos o termo y^3 das coordenadas e_3, e_4 e e_5 e obtemos, após mudanças apropriadas, $(x, xy + y^3, x^2 y, 0, 0)$ ou $(x, xy + y^3, 0, 0, 0)$.

□

Seja $(x, xy, xy^2, y^3, 0) \in J^{3k+1}(2, 5)$, $k \geq 1$. Usando o método da Transversal Completa vamos obter o seguinte diagrama:

Seja $(x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+2}) \in J^{3l}(2, 5)$, $l > 1$. Usando o método da Transversal Completa vamos obter $T \subset H^{3l+1}(2, 5)$ tal que

$$\mathcal{M}_2^{3l+1} \mathcal{O}_{2,5} \subset T\mathcal{A}_1 f + T + \mathcal{M}_2^{3l+2} \mathcal{O}_{2,5}$$

onde $\mathcal{M}_2^{3l+1} = \langle x^{3l+1}, x^{3l}y, \dots, xy^{3l}, y^{3l+1} \rangle$ e

$$T\mathcal{A}_1 f = \mathcal{M}_2^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 2xy \\ 3y^2 \\ (3k+2)y^{3k+1} \end{bmatrix} \right\} + f^*(\mathcal{M}_5^2 \mathcal{O}_{5,5})$$

Logo, $T = \{y^{3l+1}(e_5)\}$ se $l < 2k$ e $T = \emptyset$, se $l \geq 2k$. E obtemos as seguintes séries: $(x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+2} + y^{3l+1})$, $1 < k < l < 2k$, e $(x, xy, xy^2, y^3, y^{3k+2})$, $k \geq 1$.

No caso de germes de multiplicidade 3, quando fazemos a classificação dos germes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^6, 0)$, aparecem novos germes simples (não apenas os do tipo $(f, 0)$, com f aparecendo no Teorema 5.1.10). Joachim H. Rieger conjectura que os novos germes são, além daqueles do tipo $(f, 0)$, os que adicionam monônios com filtração maior (quando a f na dimensão anterior é $\mathcal{A}$ -simples) e os que separam monônios de f (neste caso f pode ser não simples). Esta conjectura é válida quando comparamos a classificação obtida por Klotz, Pop e Rieger em [18] de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^4, 0)$ e a classificação obtida para o caso de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^5, 0)$ neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] V.I. Arnol'd, Simple singularities of curves, *Proc. Steklov Inst. Math.* 226 (1999), 20-28.
- [2] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [3] G.F. Barbosa and J.H. Rieger, Relations between A-invariants of equidimensional corank-1 maps, *submitted to Amer. J. Math.*.
- [4] J.W. Bruce and T. Gaffney, Simple singularities of mappings from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}^2$, *J. London Math. Soc.* 24 (1982), 465-474.
- [5] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Springer LNM 1327, Springer Verlag 1988.
- [6] J. Damon, Finite determinacy and topological triviality I., *Invent. Math.* 62 (1980), 299-324.
- [7] J. Damon and D. Mond, $\mathcal{A}$ -codimension and vanishing topology of discriminants, *Invent. Math.* 106 (1991), 217-242.
- [8] T. Fukuda and G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, *Tokyo J. Math.* 10 (1987), 375-384.
- [9] T. Fukui, J.J. Nuno Ballesteros and M.J. Saia, On the number of singularities in generic deformations of map germs, *J. London Math. Soc.* 58 (1998), 141-153.
- [10] T. Gaffney, Polar multiplicities and equisingularity of map germs, *Topology* 32 (1993), 185-223.
- [11] T. Gaffney and D. Mond, Cusps and double folds of germs of analytic maps $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, *J. London Math. Soc.* 43 (1991), 185-192.
- [12] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Mathematics, 25, Pitman, 1979.
- [13] C.G. Gibson and C.A. Hobbs, Simple singularities of space curves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 113 (1993), 297-310.

- [14] V.V. Goryunov, Semi-simplicial resolutions and homology of images and discriminants of mappings, *Proc. London Math. Soc.* 70 (1995), 363-385.
- [15] G.M. Greuel, Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, *Math. Ann.* 241 (1975), 235-266.
- [16] C.A. Hobbs and N.P. Kirk, On the classification and bifurcation of multigerms of maps from surfaces to 3-space, *Math. Scand.* 89 (2001), 57-96.
- [17] K. Houston, Calculating generalised image and discriminant Milnor numbers in low dimensions, *Glasgow Math. J.* 43 (2001), 165-175.
- [18] C. Klotz, O. Pop and J.H. Rieger, Real double-points of deformations of $\mathcal{A}$ -simple map-germs from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^{2n}$, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 142 (2007), 341-363.
- [19] D.T. Lê, Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection, *Functional Anal. Appl.* 8 (1974), 127-131.
- [20] E.J.N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lect. Note Series 77, Cambridge University Press 1984.
- [21] W.L. Marar and D. Mond, Multiple point schemes for corank 1 maps, *J. London Math. Soc.* 39 (1989), 553-567.
- [22] W.L. Marar, J.A. Montaldi and M.A.S. Ruas, Multiplicities of zero-schemes in quasihomogeneous corank-1 singularities $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, in: *Singularity Theory (Liverpool, 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note Series 263, Cambridge University Press 1999, 353-367.
- [23] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, 61, Princeton University Press, 1968.
- [24] D. Mond, On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$, *Proc. London Math. Soc.* 50 (1985), 333-369.
- [25] J.H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc.* 36 (1987), 351-369.
- [26] J.H. Rieger, Invariants of equidimensional corank-1 maps, *Banach Center Publ.*, Vol. 36 (2004), 239-248.
- [27] J.H. Rieger, Relations between $\mathcal{A}$ -invariants of semi-quasihomogeneous, equidimensional corank-1 maps, Unpublished Notes.
- [28] J.H. Rieger, $\mathcal{A}$ -unimodal map-germs into the plane, *Hokkaido Math. J.* 33 (2004), 47-64.

-
- [29] J.H. Rieger and M.A.S. Ruas, Classification of $\mathcal{A}$ -simple germs from k^n to k^2 , *Compositio Math.* 79 (1991), 99-108.
- [30] J.H. Rieger and M.A.S. Ruas, M -deformations of $\mathcal{A}$ -simple $\sum^{n-p+1}$ germs from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^p$, $n \geq p$, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 139 (2005), 333-349.
- [31] C.T.C. Wall, Finite determinacy of smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.* 13 (1981), 481-539.
- [32] R.G. Wik-Atique, On the classification of multigerms of maps from $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ under $\mathcal{A}$ -equivalence, *Real and Complex Singularities (J. V. Bruce and F. Tari, eds.), Proceedings of the 5th Workshop on Real and Complex Singularities, São Carlos, Brazil*, (1998), 119-133.