Cohomologia e Propriedades Estocásticas de
Transformações Expansoras e Observáveis Lipschitzianos

Amanda de Lima

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 12 de fevereiro de 2007

Assinatura: _____

Cohomologia e Propriedades Estocásticas de Transformações Expansoras e Observáveis Lipschitzianos

Amanda de Lima

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Smania Brandão*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2007

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus por mais uma conquista realizada e por ter colocado em meu caminho todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente.

Aos meus pais Devanir e Solange, os maiores responsáveis por tudo o que sou hoje, por toda paciência, amor e apoio que me deram durante todos esses anos de estudo.

A minha querida irmã Natali por estar sempre ao meu lado, pela sua compreensão, carinho e por ter sido a minha principal fonte de incentivo.

Ao meu orientador Prof. Daniel Smania pela sua dedicação, atenção e principalmente pela paciência. Aprendi muito com ele.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica, em especial ao Prof. Vanderlei Horita pelo encorajamento, amizade e atenção prestados desde a minha graduação.

Ao Yuri pelo companheirismo, paciência, incentivo e por tanto ter me ajudado na conclusão deste trabalho.

A todos os meus familiares que sempre estiveram presentes e indiretamente muito me ajudaram.

A FAPESP pela ajuda financeira através da bolsa de estudos.

Resumo

Provamos o Teorema do Limite Central para transformações expansoras por pedaços em um intervalo e observáveis com variação limitada. Utilizamos a abordagem desenvolvida por R. Rousseau-Egele, como apresentada por A. Broise. O método da demonstração se baseia no estudo de perturbações do operador de transferência de Ruelle-Perron-Frobenius.

Uma contribuição original é dada no último capítulo, onde provamos que, para transformações markovianas expansoras, todos os observáveis não constantes, contínuos e com variação limitada não são infinitamente cohomólogos à zero, generalizando um resultado de Bamón, Rivera-Letelier, Urzúa and Kiwi para observáveis lipschitzianos e transformações z^n . A demonstração se baseia na teoria dos operadores de Ruelle-Perron-Frobenius desenvolvida nos capítulos anteriores.

Abstract

We prove the Central Limit Theorem for piecewise expanding interval transformations and observables with bounded variation, using the approach of J. Rousseau-Egele as described by A. Broise. This approach makes use of perturbations of the so-called Ruelle-Perron-Frobenius transfer operator.

An original contribution is given in the last chapter, where we prove that for Markovian expanding interval maps all observables which are non constant, continuous and have bounded variation are not infinitely cohomologous with zero, generalizing a result by Bamón, Rivera-Letelier, Urzúa and Kiwi for Lipschitzian observables and the transformations z^n . Our demonstration uses the theory of Ruelle-Perron-Frobenius operators developed in the previous chapters.

Sumário

Introdução	15
1 O Teorema do Limite Central para Soma de Variáveis Aleatórias I.I.D.	19
1.1 Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidade	20
1.2 As Desigualdades de Esseen e Berry-Esseen	26
2 Teoria Espectral	31
2.1 Projeção Espectral	36
3 Notações e Definições	37
4 Transformações Expansoras	39
5 O Operador de Perron-Frobenius	41
6 O Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu	45
6.1 Consequências	61
7 As Perturbações do Operador Φ	69
8 O Teorema do Limite Central Para Transformações Expansoras	77
8.1 Cálculo da Variância	77
8.2 O Teorema do Limite Central	84
9 Observáveis Infinitamente Cohomólogos a Zero	95
Índice Remissivo	111

Introdução

Começamos o nosso trabalho com o estudo do Teorema do Limite Central.

A história do Teorema do Limite Central começou com o francês Abraham de Moivre. De Moivre investigou o limite da distribuição binomial através de um número crescente de experimentos e descobriu que a função $\exp(-x^2)$ estava relacionada com este problema.

Enquanto de Moivre preocupava-se com o papel desempenhado pela função $\exp(-x^2/2)$ como sendo o limite de uma distribuição de probabilidade, ele não se atentou para o fato de que a função $(1/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2)$ seria ela própria uma distribuição.

A formulação da distribuição normal veio com Thomas Simpsom, decorrente dos erros em observações astronômicas. Essa idéia foi expandida pelo alemão Carl Friedrich Gauss, que desenvolveu o princípio dos mínimos quadrados.

Paralelamente, os matemáticos franceses Pierre Simon de Laplace e Adrien-Marie Legendre também desenvolveram essas idéias.

Em alguns países, incluindo a Alemanha, a distribuição normal é conhecida como Distribuição Gaussiana e, na França, é conhecida como Distribuição Laplaciana.

A soma de variáveis aleatórias independentes desempenharam um importante papel no trabalho de Laplace desde o início. Seu interesse era calcular a distribuição de probabilidade da soma dos ângulos de inclinação das órbitas dos cometas. Supôs que todos os ângulos que foram medidos eram distribuídos aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme entre 0° e 90° , assumindo também que todos os ângulos eram independentes. Laplace começou o cálculo para um número arbitrário de cometas via indução. No entanto, havia um desvio considerável entre a média aritmética dos dados obtidos e o

Figura 1: Pierre Simon de Laplace -
vide [22]

valor teórico. Tal discrepância era causada principalmente devido aos erros observacionais e à incapacidade de se realizar cálculos precisos, uma vez que o número de corpos celestiais era muito elevado. Foi então que começou a desenvolver técnicas para obter aproximações.

Por volta de 1810, Laplace mostrou que, sob certas condições, qualquer soma de um número considerável de variáveis aleatórias mutuamente independentes, identicamente distribuídas aproxima-se da distribuição normal. Este resultado aumentou consideravelmente o campo das possíveis aplicações da teoria da probabilidade.

Em 1853, Augustin Louis Cauchy deu o esboço de uma prova que foi considerada como a “primeira prova rigorosa” do Teorema do Limite Central.

A versão do Teorema do Limite Central de Laplace serviu principalmente como ferramenta e teve grande importância em áreas além da matemática. Por volta da metade do século XIX, o Teorema do Limite Central, com as contribuições de Cauchy e Dirichlet, tornou-se parte integrante da matemática.

Primeiramente apresentamos o Teorema do Limite Central para soma de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, seguindo a abordagem feita em [18]. Em seguida, discutimos o Teorema do Limite Central para transformações expansoras em intervalos, parte esta que foi fortemente embasada em [6].

Neste último caso, consideramos uma transformação expansora T em $[0, 1]$ a qual podemos supor monótona, expansora e de classe C^2 sobre um número finito ou enumerável de subintervalos de $[0, 1]$.

Precisamos de uma medida de probabilidade invariante por T e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue m , que chamaremos hm , onde a densidade h é de variação limitada. Através do estudo do operador de Perron-Frobenius Φ associado a T , que preserva as funções de variação limitada, utilizamos o Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu para construir tal medida.

Depois, supomos que 1 é um autovalor simples de Φ , donde podemos concluir que o sistema (T, hm) é ergódico. Consideramos f uma função de variação limitada e denotamos

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$$

e

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 (S_n f)^2 h \, dm \geq 0.$$

Se σ é diferente de zero, então, mostramos que a soma $S_n f$ satisfaz o Teorema do Limite Central.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_n f - nm(fh)}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-t^2/2} dt.$$

E, por fim, consideramos funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a equação cohomológica

$$f = u \circ T - u$$

onde T é uma transformação expansora markoviana e $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ também é contínua. E mostramos que não é possível obter uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada que satisfaz tal equação infinitas vezes.

O Teorema do Limite Central para Soma de Variáveis Aleatórias I.I.D.

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o Teorema do Limite Central para soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas:

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com esperança μ e variância σ^2 . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0, 1).$$

De fato, vamos demonstrar o seguinte resultado mais geral do qual o Teorema do Limite Central para soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segue como um caso particular. Tal resultado exhibe uma estimativa da distância entre uma soma de variáveis aleatórias independentes e a distribuição normal.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que

$$EX_j = 0, \quad E|X_j|^3 < \infty \quad (j = 1, \dots, n).$$

Escrevemos

$$\sigma_j^2 = EX_j^2, \quad B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3,$$

$$F_n(x) = P \left(B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j < x \right).$$

Então

$$\sup_x |F_n(x) - \mathcal{N}(x)| \leq M L_n. \quad (1.1)$$

Onde M é uma constante positiva.

Denotamos por

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

a função distribuição normal $(0, 1)$.

No caso em que as variáveis aleatórias independentes são identicamente distribuídas, a desigualdade (1.1) nos permite concluir que

$$\begin{aligned} B_n &= n\sigma^2, \\ L_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\rho, \\ F_n(x) &= P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma\sqrt{n}} < x \right), \end{aligned}$$

já que as variáveis aleatórias possuem a mesma distribuição. E então,

$$\sup_x |F_n(x) - \mathcal{N}(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\rho.$$

O que implica

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x)$$

uniformemente. O que consiste o Teorema do Limite Central para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Antes de demonstrarmos tal teorema, vamos exibir alguns resultados importantes.

1.1 Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidade

Seja Ω um conjunto não vazio. Os seus elementos são chamados *pontos amostrais*, e serão denotados por ω . O conjunto Ω é chamado *espaço amostral*.

Consideremos $\mathcal{U}$ uma σ -álgebra em Ω . Seus elementos são chamados *eventos*.

Uma função não negativa enumeravelmente aditiva $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $P(\Omega) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$ é chamada uma *medida de probabilidade*. O valor de $P(A)$ é chamada de *probabilidade do evento* A . A tripla $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ é chamado *espaço de probabilidade*.

Uma função mensurável real finita $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, é chamada *variável aleatória*. A função

$$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}),$$

definida para todos os borelianos B de pontos na reta, é chamada *função de probabilidade* da variável aleatória X .

Consideremos a probabilidade $P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ quando $B = (-\infty, x)$, isto é, o intervalo consistindo dos pontos $y \in \mathbb{R}$ tais que $y < x$. Denotemos

$$F(x) = P(X < x).$$

A função $F(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e é chamada *função de distribuição* da variável aleatória X .

Seja $X = X(\omega)$ uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Como um espaço de probabilidade é um espaço mensurável com uma medida, podemos introduzir a noção de integral. Se

$$\int_{\Omega} |X| dP < \infty,$$

definimos a *esperança matemática* EX por

$$EX = \int_{\Omega} X dP.$$

Temos também que

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

onde a integral denota a integral de Stieltjes e $F(x)$ é a função de distribuição de X .

Definimos a *variância* de X por

$$\sigma^2(X) = E|X - EX|^2.$$

Se F_n e F são funções de distribuição, dizemos que F_n *converge fracamente* para F se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

para cada x em que F é contínua.

Se P_n e P são funções de probabilidade correspondentes a F_n e F , então F_n converge fracamente para F se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A) = P(A)$$

para todo A da forma $A = (-\infty, x]$ onde $P(x) = 0$.

Consideremos X_n e X variáveis aleatórias com respectivas funções de distribuição F_n e F . Se F_n converge fracamente para F , então dizemos que X_n *converge em distribuição* para X . Portanto, X_n converge fracamente para X se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

para todo x tal que $P(X = x) = 0$.

Definição 1.1. Sejam X uma variável aleatória, e t um número real. A *função característica* da variável aleatória X é definida pela igualdade

$$f(t) = Ee^{itX},$$

onde E é a esperança matemática.

Se X tem a função distribuição $F(x)$, então

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Teorema 1.2. (*Método das Funções Características de Paul Lévy*)

Sejam μ_n e μ funções de probabilidade associadas às variáveis aleatórias X_n e X com funções características f_n e f . Uma condição necessária e suficiente para que X_n convirja em distribuição para X , é que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para cada t .

Demonstração. Vide [5] página 303.

Denotemos por m a medida de Lebesgue.

Definição 1.3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, ($I = [0, 1]$). Dizemos que f é de *variação limitada* se

$$v(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$$

é finito, onde o supremo é tomado sobre partições de I , $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Um elemento $f \in L^1(m)$ tem variação limitada se

$$v(f) = \inf_{g \in \bar{f}} v(g)$$

é finito, onde tomamos o ínfimo sobre a classe de f módulo m ,

$$\bar{f} = \{g : I \rightarrow \mathbb{C} : f = g \text{ } m - q.t.p.\}.$$

Teorema 1.4. Sejam $F(x)$ uma função não-decrescente limitada e $G(x)$ uma função de variação limitada em $\mathbb{R}$; seja $F(-\infty) = G(-\infty)$. Sejam

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x); \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x),$$

e T um número positivo arbitrário. Então para todo $b > 1/2\pi$ temos a desigualdade

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq b \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + bT \sup_x \int_{|y| \leq c(b)/T} |G(x+y) - G(x)| dy, \quad (1.2)$$

onde $c(b)$ é constante positiva dependendo somente de b .

Demonstração. Suponha $T > 0$ e $a > 0$.

Temos que a função

$$q(x) = \frac{1 - \cos Tx}{\pi T x^2}$$

é a densidade de uma distribuição tendo a função característica

$$v(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & \text{se } |t| < T \\ 0, & \text{se } |t| \geq T, \end{cases}$$

vide [5] página 302.

Seja

$$p(x) = \frac{T}{\pi} \frac{1 - \cos(Tx - a)}{(Tx - a)^2}.$$

Como

$$p(x + \frac{a}{T}) = q(x),$$

a função $p(x)$ é a densidade de uma distribuição com a função característica

$$h(t) = \begin{cases} (1 - |t|/T)e^{ita/T}, & \text{se } |t| < T \\ 0, & \text{se } |t| \geq T. \end{cases}$$

Temos que, para todo x , a e T

$$p(x) = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{Tx-a}{2}}{\frac{Tx-a}{2}} \right)^2 \leq \frac{T}{2\pi}.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma(a) = \int_0^{2a/T} p(x) dx, \\ \gamma &= \gamma(a) = \int_0^{2a/T} \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{Tx-a}{2}}{\frac{Tx-a}{2}} \right)^2 \leq \frac{T}{2\pi} dx = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2a/T} \frac{\sin^2 \frac{Tx-a}{2}}{\left(\frac{Tx-a}{2}\right)^2} dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = \frac{Tx - a}{2}$$

obtemos,

$$\gamma = \frac{T}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \quad (1.3)$$

A função $F(x)$ é não decrescente, e portanto

$$\begin{aligned} F(x) &\leq \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} F(u)p(u-x)du = G(x) + \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} (G(u) - G(x))p(u-x)du \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} (F(u) - G(u))p(u-x)du \\ &\leq G(x) + \frac{T}{2\pi\gamma} \int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} (F(u) - G(u))p(u-x)du. \end{aligned}$$

Vamos escrever

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z)p(z)dz, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+z)p(z)dz, \\ G_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-z)p(z)dz, \quad G_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x+z)p(z)dz. \end{aligned}$$

Fazendo $x - z = u$ e $x + z = u$ obtemos

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(x-u)du, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(u-x)du,$$

Analogamente para G .

Temos também

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_k(x) = f(t)h_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

onde $h_1(t) = h(t)$, $h_2(t) = h(-t)$.

Analogamente para G_1 e G_2 .

Usando o fato que $h(t) = 0$ para $|t| > T$, e, utilizando a seguinte fórmula da inversão

$$\Delta(x_2) - \Delta(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_2} - e^{-itx_1}}{-it} \delta(t) dt,$$

onde $\Delta(x)$ é uma função distribuição e $\delta(t)$ a função característica correspondente, temos que

$$F_k(x) - F_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} f(t)h_k(t) dt$$

e

$$G_k(x) - G_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} g(t)h_k(t) dt,$$

para todo x, y e $k = 1, 2$.

Vamos supor que

$$\int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| < \infty,$$

caso contrário a desigualdade (1.2) é óbvia.

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \int_{-T}^T \frac{f(t) - g(t)}{-it} h_k(t) e^{-ity} dt = 0.$$

Também, como $F(-\infty) = G(-\infty)$, então $F_k(-\infty) = G(-\infty)$ para $k = 1, 2$. Fazendo $y \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} F_k(x) - F_k(y) - G_k(x) + G_k(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} f(t)h_k(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{-it} g(t)h_k(t) dt \\ &= \int_{-T}^T \frac{f(t) - g(t)}{-it} h_k(t) e^{-ity} dt. \end{aligned}$$

Como $|h(t)| \leq 1$, temos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u))p(x-u)du \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt$$

e

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u))p(u - x)du \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt$$

para todo x .Seja $\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{x+2a/T} (F(u) - G(u))p(u - x)du \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u))p(u - x)du \right| \\ &\quad + \Delta \int_{-\infty}^x p(u - x)du + \Delta \int_{x+2a/T}^{\infty} p(u - x)du \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \Delta \left(1 - \int_0^{2a/T} p(u)du \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &\leq \frac{T}{2\pi\gamma} \int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \int_x^{x+2a/T} (F(u) - G(u))p(u - x)du \\ &\leq \frac{T}{2\pi\gamma} \int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy + \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt \\ &\quad + \frac{\Delta}{\gamma} \left(1 - \int_0^{2a/T} p(u)du \right) \\ &\leq \frac{T}{2\pi\gamma} \int_0^{2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy + \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt \\ &\quad + \frac{1-\gamma}{\gamma} \Delta. \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos para todo x

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \frac{1}{\gamma} \int_{x-2a/T}^x F(u)p(x-u)du = G(x) + \frac{1}{\gamma} \int_{x-2a/T}^x (G(u) - G(x))p(x-u)du \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \int_{x-2a/T}^x (F(u) - G(u))p(x-u)du \\ &\geq G(x) - \frac{T}{2\pi\gamma} \int_{-2a/T}^0 |G(x+y) - G(x)|dy - \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt \\ &\quad - \frac{1-\gamma}{\gamma} \Delta. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta \leq \frac{T}{2\pi\gamma} \int_{|y| \leq 2a/T} |G(x+y) - G(x)|dy + \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{1-\gamma}{\gamma} \Delta.$$

Segue de (1.3) que $0 < \gamma < 1$ para todo $a > 0$ e

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma(a) = 1.$$

Escolhendo a suficientemente grande podemos garantir que $\gamma > 1/2$. Então,

$$\Delta \leq \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{T}{2\pi(2\gamma - 1)} \sup_x \int_{|y| \leq 2a/T} |G(x+y) - G(x)| dy.$$

□

Como consequência do Teorema 1.4, temos

Teorema 1.5. *Sejam $F(x)$ uma função não-decrescente, $G(x)$ uma função diferenciável de variação limitada em $\mathbb{R}$, $f(t)$ e $g(t)$ as correspondentes transformadas de Fourier-Stieltjes, e suponha que $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(+\infty) = G(+\infty)$, T um número positivo arbitrário. Suponha que $\sup_x |G'(x)| \leq C$. Então para $b > 1/2\pi$ temos*

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq b \int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + r(b) \frac{C}{T}, \quad (1.4)$$

onde $r(b)$ é uma constante positiva dependendo somente de b .

1.2 As Desigualdades de Esseen e Berry-Esseen

Vamos estimar a distância entre a distribuição Normal e a distribuição de uma soma de variáveis aleatórias independentes.

Lema 1.6. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, com $EX_j = 0$, $E|X_j|^3 < \infty$ ($j = 1, \dots, n$). Vamos denotar*

$$\sigma_j^2 = EX_j^2, B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3.$$

Seja $f_n(t)$ a função característica da variável aleatória

$$B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j.$$

Então,

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 16L_n |t|^3 e^{-t^2/3} \quad (1.5)$$

para $|t| \leq 1/(4L_n)$.

Demonstração. (1º caso) Vamos supor

$$|t| \geq \frac{1}{2} L_n^{-1/3}.$$

Então,

$$2|t|L_n^{1/3} \geq 1 \Rightarrow 8|t|^3 L_n \geq 1.$$

Assim, precisamos mostrar que

$$|f_n(t)|^2 \leq e^{-2t^2/3}. \quad (1.6)$$

Pois

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq |f_n(t)| + e^{-t^2/2} \leq 2e^{-t^2/3}.$$

Daí, como $8|t|^3 L_n \geq 1$, teremos que

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 16L_n |t|^3 e^{-t^2/3}.$$

Seja

$$v_j(t) = Ee^{itX_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

A variável aleatória $\tilde{X}_j = X_j - Y_j$ onde Y_j não depende de X_j mas tem a mesma distribuição, tem a mesma função característica $|v_j(t)|^2$ e a mesma variância $2\sigma_j^2$. Além disso,

$$\begin{aligned} E|\tilde{X}_j|^3 &= E|X_j - Y_j|^3 = E(|X_j|^3 - 3X_j^2|Y_j| + 3|X_j|Y_j^2 - |Y_j|^3) \\ &\leq E|X_j|^3 + 3E|X_j|^3 + 3|X_j|^3 + E|X_j|^3 \leq 8E|X_j|^3, \end{aligned}$$

$$|v_j(t)|^2 \leq 1 - \sigma_j^2 t^2 + \frac{4}{3}|t|^3 E|X_j|^3,$$

de fato,

$$|v_j(t)|^2 = Ee^{it\tilde{X}_j} = Ee^{it(X_j - Y_j)}.$$

Note que

$$e^{it(X_j - Y_j)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[it(X_j - Y_j)]^k}{k!} = 1 + it(X_j - Y_j) - \frac{t^2(X_j - Y_j)^2}{2} - \frac{it^3(X_j - Y_j)^3}{6} + \dots$$

Então,

$$\begin{aligned} E(e^{it(X_j - Y_j)}) &= E\left(1 + it(X_j - Y_j) - \frac{t^2(X_j - Y_j)^2}{2} - \frac{it^3(X_j - Y_j)^3}{6}\right) \\ &= 1 + itE(X_j - Y_j) - \frac{t^2}{2}E(X_j - Y_j)^2 - \frac{it^3}{6}E(X_j - Y_j)^3 \\ &\leq 1 - \frac{t^2}{2}2\sigma_j^2 + \frac{|t|^3}{6}8E|X_j|^3 \leq 1 - t^2\sigma_j^2 + \frac{4}{3}|t|^3 E|X_j|^3 \\ &\leq \exp\{-t^2\sigma_j^2 + \frac{4}{3}|t|^3 E|X_j|^3\}. \end{aligned}$$

Portanto, no intervalo $|t| \leq 1/4L_n$ temos a estimativa

$$|f_n(t)|^2 = E|e^{itB_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itB_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n x_j} dF(x) \right|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^n \left| v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) \right|^2 &= \prod_{j=1}^n \left| E e^{i \frac{t}{\sqrt{B_n}} X_j} \right|^2 = \prod_{j=1}^n \left| E e^{it B_n^{-1/2} X_j} \right|^2 \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it B_n^{-1/2} x_1} dF_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it B_n^{-1/2} x_2} dF_2(x_2) \cdot \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{it B_n^{-1/2} x_n} dF_n(x_n) \right|^2 \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n x_j} d(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \right|^2 \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n x_j} dF(x) \right|^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|f_n(t)|^2 &= \prod_{j=1}^n \left| v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) \right|^2 \leq \prod_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{t^2}{B_n} \sigma_j^2 + \frac{4}{3} \frac{|t|^3}{B_n^{3/2}} E|X_j|^3 \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{t^2}{B_n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 + \frac{4}{3} |t|^3 B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3 \right\} \\
&= \exp \left\{ -t^2 + \frac{4}{3} |t|^3 L_n \right\} \leq \exp \left\{ -t^2 + \frac{4}{3} \frac{1}{4L_n} t^2 L_n \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{3} t^2 \right\},
\end{aligned}$$

e (1.6) está provada.

Agora, suponha que

$$|t| \leq \frac{1}{4L_n} \text{ e } |t| < \frac{1}{2} L_n^{-1/3}.$$

Para $j = 1, \dots, n$, temos

$$\frac{\sigma_j}{\sqrt{B_n}} |t| \leq \frac{(E|X_j|^3)^{1/3} |t|}{B_n^{1/2}} < L_n^{1/3} |t| < \frac{1}{2},$$

pois,

$$\begin{aligned}
\sigma_j^2 &= EX_j^2 \Rightarrow \sigma_j = (EX_j^2)^{1/2}, \\
EX_j^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_j^2 dF(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_j|^3 dF(x) \Rightarrow (EX_j^2)^{1/2} \leq (EX_j^3)^{1/3},
\end{aligned}$$

e,

$$B_n^{-1/2} (EX_j^3)^{1/3} \leq B_n^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^n EX_j^3 \right)^{1/3} = L_n^{1/3}.$$

Temos também que

$$v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) = 1 - r_j \text{ onde } r_j = \frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \theta_j \frac{(EX_j^3)}{6B_n^{3/2}} |t|^3, \quad |\theta_j| \leq 1.$$

De fato,

$$v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) = E e^{i \frac{t}{\sqrt{B_n}} X_j},$$

$$e^{i \frac{t}{\sqrt{B_n}} X_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(i \frac{t}{\sqrt{B_n}} X_j \right)^k \frac{1}{k!} = 1 - \frac{t^2}{2B_n} X_j^2 - \frac{it^3}{6B_n^{3/2}} X_j^3.$$

Assim,

$$E e^{i \frac{t}{\sqrt{B_n}} X_j} = 1 - \frac{t^2}{2B_n} E X_j^2 - \frac{it^3}{6B_n^{3/2}} E X_j^3 \leq 1 - \frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{\theta_j |t|^3}{6B_n^{3/2}} E |X_j|^3, \quad |\theta_j| \leq 1,$$

onde consideramos

$$r_j = \frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{\theta_j |t|^3}{6B_n^{3/2}} E |X_j|^3.$$

Temos que $|r_j| < 1/6$, pois

$$|r_j| = \left| \frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{\theta_j |t|^3}{6B_n^{3/2}} E |X_j|^3 \right| \leq \frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{|\theta_j| |t|^3}{6B_n^{3/2}} E |X_j|^3 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} < \frac{1}{6}.$$

E,

$$\begin{aligned} |x_j|^2 &\leq 2 \left(\frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} \right)^2 + \left(\frac{|t|^3}{6B_n^{3/2}} E |X_j|^3 \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_j^2 |t|}{\sqrt{B_n}} \right)^4 + \frac{1}{18} \left[\left(\frac{(E |X_j|^3)^{1/3}}{\sqrt{B_n}} |t| \right)^3 \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{(E |X_j|^3)^{1/3}}{\sqrt{B_n}} |t| \right)^4 + \frac{1}{18} \left(\frac{(E |X_j|^3)^{1/3}}{\sqrt{B_n}} |t| \right)^6 < \frac{1}{4} \frac{E |X_j|^3}{B_n^{3/2}} |t|^3 \\ &\quad + \frac{1}{18} \frac{E |X_j|^3}{B_n^{3/2}} |t|^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{E |X_j|^3}{3B_n^{3/2}} |t|^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \log v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) &= -\frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{\theta_j |t|^3}{2B_n^{3/2}} E |X_j|^3, \\ \log f_n(t) &= \log \prod_{j=1}^n v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) = \sum_{j=1}^n \log v_j \left(\frac{t}{\sqrt{B_n}} \right) = \sum_{j=1}^n -\frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n} + \frac{\theta_j |t|^3}{2B_n^{3/2}} E |X_j|^3 \\ &= -\frac{t^2}{2\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 + \frac{\theta_j |t|^3}{2} L_n = -\frac{t^2}{2} + \frac{\theta_j |t|^3}{2} L_n, \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

Usando $L_n |t|^3 < 1/8$, temos que

$$\exp \left(\frac{1}{2} L_n |t|^3 \right) \leq \exp \left(\frac{1}{16} \right) < 2.$$

Então,

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq e^{-t^2/2} |e^{\frac{\theta}{2} L_n |t|^3} - 1| \leq \frac{L_n}{2} |t|^3 \exp \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} L_n |t|^3 \right) < L_n |t|^3 e^{-t^2/2}.$$

Assim, (1.5) segue.

□

Teorema 1.7. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, tais que*

$$EX_j = 0, \quad E|X_j|^3 < \infty \quad (j = 1, \dots, n).$$

Escrevemos

$$\sigma_j^2 = EX_j^2, \quad B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3,$$

$$F_n(x) = P \left(B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j < x \right).$$

Então

$$\sup_x |F_n(x) - \mathcal{N}(x)| \leq M L_n. \quad (1.7)$$

Onde M é uma constante positiva.

Demonstração. As funções $F_n(x)$ e $\mathcal{N}$, satisfazem as condições do Teorema 1.5, e

$$\sup_x |\mathcal{N}'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Colocando $b = 1/\pi$ e $T = 1/4L_n$, temos por (1.4) que

$$\sup_x |F_n(x) - \mathcal{N}(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq 1/4L_n} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt + M_1 L_n.$$

Aqui, $f_n(t)$ é a função característica da função distribuição $F_n(x)$. Usando o Lema 1.6, obtemos (1.7). □

A desigualdade 1.7 é conhecida como Desigualdade de Esseen.

Teorema 1.8. *(Teorema do Limite Central para Soma de Variáveis Aleatórias Independes e Identicamente Distribuídas)*

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tendo a mesma distribuição.

Suponha

$$EX_1 = 0, \quad EX_1^2 = \sigma^2 > 0, \quad E|X_1|^3 < \infty, \quad \rho = \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3}.$$

Então

$$\sup_x \left| P \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j < x \right) - \mathcal{N}(x) \right| \leq M \frac{\rho}{\sqrt{n}}. \quad (1.8)$$

Chamamos a desigualdade (1.8) de Desigualdade de Berry-Esseen.

Teoria Espectral

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados da teoria espectral que serão utilizados posteriormente.

Seja $B(X, Y)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de X em Y . Para qualquer operador $A \in B(X)$, um escalar λ para o qual $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$ é chamado *autovalor* de A .

Qualquer elemento $x \neq 0$ de X tal que $(A - \lambda I)x = 0$ é chamado *autovetor*.

Os pontos λ para os quais $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 0$ e $\text{Im}(A - \lambda I) = X$ compõem o conjunto *resolvente* $\rho(A)$ de A . O *espectro* $\sigma(A)$ de A consiste de todos os escalares que não pertencem a $\rho(A)$.

Note que se $\lambda \in \rho(A)$, então $A - \lambda I$ tem uma inversa em $B(X)$.

Consideremos um operador $A \in B(X)$ e uma função analítica f em Ω , uma vizinhança de $\sigma(A)$. A seguir, vamos definir o operador $f(A)$ e estudar as suas propriedades. Utilizaremos alguns resultados de Análise Complexa.

Lema 2.1. Se $|z| > \limsup \|A^n\|^{1/n}$, então

$$(zI - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} A^{n-1}$$

onde a convergência é na norma de $B(X)$.

Demonstração. Vide [20] página 139.

Seja C um círculo com centro na origem e raio maior que $\|A\|$. Pelo Lema 2.1,

$$\oint_C z^n (zI - A)^{-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \oint_C z^{n-k} dz = 2\pi i A^n,$$

ou

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^n (zI - A)^{-1} dz.$$

Como $(zI - A)^{-1}$ é analítica em $\rho(A)$, temos

Teorema 2.2. *Seja C qualquer curva fechada contendo $\sigma(A)$ em seu interior. Então vale*

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^n (zI - A)^{-1} dz.$$

Seja b qualquer número maior que $\limsup_n \|A^n\|^{1/n}$ e seja $f(z)$ uma função a valores complexos que é analítica em $|z| < b$. Assim,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < b.$$

Temos que os operadores

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

convergem em norma, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A^k\| < \infty.$$

A última sentença segue do fato que se c é qualquer número satisfazendo

$$\limsup_n \|A^n\|^{1/n} < c < b,$$

então

$$\|A^k\|^{1/k} \leq c$$

para k suficientemente grande, e a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| c^k$$

é convergente. Assim, podemos definir $f(A)$ por

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

Pelo Teorema 2.2, temos

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \oint_C z^k (zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k (zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (zI - A)^{-1} dz, \end{aligned}$$

onde C é qualquer círculo sobre a origem com raio maior que $\limsup_n \|A^n\|^{1/n}$ e menor que b .

Agora, suponha que $f(z)$ não se anula para $|z| < b$. Seja $g(z) = 1/f(z)$. Então $g(z)$ é analítica em $|z| < b$, e assim, $g(A)$ está bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)g(z)(zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C (zI - A)^{-1} dz = I. \end{aligned}$$

Como $f(A)$ e $g(A)$ comutam, temos que $f(A)^{-1}$ existe e é igual a $g(A)$. Assim,

$$f(A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{f(z)} (zI - A)^{-1} dz.$$

Em particular, se

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < b,$$

então

$$f(A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k.$$

Agora, suponha que $f(z)$ é analítica em um aberto Ω contendo $\sigma(A)$ mas não é analítica em um disco de raio maior que $\limsup_n \|A^n\|^{1/n}$. Nesse caso, não podemos dizer que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ converge em norma para um operador em $B(X)$. No entanto, podemos ainda definir $f(A)$ da seguinte maneira: Existe um aberto ω tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$ e cuja fronteira $\partial\omega$ consiste de um número finito de curvas fechadas simples que não se interceptam, e tal que $\sigma(A) \subset \omega$. Definimos $f(A)$ por

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\omega} f(z) (zI - A)^{-1} dz.$$

Seja V um espaço de Banach e $\mathcal{D}$ um conjunto de operadores lineares de V com valores em V .

Sejam $A \in \mathcal{D}$ e $z \in \rho(A)$, vamos denotar $R(z, A) = (zI - A)^{-1}$.

Lema 2.3. *O conjunto $\mathcal{G}$ dos elementos de $\mathcal{D}$ que admitem uma inversa em $\mathcal{D}$ é um aberto para a topologia da convergência uniforme dos operadores em $\mathcal{D}$.*

A aplicação

$$\begin{aligned} G : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo para a topologia da convergência uniforme dos operadores em $\mathcal{D}$.

Demonstração. Temos que, em V

$$\|AB\|_V \leq \|A\|_V \|B\|_V.$$

$\mathcal{G}$ não é vazio, pois o operador identidade pertence a $\mathcal{G}$. Vamos mostrar que, se $A \in \mathcal{G}$ então $\mathcal{G}$ contém a esfera

$$S_A = \left\{ B \in \mathcal{D} : \|B - A\|_V < \frac{1}{4} \|A^{-1}\|_V^{-1} \right\}.$$

Se $B \in S_A$, $B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((A - B)A^{-1})^n$. De fato

Note que

$$\|(A - B)A^{-1}\|_V \leq \|A - B\|_V \|A^{-1}\|_V < \frac{1}{4} \|A^{-1}\|_V^{-1} \cdot \|A^{-1}\|_V = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((A - B)A^{-1})^n &= A^{-1} \cdot I \cdot (I - (A - B)A^{-1})^{-1} = A^{-1}(I - I + BA^{-1})^{-1} \\ &= A^{-1}(BA^{-1})^{-1} = B^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|B^{-1} - A^{-1}\|_V &\leq \|A^{-1}\|_V \sum_{n=1}^{\infty} \|((A - B)A^{-1})^n\|_V \\ &\leq \|A^{-1}\|_V \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \|A - B\|_V^n \cdot \|A^{-1}\|_V^n \\ &\leq C \|A - B\|_V \text{ pois } B \in S_A. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} G : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. □

Corolário 2.4. *Se Φ_0 e Φ pertencem a $\mathcal{D}$, se $z \in \rho(\Phi)$ e se*

$$\|\Phi - \Phi_0\|_V < \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_V^{-1}$$

então $z \in \rho(\Phi_0)$ e

$$R(z, \Phi_0) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_0)R(z, \Phi)]^n. \quad (2.1)$$

E, para z e z' , $z \neq z'$, em $\rho(\Phi)$

$$R(z, \Phi)R(z', \Phi) = \frac{1}{z' - z} [R(z, \Phi) - R(z', \Phi)]. \quad (2.2)$$

Demonstração. A igualdade (2.1) segue diretamente do Lema 2.3 tomando

$$A = R(z, \Phi) \quad \text{e} \quad B = R(z, \Phi_0).$$

Para a igualdade (2.2), observe que

$$(zI - \Phi)R(z, \Phi)R(z', \Phi)(z'I - \Phi) = I,$$

e

$$(zI - \Phi)[R(z, \Phi) - R(z', \Phi)](z'I - \Phi) = z'I - \Phi - zI + \Phi = (z' - z)I.$$

Logo,

$$(zI - \Phi)R(z, \Phi)R(z', \Phi)(z'I - \Phi) = \frac{1}{z' - z} (zI - \Phi)[R(z, \Phi) - R(z', \Phi)](z'I - \Phi).$$

Portanto,

$$R(z, \Phi)R(z', \Phi) = \frac{1}{z' - z} [R(z, \Phi) - R(z', \Phi)].$$

□

Proposição 2.5. Se $f(z)$ e $g(z)$ são analíticas em um conjunto aberto Ω contendo $\sigma(A)$ e $h(z) = f(z)g(z)$, então $h(A) = f(A)g(A)$.

Demonstração. Suponha que $h(z) = f(z)g(z)$, onde $f(z)$ e $g(z)$ são analíticas em um aberto $U \supset \sigma(A)$. Sejam ω_1 e ω_2 dois abertos tais que $\sigma(A) \subset \omega_1$, $\overline{\omega_1} \subset \omega_2$, $\overline{\omega_2} \subset U$ e cujas fronteiras consistem de um número finito de curvas de Jordan retificáveis. Então,

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\omega_1} f(z)R(z, A)g(z) dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\omega_1} f(z)R(z, A) \oint_{\partial\omega_2} g(z')R(z', A) dz' dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\omega_1} f(z) \oint_{\partial\omega_2} g(z') \left[\frac{R(z, A) - R(z', A)}{z' - z} \right] dz' dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\omega_1} f(z)R(z, A) \oint_{\partial\omega_2} \frac{g(z')}{z' - z} dz' dz \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\omega_2} g(z')R(z', A) \oint_{\partial\omega_1} \frac{f(z)}{z - z'} dz dz'. \end{aligned}$$

Como, $\partial\omega_1$ está no interior de ω_2 ,

$$\oint_{\partial\omega_2} \frac{g(z')}{z' - z} dz' = 2\pi i g(z)$$

para $z \in \partial\omega_1$.

Por outro lado,

$$\oint_{\partial\omega_1} \frac{f(z)}{z - z'} dz = 0$$

para $z' \in \partial\omega_2$.

Assim,

$$f(A)g(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\omega_1} f(z)g(z)R(z, A) dz = h(A).$$

□

2.1 Projeção Espectral

Vimos que $f(A)$ pode ser definida se $A \in B(X)$ e $f(z)$ é analítica em algum aberto Ω contendo $\sigma(A)$. Note que Ω não precisa ser conexo.

Sejam σ_1 e σ_2 dois subconjuntos disjuntos de $\sigma(A)$ tais que $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ e existem abertos $\Omega_1 \supset \sigma_1$ e $\Omega_2 \supset \sigma_2$ tais que Ω_1 e Ω_2 não se interceptem. Tais conjuntos são chamados *conjuntos espectrais* de A .

Tomemos $f(z) \equiv 1$ em Ω_1 e $f(z) \equiv 0$ em Ω_2 . Seja $P = f(A)$. Desse modo, se ω é um aberto contendo σ_1 tal que $\bar{\omega} \subset \Omega_1$ e tal que $\partial\omega$ consiste de um número finito de curvas fechadas simples, então

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\omega} (zI - A)^{-1} dz.$$

Temos que $P^2 = P$ (Proposição 2.5). Qualquer operador tendo essa propriedade é chamado de uma projeção.

Notações e Definições

Vamos denotar $m(fh) = \int_0^1 fh \, dm$.

Consideremos V o conjunto $\{f \in L^1(m) : v(f) < \infty\}$.

Note que V é um subconjunto das funções contínuas à direita sobre I , tendo uma quantidade enumerável de descontinuidades em I . A todo elemento f de V podemos associar uma medida μ com variação total limitada tal que para todo $x \in I$, $f(x) = \mu([0, x])$.

Definimos então a norma $\|\cdot\|_V$ sobre V por

$$\|f\|_V = v(f) + \|f\|_1.$$

Para todo $f \in V$, e para todos $x, y \in I$, temos

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq v(f),$$

assim,

$$\int_0^1 [|f(x) - f(y)|] dy = |f|(x) - \|f\|_1 \leq v(f).$$

Logo, $\|f\|_\infty - \|f\|_1 \leq v(f)$ e, portanto, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_V$.

Sejam $f, g \in V$, temos que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

e, para uma partição $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de I , temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_i) - (fg)(a_{i+1})| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|f(a_i)| |g(a_i) - g(a_{i+1})| + |g(a_{i+1})| |f(a_i) - f(a_{i+1})|] \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i) - g(a_{i+1})| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|fg\|_V &\leq v(fg) + \|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f) + \|f\|_\infty \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty \|g\|_V + \|g\|_\infty \|f\|_V. \end{aligned}$$

O que implica que

$$\|fg\|_V \leq 2 \|f\|_V \|g\|_V.$$

Transformações Expansoras

Vamos agora definir a classe das transformações expansoras, para as quais mostraremos o Teorema do Limite Central. Primeiramente, vamos definir a partição associada a uma transformação.

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das aplicações de I em I verificando a seguinte condição

- Existe uma partição finita ou enumerável de I : $(I_j)_{j \in J}$ tal que a restrição de T a cada I_j é uma função de classe C^1 e estritamente monótona sobre $\overline{I_j}$.

Observamos que se $T \in \mathcal{D}$, então

- Existe uma partição, entre todas as que verificam a condição anterior, que é a mais grossa. Ela é chamada *partição associada* a T , denotamos por $(I_j)_{j \in J}$.
- Para todo inteiro $k > 0$, T^k também pertence a $\mathcal{D}$, pois T leva I em I . A partição associada a T^k é um refinamento da partição associada a T .

Denominamos $\mathcal{C}$ a classe das aplicações T de I em I que pertencem a $\mathcal{D}$ e tais que

1. A restrição de T a I_j é estritamente monótona e é uma aplicação derivável com derivada lipschitziana sobre $\overline{I_j}$ onde $(I_j)_{j \in J}$ é a partição de I associada a T .
2. Existe um inteiro $n_0 > 0$, tal que $\gamma = \inf_{j \in J_{n_0}} \inf_{x \in I_j} |(T^{n_0})'(x)| > 2$, onde $(I_j)_{j \in J_{n_0}}$ é a partição de I associada a T^{n_0} .
3. $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\overline{I_j})) > 0$.

$$4. \sup_{j \in J_{n_0}} \sup_{x \neq y \in I_j} \left| \frac{(T^{n_0})'(x) - (T^{n_0})'(y)}{x - y} \right| = K < \infty.$$

Exemplo 4.1. Um exemplo de uma transformação em $\mathcal{C}$ são as β -transformations. As β -transformations são definidas por

$$\begin{aligned} T : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \beta x - [\beta x], \end{aligned}$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$.

A partição associada a T é $0 < 1/\beta < \dots < [\beta]/\beta \leq 1$. Sobre cada intervalo $[j/\beta, j+1/\beta]$, com $0 \leq j \leq \beta - 1$ e $[\beta]/\beta, 1]$, T é linear, $\gamma = \beta > 1$, e como a subdivisão é finita, temos que $T \in \mathcal{C}$.

Figura 4.1: 2-transformation e n -transformation.

O Operador de Perron-Frobenius

Seja $T \in \mathcal{C}$, definimos o operador de Perron-Frobenius associado a T ,

$$\Phi_T : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$$

por

$$\int_0^1 \Phi_T f \cdot g \, dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T \, dm$$

onde $f \in L^1(m)$ e $g \in L^\infty(m)$.

As principais propriedades de Φ_T são

- (i) Φ_T é um operador linear contínuo de $L^1(m)$.
- (ii) Φ_T é positivo: $f \geq 0 \Rightarrow \Phi_T f \geq 0$, logo $|\Phi_T f| \leq \Phi_T |f|$ para $f \in V$.
- (iii) Φ_T é uma contração (fraca) de $L^1(m)$.
- (iv) Φ_T preserva integral: $\int_0^1 \Phi_T f \, dm = \int_0^1 f \, dm$.
- (v) $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$.
- (vi) $\Phi_T f = f$ se e somente se T deixa a medida $\mu = fm$ invariante.

As condições impostas sobre a transformação T de $\mathcal{C}$ nos permite escrever explicitamente Φ_T para m -quase todo x de I da seguinte forma

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

onde $\sigma_j : T(I_j) \rightarrow I_j$ é a inversa de T restrita a I_j . A igualdade da definição de Φ_T é dada por mudança de variáveis para toda $f \in L^1(m)$ e para toda $g \in L^\infty(m)$, e utilizando o teorema da convergência monótona

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \cdot g \circ T \, dm &= \sum_{j \in J} \int_{I_j} f \cdot g \circ T \, dm \\ &= \sum_{j \in J} \int_{T^{-1}(I_j)} f(\sigma_j y) g(y) \frac{1}{|T'(\sigma_j y)|} \, dm(y) \\ &= \sum_{j \in J} \int_I f(\sigma_j x) g(x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \, dm(x) \\ &= \int_I \left[\sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \right] g(x) \, dm(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \quad \text{em } m - \text{quase toda parte.}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Phi_T f(x)| \, dm(x) &= \int_0^1 \left| \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \right| \, dm(x) \\ &\leq \int_0^1 \sum_{j \in J} |f(\sigma_j x)| \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \, dm(x) \\ &= \sum_{j \in J} \int_0^1 |f(\sigma_j x)| \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \, dm(x) \\ &= \sum_{j \in J} \int_{I_j} |f|(u) \, dm(u) = \int_0^1 |f|(u) \, dm(u). \end{aligned}$$

Portanto, se $f \in L^1(m)$,

$$\|\Phi_T f\|_1 \leq \|f\|_1.$$

Daí, podemos concluir que Φ_T é um operador limitado. A linearidade segue de

$$\begin{aligned} \Phi_T(c_1 f + c_2 g)(x) &= \sum_{j \in J} \frac{c_1 f(\sigma_j x) + c_2 g(\sigma_j x)}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) = \\ &= \sum_{j \in J} \frac{c_1 f(\sigma_j x)}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) + \sum_{j \in J} \frac{c_2 g(\sigma_j x)}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbb{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \\ &= c_1 \Phi_T f + c_2 \Phi_T g. \end{aligned}$$

E assim, temos demonstrado as propriedades (i) e (iii).

Agora se considerarmos $\Phi_T f = f$, então para todo $g \in L^\infty(m)$ temos

$$\int_0^1 fg \, dm = \int_0^1 fg \circ T \, dm.$$

Em particular, para $g = \mathbb{1}_A$, com $A \in \mathcal{B}$, temos

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Se $\mu = fm$ é invariante por T , para todo $g \in L^\infty(m)$ temos

$$\int_0^1 g \circ T \, d\mu = \int_0^1 g \, d\mu.$$

Isto é,

$$\int_0^1 fg \circ T \, dm = \int_0^1 fg \, dm,$$

e com isso, $\Phi_T f = f$. O que mostra a propriedade (vi).

O Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu

Agora vamos demonstrar o Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu que permite-nos fazer a decomposição espectral e compreender a dinâmica de um operador linear Φ satisfazendo suas hipóteses.

De agora em diante vamos denotar apenas por Φ o operador Φ_T .

Teorema 6.1. *Sejam $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ e $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ dois espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$ verificando*

- (a) *Se $(f_n)_{n \geq 0}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{V}$ que converge em $\mathcal{L}$ para f e se para todo $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \leq C$ então $f \in \mathcal{V}$ e $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C$.*

Seja $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}$ um operador que deixa $\mathcal{V}$ invariante e que é limitado com respeito a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, e verifica as condições

- (b) $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_{\mathcal{L}}, f \in \mathcal{V}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$.
- (c) *Existem $n_0 \geq 0$, $\alpha < 1$ e $\beta < \infty$ tais que*

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

- (d) *Se V é um subconjunto limitado de $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ então $\Phi^{n_0} V$ é relativamente compacto em $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$.*

Então Φ tem um número finito de autovalores de módulo 1, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ e Φ pode ser escrito da seguinte forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \Psi.$$

Onde, para cada $i = 1, \dots, p$, Φ_i é operador linear limitado de $\mathcal{V}$, $\Phi_i(\mathcal{V})$ tem dimensão finita e está contido em $\mathcal{V}$. Ψ é um operador linear limitado de $\mathcal{V}$ cujo raio espectral $\rho(\Psi) < 1$ em $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. E ainda

$$\Psi\Phi_i = \Phi_i\Psi = 0; \Phi_i\Phi_j = 0 \text{ se } i \neq j; \Phi_i^2 = \Phi_i.$$

Podemos então escrever

$$\Phi^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \Phi_i + \Psi^n, \text{ para todo } n > 0.$$

Primeiramente, vamos mostrar que Φ tem um número finito de autovalores de módulo 1 e que os autoespaços associados têm dimensão finita.

Lema 6.2. *Seja $m \geq 1$. Então, $\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + L \|f\|_{\mathcal{L}}$.*

Demonstração. Da hipótese (b), temos que

$$\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H < \infty.$$

Então, para $m \geq 1$, utilizando a hipótese (c), temos

$$\begin{aligned} \|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} &\leq \alpha \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \alpha \|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta H \|f\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Por recorrência, obtemos

$$\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta H (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Como $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\beta H (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \leq \beta H \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{\beta H}{1 - \alpha}.$$

□

Lema 6.3. *O conjunto $\{\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \mid n \geq 1\}$ é uniformemente limitado.*

Demonstração. Do Lema 6.2, se $m \geq 1$, temos

$$\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathcal{V}} \leq (\alpha^m + cL).$$

Como Φ é um operador limitado com respeito a norma $\mathcal{V}$, temos que Φ^n é limitado para $n < n_0$. Então, existe $M > 0$ tal que $\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \leq M < \infty$ para $n < n_0$. Se $n \geq n_0$, $n = mn_0 + r$ onde $0 < r < n_0$ então,

$$\begin{aligned} \|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} &= \|\Phi^{mn_0+r}\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^{mn_0}(\Phi^r)\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \alpha^m(\|\Phi^r\|_{\mathcal{V}}) + L(\|\Phi^r\|_{\mathcal{V}}) \leq M(\alpha^m + L). \end{aligned}$$

Daí, segue que $\{\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \mid n \geq 1\}$ é uniformemente limitado.

□

Vamos denotar, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{V}(\lambda) = \{f \in \mathcal{V} \mid \Phi f = \lambda f\}$$

o autoespaço associado à λ . Se $\mathcal{V}(\lambda) \neq \{0\}$ então λ é um autovalor de Φ .

Lema 6.4. *Se $|\lambda| = 1$ então $\mathcal{V}(\lambda)$ tem dimensão finita.*

Demonstração. Para isso, mostraremos que $X = \mathcal{V}(\lambda) \cap \{f \in \mathcal{V} \mid \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}$ é compacto.

Seja $f \in X$. Temos

$$\|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1 \text{ e } \Phi f = \lambda f.$$

Então,

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|\lambda^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta.$$

Como $0 < \alpha < 1$,

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Então, X é um subconjunto limitado de $\mathcal{V}$. Pela hipótese (d), ele é transformado em um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{L}$ por Φ^{n_0} .

Note também que X é fechado em $\mathcal{L}$. De fato, considere uma seqüência $(g_n)_n$ em X tal que $g_n \rightarrow g$ em $\mathcal{L}$. Então $\|g\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ e, como $g_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g_n\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

assim, pela hipótese (a), segue que $g \in \mathcal{V}$ e

$$\|g\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Agora, pela hipótese (b), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|\Phi g - \lambda g\|_{\mathcal{L}} &= \|\Phi g - \Phi g_i + \Phi g_i - \lambda g_i + \lambda g\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi(g - g_i)\|_{\mathcal{L}} + |\lambda| \|g_i - g\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq C \|g_i - g\|_{\mathcal{L}} + |\lambda| \|g_i - g\|_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Logo, como X é invariante por Φ^{n_0} , podemos concluir que é um subconjunto compacto de $\mathcal{L}$. E, portanto, $\mathcal{V}(\lambda)$ tem dimensão finita. □

Lema 6.5. *Seja X um espaço vetorial normado e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado de X . Então, dado $0 < \epsilon < 1$, existe x_ϵ , $\|x_\epsilon\| = 1$ tal que $\inf_{m \in M} \|x_\epsilon - m\| \geq 1 - \epsilon$.*

Demonstração. Seja $y \in X \setminus M$ e consideremos $\alpha = \inf_{m \in M} \|y - m\|$.

Como M é fechado e $y \notin M$, $\alpha > 0$.

Vamos escolher $m_\epsilon \in M$ tal que

$$\alpha \leq \|y - m_\epsilon\| \leq \alpha \left(1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\right)$$

e vamos escrever

$$x_\epsilon = \frac{y - m_\epsilon}{\|y - m_\epsilon\|}.$$

É claro que $\|x_\epsilon\| = 1$, e para todo $m \in M$ temos

$$\begin{aligned}\|x_\epsilon - m\| &= \left\| \frac{y - m_\epsilon}{\|y - m_\epsilon\|} - m \right\| = \frac{1}{\|y - m_\epsilon\|} \|y - m_\epsilon - m \|y - m_\epsilon\| \| \\ &= \frac{1}{\|y - m_\epsilon\|} \|y - (m_\epsilon + m \|y - m_\epsilon\|)\| \geq \frac{1}{\|y - m_\epsilon\|} \alpha \geq \frac{\alpha}{\alpha \left(1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1 - \epsilon + \epsilon}{1 - \epsilon}} = 1 - \epsilon.\end{aligned}$$

Mostramos então que $\|x_\epsilon - m\| \geq 1 - \epsilon$ para todo $m \in M$. Portanto,

$$\inf_{m \in M} \|x_\epsilon - m\| \geq 1 - \epsilon.$$

□

Lema 6.6. *Φ tem um número finito de autovalores de módulo 1.*

Demonstração. Caso contrário, existiria uma seqüência infinita de autovalores distintos de módulo 1: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

Para cada n vamos escolher f_n em $\mathcal{V}(\lambda_n)$, $f_n \neq 0$. As $(f_n)_{n \geq 0}$ são linearmente independentes.

Vamos denotar $X(n) = \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\}$. $X(n)$ está propriamente contido em $X(n+1)$.

Pelo Lema 6.5, temos que existe uma seqüência $g_1, \dots, g_n, \dots$ tal que $\|g_n\|_{\mathcal{L}} = 1$ e $\|g_n - f\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2}$ onde $f \in X(n-1)$ e $g_n \in X(n)$.

Se $f \in X(n)$, ela é escrita como

$$f = \sum_{i=1}^n a_i f_i,$$

então,

$$\Phi^m(f) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi^m(f_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m a_i f_i$$

assim, $\Phi^m(f) \in X(n)$.

Se $f \in X(m)$ então, para todo inteiro $p > 0$,

$$\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p(f) - f \in X(m-1).$$

De fato

$$\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p f - f = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_m^p} \lambda_i^p a_i f_i - \sum_{i=1}^m a_i f_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m} \right)^p - 1 \right) f_i.$$

Para $n \geq n_0$, temos

$$\left\| \frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j \right\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L \|g_j\|_{\mathcal{L}} = \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L.$$

Como $0 < \alpha < 1$, existe um inteiro $n(j) > 0$ tal que para todo $n \geq n(j)$ e $n \geq n_0$,

$$\alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} \leq 1.$$

Temos que o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j \mid j \in \mathbb{N}^*, n \geq \sup\{n(j), n_0\} \right\}$$

é subconjunto limitado de $\mathcal{V}$. Logo, pela hipótese (d), a sua imagem por $(1/\lambda^{n_0})\Phi^{n_0}$, é um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{L}$. Assim, existem duas subsequências j_s e n_s crescentes de j e n tais que a sequência

$$\left(\frac{1}{\lambda^{n_0} \lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s+n_0} g_{j_s} \right)_{s \geq 0}$$

converge em $\mathcal{L}$. Mas

$$D = \left\| \frac{1}{\lambda_{j_s}^{(n_s+n_0)}} \Phi^{(n_s+n_0)} g_{j_s} - \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{(n_{s+1}+n_0)}} \Phi^{(n_{s+1}+n_0)} g_{j_{s+1}} \right\|_{\mathcal{L}}$$

$$D = \left\| g_{j_{s+1}} + \left(\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{(n_{s+1}+n_0)}} \Phi^{(n_{s+1}+n_0)} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}} - \frac{1}{\lambda_{j_s}^{(n_s+n_0)}} \Phi^{(n_s+n_0)} g_{j_s} \right) \right\|_{\mathcal{L}}.$$

Como

$$\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{(n_{s+1}+n_0)}} \Phi^{(n_{s+1}+n_0)} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}}$$

está em $X(j_{s+1} - 1)$ e como

$$\frac{1}{\lambda_{j_s}^{(n_s+n_0)}} \Phi^{(n_s+n_0)} g_{j_s}$$

está em $X(j_s)$ que está contido em $X(j_{s+1} - 1)$, temos que $D \geq 1/2$ pela hipótese sobre a sequência $(g_n)_{n \geq 0}$.

Isso contradiz o fato de que

$$\frac{1}{\lambda_{j_s}^{(n_s+n_0)}} \Phi^{(n_s+n_0)} g_{j_s}$$

converge em $\mathcal{L}$ e, portanto, existe um número finito de autovalores de módulo 1.

□

Agora vamos construir os operadores Φ_λ .

Lema 6.7. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com módulo 1, e para toda função $f \in \mathcal{V}$ existe $\bar{f}$ em $\mathcal{V}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f - \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Demonstração. Seja

$$\overline{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{L} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{\mathcal{L}} = 0 \text{ onde } (g_n)_{n \geq 0} \text{ é uma sequência em } \mathcal{V}\}.$$

$\overline{\mathcal{V}}$ é um espaço de Banach quando munido da norma $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{V}}}$ que é a restrição à $\overline{\mathcal{V}}$ da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.

O operador Φ preserva o espaço $\mathcal{V}$ e existe $H > 0$ tal que para todo $m \geq 1$ $\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H$.

Temos que existe um prolongamento $\hat{\Phi}$ de Φ à $\overline{\mathcal{V}}$ tal que para todo $f \in \mathcal{V}$ e para todo inteiro $m > 0$

$$\hat{\Phi}^m f = \Phi^m f \text{ e } \|\hat{\Phi}^m\|_{\overline{\mathcal{V}}} \leq H.$$

O Lema 6.3 diz que o conjunto $\{\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}} \mid m \geq 1\}$ é uniformemente limitado por

$$M = \sup_{1 \leq m < \infty} \|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}.$$

Para $f \in \mathcal{V}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f \right\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{n-1}{n} M \|f\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{n} \|f\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \begin{cases} \|f\|_{\mathcal{V}}, & \text{se } M \leq 1 \\ M \|f\|_{\mathcal{V}}, & \text{se } M > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

O conjunto

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

é um subconjunto limitado de $\mathcal{V}$ e, pela hipótese (d) ele é transformado por Φ^{n_0} em um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{L}$, dado por

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \mid n > 0 \right\}.$$

Existe então uma subsequência convergente em $\mathcal{L}$, e portanto em $\bar{\mathcal{V}}$. Seja $(n_p)_p$ uma sequência estritamente crescente de inteiros e seja $\bar{f} \in \bar{\mathcal{V}}$ tal que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f - \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Vamos mostrar que $\bar{f}$ está em $\mathcal{V}$. Observe que

$$\left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}.$$

Logo, $\bar{f}$ é limite em $\mathcal{L}$ de uma sequência de pontos de $\mathcal{V}$ que são limitados por $M \|f\|_{\mathcal{V}}$ em $\mathcal{V}$. A hipótese (a) permite concluir que $\bar{f} \in \mathcal{V}$ e que $\|\bar{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$.

Observe também que

$$\Phi \bar{f} = \lambda \bar{f}.$$

De fato

$$\|\Phi f_{n_p} - \lambda f_{n_p}\|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{n_p} \left(\sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{\Phi^{k+1} f}{\lambda^k} - \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{\Phi^k f}{\lambda^{k-1}} \right) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{2H}{n_p} \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Vamos mostrar agora que a sequência $(f_n)_n$ converge em $\bar{\mathcal{V}}$ para $\bar{f}$.

Temos que

$$f = \bar{f} + (f - \bar{f}).$$

Então

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k [\bar{f} + (f - \bar{f})] = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} (\lambda^k \bar{f} + \Phi^k (f - \bar{f})) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \bar{f} + \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k (f - \bar{f}) \right) = \bar{f} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k (f - \bar{f}). \end{aligned}$$

Basta então mostrar que a seqüência

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(f - \bar{f})$$

converge em $\overline{\mathcal{V}}$ para 0.

Observe que

$$\left[I - \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k \right] f = \left(I - \frac{\Phi}{\lambda} \right) \left[I + \frac{\Phi}{\lambda} + \dots + \frac{\Phi^{n_0-1}}{\lambda^{n_0-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{\Phi^{n_0+k-1}}{\lambda^{n_0+k-1}} \right] f.$$

Logo,

$$\left[I - \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k \right] f \rightarrow f - \bar{f}$$

em $\overline{\mathcal{V}}$. E, deduzimos que $f - \bar{f}$ está no fecho de $\text{Im}(I - \Phi/\lambda)$ em $\overline{\mathcal{V}}$.

É suficiente mostrar que para todo g desse conjunto, a seqüência

$$g_n = \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g)$$

converge para 0.

Se $g \in \text{Im}(I - \Phi/\lambda)$, existe $z \in \mathcal{V}$ tal que $g = \text{Im}(I - \Phi/\lambda)z$. Então

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{n} \left\| \frac{1}{\lambda^{n_0}} \Phi^{n_0} z - \frac{1}{\lambda^{n_0+n-1}} \Phi^{n_0+n-1} z \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{2H}{n} \|z\|_{\mathcal{L}}.$$

Agora, se $g \in \overline{\text{Im}(I - \Phi/\lambda)}$, existe $g' = \text{Im}(I - \Phi/\lambda)z$, $z \in \mathcal{V}$ tal que

$$\|g - g'\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{\Phi^k}{\lambda^k} (g - g') + \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{\Phi^k}{\lambda^k} (g') \right) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2H}{n} \|z\|_{\mathcal{L}}.$$

Portanto, a seqüência tende a zero. □

Podemos então supor para todo $f \in \mathcal{V}$, $\bar{f} = \Phi_\lambda f$, onde Φ_λ é um operador linear definido em $\mathcal{V}$, com $\Phi_\lambda(\mathcal{V})$ contido em $\mathcal{V}$. A desigualdade $\|\bar{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$ nos diz que

$$\|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{V}} \leq M \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1.$$

Temos também que para todo n

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{\Phi^k f}{\lambda^k} \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{L}} \leq H \|f\|_{\mathcal{L}};$$

portanto

$$\|\Phi_\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq H \|f\|_{\mathcal{L}}, \text{ e ent\~ao, } \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{L}} \leq H.$$

Lema 6.8. *A imagem de $\mathcal{V}$ por Φ_λ é $\mathcal{V}(\lambda)$, isto é, $\Phi_\lambda(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\lambda)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{V}(\lambda)$, temos que $\Phi^k f = \lambda^k f$, $k \geq 1$. Ent\~ao

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} f = f \Rightarrow \Phi_\lambda f = f.$$

Assim, $\mathcal{V}_\lambda \subset \Phi_\lambda(\mathcal{V})$.

Seja $f \in \Phi_\lambda(\mathcal{V})$. Ent\~ao, existe $g \in \mathcal{V}$ tal que $f = \Phi_\lambda g$ para todo $n > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi \left[\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) \right] &= \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^{k+1}(g) = \frac{(n+1)}{(n+1)} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{\lambda}{\lambda^k \lambda} \Phi^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{\lambda}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \Phi^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{\lambda}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n+n_0} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) - \frac{1}{n} \frac{1}{\lambda^{n_0-1}} \Phi^{n_0} g. \end{aligned}$$

Passando ao limite em $\mathcal{L}$, obtemos que $\Phi f = \lambda f$.

□

Lema 6.9. *Seja λ um autovalor de Φ tal que $|\lambda| = 1$. Ent\~ao $\Phi_\lambda^2 = \Phi_\lambda$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{V}$, ent\~ao $\Phi_\lambda f \in \mathcal{V}(\lambda)$. Observe que para todo $g \in \mathcal{V}(\lambda)$, temos $\Phi_\lambda g = g$. Assim,

$$\Phi_\lambda^2 f = \Phi_\lambda(\Phi_\lambda f) = \Phi_\lambda f.$$

□

Lema 6.10. *Se μ e λ s\~ao autovalores unit\~arios distintos, ent\~ao $\Phi_\mu \Phi_\lambda = \Phi_\lambda \Phi_\mu = 0$.*

Demonstração. Se $f \in \mathcal{V}$, ent\~ao $\Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\mu)$ e $\Phi_\lambda \Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\lambda)$.

Da mesma forma, se $f \in \mathcal{V}$, ent\~ao $\Phi_\lambda f \in \mathcal{V}(\lambda)$ e $\Phi_\mu \Phi_\lambda f \in \mathcal{V}(\mu)$.

Temos que

$$\Phi_\mu f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\mu^k} \Phi^k f.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\Phi_\mu f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(\Phi_\mu f) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=m_0}^{m+m_0-1} \frac{1}{\mu^j} \Phi^j f \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{m} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \sum_{j=m_0}^{m+m_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{\mu^j} \Phi^k(\Phi^j f) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{m} \sum_{j=m_0}^{m+m_0-1} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\mu^j} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^j(\Phi^k f) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=m_0}^{m+m_0-1} \frac{1}{\mu^j} \Phi^j \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\mu \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right) \\
&= \Phi_\mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right) = \Phi_\mu(\Phi_\lambda f).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_\lambda \Phi_\mu = \Phi_\mu \Phi_\lambda$. E assim, $\Phi_\lambda \Phi_\mu = \Phi_\mu \Phi_\lambda \in \mathcal{V}(\lambda) \cap \mathcal{V}(\mu) = \{0\}$.

□

Lema 6.11. *Podemos decompor $\mathcal{V}$ como*

$$\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \cap_{i=1}^p \text{Ker}(\Phi_i).$$

Demonstração. Vamos definir, para todo $f \in \mathcal{V}$

$$\tilde{\psi}f = f - \Phi_1 f - \Phi_2 f \cdots - \Phi_p f.$$

Note que, para todo $f \in \mathcal{V}$, $\tilde{\psi}f \in \text{Ker} \Phi_i$ para todo $i = 1, \dots, p$, pois

$$\Phi_i(\tilde{\psi}f) = \Phi_i f - \Phi_i \Phi_1 f - \cdots - \Phi_i \Phi_i f - \cdots - \Phi_i \Phi_p f = \Phi_i f - \Phi_i f = 0.$$

Portanto, $\text{Im } \tilde{\psi} \subset \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$.

Pelo Teorema do Kernel e da Imagem, podemos decompor $\mathcal{V}$ da seguinte forma

$$\mathcal{V} = \text{Ker } \tilde{\psi} \oplus \text{Im } \tilde{\psi}.$$

Agora, vamos mostrar que $\oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) = \text{Ker } \tilde{\psi}$.

Seja $f \in \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i)$. Então,

$$f = f_1 + \cdots + f_p$$

com $f_i \in \mathcal{V}(\lambda_i)$, para todo $i = 1, \dots, p$. Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}f &= \tilde{\psi}f_1 + \dots + \tilde{\psi}f_p = (f_1 - \Phi_1 f_1 - \dots - \Phi_p f_1) + \dots + (f_p - \Phi_1 f_p - \dots - \Phi_p f_p) \\ &= (f_1 - f_1) + \dots + (f_p - f_p) = 0.\end{aligned}$$

Portanto $\oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \subset \text{Ker } \tilde{\psi}$.

Seja $f \in \text{Ker } \tilde{\psi}$. Então,

$$\tilde{\psi}f = 0 \Rightarrow f - \Phi_1 f - \dots - \Phi_p f = 0 \Rightarrow f = \Phi_1 f + \dots + \Phi_p f \Rightarrow f \in \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i).$$

Portanto, $\oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \supset \text{Ker } \tilde{\psi}$.

Logo, $\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \text{Im } \tilde{\psi}$.

Podemos concluir também que $\cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i = \text{Im } \tilde{\psi}$.

Que $\text{Im } \tilde{\psi} \subset \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$ mostramos acima. Agora, se $f \in \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$ e $f \neq 0$, então $\Phi_i f = 0$ para todo $i = 1, \dots, p$. Logo, $f \notin \mathcal{V}(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \dots, p$. Portanto, $f \in \text{Im } \tilde{\psi}$, e $\cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i = \text{Im } \tilde{\psi}$.

Assim,

$$\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \cap_{i=1}^p \text{Ker } (\Phi_i).$$

□

Para completar a prova do Teorema 6.1 resta mostrar que Φ pode ser escrito da seguinte forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \Psi.$$

Onde, Ψ é um operador linear limitado de $\mathcal{V}$ cujo raio espectral $\rho(\Psi) < 1$ em $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. E que

$$\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0.$$

Vamos definir, para todo $f \in \mathcal{V}$

$$\Psi f = \Phi(\tilde{\psi}f) = \Phi(f - \Phi_1 f - \Phi_2 f \dots - \Phi_p f) = \Phi f - \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i f,$$

e $\text{Im } \Psi = \mathcal{W}$.

Temos que $\mathcal{W} = \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$. Pois, para todo $i = 1, \dots, p$,

$$\Phi_i(\Psi f) = \Phi_i(\Phi f) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \Phi_i(\Phi_j f) = \lambda_i \Phi_i f - \lambda_i \Phi_i f = 0.$$

Daí $\mathcal{W} \subset \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$.

E, se $f \in \cap_{i=1}^p \text{Ker } \Phi_i$, pelo Lema 6.11, $f \in \text{Im } \tilde{\psi}$. Como $\mathcal{W} = \text{Im } (\Phi \tilde{\psi}) = \text{Im } \tilde{\psi}$ segue que $f \in \mathcal{W}$.

Segue então que

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \Psi.$$

E que

$$\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0.$$

Temos também que Ψ é um operador linear limitado de $\mathcal{V}$ e de $\mathcal{L}$, pois

$$\|\Psi^m\|_{\mathcal{L}} = \|\Phi^m - \lambda_1^m \Phi_1 - \cdots - \lambda_p^m \Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} + \|\Phi_1\|_{\mathcal{L}} + \cdots + \|\Phi_p\|_{\mathcal{L}}.$$

Logo, $\|\Psi^m\|_{\mathcal{L}} \leq (p+1)H$.

Da mesma forma, $\|\Psi^m\|_{\mathcal{V}} \leq (p+1)M$.

Observe que se λ é auto valor de Ψ , então λ é autovalor de Φ também.

De fato seja $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, p$ tal que λ é autovalor de Ψ . Então existe $f \in \mathcal{V}$ tal que $\Psi(f) = \lambda f$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f \in \mathcal{W}$. Assim,

$$\Psi(f) = \Phi f - \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i(f) \Rightarrow \lambda f = \Phi f.$$

Assim, Ψ é um operador linear limitado de $\mathcal{V}$ com raio espectral $\rho(\Psi) < 1$ em $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$.

E isso completa a prova do Teorema 6.1.

Teorema 6.12. (*Teorema da Convergência de Helly*) *Seja f_n uma seqüência de funções de variação limitada em $[a, b]$, convergindo para uma função f em todo ponto de $[a, b]$. Suponha que a seqüência de variações $(v(f_n))$ seja limitada, isto é,*

$$v(f_n) \leq C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

para alguma constante $C > 0$. Então f é também de variação limitada em $[a, b]$.

Demonstração. Vide [15] página 370.

Teorema 6.13. (*Princípio da seleção de Helly*) *Seja $\mathcal{H}$ uma família de funções definidas em um intervalo $[a, b]$ e satisfazendo as condições*

$$v(f) \leq C, \quad \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq M$$

para algum C e M . Então $\mathcal{H}$ possui uma seqüência que converge para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Vide [15] página 372.

Proposição 6.14. *Se $T \in \mathcal{C}$, o operador de Perron-Frobenius associado a T , Φ , satisfaz as hipóteses (a), (b), (c), e (d) do Teorema 6.1.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{L}$ o espaço $L^1(m)$ munido da norma $\|\cdot\|_1$, e $\mathcal{V}$ o espaço das funções de variação limitada V munido com a norma

$$\|f\|_V = v(f) + \|f\|_1.$$

(a) Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de elementos de V . Como

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_V,$$

segue que,

$$\|f_n\|_\infty \leq C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 6.13, temos que existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função f tal que $f_{n_k} \rightarrow f$, quando $k \rightarrow \infty$, pontualmente.

Pelo Teorema 6.12, podemos concluir que $f \in V$.

Observe que $f_{n_k} \xrightarrow{k} f$ em L^1 . De fato, uma vez que

$$|f_{n_k} - f| \leq |f_{n_k}| + |f| \leq 2C,$$

temos, do Teorema da Convergência Dominada que,

$$\int_0^1 |f_{n_k} - f| dm \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Mostremos agora que, como $f_{n_k} \xrightarrow{k} f$ pontualmente,

$$v(f) \leq \liminf v(f_{n_k}).$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$ natural, existe uma partição $\mathcal{P}_j = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$ tal que

$$v(f) \leq \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \frac{1}{j}.$$

Como $f_{n_k} \rightarrow f$ pontualmente, existe n_{k_j} tal que se $n_k \geq n_{k_j}$

$$v(f) \leq \sum_{i=1}^{m-1} |f_{n_k}(x_{i+1}) - f_{n_k}(x_i)| + \frac{2}{j} \leq v(f_{n_k}) + \frac{2}{j}$$

para n_k suficientemente grande.

Portanto

$$v(f) \leq \liminf v(f_{n_k}).$$

E assim,

$$\|f\|_V \leq C.$$

(b) Como Φ é uma contração de $L^1(m)$, para $f \in V$ $\|\Phi f\|_1 \leq \|f\|_1$. Assim,

$$\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_1, f \in V, \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1 < \infty.$$

(c) Consideremos um inteiro $n_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$|(T^{n_0})'(x)| = \gamma > 2.$$

Vamos considerar então a transformação T^{n_0} . O operador de Perron-Frobenius associado a T^{n_0} , Φ^{n_0} , é escrito da seguinte forma

$$\Phi^{n_0} f(x) = \sum_{j \in J_{n_0}} f(\sigma_j(x)) \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j(x))|} \mathbb{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}(x),$$

onde $(I_j)_{j \in J_{n_0}}$ é a partição associada a T^{n_0} , e σ_j é o ramo inverso de T restrito a I_j .

Seja $f \in V$ fixado. Vamos calcular a variação de $\Phi^{n_0} f$.

$$\begin{aligned} v(\Phi^{n_0} f) &= v \left[\sum_{j \in J_{n_0}} \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \cdot f \circ \sigma_j \cdot \mathbb{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right] \\ &\leq \sum_{j \in J_{n_0}} v \left[\frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \cdot f \circ \sigma_j \cdot \mathbb{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right]. \end{aligned}$$

Vamos chamar $T^{n_0}(\bar{I}_j) = [a_j, b_j]$. Como,

$$\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j$$

é uma função de variação limitada sobre I , temos que

$$\begin{aligned} v \left[\frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \cdot f \circ \sigma_j \cdot \mathbb{1}_{[a_j, b_j]} \right] &\leq v_{[a_j, b_j]} \left[\frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \cdot f \circ \sigma_j \right] \\ &\quad + \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(a_j)|} \cdot f(\sigma_j(a_j)) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(b_j)|} \cdot f(\sigma_j(b_j)) \right|, \end{aligned}$$

onde $v_{[a_j, b_j]}(g)$ corresponde a variação da função g sobre o intervalo $[a_j, b_j]$. Note que,

$$|g(a)| \leq \inf_{[a, b]} |g(x)| + v_{[a, b]}(g).$$

Portanto,

$$|g(a)| + |g(b)| \leq 2 \inf_{[a, b]} |g(x)| + v_{[a, b]}(g).$$

Temos também que

$$\inf_{[a, b]} |g| = \frac{1}{|b - a|} \int_{[a, b]} \inf g \, dm \leq \frac{1}{|b - a|} \int_{[a, b]} |g| \, dm.$$

Logo,

$$|g(a)| + |g(b)| \leq \frac{2}{|b-a|} \int_{[a,b]} |g| dm + v_{[a,b]}(g).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(a_j)|} \cdot f(\sigma_j(a_j)) \right| + \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(b_j)|} \cdot f(\sigma_j(b_j)) \right| \\ & \leq v \left(\frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j|} \cdot f \circ \sigma_j \right) + \frac{2}{|b_j - a_j|} \int_{[a_j, b_j]} |\sigma_j'(x)| |f(\sigma_j(x))| dm(x) \\ & \quad + \frac{2}{|b_j - a_j|} \int_{[a_j, b_j]} |f(u)| dm(u), \end{aligned}$$

fazendo mudança de variáveis.

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{n_0}} v \left[\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \cdot \mathbb{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right] & \leq \sum_{j \in J_{n_0}} 2v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \right) + \frac{2}{|b_j - a_j|} \int_{I_j} |f| dm \\ & \leq \sum_{j \in J_{n_0}} 2v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \sigma_j \right) + \frac{2}{\delta} \int_{[0,1]} |f| dm \\ & = \sum_{j \in J_{n_0}} 2v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Vamos fixar $j \in J_{n_0}$ e vamos considerar $\mathcal{P}_j = \{\theta_i\}_{i=0}^k$ partição de $[a_j, b_j]$ onde $a_j = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_l < \dots < \theta_k = b_j$.

$$v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \right) = \sup_{\mathcal{P}_j} \sum_{l=0}^k \left| \left(\frac{f}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \right) (\theta_l) - \left(\frac{f}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \right) (\theta_{l-1}) \right|.$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^k \left| \left(\frac{f}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \right) (\theta_l) - \left(\frac{f}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \right) (\theta_{l-1}) \right| \\ & \leq \sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)} \cdot f(\sigma_j(\theta_l)) - \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1})} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right| \\ & \quad + \sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)|} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) - \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1})} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right|. \end{aligned}$$

Como

$$\inf_x (T^{n_0})'(x) = \gamma > 2,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)} \cdot f(\sigma_j(\theta_l)) - \frac{1}{|(T^{n_0})'| \circ \sigma_j(\theta_l)} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right| \\
&= \sum_{l=0}^k \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)|} |f(\sigma_j(\theta_l)) - f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| \\
&\leq \frac{1}{\gamma} \sum_{l=0}^k |f(\sigma_j(\theta_l)) - f(\sigma_j(\theta_{l-1}))|.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as partições de $[a_j, b_j]$,

$$\sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)} \cdot f(\sigma_j(\theta_l)) - \frac{1}{|(T^{n_0})'| \circ \sigma_j(\theta_l)} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right| \leq \frac{1}{\gamma} v_{I_j}(f).$$

Também,

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)|} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) - \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1})} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right| \\
&\leq \sum_{l=0}^k |f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| \left| \frac{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1}) - (T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1})(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)} \right| \\
&\leq \sum_{l=0}^k |f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| \frac{K}{\gamma^2} |\sigma_j(\theta_{l-1}) - \sigma_j(\theta_l)| \\
&\leq \frac{K}{\gamma^2} \sum_{l=0}^k |f(\sigma_j(\theta_{l-1}))| |\sigma_j(\theta_{l-1}) - \sigma_j(\theta_l)|.
\end{aligned}$$

Passando o limite fazendo $\mathcal{P} \rightarrow 0$ e tomando o supremo sobre todas as partições de $[a_j, b_j]$,

$$\begin{aligned}
& \sup_{\mathcal{P}} \sum_{l=0}^k \left| \frac{1}{|(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_l)|} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) - \frac{1}{(T^{n_0})' \circ \sigma_j(\theta_{l-1})} \cdot f(\sigma_j(\theta_{l-1})) \right| \\
&\leq \frac{K}{\gamma^2} \int_{I_j} |f| dm.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
v(\Phi^{n_0} f) &\leq \sum_{j \in J_{n_0}} 2v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1 \\
&\leq \sum_{j \in J_{n_0}} 2 \left(\frac{1}{\gamma} v_{I_j}(f) + \frac{K}{\gamma^2} \int_{I_j} |f| \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1 \\
&\leq \frac{2}{\gamma} v_{[0,1]}(f) + \frac{2K}{\gamma^2} \|f\|_1 + \frac{2}{\delta} \|f\|_1 \\
&= \frac{2}{\gamma} v_{[0,1]}(f) + \frac{2}{\gamma} \|f\|_1 + \max \left\{ 0, \left(\frac{2}{\gamma^2} + \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\gamma} \right) \right\} \|f\|_1 \\
&= \frac{2}{\gamma} \|f\|_V + C \|f\|_1.
\end{aligned}$$

(d) Seja B um subconjunto limitado de $(V, \|\cdot\|_V)$. Mostremos que $\Phi^{n_0}B$ é relativamente compacto em $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$.

Observe que, para toda $f \in B$,

$$\|\Phi^{n_0}f\|_V \leq \alpha \|f\|_V + \beta \|f\|_1 \leq (\alpha + \beta) \|f\|_V \leq K. \quad (6.1)$$

Seja (g_n) uma seqüência em $\Phi^{n_0}B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in B$ tal que

$$\Phi^{n_0}f_n = g_n.$$

Por (6.1),

$$\|\Phi^{n_0}f_n\|_V = v(\Phi^{n_0}f_n) + \|\Phi^{n_0}f_n\|_1 \leq K$$

e

$$\|\Phi^{n_0}f_n\|_\infty \leq \|\Phi^{n_0}f_n\|_V$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$v(\Phi^{n_0}f_n) \leq C \text{ e } \|\Phi^{n_0}f_n\|_\infty \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 6.13, concluímos que existem subsequência $(\Phi^{n_0}f_{n_k})$ e uma função $\Phi^{n_0}f$ tal que

$$\Phi^{n_0}f_{n_k} \rightarrow \Phi^{n_0}f$$

pontualmente.

Como,

$$|\Phi^{n_0}f_{n_k} - \Phi^{n_0}f| \leq |\Phi^{n_0}f_{n_k}| + |\Phi^{n_0}f| \leq 2K,$$

pelos Teorema da Convergência Dominada, $\Phi^{n_0}f_{n_k} \rightarrow \Phi^{n_0}f$ em L^1 .

□

6.1 Conseqüências

1. Podemos aplicar o Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu ao operador de Perron-Frobenius Φ e concluir que Φ possui um autovalor $\lambda = 1$.

Vamos definir $h = \Phi_1(1)$. Como a função 1 é um elemento de V , pelo Lema 6.7 temos que $h \in V$. Resta então mostrar que h não é nula.

Temos que

$$\int_0^1 h \, dm = 1.$$

De fato, h é definida como o limite em V das funções

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1).$$

A propriedade (iv) dos operadores de Perron-Frobenius nos diz que

$$\int_0^1 h_n dm = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 \Phi^k(1) dm = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 1 dm = 1.$$

Como $h \in V$, temos que $h \in L^1(m)$. E, como

$$\int_0^1 h dm = 1,$$

temos que h é não nula.

Logo, 1 é autovalor de Φ e uma autofunção associada é h .

Uma transformação $T \in \mathcal{C}$ é dita *markoviana* se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Se a partição associada a T é finita, então, para todo $j \in J$, existe $K_j \subset J$ tal que $T(\bar{I}_j) = \bigcup_{k \in K_j} \bar{I}_k$ e existe um inteiro $p > 0$ tal que para todo $j \in J$, $T^p(\bar{I}_j) = I$.
- (ii) Se a partição associada a T for infinita, então, para todo $j \in J$, $T(\bar{I}_j) = I$.

Teorema 6.15. *Se $T \in \mathcal{C}$ é markoviana, então T admite uma medida invariante hm equivalente a medida de Lebesgue e ergódica. A densidade h é contínua por partes e suas descontinuidades são unicamente os pontos de separação da partição, e existe $D > 0$ tal que*

$$\frac{1}{D} \leq h(x) \leq D.$$

Observação: Se para cada subintervalo I_j , $j \in J$, da partição associada a T tivermos $T(I_j) = I$, então a densidade h é contínua.

Não apresentaremos a demonstração deste Teorema, ver [2] e [17].

2. Na seqüência, vamos supor que 1 é um autovalor simples de Φ . E então teremos que o sistema $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ é ergódico. De fato, suponha que o sistema não seja ergódico, ou seja, que exista um conjunto mensurável A invariante, isto é, $T^{-1}(A) = A$, e $0 < hm(A) < 1$. Então,

$$\mu_1 = h \cdot \mathbb{1}_A \cdot m \text{ e } \mu_2 = h \cdot \mathbb{1}_{A^c} \cdot m,$$

definem duas medidas invariantes absolutamente contínuas onde as densidades

$$h_1 = h \cdot \mathbb{1}_A \text{ e } h_2 = h \cdot \mathbb{1}_{A^c}$$

são tais que

$$\Phi(h_1) = h_1 \text{ e } \Phi(h_2) = h_2,$$

pois A é invariante.

Podemos então definir duas probabilidades invariantes absolutamente contínuas,

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{h \cdot \mathbb{1}_A \cdot m}{hm(A)} \text{ e } \tilde{\mu}_2 = \frac{h \cdot \mathbb{1}_{A^c} \cdot m}{hm(A^c)},$$

o que contradiz a hipótese do autovalor 1 ser simples.

Observação: Dizemos que uma transformação T é *topologicamente mixing* se existe $I^* \subset I$ tal que $T(I^*) = I^*$ e para todo ponto $x \in I$ existe n tal que $T^n(x) \in I^*$, e se para cada intervalo $J \subset I^*$ existe $n \geq 1$ tal que $f^n(J) = I^*$. Pode-se mostrar que se T é topologicamente mixing, então existe uma única probabilidade invariante absolutamente contínua que é ergódica. Ver Corolário 3.6 de [21]. Com isso, temos que o autovalor 1 de Φ é simples. De fato, suponha que o autovalor 1 não seja simples. Então existem $h, \tilde{h} \in V$, $h \neq \tilde{h}$, tais que

$$\Phi h = h \text{ e } \Phi \tilde{h} = \tilde{h}.$$

E

$$\int_0^1 h \, dm = \int_0^1 \tilde{h} \, dm = 1.$$

Onde h é a densidade encontrada em 1.

Observe que

$$|\tilde{h}| = |\Phi \tilde{h}| \leq \Phi |\tilde{h}| \Rightarrow \Phi |\tilde{h}| - |\tilde{h}| \geq 0.$$

Assim,

$$0 \leq \int_0^1 \Phi |\tilde{h}| - |\tilde{h}| \, dm = \int_0^1 \Phi |\tilde{h}| \, dm - \int_0^1 |\tilde{h}| \, dm = \int_0^1 |\tilde{h}| \, dm - \int_0^1 |\tilde{h}| \, dm = 0.$$

Portanto

$$\Phi |\tilde{h}| - |\tilde{h}| = 0 \Rightarrow \Phi |\tilde{h}| = |\tilde{h}|$$

Como $|\tilde{h}| \geq 0$, $|\tilde{h}|$ também é uma densidade. Logo, como existe uma única probabilidade invariante absolutamente contínua

$$|\tilde{h}| = \tilde{c}h,$$

onde $\tilde{c} > 0$ é uma constante.

Pela linearidade de Φ ,

$$\Phi(\tilde{h} + |\tilde{h}|) = \tilde{h} + |\tilde{h}|.$$

Sendo $\tilde{h} + |\tilde{h}| \geq 0$, temos que $\tilde{h} + |\tilde{h}|$ também é uma densidade. Assim,

$$\tilde{h} + |\tilde{h}| = ch \Rightarrow \tilde{h} = (c - \tilde{c})h \Rightarrow \tilde{h} = kh,$$

onde c e k são constantes.

Portanto

$$1 = \int_0^1 \tilde{h} \, dm = \int_0^1 kh \, dm = k \int_0^1 h \, dm = k.$$

O que implica $\tilde{h} = h$.

Lema 6.16. *Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo e $(G, \cdot)$ um subgrupo finito do grupo multiplicativo $(K^*, \cdot)$. Então G é cíclico.*

Demonstração. Vide [11], página 157.

Temos então a seguinte proposição

Proposição 6.17. *Existe p tal que os autovalores de Φ de módulo 1 são simples e são as raízes p -ésimas da unidade. E mais, existe uma função v de $L^2(hm)$ de módulo 1 sobre I tal que para todo $0 < j < p$ $v^j h$ pertence a V , $v^p = 1$ e $\Phi(v^j h) = \lambda^j v^j h$ onde $\lambda = e^{2\pi i/p}$.*

A decomposição espectral de Φ feita pelo Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu para $f \in V$ e $k > 0$ é dada por

$$\Phi^k(f) = \Phi_0(f) + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{kj} \Phi_j(f) + \Psi^k(f)$$

onde Φ_j é a projeção de V sobre o espaço $\mathbb{C}v^j h$.

Demonstração. Vamos mostrar que se existe u não nula em V tal que $\Phi u = \lambda u$, com $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, então existe v em $L^2(hm)$ tal que $u = vh$.

Temos que $|\Phi u| = |u|$. Pela propriedade (ii), $|\Phi u| \leq \Phi|u|$, logo, $\Phi|u| \geq |u| \geq 0$. Pela propriedade (iv),

$$\int_0^1 \Phi|u| dm = \int_0^1 |u| dm.$$

Assim, $\Phi|u| = |u|$ m-q.t.p.. Logo, $\Phi|u| = |u|$ em V .

Como 1 é autovalor simples de Φ associado à h , temos que $|u| = kh$, onde k é uma constante positiva que podemos escolher igual a 1. Podemos então escrever $u = vh$, onde v é uma função de módulo 1 de $L^2(hm)$ com $vh \in V$ e

$$\Phi(vh) = \lambda vh.$$

Sobre $\{h \neq 0\}$, podemos definir

$$P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h}.$$

Observe que

$$\langle Pv, w \rangle_{hm} = \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w dm = \int_0^1 v \cdot w \circ T \cdot h dm = \langle v, w \circ T \rangle_{hm} = \langle v, U(w) \rangle_{hm}.$$

Logo, P admite como operador adjunto a aplicação definida por

$$\begin{aligned} U : L^2(hm) &\longrightarrow L^2(hm) \\ w &\longmapsto w \circ T. \end{aligned}$$

Temos também que P é uma contração em $L^2(hm)$. De fato

$$\|Pv\|_{2,hm} = \sup_{\|w\|_{2,hm} \leq 1} |\langle Pv, w \rangle_{hm}|.$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} |\langle Pv, w \rangle_{hm}| &= \left| \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w dm \right| = \left| \int_0^1 v \cdot w \circ T \cdot h dm \right| \leq \int_0^1 |v \cdot w \circ T| h dm \\ &\leq \left[\int_0^1 v^2 h dm \right]^{1/2} \left[\int_0^1 w^2 \circ T h dm \right]^{1/2} = \|v\|_{2,hm} \|w\|_{2,hm}. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\|Pv\|_{2,hm} \leq \|v\|_{2,hm}.$$

Seja $\lambda \neq 1$ um autovalor de módulo 1 de Φ . Então, existe $v \in L^2(hm)$ que não se anula em I e $vh \in V$ verificando

$$\Phi(vh) = \lambda vh \quad \text{com} \quad Pv = \lambda v.$$

λ é um autovalor de módulo 1 de P ; v é um ponto fixo do operador P/λ , que é uma contração em $L^2(hm)$ pois $|\lambda| = 1$, e seu adjunto em $L^2(hm)$ é λU , pois

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{P}{\lambda} v, w \right\rangle_{hm} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w \, dm = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 v \cdot w \circ T \cdot h \, dm \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle v, w \circ T \rangle_{hm} = \left\langle v, \frac{1}{\lambda} w \circ T \right\rangle_{hm} = \left\langle v, \frac{1}{\lambda} U(w) \right\rangle_{hm}. \end{aligned}$$

Como $\lambda \bar{\lambda} = 1$, $1/\bar{\lambda} = \lambda$.

Em um espaço de Hilbert, os pontos fixos de uma contração também são pontos fixos de seu adjunto. Pois, consideremos H um espaço de Hilbert, $A : H \rightarrow H$, uma contração, e seu adjunto $A^* : H \rightarrow H$.

Se v é um ponto fixo de A , isto é, $Av = v$, mostremos que $A^*v = v$.

$$\langle A^*v, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, v \rangle = |v|^2.$$

Também, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle A^*v, v \rangle \leq |A^*v| |v| \leq |v|^2.$$

Logo,

$$\langle A^*v, v \rangle = |A^*v| |v|.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ com $|\alpha| = 1$ tal que

$$A^*v = \alpha v.$$

Podemos então concluir que

$$\alpha |v|^2 = \langle A^*v, v \rangle = \langle v, Av \rangle = |v|^2 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Assim,

$$\lambda U(v) = v.$$

Seja $v_1 \in V$, verificando também $\lambda v_1 \circ T = v_1$. Então, como v não se anula em I , temos

$$\left(\frac{v_1}{v} \right) \circ T = \frac{v_1}{v}.$$

Então,

$$\Phi \left(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h \right) = \Phi \left(\frac{v_1}{v} \cdot h \right) = P \left(\frac{v_1}{v} \right) \cdot h = \frac{v_1}{v} h,$$

onde a última igualdade segue do fato de que v_1/v é ponto fixo de U , adjunto de P . Logo,

$$\Phi\left(\frac{v_1}{v} \cdot h\right) = \frac{v_1}{v} h.$$

Portanto, v_1/v é constante e P/λ só admite um espaço vetorial de dimensão 1 invariante. Assim λ é um autovalor simples de P e portanto de Φ .

Resta mostrar que os autovalores de Φ são raízes p -ésimas da unidade.

Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{A} = \{\lambda : \exists v \in V \setminus \{0\} \text{ com } \Phi v = \lambda v \text{ e } |\lambda| = 1\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é um subgrupo multiplicativo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Até agora, vimos que se $u \in V$ não nulo tal que $\Phi u = \lambda u$ com $|\lambda| = 1$, então existe $v \in L^2(hm)$ tal que $u = vh$. Assim,

$$\Phi(u) = \lambda u \text{ e } u = vh \Leftrightarrow P(v) = \lambda v \Leftrightarrow \frac{P}{\lambda}(v) = v \Leftrightarrow \lambda U(v) = v \Leftrightarrow \lambda v \circ T = v. \quad (6.2)$$

Sejam, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A}$. Mostremos que $\lambda_1 \lambda_2^{-1} \in \mathcal{A}$.

Sejam $u_1, u_2 \in V$ tais que $\Phi u_1 = \lambda_1 u_1$ e $\Phi u_2 = \lambda_2 u_2$. Assim, existem $v_1, v_2 \in L^2(hm)$ tais que $u_1 = v_1 h$ e $u_2 = v_2 h$. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 \circ T &= v_1 \\ \lambda_2 v_2 \circ T &= v_2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{v_2} \circ T = \frac{1}{v_2}. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações acima, temos

$$\lambda_1 \cdot \frac{1}{\lambda_2} \left(v_1 \cdot \frac{1}{v_2} \right) \circ T = v_1 \cdot \frac{1}{v_2},$$

com

$$\left| \lambda_1 \cdot \frac{1}{\lambda_2} \right| = 1 \text{ e } \left\| v_1 \cdot \frac{1}{v_2} \right\|_{2,hm} = 1.$$

Consideremos

$$v_3 = v_1 \cdot \frac{1}{v_2} \text{ e } \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2^{-1}.$$

E, por (6.2), temos que $v_3 h = u_3$ com $\lambda_3 u_3 = \Phi u_3$.

Precisamos mostrar agora que $u_3 = v_3 h$ é de variação limitada.

$$\Phi^n u_3 = \lambda_3^n u_3 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_3^n} \Phi^n u_3 = u_3.$$

Logo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} \frac{\Phi^n u_3}{\lambda_3^n} = u_3.$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \frac{\Phi^n u_3}{\lambda_3^n} = u_3 \in L^1(hm).$$

Portanto, existem funções de variação limitada $f_k \in V$, $k \in \mathbb{N}$ tais que $f_k \rightarrow u_3$, quando $k \rightarrow \infty$, em $L^1(hm)$.

Temos também que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \frac{\Phi^n f_k}{\lambda_3^n} = \tilde{f}_k \in V.$$

Por outro lado,

$$\|\Phi^n f_k\|_V \leq \alpha^n \|f_k\|_V + \beta \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right) \|f\|_1,$$

assim,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n < N} \frac{\Phi^n f_k}{\lambda_3^n} \right\|_V \leq \frac{1}{N} \sum_{n < N} \alpha^n \|f_k\|_V + \frac{\beta}{N} \left(\sum_{n < N} \frac{1}{1 - \alpha} \right) \|f\|_1.$$

Portanto, fazendo $N \rightarrow \infty$,

$$\|\tilde{f}_k\| \leq \|f\|_1.$$

$$\begin{aligned} \|u_3 - \tilde{f}_k\|_1 &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \frac{\Phi^n u_3}{\lambda_3^n} - \sum_{n < N} \frac{\Phi^n f_k}{\lambda_3^n} \right\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \|\Phi^n u_3 - \Phi^n f_k\|_1 \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot N \|u_3 - f_k\|_1 = \|u_3 - f_k\|_1. \end{aligned}$$

Como $f_k \rightarrow u_3$ quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que $\tilde{f}_k \rightarrow u_3$ quando $k \rightarrow \infty$.

Pelo Teorema 6.12, segue que $u_3 \in V$.

Portanto, concluímos que $\mathcal{A} \subset S^1$ é um subgrupo finito do grupo multiplicativo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Logo, pelo Lema 6.16 temos que $\mathcal{A}$ é cíclico. O que implica que os autovalores de Φ são as raízes p -ésimas da unidade.

□

As Perturbações do Operador Φ

No próximo capítulo, demonstraremos o Teorema do Limite Central para transformações expansoras. Vamos considerar $f \in V$ e vamos definir

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Sob as hipóteses de que

$$\sigma^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right)^2 h \, dm > 0,$$

e $m(fh) = 0$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

para todo $v \in \mathbb{R}$.

Utilizando o método das funções características de Paul Lévy, Teorema 1.2, basta mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h \, dm = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Observe que

$$\int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h \, dm = \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h \cdot 1 \circ T^n \, dm = \int_0^1 \Phi^n \left(e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h \right) dm.$$

Logo, precisamos estudar $\Phi^n \left(e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h \right)$.

Neste capítulo vamos construir um novo operador $\Phi_f(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{C}$ tal que para toda $g \in V$,

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n(e^{\theta S_n f} g).$$

Vamos agora perturbar o operador Φ : seja f uma função real em V . Para todo $\theta \in \mathbb{C}$, definimos o operador $\Phi_f(\theta)$ por

$$\Phi_f(\theta)(g) = \Phi[\exp(\theta f) \cdot g] \text{ onde } g \in V.$$

Proposição 7.1. *O operador $\Phi_f(\theta)$ verifica as seguintes propriedades*

$$(P_1) \quad \Phi_f(0) = \Phi;$$

$$(P_2) \quad \text{Para todo } \theta \in \mathbb{C}, \Phi_f(\theta) \text{ é um operador contínuo de } V.$$

$$(P_3) \quad \text{A aplicação } \theta \mapsto \Phi_f(\theta) \text{ é analítica.}$$

$$(P_4) \quad \text{Para todo inteiro } n > 0, \text{ para todo complexo } \theta, \text{ vale a igualdade abaixo em } m\text{-quase toda parte}$$

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \cdot g], \text{ onde } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Demonstração. (P_2) : Vamos mostrar que se $f \in V$ e $\theta \in \mathbb{C}$, então $\exp(\theta f) \in V$. Temos que

$$\|\exp(\theta f)\|_1 = \int_0^1 |\exp(\theta f)| dm = \int_0^1 \exp(\operatorname{Re} \theta f) dm \leq \exp(|\operatorname{Re} \theta| \|f\|_V) < \infty.$$

Logo, $\exp(\theta f) \in L^1(m)$.

Para toda partição $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} |\exp(\theta f)(a_i) - \exp(\theta f)(a_{i+1})| = \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\theta [\exp(\theta f)(a_i) - \exp(\theta f)(a_{i+1})]|}{|\theta(f(a_i) - f(a_{i+1}))|} \cdot |f(a_i) - f(a_{i+1})| \leq \\ & \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})| \sup_{x \in f(I)} [|\theta \exp(\theta x)|]. \end{aligned}$$

Logo,

$$v(\exp(\theta f)) \leq K_f |\theta| v(f) < \infty.$$

Agora, fixando $\theta \in \mathbb{C}$ e $g \in V$,

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(\theta)(g)\|_V & \leq \|\Phi(\exp(\theta f) \cdot g)\|_V \leq \|\Phi\|_V \|\exp(\theta f) \cdot g\|_V \\ & \leq 2 \|\Phi\|_V \|\exp(\theta f)\|_V \|g\|_V. \end{aligned}$$

Assim, a continuidade de $\Phi_f(\theta)$ em V segue de

$$\|\Phi_f(\theta)\|_V \leq 2 \|\Phi\|_V \|\exp(\theta f)\|_V.$$

(P_3): Temos que

$$\left\| \frac{\theta^n}{n!} \Phi(f^n \cdot g) \right\|_V \leq \frac{|\theta|^n}{n!} \|\Phi\|_V \|f^n g\|_V \leq 2 \|\Phi\|_V \|g\|_V \frac{[2|\theta| \|f\|_V]^n}{n!}.$$

Logo, pelo critério da comparação, temos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \Phi(f^n \cdot g)$$

é absolutamente convergente em V e seu limite é $\Phi_f(\theta)g$.

Assim, a função $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$ é analítica.

(P_4): Vamos mostrar que para $f, g \in V$

$$\Phi(f \circ T \cdot g) = f \cdot \Phi g \text{ em } m\text{-quase toda parte.}$$

Se $f \in V$ e $\phi \in L^\infty(m)$, denotamos $\langle f, \phi \rangle$ por $\int_0^1 f \phi dm$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(f \circ T \cdot g), \phi \rangle &= \int_0^1 \Phi(f \circ T \cdot g) \cdot \phi dm = \int_0^1 f \circ T \cdot g \cdot \phi \circ T dm \\ &= \langle f \circ T \cdot g, \phi \circ T \rangle = \langle g, (f \cdot \phi) \circ T \rangle \text{ (como } f \in V, f \in L^\infty(V)) \\ &= \langle \Phi g, \phi \cdot f \rangle = \langle f \cdot \Phi g, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo ϕ de $L^\infty(m)$, deduzimos que

$$\Phi(f \circ T \cdot g) = f \circ \Phi g$$

em m -quase toda parte.

Vamos então mostrar (P_4) por indução sobre n .

Para $n = 1$ é imediato.

Vamos supor que $\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n(\exp(\theta S_n f) \cdot g)$ m -q.t.p..

Então existe $N_1 \in \mathcal{B}$, com $m(N_1) = 0$ tal que em $I \setminus N_1$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_f^{n+1}(\theta)(g) &= \Phi_f^n(\theta)[\Phi_f(\theta)(g)] = \Phi^n(\exp(\theta S_n f) \cdot \Phi_f(\theta)(g)) \\ &= \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \Phi(\exp(\theta f) \cdot g)]. \end{aligned}$$

Existe $N_2 \in \mathcal{B}$ com $m(N_2) = 0$ tal que em $I \setminus N_2$ temos

$$\begin{aligned} \Phi(\exp(\theta f) \cdot g) \cdot \exp(\theta S_n f) &= \Phi[\exp(\theta S_n f) \circ T \cdot \exp(\theta f) \cdot g] \\ &= \Phi[\exp(\theta S_{n+1} f) g]. \end{aligned}$$

Seja $N_3 = N_1 \cup N_2$, então $m(N_3) = 0$ e em $I \setminus N_3$, temos

$$\Phi_f^{n+1}(\theta)(g) = \Phi^n[\Phi((\exp(\theta S_{n+1} f))g)] = \Phi^{n+1}[\exp(\theta S_{n+1} f)g].$$

□

Agora, vamos mostrar como é feita a decomposição espectral de $\Phi_f(\theta)$

Proposição 7.2. *Existe $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, tal que se $|\theta| < a$, então para todo $n \geq 1$, para todo $g \in V$, podemos escrever*

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \lambda_0^n(\theta)\Phi_0(\theta)(g) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

E ainda

- as aplicações $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$, $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ e $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ são analíticas em uma vizinhança de $\theta = 0$;
- $\lambda_k(0) = \lambda^k$ e $\lambda_k(\theta)$ é um autovalor de $\Phi_f(\theta)$ de módulo maior que

$$\frac{2 + \rho(\Psi)}{3} = \rho_2;$$

- os operadores $\Phi_k(\theta)$ são as projeções de V sobre os autoespaços $V(\lambda_k(\theta))$ que têm dimensão 1 e $\Phi_k(0) = \Phi_k$, $\Phi_0(f) = m(fh) \cdot h$;
- o operador $\Psi_f(\theta)$ é um operador sobre V de raio espectral $\rho(\Psi_f(\theta)) \leq \rho_2$, $\Psi_f(0) = \Psi$ e para todo $0 \leq k \leq p-1$

$$\Psi_f(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Psi_f(\theta) = 0 \text{ e } \|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_V \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Antes de mostrarmos Proposição 7.2, precisaremos de alguns lemas preliminares que seguem abaixo.

Seja $\mathcal{F}(\Phi)$ o conjunto de todas as funções f que são analíticas em uma vizinhança de $\sigma(\Phi)$. Se $f \in \mathcal{F}(\Phi)$, se U é um aberto que contém $\sigma(\Phi)$, cuja fronteira B é constituída de um número finito de curvas de Jordan retificáveis, orientadas positivamente e se $U \cup B$ está contido no domínio de analiticidade de f , então, como vimos anteriormente, $f(\Phi)$ é definida por

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_B f(z)R(z, \Phi)dz.$$

Lema 7.3. *Seja U um aberto de $\mathbb{C}$ cujo fecho está contido em $\rho(\Phi)$. Então existe $r > 0$ tal que se $|\theta| < r$,*

$$\overline{U} \subset \rho(\Phi_f(\theta)).$$

E, para todo $z \in U$, $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ é uma função analítica em uma vizinhança de $\theta = 0$.

Demonstração. Do Corolário 2.4, temos que para todo $z \in \rho(\Phi)$, se

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_V < \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_V^{-1},$$

então $z \in \rho(\Phi_f(\theta))$.

Seja U um aberto de $\mathbb{C}$ cujo fecho está contido em $\rho(\Phi)$, então para todo $\lambda \in \overline{U}$, $R(\lambda, \Phi) \in \mathcal{D}$ e é não nula.

Como

$$\begin{aligned}\lim_{|z| \rightarrow \infty} \|R(z, \Phi)\|_V &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \|(zI - \Phi)^{-1}\|_V = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\| \left(z \left(I - \frac{\Phi}{z} \right) \right)^{-1} \right\|_V \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|} \left\| \left(I - \frac{\Phi}{z} \right)^{-1} \right\|_V = 0,\end{aligned}$$

temos então que

$$\delta = \inf_{z \in \overline{U}} \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_V^{-1} > 0.$$

Se para todo $z \in \overline{U}$,

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_V < \delta,$$

então

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_V < \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_V^{-1}.$$

Logo, $z \in \rho(\Phi_f(\theta))$. Assim $\overline{U} \subset \rho(\Phi_f(\theta))$.

Temos também que

$$R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$$

é uma série absolutamente convergente para $\|\cdot\|_V$, e para a norma da convergência uniforme de operadores de $\mathcal{D}$.

Como a função $\theta \mapsto \Phi - \Phi_f(\theta)$ é analítica em uma vizinhança de 0, temos que $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ é analítica para todo $z \in U$ desde que $\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_V < \delta$.

□

Lema 7.4. *Seja g um elemento de $\mathcal{F}(\Phi)$, então existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que para todo $|\theta| < r$, $g \in \mathcal{F}(\Phi_f(\theta))$ e $g(\Phi_f(\theta))$ é um operador que depende analiticamente de θ em uma vizinhança de $\theta = 0$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de $\sigma(\Phi)$ sob a qual g é analítica. Seja U_1 uma vizinhança de $\sigma(\Phi)$ cuja fronteira B é constituída de um número finito de curvas de Jordan orientadas positivamente e tal que $U_1 \cup B$ esteja contida em U .

Do Lema 7.3, existe $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tal que se $|\theta| < r$ então a função

$$\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$$

é analítica ao longo de B e a série

$$R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$$

converge uniformemente para a topologia da convergência uniforme dos operadores de $\mathcal{D}$ e absolutamente em $(V, \|\cdot\|_V)$. Assim,

$$g(\Phi_f(\theta)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_B g(z) R(z, \Phi_f(\theta)) dz$$

se desenvolve em uma vizinhança de 0 em uma série em θ e portanto $g(\Phi_f(\theta))$ é um operador que depende analiticamente de θ se $|\theta| < r$.

□

Vamos agora demonstrar a Proposição 7.2

Demonstração. Vamos construir primeiramente os operadores $\Phi_k(\theta)$ e $M(\theta)$.

Os pontos $(\lambda^k)_{0 \leq k \leq p-1}$ são os pontos isolados do espectro de Φ . Para todo k , existe portanto um número real $r_k > 0$ tal que

$$B(\lambda^k, r_k) \cap \sigma(\Phi) = \{\lambda^k\}.$$

Vamos tomar

$$r_k = \inf \left\{ \frac{1 - \rho(\Psi)}{3}, \frac{|\lambda^k - \lambda^j|}{2} \mid j \neq k \right\}.$$

Então, os círculos $(C(\lambda^k, r_k))_k$ e $C(0, (2\rho(\Psi)+1)/3) = C(0, \rho_2)$ estão inteiramente contidos em $\rho(\Phi)$.

Vamos denotar por B a reunião de todos esses círculos. B é constituído de um número finito de curvas de Jordan retificáveis, e vamos supor que B está orientado positivamente.

Para $0 \leq k \leq p-1$, definimos os operadores

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

$$M(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

Como para todo $z \in B$, a função $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ é analítica em uma vizinhança de $\theta = 0$, deduzimos que existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\theta_0 > 0$ tal que as funções $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ e $\theta \mapsto M(\theta)$ são analíticas para $|\theta| < \theta_0$.

Observemos que o operador $\Phi_k(\theta)$ não depende do domínio de integração escolhido, pois podemos tomar uma curva de Jordan retificável conveniente contida em $\rho(\Phi)$ cujo interior não contenha o ponto λ^k de $\sigma(\Phi)$. O mesmo para $M(\theta)$. Podemos então escrever que

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz',$$

onde $0 < r'_k < r_k$.

Segue da Proposição 2.5 que os operadores Φ_k são projeções, isto é,

$$\Phi_k(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta).$$

Da mesma forma, obtemos

$$\Phi_k(\theta)M(\theta) = M(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0, \quad M(\theta)M(\theta) = M(\theta).$$

Para $|\theta| < \theta_0$ podemos escrever

$$I = \Phi_0(\theta) + \Phi_1(\theta) + \dots + \Phi_{p-1}(\theta) + M(\theta)$$

onde as funções $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ e $\theta \mapsto M(\theta)$ são analíticas em θ e $\Phi_k(0) = \Phi_k$.

Vamos mostrar que existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tal que se $|\theta| < b_k$ então $\dim \Phi_k(\theta)(V) = \dim \Phi_k(V) = 1$.

Como $\Phi_k(0) = \Phi_k$ e como $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ é analítica em θ em uma vizinhança de 0, existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tal que

$$\text{se } |\theta| < b_k \text{ então } \|\Phi_k(\theta) - \Phi_k\|_V < 1.$$

Vamos supor que $\dim \Phi_k(\theta)(V) \geq 2$, então existem h_1 e h_2 em $\Phi_k(\theta)(V)$ que são linearmente independentes.

Como, $\dim \Phi_k(V) = 1$, existe um escalar λ tal que

$$\Phi_k(h_1) = \lambda \Phi_k(h_2).$$

Seja $h = h_1 - \lambda h_2$; h é diferente de 0 e pertence à $\Phi_k(\theta)(V)$.

Como, $[\Phi_k - \Phi_k(\theta)](h) = -h$, a condição $\|\Phi_k - \Phi_k(\theta)\|_V < 1$ não é válida. Logo, se $|\theta| < b_k$,

$$\dim \Phi_k(\theta)(V) = 1.$$

Vamos construir as funções $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$.

Seja g_k uma base de $\Phi_k(V)$. Existe $0 < \bar{b}_k \leq b_k$ tal que se $|\theta| < \bar{b}_k$ então $\Phi_k(\theta)(g_k)$ é uma base de $\Phi_k(\theta)(V)$. Pois, $\Phi_k(g_k) = g_k$ que não é nula em $\theta = 0$, portanto não é nula em uma vizinhança de 0 pois $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ é analítica em θ . Assim, $\Phi_k(\theta)(g_k)$ é uma base de $\Phi_k(\theta)(V)$ se $|\theta| < \bar{b}_k$. Para $|\theta| < \bar{b}_k$

$$\Phi_f(\theta)[\Phi_k(\theta)(g_k)] = \Phi_k(\theta)[\Phi_f(\theta)(g_k)] = \lambda_k(\theta)\Phi_k(\theta)(g_k).$$

A função $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$, $\lambda_k(0) = \lambda_k$ é analítica em θ por ser produto de funções analíticas em θ . Deduzimos que existe $0 < \bar{\bar{b}}_k < \bar{b}_k$, tal que se $|\theta| < \bar{\bar{b}}_k$ então $\lambda_k(\theta) \in B(\lambda_k, r_k)$. Demonstramos então que $\lambda_k(\theta)$ é um autovalor de $\Phi_f(\theta)$ e que o autoespaço associado $\Phi_k(\theta)(V)$ tem dimensão 1 para $|\theta| \leq \bar{\bar{b}}_k$.

Vamos construir o operador $\Psi_f(\theta)$. Vamos definir

$$a = \inf\{\bar{\bar{b}}_k : 1 \leq k \leq p\},$$

a é estritamente positivo. Para $|\theta| < a$, se $k \neq j$,

$$\Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0.$$

Vamos colocar $\Psi_f(\theta) = M(\theta)\Phi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$. Para $|\theta| < a$, a função $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ é analítica em θ como composição de funções analíticas em θ e, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e para todo $g \in V$

$$|\theta| < a \Rightarrow \Phi_f^n(\theta)(g) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

Como

$$\Phi_f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_B z R(z, \Phi_f(\theta)) dz$$

e como $\Psi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$ deduzimos que

$$\Psi_f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_B z R(z, \Phi_f(\theta)) \cdot M(\theta) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} z R(z, \Phi_f(\theta)) dz$$

pois $R(z, \Phi_f(\theta)) \cdot M(\theta) = 0$ ao longo de $C(\lambda^k, r_k)$ e $R(z, \Phi_f(\theta)) \cdot M(\theta) = R(z, \Phi_f(\theta))$ ao longo de $C(0, \rho_2)$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\Psi_f^n(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} z^n R(z, \Phi_f(\theta)) dz = \frac{1}{2\pi} \rho_2^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(n+1)} R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta)) d\alpha.$$

Então

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_V \leq \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))(h)\|_V d\alpha$$

logo,

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_V \leq C \rho_2^{n+1} \|h\|_V.$$

□

O Teorema do Limite Central Para Transformações Expansoras

Fixamos uma transformação T de $\mathcal{C}$ e lembramos que o sistema $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ é ergódico. Fixamos f , um elemento de V à valores reais e supomos que $m(fh) = 0$. Vamos estudar o comportamento da soma

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k.$$

8.1 Cálculo da Variância

Proposição 8.1. *A seqüência*

$$M_N = \int_0^1 \left(\frac{S_N f}{\sqrt{N}} \right)^2 h \, dm$$

é convergente em $\mathbb{R}_+$ e denotamos σ^2 o seu limite. Temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 0 &\Leftrightarrow f = u - u \circ T \text{ em } L^2(hm), \text{ com } u \in L^2(hm) \text{ e } uh \in V \\ &\Leftrightarrow fh = uh - u \circ T \cdot h \text{ em } V. \end{aligned}$$

Demonstração. 1ª etapa: Vamos mostrar a existência do limite da seqüência $(M_N)_{N>0}$.

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^1 \left(\frac{S_N f}{\sqrt{N}} \right)^2 h \, dm = \frac{1}{N} \langle S_N f, S_N f \rangle_{hm} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, f \circ T^i \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \left[N \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \right] \end{aligned}$$

pois a medida hm é invariante por T .

Designamos por P o operador adjunto de $U = g \circ T$ com relação a medida hm no espaço de Hilbert $L^2(hm)$. P é definido por

$$\langle Pf, g \rangle_{hm} = \langle f, g \circ T \rangle_{hm}, \quad f, g \in L^2(hm).$$

Seja $f \in V$ então, $f \in L^1(hm)$ e $L^2(hm)$ e temos

$$Pf \cdot h = \Phi(fh) \, m - q.t.p.,$$

portanto,

$$Pf = \frac{\Phi(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \, hm - q.t.p.$$

Como $f \in V$, deduzimos que para todo $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} P^k f &= \frac{\Phi^k(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \\ &= m(fh) \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} + \sum_{j=2}^p \frac{\lambda_j^k \Phi_j(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}. \\ P^k f &= m(fh) \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} + \sum_{j=2}^p \frac{\lambda_j^k \Phi_j(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \end{aligned}$$

onde

$$\left\| \frac{\Psi^k(fh)}{h} \cdot \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \right\|_{1, hm} \leq \left\| \Psi^k(fh) \right\|_V \leq \rho^k \|fh\|_V \leq C_f \rho^k \|f\|_{1, hm}$$

pois $0 < \rho < 1$. Como

$$\|fh\|_V = \|fh\|_1 + v(fh) = \|f\|_1 + v(fh),$$

$v(fh)$ é finito, existe uma constante $C_f \geq 1$ tal que $v(fh) \leq (C_f - 1) \|f\|_{1, hm}$.

Assim,

$$\begin{aligned} M_N &= \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) \langle f, P^k f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) P^k f, f \right\rangle_{hm}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a seqüência

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) P^k f \right)_{N>0}$$

converge em $L^1(hm)$.

Da decomposição espectral, temos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) P^k f = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) \left[\sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(fh) + \Psi^k(fh) \right] \cdot \frac{1}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

Como,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k = \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda}$$

e como,

$$\sum_{k=0}^{N-1} k \lambda^k = -\frac{N \lambda^N}{1 - \lambda} - \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1 - \lambda^{N+1}}{(1 - \lambda)^2}$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) P^k f &= \sum_{j=1}^{p-1} \left[\frac{1}{1 - \lambda^j} + \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \lambda^j} - \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda^{j(N+1)}}{(1 - \lambda^j)^2} \right] \frac{\Phi_j(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k \Psi^k(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Como

$$\left\| \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \right\|_{1,hm} \leq C_f \rho^k \|f\|_{1,hm},$$

obtemos que as seqüências

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k \Psi^k(fh)}{h} \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}$$

são convergentes em $L^1(hm)$.

Como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 - \lambda^j} + \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \lambda^j} - \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda^{j(N+1)}}{(1 - \lambda^j)^2} \right] = \frac{1}{1 - \lambda^j}$$

deduzimos a convergência em $L^1(hm)$ da seqüência

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) P^k f.$$

Seja G em $L^1(hm)$ seu limite. Temos que G verifica $(I - P)G = f$. Assim

$$G = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^j} \Phi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(fh) \right] \mathbb{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$h \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f.$$

converge em V , e seu limite vale Gh . Deduzimos que a sequência $(M_N)_N$ admite um limite σ^2 em $\mathbb{R}_+$ e que

$$\sigma^2 = 2\langle G, f \rangle_{hm} - \langle f, f \rangle_{hm}$$

com $G \in L^1(hm)$, $Gh \in V$ e $(I - P)G = f$. Também

$$\sigma^2 = 2 \left[\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^j} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m + \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right] - \langle f, f \rangle_{hm}.$$

2ª etapa: Vamos supor que $\sigma^2 = 0$.

Lema 8.2. *A sequência $(S_N f)_{N>0}$ é uniformemente limitada em $L^2(hm)$*

Demonstração. Como $\sigma^2 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{2,hm}^2 &= \int_0^1 |S_N f|^2 h \, dm = N(M_N - 0) = N(M_N - \sigma^2) \\ &= -2N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m - 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m + \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda^j (\lambda^{jN} - 1)}{(1 - \lambda^j)^2} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m. \end{aligned}$$

Temos que

$$|\langle \Psi^k(fh), f \rangle_m| = \left| \int_0^1 \Psi^k(fh) f \, dm \right| \leq \|\Psi^k(fh)\|_V \|f\|_1 \leq C \rho^k$$

com $0 < \rho < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq NC \frac{\rho^N}{1 - \rho} \\ \left| \sum_{k=N}^{\infty} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| &\leq C \sum_{k=0}^{N-1} k \rho^k = C \left[\frac{\rho(1 - \rho^N)}{(1 - \rho)^2} - \frac{N \rho^N}{(1 - \rho)} \right]. \end{aligned}$$

Temos que λ tem módulo 1, logo $|1 - \lambda^{jN}| \leq 2$. Assim

$$\|S_N f\|_{2,hm}^2 \leq \frac{2C}{(1 - \rho)^2} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{2}{|1 - \lambda^j|^2} |\langle \Phi_j(fh), f \rangle_m| \leq r^2.$$

□

Lema 8.3. Para todo g de $L^2(hm)$, para todo $0 \leq j \leq p-1$, existe S_j em $L^2(hm) \cap L^1(hm)$, e $m(S_j h) = 0$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm} = \langle S_j, g \rangle_{hm}.$$

Demonstração. Para todo $N > 0$, e para todo g de $L^2(hm)$ tal que $gh \in V$ temos

$$\begin{aligned} \langle S_N f, g \rangle_{hm} &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k, g \right\rangle_{hm} = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, g \rangle_{hm} = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, P^k g \rangle_{hm} \\ &= \left\langle f, \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ik} \Phi_i(gh) + \Psi^k(gh) \right) \right\rangle_m \\ &= \langle f, \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{iN}}{1 - \lambda^i} \Phi_i(gh) \rangle_m + \langle f, \sum_{k=0}^{N-1} \Psi^k(gh) \rangle_m \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{iN}}{1 - \lambda^i} \langle f, \Phi_i(gh) \rangle_m + \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m. \end{aligned}$$

Como a seqüência

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m$$

é convergente e como $\lambda^p = 1$, deduzimos que para $0 \leq j \leq p-1$, as seqüências

$$(\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm})_{N>0}$$

são convergentes.

Tomamos g em $L^2(hm)$, gh não está necessariamente em V . V é denso em $L^2(hm)$. Do Lema 8.2, a seqüência $(S_{Np+j} f)_{N>0}$ é uniformemente limitada por r em $L^2(hm)$, deduzimos então a convergência da seqüência $(\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm})_{N>0}$.

Assim, as seqüências $S_{Np+j} f$ são fracamente convergentes em $L^2(hm)$, vamos denotar por S_j seus limites, temos que eles pertencem a $L^2(hm)$. Então, como $1 \in L^2(hm)$, temos que

$$\langle S_j, 1 \rangle_{hm} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j} f, 1 \rangle_{hm}.$$

Logo,

$$\langle S_N f, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, 1 \rangle_{hm} = N \langle f, 1 \rangle_{hm} = 0.$$

E assim, $\langle S_j, 1 \rangle = m(S_j h) = 0$.

Como a função sinal de $S_j \in L^2(hm)$, temos que $m(|S_j| h)$ é finita, pois

$$m(|S_j| h) = \int_0^1 |S_j| h \, dm = \int_0^1 S_j \cdot \operatorname{sgn}(S_j) h \, dm \leq \|S_j\|_{2,hm} \|\operatorname{sgn}(S_j)\|_{2,hm} < \infty,$$

concluimos que $S_j \in L^1(hm)$.

□

Lema 8.4. $f = S - S \circ T$ em $L^2(hm)$, com

$$S = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} S_j.$$

Demonstração. Para todo $N > 0$, e para todo $0 \leq j \leq p-1$, temos

$$f - f \circ T^{Np+j} = S_{Np+j}f - S_{Np+j}f \circ T.$$

Logo, para todo $g \in L^2(hm)$, temos

$$\begin{aligned} \langle f - f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} &= \langle S_{Np+j}f - S_{Np+j}f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f, Pg \rangle_{hm}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f - f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle S_j, g \rangle_{hm} - \langle S_j, Pg \rangle_{hm}.$$

Logo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = -\langle S_j, g \rangle_{hm} + \langle S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm}.$$

E, $\langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle f \circ T^{Np+j}, hg \rangle_m$.

Se $gh \in V$, temos que $\langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle f, \Phi^{Np+j}(gh) \rangle_m$ que podemos decompor

$$\begin{aligned} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{(Np+j)i} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m + m(gh) \langle h, f \rangle_m + \langle \Psi^{Np+j}(gh), f \rangle_m \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ji} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m + \langle \Psi^{Np+j}(gh), f \rangle_m. \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi^N(gh), f \rangle_m = 0$$

pois Ψ tem raio espectral $\rho < 1$, logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ji} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

Agora, se $gh \notin V$, gh pertence simplesmente a $L^2(hm)$. Como V é denso em $L^2(hm)$, existe uma seqüência de elementos de V que se aproxima uniformemente de gh em $L^2(hm)$. Então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ji} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

Para todo $g \in L^2(hm)$, para todo $0 \leq j \leq p-1$ temos

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ji} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

Vamos fazer a soma das p equações. Como

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{ji} = 0,$$

temos que para todo $g \in L^2(hm)$

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm}.$$

Logo, $f = S - S \circ T$ em $L^2(hm)$, com

$$S = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} S_j.$$

□

Vamos calcular explicitamente S .

Lema 8.5. $P(S \circ T) = S$ em $L^2(hm)$.

Demonstração. $S \in L^2(hm)$, logo $S \circ T$ também pertence a $L^2(hm)$ pois

$$\int_I (S \circ T)^2 h \, dm = \int_I S^2 \circ T h \, dm = \int_I S^2 h \, dm < \infty.$$

Pela definição de P , para todo $g \in L^2(hm)$

$$\langle P(S \circ T), g \rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm}$$

e então $P(S \circ T) = S$ em $L^2(hm)$.

□

Lema 8.6. $S = f - G$ em $L^1(hm)$ e $Sh = (f - G)h$ em V .

Demonstração. Dos lemas 8.4 e 8.5 temos que, para todo $0 \leq j \leq p-1$, e para todo $N > 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{Np+j} P^k f = P^{Np+j} S - S$$

em $L^2(hm)$.

Para todo g de $L^2(hm)$, temos

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} - \langle f, g \rangle_{hm} = \langle P^{Np+j} S, g \rangle_{hm} - \langle S, g \rangle_{hm}.$$

Temos que

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \sum_{k=0}^{Np+j} \langle \Psi^k(fh), g \rangle_m.$$

Como Ψ é um operador linear limitado de V cujo raio espectral é menor que um, pela Série de Newmann, existe uma função u de $L^2(hm)$ tal que $uh \in V$ e $(I - \Psi)(uh) = fh$. Então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \langle u, g \rangle_{hm}.$$

Como $S \in L^2(hm)$ e V é denso em $L^2(hm)$, tomamos uma aproximação uniforme para S por uma seqüência de elementos de V , e temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle P^{Np+j} S, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g \rangle_m.$$

Assim, para todo $g \in L^2(hm)$, para todo $0 \leq j \leq p-1$, temos

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \langle u, g \rangle_{hm} - \langle f, g \rangle_{hm} = -\langle S, g \rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g \rangle_m.$$

Fazemos a soma das p equações e obtemos, para todo $g \in L^2(hm)$

$$\langle S, g \rangle_{hm} = \langle f - u, g \rangle_{hm} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m = \langle f - G, g \rangle_{hm}.$$

Como em $L^2(hm)$, $S = f - G$, onde G verifica $(I - P)G = f$, como fh e Gh estão em V , deduzimos que Sh também pertence a V . □

3ª etapa: Demonstraremos a recíproca.

Se $f = u \circ T - u$, com $u \in L^2(hm)$ e $uh \in V$, então $S_N f = u \circ T^N - u$. Assim,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} S_N f \right)^2 h \, dm = \frac{1}{N} \int_0^1 (u^2 \circ T^N - 2u \circ T^N u + u^2) h \, dm$$

que tende a 0 quando $N \rightarrow \infty$ e $\sigma^2 = 0$. □

8.2 O Teorema do Limite Central

Definição 8.7. Dizemos que uma função f de V , $m(fh) = 0$, verifica a *hipótese (H)* se existe $u \in L^2(hm)$ com uh em V tal que

$$f = u - u \circ T \text{ em } L^2(hm) \text{ ou } fh = uh - u \circ T \text{ em } V.$$

Teorema 8.8. *Seja $f \in V$, se $f - m(fh)$ não verifica (H), então para todo $v \in \mathbb{R}$, temos*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_N f - N m(fh)}{\sigma \sqrt{N}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Demonstração. 1ª etapa: Vamos mostrar que $\lambda'_0(0) = hm(f)$

Da proposição 7.2 para todo $|\theta| < a$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(i\theta S_n f) h \, dm &= \int_0^1 \Phi^n(\exp(i\theta S_n f) h) \, dm = \int_0^1 \Phi_f^n(i\theta)(h) \, dm \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(i\theta) \int_0^1 \Phi_k(i\theta)(h) \, dm + \int_0^1 \Psi^n(i\theta)(h) \, dm. \end{aligned}$$

Todas as funções acima são analíticas em θ . Fixemos $t \in \mathbb{R}$, então para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{t}{n} \right| < a.$$

Então

$$\int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{n}\right) h \, dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n\left(\frac{it}{n}\right) \int_0^1 \Phi_k\left(\frac{it}{n}\right)(h) \, dm + \int_0^1 \Psi^n\left(\frac{it}{n}\right)(h) \, dm.$$

Vamos desenvolver

$$\int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{n}\right) h \, dm.$$

Observação: Note que

1. Se h é pequeno então $\exp(h) = 1 + h + O(h^2)$.
2. Se h é pequeno então $\ln(1 + h) = h + O(h^2)$.

Então, fixado t e para n grande, temos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n &= \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(n \left(\frac{t^2}{n^2} + O\left(\frac{t^4}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^4}{n^3}\right)\right) = 1 + \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^4}{n^3}\right) + O\left(\left(\frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^4}{n^3}\right)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{t^4}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Utilizando a observação acima, temos que:

$$\begin{aligned}
\lambda_k^n \left(\frac{it}{n} \right) &= \left[\lambda^k + \frac{it}{n} \lambda'_k(0) - \frac{t^2}{2n^2} \lambda''_k(0) + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[1 + \frac{it}{\lambda^k n} \lambda'_k(0) - \frac{t^2}{2n^2} \frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[1 + \frac{it}{\lambda^k n} \lambda'_k(0) - \frac{t^2 \lambda_k'^2(0)}{2\lambda^{2k} n^2} + \frac{t^2 \lambda_k'^2(0)}{2\lambda^{2k} n^2} - \frac{t^2}{2n^2} \frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[\exp \left(\frac{it}{\lambda^k n} \lambda'_k(0) \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{t^2}{2n^2} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) - \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \exp \left(\frac{-it}{\lambda^k n} \lambda'_k(0) \right) \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it}{\lambda^k} \lambda'_k(0) \right) \left[1 - \frac{t^2}{2n^2} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it}{\lambda^k} \lambda'_k(0) \right) \left[\exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n^2} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it}{\lambda^k} \lambda'_k(0) \right) \left[\exp \left(n \left(-\frac{t^2}{2n^2} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it}{\lambda^k} \lambda'_k(0) \right) \left[\exp \left(-\frac{t^2}{2n} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) + \frac{t^2}{n} O \left(\frac{it}{n} \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) \left[1 - \frac{t^2}{2n} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}} \right) + \frac{t^2}{n^2} O \left(\frac{it}{n} \right) \right]
\end{aligned}$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O \left(\frac{it}{n} \right) = 0.$$

Temos também que

$$\Phi_k \left(\frac{it}{n} \right) = \Phi_k + \frac{it}{n} \Phi_k^{(1)} + \frac{it}{n} O \left(\frac{it}{n} \right),$$

onde $\Phi_k^{(1)}$ e $O(it/n)$ são operadores limitados de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| O \left(\frac{it}{n} \right) \right\|_V = 0.$$

Então

$$\int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{n} \right) (h) dm = \int_0^1 \Phi_k(h) dm + \frac{it}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + \frac{it}{n} O \left(\frac{it}{n} \right),$$

com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O \left(\frac{it}{n} \right) = 0$$

e

$$\int_0^1 \Phi_k(h) dm = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{n}\right) h \, dm &= \exp(it\lambda'_0(0)) + \frac{it}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) \, dm \cdot \exp(it\lambda'_0(0)) \\ &\quad - \frac{t^2}{2n} (\lambda''_0(0) - \lambda_0'^2(0)) \exp(it\lambda'_0(0)) \\ &\quad + \frac{it}{n} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^k \exp\left(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) \, dm \\ &\quad + \int_0^1 \Psi^n\left(\frac{it}{n}\right)(h) \, dm + \frac{it}{n} O\left(\frac{it}{n}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\left\| \Psi^n\left(\frac{it}{n}\right)(h) \right\|_V \leq \left| \frac{1}{n} \right| C \rho_2^{n+1},$$

podemos passar ao limite o segundo membro, e obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{n}\right) h \, dm = \exp(it\lambda'_0(0)).$$

Do Teorema de Birkhoff, como $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ é um sistema dinâmico ergódico e como $f \in L^1(m)$ e $L^1(hm)$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n f}{n} = m(fh) \quad hm\text{-q.t.p.}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{n}\right) h \, dm = \exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda'_0(0)).$$

Logo, para todo t fixado em $\mathbb{R}$, $\exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda'_0(0))$. Portanto,

$$m(fh) = \lambda'_0(0)$$

que supomos, para a seqüência da prova, igual a zero.

□

2ª etapa: Vamos mostrar que $\sigma^2 = \lambda''_0(0)$.

Temos que

$$\int_0^1 \left[\frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right]^2 h \, dm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right) h \, dm \right] \Big|_{t=0}.$$

Fixemos $t \in \mathbb{R}$. Então, para n suficientemente grande,

$$\int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right) h \, dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) \, dm + \int_0^1 \Psi^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) \, dm.$$

Podemos então fazer o desenvolvimento de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^1 \exp\left(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right) h \, dm \right] \Big|_{t=0}$$

pois todas as funções são analíticas em $t/\sqrt{n}$.

Para derivar o primeiro termo, utilizamos

$$(uv)'' = u''v + uv'' + 2u'v' \quad \text{com} \quad u(t) = \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{e} \quad v(t) = \int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm.$$

Se $k \neq 0$, temos

$$v(0) = 0, \quad u(0) = \lambda^{nk}, \quad u'(0) = i\sqrt{n}\lambda^{k(n-1)}\lambda'_k(0).$$

Temos também

$$\Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) = \frac{it}{\sqrt{n}} \Phi_k^{(1)}(h) - \frac{t^2}{2n} \Phi_k^{(2)}(h) + \frac{t^2}{n} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h),$$

onde os operadores $\Phi_k^{(1)}$, $\Phi_k^{(2)}$, e $O(it/\sqrt{n})$ são operadores limitados de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right\|_V = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm \right] \Big|_{t=0} &= -\lambda^{nk} \frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) dm \\ &\quad - 2\lambda^{(n-1)k} \lambda'_k(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm. \end{aligned}$$

Se $k = 0$, temos

$$\begin{aligned} v(0) &= 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = -\lambda_0''(0), \\ v'(0) &= \frac{i}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm \quad \text{e} \quad v''(0) = -\frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) dm. \end{aligned}$$

Dizemos que

$$\Psi^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R \left(\lambda, \Phi_f \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) (h) d\lambda.$$

A função $\theta \mapsto R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ é analítica se $|\theta| < a$. Existe $N > 0$ tal que se $n > N$, temos

$$R \left(\lambda, \Phi_f \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) = R(\lambda, \Phi) + \frac{it}{\sqrt{n}} R^{(1)}(\lambda, \Phi) - \frac{t^2}{2n} R^{(2)}(\lambda, \Phi) + \frac{t^2}{n} \bar{R} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)$$

onde os operadores $R^{(1)}(\lambda, \Phi)$, $R^{(2)}(\lambda, \Phi)$ e $\bar{R}(it/\sqrt{n})$ são operadores limitados de V e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \bar{R} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) \right\|_V = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \Psi^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda) d\lambda$$

que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right]^2 h \, dm &= \lambda_0''(0) + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) \, dm \\ &\quad + \frac{1}{n} \left[\int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) \, dm + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) \, dm \right] + \frac{O(n)}{n}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right]^2 h \, dm.$$

Logo, existe

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0''(0) + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) \, dm \\ + \frac{1}{n} \left[\int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) \, dm + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) \, dm \right] + \frac{O(n)}{n} \end{aligned}$$

e, portanto, assumindo a existência dos limites, que será discutida posteriormente, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0''(0) + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) \, dm + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) \, dm \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) \, dm + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(n)}{n} = \lambda_0''(0) + 2L_1 + 0 + L_2 + 0, \end{aligned}$$

onde

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} c_k, \quad \text{com } c_k = \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) \, dm,$$

e

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) \, dm.$$

Como λ^k , $k = 1, \dots, p-1$ são raízes da unidade, temos que

$$\sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) \, dm$$

é limitado. Assim, $L_2 = 0$.

Temos que $\lambda^p = 1$. Vamos definir

$$E_{n_j} = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n_j-1)k} c_k.$$

Suponhamos primeiramente,

$$n_j = pj + 1 \Rightarrow n_j - 1 = pj.$$

Assim,

$$E_{n_j} = \sum_{k=1}^{p-1} 1 \cdot c_k \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} E_{n_j} = L_1.$$

Façamos agora

$$n_j = pj + 2 \Rightarrow n_j - 1 = pj + 1.$$

Desse modo,

$$E_{n_j} = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(pj+1)k} c_k \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} E_{n_j} = L_1.$$

Repetindo o passo anterior até $n_j = pj + p$, e somando as p equações obtidas, temos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} 1 \cdot c_k + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^k c_k + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{2k} c_k + \cdots + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(p-1)k} c_k &= pL_1 \Rightarrow \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} (1 + \lambda^k + \lambda^{2k} + \cdots + \lambda^{(p-1)k}) c_k &= pL_1 \Rightarrow pL_1 = 0 \Rightarrow L_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma^2 = \lambda_0''(0).$$

□

3ª etapa: Vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = \exp \left(-\frac{t^2 \sigma^2}{2} \right).$$

Fixemos $t \in \mathbb{R}$, então para n suficientemente grande, podemos escrever pela Proposição 7.2,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm &= \lambda_0 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 \Phi_0 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm + \int_0^1 \Psi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Psi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = 0$$

como na 1ª etapa, para $k = 0$

$$\begin{aligned}
\left[\lambda_0 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} \lambda_0''(0) - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \left[\exp \left(\frac{-t^2}{2n} \lambda_0''(0) \right) - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \exp \left(\frac{-t^2}{2} \lambda_0''(0) \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) - \frac{t^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \cdot \exp \left(\frac{t^2}{2n} \lambda_0''(0) \right) \right]^n \\
&= \exp \left(\frac{-t^2}{2} \lambda_0''(0) \right) \cdot \left[1 - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \exp \left(\frac{-t^2}{2} \lambda_0''(0) \right) \cdot \left[\exp \left(n \ln \left(1 - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \right] \\
&= \exp \left(\frac{-t^2}{2} \lambda_0''(0) \right) \cdot \left[\exp \left(-\frac{it^3}{6\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right] \\
&= \exp \left(\frac{-t^2}{2} \lambda_0''(0) \right) \cdot \left(1 - \frac{it^3}{6\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right)
\end{aligned}$$

com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Temos também

$$\int_0^1 \Phi_0 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm + \frac{it}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right).$$

Para $k \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left[\lambda_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n &= \left[\lambda^k + \frac{it}{\sqrt{n}} \lambda_k'(0) - \frac{t^2}{2n} \lambda_k''(0) - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_k'''(0) + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'''(0)}{\lambda^k} + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} + \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda_k'(0)^2}{\lambda^{2k}} - \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda_k'(0)^2}{\lambda^{2k}} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} \left(\frac{\lambda_k''(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) + 2 \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} \left(\frac{\lambda_k''(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)^3}{\lambda^{3k}} + \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)^3}{\lambda^{3k}} - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'''(0)}{\lambda^k} + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \left[\exp \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda_k''(0)}{2n\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)^2}{2n\lambda^{2k}} \right) \right) - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda_k'(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda_k''(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left[1 - \left(\frac{it^3}{6n\sqrt{n}} B_k - \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp \left(-\frac{it\sqrt{n}\lambda_k'(0)}{n\lambda^k} + t^2 \left(\frac{\lambda_k''(0)}{2n\lambda^k} - \frac{\lambda_k'(0)^2}{2n\lambda^{2k}} \right) \right) \right]^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda''_k(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda'_k(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left[1 - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda''_k(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda'_k(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left[\exp \left(n \ln \left(1 - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda''_k(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda'_k(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left[\exp \left(n \left(-\frac{it^3}{6n\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda''_k(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda'_k(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left[\exp \left(-\frac{it^3}{6\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right) \right] \\
&= \lambda^{nk} \exp \left(\frac{it\sqrt{n}\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - t^2 \left(\frac{\lambda''_k(0)}{2\lambda^k} - \frac{\lambda'_k(0)^2}{2\lambda^{2k}} \right) \right) \left(1 - \frac{it^3}{6\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right),
\end{aligned}$$

com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Temos também

$$\int_0^1 \Phi_k \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + \frac{it}{\sqrt{n}} O \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm &= e^{-t^2 \lambda''_0(0)/2} \left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm \right) \\
&\quad + \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} e^{it\lambda'_k(0) \frac{\sqrt{n}}{\lambda^k}} e^{-t^2[A_k]} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + o \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right).
\end{aligned}$$

Como a função $\theta \mapsto \lambda_k(i\theta)$ é analítica e como existe $a > 0$ tal que se $|\theta| < a$, $|\lambda_k(i\theta)| \leq 1$, deduzimos que $\lambda'_k(0)/\lambda^k$ é real. Com efeito,

$$\lambda_k(i\theta) = \lambda^k \left(1 + i\theta \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\theta^2}{2} \frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} + o(\theta^2) \right).$$

Passando o módulo

$$\begin{aligned}
1 &\geq \left[1 - \theta \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right) \right]^2 + \left[\theta \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right) \right]^2 \\
&\quad + o(\theta^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
1 &\geq 1 - 2\theta \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) + \theta^2 \left[\left[\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) \right]^2 - \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right) \right] \\
&\quad + o(\theta^2)
\end{aligned}$$

que é possível somente se

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) = 0.$$

Logo, podemos passar o limite, e obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = e^{-t^2 \lambda_0''(0)/2} = e^{-t^2 \sigma^2/2}.$$

□

4ª etapa: Conclusão.

Demonstramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f \right) h dm = e^{-t^2 \sigma^2/2}.$$

Segue então, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \right) h dm = e^{-t^2/2}$$

que é a transformada de Fourier da distribuição normal $\mathcal{N}(0, 1)$. O método das funções características de Paul Lévy, Teorema 1.2, nos dá a convergência no sentido das distribuições de $S_n f / \sigma \sqrt{n}$ para a normal $\mathcal{N}(0, 1)$. Logo, para todo $v \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

□

Observáveis Infinitamente Cohomólogos a Zero

Consideremos as seguintes funções

$$\tau : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitz não constante, com } \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tau \, dm = 0.$$

E,

$$m_l : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ tal que } m_l(\theta) = l\theta, \quad l \geq 2.$$

Vamos definir o operador cohomológico

$$\mathcal{L}\mu = \mu \circ m_l - \mu.$$

Dizemos que uma função contínua $\tau : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ é cohomóloga a zero se existe uma função contínua μ tal que

$$\tau = \mathcal{L}\mu.$$

Com base nesta definição podemos fazer a seguinte pergunta:

Existe uma função contínua, não constante, que é infinitamente cohomóloga a zero?

Isto é, é possível encontrar funções contínuas $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\mu_0 = \mathcal{L}\mu_1$$

$$\mu_1 = \mathcal{L}\mu_2 \Rightarrow \mu_0 = \mathcal{L}^2\mu_2$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mu_n = \mathcal{L}\mu_{n+1} \Rightarrow \mu_0 = \mathcal{L}^{n+1}\mu_{n+1} \\ \vdots \end{array}$$

Bamón, Kiwi, Rivera-Letelier e Urzúa, mostraram que todas as aplicações $\tau : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz não constantes com

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tau \, dm = 0$$

não são infinitamente cohomólogos a zero. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [4].

Nosso intuito é generalizar o resultado acima obtido através das seguintes modificações.

Vamos definir o operador

$$\begin{array}{ccc} L : V & \longrightarrow & L^1(hm) \\ u & \longmapsto & u \circ T - u, \end{array}$$

onde $u \in V$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, e $T \in \mathcal{C}$, markoviana, isto é

$$T(I_j) = I$$

para todo subintervalo I_j pertencente a partição associada a T .

Vamos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 9.1. *Seja $u_0 \in V$, $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não constante tal que*

$$\int_0^1 u_0 h \, dm = 0.$$

Então existem $m \geq 0$ e uma função contínua $u \in V$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L^m u = u_0 \quad e \quad \int_0^1 u h \, dm = 0$$

mas $L\rho \neq u$ para toda função contínua $\rho \in V$.

Precisaremos de alguns lemas preliminares para mostrarmos o resultado acima.

Lema 9.2. *Se $f \in \text{Im}(L)$ então*

$$\int_0^1 f h \, dm = 0.$$

Demonstração. Se $f \in \text{Im}(L)$ então existe $g \in V$ tal que $Lg = f$. Assim $g \circ T - g = f$.

Como a medida hm é invariante por T , temos que

$$\int_0^1 f h \, dm = \int_0^1 (g \circ T - g) h \, dm = \int_0^1 g \circ T h \, dm - \int_0^1 g h \, dm = 0.$$

□

Lema 9.3. $\text{Ker}(L) = \{f \in V : f \text{ é constante em quase toda parte}\}.$

Demonstração. Seja $f \in \text{Ker}(L)$. Então $f \circ T - f = 0$, isto é, $f \circ T = f$. Mostremos que f é constante exceto em um conjunto de medida nula.

Como $f \in V$, f é limitada. Então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais

$$c_1 \leq f(x) \leq c_2, \text{ para todo } x \in I.$$

Logo,

$$\mu(\{x \in I : f(x) \geq c_1\}) = \mu(\{x \in I : f(x) \leq c_2\}) = \mu(I) = 1,$$

onde $\mu = hm$, medida ergódica absolutamente contínua.

Seja $c > 0$ tal que $c_1 \leq c \leq c_2$. Podemos então decompor I em $I = A \cup B$, onde

$$A := \{x \in I : f(x) > c\} \text{ e } B := \{x \in I : f(x) \leq c\}.$$

Temos que

$$\mu(I) = \mu(A) + \mu(B) = 1.$$

Como $f \circ T = f$, temos que A é invariante por T . De fato:

Seja $x \in T^{-1}(A)$, então $Tx \in A$. Logo,

$$f(Tx) > c \Rightarrow f(x) > c \Rightarrow x \in A.$$

E, portanto, $T^{-1}(A) \subset A$.

Seja $x \in A$, então

$$f(x) > c \Rightarrow f(Tx) > c \Rightarrow Tx \in A \Rightarrow x \in T^{-1}(A).$$

E, portanto, $A \subset T^{-1}(A)$.

Concluimos então que A é invariante por T . Analogamente podemos mostrar que B também é invariante por T .

Como μ é ergódica, temos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A^c) = 0$. Portanto, para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 \leq c \leq c_2$, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Ou seja, para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 \leq c \leq c_2$, $f(x) > c$ para quase todo $x \in I$, ou $f(x) \leq c$ para quase todo $x \in I$. Logo, f é constante, exceto possivelmente em um conjunto de medida nula.

□

Lema 9.4. *Sejam $u_0, u_1 \in V$ funções contínuas, $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u_0 = Lu_1$ e*

$$\int_0^1 u_1 h \, dm = 0$$

Então

$$\|u_1\|_\infty \leq v(u_1) \leq v(u_0).$$

Demonstração. Por definição,

$$v(u_1) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{m-1} |u_1(a_i) - u_1(a_{i+1})|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições de I .

Vamos escolher um subintervalo I_j da partição associada a T . Como T é markoviana, $T(I_j) = I$. E assim, para cada a_i , existe $b_i \in I_j$ tal que

$$\sigma_j(a_i) = b_i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v(u_1) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{m-1} |u_1(a_i) - u_1(a_{i+1})| = \sup_{\sigma_j(\mathcal{P})} \sum_{i=1}^{m-1} |u_1(Tb_i) - u_1(Tb_{i+1})| = \\ &= \sup_{\sigma_j(\mathcal{P})} \sum_{i=1}^{m-1} |u_1 \circ T(b_i) - u_1 \circ T(b_{i+1})| = v_{I_j}(u_1 \circ T). \end{aligned}$$

Além disso,

$$v(u_1 \circ T) \geq \sum_{k=1}^{m-1} v_{I_k}(u_1 \circ T) = \sum_{k=1}^{m-1} v(u_1) = nv(u_1).$$

Logo,

$$v(u_0) = v(u_1 \circ T - u_1) \geq v(u_1 \circ T) - v(u_1) \geq nv(u_1) - v(u_1).$$

Concluimos então que

$$v(u_0) \geq v(u_1).$$

Agora, observe que

$$\sup_x |u_1(x)| - \inf_x |u_1(x)| \leq v(u_1) \Rightarrow \sup_x |u_1(x)| \leq \inf_x |u_1(x)| + v(u_1).$$

Como

$$\int_0^1 u_1 h \, dm = 0,$$

então $\inf_x |u_1(x)| = 0$.

Logo,

$$\sup_x |u_1(x)| \leq v(u_1) \Rightarrow \|u_1\|_{\infty} \leq v(u_0).$$

□

Lema 9.5. *Seja $w \in V$ contínua, $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ não constante. Se para toda $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi h \in \text{Ker}(\Phi)$, onde Φ é o operador de Perron-Frobenius associado a T , tivermos*

$$\int_0^1 w \varphi h \, dm = 0,$$

então existe $\beta \in V$ tal que

$$w = \beta \circ T.$$

Demonstração. Suponhamos que para todo $\varphi \in V$ tal que $\varphi h \in \text{Ker}(\Phi)$ tivermos

$$\int_0^1 w \varphi h \, dm = 0,$$

então podemos concluir que para todo $y \in I$

$$\sharp w(T^{-1}y) = 1.$$

De fato, consideremos $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)$ com $x_1 \neq x_2$.

Então, $w(x_1) = w(x_2)$. Definamos $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\beta(y) = w(x_1), \text{ ou seja, } \beta(Tx_1) = w(x_1).$$

β está bem definida pois se $y_1 = y_2$ então

$$x = \sigma_1(y_1) = \sigma_1(y_2) \Rightarrow Tx = y_1 = y_2.$$

Logo,

$$\beta(y_1) = \beta(Tx) = \beta(y_2).$$

$\beta \in V$ pois

$$v(\beta) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n-1} |\beta(a_i) - \beta(a_{i+1})|.$$

Como T é markoviana, para cada $i = 1, \dots, n-1$ existe $b_i \in I$ tal que $T(b_i) = a_i$ para toda partição $\mathcal{P}$. Assim,

$$\begin{aligned} v(\beta) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n-1} |\beta(T(b_i)) - \beta(T(b_{i+1}))| = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n-1} |\beta \circ T(b_i) - \beta \circ T(b_{i+1})| \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n-1} |w(b_i) - w(b_{i+1})| \leq v(w) < \infty. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\sharp w(T^{-1}y) = 1$ para todo $y \in I$.

Vamos supor por absurdo que $\sharp w(T^{-1}y) \neq 1$. Então existe $y_0 \in I$ tal que para pelo menos dois ramos inversos de T , que aqui denotamos por σ_1 e σ_2 , temos

$$w \circ \sigma_1(y_0) \neq w \circ \sigma_2(y_0).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor

$$w \circ \sigma_1(y_0) > w \circ \sigma_2(y_0).$$

Pela continuidade de σ_1 , σ_2 e w , existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo

$$y \in J := (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon), \text{ temos que } w(\sigma_1(y)) > w(\sigma_2(y)).$$

Consideremos então os subintervalos $\tilde{I}_1 \subset I_1$ e $\tilde{I}_2 \subset I_2$ tais que

$$\tilde{I}_1 = \sigma_1 J \text{ e } \tilde{I}_2 = \sigma_2 J.$$

Vamos agora definir φ em I_2 da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \tilde{I}_2 \\ 0 & \text{se } x \in I_2 \cap \tilde{I}_2^c \end{cases}$$

Para que φ seja tal que $\Phi(\varphi h) = 0$, podemos definir φ em I_1 da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{|DT(x)|}{|DT(\sigma_2(Tx))|} \cdot \frac{h(\sigma_2(Tx))}{h(x)} & \text{se } x \in \tilde{I}_1 \\ 1 & \text{se } x \in \tilde{I}_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 w(x) \varphi(x) h(x) dm(x) &= \int_{I_1} w(x) \varphi(x) h(x) dm(x) + \int_{I_2} w(x) \varphi(x) h(x) dm(x) \\ &= \int_{\tilde{I}_1} w(x) \left(-\varphi(\sigma_2(Tx)) \frac{|DT(x)|}{|DT(\sigma_2(Tx))|} \frac{h(\sigma_2(Tx))}{h(x)} \right) h(x) dm(x) \\ &\quad + \int_{\tilde{I}_2} w(x) \varphi(x) h(x) dm(x). \end{aligned}$$

Como $\sigma_2 \circ T : I_1 \rightarrow I_2$ é um difeomorfismo, podemos fazer uma mudança de variáveis e obter

$$\begin{aligned} & - \int_{\tilde{I}_1} w(x) \varphi(\sigma_2 \circ T(x)) |D\sigma_2(Tx)| |DT(x)| h(\sigma_2 \circ T(x)) dm(x) + \int_{\tilde{I}_2} w(x) \varphi(x) h(x) dm(x) \\ &= - \int_{\tilde{I}_2} w(\sigma_1 \circ T(x)) \varphi(x) h(x) dm(x) + \int_{\tilde{I}_2} w(\sigma_2 \circ T(x)) \varphi(x) h(x) dm(x). \end{aligned}$$

Como $w \circ \sigma_1(y) > w \circ \sigma_2(y)$ para todo $y \in J$, temos

$$\begin{aligned} & - \int_{\tilde{I}_2} w \circ \sigma_1(Tx) \varphi(x) h(x) dm(x) + \int_{\tilde{I}_2} w \circ \sigma_2(Tx) \varphi(x) h(x) dm(x) \\ & < - \int_{\tilde{I}_2} w \circ \sigma_2(Tx) \varphi(x) h(x) dm(x) + \int_{\tilde{I}_2} w \circ \sigma_2(Tx) \varphi(x) h(x) dm(x) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 w \varphi h dm \neq 0,$$

o que contradiz a nossa hipótese.

Concluimos então que

$$\sharp w(T^{-1}y) = 1 \text{ para todo } y \in I.$$

□

Lema 9.6. *Seja $u \in V$ contínua, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ não constante, tal que*

$$\int_0^1 u h dm = 0.$$

Então existem $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ e um inteiro $p \geq 0$ tais que

$$\Phi(\varphi h) = 0,$$

onde Φ é o operador de Perron-Frobenius associado a T ,

$$\int_0^1 u \varphi \circ T^j h dm = 0, \text{ para todo } 0 \leq j < p$$

e

$$\int_0^1 u \varphi \circ T^p h dm \neq 0.$$

Demonstração. Vamos supor que, para todo φ tal que $\varphi h \in \text{Ker}(\Phi)$ e para todo inteiro $k \geq 0$

$$\int_0^1 u \varphi \circ T^k h dm = 0.$$

Como $\varphi h \in \text{Ker}(\Phi)$,

$$P(\varphi) = \frac{\Phi(\varphi h)}{h} = 0.$$

Logo, para todo φ tal que $\varphi h \in \text{Ker}(\Phi)$, temos que $\varphi \in \text{Ker}(P)$.

Vimos que P é um operador no espaço de Hilbert $L^2(hm)$ e que admite como operador adjunto $Ug = g \circ T$, isto é,

$$\langle Pf, g \rangle_{hm} = \langle f, Ug \rangle_{hm}.$$

Assim, para todo inteiro $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 P^k u \varphi h \, dm &= \langle P^k u, \varphi \rangle_{hm} = \langle u, U^k \varphi \rangle_{hm} = \langle u, \varphi \circ T^k \rangle_{hm} \\ &= \int_0^1 u \varphi \circ T^k h \, dm = 0. \end{aligned}$$

Observe que, para $k = 1$ e para todo $\varphi \in \text{Ker}(P)$,

$$\int_0^1 Pu \varphi h \, dm = 0.$$

Temos que

$$Pu = \frac{\Phi(uh)}{h}$$

é contínua, pois u é contínua por hipótese e h também é contínua pelo Teorema 6.15.

Logo, pelo Lema 9.5 existe β_1 tal que

$$Pu = \beta_1 \circ T.$$

Agora, para $k = 2$ temos,

$$P^2 u = P(Pu) = P(\beta_1 \circ T).$$

Vimos anteriormente que, se $f, g \in V$, então

$$\Phi(f \circ T \cdot g) = f \Phi(g) \text{ em } m - \text{quase toda parte.}$$

Assim, como $\beta_1, h \in V$, temos

$$P(\beta_1 \circ T) = \frac{\Phi(\beta_1 \circ T \cdot h)}{h} = \frac{\beta_1 \Phi(h)}{h} = \frac{\beta_1 h}{h} = \beta_1.$$

Portanto, para todo $\varphi \in \text{Ker}(P)$,

$$\int_0^1 u \varphi \circ T^2 h \, dm = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^2 u \varphi h \, dm = \int_0^1 \beta_1 \varphi h \, dm = 0.$$

Então, pelo Lema 9.5 existe β_2 tal que

$$\beta_1 = \beta_2 \circ T.$$

Logo,

$$Pu = \beta_1 \circ T = \beta_2 \circ T^2.$$

Suponhamos, por indução, que exista β_{n-1} tal que

$$P^{n-1} u = \beta_{n-2} = \beta_{n-1} \circ T.$$

E, conseqüentemente

$$Pu = \beta_{n-1} \circ T^{n-1}.$$

Mostremos então que existe β_n tal que

$$Pu = \beta_n \circ T^n.$$

Temos que

$$P^n u = P(P^{n-1}u) = P(\beta_{n-1} \circ T) = \beta_{n-1}.$$

Assim, para todo $\varphi \in \text{Ker}(P)$,

$$\int_0^1 u \varphi \circ T^n h \, dm = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^n u \varphi h \, dm = \int_0^1 \beta_{n-1} \varphi h \, dm = 0.$$

Então, pelo Lema 9.5 existe β_n tal que

$$\beta_{n-1} = \beta_n \circ T.$$

Portanto,

$$Pu = \beta_{n-1} \circ T^{n-1} = \beta_n \circ T \circ T^{n-1} = \beta_n \circ T^n.$$

Observe que, para todo φ tal que $\varphi h \in \text{Ker}(P)$, temos que

$$\sharp Pu(T^{-n}u) = 1 \quad \text{para todo } y \in I \text{ e para todo } n.$$

De fato, suponha que $\sharp Pu(T^{-n}u) \neq 1$. Então, existem $x_1, x_2 \in T^{-n}y$, tais que $Pu(x_1) \neq Pu(x_2)$. Então,

$$T^n x_1 = y \text{ e } T^n x_2 = y.$$

Temos,

$$Pu(x_1) = \beta_n \circ T^n(x_1) = \beta_n(y),$$

$$Pu(x_2) = \beta_n \circ T^n(x_2) = \beta_n(y).$$

Portanto, $Pu(x_1) = Pu(x_2)$, o que é uma contradição.

Assim, $\sharp Pu(T^{-n}u) = 1$.

Tomemos então $y_0 \in I$ tal que $\bigcup_n \{T^{-n}(y_0)\}$ é denso em I . Assim, dados $a, b \in I$ existem seqüências $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ com $T^n(a_n) = y_0$ e $T^n(b_n) = y_0$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Pela continuidade de Pu , temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Pu(a_n) = Pu(a) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Pu(b_n) = Pu(b).$$

Como $\sharp Pu(T^{-n}(y_0)) = 1$, segue que $Pu(a_n) = Pu(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, portanto,

$$Pu \text{ é constante, isto é, } Pu = c.$$

Note que

$$\int_0^1 Pu h \, dm = \int_0^1 \Phi(uh) \, dm = \int_0^1 u h \, dm = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 P u h \, dm = \int_0^1 c h \, dm = c.$$

Logo $c = 0$, implicando que $u \in \text{Ker}(P)$.

Agora tomemos $\varphi = u$ e consideremos $k = 0$.

$$\int_0^1 P^0 u \varphi h \, dm = 0 \Rightarrow \int_0^1 u u h \, dm = 0 \Rightarrow \int_0^1 u^2 h \, dm = 0.$$

Como $u^2 \geq 0$, segue que

$$u \equiv 0 \text{ } h m\text{-quase toda parte.}$$

O que é um absurdo pois u não é constante.

□

Demonstração da Proposição 9.1

Vamos supor que para $0 \leq n \leq m$, existe $u_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que

$$L^n u_n = u_0,$$

e vamos mostrar que m é limitado.

Observe que, para todo $0 \leq n \leq m$, $u_n \in \text{Im}(L)$. De fato

$$L(u_1) = u_0$$

$$L^2 u_2 = u_0 = L u_1 \Rightarrow L(L u_2) = L u_1 \Rightarrow L(L u_2) - L(u_1) = 0 \Rightarrow L(L u_2 - u_1) = 0.$$

Pelo Lema 9.3, como

$$\text{Ker}(L) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é constante em quase toda parte}\},$$

$$L u_2 - u_1 = K \Rightarrow L u_2 = u_1 + K.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $K = 0$. Daí, concluímos que $u_1 \in \text{Im}(L)$.

Indutivamente, obtemos que $u_n \in \text{Im}(L)$ para $0 \leq n \leq m$.

Concluimos então que

$$L u_n = u_{n-1},$$

e, pelo Lema 9.2,

$$\int_0^1 u_n h \, dm = 0,$$

para todo $0 \leq n \leq m$.

Dado $\varphi \in \text{Ker}(P)$ definimos

$$\tilde{u}(j) := \int_0^1 u(x) \varphi(T^j x) h(x) \, dm(x).$$

Pelo Lema 9.6 existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(\varphi h) = 0$ e existe um inteiro $p > 0$ tal que

$$\tilde{u}_0(j) = \int_0^1 u_0 \varphi(T^j) h \, dm = 0, \quad \text{para todo } 0 \leq j < p$$

e

$$\tilde{u}_0(p) = \int_0^1 u_0 \varphi(T^p) h \, dm \neq 0.$$

Temos que $\|u_n\|_\infty \leq v(u_0)$. De fato, pelo Lema 9.4, temos que $\|u_1\|_\infty \leq v(u_0)$. Agora, observe que como

$$u_1 = Lu_2 = u_2 \circ T - u_2,$$

temos que

$$\|u_2\|_\infty \leq v(u_1) \leq v(u_0).$$

Portanto, $\|u_2\|_\infty \leq v(u_0)$.

Indutivamente, temos que $\|u_n\|_\infty \leq v(u_0)$.

Assim,

$$|\tilde{u}_n(k)| = \left| \int_0^1 u_n(x) \varphi(T^k x) h(x) \, dm(x) \right| \leq \int_0^1 |u_n(x)| |\varphi(T^k x)| |h(x)| \, dm(x) \leq M v(u_0).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n-1}(l) &= \int_0^1 u_{n-1}(x) \varphi(T^l x) h(x) \, dm(x) = \int_0^1 [u_n \circ T(x) - u_n(x)] \varphi(T^l x) h(x) \, dm(x) \\ &= \int_0^1 u_n \circ T(x) \varphi(T^{l-1}(Tx)) h(x) \, dm(x) - \int_0^1 u_n(x) \varphi(T^l x) h(x) \, dm(x) \\ &= \tilde{u}_n(l-1) - \tilde{u}_n(l), \end{aligned}$$

para $l \geq 1$.

Para $l = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n-1}(0) &= \int_0^1 u_{n-1}(x) \varphi(x) h(x) \, dm(x) = \int_0^1 [u_n \circ T(x) - u_n(x)] \varphi(x) h(x) \, dm(x) \\ &= \int_0^1 u_n \circ T(x) \varphi(x) h(x) \, dm(x) - \int_0^1 u_n(x) \varphi(x) h(x) \, dm(x) \\ &= \int_0^1 u_n(x) \Phi(\varphi h)(x) \, dm(x) - \tilde{u}_n(0) = -\tilde{u}_n(0), \end{aligned}$$

para $0 < n \leq m$.

Portanto, para $0 < n \leq m$

$$\tilde{u}_n(l) = \tilde{u}_n(l-1) - \tilde{u}_{n-1}(l), \quad \text{para } l \geq 1. \quad (9.1)$$

$$\tilde{u}_{n-1}(0) = -\tilde{u}_n(0). \quad (9.2)$$

Como $\tilde{u}_0(j) = 0$ para $0 \leq j < p$, temos pela equação (9.2)

$$0 = \tilde{u}_0(0) = -\tilde{u}_1(0) \Rightarrow \tilde{u}_1(0) = 0.$$

E, indutivamente,

$$\tilde{u}_n(0) = 0 \text{ para } 0 \leq n \leq m.$$

E, de (9.1) segue que para $0 < j < p$

$$\tilde{u}_1(j) = \tilde{u}_0(j) - \tilde{u}_1(j-1).$$

Para $j = 1$,

$$\tilde{u}_1(1) = \tilde{u}_0(1) - \tilde{u}_1(0) \Rightarrow \tilde{u}_1(1) = 0.$$

Indutivamente, fazendo $1 < j < p$, temos que

$$\tilde{u}_1(j) = 0 \text{ para } 0 \leq j < p.$$

Da mesma forma, usando (9.1), mostramos que

$$\tilde{u}_n(j) = 0 \text{ para } 0 \leq j < p \text{ e } 0 \leq n \leq m. \quad (9.3)$$

Agora, da equação (9.1), considerando $l = p$, temos

$$\tilde{u}_{n-1}(p) = \tilde{u}_n(p-1) - \tilde{u}_n(p).$$

De (9.3) segue que

$$\tilde{u}_{n-1}(p) = -\tilde{u}_n(p). \quad (9.4)$$

Pela equação (9.4), concluímos

$$\tilde{u}_m(p) = -\tilde{u}_{m-1}(p) = -(-\tilde{u}_{m-2}(p)) = (-1)^m \tilde{u}_0(p).$$

E, da equação (9.1) temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m-1}(p+1) &= \tilde{u}_{m-1}(p) - \tilde{u}_{m-2}(p+1) = (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) - \tilde{u}_{m-2}(p+1) \\ &= (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) - (\tilde{u}_{m-2}(p) - \tilde{u}_{m-3}(p+1)) \\ &= (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) - ((-1)^{m-2} \tilde{u}_0(p) - \tilde{u}_{m-3}(p+1)) \\ &= \dots = (m-1)(-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) + (-1)^{m+1} \tilde{u}_0(p+1). \end{aligned}$$

Consideremos na equação (9.1) $l = p+1$

$$\tilde{u}_m(p+1) = \tilde{u}_m(p) - \tilde{u}_{m-1}(p+1).$$

Temos então

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m-1}(p+1) &= \tilde{u}_m(p) - \tilde{u}_m(p+1) \Rightarrow \\ (m-1)(-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) + (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p+1) &= (-1)^m \tilde{u}_0(p) - \tilde{u}_m(p+1) \Rightarrow \\ (m-1)(-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) + (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p) &= -(-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p+1) - \tilde{u}_m(p+1) \Rightarrow \\ m(-1)^m \tilde{u}_0(p) &= (-1)^{m-1} \tilde{u}_0(p+1) + \tilde{u}_m(p+1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} m &= \frac{(-1)^{m-1}\tilde{u}_0(p+1) + \tilde{u}_m(p+1)}{(-1)^m\tilde{u}_0(p)} \Rightarrow \\ m &\leq \frac{|\tilde{u}_0(p+1)| + |\tilde{u}_m(p+1)|}{|\tilde{u}_0(p)|} \Rightarrow \\ m &\leq \frac{|\tilde{u}_0(p+1)| + Mv(u_0)}{|\tilde{u}_0(p)|}. \end{aligned}$$

□

Observação: O mesmo estudo que aqui fizemos sobre a decomposição espectral dos operadores de Perron-Frobenius através do Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu, também pode ser realizado se substituirmos o espaço das funções de variação limitada $(V, \|\cdot\|_V)$ pelo espaço das funções de p -variação limitada que definimos a seguir.

Considere uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ em L^1 . Definimos a p -variação de f por

$$var_p(f) = \inf_{g=f \text{ m-q.t.p.}} \sup \left(\sum_{i=1}^n |g(a_i) - g(a_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $p \geq 1$ e o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de $[0, 1]$. Denotamos o espaço das funções de p -variação limitada por $BV_{\frac{1}{p}}$. Note que as funções $1/p$ -Hölder- contínuas têm p -variação limitada.

Tal estudo pode ser encontrado em [14].

Em particular o Teorema do Limite Central e os resultados deste capítulo podem ser generalizados para observáveis Hölder-contínuos.

Referências Bibliográficas

- [1] Aaronson, J. e Denker, M. Group extensions of Gibbs-Markov maps. *Probab. Theory Related Fields* 123, no. 1, 38–40, (2002).
- [2] Alder, R., Flatto, L., *Geodesic Flows, Interval Maps and Symbolic Dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., 25, p. 229-334,(1992).
- [3] Baladi, V., *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 16, World Scientific, (2000).
- [4] Bamón, R., Rivera-Letelier, J., Kiwi, J. e Urzúa, R., *On the Topology of Solenoidal Attractors of the Cylinder*, pré-publicação eletrônica, (2003).
- [5] Billingsley, P., *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, INC., (1979).
- [6] Broise, A. Transformations Dilatantes de L'Intervalle et Théorème Limites. in *Études Spectrales D'Opérateurs de Transfert et Applications*, Asterisque 238, (1996).
- [7] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, (1983).
- [8] Craizer, M., *Teoria Ergódica das Transformações Expansoras*, Tese de Mestrado, IMPA, (1985).
- [9] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, (2002).
- [10] Fischer, H., *The Central Limit Theorem from Laplace to Cauchy: Changes in Stochastic Objectives and in Analytical Methods*, Katholische Universität Eichstätt, D-85071 Eichstätt, Germany.
- [11] Garcia, A., Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, (2003).
- [12] Guivarc'h, Y., *Propriétés Ergodiques, en Mesure infinie, de Certains Systèmes Dynamiques fibrés*, Ergodic Theory Dynam. Systems 9 (1989), no. 3, 433-453.

-
- [13] Ionescu-Tulcea, C. T., Marinescu, G., *Théorie Ergodique pour des Classes D'Opérations Non Complètement Continues*, Ann. Math. 47, 140-147 (1946).
 - [14] Keller, G., *Generalized Bounded Variation Applications to Piecewise Monotonic Transformations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 69, 461-478, (1985).
 - [15] Kolmogorov, A. N., Fomim, S. V., *Introduct Real Analysis*, Dover Publications, INC., (1970).
 - [16] Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classic Library, (1989).
 - [17] Moser, J., Phillips, E., Varadham, S., *Ergodic Theory*, Seminar, Courant Inst. Math. Sci. New-York Univ., p. 111-120, (1975).
 - [18] Petrov, V. V., *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlang, (1972).
 - [19] Rousseau-Egele, J., *Un Theorem de la Limite Locale pour une Classe de Transformations Dilatante et Monotones par Morsseaux*. Ann. Math. 11, 772-788, (1983).
 - [20] Schechter, M., *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, INC. (1971).
 - [21] Viana, M., *Stochastic dynamics of deterministic systems*, Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA (1997).
 - [22] <http://www.applet-magic.com/randovar.htm>

Índice Remissivo

- Convergência
 - em distribuição, 21
 - fraca, 21
- Desigualdade
 - de Essen e Berry-Essen, 26
- Espaço
 - amostral, 20
 - de probabilidade, 20
- Espectro, 31
- Esperança, 21
- Função
 - característica, 21
 - cohomóloga a zero, 95
 - de distribuição, 21
 - de probabilidade, 20
 - de variação limitada, 22
- Hipótese (H), 84
- Medida de probabilidade, 20
- Operador
 - cohomológico, 95
 - de Perron-Frobenius, 41
- Paul Lévy, mét. das funções caract., 22
- Perturbações do operador de Perron-Frobenius, 69
- Pontos amostrais, 20
- Probabilidade, 20
- Projeção espectral, 36
- Resolvente, 31
- Teorema
 - de Ionescu-Tulcea e Marinescu, 45
 - do Limite Central para Transformações Expansoras, 84
 - do Limite Central para v.a.i.i.d., 19
- Transformação
 - expansora, 39
 - markoviana, 62, 96
 - topologicamente mixing, 63
- Variável aleatória, 20
- Variância, 21, 77