Raízes de aplicações de complexos 2-dimensionais em
superfícies fechadas

Marcio Colombo Fenille

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23 de novembro de 2009

Assinatura: _____

Raízes de aplicações de complexos 2-dimensionais em superfícies fechadas[†]

Marcio Colombo Fenille

Orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Coorientador: *Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos
Novembro/2009

[†] O autor teve suporte financeiro da CAPES e da FAPESP

Resumo

Este texto é resultado de um estudo detalhado da teoria topológica de raízes para aplicações de complexos CW 2-dimensionais em superfícies fechadas (compactas e sem bordo). Diversas abordagens dos problemas envolvidos nesta teoria são apresentadas, algumas inclusive bastante diferenciadas com respeito aos parâmetros da teoria clássica.

Abstract

This text is the result of a detailed study of the topological root theory for maps from 2-dimensional CW complex into closed surfaces (compact and without boundary surfaces). Several approaches to the problems involved in this theory are presented, some of which are quite different with respect to the parameters of the classical theory.

Sumário

1	Teoria de raízes	19
2	O essencial sobre os complexos CW	27
2.1	Construção de complexos CW	27
2.2	Homotopia simples para complexos CW	29
2.3	Apresentações para o grupo fundamental de 2-complexos	30
2.4	Complexo modelo de uma apresentação (finita)	32
2.5	Teoremas de Whitehead e Hurewicz para 2-complexos	33
3	Aspectos da teoria de raízes para aplicações de 2-complexos	35
3.1	A essência de um 2-complexo	35
3.2	Sobre a homologia dos 2-complexos	37
3.3	Sobre a cohomologia dos 2-complexos	37
3.4	Complexos homotopicamente equivalentes a esfera	41
3.5	Células articuladoras e o problema de raízes	42
3.6	O problema de raízes em subcomplexos especiais	44
4	Realizações do número mínimo de raízes	51
5	Raízes de aplicações de 2-complexos na 2-esfera	57
5.1	Fatoração celular e vetor-grau de aplicações	57
5.2	Os lemas fundamentais	59
5.3	O número $\zeta(f)$	64
5.4	O número $\zeta(K, d)$	66
5.5	Dois exemplos interessantes	69
5.6	Condição necessária e suficiente para se ter $\mu(f) = 0$	76
5.6.1	Aplicação quociente e homotopia constante por níveis	77

5.6.2	Prova do Teorema 5.20	78
5.6.3	Alguns exemplos da aplicabilidade do Teorema 5.20	83
5.6.4	Algumas consequências do Teorema 5.20	85
5.7	Nulidade do segundo grupo de cohomotopia	86
5.8	Nulidade do segundo grupo de cohomologia integral	87
6	Classes de Nielsen mínimas e raízes de aplicações levantadas	89
6.1	Minimizando classes de Nielsen para raízes	89
6.2	Raízes de aplicações levantadas	95
6.3	Classes mínimas versus raízes de levantamentos	99
6.4	Aplicações no plano projetivo	100
7	O problema de raízes para aplicações convenientes	103
7.1	Aplicações convenientes	104
7.2	Algumas consequências do Teorema 7.5	108
7.3	Mutação de homomorfismo e existência de levantamentos	112
7.4	Mutação para a aniquilação de raízes	115
7.5	Fórmulas sobre funções $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadoras.	118
7.6	Mutação simbólica	120
7.7	Detalhamento para a prática dos resultados	123
7.8	Exemplos e aplicações	125
7.8.1	Aplicações de um 2-complexo no toro	125
7.8.2	Aplicações de um 2-complexo na garrafa de Klein	126
7.8.3	Aplicações de um 2-complexo no plano projetivo	127
	Apêndice	131
	Referências Bibliográficas	135
	Índice Remissivo	139

Lista de Figuras

1.1	Encontrando infinitas raízes	20
1.2	Um exemplo em que $\mu(f)$ é finito	21
1.3	$\mu(f)$ não é invariante do tipo de homotopia do domínio de f	21
2.1	Um complexo CW que não é simplicial	28
2.2	Laços geradores do grupo fundamental	31
2.3	Definindo relatores para o grupo fundamental	31
2.4	O 1-esqueleto de um 2-complex modelo	32
3.1	Construindo o complexo $K_{p,q}$	40
3.2	e_A^2 é uma 2-célula articuladora de K	42
3.3	e_A^2 é uma 2-célula colapsante de K_*	42
3.4	O subcomplexo L_*	43
3.5	Segundo caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$	45
3.6	Terceiro caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$	46
3.7	Quarto caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$	47
3.8	Colarinho de L em K	48
3.9	Aniquilando raízes fora de $K\langle 2 \rangle$	49
4.1	Uma decomposição celular para o bouquet de duas 2-esferas	52
4.2	Planificação da superfície M	53
5.1	Auto-aplicações da 2-esfera com grau d	59
5.2	Construção de vizinhança para $e^0 \times I$	60
5.3	A secção $V_t = V \times t$	61
5.4	O cone C	62
5.5	Um 2-complexo K homotopicamente equivalente a esfera S^2	70

5.6	Um 2-complexo K homotopicamente equivalente a S^2	72
5.7	Um homeomorfismo específico do plano projetivo	73
5.8	O caminho fechado simples $\bar{f}_1(\sigma)$ in S^2	74
5.9	Fecho da vizinhança aberta U de x_0 e x_2 em $\mathbb{P}_3^2$	74
5.10	Uma auto-aplicação específica do pseudo plano projetivo $\mathbb{P}_3^2$	75
5.11	Auto-aplicações específicas de S^2 de graus 1 e -1	75
5.12	Indexando as fibras de χ sobre e^0	80
5.13	Esquema da construção das homotopias H_i	82
6.1	Um 2-complexo simplicial	91
6.2	Um 2-complexo obtido colando-se três toros	93

Introdução

Como o título sugere, este texto contém um estudo detalhado e diversificado do problema de raízes para aplicações de complexos CW 2-dimensionais em superfícies fechadas (compactas e sem bordo). Desde já, que fique claro que a abordagem apresentada neste texto é um tanto adversa daquelas usualmente empregadas no estudo de tal problema em situações em que, por exemplo, o domínio e o contra-domínio das aplicações envolvidas são espaços de dimensão maior ou igual a três, ou simplesmente em que o interesse seja outro que não o evidenciado neste trabalho. Isto pode gerar, de início, alguma estranheza por parte de alguns leitores já calejados por outras práticas; espero que tal sentimento seja breve!

Para inserir no contexto o leitor que inicia agora a leitura, com discrição introduzo alguns conceitos, terminologias, notações, etc. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos Hausdorff, normais, conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos. Seja $a \in Y$ um ponto. Uma *raiz de f em a* é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = a$. A teoria de raízes, de um modo bem geral, preocupa-se em calcular o assim chamado *número mínimo de raízes de f em a* , definido por $\mu(f, a) = \min\{\#\varphi^{-1}(a) : \varphi \text{ é homotópica a } f\}$. Em situações bem gerais e de principal interesse, $\mu(f, a)$ é de fato um número, ou seja, é finito, e independe do ponto a selecionado. Quando $\mu(f, a) = 0$, diz-se que f é *livre de raízes*. Como se deve imaginar, pelo que se tem dito no parágrafo anterior, suporemos (quase sempre) que X é um complexo CW de dimensão dois e que Y é uma superfície fechada. Como veremos já no próximo capítulo, estas são condições suficientes para se garantir a finitude de $\mu(f, a)$ e sua independência em relação ao ponto $a \in Y$. Isto nos permitirá simplificar a notação, escrevendo $\mu(f)$ ao invés de $\mu(f, a)$, sempre que isto se fizer conveniente.

A teoria de Nielsen para raízes fornece o assim chamado *número de Nielsen para raízes de f em a* , denotado por $N(f, a)$, o qual é um limitante inferior para o número mínimo de raízes de f em a , ou seja, satisfaz $N(f, a) \leq \mu(f, a)$. Quando se verifica a igualdade nesta expressão, diz-se que f tem a (ou satisfaz a) *propriedade de Wecken*. Discussões a respeito

desta propriedade têm sido intensas em vários trabalhos, alguns bastante recentes. Neste texto, discutimos um problema mais geral relacionado à propriedade de Wecken. Detalhes da teoria de Nielsen serão utilizados em algumas partes do trabalho.

O primeiro capítulo do texto trata-se de uma breve exposição sobre o desenrolar da teoria topológica de raízes ao longo de sua existência. Apresentamos desde as definições mais elementares donde principiou a teoria, até resultados recentes que serão utilizados no decorrer do texto. Apresentamos prova para apenas um resultado, que não foi encontrado na literatura. Para todos os outros, uma referência precisa é indicada. É claro que muitos resultados importantes da teoria de raízes não são apresentados no breve capítulo de que tratamos. Alguns deles serão apresentados ou simplesmente citados e referenciados quando seu uso se fizer necessário aos propósitos do trabalho. Outros serão simplesmente omitidos, mas fica aqui declarado nosso reconhecimento ao seu valor.

O segundo capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos fundamentais da teoria de complexos CW que mais diretamente serão utilizados no restante do texto. Iniciamos pela construção geral de um complexo CW e logo partimos para um breve estudo da teoria de homotopia simples de tais espaços. Enfatizamos a construção e os resultados envolvendo os assim chamados *complexos modelo*, objetos que se mostraram demais importantes à abordagem do problema de raízes empregada neste trabalho, em especial a partir do Capítulo 5. Encerramos o capítulo apresentando os Teoremas de Whitehead e Hurewicz para 2-complexos.

No terceiro capítulo fazemos um estudo metódico do problema de raízes para aplicações cujo domínio é um 2-complexo (ou seja, um complexo CW 2-dimensional). Iniciamos introduzindo um novo conceito chamado a *essência* de um 2-complexo. Trata-se de uma contagem do número das assim chamadas 2-células *essenciais* que compõem o complexo, sendo estas nada mais que aquelas 2-células que nenhuma seqüência de colapsos é capaz de eliminar. Se todas as 2-células de um 2-complexo são essenciais, então ele é chamado um complexo essencial. Fazemos um breve estudo sobre a homologia e a cohomologia de 2-complexos, relacionando a nulidade de tais invariantes topológicos com a nulidade da essência do complexo. Mostramos, por exemplo, que um 2-complexo pode ter segundo grupo de cohomologia integral trivial e ainda ser essencial. Por outro lado, se a essência de um 2-complexo é zero, então seu segundo grupo de cohomologia integral é trivial. E se este último fato ocorre, então chegamos a uma interessante fórmula relacionando o número de 2-células do 2-complexo e o primeiro número de Betti de seus esqueletos. A saber, se K é um 2-complexo finito e $\#^2(K)$ indica a quantidade de suas 2-células, então $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$ implica que $\#^2(K) = \beta_1(K^1) - \beta_1(K)$. Fórmula semelhante a esta pode ser empregada para se verificar se um 2-complexo é ou não é homotopicamente equivalente a 2-esfera. De fato, provamos que um 2-complexo conexo e simplesmente conexo K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 se, e somente se, sua essência é positiva e verifica-se a fórmula $\#^2(K) - \beta_1(K^1) = 1$. Apesar de tudo isso, a essência por si só é um conceito fraco em alguns sentidos. Por exemplo, uma 2-célula pode não colap-

sar, e logo ser essencial, mas pode ocorrer que a mesma seja colapsante após a realização de uma sutil subdivisão de suas faces. Se isto ocorre, então tal 2-célula é chamada *articuladora*. Todo 2-complexo K pode ter seu 1-esqueleto subdivido de modo que todas as suas 2-células articuladoras passem a ser colapsantes. O complexo obtido de K através de tal processo é chamado o complexo *articulador* de K e é denotado por $K_{\dagger}$. Se K é isomorfo a $K_{\dagger}$, então K é chamado um *complexo articulado*. Verificamos que a essência do complexo articulador é menor ou igual a essência do próprio complexo. Ainda mais, dada uma aplicação com domínio em um 2-complexo K , toda raiz que possa existir em uma 2-célula colapsante ou articuladora de K pode ser eliminada sem que outras surjam ou sejam alteradas. Em consequência disto segue-se que se a essência do complexo articulador $K_{\dagger}$ é nula, então toda aplicação com domínio K é livre de raízes. Disto concluímos que o estudo do problema de raízes para aplicações cujo domínio é um 2-complexo pode ser realizado sem qualquer prejuízo assumindo que tal complexo seja essencial e articulado. Outra hipótese que mostramos poder-se admitir é que o 2-complexo não possua subcomplexo essencialmente de dimensão 1, isto é, que todo subcomplexo de dimensão 1 esteja contido no bordo de 2-células.

O quarto capítulo é breve e simples, mas importante. Nele lidamos com o problema de raízes de aplicações de 2-complexos em superfícies no sentido de se descobrir que tipo de aplicações pode ser responsável pela realização do número mínimo de raízes. Para que isto seja desde já compreendido, apresentamos a seguinte definição: Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação, com M uma superfície. Diz-se que o par (φ, a) , onde $\varphi : K \rightarrow M$ é uma aplicação e $a \in M$ é um ponto, realiza $\mu(f)$ se φ é homotópica a f e $\mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$. Diz-se também que (φ, a) é um par realizando $\mu(f)$. Definimos e estudamos os tipos ∇_1 , ∇_2 e ∇_3 de aplicações de um 2-complexo em uma superfície fechada, de acordo com o tipo de aplicação que pode realizar o número mínimo de raízes de uma aplicação dada a priori. Estas definições podem ser estendidas para casos mais gerais, mas isto não condiz com nossa intenção neste trabalho. Não afirmamos, de um modo geral, que uma dada aplicação seja de um dos tipos apresentados; aliás, apresentamos um exemplo de uma aplicação de um 2-complexo na 2-esfera que não é de nenhum desses tipos. Outrossim, estudamos algumas vantagens que se possa ter no estudo do problema de raízes envolvendo aplicações que sejam de um ou mais de um destes tipos, além de apresentarmos algumas equivalências entre os tipos para aplicações especiais. Enfatizamos, de certa maneira, o caso de aplicações entre superfícies, as quais mostramos ser dos três tipos.

No quinto capítulo estudamos o problema de raízes para aplicações de 2-complexos na esfera S^2 . Dada uma tal aplicação $f : K \rightarrow S^2$, satisfazendo certas propriedades, definimos dois números inteiros $\zeta(f)$ e $\zeta(K, d)$, os quais constituem limitantes superiores para $\mu(f)$. O número $\zeta(f)$ somente está definido quando f é uma aplicação celular e $\zeta(K, d)$ é definido quando K é homotopicamente equivalente a 2-esfera; aqui utilizamos d para denotar o assim chamado *grau homológico* de f . Quando os dois números estão definidos, verifica-se a expressão $\mu(f) \leq \zeta(K, d) \leq \zeta(f)$. Neste ponto do trabalho lançamos mão do conceito de

complexo modelo; o leitor logo entenderá nossos motivos e pretensões. Se $K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P}$, associamos a $K_{\mathcal{P}}$ uma matriz inteira $\Delta_{\mathcal{P}}$ e mostramos que uma aplicação $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ tem solução inteira, onde $\overrightarrow{\deg}(f)$ é o assim chamado *vetor-grau* de f . Derivamos várias consequências destes resultados e apresentamos diversos exemplos.

No sexto capítulo lembramos que, dada uma aplicação contínua $f : K \rightarrow M$ de um 2-complexo em uma superfície fechada, existem dois números naturalmente associados a ela, a saber, o número de Nielsen para raízes $N(f)$ e o número mínimo de raízes $\mu(f)$. É bem sabido que $N(f) \leq \mu(f)$. Ademais, existe um número $\mu_C(f)$ associado a cada classe de Nielsen de raízes de f . Dada uma classe de Nielsen $\mathfrak{R}$ de f , definimos $\mu_C(\mathfrak{R})$ como sendo o mínimo da cardinalidade $\#\mathfrak{R}'$, onde $\mathfrak{R}'$ é uma classe de Nielsen de uma aplicação $H(\cdot, 1)$, H -relacionada com $\mathfrak{R}$, e H varia no conjunto de todas as homotopias iniciando em f . Prova-se que $\mu_C(\mathfrak{R})$ independe da classe de raízes $\mathfrak{R}$, ficando assim bem definido o número $\mu_C(f) = \mu_C(\mathfrak{R})$ para alguma classe $\mathfrak{R}$, chamado a *cardinalidade mínima das classes de raízes de f* . Um importante problema, que estudamos neste capítulo, consiste em se saber quando se tem a identidade $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$. Apresentamos vários exemplos em que não se verifica esta identidade, a qual generaliza questões ligadas à propriedade de Wecken. Outro problema importante, que resolvemos, consiste em se determinar uma completa relação entre o número mínimo de raízes de uma aplicação e o número mínimo de raízes de seus possíveis levantamentos ao longo de recobrimentos. Em suma, provamos que se $p_k : M \rightarrow N$ é um recobrimento a k folhas da superfície N e se $f : K \rightarrow N$ é uma aplicação admitindo um levantamento $\tilde{f} : K \rightarrow M$ ao longo de p_k , então vale a relação $\mu(f) \geq k\mu(\tilde{f})$, sendo que, além disso, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\mu(\tilde{f}) = 0$. Estabelecemos condições bastante claras e objetivas para que se verifique a identidade $\mu(f) = k\mu(\tilde{f})$. Encontramos uma conexão entre os dois problemas abordados. Mais precisamente, uma conexão entre a verificação das identidades $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$ e $\mu(f) = k\mu(\tilde{f})$, quando a investigação de ambas fizer sentido. Provamos que, nas condições acima, se o *número de Reidemeister* $\mathcal{R}(f) = |\pi_1(N) : f_{\#}\pi_1(X)| = k$, então são equivalentes: (i) $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$, (ii) $\mu(f) = k\mu(\tilde{f})$ e (iii) $\mu(f) = \mu(\tilde{f})N(f)$. Estabelecida esta conexão entre os problemas, pudemos responder várias questões relacionadas aos mesmos, principalmente no contexto em que a superfície do contra-domínio das aplicações consideradas é o espaço projetivo. Provamos, por exemplo, que o número mínimo de raízes de uma aplicação de uma superfície fechada no plano projetivo, induzindo homomorfismo trivial em grupos fundamentais, ou é zero ou é igual a dois. Ainda mais, provamos que para uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{RP}^2$ está satisfeita a relação $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$ se $f_{\#}\pi_1(X) \neq 0$ ou se X é um 2-complexo e f é do tipo ∇_2 .

No sétimo e último capítulo provamos condições necessárias e suficientes para que uma aplicação $f : K \rightarrow M$, de um 2-complexo finito em uma superfície fechada, seja livre de raízes. No entanto, a parte “suficiente” destas condições são, em geral, restritas a um tipo especial

de aplicações, as chamadas *aplicações convenientes*. A primeira de tais condições envolve a trivialidade do homomorfismo induzido por f nos segundos grupos de homotopia, o qual denotamos por $f_{\#_2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(M)$, e a existência de levantamentos para $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)$ ao longo do homomorfismo $l_{\#} : \pi_1(M^1) \rightarrow \pi_1(M)$ induzido pela inclusão natural $l : M^1 \rightarrow M$ do 1-esqueleto M^1 de M em M . (Aqui, sempre consideramos a superfície M com sua decomposição celular minimal). Mais adiante, definimos o que chamamos uma *mutação* de um homomorfismo. Este conceito é utilizado para providenciar condições para a existência de levantamentos de homomorfismos ao longo de epimorfismos de grupos livres sobre grupos arbitrários. Tais condições são mais tarde utilizadas para se determinar condições para que uma aplicação seja livre de raízes. Um conceito similar chamado *mutação simbólica* também é apresentado. Na verdade, uma mutação simbólica pode ser considerada como que uma generalização do conceito de mutação de homomorfismos. Usando este novo conceito, apresentamos alguns resultados que tornam mais viável a aplicabilidade dos resultados principais apresentados no capítulo em situações práticas; a saber, nós apresentamos resultados relacionando a aniquilação das raízes de f com a existência de soluções particulares de certos sistemas de equações em grupos livres induzidos por f . O capítulo se encerra com a apresentação de vários exemplos que ilustram bem a aplicabilidade dos resultados demonstrados.

Encerramos o texto com um pequeno apêndice onde provamos que a matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ induzida por uma apresentação $\mathcal{P}$ é exatamente a matriz aumentada da matriz diferencial de Reidemeister-Fox da apresentação $\mathcal{P}$.

Para encerrar este capítulo introdutório, gostaríamos de deixar estabelecidas algumas convenções: Primeiro, todas as aplicações dadas a priori são assumidas serem contínuas. Segundo, o estudo do problema de raízes para uma dada aplicação pode ser feito separadamente para sua restrição em cada componente conexa do seu domínio; por isso, em geral, assumimos que o domínio das aplicações dadas a priori sejam conexos. Além disso, tais domínios serão, na maioria das vezes, complexos CW 2-dimensionais finitos; isto será lembrado insistentemente nos enunciados dos resultados principais. Terceiro, para denotar isomorfismos nas diferentes categorias, utilizamos: $\cong$ para homeomorfismo de espaços topológicos, $\approx$ para isomorfismo entre objetos algébricos e $\simeq$ para homotopias entre aplicações ou equivalência de homotopia entre espaços topológicos. Não fazemos por ora qualquer alusão as outras muitas notações adotadas no texto porque consideramos que, quando não devidamente ajustadas e explicadas em sua primeira aparição, estão suficientemente padronizadas.

Teoria de raízes

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos Hausdorff, normais, conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos. Seja $a \in Y$ um ponto. Uma *raiz de f em a* é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = a$.

A teoria de raízes, de um modo bem geral, preocupa-se em determinar o número mínimo de raízes dentre todas as aplicações homotópicas a uma dada a priori. Pondo noutros termos, calcular o número mínimo de raízes de aplicações pertencentes a uma mesma classe de homotopia. Isto conduz à definição do assim chamado *número mínimo de raízes de f em a* ,

$$\mu(f, a) = \min\{\#\varphi^{-1}(a) : \varphi \text{ é homotópica a } f\}.$$

É evidente que $\mu(f, a)$ é um invariante homotópico, isto é, $\mu(f, a) = \mu(f', a)$ sempre que f é homotópica a f' .

Se Y é um espaço homogêneo (fica claro na sequência a definição de homogeneidade aqui assumida), em particular se é uma variedade topológica, então, dados arbitrariamente dois pontos de Y , digamos a e b , existe um homeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$, homotópico a aplicação identidade de Y , tal que $h(a) = b$. Assim, considerada a aplicação $f : X \rightarrow Y$, a aplicação composta $h \circ f : X \rightarrow Y$ é homotópica a f e suas raízes em b estão em correspondência um-a-um com as raízes de f em a , de fato, $f^{-1}(a) = (h \circ f)^{-1}(b)$. Isto prova que $\mu(f, a) = \mu(f, b)$. Portanto, o número $\mu(f, a)$ é independente da escolha do ponto $a \in Y$, sempre que Y é um espaço homogêneo. Sempre que este for o caso e não houver qualquer risco de confusão, escreveremos simplesmente $\mu(f)$ para denotar $\mu(f, a)$, sempre que conveniente. Ainda em se considerando este caso, introduzimos a seguinte definição:

Definição 1.1. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação, com Y um espaço homogêneo. Diz-se que o par (φ, a) , onde $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação e $a \in Y$ é um ponto, realiza $\mu(f)$ se φ é homotópica a f e $\mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$. Diz-se também que (φ, a) é um par realizando $\mu(f)$.

Em geral, o número $\mu(f, a)$ pode não ser finito; por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja S_n^1 uma cópia da 1-esfera e seja X o espaço obtido da reunião disjunta de tais 1-esferas identificando-se o polo sul (-1) de cada cópia com o polo norte $(+1)$ na cópia seguinte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a aplicação $f_n : S_n^1 \rightarrow S^1$ definida por $f_n(z) = z^2$. Como ambos, $+1$ e -1 são aplicados por f_n sobre o mesmo ponto $+1$, tais aplicações definem uma aplicação $f : X \rightarrow S^1$ que é contínua. Toda aplicação homotópica a f possui infinitas raízes, já que restrita a cada S_n^1 deve conter ao menos duas raízes. Assim, $\mu(f)$ é infinito. Veja a figura abaixo.

Figura 1.1: Encontrando infinitas raízes

Não obstante, sob certas hipóteses (as quais se inserem no teorema abaixo e serão consideradas nos capítulos seguintes deste texto) sobre os espaços X e Y , pode-se provar que $\mu(f, a)$ é sempre finito. Detalhes sobre isto podem ser encontrados em [17]. As Proposições 2.10 e 2.12 de [7] juntas implicam no teorema abaixo, o qual contém a informação necessária ao desenvolvimento de nosso trabalho, no que se refere a finitude de $\mu(f, a)$.

Teorema 1.2. *Se X é um complexo CW finito e Y é uma variedade da mesma dimensão que X , então $\mu(f)$ é finito qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$.*

Em praticamente todas as situações envolvidas no desenvolvimento deste texto, a partir do próximo capítulo, estarão assumidas as hipóteses deste teorema. Por isso, o resultado por ele expresso deve ser "incorporado" ao ponto de não haver necessidade de lembrá-lo toda vez que se for utilizá-lo.

Quando as hipóteses sobre os espaços X e Y não implicam a finitude de $\mu(f, a)$, a teoria de raízes preocupa-se não em minimizar $\mu(f, a)$, o que pode não fazer sentido neste caso, mas em estudar algumas propriedades do conjunto $f^{-1}(a)$, tais como o número de suas componentes conexas, sua dimensão de Hausdorff e sua dimensão cohomológica.

Um interessante exemplo obtido pelo teorema precedente pode ser construído como se segue: Seja X o espaço consistindo da esfera S^1 com a corda diametral $\mathcal{D}$ conectando seu

pólo norte $+1$ ao seu pólo sul -1 . Seja $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ a aplicação $f(z) = z^2$. Então, a imagem por f dos pólos norte e sul são o mesmo ponto $+1$ da esfera S^1 . Assim, f pode ser estendida continuamente a uma aplicação $f : X \rightarrow S^1$ que colapsa toda a corda $\mathcal{D}$ sobre o ponto $+1$. É evidente que toda a corda $\mathcal{D}$, incluindo seus pontos extremos $+1$ e -1 , são raízes de f com respeito ao ponto $+1$, ou seja, são raízes da equação $f(x) = +1$. Todavia, como X pode ser naturalmente munido de uma estrutura de complexo CW com um número finito de células e S^1 é uma variedade, segue-se do teorema precedente que existe uma aplicação $\varphi : X \rightarrow S^1$, homotópica a f , tal que o conjunto $\varphi^{-1}(+1)$ é finito, ou seja, φ possui somente um número finito de raízes com respeito ao ponto $+1 \in S^1$. De fato, podemos escolher φ de modo a obter $\varphi^{-1}(+1) = \{-1, +1\}$.

Figura 1.2: Um exemplo em que $\mu(f)$ é finito

Temos visto que o número $\mu(f)$ é um invariante homotópico. No entanto, podemos providenciar exemplos para mostrar que o mesmo não é um invariante do tipo de homotopia do espaço X , domínio da aplicação f . De fato, seja X_1 o espaço constituído de duas 2-esferas conectadas por um segmento de reta e seja $X_2 = S^2 \vee S^2$ o bouquet de duas 2-esferas. Seja $\psi : X_1 \rightarrow X_2$ uma equivalência de homotopia (ψ pode ser escolhida como sendo simplesmente aquela aplicação que colapsa o segmento de reta que une as duas esferas de X_1). Seja $f : X_2 \rightarrow S^2$ uma aplicação que restrita a cada 2-esfera do bouquet $X_2 = S^2 \vee S^2$ é homotópica a aplicação identidade da esfera S^2 . Então temos $\mu(f) = 1$, enquanto $\mu(f \circ \psi) = 2$.

Figura 1.3: $\mu(f)$ não é invariante do tipo de homotopia do domínio de f

Contudo, pode-se demonstrar que a nulidade de $\mu(f, a)$ é um invariante do tipo de homotopia. Como tal nulidade será assunto amplamente discutido neste texto, aproveitamos a oportunidade para introduzir a seguinte definição:

Definição 1.3. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita ser *livre de raízes* em a se $\mu(f, a) = 0$. Se Y é um espaço homogêneo, diremos simplesmente que f é *livre de raízes* se $\mu(f) = 0$.

Demonstramos agora, como já temos adiantado, que a propriedade de ser uma aplicação livre de raízes é um invariante do tipo de homotopia de seu domínio.

Lema 1.4. *Seja $\psi : X_2 \rightarrow X_1$ uma equivalência de homotopia e seja $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ uma aplicação. Defina $f_2 = f_1 \circ \psi : X_2 \rightarrow Y$. Então $\mu(f_1, a) = 0$ se, e somente se, $\mu(f_2, a) = 0$.*

Prova: Seja $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ a equivalência de homotopia inversa de ψ , de modo que $\psi \circ \varphi \simeq id_{X_1}$ e $\varphi \circ \psi \simeq id_{X_2}$. Então $f_1 \simeq f_1 \circ \psi \circ \varphi = f_2 \circ \varphi$. Portanto, $f_2 = f_1 \circ \psi$ and $f_1 \simeq f_2 \circ \varphi$.

Se $\mu(f_1, a) = 0$, existe uma aplicação $g_1 : X_1 \rightarrow Y$ homotópica a f_1 tal que $g_1^{-1}(a) = \emptyset$. Segue-se que $g_1 \circ \psi$ é homotópica a f_2 e $(g_1 \circ \psi)^{-1}(a) = \emptyset$. Portanto, $\mu(f_2, a) = 0$. Reciprocamente, se $\mu(f_2, a) = 0$, existe uma aplicação $g_2 : X_2 \rightarrow Y$ homotópica a f_2 tal que $g_2^{-1}(a) = \emptyset$. Assim, $g_2 \circ \varphi$ é homotópica a f_1 e $(g_2 \circ \varphi)^{-1}(a) = \emptyset$. Portanto, $\mu(f_1, a) = 0$. ■

O uso de métodos homológicos na teoria de raízes providencia apenas resultados de existência, ou seja, apresenta garantias para que uma determinada aplicação possua raízes. No entanto, não apresenta resultados que garantam que uma dada aplicação seja livre de raízes ou que, sabido que uma aplicação possui raízes, apresente ao menos uma estimativa da quantidade de suas raízes. Já a teoria de Nielsen para raízes fornece, para uma dada aplicação f e um ponto a selecionado no seu contra-domínio, um número $N(f, a)$, hoje conhecido como o *Número de Nielsen* de f em a , o qual consiste de um limitante inferior para o número de raízes de todas as aplicações homotópicas a f . Isto quer dizer que toda aplicação homotópica a uma dada aplicação f possui pelo menos $N(f, a)$ raízes no ponto a .

Passamos a descrever, de forma sucinta, os aspectos gerais da teoria de raízes de Nielsen que serão mais intensa e diretamente utilizados no restante do texto. Tomamos a liberdade de omitir provas e detalhes que possam provocar delongas. O leitor interessado pode conferir todos os detalhes do que apresentamos a seguir em [7] e/ou [26].

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos conexos, localmente conexos por caminhos (e portanto conexos por caminhos) e semilocalmente simplesmente conexos. Seja $a \in Y$ um ponto escolhido. Duas raízes x_0 e x_1 de f em a são ditas *f-equivalentes* quando existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$, de x_0 para x_1 , tal que o caminho composto $f \circ \gamma : I \rightarrow Y$ é homotopicamente trivial, ou seja, $f \circ \gamma \simeq \gamma_a \text{ rel } \{0, 1\}$, onde $\gamma_a : I \rightarrow Y$ denota o caminho constante em a . A *f-equivalência* é uma relação de equivalência no conjunto $f^{-1}(a)$ de todas as raízes de f em a e, portanto, produz uma partição deste conjunto em classes disjuntas. Cada tal classe é chamada uma *classe de Nielsen para raízes* de f em a . O conjunto de tais classes será denotado por $\Gamma(f, a)$. Prova-se que se X é compacto e Y é Hausdorff, então este conjunto é finito e todas as classes de Nielsen para raízes de f são compactas.

Seja $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia iniciando em f_0 e terminando em f_1 , seja $a \in Y$ um ponto arbitrário e seja x_i raiz da equação $f_i(x) = a$, $i = 0, 1$. Dizemos que as raízes x_0 e

x_1 são H -correspondentes, e denotamos $x_0 H x_1$, se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow X$, de x_0 para x_1 , tal que $\Delta(H, \gamma) \simeq \gamma_a \text{ rel } \{0, 1\}$, onde $\Delta(H, \gamma) : I \rightarrow Y$ é o *caminho diagonal* definido por $\Delta(H, \gamma)(t) = H(\gamma(t), t)$ para todo $t \in I$. É fácil ver que $x_0 H x_1$ se, e somente se, $x_1 H^{-1} x_0$, onde $H^{-1} : X \times I \rightarrow Y$ é a homotopia inversa de H , iniciando em f_1 e terminando em f_0 .

Teorema 1.5. *Seja $H : f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y$ uma dada homotopia entre f_0 e f_1 , seja $a \in Y$ um ponto arbitrário, sejam $x_i \in f_i^{-1}(a)$, $i = 0, 1$, e suponha que $x_0 H x_1$. Seja $\mathfrak{R}_i \in \Gamma(f_i, a)$ classe de Nielsen para raízes contendo x_i , $i = 0, 1$. Então*

1. $x'_0 \in \mathfrak{R}_0$ se, e somente se, $x'_0 H x_1$
2. $x'_1 \in \mathfrak{R}_1$ se, e somente se, $x_0 H x'_1$

Em outras palavras, a relação $x_0 H x_1$ induz uma correspondência entre $\mathfrak{R}_0$ e $\mathfrak{R}_1$ sob H , que é denotada por $\mathfrak{R}_0 H \mathfrak{R}_1$. É fácil ver que $\mathfrak{R}_0 H \mathfrak{R}_1$ se, e somente se, $\mathfrak{R}_1 H^{-1} \mathfrak{R}_0$.

Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação, $a \in Y$ um ponto e $\mathfrak{R} \in \Gamma(f, a)$ uma classe de raízes de f em a . Se $\mathfrak{R}$ corresponde a uma classe de raízes pertencente a $\Gamma(f_1, a)$ sob qualquer homotopia $H : f \simeq f_1 : X \rightarrow Y$, então a classe de raízes $\mathfrak{R}$ é chamada uma classe *essencial*. Uma classe que não é essencial é chamada *inessencial*. O número de todas as classes de raízes essenciais de f em a é chamado o *número de Nielsen* de f em a e denotado por $N(f, a)$.

Teorema 1.6. *O número de Nielsen é um invariante homotópico, isto é, se f e g são aplicações homotópicas, então $N(f, a) = N(g, a)$.*

Deste teorema e da definição do número de Nielsen, segue-se diretamente que

$$N(f, a) \leq \mu(f, a).$$

Isto quer dizer que para qualquer aplicação g homotópica a f , a equação $g(x) = a$ possui ao menos $N(f, a)$ raízes. Pode-se dar exemplos em que a desigualdade estrita é satisfeita. Se, por outro lado, satisfizer-se a igualdade $N(f, a) = \mu(f, a)$, então diz-se que f tem a (ou satisfaz a) *propriedade de Wecken*, em homenagem a F. Wecken que nos anos 40 do último século expandiu as idéias de Nielsen, sobretudo perguntando-se acerca de tal identidade. Muitos autores têm estudado, ao longo de décadas, condições para que esta igualdade seja satisfeita, e muito já se sabe sobre isso. Dois trabalhos recentes e importantes que fazemos questão de citar são [5] e [18]. Trataremos disso novamente bem mais adiante.

Quando X e Y são espaços Hausdorff, normais, conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos, temos uma interpretação da f -equivalência e da H -correspondência utilizando espaços de recobrimento. Esta interpretação é devida ao matemático R. Brooks, que originalmente a apresentou em 1971 em [8]. Hoje, todos os detalhes deste seu trabalho podem ser encontrados em [7]. Passemos aos resultados.

Se f é como acima, então induz um homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ entre grupos fundamentais. Como a imagem $f_{\#}\pi_1(X)$ de $\pi_1(X)$ por $f_{\#}$ é um subgrupo de $\pi_1(Y)$, existe um recobrimento $p^+ : Y^+ \rightarrow Y$ tal que $p_{\#}^+\pi_1(Y^+) = f_{\#}\pi_1(X)$. Logo, f se levanta através de p^+ a uma aplicação $f^+ : X \rightarrow Y^+$. A aplicação f^+ é chamada um *levantamento de Hopf* de f e o recobrimento p^+ é chamado um *recobrimento de Hopf* para f .

$$\begin{array}{ccc} & & Y^+ \\ & \nearrow f^+ & \downarrow p^+ \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Teorema 1.7. *Os conjuntos $(f^+)^{-1}(a_i)$, para cada $a_i \in (p^+)^{-1}(a)$, que são não vazios, são exatamente as classes de Nielsen para raízes de f em a . A classe $(f^+)^{-1}(a_i)$ é essencial se, e somente se, $(f_1^+)^{-1}(a_i)$ é não vazio para toda aplicação $f_1^+ : X \rightarrow Y^+$ homotópica a f^+ .*

Assim como o que ocorre com $\mu(f, a)$, o número de Nielsen $N(f, a)$ também é independente do ponto selecionado $a \in Y$, quando Y é uma variedade. Este resultado é o Corolário 3.22 de [7]. Em ocorrendo isto, não haverá risco de confusão em se denotar $N(f, a)$ simplesmente por $N(f)$, como o faremos na maior parte deste texto.

Definiremos agora o chamado *número de Reidemeister* de uma aplicação. Seja $f : X \rightarrow Y$ e escolha um ponto $x \in X$. Então f induz um homomorfismo em grupos fundamentais $f_{\#} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$. Os elementos de $\text{coker}(f_{\#})$ são chamados as *classes de raízes de Reidemeister* de f (em x). O número de tais elementos é chamado o *número de Reidemeister* de f e denotado por $\mathcal{R}(f)$. Assim, $\mathcal{R}(f) = \#\text{coker}(f_{\#})$. O conjunto $\text{coker}(f_{\#})$ depende do ponto selecionado $x \in X$, no entanto, sua cardinalidade $\mathcal{R}(f)$ independe de tal escolha.

Teorema 1.8. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e seja $a \in Y$ um ponto. Sejam $p^+ : Y^+ \rightarrow Y$ um recobrimento de Hopf para f e $f^+ : X \rightarrow Y^+$ um levantamento de Hopf de f . Então:*

1. $\mathcal{R}(f)$ é a cardinalidade de $(p^+)^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$;
2. f possui no máximo $\mathcal{R}(f)$ classes de raízes de Nielsen;
3. $N(f, a) \leq \mathcal{R}(f)$.

Os próximos resultados correspondem aos Corolários 3.21 e 3.23 de [7].

Teorema 1.9. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação do espaço X na variedade Y . Temos:*

1. Ou $N(f) = 0$ ou $N(f) = \mathcal{R}(f)$;
2. Se X é compacto e $\mathcal{R}(f) = \infty$, então $N(f) = 0$.

Recentemente, em 2005, D. L. Gonçalves e P. Wong [18], estudando a propriedade de Wecken para aplicações de um espaço compacto em uma variedade topológica mostraram que, para tais condições, a nulidade do número de Nielsen $N(f)$ é suficiente para garantir a nulidade do número $\mu(f)$. Precisamente, eles provaram o seguinte:

Teorema 1.10. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços conexos por caminhos. Suponha que X seja compacto e Y seja uma variedade topológica (não necessariamente compacta) e seja $a \in Y$ um ponto. Se $N(f, a) = 0$, existe uma aplicação φ homotópica a f tal que $\varphi^{-1}(a) = \emptyset$.*

Diretamente deste e do teorema precedente temos, então, o seguinte:

Corolário 1.11. *Seja $f : X \rightarrow Y$ conforme o teorema 1.10. Se $\mathcal{R}(f) = \infty$, então $\mu(f) = 0$.*

Ainda em [18], D. L. Gonçalves e P. Wong provaram uma outra versão para o Teorema 1.10, com algumas hipóteses adicionais.

Teorema 1.12. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação do espaço compacto e conexo por caminhos X na n -variedade Y com $N(f) = 0$. Se Y é fechado e $\mathcal{R}(f) < \infty$ ou se Y é triangulável, então f é homotópica a uma aplicação φ tal que $\dim \varphi(X) \leq n - 1$.*

Tudo o que temos apresentado até agora são os resultados mais gerais que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Vários outros resultados e definições serão inseridos no texto oportunamente. Os conceitos de *grau de Hopf* e *grau absoluto* por exemplo, foram utilizados para demonstrar resultados muito importante ao desenvolvimento da teoria de raízes. Todavia, não os exporemos agora, confiando-os somente ao momento em que se fizerem imprescindíveis. Também, alguns resultados já apresentados aqui poderão ser lembrados sempre que houver necessidade de fazê-lo.

Para encerrar este breve capítulo preliminar ao desenvolvimento do restante do texto, gostaríamos de deixar claro, na medida do possível, qual é a ênfase deste trabalho. Pois bem, todo este texto se destina ao estudo da teoria de raízes para aplicações de complexos CW 2-dimensionais em superfícies fechadas. O leitor encontrará, daqui para diante, diversas abordagens do problema geral de raízes para aplicações de tal natureza. Faz-se conveniente destacar que o estudo de tais problemas para aplicações de complexos CW de dimensões maiores ou iguais a três em superfícies fechadas de mesma dimensão já foi amplamente estudado, tendo resistido portanto os problemas que ora estudamos. Ao conhecedor dos principais trabalhos produzidos para o caso das dimensões maiores do que dois, ficará claro que nossa abordagem do problema é um tanto diferenciada. Salientamos a não aplicabilidade da Teoria de Obstrução em sua forma tradicional aos problemas particulares dos casos de dimensão dois.

O essencial sobre os complexos CW

Neste capítulo preliminar ao desenvolvimento do restante do texto, apresentamos o que, dentre o que nos interessa mais fortemente, há de mais essencial na teoria de complexos CW. Iniciamos pela construção geral de um complexo CW e logo partimos para um breve estudo da teoria de homotopia de tais espaços. Enfatizamos a construção e os resultados envolvendo os assim chamados *complexos modelo*, objetos que se mostraram demais importantes a abordagem do problema de raízes empregada neste texto, em especial nos Capítulos 5 e 7. Encerramos o capítulo apresentando os Teoremas de Whitehead e Hurewicz para 2-complexos.

Todo este capítulo é baseado nos Capítulos I e II de [1]. Todos os detalhes de tudo o que apresentamos aqui pode ser encontrado em tal referência. Por isso, nos reservamos o direito de omitir provas e detalhes mais apurados de tudo o que apresentamos. Os resultados mais importantes são indicados com uma referência precisa.

2.1 Construção de complexos CW

Um instrumento fundamental para lidar com problemas teóricos em geometria e homotopia é a decomposição de certos espaços como uniões disjuntas de *células* e_i^n de várias dimensões, cada célula (aberta) e_i^n como um subespaço, sendo homeomorfa ao disco unitário aberto $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Assim, podemos obter a estrutura de um *complexo celular* K para o espaço topológico associado $|K|$. Nós denotamos por K^n (o *n-esqueleto* de K) o subespaço composto das células de K de dimensão menor ou igual a n com a estrutura celular induzida.

As várias noções de complexos diferem pelas condições que são impostas sobre o fecho $\bar{e}_i \subset |K|$ de uma célula $e_i \in K$ e/ou sobre o bordo $\partial e_i = \bar{e}_i \setminus e_i$. Estas condições também regulam como as células são “coladas” em conjunto para produzir a topologia de $|K|$.

Assumimos que o leitor esteja familiarizado com o conceito de *complexo simplicial* (finito ou infinito). Em tal conceito, cada célula fechada $\bar{e}_i$ é uma união de células e é homeomorfa a um simplexo com todas as suas faces através de um homeomorfismo que aplica células abertas em células abertas. (Um homeomorfismo entre complexos celulares que aplica células abertas em células abertas é dito ser um *homeomorfismo celular* ou um *isomorfismo*). Como uma “condição de colagem” nos restringimos à *topologia fraca* com respeito aos fechos $\bar{e}_i^n$, isto é,

Um subconjunto de K é fechado se e somente se sua intersecção com cada $\bar{e}_i^n$ é fechada.

Em 1949, J.H.C. Whitehead introduziu a noção de *complexo CW*, para os quais as condições assumidas sobre os bordos ∂e_i das células são muito menos restritivas que no caso simplicial. Apresentamos uma definição indutiva de complexo CW que é particularmente conveniente em dimensões baixas.

Definição 2.1. Um *complexo CW* é um espaço $|K|$ com uma decomposição celular, cujos esqueletos são contruídos indutivamente como segue:

- (a) K^0 é um espaço discreto, cada ponto sendo uma 0-célula.
- (b) K^n é obtido de K^{n-1} pela colagem de uma coleção disjunta $\{D_i^n\}_i$ de n -discos fechados via funções contínuas $\varphi_i : \partial D_i^n \rightarrow K^{n-1}$, ou seja, tome a soma topológica $K^{n-1} + \coprod_i D_i^n$ e passe ao espaço quociente pelas identificações $x \sim \varphi_i(x)$, $x \in \partial D_i^n$. Cada $\bar{D}_i^n$ projeta homeomorficamente uma n -célula e_i^n . Cada φ_i é chamada uma aplicação de colagem para e_i^n .
- (c) A $|K| = \bigcup_{n=0}^{\infty} |K^n|$ é atribuída a topologia fraca com respeito aos $\bar{e}_i^n$.

Mais geralmente, um complexo celular é chamado um complexo CW se ele é isomorfo a um obtido pela construção precedente.

Em contraste à situação de complexos simpliciais, em um complexo CW uma célula fechada $\bar{e}_i^n$ não é necessariamente uma união de células. A figura abaixo mostra um complexo CW em que ∂e^2 é um ponto de e^1 , mas não é uma 0-célula.

Figura 2.1: Um complexo CW que não é simplicial

Cada célula e_i^n em um complexo CW K possui uma *aplicação característica* $\chi_i : D_i^n \rightarrow K$ que estende a aplicação de colagem φ_i e é homeomorfismo do interior de D_i^n sobre e_i^n . A saber, podemos tomar χ_i como sendo a composição $D_i^n \rightarrow K^{n-1} + \coprod_i D_i^n \rightarrow K^n \hookrightarrow K$, onde a aplicação do meio é a aplicação quociente definindo K^n .

Um *subcomplexo* de um complexo CW K é um subespaço fechado $L \subset K$ que é a união de células de K . Como L é fechado, a aplicação característica de cada célula em L tem imagem contida em L e, em particular, a imagem da aplicação de colagem de cada célula em L está contida em L . Assim, L é um complexo CW. Resumindo, um *subcomplexo* de K é um subespaço fechado de K que é, ele próprio, um complexo CW. Um par (K, L) consistindo de um complexo CW K e um subcomplexo L será chamado um *par CW*.

Uma *subdivisão* de um complexo CW K é um complexo CW K' com $|K| = |K'|$ e a propriedade que cada célula $e \in K$ é a união de certas células $e'_i \in K'$.

Os seguintes fatos sobre complexos CW podem ser encontrados em [1]:

- Um complexo CW é finito (isto é, possui um número finito de células) se, e somente se, $|K|$ é compacto.
- O espaço de recobrimento de um complexo CW K pode ser decomposto (unicamente) como um complexo CW $\tilde{K}$ tal que a aplicação projeção $\tilde{K} \rightarrow K$ aplica cada célula $\tilde{e} \in \tilde{K}$ homeomorficamente sobre uma célula $e \in K$. (Note que a afirmação correspondente para células fechadas é falsa, em geral, como mostra o espaço de recobrimento universal da esfera $S^1 = e^0 \cup e^1$). Uma aplicação de colagem para $\tilde{e}^n$ é obtida por um apropriado levantamento da aplicação de colagem $\varphi : \partial D^n \rightarrow K^{n-1}$ de e^n para $\tilde{K}^{n-1} = p^{-1}(K^{n-1})$.

A noção de continuidade de funções entre complexos CW é exatamente aquela de funções entre espaços topológicos abstratos. No entanto, temos um importante conceito adicional a definir: Uma função contínua $f : K \rightarrow L$ entre complexos CW é dita ser *celular* se aplicada cada n -esqueleto de K no n -esqueleto de L , ou seja, $f(K^n) \subset L^n$ para cada natural n .

Dada uma aplicação contínua arbitrária $f : K \rightarrow L$ entre complexos CW, uma aplicação celular $f_{cel} : K \rightarrow L$ homotópica a f é chamada uma *aproximação celular* de f . Em 1949, J. H. C. Whitehead provou que toda aplicação contínua entre complexos CW possui uma aproximação celular.

2.2 Homotopia simples para complexos CW

Seja (K, L) um par de complexos CW finitos, sendo L um subcomplexo de K . Diremos que K *colapsa* a L por um *colapso elementar* de dimensão n , e escrevemos $K \searrow^n L$, se as seguintes sentenças estiverem satisfeitas:

1. $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$, onde e^n e e^{n-1} não estão em L e e^{n-1} é uma face de e^n ;

2. Existe um par de bolas $(D^n, D^{n-1}) \cong (I^n, I^{n-1})$ e uma aplicação $\chi : D^n \rightarrow K$ tal que:

- (a) χ é uma aplicação característica para e^n ;
- (b) $\chi|_{D^{n-1}}$ é uma aplicação característica para e^{n-1} ;
- (c) $\chi(\partial I^n \setminus I^{n-1}) \subset L^{n-1}$.

Nestas circunstâncias, e^n é chamada uma célula *colapsante* de K e e^{n-1} é chamada uma *face livre* de e^n . Além disso, escrevemos $L \xrightarrow{n} K$ e dizemos que L *expande* para K por uma expansão elementar.

Se $K \searrow^n L$, então existe uma retração por deformação forte celular $K \rightarrow L$. Além disso, quaisquer duas retrações por deformação forte de K em L são homotópicas relativas a L .

Dizemos que K *colapsa* a L (respectivamente que L *expande* para K) e escrevemos $K \searrow L$ (respectivamente $L \nearrow K$) se existe uma seqüência finita, possivelmente vazia, de colapsos elementares

$$K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_s} K_s = L.$$

Uma seqüência finita de ambos, colapsos elementares e expansões elementares entre K e L é chamada uma *deformação* de K em L e denotado $K \nearrow L$. Claramente, se $K \nearrow L$, então $L \searrow K$ e, se assim o é, dizemos que K e L tem o mesmo tipo de *homotopia simples*.

Um *equivalência de homotopia simples* é uma aplicação $K \rightarrow L$ que é homotópica a uma deformação. Maiores detalhes sobre Teoria de Homotopia Simples podem ser obtidos na Seção 2 do Capítulo I de [1].

2.3 Apresentações para o grupo fundamental de 2-complexos

Uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ consiste de um conjunto $\mathbf{x} = \{x_j\}_j$ de elementos chamados *geradores*, junto com um conjunto indexado $\mathbf{r} = \{r_i\}_i$ de elementos chamados *relatores* ou *relações* que são palavras (não necessariamente reduzidas) no semigrupo $W(\mathbf{x})$ das palavras no alfabeto $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$. Seja $F(\mathbf{x})$ o grupo livre $W(\mathbf{x})/\sim$ das palavras no alfabeto $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$ sob a relação de equivalência $\sim$ gerada pela relação elementar $x_j x_j^{-1} = \mathbb{1} = x_j^{-1} x_j$. Seja $N(\mathbf{r})$ o menor subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ contendo todas as palavras relatoras $r_i \in \mathbf{r}$. O grupo quociente $\Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$ é chamado o *grupo apresentado por* $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$.

Seja K um complexo CW arbitrário. Vamos deduzir uma maneira de se determinar uma apresentação para o grupo fundamental $\pi_1(K)$. Se K^1 é conexo, selecione um vértice e^0 para ser o ponto base e uma árvore geradora, isto é, uma árvore consistindo de algumas aresta e todos os vértices. Cada aresta remanescente e_j^1 , junto com uma orientação, determina um laço em e^0 como na figura abaixo (conectando os vértices inicial e final de e_j^1 com e^0 na árvore). Os elementos x_j de $\pi_1(|K^1|, e^0)$ dados por estes caminhos constituem uma base livre para o grupo $\pi_1(|K^1|, e^0)$, isto é, $\pi_1(|K^1|, e^0)$ é o grupo livre $F(\mathbf{x})$. Veja a Figura 2.2 abaixo.

Figura 2.2: Laços geradores do grupo fundamental

Se K^2 é conexo, selecione um ponto base, uma árvore geradora e caminhos x_j no 1-esqueleto, como acima. Para cada 2-célula e_i^2 , uma aplicação de colagem $\varphi_i : \partial D_i^2 \rightarrow K^1$, junto com um ponto base $*$, uma orientação de ∂D^2 e um arco conector γ de e^0 a $\varphi_i(*)$ (como na Figura 2.3 a seguir) definem um elemento $r_i \in \pi_1(|K^1|, e^0)$ - uma palavra r_i nas letras $x_j^{\pm 1}$ - que é trivial em $\pi_1(|K^2|, e^0)$. Além disso, $\pi_1(|K^1|, e^0) \rightarrow \pi_1(|K^2|, e^0)$ é sobrejetivo, tendo o fecho normal $N(\mathbf{r})$ (i percorrendo todas as 2-células) como núcleo.

Figura 2.3: Definindo relatores para o grupo fundamental

Assim, $\pi_1(|K^2|, e^0)$ tem a apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle$, isto é, o grupo fundamental $\pi_1(|K^2|, e^0)$ é dado como o quociente $F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{x} = \{x_j\}_j$ e $\mathbf{r} = \{r_i\}_i$.

Se K tem K^2 como o seu 2-esqueleto, então a aplicação natural $\pi_1(|K^2|, e^0) \rightarrow \pi_1(|K|, e^0)$ é um isomorfismo.

Um ponto crucial que não podemos deixar de destacar é que, com este processo que acabamos de descrever, um 2-complexo conexo e finito não determina somente um grupo fundamental, mas uma certa classe de apresentações que não contém todas as possíveis apresentações de de tal grupo fundamental. Muitos invariantes de homotopia podem ser derivados de qualquer elemento desta classe de apresentações. O primeiro que mencionamos é a característica de Euler $\chi(|K|) = 1 - \#(\mathbf{x}) + \#(\mathbf{r})$.

Como um exemplo, note que para um 2-complexo K finito, conexo e simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes: (a) $|K|$ é contrátil; (b) $\chi(|K|) = 1$; (c) $H_2(|K|) = 0$; (d) as apresentações que podem ser obtidas para $\pi_1(K)$ através do processo descrito acima são *balanceadas*, isto é, possuem o mesmo número de geradores e relatores.

2.4 Complexo modelo de uma apresentação (finita)

Complexos de Reidemeister: Para a construção de um 2-complexo K a partir de um 1-complexo K^1 , considere cada laço de K^1 equipado com uma estrutura linear, cada ∂D^2 subdividido como um polígono e cada $\varphi_i : \partial D_i^2 \rightarrow K^1$ aplicando cada aresta linear e sobrejetivamente sobre um laço de K^1 ou sobre um vértice. Assim, φ_i define um laço em K^1 . Um complexo assim construído é chamado um *complexo de Reidemeister*.

Complexo modelo de uma apresentação (finita): Como um processo inverso daquele da seção precedente, podemos associar a uma apresentação finita $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ um *complexo de Reidemeister* $K_{\mathcal{P}}$ com um vértice, também chamado o *complexo modelo* da apresentação $\mathcal{P}$ (ou induzido pela apresentação $\mathcal{P}$). Seu 1-esqueleto é um bouquet de 1-esferas com uma orientação e_i^1 para cada x_i .

Figura 2.4: O 1-esqueleto de um 2-complexo modelo

As 2-células e_i^2 correspondem bijectivamente aos relatores r_i , os quais determinam laços φ_i com as correspondentes aplicações de colagem.

Note que a sequência $r_1, \dots, r_m$ pode conter repetições e/ou a palavra trivial $r_i = \mathbb{1} \in F(\mathbf{x})$. Estas palavras, todavia, não podem ser omitidas quando se constrói o complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$, que pode assim conter diferentes 2-células com o mesmo bordo e/ou 2-células fechadas que são 2-esferas. Não existe regra geral para dizer se as palavras r_i devam ser reduzidas ou possam conter letras inversas adjacentes x_j, x_j^{-1} . Reduzindo tais eventos em φ_i não se afeta o tipo de homotopia simples de $K_{\mathcal{P}}$.

A seguir, dois dos mais importantes resultados que apresentamos neste capítulo preliminar. O primeiro deles é o Teorema 1.9 da página 61 de [1] e o segundo é o Teorema 2.3 da página 65 também de [1].

Teorema 2.2. *O par esqueleto (K, K^1) de um 2-complexo finito e conexo K é homotopicamente equivalente ao par esqueleto $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ de um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ de uma apresentação (finita) $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$.*

Teorema 2.3. *Seja $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ o par esqueleto de um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ de uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$. Então, o homomorfismo $l_{\#} : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(K_{\mathcal{P}})$ induzido pela inclusão natural é exatamente o homomorfismo quociente $F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$.*

2.5 Teoremas de Whitehead e Hurewicz para 2-complexos

Os resultados envolvendo a Topologia Algébrica dos 2-complexos CW que mais serão utilizados no decorrer do texto são os conhecidos como Teorema de Whitehead e Teoremas de Isomorfismo de Hurewicz. Assumimos que o leitor esteja bastante familiarizado com os conceitos de Topologia Algébrica, em especial aqueles especialmente construídos para o estudo de complexos celulares, como por exemplo, Homologia e Cohomologia Celular, decomposição celular de espaços de recobrimento, seqüência fundamental de Homotopia para 2-complexos, Homomorfismos de Hurewicz, etc. Por isso, poupamos delongas e partimos diretamente ao enunciado dos teoremas. Detalhes sobre todos estes tópicos de Topologia Algébrica citados e, ainda, as provas dos teoremas supramencionados podem ser encontrados nas Seções 2 e 3 do Capítulo II de [1].

Teorema 2.4. (TEOREMA DE WHITEHEAD) *Uma aplicação contínua $f : K \rightarrow L$ entre 2-complexos conexos é uma equivalência de homotopia baseada se, e somente se, induz isomorfismos $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(L)$ e $f_{\#_2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(L)$*

Teorema 2.5. (TEOREMA DO HOMOMORFISMO DE HUREWICZ) *Para qualquer 2-complexo conexo K , o homomorfismo de Hurewicz $h_1 : \pi_1(K) \rightarrow H_1(K)$ é a abelianização.*

Teorema 2.6. (TEOREMA DO ISOMORFISMO DE HUREWICZ) *Para qualquer 2-complexo conexo e simplesmente conexo K , o homomorfismo de Hurewicz $h'_2 : \pi_2(K, K^1) \rightarrow H_2(K, K^1)$ é a abelianização e o homomorfismo de Hurewicz $h_2 : \pi_2(K) \rightarrow H_2(K)$ é um isomorfismo.*

Aspectos da teoria de raízes para aplicações de 2-complexos

Neste capítulo apresentamos um estudo de algumas características topológicas dos 2-complexos através de ferramentas algébricas e geométricas. Mais adiante, faremos alusão à alguns aspectos gerais acerca do problema de raízes para aplicações cujo domínio é um 2-complexo.

3.1 A essência de um 2-complexo

Seja K um 2-complexo conexo e finito. Escrevemos $\#^2(K)$ para denotar o número de 2-células que compõem o 2-complexo K . Seja L um subcomplexo de K tal que $K \searrow L$ (K colapsa em L). Então existe uma seqüência de colapsos elementares

$$K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_q} K_q = L$$

onde cada n_i (que é igual a 1 ou 2) indica a dimensão do i -ésimo colapso elementar, ou seja,

$$K_{i-1} = K_i \cup e^{n_i-1} \cup e^{n_i}.$$

O resultado a seguir está enunciado como o Exercício 4A da página 16 de [12] e sua resolução pode ser encontrada na íntegra em [23].

Proposição 3.1. *Se $K \searrow L$, então qualquer seqüência de colapsos elementares pode ser reordenada para uma seqüência $K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_q} K_q = L$ na qual se verifique $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$.*

Definição 3.2. A *profundidade celular (bidimensional)* de L em K , que denotamos por $\text{pcb}(K, L)$, é o número de colapsos elementares de dimensão 2 que aparecem em uma seqüência $K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_q} K_q = L$ de colapsos elementares.

Observe-se, de início, que o número $\text{pcb}(K, L)$ está bem definido. Com efeito: cada colapso elementar $X \searrow^2 Y$ de dimensão 2 elimina exatamente uma 2-célula de X , de modo que $\#^2 Y = \#^2 X - 1$. Além disso, colapsos elementares de dimensão 1 não eliminam 2-células.

Suponha que existam duas maneiras distintas de colapsar K sobre L , digamos

$$K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_q} K_q = L \quad \text{e} \quad K = K'_0 \searrow^{n'_1} K'_1 \searrow^{n'_2} \dots \searrow^{n'_p} K'_p = L$$

Podemos supor que estas seqüências estejam ordenadas conforme a proposição anterior. Suponha que o número de colapsos elementares de dimensão 2 que comparecem na primeira e na segunda seqüência sejam exatamente λ e λ' , respectivamente. Então, certamente,

$$\#^2(K) - \lambda = \#^2(K_\lambda) = \#^2(L) = \#^2(K'_{\lambda'}) = \#^2(K) - \lambda'.$$

Portanto $\lambda = \lambda'$, e este número é, por definição, exatamente $\text{pcb}(K, L)$.

Conhecida, então, uma seqüência qualquer de colapsos elementares $K = K_0 \searrow^{n_1} K_1 \searrow^{n_2} \dots \searrow^{n_q} K_q = L$ de K sobre L , não necessariamente ordenada conforme a proposição anterior, temos a seguinte fórmula para a profundidade celular de L em K :

$$\text{pcb}(K, L) = q - \sum_{i=1}^q n_i = \sum_{i=1}^q (n_i - 1).$$

Passamos à definição da essência de um 2-complexo K . Está será um inteiro não negativo indicando o número das assim chamadas 2-células essenciais do complexo, que são aquelas 2-células que nenhuma seqüência de colapsos elementares iniciando em K é capaz de eliminar. Ficará evidente na definição que a essência de um complexo pode ser alterada através de subdivisões celulares do mesmo. Este fato será lembrado e utilizado no momento oportuno.

Definição 3.3. Chamamos a *essência* de um 2-complexo K ao número inteiro não negativo

$$\text{ess}(K) = \#^2(K) - \max\{\text{pcb}(K, L) : K \searrow L\}.$$

Se K é tal que $\text{ess}(K) = \#^2(K) > 0$ então diremos que K é um 2-complexo *essencial*.

Note-se, por exemplo, que se o 2-complexo K é uma superfície fechada com decomposição celular minimal (canônica) em uma 0-célula, uma 2-célula e tantas 1-células quanto o dobro do seu gênero, para o caso orientável, e o número do seu gênero para o caso não orientável, então $\text{ess}(K) = 1$ e K é essencial. Além disso, para qualquer outra estrutura CW assumida sobre K tem-se, como se pode facilmente verificar, $\text{ess}(K) \geq 1$.

É trivial, porém importante, notar-se que

$$\text{ess}(K) = 0 \Leftrightarrow K \text{ colapsa sobre um complexo de dimensão menor ou igual a 1.}$$

3.2 Sobre a homologia dos 2-complexos

Seja K um 2-complexo finito e seja $m = \#^2(K) > 0$ o número de 2-células de K . Na sequência exata de homologia do par (K, K^1) , a saber,

$$\rightarrow 0 \rightarrow H_2(K) \xrightarrow{u} H_2(K, K^1) \rightarrow H_1(K^1) \rightarrow H_1(K) \rightarrow$$

tem-se $H_2(K, K^1) \approx \mathbb{Z}^m$ e $H_2(K) \approx \text{im}(u)$. Como $\text{im}(u)$ é subgrupo do grupo abeliano livre $\mathbb{Z}^m$, segue-se que $\text{im}(u)$ é um grupo abeliano livre de posto $\leq m$. Portanto, $H_2(K) \approx \mathbb{Z}^n$, para algum $0 \leq n \leq m$.

Observe-se que se o complexo K é conexo e simplesmente conexo, então

$$\#^2(K) = \beta_1(K^1) + \beta_2(K),$$

onde β_i indica o i -ésimo número de Betti.

Este resultados simples serão utilizados de forma explícita e fundamental na sequência.

3.3 Sobre a cohomologia dos 2-complexos

Seja K um 2-complexo. Pelo teorema dos coeficientes universais para homologia sabe-se que a parte livre de $H^2(K; \mathbb{Z})$ é isomorfa a $H_2(K)$ e o subgrupo de torção de $H^2(K; \mathbb{Z})$ é isomorfo ao subgrupo de torção de $H_1(K)$. Traduziremos isto em símbolos escrevendo

$$H^2(K; \mathbb{Z}) \approx H_2(K) \oplus \text{Torção} H_1(K).$$

Proposição 3.4. *Acerca de um 2-complexo finito K , as seguintes asserções são equivalentes:*

1. $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$;
2. $H_2(K) = 0$ e $H_1(K)$ é livre de torção;
3. $H_2(K; G) = 0$ para todo grupo abeliano G ;
4. $H_2(K) = 0$ e $H_2(K; G) = 0$ para todo grupo abeliano finito G .

Prova: Provaremos algumas implicações sucessivas.

[1 $\Leftrightarrow$ 2] Segue diretamente do isomorfismo indicado acima que resulta do teoremas dos coeficientes universais para homologia.

[2 $\Rightarrow$ 3] Pelo teorema dos coeficientes universais para homologia tem-se, qualquer que seja o grupo abeliano G ,

$$H_2(K; G) \approx H_2(K) \otimes_{\mathbb{Z}} G \oplus \text{Tor}(H_1(K), G).$$

Como $H_2(K) = 0$ e $H_1(K)$ é livre de torção, por hipótese, segue-se que $H_2(K; G) = 0$.

[3 $\Rightarrow$ 4] Óbvio.

[4 $\Rightarrow$ 2] Assuma a veracidade da asserção 4. Então, obviamente, $H_2(K) = 0$, restando apenas provar que $H_1(K)$ é livre de torção. Pois bem, suponha que $H_1(K)$ não seja livre de torção e seja $\mathcal{G}$ o subgrupo de torção de $H_1(K)$. Como $H_1(K)$ é abeliano e finitamente gerado, segue-se que $\mathcal{G}$ é abeliano finito. Por hipótese, deve-se ter $H_2(K; \mathcal{G}) = 0$. No entanto, tem-se

$$\mathrm{Tor}(H_1(K); \mathcal{G}) \approx \mathrm{Tor}(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$$

e este último grupo é não trivial, já que $\mathcal{G}$ é não trivial e, portanto, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ contém ao menos dois elementos distintos, a saber, o automorfismo nulo e o automorfismo identidade de $\mathcal{G}$. Pelo teorema dos coeficientes universais para homologia, $H_2(K; \mathcal{G}) \approx \mathrm{Tor}(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \neq 0$. ■

É evidente que se um 2-complexo K tem $H_2(K; G) \neq 0$ para algum grupo abeliano G , então $\mathrm{ess}(K) \neq 0$. Mostraremos mais adiante que a recíproca desta afirmação é falsa.

Corolário 3.5. *Seja K um 2-complexo conexo e finito com $\mathrm{ess}(K) \neq 0$. Então $H^2(K; \mathbb{Z}) \neq 0$ se for verdadeira ao menos uma das asserções abaixo:*

1. K é simplesmente conexo e $\#^2(K) \neq \beta_1(K^1)$;
2. $H_1(K) = 0$ e $\#^2(K) \neq \beta_1(K^1)$;
3. $\#^2(K) > \beta_1(K^1)$.

Prova: Suponha $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$. Pela proposição anterior, tem-se $H_2(K) = 0$ e $H_1(K)$ livre de torção. Logo, a seqüência exata de homologia do par (K, K^1) dá origem a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow H_2(K, K^1) \rightarrow H_1(K^1) \rightarrow H_1(K) \rightarrow 0$$

que cinde. Portanto $H_1(K^1) \approx H_2(K, K^1) \oplus H_1(K)$. Sejam $m = \#^2(K)$ e $p = \beta_1(K^1)$. Segue-se que

$$\mathbb{Z}^p \approx \mathbb{Z}^m \oplus H_1(K),$$

donde $m \leq p$, e $m = p$ se, e somente se, $H_1(K) = 0$ (o que ocorre, em particular, se K é simplesmente conexo).

Isto contradiz simultaneamente as asserções 1, 2 e 3. O corolário está provado. ■

Segue-se diretamente da equação da Seção 3.2, da Proposição 3.4 e da demonstração do corolário acima o seguinte resultado:

Corolário 3.6. *Para um 2-complexo finito K se verificam as seguintes relações:*

1. Se $H_1(K) = 0$, então $\#^2(K) = \beta_1(K^1) + \beta_2(K)$;
2. Se $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$, então $H_2(K) = 0$, $H_1(K) = \mathbb{Z}^{\beta_1(K)}$ e $\#^2(K) = \beta_1(K^1) - \beta_1(K)$.

Corolário 3.7. *Se K é um 2-complexo conexo e simplesmente conexo contendo p células de dimensão 2 e cujo 1-esqueleto K^1 é homotopicamente equivalente a $\vee^p S^1$, então K é contrátil.*

Prova: Seja K como enunciado. Pelo Corolário 3.5 tem-se $\text{ess}(K) = 0$. Agora, se K não é contrátil, então K colapsa sobre um subcomplexo L de K^1 , de dimensão 1. Mas neste caso, L é homotopicamente equivalente a $\vee^q S^1$ para algum $0 < q \leq p$, e L é um retrato de deformação forte de K . Segue-se que $H_1(K) \approx H_1(L) \approx \mathbb{Z}^q$, o que é claramente um absurdo. ■

Corolário 3.8. *Se K é um 2-complexo obtido de $\vee^p S^1$ pela colagem de m células de dimensão 2, com $m > p$, então $H^2(K; \mathbb{Z}) \neq 0$.*

Prova: Se $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$, então $m = p - \beta_1(K)$, pelo Corolário 3.6, donde $m \leq p$. ■

A proposição que enunciamos a seguir garante uma versão do Corolário 3.7, posta noutros termos. Para demonstrá-la, utilizamos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada na página 41 de [23].

Teorema 3.9. *Se (K, L) é um par CW com K e L conexos e simplesmente conexos e L um retrato de deformação forte de K , então $K \frown L \text{ rel } L$.*

Proposição 3.10. *Se K é um 2-complexo conexo e simplesmente conexo com $H_2(K) = 0$, então $K \frown \{\text{ponto}\}$.*

Prova: Pelo teorema anterior, basta provar que K se retrai por deformação forte a uma 0-célula. Pois bem, como K é simplesmente conexo, o teorema do isomorfismo de Hurewicz garante $\pi_2(K) \approx H_2(K) = 0$. Seja e^0 uma 0-célula qualquer de K e seja $i : e^0 \rightarrow K$ a inclusão natural. Segue-se claramente que $i_\# : \pi_1(e^0) \approx \pi_1(K)$ e $i_\# : \pi_2(e^0) \approx \pi_2(K)$. Pelo Teorema de Whitehead, $i : e^0 \rightarrow K$ é uma equivalência de homotopia. Então a aplicação evidente $K \rightarrow e^0$ é uma retração por deformação forte. ■

Como já temos dito, e agora confirmado, se $H_2(K; G) \neq 0$ para algum grupo abeliano G , então $\text{ess}(K) \neq 0$. No entanto, o exemplo abaixo mostra que o funtor $H_2(-; G)$ não é eficaz para se determinar se a essência de um 2-complexo é ou não é nula.

Exemplo 3.11. Construiremos um 2-complexo $K_{p,q}$ satisfazendo $H^2(K_{p,q}; \mathbb{Z}) = 0$ embora $\text{ess}(K_{p,q}) \neq 0$ (Mais precisamente, $\text{ess}(K'_{p,q}) \neq 0$ qualquer que seja a subdivisão celular $K'_{p,q}$ de $K_{p,q}$). Disto resultará que $H_2(K; G) = 0$ para todo grupo abeliano G .

Sejam p e q inteiros positivos primos entre si. Seja K^1 o 1-complexo homeomorfo a figura oito, constituído por um 0-célula e^0 e duas 1-células e_1^1 e e_2^1 . Seja $\varphi : S^1 \rightarrow K^1$ a aplicação definida da seguinte maneira: enquanto o ponto z percorre (uma vez) a esfera S^1 , sua imagem $\varphi(z)$ percorre inicialmente p vezes (num mesmo sentido) a 1-esfera $e^0 \cup e_1^1$ e depois percorre q vezes (num mesmo sentido) a 1-esfera $e^0 \cup e_2^1$. Considere o espaço de colagem do 2-disco D^2 em K^1 , ao longo do bordo $S^1 = \partial D^2$, através da aplicação φ .

Obtemos assim um 2-complexo $K_{p,q}$ contendo uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, e de modo que K^1 é o 1-esqueleto de $K_{p,q}$.

Figura 3.1: Construindo o complexo $K_{p,q}$

AFIRMAÇÃO 1. $H_2(K_{p,q}) = 0$.

O complexo de cadeias celulares de $K_{p,q}$ é da forma $0 \rightarrow \langle e^2 \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle e_1^1, e_2^1 \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle e^0 \rangle \rightarrow 0$ onde $\partial_2(e^2) = pe_1^1 + qe_2^1$. Portanto, $H_2(K_{p,q}) \approx \ker(\partial_2) = 0$.

AFIRMAÇÃO 2. $\pi_1(K_{p,q}) \approx \langle x, y \mid x^p y^q \rangle$.

Considere o disco $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Seja A o subconjunto aberto de K obtido como imagem no espaço de colagem do subconjunto aberto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3/4\}$ de D^2 , e seja B o complementar em K do subconjunto fechado obtido como imagem no espaço de colagem do subconjunto fechado $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/4\}$ de D^2 . É fácil ver que A , B e $A \cap B$ são todos subconjuntos abertos e conexos por caminhos de K e, além disso, A é contrátil, B se retrai por deformação forte sobre K^1 , e $A \cap B$ tem o tipo de homotopia de uma esfera S^1 . O teorema de Van Kampen pode então ser utilizado para se concluir que $\pi_1(K_{p,q}) \approx \langle x, y \mid x^p y^q \rangle$.

AFIRMAÇÃO 3. $H_1(K_{p,q}) \approx \mathbb{Z}$.

Como p e q são primos entre si, o grupo $G_{p,q} = \langle x, y \mid x^p y^q \rangle$ pode ser realizado como o grupo de um nó no $\mathbb{R}^3$ (ou S^3), a saber, o nó toroidal de tipo (p, q) , isto é, o nó (ou enodamento) gerado por um mergulho $S^1 \hookrightarrow \mathbb{T}^2$, da esfera S^1 do toro $\mathbb{T}^2$, representando o elemento $(p, q) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \approx \pi_1(\mathbb{T}^2)$. Agora, se $\mathcal{S}$ é uma 1-esfera mergulhada no $\mathbb{R}^3$, a Dualidade de Alexander mostra que $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}) \approx H^1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Segue-se que $\mathbb{Z}$ é a abelianização do grupo $G_{p,q}$ e, portanto, que $H_1(K_{p,q}) \approx \mathbb{Z}$.

AFIRMAÇÃO 4. $H^2(K_{p,q}; \mathbb{Z}) = 0$.

Isto segue diretamente das afirmações 1 e 3 acima e da Proposição 3.4

AFIRMAÇÃO 5. $\text{ess}(K_{p,q}) \neq 0$.

Que $K_{p,q}$ não é contrátil é óbvio, pois $H_1(K_{p,q}) \approx \mathbb{Z}$. Agora, para que $K_{p,q}$ colapse sobre um subcomplexo de dimensão 1, uma das alternativas abaixo precisa ocorrer:

- (a) $K \searrow L$ com $L \cong S^1$ ($L = e^0 \cup e_1^1$ ou $L = e^0 \cup e_2^1$); (b) $K \searrow K^1$.

Pois bem, se ocorre (a) então L é retrato de deformação forte de K e, por isso, $\pi_1(K) \approx \pi_1(L) \approx \mathbb{Z}$; o que contradiz a afirmação 2. Por outro lado, se ocorre (b), então K^1 é retrato de deformação forte de K e, então, $H_1(K) \approx H(K^1) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o que é absurdo, segundo a afirmação 3. Portanto não pode ocorrer nem (a) nem (b), o que termina por concluir que $\text{ess}(K_{p,q}) \neq 0$. Argumentos semelhantes provam que $\text{ess}(K'_{p,q}) \neq 0$ qualquer que seja a subdivisão celular $K'_{p,q}$ de $K_{p,q}$. $\square$

3.4 Complexos homotopicamente equivalentes a esfera

Nesta pequena seção, demonstramos alguns resultados que garantem condições necessárias e suficientes para que um 2-complexo seja homotopicamente equivalente a esfera S^2 . Mais que isso, o terceiro resultado apresentado a seguir garante uma condição para que um 2-complexo seja homeomorfo a esfera S^2 com decomposição celular minimal.

Proposição 3.12. *Se K é um 2-complexo conexo e simplesmente conexo com $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$, então K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 .*

Prova: Seja K um 2-complexo como enunciado. Pelo Teorema do Isomorfismo de Hurewicz, tem-se $\pi_2(K) \approx H_2(K) \approx \mathbb{Z}$. Logo, existe uma aplicação $F : S^2 \rightarrow K$ representado o gerador de $\pi_2(K)$ e, neste caso, os homomorfismos induzidos $F_\# : \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_1(K)$ e $F_\# : \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_2(K)$ são ambos isomorfismos. Pelo Teorema de Whitehead, F é uma equivalência de homotopia. ■

Corolário 3.13. *Se K é um 2-complexo finito, conexo e simplesmente conexo, então K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 se, e somente se, $\text{ess}(K) \neq 0$ e $\#^2(K) - \beta_1(K^1) = 1$.*

Prova: A seqüência exata de homologia singular do par (K, K^1) dá origem a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow H_2(K) \rightarrow H_2(K, K^1) \rightarrow H_1(K^1) \rightarrow 0$$

que cinde, já que $H_1(K^1)$ é certamente livre. Neste caso, $\mathbb{Z}^m \approx \mathbb{Z}^p \oplus H_2(K)$, onde $m = \#^2(K)$ e $p = \beta_1(K^1)$. Portanto $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$ se, e somente se, $\#^2(K) - \beta_1(K^1) = 1$. O resultado agora segue da proposição anterior. ■

Proposição 3.14. *Seja K um 2-complexo conexo e finito que não contém células de dimensão 1 e tal que $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$. Então K é homeomorfo a esfera S^2 (com decomposição celular minimal em uma 0-célula e uma 2-célula).*

Prova: Assuma que K possua 0-células $e_1^0, \dots, e_q^0$ e 2-células $e_1^2, \dots, e_m^2$. Então, o complexo de cadeias celulares de K tem a forma

$$0 \rightarrow \langle e_1^2, \dots, e_m^2 \rangle \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\partial_1} \langle e_1^0, \dots, e_q^0 \rangle \rightarrow 0$$

donde $H_2(K) \approx \ker(\partial_2) \approx \mathbb{Z}^m$. Logo $m = 1$, ou seja, K possui uma única célula de dimensão 2, digamos e^2 . Agora, o bordo de e^2 está contido em K^0 , pois $K^0 = K^1$. Ainda mais, como ambos, o bordo de e^2 e K são conexos, devemos ter $\partial e^2 = K^0$ e $K^0 = \{e^0\}$ constituído de uma única 0-célula. Isto conclui o enunciado. ■

3.5 Células articuladoras e o problema de raízes

Seja K um 2-complexo. Diremos que uma 2-célula e_A^2 de K , com aplicação característica $\xi : D^2 \rightarrow K$, é uma *2-célula articuladora* se ela não é colapsante e se algum ponto de $\xi(\partial D^2)$ possui uma vizinhança bidimensional fechada V_2 em K homeomorfa ao semi-disco fechado $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 : y \geq 0\}$.

Figura 3.2: e_A^2 é uma 2-célula articuladora de K

Se este é o caso, então é possível escolher o tal ponto, digamos $y_0 \in \xi(\partial D^2)$, de modo que este não seja uma 0-célula de K e, se necessário, pode-se reduzir a vizinhança V_2 de modo que seu interior em K não contenha 0-células de K . Claramente, existe um único ponto x_0 em D^2 tal que $\xi(x_0) = y_0$, e não há dúvidas de que $x_0 \in \partial D^2$. Além disso, o subconjunto $\bar{e}_A^1$ de V_2 correspondendo ao subconjunto $\{(x, y) \in D_+^2 : y = 0\}$ de D_+^2 é uma vizinhança fechada de y_0 em K^1 homeomorfa ao intervalo fechado $I = [0, 1]$. Vamos escrever e_A^1 para denotar o subconjunto de $\bar{e}_A^1$ correspondendo a $\{(x, y) \in D_+^2 : |x| < 1 \text{ e } y = 0\}$.

Sejam e_1^0 e e_2^0 os pontos de $\bar{e}_A^1$ correspondendo aos pontos 0 e 1 de I , respectivamente, através do homeomorfismo natural evidente $\bar{e}_A^1 \cong I$. Podemos obter de K um “novo” complexo K_* através de uma subdivisão de K , a mais simples possível, afetando apenas seu 1-esqueleto K^1 , de modo que, neste novo complexo, e_1^0 e e_2^0 sejam 0-células, e_A^1 seja uma 1-célula, e nada se altere no complementar de e_A^2 . Por se tratar de uma subdivisão, as topologias CW de K e de K_* coincidem e temos, numa notação mais precisa, porém desnecessária, $|K| = |K_*|$.

Figura 3.3: e_A^2 é uma 2-célula colapsante de K_*

Agora, a pré-imagem $\xi^{-1}(\bar{e}_A^1)$ é um arco fechado Σ_1 em ∂D^2 e existe um homeomorfismo evidente $h_1 : I \rightarrow \Sigma_1$. Então $\xi_1 = \xi \circ h_1 : I \rightarrow K_*$ é uma aplicação característica para a 1-célula e_A^1 de K_* .

Seguramente, existe um homeomorfismo $h : I \times I \rightarrow D^2$ que faz corresponder $I \times 1$ com Σ_1 . Então, a aplicação $\Phi = \xi \circ h : I \times I \rightarrow K_*$ é uma aplicação característica para a 2-célula e_A^2 e $\Phi|_{I \times 1}$ é uma aplicação característica para a 1-célula e_A^1 . Isto mostra que e_A^1 é uma face livre da 2-célula e_A^2 em K_* e, portanto, existe um colapso elementar $K_* \searrow^2 L_*$ de dimensão 2 onde L_* é o subcomplexo obtido de K_* deletando-se a 2-célula e_A^2 e a 1-célula e_A^1 , ou seja $K_* = L_* \cup e_A^1 \cup e_A^2$ com $e_A^1, e_A^2 \notin L_*$.

Figura 3.4: O subcomplexo L_*

Se repetimos todo este processo para todas as 2-células articuladoras de um 2-complexo K , obtemos um novo complexo $K_{\ddagger}$ no qual todas as 2-células que antes eram articuladoras agora possuem uma face livre e, portanto, colapsam. Chamamos $K_{\ddagger}$ o *complexo articulador* de K . Como antes, $K_{\ddagger}$ é uma subdivisão de K e, portanto, $|K| = |K_{\ddagger}|$. Se K é naturalmente isomorfo a $K_{\ddagger}$, ou seja, a aplicação identidade de K em $K_{\ddagger}$ é um homeomorfismo celular, então diremos que K é um *complexo articulado* (isto equivale a dizer que K não possui 2-células articuladoras).

Cada 2-célula articuladora de K colapsa enquanto célula de $K_{\ddagger}$, mas não colapsa enquanto célula de K . Por outro lado, é evidente que toda 2-célula que colapsa enquanto célula de K também colapsa enquanto célula de $K_{\ddagger}$. Isto implica em

$$\text{ess}(K_{\ddagger}) \leq \text{ess}(K).$$

Enquanto conjuntos, podemos afirmar que $K_{\ddagger} = K$. Além disso, pelo exposto, a topologia induzida pela estrutura CW de K é idêntica a topologia induzida pela estrutura CW de $K_{\ddagger}$. Então, a identificação natural $id_{\ddagger} : K_{\ddagger} \rightarrow K$ é um homeomorfismo entre 2-complexos, não necessariamente celular. Vamos denotar por $id_{\ddagger}^{-1}$ o homeomorfismo inverso de $id_{\ddagger}$.

Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação contínua do complexo K em uma superfície fechada. Então, os argumentos do parágrafo anterior garantem que $f_{\ddagger} = id_{\ddagger} \circ f : K_{\ddagger} \rightarrow M$ é uma aplicação contínua. Além disso, se a é um ponto qualquer de M , então o subconjunto $f_{\ddagger}^{-1}(a)$ de $K_{\ddagger}$ está em correspondência um-a-um através de $id_{\ddagger}$ com o subconjunto $f^{-1}(a)$ de K . Agora, como $id_{\ddagger}$ é um homeomorfismo, uma aplicação $H : K \times I \rightarrow M$ é uma homotopia iniciando em f se, e somente se, a aplicação $H_{\ddagger} : K_{\ddagger} \times I \rightarrow M$ dada por $H_{\ddagger}(x, t) = H(id_{\ddagger}(x), t)$ é uma homotopia iniciando em $f_{\ddagger}$. Ainda mais, numa tal situação, o subconjunto $H(\cdot, 1)^{-1}(a)$ está em correspondência um-a-um com $H_{\ddagger}(\cdot, 1)^{-1}(a)$ através do homeomorfismo $id_{\ddagger}$. Isto

prova que

$$\mu(f_{\ddagger}) = \mu(f).$$

Tudo isto nos será útil para mais adiante demonstrarmos que todas as raízes de uma aplicação $f : K \rightarrow M$, de um 2-complexo em uma superfície, que estejam localizadas em 2-células articuladoras podem ser eliminadas por uma homotopia iniciando em f sem que novas raízes surjam ou mesmo que sejam alteradas as demais que porventura existam.

3.6 O problema de raízes em subcomplexos especiais

Nesta seção, apresentamos alguns resultados destacando o fato de que o estudo do problema de raízes para aplicações de um complexo em uma superfície pode ser modificado, sem qualquer prejuízo, para o estudo do mesmo problema mas para a restrição de tais aplicações a subcomplexos especiais do complexo original.

Note-se, desde já, que se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação entre espaços topológicos, e se X admite uma estrutura celular CW, então o número $\mu(f)$, para f considerada como aplicação de um complexo em Y , é independente de possíveis subdivisões na estrutura CW de X .

O primeiro resultado é simples, mas apresenta uma demonstração exaustiva que será dividida em vários casos. Algumas ilustrações serão inseridas na demonstração como suporte a sua melhor compreensão.

Daqui em diante, K será um 2-complexo conexo e finito e M uma superfície fechada.

Proposição 3.15. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação e $K \searrow L$, seja $i : L \hookrightarrow K$ a inclusão natural e defina $f_L = f \circ i : L \rightarrow M$. Então $\mu(f) = \mu(f_L)$.*

Prova: Todo colapso é uma sequência de colapsos elementares, logo podemos supor que $K \searrow L$ é um colapso elementar, ou seja, $K = L \cup e^n \cup e^{n-1}$ com $n = 1$ ou $n = 2$.

Como $K \searrow L$, existe uma retração por deformação forte $r : K \rightarrow L$ de modo que $i \circ r \simeq id_K$. Além disso, é claro que $r(x) \in L^1$ para todo $x \in K \setminus L$.

Certamente $\mu(f_L) \leq \mu(f)$. De fato: Sejam $\varphi : K \rightarrow M$ uma aplicação homotópica a f e $a \in M$ um ponto, tais que $\mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$. Então a aplicação $\varphi_L = \varphi \circ i : L \rightarrow M$ é homotópica a f_L e tem-se $\varphi_L^{-1}(a) \subset \varphi^{-1}(a)$. Logo $\#\varphi_L^{-1}(a) \leq \mu(f)$. E portanto $\mu(f_L) \leq \mu(f)$.

Para provar que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$ vamos estudar separadamente diversos casos que passamos a enumerar abaixo. Começamos do mais simples.

1º Caso: Existe uma aplicação $\varphi_L : L \rightarrow M$ homotópica a f_L tal que $\#\varphi_L^{-1}(a) = \mu(f)$ para algum $a \in M$ com $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(K \setminus L) = \emptyset$. Neste caso, defina a aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ por $\varphi = \varphi_L \circ r$. Então φ é uma extensão de φ_L para K e temos

$$\varphi = \varphi_L \circ r \simeq f_L \circ r = f \circ i \circ r \simeq f.$$

Além disso, para todo $x \in K \setminus L$ tem-se $\varphi(x) = \varphi_L(r(x)) \neq a$. Logo $\varphi^{-1}(a) = \varphi_L^{-1}(a)$ e, portanto $\mu(f) \leq \mu(f_L)$.

2º Caso: O 1º caso não se aplica e $K = L \cup e^1 \cup e^0$, ou seja, o colapso elementar $K \searrow L$ é de dimensão 1. Sejam $\varphi_L : L \rightarrow M$ aplicação homotópica a f_L e $a \in M$ um ponto, tais que $\mu(f_L) = \#\varphi^{-1}(a)$. Por hipótese, $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(K \setminus L) \neq \emptyset$. Mas $K \setminus L = e^1 \cup e^0$ e certamente $r(e^1 \cup e^0) = \{e_0^0\}$, onde e_0^0 é uma 0-célula de L (e logo de K).

Seja $h : D^2 \rightarrow M$ um mergulho do 2-disco unitário fechado em M , tal que $h(0,0) = a$ e $h(D^2)$ está contido em alguma vizinhança coordenada de a em M . Tal mergulho certamente existe, haja visto que M é uma superfície.

Figura 3.5: Segundo caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$

O subcomplexo $e_0^0 \cup e^1 \cup e^0$ de K é naturalmente homeomorfo ao subconjunto $0 \times [0, 1]$ de D^2 por um homeomorfismo g tal que $g(e_0^0) = (0, 0)$. Defina a aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ fazendo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_L(x) & \text{se } x \in L \\ h(g^{-1}(x)) & \text{se } x \in e^1 \cup e^0 \end{cases}.$$

A aplicação φ está claramente bem definida e é contínua. Além disso φ é uma extensão de φ_L em K e temos $\varphi \simeq \varphi_L \circ r \simeq f_L \circ r \simeq f$. Ainda mais, $\varphi^{-1}(a) = \varphi_L^{-1}(a)$ e, portanto $\mu(f) \leq \mu(f_L)$.

3º Caso: O 1º caso não se aplica e $K = L \cup e^2 \cup e^1$ com $r(e^2 \cup e^1)$ de dimensão zero, ou seja, $r(e^2 \cup e^1) = \{e_0^0\}$ para alguma 0-célula e_0^0 de L (e logo de K). Sejam $\varphi_L : L \rightarrow M$ aplicação homotópica a f_L e $a \in M$ um ponto, tais que $\mu(f_L) = \#\varphi^{-1}(a)$. Por hipótese, devemos ter $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(e^2 \cup e^1) = \{e_0^0\}$.

Seja $h : D^2 \rightarrow M$ um mergulho do 2-disco unitário fechado em M , tal que $h(0,0) = a$, como no caso anterior. O subcomplexo $e_0^0 \cup e^2 \cup e^1$ de K é naturalmente homeomorfo ao subconjunto $D_+^2 = \{(x, y) \in D^2 : y \geq 0\}$ de D^2 por um homeomorfismo g tal que $g(e_0^0) = (0, 0)$. Defina a aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ fazendo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_L(x) & \text{se } x \in L \\ h(g^{-1}(x)) & \text{se } x \in e^2 \cup e^1 \end{cases}.$$

A aplicação φ está bem definida e é contínua. Além disso φ é uma extensão de φ_L em K e temos $\varphi \simeq \varphi_L \circ r \simeq f_L \circ r \simeq f$. Ainda mais, $\varphi^{-1}(a) = \varphi_L^{-1}(a)$ e, portanto, $\mu(f) \leq \mu(f_L)$.

Figura 3.6: Terceiro caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$

4º Caso: O 1º caso não se aplica e $K = L \cup e^2 \cup e^1$ com $r(e^2 \cup e^1)$ de dimensão 1, ou seja, $r(e^2 \cup e^1)$ é uma reunião finita de 1-células e 0-células. Sejam $\varphi_L : L \rightarrow M$ aplicação homotópica a f_L e $a \in M$ um ponto, tais que $\mu(f_L) = \#\varphi_L^{-1}(a)$. Então, certamente, $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(e^2 \cup e^1)$ é um conjunto finito não-vazio. Como o problema será resolvido localmente, estendendo-se φ_L em vizinhanças de suas raízes pertencente ao conjunto $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(e^2 \cup e^1)$, podemos supor que este é um conjunto unitário. Ainda mais, a menos de uma subdivisão celular, podemos supor $\varphi_L^{-1}(a) \cap r(e^2 \cup e^1) = \{e_0^0\}$ com e_0^0 uma 0-célula de L (e logo de K).

Seja $h : D^2 \rightarrow M$ uma parametrização coordenada de uma vizinhança U de a em M , e seja $W = \varphi_L^{-1}(U)$. Então W é uma vizinhança de e_0^0 em L . Seja V uma vizinhança fechada de e_0^0 em $\overline{e^2 \cup e^1}$ homeomorfa a um semi-disco fechado e tal que $V \cap L \subset W$. Observe-se que $\varphi^{-1}(a) \cap V \cap L = \{e_0^0\}$.

Fica claro da construção que $V \cap L$ é um subconjunto de dimensão 1 de L^1 , com o ponto e_0^0 em seu interior. Sendo assim, $(V \cap L) \setminus \{e_0^0\}$ possui duas componentes conexas, cada uma homeomorfa ao intervalo semi-aberto $(0, 1]$. Sejam Σ_1 e Σ_2 os fechos destas componentes em $V \cap L$. Neste caso, $\Sigma_1 \setminus \{e_0^0\}$ e $\Sigma_2 \setminus \{e_0^0\}$ são as componentes, e Σ_1 e Σ_2 são ambos conjuntos homeomorfos ao intervalo fechado $[0, 1]$.

A menos de homotopia relativa a $\{e_0^0\}$ e/ou diminuição a priori da vizinhança coordenada U de a em M , podemos assumir que φ_L é injetora em $V \cap L$. Além disso, a menos de pequena perturbação do homeomorfismo h , podemos admitir que $u_1 = h \circ \varphi_L(\Sigma_1)$ e $u_2 = h \circ \varphi_L(\Sigma_2)$ sejam vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^2$, ambos de mesmo comprimento $l < 1$.

Os vetores u_1 e u_2 definem um setor circular $S \subset D^2$ de raio l e ângulo igual ao ângulo entre u_1 e u_2 , naturalmente homeomorfo à vizinhança fechada V de e_0^0 por um homeomorfismo g aplicando Σ_i a u_i , $i = 1, 2$, e conseqüentemente aplicando e_0^0 a $(0, 0) \in D^2$.

Defina a aplicação $\varphi_V : L \cup V \rightarrow M$ fazendo:

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} \varphi_L(x) & \text{se } x \in L \\ h(g(x)) & \text{se } x \in V \end{cases}.$$

Figura 3.7: Quarto caso da prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$

Esta aplicação está claramente bem definida e é uma extensão contínua de φ_L a $L \cup V$. Além disso, $\varphi_V^{-1}(a) = \varphi_L^{-1}(a)$.

Vamos agora provar que φ_V é homotópica a $f_V = j \circ f : L \cup V \rightarrow M$, onde $j : L \cup V \hookrightarrow K$ é a inclusão natural. Ora, existe uma retração por deformação forte óbvia $r_V : K \rightarrow L \cup V$, e temos $\varphi_V \simeq \varphi_L \circ r_V \simeq f_L \circ r_V \simeq f_V$, como queríamos.

Para terminar a prova, note-se que de maneira óbvia podemos realizar uma subdivisão celular de K , relativa ao subcomplexo L , de modo que a nova estrutura CW que denotamos por K' seja tal que: (i) V é uma 2-célula fechada de K' , (ii) $L \cup V$ é um subcomplexo de K' , (iii) $e_*^2 = e^2 \setminus V$ é uma 2-célula colapsante de K' , e (iv) $K' \searrow L \cup V$ com $K' = (L \cup V) \cup e_*^2 \cup e^1$.

Agora, temos uma retração por deformação forte $r' : K' \rightarrow L \cup V$ e temos a aplicação $\varphi_V : L \cup V \rightarrow M$ com $\#\varphi_V^{-1}(a) = \mu(f_L)$. Mais ainda, pela construção de φ_V tem-se $\varphi_V^{-1}(a) \cap r'(K' \setminus (L \cup V)) = \emptyset$. Então, os argumentos do primeiro caso podem ser utilizados para se estender φ_V a uma aplicação $\varphi : K' \rightarrow M$ homotópica a f e tal que $\#\varphi^{-1}(a) = \#\varphi_V^{-1}(a) = \mu(f_L)$. Isto prova que $\mu(f) \leq \mu(f_L)$.

A prova da proposição está finalmente concluída. ■

Se consideramos nesta proposição a aplicação $f_{\ddagger} : K_{\ddagger} \rightarrow M$ ao invés de $f : K \rightarrow M$, seu resultado torna-se mais interessante e poderoso, já que o complexo $K_{\ddagger}$ pode ter maior número de 2-células colapsantes que o próprio complexo K , enquanto toda 2-célula colapsante de K é também colapsante em $K_{\ddagger}$. De modo geral, esta proposição afirma que toda raiz da equação $f(x) = a$ que esteja localizada em uma 2-célula colapsante ou articuladora (ou em uma sua face livre) pode ser eliminada por uma homotopia iniciando em f sem alterar as demais (ou acrescentar novas) raízes.

Corolário 3.16. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação e $\text{ess}(K_{\ddagger}) = 0$, então $\mu(f) = 0$.*

Prova: Podemos assumir que M esteja munida de uma estrutura CW e supor que f seja celular. Se $\text{ess}(K_{\ddagger}) = 0$, então $K_{\ddagger} \searrow L$ para algum subcomplexo L contido em K^1 . Assim,

$f(L)$ é um subconjunto do 1-esqueleto de M e podemos escolher um ponto $a \in M$ tal que $a \notin f(L)$. Segue-se que $f_{\sharp}|_L^{-1}(a) = \emptyset$ e, pela proposição anterior, $\mu(f_{\sharp}) = 0$. Pelas considerações da seção anterior, isto implica que $\mu(f) = 0$. ■

Observe que $\text{ess}(K) = 0$ implica em $\text{ess}(K_{\sharp}) = 0$, pois $\text{ess}(K_{\sharp}) \leq \text{ess}(K)$. No entanto, a implicação recíproca não é verdadeira, em geral.

Para simplificar o enunciado de nossos próximos resultados, consideramos a seguinte definição: *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação. Diremos que o par (φ, a) , onde $\varphi : K \rightarrow M$ é uma aplicação e a é um ponto de M , realiza $\mu(f)$ se φ é homotópica a f e $\mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$.*

Proposição 3.17. *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação e suponha que $K \searrow L$. Se (φ, a) é um par realizando $\mu(f)$, então $\varphi^{-1}(a) \subset L$.*

Prova: Como na proposição anterior, podemos supor que $K \searrow L$ é um colapso elementar, ou seja, $K = L \cup e^n \cup e^{n-1}$ com $n = 1$ ou $n = 2$.

Seguramente $\mu(f) < \infty$ e $\varphi^{-1}(a)$ é um subconjunto discreto de K . Suponha, por absurdo, que exista $x_0 \in \varphi^{-1}(a) \cap (K \setminus L)$. Observe-se que $K \setminus L = e^n \cup e^{n-1}$. O subespaço fechado $J = L^1 \cap \overline{K \setminus L}$ de K admite um colarinho fechado C em $e^n \cup e^{n-1}$, que pode ser tomado suficientemente estreito de modo que se tenha $\varphi^{-1}(a) \cap (C \setminus J) = \emptyset$. Neste caso, $x_0 \in (e^n \cup e^{n-1}) \setminus C$. A figura abaixo ilustra esta situação para o caso em que $n = 2$.

Figura 3.8: Colarinho de L em K

Existe uma retração por deformação forte $r : K \rightarrow L \cup C$. Conseqüentemente, existe uma homotopia $H : K \times I \rightarrow K$ com $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = (j \circ r)(x)$, para todo $x \in K$, onde $j : L \cup C \hookrightarrow K$ é a inclusão natural.

Defina $\psi : K \rightarrow M$ pela composição $\psi = \varphi \circ j \circ r$, e defina $F : K \times I \rightarrow M$ por $F(x, t) = \varphi(H(x, t))$, para todo $(x, t) \in K \times I$. Esta última aplicação está bem definida e é contínua e, além disso, verifica $F(x, 0) = \varphi(x)$ e $F(x, 1) = \psi(x)$. Logo, F é uma homotopia começando em φ e terminando em ψ . Segue-se que ψ é homotópica a f .

Ainda mais, fica claro nesta construção que $\psi^{-1}(a) = \varphi^{-1}(a) \setminus \{x_0\}$. Donde $\#\psi^{-1}(a) = \mu(f) - 1$. Isto é claramente um absurdo. ■

Corolário 3.18. *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação e suponha que $K \searrow L$. Se (φ, a) é um par realizando $\mu(f)$, então (φ_L, a) é um par realizando $\mu(f_L)$.*

Prova: Pela proposição anterior $\varphi^{-1}(a) = \varphi_L^{-1}(a)$. Disto e da Proposição 3.15 segue-se que $\mu(f_L) = \mu(f) = \#\varphi^{-1}(a) = \#\varphi_L^{-1}(a)$. E portanto o par (φ_L, a) realiza $\mu(f_L)$. ■

Vamos agora abordar a questão de se poder reduzir o estudo do problema de raízes para subcomplexos num contexto um pouco diferente, mas que de certa forma abrange o contexto de colapsos de dimensão 1. Explicando: Se uma parte de um complexo K é essencialmente de dimensão 1, isto é, é de dimensão 1 e não está contido em faces de 2-células, é natural imaginar que este subconjunto de K possa ser descartado e o estudo do problema de raízes realizado para a função restrita ao seu complemento em K . É isto que provaremos na seqüência.

Dado um 2-complexo K , seja $K\langle 2 \rangle$ o menor de seus subcomplexos que contém todas as suas células de dimensão 2. Observe-se que $K\langle 2 \rangle$ pode não ser conexo.

Proposição 3.19. *Dada uma aplicação $f : K \rightarrow M$ e a inclusão $i : K\langle 2 \rangle \hookrightarrow K$, seja $f_{\langle 2 \rangle} : K\langle 2 \rangle \rightarrow M$ a composição $f_{\langle 2 \rangle} = i \circ f$. Então $\mu(f) = \mu(f_{\langle 2 \rangle})$.*

Prova: Certamente $\mu(f_{\langle 2 \rangle}) \leq \mu(f)$. De fato: se $\varphi : K \rightarrow M$ é uma aplicação homotópica a f e a é um ponto de M com $\#\varphi^{-1}(a) = \mu(f)$, então a aplicação $\varphi_{\langle 2 \rangle} = i \circ \varphi : K\langle 2 \rangle \rightarrow M$ é homotópica a $f_{\langle 2 \rangle}$ e tal que $\varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a) \subset \varphi^{-1}(a)$. Logo $\mu(f_{\langle 2 \rangle}) \leq \#\varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a) \leq \mu(f)$.

Por outro lado, suponha que seja $(\varphi_{\langle 2 \rangle}, a)$ um par realizando $\mu(f_{\langle 2 \rangle})$. Seja K' o menor subcomplexo de K contendo $K \setminus K\langle 2 \rangle$. É fácil ver que K' é o subcomplexo de K de dimensão ≤ 1 que contém, além de todas as células de $K \setminus K\langle 2 \rangle$, as 0-células que são bordos de células essencialmente de dimensão 1 (e portanto não pertencentes a $K\langle 2 \rangle$). Estas 0-células são exatamente os pontos de conexão entre $K\langle 2 \rangle$ e seu complemento em K . Mais precisamente, $K' = \overline{K \setminus K\langle 2 \rangle}$. Ponhamos $\partial K\langle 2 \rangle = K' \cap K\langle 2 \rangle$.

Pela propriedade da extensão de homotopia, a aplicação $\varphi_{\langle 2 \rangle} : K\langle 2 \rangle \rightarrow M$ pode ser estendida a uma aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ homotópica a f .

Suponha que a equação $\varphi_{\langle 2 \rangle}(x) = a$ não possua raízes em $\partial K\langle 2 \rangle$. Por um argumento de dimensão, vê-se que é nula a obstrução para que a extensão φ possa ser escolhida de modo que a equação $\varphi(x) = a$ não possua raízes em K' . Uma vez realizada tal possível escolha, obtém-se uma aplicação φ homotópica a f com $\varphi^{-1}(a) = \varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a)$. Isto mostra que $\mu(f) \leq \mu(f_{\langle 2 \rangle})$.

Agora, suponha $\varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a) \cap \partial K\langle 2 \rangle \neq \emptyset$. Então, cada raiz da equação $\varphi_{\langle 2 \rangle}(x) = a$ contida em $\partial K\langle 2 \rangle$ é uma 0-célula de K' e face de ao menos uma 1-célula. Assumamos $\varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a) \cap \partial K\langle 2 \rangle = \{x_1, \dots, x_s\}$. Cada raiz x_i possui em K' uma vizinhança V_i da forma $\bigvee_{j=1}^{s_i} [0, 1]$ com 0 sendo o ponto de *wedge* e correspondendo à raiz x_i . A figura abaixo ilustra uma situação como esta.

Figura 3.9: Aniquilando raízes fora de $K\langle 2 \rangle$

Seja U uma vizinhança coordenada de a em M . Defina $\varphi_i : K\langle 2 \rangle \cup V_i \rightarrow M$ de modo que $\varphi_i|_{V_i}$ seja bijetora e $\varphi_i(V_i) \subset U$, como ilustra a figura acima. Tal definição é certamente possível. Então φ_i é uma extensão de $\varphi_{\langle 2 \rangle}$ a $K\langle 2 \rangle \cup V_i$ que não possui mais raízes do que $\varphi_{\langle 2 \rangle}$. Além disso, existe uma retração por deformação forte óbvia $r : K\langle 2 \rangle \cup V_i \rightarrow K\langle 2 \rangle$, de modo que fica fácil verificar que φ_i é homotópica a $f|_{K\langle 2 \rangle \cup V_i}$.

Uma vez que as vizinhanças V_i 's podem ser assumidas duas a duas disjuntas, as aplicações φ_i 's podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma aplicação $\bar{\varphi} : K\langle 2 \rangle \cup V \rightarrow M$, onde $V = \bigcup_{j=1}^s V_j$, de tal modo que $\bar{\varphi}$ seja uma extensão de $\varphi_{\langle 2 \rangle}$ homotópica a $f|_V$ e sem mais raízes do que a própria $\varphi_{\langle 2 \rangle}$.

Agora, por simples argumentos de dimensão, se pode construir uma aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ estendendo $\bar{\varphi}$ e homotópica a f , e tal que $\varphi(K \setminus (K\langle 2 \rangle \cup V)) \subset M \setminus U$. Isto implica em $\varphi^{-1}(a) = \varphi_{\langle 2 \rangle}^{-1}(a)$. E portanto $\mu(f) \leq \#\varphi^{-1}(a) = \mu(f_{\langle 2 \rangle})$. ■

Corolário 3.20. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação com $K = K_1 \vee K_2$ um 2-complexo conexo tal que $\text{ess}(K_2) = 0$ então $\mu(f) = \mu(f|_{K_1})$.*

Prova: Como $\text{ess}(K_2) = 0$, existe um subcomplexo L_2 de K_2 de dimensão menor ou igual a 1 tal que $K_2 \searrow L_2$. Seja e^0 a 0-célula através da qual se dá o *wedge* $K_1 \vee K_2$. Se e^0 é uma célula de L_2 , então temos $K_1 \vee K_2 \searrow K_1 \vee L_2$. Caso contrário, podemos expandir L_2 a um complexo L'_2 de dimensão 1 acrescentando a L_2 uma 1-célula e a 0-célula e^0 . Neste caso $K_1 \vee K_2 \searrow K_1 \vee L'_2$. Em qualquer dos casos, tem-se $K\langle 2 \rangle = K_1\langle 2 \rangle$. Portanto, $\mu(f) = \mu(f_{\langle 2 \rangle}) = \mu(f|_{K_1})$. ■

Os resultados apresentados nesta seção que aqui encerramos mostram que o estudo do problema de raízes de uma aplicação de um 2-complexo K em uma superfície fechada pode ser realizado, sem qualquer prejuízo, assumindo-se que K seja articulado e essencial e que se tenha $K = K\langle 2 \rangle$.

Realizações do número mínimo de raízes

Neste breve capítulo vamos definir e estudar os tipos ∇_1 , ∇_2 e ∇_3 de aplicações de um 2-complexo em uma superfície fechada. Não afirmamos, de um modo geral, que uma dada aplicação seja de um dos tipos apresentados; aliás, apresentamos um exemplo de uma aplicação de um 2-complexo na 2-esfera que não é de nenhum desses tipos (Exemplo 4.3). Outrossim, estudamos algumas vantagens que se possa ter no estudo do problema de raízes envolvendo aplicações que sejam de um ou mais de um destes tipos, além de apresentarmos algumas equivalências entre os tipos para aplicações especiais. Enfatizamos, de certa maneira, o caso de aplicações entre superfícies, as quais mostramos ser dos três tipos. Em todo o capítulo, K será um 2-complexo conexo e finito e M será uma superfície fechada.

Definição 4.1. Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação. Diremos que f é do tipo:

- ∇_1 se existem uma aproximação celular φ de f e $a \in M$ tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$.
- ∇_2 se existem uma aplicação φ homotópica a f e $a \in M$ tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$ e $\varphi^{-1}(a) \cap K^1 = \emptyset$.
- ∇_3 se existem uma aproximação celular φ de f e $a \in M$ tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$ e $\varphi^{-1}(a) \cap K^1 = \emptyset$.

Lembre-se que, conforme a Definição 1.1, dizemos que o par (φ, a) realiza $\mu(f)$ se $\varphi : K \rightarrow M$ é uma aplicação homotópica a f e $a \in M$ é um ponto verificando $\mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$.

Note-se que $\varphi^{-1}(a) \cap K^1 = \emptyset$ se, e somente se, todas as raízes da equação $\varphi(x) = a$ se encontram no interior de 2-células de K .

É completamente evidente que toda aplicação do tipo ∇_3 é também do tipo ∇_1 e do tipo ∇_2 . No entanto, pode-se dar exemplos de aplicações $f : K \rightarrow M$ que são exclusivamente do tipo ∇_1 . Apresentamos um tal exemplo na sequência. Por outro lado, mostraremos mais adiante que toda aplicação de um 2-complexo em uma superfície fechada que é do tipo ∇_2 é também do tipo ∇_3 . Além disso, mostraremos que toda aplicação entre superfícies fechadas é do tipo ∇_3 e, portanto, dos três tipos.

Exemplo 4.2. Seja $K = S_1^2 \vee S_2^2$ o bouquet de duas 2-esferas com decomposição CW minimal com uma 0-célula e^0 e duas 2-células e_1^2 e e_2^2 . Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação que restrita a cada subcomplexo S_i^2 de K , $i = 1, 2$, é homotópica a aplicação identidade. Considere a superfície S^2 com sua decomposição celular minimal $S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$. Então, seguramente, existe uma aplicação celular $\varphi : K \rightarrow S^2$ homotópica a f e tal que $\varphi^{-1}(e_*^0) = \{e^0\}$. Logo, o par (φ, e_*^0) realiza $\mu(f)$ ($= 1$, como já é sabido). Portanto f é do tipo ∇_1 . Agora, como é evidente, cada aplicação g homotópica a f , restrita a cada S_i^2 , $i = 1, 2$, é sobrejetora. Logo, para toda tal aplicação g , a equação $g(x) = a$ possui ao menos uma raiz em cada S_i^2 , $i = 1, 2$, qualquer que seja o ponto $a \in S^2$. Portanto, se uma raiz x_0 de $g(x) = a$ pertence ao interior de uma das 2-células de K , então a equação $g(x) = a$ deve admitir uma segunda raiz, esta situada no fecho da outra 2-célula de K . Mas neste caso $\#g^{-1}(a) \geq 2$ e portanto o par (g, a) não realiza $\mu(f)$. Isto mostra que a aplicação f não é do tipo ∇_2 . $\square$

Agora, um exemplo de uma aplicação que não é de nenhum dos tipos.

Exemplo 4.3. Seja $K' = S_1^2 \vee S_2^2$ o bouquet de duas 2-esferas com decomposição CW (não minimal) com uma 0-célula e^0 , duas 1-células e_1^1 e e_2^1 e quatro 2-células e_1^2 , e_2^2 , e_3^2 e e_4^2 , de modo que $S_1^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$ e $S_2^2 = e^0 \cup e_2^1 \cup e_3^2 \cup e_4^2$, como ilustrado na figura abaixo:

Figura 4.1: Uma decomposição celular para o bouquet de duas 2-esferas

Observe-se que K' é uma subdivisão celular do complexo K do exemplo anterior. Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação que restrita a cada subcomplexo S_i^2 de K' , $i = 1, 2$, é homotópica a aplicação identidade. Considere a superfície S^2 com sua decomposição celular minimal $S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$. Como no exemplo anterior, é fácil ver que $\mu(f) = 1$. No entanto, é evidente que se $\varphi : K' \rightarrow S^2$ é uma aplicação e $a \in S^2$ é um ponto tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$, então

φ não é celular e, além disso, a (única) raiz da equação $\varphi(x) = a$ não está contida no interior de 2-células de K' . Portanto, f não é de qualquer dos tipos ∇_1 , ∇_2 ou ∇_3 . $\square$

Lema 4.4. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação e para a superfície M é assumida uma decomposição celular arbitrária, então existe um par (φ, a) realizando $\mu(f)$, com o ponto a contido no interior de uma 2-célula de M .*

Prova: Sejam $g : K \rightarrow M$ uma aplicação e $b \in M$ um ponto tais que o par (g, b) realiza $\mu(f)$. Suponha que b pertença ao 1-esqueleto M^1 de M . Escolha um ponto arbitrário a no interior de uma 2-célula M . Existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$, homotópico a aplicação identidade, tal que $h(b) = a$. Seja $\varphi = h \circ g : K \rightarrow M$. Então φ é homotópico a f e $\varphi^{-1}(a) = g^{-1}(b)$. Portanto (φ, a) realiza $\mu(f)$, com a no interior de uma 2-célula de M . $\blacksquare$

Proposição 4.5. *Toda aplicação $f : K \rightarrow M$ do tipo ∇_2 é também do tipo ∇_3 .*

Prova: Sejam $\varphi : K \rightarrow M$ uma aplicação e a um ponto de M tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$ com $\varphi^{-1}(a) \cap K^1 = \emptyset$. Pelo lema anterior, podemos assumir que o ponto a esteja no interior da (única) 2-célula de M . (Consideramos M com sua decomposição celular minimal).

Se M é a 2-esfera S^2 ou o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$, então seja P_M um disco fechado do plano. Caso contrário, seja $P_M = [p_1, p_2, \dots, p_{2g}]$ a região fechada do plano delimitada por um polígono regular com o qual se pode obter a superfície M através da identificação de lados, dois a dois. Observe-se que, neste último caso, o inteiro positivo g é o gênero da superfície M .

Como o ponto a está no interior da 2-célula de M , seu correspondente a' em P_M está no interior de P_M . Sem perda de generalidade, pode-se assumir que a' seja exatamente o centro de P_M . Seja U uma vizinhança coordenada de a em M tal que seu fecho $\bar{U}$ está inteiramente contida no interior da 2-célula de M . Seja P'_M uma cópia de P_M , obtida por homotetia com relação ao ponto central a' , contida na vizinhança aberta V de a' correspondente a U .

Então P'_M é uma vizinhança fechada de a' inteiramente contida no interior de P_M , como mostra a figura abaixo.

Figura 4.2: Planificação da superfície M

Cada segmento radial $[a', x]$ do ponto central a' a um ponto x da fronteira de P_M , define um único ponto x' da fronteira de P'_M , de modo que $[a', x] = [a', x'] * [x', x]$, onde $*$ indica concatenação de segmentos.

Considere a aplicação sobrejetora $\psi_M : P_M \rightarrow P_M$ que aplica cada segmento $[x', x]$ sobre o ponto x e aplica o segmento $[a', x']$ linearmente sobre o segmento $[a', x]$, com $\psi_M(a') = a'$ e $\psi_M(x') = x$. Em particular, ψ_M aplica vértices de P'_M em vértices de P_M . É fácil ver que ψ é uma aplicação contínua e, além disso, cada ponto da fronteira de P_M é um ponto fixo para ψ_M , como também o é o ponto a' .

Portanto, através da supramencionada identificação de lados de P_M para a obtenção de M , a aplicação ψ_M induz uma aplicação sobrejetora $\psi : M \rightarrow M$ tal que $\psi^{-1}(a) = \{a\}$. Seja $\text{int}(P'_M)$ o interior de P'_M em P_M e seja W a vizinhança aberta de a em M correspondente à imagem de $\psi_M(\text{int}(P'_M))$ através da identificação. Então, ψ colapsa o exterior de W sobre o 1-esqueleto de M e $\psi|_W$ é um homeomorfismo de W sobre sua imagem $\psi|_W(W) = M \setminus M^1$. Não é difícil concluir que ψ é homotópica a aplicação identidade de M .

Seja $\varphi_c = \psi \circ \varphi : K \rightarrow M$. Segue-se das construções e conclusões acima que φ_c é uma aplicação celular homotópica a f e $\varphi_c^{-1}(a) = \varphi^{-1}(a) \subset K \setminus K^1$. Portanto (φ_c, a) é um par realizando $\mu(f)$ e f é do tipo ∇_3 . ■

Em [15] apresentamos uma versão mais curta para esta prova. Vamos reproduzi-la.

Outra prova para a Proposição 4.5: Sejam $\varphi : K \rightarrow M$ uma aplicação e $a \in M$ um ponto tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$ e $\varphi^{-1}(a) \subset K \setminus K^1$. Podemos assumir que a esteja no interior da única 2-célula de M . (Consideramos M com decomposição celular minimal). Seja U uma vizinhança coordenada de a em M cujo fecho $\overline{U}$ em M está contido em $M \setminus M^1$, onde M^1 é o 1-esqueleto de M . Seja $\chi : D^2 \rightarrow M$ a aplicação característica da 2-célula de M e seja $h : \overline{U} \rightarrow D^2$ um homeomorfismo, onde D^2 é o 2-disco fechado unitário.

Certamente, existe uma retração $r : M \setminus U \rightarrow M^1$ tal que para cada $x \in \partial \overline{U}$ tem-se $r(x) = (\chi \circ h)(x)$. Então, as aplicações r e $\chi \circ h$ podem ser conjuntamente utilizadas para definir uma aplicação $g : M \rightarrow M$ tal que $g|_{M \setminus U} = r$ e $g|_U = \chi \circ h$. Agora, é fácil ver que g é uma aplicação celular homotópica a aplicação identidade $id : M \rightarrow M$.

Seja $\psi : K \rightarrow M$ definida pela composição $\psi = g \circ \varphi$ e denote $a' = g(a)$. Então, ψ é uma aplicação celular homotópica a f e $\psi^{-1}(a') = \varphi^{-1}(a) \subset K \setminus K^1$. Isto conclui a prova. □

Proposição 4.6. *Qualquer aplicação $f : M \rightarrow N$ entre superfícies é do tipo ∇_2 e portanto do tipo ∇_3 .*

Prova: Seja $n = \mu(f)$ e sejam $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação e a um ponto de N tais que (φ, a) realiza $\mu(f)$. Então o subconjunto $\varphi^{-1}(a)$ de M é da forma $\varphi^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pelo lema anterior, podemos assumir que o ponto a esteja no interior de uma 2-célula de N .

Se cada x_i está no interior de uma 2-célula de M , então nada há para se demonstrar. Caso contrário, suponha, sem perda de generalidade, que $x_1, \dots, x_p$ estejam sobre o 1-esqueleto de M , e que as demais raízes estejam no interior de 2-células de M . (Pode ocorrer $p = n$).

Vamos modificar ligeiramente a função φ em vizinhanças disjuntas de $x_1, \dots, x_p$ para obter uma nova aplicação $\varphi_p : M \rightarrow N$ homotópica a f com $\varphi_p^{-1}(a) = \{y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n\}$ e de modo que cada $y_i, i = 1, \dots, p$, esteja no interior de uma 2-célula de M .

Para iniciar, seja V_1 uma vizinhança euclideana de x_1 em M que não contém qualquer outra raiz x_i . Seja y_1 um ponto qualquer de V_1 contido no interior de uma 2-célula de M . Seja $h_1 : M \rightarrow M$ um homeomorfismo homotópico a aplicação identidade de M , tal que $h_1(y_1) = x_1$ e $h_1 = \text{identidade}$ fora de V_1 . Seja $\varphi_1 = \varphi \circ h_1 : M \rightarrow N$. Então φ_1 é homotópica a f e $\varphi_1(y_1) = \varphi(x_1) = a$. Além disso, fica claro da construção que $\varphi_1^{-1}(a) = \{y_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Agora, tome V_2 uma vizinhança euclideana de x_2 em M , disjunta de V_1 e não contendo os pontos $x_3, \dots, x_n$. Escolha $y_2 \in V_2$ no interior de uma 2-célula de M . Seja $h_2 : M \rightarrow M$ um homeomorfismo homotópico a aplicação identidade tal que $h_2(y_2) = x_2$ e $h_2 = \text{identidade}$ fora de V_2 . Defina $\varphi_2 = \varphi_1 \circ h_2 : M \rightarrow N$. Então φ_2 é homotópica a f e temos $\varphi_2^{-1}(a) = \{y_1, y_2, x_3, \dots, x_n\}$.

A iteração deste processo construtivo termina por construir uma aplicação $\varphi_p : M \rightarrow N$ homotópica a f e tal que $\varphi_p^{-1}(a) = \{y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n\}$, com cada y_i ($1 \leq i \leq p$) e cada x_j ($p < j \leq n$) contido no interior de uma 2-célula de M . ■

Para finalizar este pequeno capítulo, provaremos que toda aplicação de um 2-complexo em uma superfície fechada (com decomposição celular minimal) que é livre de raízes é do tipo ∇_3 . Lembre-se que uma aplicação f é dita ser livre de raízes se $\mu(f) = 0$.

Proposição 4.7. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação livre de raízes, então f é do tipo ∇_3 .*

Prova: Suponha que $f : K \rightarrow M$ seja livre de raízes. Então existem uma aplicação $\varphi : K \rightarrow M$ homotópica a f e um ponto $a \in M$ tais que $\varphi^{-1}(a) = \emptyset$. A menos de composição de φ com um auto-homeomorfismo de M , podemos assumir que o ponto a esteja localizado no interior da (única) 2-célula de M (estamos considerando M com decomposição celular minimal). Seja $\varphi_a : K \rightarrow M \setminus \{a\}$ a aplicação obtida restringindo-se o contra-domínio de φ . Existe uma retração por deformação forte $r : M \setminus \{a\} \rightarrow M^1$. Seja $\psi : K \rightarrow M$ definida pela composição $\psi = l \circ r \circ \varphi_a$, onde $l : M^1 \rightarrow M$ é a inclusão natural. É fácil ver que ψ é uma aplicação celular homotópica a f e, além disso, $\psi^{-1}(a) = \emptyset$. Isto prova o enunciado. ■

Os argumentos apresentados na provar da Proposição 4.7 servem também para provar que:

Proposição 4.8. *Se $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação livre de raízes e a superfície M é considerada com sua decomposição celular minimal, então existe uma aplicação $\varphi : K \rightarrow M^1$ homotópica a f e tal que $\varphi(K) \subset M^1$.*

O resultado expresso nesta proposição será utilizado muitas vezes no texto. Algumas vezes nos permitiremos utilizá-lo sem uma prévia referência.

Raízes de aplicações de 2-complexos na 2-esfera

Estudamos neste capítulo o problema de raízes para aplicações de 2-complexos na esfera S^2 . Dada uma tal aplicação $f : K \rightarrow S^2$, satisfazendo certas propriedades, definiremos dois números inteiros $\zeta(f)$ e $\zeta(K, d)$, os quais mostrar-se-ão limitantes superiores para $\mu(f)$. O número $\zeta(f)$ somente está definido quando f é uma aplicação celular e $\zeta(K, d)$ é definido quando K é homotopicamente equivalente a 2-esfera; aqui utilizamos d para denotar o assim chamado grau homológico de f . Quando os dois números estão definidos, verifica-se a desigualdade $\mu(f) \leq \zeta(K, d) \leq \zeta(f)$. Se $K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P}$, associamos a $K_{\mathcal{P}}$ uma matriz inteira $\Delta_{\mathcal{P}}$ e mostramos que uma aplicação $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ tem solução inteira, onde $\overrightarrow{\deg}(f)$ é o assim chamado vetor-grau de f . Derivamos várias consequências destes resultados e apresentamos diversos exemplos.

5.1 Fatoração celular e vetor-grau de aplicações

Seja K um 2-complexo conexo e finito e seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação celular. Consideramos a esfera S^2 com sua decomposição celular minimal com uma 0-célula e_*^0 e uma 2-célula e_*^2 , doravante adotada,

$$S^2 = e_*^0 \cup e_*^2.$$

Suponha que K possua $m = \#^2(K)$ células de dimensão dois, digamos $e_1^2, \dots, e_m^2$. Para cada $1 \leq i \leq m$, definimos a aplicação quociente

$$\omega_i : K \rightarrow K/(K \setminus e_i^2)$$

que colapsa o complementar do interior da 2-célula e_i^2 a um ponto c_i^0 . Então, a imagem $\omega_i(K) = K/(K \setminus e_i^2)$ é naturalmente homeomorfa a uma 2-esfera S_i^2 que herda de K a decomposição celular $S_i^2 = c_i^0 \cup c_i^2$, onde o interior da 2-célula c_i^2 corresponde homeomorficamente a imagem por ω_i do interior da 2-célula e_i^2 do 2-complexo K .

Como $f : K \rightarrow S^2$ é uma aplicação celular, o 1-esqueleto K^1 de K é aplicado por f sobre a 0-célula e_*^0 de S^2 . Ademais, K^1 é aplicado por ω_i (que é também uma aplicação celular) sobre a 0-célula c_i^0 da esfera S_i^2 , para todo $1 \leq i \leq m$. Então, podemos definir, para cada $1 \leq i \leq m$, uma única aplicação $f_i : S_i^2 \rightarrow S^2$ tal que

$$f|_{\bar{e}_i^2} = f_i \circ \omega_i|_{\bar{e}_i^2}.$$

De fato, para cada $\bar{x} = \omega_i(x) \in S_i^2$, definimos $f_i(\bar{x}) = f(x)$. Como f é uma aplicação celular, cada f_i é bem definida e é ainda uma aplicação celular.

Esta construção culmina na assim chamada *fatoração celular* de $f : K \rightarrow S^2$, que consiste do esquema abaixo, onde, por construção, para cada $x \in e_i^2$, tem-se $f(x) = (f_i \circ \omega_i)(x)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & S_1^2 & & \\ & \nearrow \omega_1 & & \searrow f_1 & \\ K^1 \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_m^2 = K & & & & S^2 \\ & \searrow \omega_m & & \nearrow f_m & \\ & & S_m^2 & & \end{array}$$

Como as aplicações $\omega_i^{f_s}$ não dependem de f , ao invés de nos referirmos ao esquema acima como a fatoração celular de f , diremos simplesmente que as aplicações $f_1, \dots, f_m$ são a *fatoração celular* de f . Agora, como cada aplicação $f_i : S_i^2 \rightarrow S^2$ é uma aplicação entre 2-esferas, elas tem definido o seu grau, que denotamos por $\deg(f_i)$, como usualmente.

O *vetor-grau* de f , que denotamos por $\overrightarrow{\deg}(f)$, é definido como sendo o vetor-coluna inteiro, com m coordenadas, cuja i -ésima coordenada é o grau $\deg(f_i)$, ou seja,

$$\overrightarrow{\deg}(f) = (\deg(f_1), \dots, \deg(f_m))^T,$$

onde o sobrescrito T indica transposição de matrizes.

5.2 Os lemas fundamentais

Nesta seção, apresentamos dois lemas (Lemas 5.3 e 5.4) que são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Nas provas destes lemas serão utilizados outros dois lemas técnicos (Lemas 5.1 e 5.2).

Os lemas técnicos tratam da existência de certas homotopias relativas entre auto-aplicações da 2-esfera. Para evitar conflito com as notações já utilizadas, consideramos a 2-esfera do domínio de uma tal auto-aplicação com decomposição celular $S^2 = e^0 \cup e^2$ e, como antes, a 2-esfera do contra-domínio é considerada com decomposição celular $S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$.

Lema 5.1. *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular de grau $d \neq 0$. Então existem uma aplicação celular $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ e um ponto $a \in S^2$, tais que $\varphi \simeq f \text{ rel } \{e^0\}$ e $\#\varphi^{-1}(a) = 1$.*

Prova: A existência de uma aplicação φ homotópica a f satisfazendo $\#\varphi^{-1}(a) = 1$ é bem conhecida (ver [27] e/ou [6]). O que nos cumpre provar é o fato de tal aplicação poder ser escolhida celular e homotópica a f relativa a $\{e^0\}$. Vamos dividir a prova em várias etapas.

1ª Etapa: Existem uma aplicação celular $g : S^2 \rightarrow S^2$ e um ponto $a \in S^2$ tais que $g \simeq f$ e $\#g^{-1}(a) = 1$. Com efeito: considere a esfera S^2 fragmentada em $|d|$ faixas meridionais por meridianos $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{|d|}$. Seja $g : S^2 \rightarrow S^2$ a aplicação definida de modo que cada meridiano $\mathbf{m}_i$, para $1 \leq i \leq |d|$, é aplicado homeomorficamente sobre um mesmo meridiano distinguido $\mathbf{m}$ de S^2 e cada uma das $|d|$ faixa meridionais reveste uma vez a esfera S^2 , sempre numa mesma direção, a qual é escolhida, de acordo com a orientação de S^2 , de modo que g seja uma aplicação de grau d (e não $-d$, que é a única outra alternativa para o grau da aplicação g assim construída). A aplicação g pode ser vista como a suspensão de $g_1 : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $g_1(z) = z^d$ e é o recobrimento ramificado canônico de $|d|$ folhas e pontos de ramificação e^0 e $-e^0$, uma vez considerados e^0 como o polo sul e $-e^0$ como o polo norte.

Figura 5.1: Auto-aplicações da 2-esfera com grau d

Como f e g têm o mesmo grau, f e g são homotópicas. Além disso, se definimos $a = g(-e^0)$, conforme a Figura 5.1, então $g^{-1}(a) = \{-e^0\}$. O que não podemos garantir de imediato é que a homotopia entre f e g seja relativa a $\{e^0\}$. Passamos então à próxima etapa.

2ª Etapa: Seja $H : S^2 \times I \rightarrow S^2$ uma homotopia entre f e g , de modo que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, qualquer que seja o ponto $x \in S^2$. Se $H : f \simeq g \text{ rel } \{e^0\}$, então a prova

termina aqui. Caso contrário, H define um laço $\gamma = H(e^0, \cdot) : I \rightarrow S^2$ com ponto base $\gamma(0) = H(e^0, 0) = f(e^0) = e_*^0 = g(e^0) = H(e^0, 1) = \gamma(1)$. Sendo S^2 simplesmente conexa, este laço é homotópico ao laço $\gamma_0 : I \rightarrow S^2$ constante em e_*^0 . Seja $\Lambda : I \times I \rightarrow S^2$ homotopia (com pontos finais fixados) entre γ e γ_0 , ou seja, $\Lambda : \gamma \simeq \gamma_0 \text{ rel } \{e^0\}$.

3ª Etapa: Vamos obter a aplicação procurada $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ como sendo o final de uma homotopia $\hat{H} : S^2 \times I \rightarrow S^2$, relativa a $\{e^0\}$, começando em f e obtida através de uma sutil alteração da homotopia H em uma vizinhança específica U de $e^0 \times I$ em $S^2 \times I$. Nesta etapa da demonstração apenas construiremos a vizinhança U .

Pois bem, seja V uma vizinhança fechada do ponto e^0 em S^2 , contida no hemisfério sul de S^2 e homeomorfa a $I \times I$, de tal modo que $-e^0 \notin V$. A menos de homeomorfismo, podemos considerar $H|_{V \times I}$ como sendo uma aplicação de $I \times I \times I$ em S^2 . Como alteraremos H somente em um subconjunto de $V \times I$, esta identificação não prejudica nossa demonstração, outrossim, facilitará a construção da homotopia $\hat{H}$ desejada.

De agora em diante, apesar de mantermos as notações originais, entendemos $H|_{V \times I}$ como aplicação de $I \times I \times I$ em S^2 . Por simplicidade de notação, escrevemos e_t^0 para denotar o ponto (e^0, t) de $V \times I$.

Sejam ε e δ dois números reais positivos escolhidos de tal modo que a bola fechada $\bar{B}_\rho(e_0^0)$ esteja inteiramente contida no interior de $V \times 0$, onde $\rho = \varepsilon + \delta$.

Seja U o tronco de cilindro $\bar{B}_\rho(e_0^0) \times I$ contido em $V \times I$ e seja C o cone contido em U , cuja base é a bola fechada $\bar{B}_\varepsilon(e_1^0)$ e cujo vértice é o ponto e_0^0 .

Por fim, vamos escrever ∂U e ∂C para denotar a fronteira topológica de U e de C , respectivamente, em $V \times I$. Ainda mais, vamos denotar $W = U \setminus (C \setminus \partial C)$. Note que $W \cup C = U$ e $W \cap C = \partial C$. (Veja a Figura 5.2).

Figura 5.2: Construção de vizinhança para $e^0 \times I$.

4ª Etapa: Definição de $\hat{H}$ restrita a $(S^2 \times I) \setminus U$.

Para cada ponto $(x, t) \in (S^2 \times I) \setminus U$, definimos, simplesmente, $\hat{H}(x, t) = H(x, t)$.

5ª Etapa: Definição de $\hat{H}$ restrita a W .

Para cada número real $t \in I$, considere a secção $V_t = V \times t$ de $V \times I$. Sua intersecção U_t com U é composta por duas bolas fechadas com centro em e_t^0 e raios $t\varepsilon$ e $\delta + (1-t)\varepsilon$, conforme

indicado na Figura 5.3. Além disso, W_t é o anel (fechado) delimitado por estas duas bolas fechadas.

Figura 5.3: A seção $V_t = V \times t$.

Para cada ponto $(x, t) \in W_t$, existe um único segmento de reta $[(x, t), e_t^0]$ ligando (x, t) ao ponto e_t^0 . Este segmento encontra a fronteira da bola fechada $\bar{B}_{t\varepsilon}(e_t^0) \times t$ em um único ponto Q_t^x . O prolongamento deste segmento até o bordo da bola fechada $\bar{B}_{t\rho}(e_t^0) \times t$, determina sobre este um único ponto P_t^x tal que $[P_t^x, Q_t^x]$ contém (x, t) e $[P_t^x, Q_t^x] \wedge [Q_t^x, e_t^0] = [P_t^x, e_t^0]$, onde $\wedge$ indica concatenação de caminhos. Existe, então, um único número real $\lambda(x) \in [0, 1]$ tal que

$$(x, t) = P_t^x + \lambda(x) \overrightarrow{P_t^x Q_t^x}.$$

Agora, como $\bar{B}_\rho(e_t^0)$ e $\bar{B}_{t\varepsilon}(e_t^0)$ são bolas “redondas” concêntricas, existe um número real não negativo $m(t)$ (que depende apenas de t e não de x) tal que

$$m(t) \overrightarrow{P_t^x Q_t^x} = \overrightarrow{P_t^x e_t^0}.$$

Observe que $m(0) = 1$, $m(1) = \rho/\delta$ e $m(t)$ varia linearmente em t , para $t \in I$.

Definimos

$$\hat{H}(x, t) = \hat{H}(P_t^x + \lambda(x) \overrightarrow{P_t^x Q_t^x}) = H(P_t^x + m(t)\lambda(x) \overrightarrow{P_t^x Q_t^x}).$$

Note-se que:

- (a) $\hat{H}$ aplica o segmento $[P_t^x, Q_t^x]$ em $H([P_t^x, e_t^0])$.
- (b) Se $(x, t) \in \partial \bar{B}_{t\varepsilon}(e_t^0) \subset \partial C$, então $(x, t) = Q_t^x$, $\lambda(x) = 1$ e $\hat{H}(x, t) = H(P_t^x + m(t) \overrightarrow{P_t^x Q_t^x}) = H(e_t^0) = \gamma(t)$.
- (c) Se $(x, t) \in \partial U$, então $(x, t) = P_t^x$, donde $\lambda(x) = 0$ e $\hat{H}(x, t) = H(P_t^x) = H(x, t)$. Isto mostra que $\hat{H}$ é uma extensão de $\hat{H}|_{(S^2 \times I) \setminus U}$.
- (d) Na seção $V \times 0$, tem-se $W_0 = W \times 0 = \bar{B}_\rho(e_0^0)$ e $\hat{H}(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$ para todo $(x, 0) \in W$.

6ª Etapa: Definição de $\hat{H}$ restrita a C .

Cada ponto $Q \in \partial C$ determina um único segmento $[e_0^0, Q_1^x]$ contido em ∂C , de modo que $Q_1^x \in \bar{B}_\rho(e_1^0)$ e $Q \in [e_0^0, Q_1^x]$. Escreva Q_t^x para denotar o único ponto deste segmento que se encontra na seção $V \times t$.

Pelo item (b) da 5ª Etapa, $\hat{H}$ já está definido para cada ponto Q_t^x e tem-se $\hat{H}(Q_t^x) = \gamma(t)$.

Agora, cada ponto $(x, t) \in C$, que não o próprio e_t^0 , determina um único segmento $[Q_t^x, e_t^0]$ contido em C de modo que $(x, t) \in [Q_t^x, e_t^0]$ e $Q_t^x \in \partial C$. (Veja Figura 5.4).

Figura 5.4: O cone C

Seguramente, existe um homeomorfismo linear h_t^x aplicando o segmento $[Q_t^x, e_t^0]$ sobre o segmento $[(t, 0), (t, 1)]$ naturalmente contido em $I \times I$. Os homeomorfismos h_s^y são idênticos para quaisquer pontos $(y, s) \in [Q_t^x, e_t^0]$. Definimos, finalmente,

$$\hat{H}(x, t) = \Lambda(h_t^x(x, t)) \quad \text{e} \quad \hat{H}(e_t^0) = e_*^0.$$

Note-se que:

(a) $\hat{H}$ é contínua em e_t^0 , pois $\Lambda(t, s) \rightarrow e^0$ quando $s \rightarrow 1$ e $h_t^x(x, t) \rightarrow (t, 1)$ quando $(x, t) \rightarrow e_t^0$.

(b) Se $(x, t) \in \partial C$, então $(x, t) = Q_t^x$ e $\hat{H}(x, t) = \Lambda(h_t^x(Q_t^x)) = \Lambda(t, 0) = \gamma(t)$, o que é, segundo o item (b) acima, compatível com a definição de $\hat{H}$ sobre ∂C realizada na 5ª etapa.

7ª Etapa: Com as construções realizadas nas etapas anteriores, temos definida uma homotopia $\hat{H} : S^2 \times I \rightarrow S^2$ começando em f . Seja $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ o final desta homotopia, ou seja, $\varphi(x) = \hat{H}(x, 1)$. Então $\hat{H} : f \simeq \varphi \text{ rel } \{e^0\}$, como mostra a etapa anterior. Além disso, $\hat{H}$ difere de H apenas no interior da vizinhança U de $e^0 \times I$, e tal alteração não afeta a pré-imagem do ponto a , de modo que $\varphi^{-1}(a) = \{-e^0\}$. Isto conclui a prova. ■

Lema 5.2. *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular de grau zero e seja $\kappa^0 : S^2 \rightarrow S^2$ a aplicação celular constante em e_*^0 . Então $f \simeq \kappa^0 \text{ rel } \{e^0\}$.*

Prova: Certamente $f \simeq \kappa^0$. Seja então $H : S^2 \times I \rightarrow S^2$ uma homotopia começando em f e terminando na aplicação constante κ^0 . Se H não é uma homotopia relativa a e^0 , defina $\hat{H} : S^2 \times I \rightarrow S^2$ como no lema anterior. Então tem-se $\hat{H} : f \simeq \hat{H}(\cdot, 1) \text{ rel } \{e^0\}$. Agora, pela construção da $\hat{H}$ é fácil checar que $\hat{H}(x, 1) = e^0$ para todo $x \in S^2$, ou seja $\hat{H}(\cdot, 1) = \kappa^0$. Portanto $\hat{H} : f \simeq \kappa^0 \text{ rel } \{e^0\}$. ■

Doravante, escrevemos $\kappa_*^0 : K \rightarrow S^2$ para denotar a aplicação celular constante em e_*^0 .

O lema a seguir mostra que o vetor-grau $\overrightarrow{\deg}(f)$ é invariante por homotopias relativas ao 1-esqueleto.

Lema 5.3. *Sejam $f, g : K \rightarrow S^2$ duas aplicações celulares. Se $f \simeq g \text{ rel } K^1$, então $\overrightarrow{\deg}(f) = \overrightarrow{\deg}(g)$.*

Prova: Seja $H : f \simeq g \text{ rel } K^1$, ou seja, $H : K \times I \rightarrow S^2$ é uma aplicação contínua verificando $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in K$, e $H(x, t) = f(x) = g(x) = e_*^0$ para todo $t \in I$ e todo $x \in K^1$.

Para cada $\bar{x} \in S_i^2$, escolha de uma vez por todas um ponto $x \in e_i^2$ tal que $\bar{x} = \omega_i(x)$. Defina $H_i : S_i^2 \times I \rightarrow S^2$ por $H_i(\bar{x}, t) = H(x, t)$. Pelas definições de ω_i e H , a aplicação H_i está bem definida e é contínua. Além disso, temos

$$H_i(\bar{x}, 0) = H(x, 0) = f(x) = f_i(\omega_i(x)) = f_i(\bar{x}) \text{ para todo } \bar{x} \in S_i^2;$$

$$H_i(\bar{x}, 1) = H(x, 1) = g(x) = g_i(\omega_i(x)) = g_i(\bar{x}) \text{ para todo } \bar{x} \in S_i^2;$$

$$H_i(c_i^0, t) = H(x, t) = e_*^0 \text{ para todo } t \in I, \text{ já que neste caso } x \in \partial e_i^2 \subset K^1.$$

Portanto, $H_i : f_i \simeq g_i \text{ rel } \{c_i^0\}$. Segue-se que $\deg(f_i) = \deg(g_i)$. Como estes argumentos são válidos para cada $1 \leq i \leq m$, isto prova que $\overrightarrow{\deg}(f) = \overrightarrow{\deg}(g)$. ■

O próximo resultado mostra que a recíproca do lema acima é verdadeira se ao menos uma dentre f e g é uma aplicação constante.

Lema 5.4. *Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação celular. Então $f \simeq k_*^0 \text{ rel } K^1$ se, e somente se, $\overrightarrow{\deg}(f) = 0$.*

Prova: Segue do lema anterior que se $f \simeq k_*^0 \text{ rel } K^1$ então $\overrightarrow{\deg}(f) = 0$. Para provar a recíproca, assumamos $\overrightarrow{\deg}(f) = 0$ e escreva $\kappa_i^0 : S_i^2 \rightarrow S^2$ para denotar a aplicação constante de S_i^2 em $e_*^0 \in S^2$. Como $\deg(f_i) = 0$, temos $f_i \simeq \kappa_i^0 \text{ rel } \{c_i^0\}$, pelo Lema 5.2. Então, seja $H_i : S_i^2 \times I \rightarrow S^2$ uma homotopia relativa, de modo que $H_i(\bar{x}, 0) = f_i(\bar{x})$ e $H_i(\bar{x}, 1) = e_*^0$ para todo $\bar{x} \in S_i^2$, e $H_i(c_i^0, t) = e_*^0$ para todo $t \in I$. Para cada $x \in K$, escolha de uma vez por todas um índice $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in e_{i(x)}^2$. Defina $H : K \times I \rightarrow S^2$ por $H(x, t) = H_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x), t)$. Se um ponto $x \in K$ pertence a uma intersecção $e_j^2 \cap e_l^2$ de duas 2-células, então $x \in K^1$ e $\omega_j(x) = c_j^0$ e $\omega_l(x) = c_l^0$. Assim, a condição $H_i(c_i^0, t) = e_*^0$ para todo $t \in I$ e todo $i \in \{1, \dots, m\}$ mostra que a aplicação H está bem definida e para cada $x \in K^1$ tem-se $H(x, t) = e_*^0$ para todo $t \in I$. Além disso, tem-se $H(x, 0) = H_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x), 0) = f_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x)) = f(x)$ para todo $x \in K$ e $H(x, 1) = H_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x), 1) = \kappa_{i(x)}^0(\omega_{i(x)}(x)) = e_*^0$ para todo $x \in K$. Portanto, $H : f \simeq k_*^0 \text{ rel } K^1$. ■

Note que se a homotopia $f \simeq \kappa_*^0$ não é relativa ao 1-esqueleto, então não se pode garantir, em geral, que $\overrightarrow{\deg}(f) = 0$. Para ilustrar isso, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.5. Seja K um 2-disco com decomposição celular $e_1^0 \cup e_1^1 \cup e_1^2$. Seja $f : K \rightarrow S^2$ a aplicação canônica que identifica o bordo do disco em um único ponto que escolhemos ser a 0-célula e_*^0 de S^2 . Então, na fatoração celular de f

$$K \xrightarrow{\omega_1} S_1^2 \xrightarrow{f_1} S^2$$

tem-se f_1 homotópica a aplicação identidade. Logo $\deg(f_1) = 1$. No entanto, como K é contrátil, f é homotópica a uma aplicação constante. □

Este exemplo será lembrado oportunamente no decorrer deste capítulo.

5.3 O número $\zeta(f)$

Dada uma aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ com fatoração celular $f_1, \dots, f_m$, vamos definir um número $\zeta(f)$ dependendo do vetor-grau $\overrightarrow{\deg}(f)$. Utilizaremos os lemas da seção precedente para provar que este número consiste de um limitante superior para o número mínimo de raízes da aplicação f , que denotamos $\mu(f)$. Nada mais havendo como pré-requisitos a este propósito, definimos:

$$\zeta(f) = \text{número de coordenadas não nulas do vetor-grau } \overrightarrow{\deg}(f).$$

Teorema 5.6. *Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação celular. Então $\mu(f) \leq \zeta(f)$.*

Prova: Se $\zeta(f) = 0$, então $\overrightarrow{\deg}(f) = 0$ e $f \simeq \kappa_*^0$, pelo Lema 5.4. Logo $\mu(f) = 0 \leq \zeta(f)$.

Suponha $\zeta(f) = p > 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\deg(f_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq p$ e portanto $\deg(f_i) = 0$ para $i > p$. Pelo Lema 5.1, para cada $1 \leq i \leq p$, existem uma aplicação celular $\varphi_i : S_i^2 \rightarrow S^2$, uma homotopia relativa $H_i : \varphi_i \simeq f_i \text{ rel } \{c_i^0\}$, e um ponto $a_i \in S^2$, tais que $\varphi_i^{-1}(a_i) = \{b_i\}$. Fica claro da demonstração do Lema 5.1 que as aplicações φ_i^s podem ser escolhidas de modo que $a_1 = \dots = a_p = a$ e ainda $a \neq e_*^0$ e cada $b_i \neq c_i^0$.

Por outro lado, para cada $i > p$, tem-se $\deg(f_i) = 0$. Logo, pelo Lema 5.2, existe uma homotopia relativa $H_i : f_i \simeq k_i^0 \text{ rel } \{c_i^0\}$, onde $k_i^0 : S_i^2 \rightarrow S^2$ é a aplicação constante em e_*^0 .

Para cada $x \in K$, escolha de uma vez por todas um índice $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ para o qual se tenha $x \in e_i^2$. Seja $\varphi : K \rightarrow S^2$ a aplicação definida por $\varphi(x) = \varphi_{i(x)}(\omega_{i(x)})$ se $i(x) \leq p$, e $\varphi(x) = e_*^0$ se $i(x) > p$. Sendo f e cada φ_i aplicações celulares, é fácil ver que φ está bem definida e é também uma aplicação celular.

Agora, como nas provas dos lemas da seção anterior, as homotopias H_i podem ser conjuntamente utilizadas para se construir uma homotopia relativa $H : f \simeq \varphi \text{ rel } K^1$.

Sendo cada b_i um ponto do interior da 2-célula c_i^2 da esfera S_i^2 , a pré-imagem de cada b_i pela correspondente aplicação ω_i é um único ponto $x_i \in K$, situado no interior da 2-célula e_i^2 .

Fica evidente na demonstração que $\varphi^{-1}(a) = \{x_1, \dots, x_p\}$. Portanto $\mu(f) \leq p = \zeta(f)$. ■

Vários resultados interessantes podem ser obtidos como consequência imediata deste teorema. Passamos a enunciar e demonstrar os que julgamos mais importantes.

Corolário 5.7. *Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação. Então $\mu(f) \leq \#^2(K)$.*

Prova: f possui uma aproximação celular f_{cel} e temos $\mu(f) = \mu(f_{cel}) \leq \zeta(f_{cel}) \leq \#^2(K)$. ■

O limitante $\#^2(K)$ fornecido por este corolário pode estar longe de ser uma boa estimativa para $\mu(f)$. A proposição a seguir, consequência do teorema acima e dos resultados das Seções 3.5 e 3.6, fornece uma estimativa mais precisa.

Proposição 5.8. *Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação. Então $\mu(f) \leq \text{ess}(K_{\dagger})$.*

Prova: Como $\mu(f) = \mu(f_{\dagger})$, basta provar que $\mu(f) \leq \text{ess}(K)$. Pois bem, seja L um subcomplexo de K tal que $K \searrow L$ e $\text{ess}(K) = \#^2(K) - \text{pcb}(K, L)$. (Confira a Definição 3.3). Então $\mu(f) = \mu(f_L) \leq \#^2(L) = \text{ess}(K)$. ■

Os próximos resultados impõem condições sobre o tipo de realização do número mínimo de raízes de f , conforme a terminologia do Capítulo 4. Os resultados principais daquele capítulo serão utilizados e devidamente citados nas demonstrações dos resultados abaixo.

Proposição 5.9. *Seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação celular do tipo ∇_3 e seja (φ, a) um par realizando $\mu(f)$ (conforme a definição de tipo ∇_3). Então $\mu(f) = \zeta(\varphi)$.*

Prova: Por definição, φ é uma aproximação celular de f . Logo $\mu(f) = \mu(\varphi) \leq \zeta(\varphi)$, sendo a última desigualdade devida ao Teorema 5.6. Basta agora provar que $\mu(\varphi) \geq \zeta(\varphi)$.

Suponha que a equação $\varphi(x) = a$ não possua raízes em uma certa 2-célula e_j^2 de K , ou seja, $\varphi(x) \neq a$ para todo $x \in e_j^2$. Então $\varphi_j(y) \neq a$ para todo $y \in c_j^2 \subset S_j^2$, o que implica em $\deg(\varphi_j) = 0$. Segue-se que a equação $\varphi(x) = a$ possui ao menos $\zeta(\varphi)$ raízes, cada uma contida no interior de uma 2-célula diferente. Portanto, como $\mu(\varphi) = \mu(f) = \#\varphi^{-1}(a)$, concluímos que $\mu(\varphi) \geq \zeta(\varphi)$. ■

O Exemplo 4.2 mostra que o resultado desta proposição falha, em geral, se a hipótese acerca da verificação do tipo ∇_2 (e logo do tipo ∇_3) é excluída. De fato, naquele exemplo se constrói um complexo K contendo duas células de dimensão 2 e uma aplicação $f : K \rightarrow S^2$ com $\mu(f) = 1$. No entanto, é fácil verificar que, para toda aplicação celular $\varphi : K \rightarrow S^2$ homotópica a f , tem-se $\zeta(\varphi) = 2$. Tal exemplo foi oportunamente confeccionado para se demonstrar que existem aplicações do tipo ∇_1 que não são do tipo ∇_2 e, portanto, que não são do tipo ∇_3 .

Corolário 5.10. *Se $f : K \rightarrow S^2$ é uma aplicação do tipo ∇_2 , então existe um par (φ, a) realizando $\mu(f)$ com φ celular e tal que $\mu(f) = \zeta(\varphi)$.*

Prova: Pela Proposição 4.5, a aplicação f é também do tipo ∇_3 . Logo, existe um par (φ, a) realizando $\mu(f)$ conforme a definição do tipo ∇_3 . Portanto φ é uma aproximação celular de f e o resultado enunciado segue da proposição anterior. ■

Corolário 5.11. *Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação de uma superfície fechada na esfera, então existe um par (φ, a) realizando $\mu(f)$ com φ celular e tal que $\mu(f) = \zeta(\varphi)$.*

Prova: Pela Proposição 4.6 uma tal aplicação f é do tipo ∇_3 . O resultado então segue do corolário anterior. ■

O próximo resultado já é amplamente conhecido, mas fazemos questão de apresentar para o mesmo uma nova prova, com base dos principais resultados até aqui demonstrados.

Corolário 5.12. *Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação de uma superfície fechada na esfera, então $\mu(f) = 0$ se $A(f) = 0$ e $\mu(f) = 1$ se $A(f) \neq 0$, onde $A(f)$ denota o grau absoluto de f .*

Prova: Pela Proposição 4.6, uma tal aplicação f é do tipo ∇_3 . Além disso, temos $A(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \not\equiv \text{constante} \Leftrightarrow \mu(f) \neq 0$. Por outro lado, se consideramos M com decomposição celular minimal, então $A(f) \neq 0 \Rightarrow \zeta(\varphi) = 1$ para toda aproximação celular φ de f . O resultado agora segue do corolário anterior. ■

Antes de concluir esta seção, gostaríamos de observar que o número $\zeta(f)$ está definido para toda aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$. No entanto, este número não é invariante por homotopia, ou seja, pode ocorrer de duas aplicações celulares $f, g : K \rightarrow S^2$ serem homotópicas, sem que se tenha $\zeta(f) = \zeta(g)$. O Exemplo 5.5 ilustra este fato.

Com isso, dada uma aplicação (não necessariamente celular) $f : K \rightarrow S^2$, a cada aproximação celular f_{cel} de f pode estar associado um número $\zeta(f_{cel})$ diferente. Sendo assim, não se pode definir o número $\zeta(f)$ para aplicações não celulares. O que podemos garantir, quando f não é celular, é que

$$\mu(f) \leq \min\{\zeta(f_{cel}) : f_{cel} \text{ é aproximação celular de } f\}$$

Na próxima seção definiremos um novo limitante superior para $\mu(f)$, o qual estará definido não apenas para aplicações celulares. No entanto, outra restrição será imposta; suporemos que o 2-complexo K seja homotopicamente equivalente a esfera S^2 .

5.4 O número $\zeta(K, d)$

Vamos estudar nesta seção o caso especial de aplicações $f : K \rightarrow S^2$ onde K é um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 .

Pois bem, se este é o caso, então K é conexo e simplesmente conexo e $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$. Então, $H_2(K)$ possui um gerador da forma

$$\zeta_K = a_1 e_1^2 + \cdots + a_m e_m^2$$

onde $m = \#^2(K)$ e e_i^2 , para $1 \leq i \leq m$, são exatamente as 2-células que compõem o complexo K . Pode ocorrer, no entanto, que algum a_i seja nulo. Neste caso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\zeta_K = a_1 e_1^2 + \cdots + a_n e_n^2$$

onde $n \leq m$ e $a_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Se $f : K \rightarrow S^2$ é uma aplicação contínua, podemos definir o seu *grau homológico* como sendo o único inteiro $dH(f)$ que verifica a equação

$$f_*(\zeta_K) = dH(f) \cdot \zeta_{S^2}$$

onde $f_* : H_2(K) \rightarrow H_2(S^2)$ é o homomorfismo induzido por f no segundo grupo de homologia, e ζ_{S^2} é a classe fundamental de S^2 .

As seguintes propriedades acerca do grau homológico são de verificação trivial:

1. Se $f \simeq g : K \rightarrow S^2$, então $dH(f) = dH(g)$;
2. Se $f : K \rightarrow S^2$ é homotópica a uma aplicação não sobrejetora, então $dH(f) = 0$;
3. Se $\psi : K \rightarrow S^2$ é uma equivalência de homotopia, então $dH(\psi) = \pm 1$;
4. Se $f : K \rightarrow S^2$ e $g : S^2 \rightarrow S^2$ são duas aplicações, então $dH(g \circ f) = dH(f) \deg(g)$.

Quando consideramos uma aplicação $g : S^2 \rightarrow K$, seu grau homológico é definido de modo similar como sendo o inteiro $dH(g)$ que satisfaz $g_*(\zeta_{S^2}) = dH(g) \cdot \zeta_K$. De acordo com isso, é fácil verificar as seguintes propriedades adicionais sobre o grau homológico:

5. Se $\psi : S^2 \rightarrow K$ é uma equivalência de homotopia, então $dH(\psi) = \pm 1$;
6. Se $f : K \rightarrow S^2$ e $g : S^2 \rightarrow K$ são duas aplicações, então $\deg(f \circ g) = dH(f) dH(g)$.

Resultado de demonstração simples, mas demais importante, é o seguinte:

Lema 5.13. *Seja K um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 e sejam $f, g : K \rightarrow S^2$ duas aplicações. Então $f \simeq g$ se, e somente se, $dH(f) = dH(g)$.*

Prova: Sejam $\varphi : K \rightarrow S^2$ e $\psi : S^2 \rightarrow K$ equivalências de homotopias de modo que $\varphi\psi \simeq id_{S^2}$ e $\psi\varphi \simeq id_K$. Sejam $f, g : K \rightarrow S^2$ duas aplicações arbitrárias.

Que $dH(f) = dH(g)$ se $f \simeq g$ é trivial e já foi enunciado na propriedade 1 acima. Agora, conforme as considerações acima, $f\psi$ e $g\psi$ são duas auto-aplicações da esfera S^2 e, portanto, $f\psi \simeq g\psi$ se, e somente se, $\deg(f\psi) = \deg(g\psi)$. Utilizando-se deste e de outros conceitos elementares e das propriedades acima tem-se:

$$\begin{aligned} dH(f) = dH(g) &\Rightarrow \deg(f\psi) = \deg(g\psi) \Rightarrow f\psi \simeq g\psi \Rightarrow f\psi\varphi \simeq g\psi\varphi \\ &\Rightarrow f \circ id_K \simeq g \circ id_K \Rightarrow f \simeq g \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposição 5.14. *Seja K um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 e seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação. Então $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $dH(f) = 0$.*

Prova: Seja $\kappa_*^0 : K \rightarrow S^2$ a aplicação constante na 0-célula e_*^2 de S^2 . Então $dH(\kappa_*^0) = 0$. Segue-se do lema anterior que se $dH(f) = 0$ então $f \simeq \kappa_*^0$ e portanto $\mu(f) = 0$. Por outro lado, se $dH(f) \neq 0$, então $dH(g) \neq 0$ para toda aplicação g homotópica a f e, portanto, toda tal aplicação é sobrejetora, pela propriedade 2 acima. Isto implica que $\mu(f) \geq 1$. ■

Se assumimos que $f : K \rightarrow S^2$ é uma aplicação celular com fatoração celular $f_1, \dots, f_m$ e consideramos, de uma vez por todas, uma indexação das 2-células de K , então o gerador ζ_K pode ser considerado como o vetor coluna inteiro $(a_1, \dots, a_m)^T$. Neste caso é fácil verificar que o grau homológico $dH(f)$ é igual ao produto escalar $\zeta_K \cdot \overrightarrow{\deg}(f)$, ou seja,

$$dH(f) = \sum_{i=1}^n a_i \deg(f_i) = \sum_{i=1}^m a_i \deg(f_i).$$

Segue-se que se $\deg(f_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ então $dH(f) = 0$ e f é homotópica a uma aplicação constante em e_*^0 , o que condiz tanto com o Lema 5.4 quanto com o Lema 5.13. No entanto, pode ocorrer $dH(f) = 0$ sem que os $\deg(f_i)^s$, para $1 \leq i \leq n$, sejam todos nulos; e é claro que se este é o caso então há pelo menos dois $\deg(f_i)^s$ não nulos. O leitor saberá dar um exemplo simples para ilustrar este fato.

Lema 5.15. *Seja K um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 e seja d um inteiro arbitrário. Então existe uma aplicação celular $f^{[d]} : K \rightarrow S^2$ com $dH(f^{[d]}) = d$.*

Prova: Seja $\varphi : K \rightarrow S^2$ uma equivalência de homotopia, de modo que $dH(\varphi) = 1$. Certamente existe uma aplicação $g^{[d]} : S^2 \rightarrow S^2$ com $\deg(g^{[d]}) = d$. Seja $f^{[d]}$ uma aproximação celular da aplicação composta $g^{[d]} \circ \varphi : K \rightarrow S^2$. Então $f^{[d]}$ tem grau homológico $dH(f^{[d]}) = dH(\varphi) \deg(g^{[d]}) = d$. ■

Vamos agora introduzir um novo número $\zeta(K, d)$ que estará definido para cada 2-complexo K homotopicamente equivalente a esfera S^2 e cada número inteiro d . Este número, no caso em que d é o grau homológico de uma dada aplicação $f : K \rightarrow S^2$, será um limitante superior para $\mu(f)$ mais preciso que o limitante $\zeta(f)$ definido para o caso em que f é celular.

Seja K um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 , com m células de dimensão 2, e suponha, sem perda de generalidade, que estas estejam indexadas de tal modo que seja $\zeta_K = a_1 e_1^2 + \dots + a_n e_n^2$ um gerador de $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$, com cada $a_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n \leq m$. Temos visto que, para cada aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ tem-se $dH(f) = \sum_{i=1}^n a_i \deg(f_i)$. Então, o lema anterior mostra que, dado um inteiro arbitrário d , existem inteiros $d_1, \dots, d_n$ tais que

$$d = a_1 d_1 + \dots + a_n d_n.$$

Se $(d_1, \dots, d_n)$ é uma n -upla de números inteiros, definimos

$$f(d_1, \dots, d_n) = \text{número de coordenadas não nulas do vetor } (d_1, \dots, d_n).$$

Definimos, por fim,

$$\zeta(K, d) = \min\{f(d_1, \dots, d_n) \text{ tal que } d = a_1 d_1 + \dots + a_n d_n\}.$$

É óbvio que para cada aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ de grau homológico d , vale a desigualdade $\zeta(K, d) \leq \zeta(f)$. O leitor poderá extrair do Exemplo 5.18, que apresentamos na seqüência, exemplos em que se verifica a desigualdade estrita $\zeta(K, d) < \zeta(f)$. Também é verdade que $\zeta(K, d) \leq \text{ess}(K_{\dagger})$, e o Exemplo 5.18 a seguir ilustra casos em que $\zeta(K, d) < \text{ess}(K_{\dagger})$.

Enunciamos e demonstramos agora o resultado principal desta seção.

Teorema 5.16. *Seja K um 2-complexo homotopicamente equivalente a esfera S^2 e seja $f : K \rightarrow S^2$ uma aplicação de grau homológico d . Então $\mu(f) \leq \zeta(K, d)$. Além disso, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\zeta(K, d) = 0$.*

Prova: Certamente, f possui uma aproximação celular f_{cel} e $dH(f_{cel}) = d$ e $\mu(f) = \mu(f_{cel})$. Então, podemos supor que a própria f seja uma aplicação celular.

Neste caso, tem-se $d = a_1 \deg(f_1) + \cdots + a_n \deg(f_n)$. Seja $(d_1, \dots, d_n)$ um n -upla de números inteiros satisfazendo $\zeta(K, d) = \int(d_1, \dots, d_n)$. Para cada $i = 1, \dots, n$, seja $\varphi_i : S_i^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular de grau $\deg(\varphi_i) = d_i$, e para cada $n < j \leq m$ seja $\varphi_j : S_j^2 \rightarrow S^2$ a aplicação celular constante em e_*^0 . Para cada $x \in K$ escolha de uma vez por todas um índice $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in e_{i(x)}^2$.

Seja $\varphi : K \rightarrow S^2$ a aplicação definida por $\varphi(x) = \varphi_{i(x)}(\omega_i(x))$, onde cada $\omega_i : K \rightarrow S_i^2$ é a aplicação quociente definida no início da Seção 5.1. Como cada φ_i e cada ω_i é uma aplicação celular, a aplicação φ está bem definida e é também celular. Além disso,

$$dH(\varphi) = a_1 d_1 + \cdots + a_n d_n = d \quad \text{e} \quad \zeta(\varphi) = \int(d_1, \dots, d_n)$$

Segue-se do Teorema 5.6 que $\mu(\varphi) \leq \zeta(\varphi) = \int(d_1, \dots, d_n) = \zeta(K, d)$. Agora, $dH(\varphi) = d = dH(f)$. Logo φ é homotópica a f pelo Lema 5.13. Portanto $\mu(f) = \mu(\varphi) \leq \zeta(K, d)$.

Para provar a segunda parte do teorema, basta notar que $\zeta(K, d) = 0$ se, e somente se, $d = 0$. Logo, o resultado segue da Proposição 5.14. ■

Corolário 5.17. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 5.16, se $\zeta(K, d) = 1$, então $\mu(f) = 1$.*

Prova: Sendo $\zeta(K, d) = 1$, o Teorema 5.16 mostra que $0 < \mu(f) \leq 1$. Portanto $\mu(f) = 1$. ■

5.5 Dois exemplos interessantes

Para ilustrar a boa aplicabilidade do Teorema 5.16, apresentamos um exemplo em que, dado um 2-complexo K homotopicamente equivalente a esfera S^2 , podemos determinar completamente o número $\mu(f)$ em função do grau homológico $dH(f)$. Este exemplo foi parcialmente apresentado por D.L.Gonçalves em [22]. No referido artigo, o autor apenas constrói o 2-complexo K e faz algumas estimativas do número $\mu(f)$. Para alguns valores de $dH(f)$, o autor diz acreditar saber exatamente o valor de $\mu(f)$, e diz qual é este valor em que acredita;

no entanto, não apresenta nenhuma prova. Devemos aludir que os valores exatos que determinamos para $\mu(f)$, e que o leitor poderá conferir com detalhes no exemplo, conferem com aqueles em que D.L.Gonçalves dizia acreditar quando publicou [22].

Na seqüência, apresentamos um segundo exemplo, ligeiramente mais complicado que o primeiro, no qual os problemas apresentados não podem ser completamente resolvidos como simples consequência do Teorema 5.16.

Exemplo 5.18. Seja K_i , $i = 1, 2$, dois 2-complexos obtidos de S^1 pela colagem de uma 2-célula através da aplicação $\varphi_i : S^1 \rightarrow S^1$, $i = 1, 2$, de graus 2 e 3 respectivamente. (K_1 é exatamente o espaço projetivo 2-dimensional). Tome

$$K = \frac{K_1 \sqcup S^1 \times [0, 1] \sqcup K_2}{\sim}$$

onde identificamos os 1-esqueletos $S^1 \subset K_1$ com $S^1 \times 0$ e $S^1 \subset K_2$ com $S^1 \times 1$.

Provemos inicialmente que K é simplesmente conexo.

Seja A o subconjunto aberto de K correspondendo a imagem pela identificação do conjunto $K_1 \sqcup S^1 \times [0, 3/4)$ e seja B o subconjunto aberto de K correspondendo a imagem pela identificação do conjunto $S^1 \times (1/4, 1] \sqcup K_2$. Então $A \cap B$ é o subconjunto aberto de K correspondendo a $S^1 \times (1/4, 3/4)$. É fácil ver que A , B e $A \cap B$ são todos conexos por caminhos e, além disso,

$$\pi_1(A) = \langle \alpha \mid \alpha^2 \rangle, \quad \pi_1(B) = \langle \beta \mid \beta^3 \rangle \quad \text{e} \quad \pi_1(A \cap B) = \langle \sigma \mid \cdot \rangle$$

Pelo Teorema de Van Kampen segue-se que

$$\pi_1(K) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2, \beta^3, \alpha = \beta \rangle = \mathbb{1}.$$

Vamos mostrar agora que $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$ e vamos determinar um gerador ζ_K para este grupo. Considere a decomposição celular natural de K como mostra a figura abaixo:

Figura 5.5: Um 2-complexo K homotopicamente equivalente a esfera S^2

O complexo de cadeias celulares de K ,

$$0 \rightarrow \langle e_1^2, e_2^2, e_3^2 \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle e_1^1, e_2^1, e_3^1 \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle e_1^0, e_2^0 \rangle \rightarrow 0$$

é tal que

$$\partial_2(e_1^2) = 2e_1^1, \quad \partial_2(e_2^2) = 3e_2^1 \quad \text{e} \quad \partial_2(e_3^2) = e_1^1 + e_2^1.$$

Logo, $\partial_2(\alpha e_1^2 + \beta e_2^2 + \gamma e_3^2) = (2\alpha + \gamma)e_1^1 + (3\beta + \gamma)e_2^1$. E assim, a cadeia celular $\alpha e_1^2 + \beta e_2^2 + \gamma e_3^2$ pertence ao núcleo de ∂_2 se, e somente se, $2\alpha + \gamma = 0 = 3\beta + \gamma$. Portanto

$$H_2(K) \approx \ker(\partial_2) = \langle \zeta_K \rangle \approx \mathbb{Z} \quad \text{onde} \quad \zeta_K = 3e_1^2 + 2e_2^2 - 6e_3^2.$$

Agora, $\text{ess}(K) \neq 0$, já que $H_2(K) \neq 0$ (na verdade $\text{ess}(K) = 3$), e $\#^2(K) - \beta_1(K^1) = 3 - 2 = 1$, já que K^1 é homotopicamente equivalente ao bouquet $S^1 \vee S^1$. Como, além disso, K é conexo e simplesmente conexo, segue da Proposição 3.12 que K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 .

Discutamos agora o problema de minimizar as raízes de uma aplicação celular arbitrária $f : K \rightarrow S^2$, ou seja, o problema de se determinar o número $\mu(f)$. Lembremo-nos que a exigência de que f seja celular não impõe restrições deveras, já que toda aplicação de um complexo em uma superfície possui uma aproximação celular.

Pelo que vimos no início desta subseção, cada aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ possui um grau homológico $dH(f)$ satisfazendo a equação

$$dH(f) = 3 \deg(f_1) + 2 \deg(f_2) - 6 \deg(f_3).$$

Seja $d = dH(f)$. Então já sabemos que $\mu(f) = 0 \Leftrightarrow d = 0$. Consideremos então $d \neq 0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $d > 0$. Temos

$$\zeta(K, d) = \min\{\int(d_1, d_2, d_3) : d = 3d_1 + 2d_2 - 6d_3\}.$$

A total caracterização de $\mu(f)$ em função do grau homológico d de f é a seguinte:

1. Se $d = 1$ então $\mu(f) = 2$.

De fato, $\zeta(K, d) = 2 = \int(1, -1, 0)$, e isto mostra que $\mu(f) \leq 2$. Por outro lado, se $1 = 3d_1 + 2d_2 - 6d_3$ com $d_3 \neq 0$ então $d_1, d_2 \neq 0$ também e $\int(d_1, d_2, d_3) = 3$. Segue-se que toda aplicação de grau homológico 1 (e logo toda aplicação homotópica a f) possui ao menos uma raiz em K_1 e uma raiz em K_2 . Logo $\mu(f) \geq 2$, já que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

2. Se d e 6 são coprimos, então $\mu(f) = 2$.

De fato, é fácil ver que todo inteiro relativamente primo com 6 é da forma $3d_1 + 2d_2$ com $d_1, d_2 \neq 0$. Portanto $\zeta(K, d) = 2$ e $\mu(f) \leq 2$. Agora, os mesmos argumentos do item anterior podem ser utilizados para se concluir que $\mu(f) \geq 2$. Isto mostra que $\mu(f) = 2$ e as raízes estão localizadas uma em K_1 e outra em K_2 .

3. Se d e 2 são coprimos, então d é ímpar e temos exatamente os dois seguintes casos:

- (a) Se $d \equiv 0 \pmod{3}$, então $\mu(f) = 1$.

Neste caso d é da forma $3d_1$ e, como d não é par, também não é múltiplo de 6. Então $\mu(f) = \zeta(K, d) = 1$, com a raiz localizada em K_1 .

- (b) Se $d \equiv 1 \pmod{3}$ ou $d \equiv 2 \pmod{3}$, então $\mu(f) = 2$.

Neste caso d é da forma $3d_1 + 2d_2$ com $d_1, d_2 \neq 0$ ou da forma $3d_1 + 2d_2 - 6d_3$ com $d_1, d_2, d_3 \neq 0$. Segue-se que $\mu(f) \leq \zeta(K, d) = 2$. Por outro lado, novamente os mesmos argumentos do item 1 mostram que $\mu(f) \geq 2$. Portanto $\mu(f) = 2$ e as raízes estão uma em K_1 e a outra em K_2 .

4. Se d e 3 são coprimos, então temos exatamente os seguintes dois casos:

(a) Se d é par, então $\mu(f) = 1$.

Neste caso d é da forma $2d_2$ ou $2d_2 - 6d_3$ com $d_2, d_3 \neq 0$, e d não é múltiplo de 6. Então $\mu(f) = \zeta(K, d) = 1$ e a raiz está localizada em K_2 .

(b) Se d é ímpar, então $\mu(f) = 2$.

Neste caso ou $d \equiv 1 \pmod{3}$ ou $d \equiv 2 \pmod{3}$, e o resultado então é idêntico ao do caso (b) do item anterior.

5. Se 6 divide d , então $\mu(f) = 1$.

Neste caso d pode ser das formas $3d_1$ ou $2d_2$ ou $-6d_3$, entre outras envolvendo duas ou três parcelas, e é evidente que $\zeta(K, d) = 1$. Além disso, a raiz pode estar localizada em qualquer parte do complexo K . $\square$

Apresentamos agora um exemplo um pouco mais complicado. Consideramos o 2-complexo do exemplo anterior e deletamos as células e_3^2 e e_3^1 e identificamos as 1-células e_1^1 e e_2^1 para obter um novo complexo homotopicamente equivalente ao primeiro. Então, estudamos o número mínimo de raízes de aplicações deste novo 2-complexo na esfera S^2 .

Exemplo 5.19. Considere o plano projetivo construído à maneira usual colando-se à esfera S^1 uma 2-célula e_1^2 , ao longo do bordo, através de uma aplicação $S^1 \rightarrow S^1$ de grau 2. Ainda, considere o pseudo-plano projetivo $\mathbb{P}_3^2$ de grau 3, obtido pela colagem de uma 2-célula e_2^2 na esfera S^1 , ao longo do bordo, por uma aplicação $S^1 \rightarrow S^1$ de grau 3. Agora, seja K o 2-complexo obtido identificando-se a esfera S^1 correspondente ao 1-esqueleto de $\mathbb{RP}^2$ com aquela correspondente ao 1-esqueleto de $\mathbb{P}_3^2$. O complexo K e sua estrutura CW natural induzida pela construção através das colagens estão representados na Figura 5.6.

Figura 5.6: Um 2-complexo K homotopicamente equivalente a S^2

Note-se que este 2-complexo é aquele obtido do 2-complexo do Exemplo 5.18 deletando-se a 1-célula e_3^1 e a 2-célula e_3^2 e identificando-se as 1-células e_1^1 e e_2^1 .

É fácil checar que K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 e o elemento $\zeta_K = 3e_1^2 + 2e_2^2$ é um gerador do grupo de homologia $H_2(K) \approx \mathbb{Z}$.

Sabemos que uma aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes se e somente se $dH(f) = 0$. Vamos agora provar o seguinte:

Se $f : K \rightarrow S^2$ tem grau homológico não nulo, então $\mu(f) = 1$.

Note inicialmente que basta provar tal resultado para o caso em que $dH(f) = 1$. Com efeito: Suponha que $f : K \rightarrow S^2$ tenha grau homológico $dH(f) = 1$ e que já se tenha provado que $\mu(f) = 1$. Sejam, então, $\varphi : K \rightarrow S^2$ uma aplicação homotópica a f e $a \in S^2$ um ponto tais que $\#\varphi^{-1}(a) = 1$, digamos $\varphi^{-1}(a) = \{b\}$. Dado um inteiro $l \neq 0$, existe uma auto-aplicação $g_l : S^2 \rightarrow S^2$ de grau l tal que $g_l^{-1}(a) = \{a\}$. Seja $\varphi_l : K \rightarrow S^2$ a aplicação definida pela composição $\varphi_l = g_l \circ \varphi$. Então, certamente, $dH(\varphi_l) = \deg(g_l)dH(\varphi) = l dH(f) = l$ e, além disso, $\varphi_l^{-1}(a) = \{b\}$. Agora, se $f' : K \rightarrow S^2$ é uma aplicação qualquer de grau homológico l , então f' é homotópica a φ_l e, portanto, $\mu(f') = 1$.

Sabido isto, vamos provar que:

Existe uma aplicação $f : K \rightarrow S^2$ de grau homológico $dH(f) = 1$ e tal que $\mu(f) = 1$.

A prova desta afirmação é um tanto longa e, por isso e para facilitar o entendimento, será dividida em várias etapas. Antes de mais nada, seja $x_0 \in K^1$ o ponto do 1-esqueleto de K correspondendo a antípoda da 0-célula e^0 .

1ª Etapa: Vamos definir uma aplicação $\bar{f}_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ cuja única raiz é o ponto x_0 .

Note-se que x_0 é um ponto do plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ pertencente ao seu 1-esqueleto. Seja $x_1 \in \mathbb{RP}^2$ um ponto do interior da 2-célula e_1^2 “próximo” a x_0 . Então, existe um subconjunto aberto V de $\mathbb{RP}^2$, homeomorfo a 2-bola aberta, contendo x_0 e x_1 e tal que o fecho que $K^1 \cap V$ em $\mathbb{RP}^2$ é um arco fechado σ que não contém e^0 . Obviamente, x_1 é um ponto do interior de σ . A Figura 5.7 ilustra precisamente a construção de um homeomorfismo $h : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ homotópico a aplicação identidade e tal que $h|_{\mathbb{RP}^2 \setminus V} = \text{identidade}$ e $h(x_0) = x_1$, onde $V = V_1 \cup V_2$.

Figura 5.7: Um homeomorfismo específico do plano projetivo

Seja $\omega_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ a aplicação quociente canônica que colapsa todo o 1-esqueleto de $\mathbb{RP}^2$ sobre a 0-célula e_*^0 de S^2 e identifica o interior da 2-célula e_1^2 com o interior da 2-célula e_*^2 de S^2 . Denote por a a imagem de x_1 por ω_1 , ou seja $a = \omega_1(x_1)$. Então a é um ponto do interior da 2-célula e_*^2 de S^2 e temos $\omega_1^{-1}(a) = \{x_1\}$. Agora, defina a aplicação $\bar{f}_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ pela composição $\bar{f}_1 = \omega_1 \circ h$. Então $\bar{f}_1$ é uma aplicação contínua, mas não celular, homotópica a ω_1 e tal que $\bar{f}_1^{-1}(a) = \{x_0\}$.

Note-se que $\bar{f}_1$ aplica todo o subconjunto fechado $K^1 \setminus V$ de K^1 sobre e_*^0 e a imagem de σ por $\bar{f}_1$ descreve um caminho fechado simples $\bar{f}_1(\sigma)$ na esfera S^2 , com ponto base e_*^0 e passando pelo ponto a .

Figura 5.8: O caminho fechado simples $\bar{f}_1(\sigma)$ in S^2

2ª Etapa: Vamos definir uma aplicação $\bar{f}_2 : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow S^2$ cuja única raiz com respeito ao ponto a é o ponto x_0 .

Seja $\omega_2 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ a aplicação quociente canônica que colapsa todo o 1-esqueleto de $\mathbb{P}_3^2$ sobre a 0-célula e_*^0 da esfera S^2 e identifica o interior da 2-célula e_2^2 com o interior da 2-célula e_*^2 de S^2 .

Seja $x_2 = \omega_2^{-1}(a)$. (Lembre-se que $a = \omega_1(x_1) = \bar{f}_1(x_0)$). Então $x_2 \in \mathbb{P}_3^2$ é um ponto do interior da 2-célula e_2^2 “próximo” a x_0 . Certamente, existe um subconjunto aberto U de $\mathbb{P}_3^2$ contendo os pontos x_0 e x_2 e tal que o fecho da intersecção $U \cap K^1$ é exatamente o arco σ e, além disso, $U \setminus \sigma$ é uma união disjunta de três subconjuntos abertos de $\mathbb{P}_3^2$, todos eles homeomorfos a 2-bola aberta. A Figura abaixo ilustra o fecho de $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ em $\mathbb{P}_3^2$.

Figura 5.9: Fecho da vizinhança aberta U de x_0 e x_2 em $\mathbb{P}_3^2$

Agora, a Figura 5.10 ilustra precisamente a construção de uma aplicação $g : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow \mathbb{P}_3^2$, homotópica a aplicação identidade e tal que $g|_{\mathbb{P}_3^2 \setminus U}$ é a aplicação identidade e $g(x_0) = x_2$.

Figura 5.10: Uma auto-aplicação específica do pseudo plano projetivo $\mathbb{P}_3^2$

Certamente, existe uma aplicação celular $\omega'_2 : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow S^2$, homotópica a ω_2 , aplicando o interior da 2-célula e_2^2 de $\mathbb{P}_3^2$ homeomorficamente sobre a 2-célula e_*^2 de S^2 e tal que $(\omega'_2)^{-1}(a) = \{x_2\}$ e o caminho fechado correspondente a imagem $\omega'_2(g(\sigma))$ coincide com $\bar{f}_1(\sigma)$.

Seja $\bar{f}_2 : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow S^2$ a aplicação definida pela composição $\bar{f}_2 = \omega'_2 \circ g$. Então $\bar{f}_2$ é uma aplicação contínua, mas não é celular, homotópica a ω_2 e tal que $\bar{f}_2^{-1}(a) = x_0$.

Para finalizar esta etapa, note que, por construção, $\bar{f}_1|_{K^1} = \bar{f}_2|_{K^1}$.

Etapa 3: Vamos definir novas aplicações $f_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ e $f_2 : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow S^2$ usando $\bar{f}_1$ e $\bar{f}_2$.

Seja $\gamma \subset S^2$ o laço $\bar{f}_1(\sigma)$, o qual coincide com o laço $\bar{f}_2(\sigma)$, pela 2ª Etapa.

Seja $\varphi_1 : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular de grau 1 tal que $\varphi_1^{-1}(a) = \{a\}$ e $\varphi_1(\gamma)$ é o “arco geodésico” γ' conectando e_*^0 a a . Similarmente, seja $\varphi_2 : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular de grau -1 tal que $\varphi_2^{-1}(a) = \{a\}$ e $\varphi_2(\gamma)$ é o “arco geodésico” γ' . Veja a Figura 5.11.

Figura 5.11: Auto-aplicações específicas de S^2 de graus 1 e -1

Defina aplicações $f_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ e $f_2 : \mathbb{P}_3^2 \rightarrow S^2$ pelas composições $f_1 = \varphi_1 \circ \bar{f}_1$ e $f_2 = \varphi_2 \circ \bar{f}_2$. Por construção,

$$f_1^{-1}(a) = \{x_0\} = f_2^{-1}(a).$$

4ª Etapa: Definição de f .

Note-se que as aplicações f_1 e f_2 coincidem em K^1 , ou seja, $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in K^1$. Disto e do fato de K^1 ser fechado em $K = \mathbb{RP}^2 \cup_{K^1} \mathbb{P}_3^2$, pode-se utilizar as aplicações f_1 e f_2 para se definir uma aplicação (contínua) $f : K \rightarrow S^2$ tal que $f|_{\mathbb{RP}^2} = f_1$ e $f|_{\mathbb{P}_3^2} = f_2$. Tal aplicação f satisfaz $f^{-1}(a) = \{x_0\}$.

Vamos agora provar que o grau homológico de f é igual a 1, ou seja $dH(f) = 1$. Como f não é uma aplicação celular, não é fácil se concluir isto diretamente. No entanto, f possui uma aproximação celular bastante natural. Construamo-la: Lembre-se que ω_1 é uma aproximação celular de $\bar{f}_1$ e ω_2 é uma aproximação celular de $\bar{f}_2$. Defina $\varphi : K \rightarrow S^2$ do seguinte modo: Dado $x \in K$, escolha $i(x) \in \{1, 2\}$ tal que $x \in e_{i(x)}^2$. Então defina $\varphi(x) = \varphi_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x))$. Como cada ω_i e φ_i , $i = 1, 2$, é celular, a aplicação φ está bem definida e é também celular. Além disso, é fácil ver que φ é uma aproximação celular de f e as aplicações φ_1 e φ_2 constituem uma fatoração celular de φ . Segue-se que

$$dH(f) = dH(\varphi) = 3 \deg(\varphi_1) + 2 \deg(\varphi_2) = 3 - 2 = 1.$$

Pelas considerações iniciais, isto conclui com êxito tudo o que queríamos demonstrar. Além disso, ficou provado que dada uma aplicação $\psi : K \rightarrow S^2$ de grau homológico $d \neq 0$ existe uma aplicação homotópica a ψ , necessariamente não celular, possuindo uma única raiz, a qual necessariamente pertence a K^1 e pode ser escolhida para ser qualquer ponto deste subcomplexo. $\square$

5.6 Condição necessária e suficiente para se ter $\mu(f) = 0$

Apesar dos números $\zeta(f)$ e $\zeta(K, d)$ definidos nas seções precedentes constituírem limitantes superiores para $\mu(f)$ muitas vezes tão precisos a ponto de fornecerem a descrição precisa do número $\mu(f)$, como ocorre no Exemplo 5.18 que acabamos de apresentar, eles não são, em geral, suficientes para se determinar quando uma dada aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes, ou seja, $\mu(f) = 0$, ainda que f seja celular. Quando K é homotopicamente equivalente a esfera S^2 , vimos no Teorema 5.16 que $\mu(f) = 0 \Leftrightarrow \zeta(K, d) = 0$. No entanto, se K não é homotopicamente equivalente a S^2 , então o número $\zeta(K, d)$ não está definido. Além disso, o Exemplo 5.5 mostra que pode ocorrer $\mu(f) = 0$ ainda que ocorra $\zeta(f) \neq 0$.

Por tudo isto vê-se que, até então, não há bem determinada uma condição necessária e suficiente para que uma dada e arbitrária aplicação $f : K \rightarrow S^2$ seja livre de raízes. Esta seção se destina a descrição completa de uma tal condição.

Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Então $K^1 = \vee^n S^1 = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_n^1$ e o complexo $K_{\mathcal{P}}$ é obtido de K^1 através da colagem de m células de dimensão 2, digamos $e_1^2, \dots, e_m^2$, segundo os relatores $r_1, \dots, r_m$.

As palavras relatoras da apresentação $\mathcal{P}$ são da forma

$$\begin{aligned} r_1 &= (x_1^{\delta_{11}^{(1)}} \dots x_n^{\delta_{1n}^{(1)}}) \dots (x_1^{\delta_{11}^{(k_1)}} \dots x_n^{\delta_{1n}^{(k_1)}}); \\ &\vdots \\ r_m &= (x_1^{\delta_{m1}^{(1)}} \dots x_n^{\delta_{mn}^{(1)}}) \dots (x_1^{\delta_{m1}^{(k_m)}} \dots x_n^{\delta_{mn}^{(k_m)}}). \end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, defina o número inteiro $\delta_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k_i} \delta_{ij}^{(\lambda)}$. Noutras palavras, o inteiro δ_{ij} é definido como a soma de todas as potências da letra x_j na palavra r_i .

A matriz inteira $\Delta_{\mathcal{P}} = (\delta_{ij})_{m \times n}$ será chamada a *matriz diophantina induzida por $\mathcal{P}$* .

Na sequência, consideraremos sistemas lineares da forma $\Delta_{\mathcal{P}}Y = b$, onde b é um vetor coluna inteiro de m coordenadas, ou seja, $b \in \mathbb{Z}^m$. Em geral, um sistema linear da forma $\mathcal{A}Y = b$, em que $\mathcal{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ e $b \in \mathbb{Z}^m$, é chamado um *sistema linear diophantino*, já que certamente consiste de equações diophantinas.

Diremos que um sistema linear diophantino $\mathcal{A}Y = b$ é *compatível*, se ele possui solução inteira, ou seja, existe $s \in \mathbb{Z}^m$ tal que $\mathcal{A}s = b$.

Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ uma aplicação celular do 2-complexo $K_{\mathcal{P}}$ na esfera S^2 e seja $\overrightarrow{\deg}(f)$ o vetor-grau de f .

Abaixo enunciamos o resultado principal desta seção, o qual expressa uma condição necessária e suficiente para se ter $\mu(f) = 0$. Todo o restante desta seção será destinado a demonstração deste resultado e de algumas conseqüências do mesmo, incluindo alguns exemplos. Advertimos que a prova é bastante longa.

Teorema 5.20. *Uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ é compatível.*

Versões deste teorema para o caso em que f não é necessariamente celular e/ou o seu domínio não é necessariamente um complexo modelo serão apresentadas mais adiante na Subseção 5.6.4. Convidamos o leitor a acompanhar com paciência a demonstração do Teorema 5.20 que se estenderá por várias páginas daqui em diante. Por questões didáticas, separamos em uma pequena subseção os conceitos e resultados mais gerais que serão diretamente utilizados na prova do teorema. Estes conceitos envolvem aplicações quocientes e o que chamamos de homotopia constante por níveis.

5.6.1 Aplicação quociente e homotopia constante por níveis

Utilizamos nesta pequena subseção preliminar a prova do Teorema 5.20 a terminologia do livro [28], mas qualquer outro livro de Topologia Geral pode ser consultado como complemento a sua compreensão.

Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $\mathfrak{q} : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetora. A aplicação $\mathfrak{q}$ é dita uma *aplicação quociente* se se verifica: um subconjunto U de Y é aberto em Y se, e somente se, $\mathfrak{q}^{-1}(U)$ é aberto em X . Se este é caso, ou seja, se $\mathfrak{q}$ é uma aplicação quociente, então, para cada $y \in Y$, o subconjunto $\mathfrak{q}^{-1}(y)$ de X será chamado a *fibra de $\mathfrak{q}$ sobre y* .

Seja $\mathfrak{q} : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente e seja $f : X \rightarrow Z$ uma aplicação que é constante em cada fibra $\mathfrak{q}^{-1}(y)$. Então f induz uma aplicação $f' : Y \rightarrow Z$ tal que $f' \circ \mathfrak{q} = f$. A aplicação induzida f' é contínua se, e somente se, f é contínua.

Seja $\mathbf{q} : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente e seja $1_Z : Z \rightarrow Z$ a aplicação identidade do espaço Z . Se Z é localmente compacto, então a aplicação produto $\mathbf{q} \times 1_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ é uma aplicação quociente.

Sejam $H : X \times I \rightarrow Z$ uma homotopia e A um subconjunto de X . Diremos que a homotopia H é *constante por níveis* em A se, para cada $t \in I$, $H(x, t) = H(x', t)$ para quaisquer $x, x' \in A$, ou seja, para cada $t \in I$, a aplicação $H(\cdot, t) : X \times \{t\} \rightarrow Z$ é constante em A .

Lema 5.21. *Seja $\mathbf{q} : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente e sejam $f, g : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas. Defina aplicações $\bar{f}, \bar{g} : X \rightarrow Z$ pelas composições $\bar{f} = f \circ \mathbf{q}$ e $\bar{g} = g \circ \mathbf{q}$. Então f é homotópica a g se, e somente se, $\bar{f}$ é homotópica a $\bar{g}$ por meio de uma homotopia constante por níveis nas fibras de $\mathbf{q}$.*

Prova: Observe-se inicialmente que, como o intervalo fechado I é localmente compacto, a aplicação produto $\mathbf{q} \times 1_I : X \times I \rightarrow Y \times I$ é uma aplicação quociente.

Suponha que seja $H : Y \times I \rightarrow Z$ uma homotopia iniciando em f e terminando em g . Então defina $\bar{H} : X \times I \rightarrow Z$ por $\bar{H}(x, t) = H(\mathbf{q}(x), t)$. Esta é claramente uma homotopia iniciando em $\bar{f}$ e terminando em $\bar{g}$. Além disso, para cada $y \in Y$, tem-se $\bar{H}(x, t) = H(y, t)$ para todo x na fibra $\mathbf{q}^{-1}(y)$, ou seja, $\bar{H}$ é uma homotopia constante por níveis nas fibras de $\mathbf{q}$.

Por outro lado, suponha que seja $\bar{H} : X \times I \rightarrow Z$ uma homotopia iniciando em $\bar{f}$ e terminando em $\bar{g}$ e constante por níveis nas fibras de $\mathbf{q}$. Para cada $y \in Y$, escolha de uma vez por todas um elemento $x_y \in X$ tal que $\mathbf{q}(x_y) = y$, ou seja $x_y \in \mathbf{q}^{-1}(y)$. Defina a aplicação $H : Y \times I \rightarrow Z$ fazendo $H(y, t) = \bar{H}(x_y, t)$. Como $\bar{H}$ é constante nas fibras, a aplicação H está bem definida. Agora, as aplicações H e $\bar{H}$ verificam $\bar{H} = H \circ (\mathbf{q} \times 1_I)$. Logo, como $\mathbf{q} \times 1_I$ é uma aplicação quociente e $\bar{H}$ é contínua, segue-se que H é contínua. Além disso, H satisfaz: $H(y, 0) = \bar{H}(x_y, 0) = \bar{f}(x_y) = f(\mathbf{q}(x_y)) = f(y)$ e $H(y, 1) = \bar{H}(x_y, 1) = \bar{g}(x_y) = g(\mathbf{q}(x_y)) = g(y)$. Portanto, H é uma homotopia iniciando em f e terminando em g . ■

5.6.2 Prova do Teorema 5.20

Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Podemos escrever

$$K_{\mathcal{P}} = e^0 \cup e_{x_1}^1 \cup \dots \cup e_{x_n}^1 \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_m^2.$$

Considere m cópias $S_1^2, \dots, S_m^2$ da esfera S^2 , cada uma com decomposição CW minimal $S_i^2 = c_i^0 \cup c_i^2$. Seja $\vee_{i=1}^m S_i^2$ o bouquet destas m esferas obtido identificando-se as 0-células $c_1^0, \dots, c_m^0$ a um ponto c^0 . Então, o espaço $\vee_{i=1}^m S_i^2$ herda das esferas que o compõem uma estrutura CW (minimal) da forma

$$\bigvee_{i=1}^m S_i^2 = c^0 \cup c_1^2 \cup \dots \cup c_m^2.$$

Seja $\omega : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \vee_{i=1}^m S_i^2$ a aplicação celular canônica que identifica todo o 1-esqueleto $K_{\mathcal{P}}^1$ de $K_{\mathcal{P}}$ com a 0-célula c^0 de $\vee_{i=1}^m S_i^2$. Observe-se que, a menos da inclusão de S_i^2 em $\vee_{i=1}^m S_i^2$, a

aplicação restrita $\omega|_{\bar{e}_i^2}$ é idêntica a $\omega_i|_{\bar{e}_i^2} : K \rightarrow S_i^2$, onde esta última é definida como na Seção 5.1. Além disso, para cada $1 \leq i \leq m$, a aplicação ω aplica o interior da 2-célula e_i^2 de $K_{\mathcal{P}}$ homeomorficamente sobre o interior da 2-célula c_i^2 de $\vee_{i=1}^m S_i^2$.

Dada uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ e considerada a esfera S^2 , contra-domínio de f , com decomposição CW minimal $S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$, existe uma aplicação celular $f^\vee : \vee_{i=1}^m S_i^2 \rightarrow S^2$ tal que $f = f^\vee \circ \omega$. De fato, para cada $z \in \vee_{i=1}^m S_i^2$, $z \neq c^0$, existe um, e apenas um, índice $i(z) \in \{1, \dots, m\}$, tal que $z \in c_{i(z)}^2$. Sendo assim, a pré-imagem de z por ω consiste de um único ponto $y(z)$, o qual está contido no interior de $e_{i(z)}^2$. Defina $f^\vee : \vee_{i=1}^m S_i^2 \rightarrow S^2$ fazendo:

$$f^\vee(z) = \begin{cases} f(y(z)) & \text{se } y \neq c^0 \\ e_*^0 & \text{se } y = c^0 \end{cases}.$$

É fácil ver que $f^\vee$ está bem definida e é celular. Além disso, por construção, $f = f^\vee \circ \omega$.

Para cada $1 \leq i \leq m$, denote por $f_i^\vee$ a restrição de $f^\vee$ à esfera S_i^2 , ou seja,

$$f_i^\vee = f^\vee|_{S_i^2} : S_i^2 \rightarrow S^2.$$

Cada tal aplicação, por ser aplicação entre esferas, possui um grau bem determinado $\deg(f_i^\vee)$.

Sejam $f_1, \dots, f_m$ as aplicações que constituem a fatoração celular de f , conforma a Seção 5.1. (Cada $f_i : S_i^2 \rightarrow S^2$ é tal que $f|_{\bar{e}_i^2} = f_i \circ \omega_i|_{\bar{e}_i^2}$). Então, é fácil ver que, a menos da inclusão de S_i^2 em $\vee_{i=1}^m S_i^2$, a aplicação $f_i^\vee$ é idêntica a f_i . Logo, para cada $1 \leq i \leq m$, tem-se $\deg(f_i) = \deg(f_i^\vee)$. Portanto

$$\overrightarrow{\deg}(f) = (\deg(f_1^\vee), \dots, \deg(f_m^\vee))^T.$$

Para cada $1 \leq i \leq m$, considere a aplicação característica $\chi_i : D_i^2 \rightarrow K_{\mathcal{P}}$ da 2-célula e_i^2 . Defina a aplicação $\chi = \coprod_{i=1}^m \chi_i : \coprod_{i=1}^m D_i^2 \rightarrow K$, do coproduto (ou soma topológica) $\coprod_{i=1}^m D_i^2$, como sendo a aplicação χ_i na i -ésima componente de $\coprod_{i=1}^m D_i^2$.

Tal aplicação pode não ser sobrejetora. Não obstante, por conta da estrutura do complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$, a aplicação χ aplica $\coprod_{i=1}^m D_i^2$ sobrejetivamente em $K_{\mathcal{P}}\langle 2 \rangle$, onde $K_{\mathcal{P}}\langle 2 \rangle$ é o menor subcomplexo de $K_{\mathcal{P}}$ contendo todas as suas 2-células, ou seja, contendo $e_1^2, \dots, e_m^2$. (Confira a definição no parágrafo que antecede a Proposição 3.19). Então, pela Proposição 3.19, podemos supor que χ é sobrejetora e, portanto, uma aplicação quociente.

Observe-se que χ possui as seguintes propriedades:

(i) Para cada b no interior da 2-célula e_i^2 , a fibra $\chi^{-1}(b)$ é constituída de um ponto do interior do disco D_i^2 ;

(ii) Para cada b no interior de $e_{x_j}^1$, a fibra $\chi^{-1}(b)$ é um conjunto de $\sum_{i=1}^m \bar{\delta}_{ij}$ pontos contido no coproduto $\coprod_{i=1}^m \partial D_i^2$, de modo que há sempre $\bar{\delta}_{ij}$ pontos no bordo ∂D_i^2 , onde $\bar{\delta}_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k_i} |\delta_{ij}^{(\lambda)}|$.

(iii) A fibra $\chi^{-1}(e^0)$ de χ sobre a 0-célula e^0 de K é um subconjunto do coproduto $\coprod_{i=1}^m \partial D_i^2$ de cardinalidade finita igual a $\rho := \sum_{i,j} \bar{\delta}_{ij}$, de modo que há sempre $\rho_i := \sum_{j=1}^n \bar{\delta}_{ij}$ pontos em ∂D_i^2 , os quais dividem $S_i^1 := \partial D_i^2$ em ρ_i arcos de amplitude $2\pi/\rho_i$.

Seja $p \in S_i^1$ um ponto da fibra $\chi_i^{-1}(e^0)$. Seja τ o arco de comprimento $2\pi/\rho_i$ que inicia em p e segue no sentido anti-horário. Se este arco é aplicado por χ_i sobre $e_{x_j}^1$, então chame-o de $\gamma_{i1}^{x_j}$ e defina $a_{i1}^{x_j} = p$, e chame o seu outro extremo de $a_{i2}^{x_j}$. Repita este processo agora para $a_{i2}^{x_j}$ no lugar de p . Proceda iterativamente até percorrer toda a S^1 .

Ao final deste processo teremos

$$\chi_i^{-1}(e^0) = \{a_{i1}^{x_1}, \dots, a_{i\delta_{i1}}^{x_1}, \dots, a_{i1}^{x_n}, \dots, a_{i\delta_{in}}^{x_n}\},$$

(um conjunto com cardinalidade ρ_i), e cada ponto $p \in S_i^1$ que não pertence a $\chi_i^{-1}(e^0)$ está em um arco $\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}$ para algum $\epsilon_i = 1, \dots, \rho_i$.

Então, cada arco $\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}$ corresponde a uma parcela de uma potência $\delta_{ij}^{(\lambda(\epsilon_i))}$, $\lambda(\epsilon_i) \in \{1, \dots, r_i\}$, da letra x_j na palavra relatora r_i . Assim, é fácil ver que a indexação dos arcos $\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}$ pode ser escolhida de modo que, partindo-se do ponto $a_{i1}^{x_1} \in S_i^1$ e percorrendo S^1 em sentido anti-horário, percorremos, ordenadamente os arcos $\gamma_{i1}^{x_1}, \dots, \gamma_{i\rho_i}^{x_1}$ de acordo com a palavra relatora r_i . (A figura abaixo ilustra esta construção para o caso em que $n = 2$).

Figura 5.12: Indexando as fibras de χ sobre e^0

Agora, vamos associar a cada um dos arcos $\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}$ um *sinal* $\text{sgn}(\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j})$. Um arco $\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}$ é aplicado por χ_i homeomorficamente sobre $e_{x_j}^1$. Pois bem, então a imagem $\chi_i(\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j})$ corresponde a uma (e apenas uma) parcela da soma $\delta_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k_i} \delta_{ij}^{(\lambda)}$. Definimos $\text{sgn}(\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}) = +1$ se o sinal desta parcela é positivo, e definimos $\text{sgn}(\gamma_{i\epsilon_i}^{x_j}) = -1$ se o sinal desta parcela é negativo.

Defina $F : \coprod_{i=1}^m D_i^2 \rightarrow S^2$ pela composição $F = f \circ \chi$, e seja $F_i = F|_{D_i^2}$.

Abaixo, um diagrama comutativo que ilustra as construções até então realizadas.

Como o contra-domínio de $f : K\mathcal{P} \rightarrow S^2$ é a esfera, é óbvio que f é livre de raízes se, e somente se, é homotópica a aplicação constante. Logo, pelo Lema 5.21, a dada aplicação f

é livre de raízes se, e somente se, F é homotópica a aplicação constante, por meio de uma homotopia constante por níveis nas fibras de χ .

Suponha que seja $\bar{H} : (\coprod_{i=1}^m D_i^2) \times I \rightarrow S^2$ uma homotopia iniciando em F e terminando na aplicação $\kappa : \coprod_{i=1}^m D_i^2 \rightarrow S^2$, esta última definida como sendo a aplicação constante no ponto $-e_*^0$, antípoda da 0-célula e_*^0 de S^2 .

Como $(\coprod_{i=1}^m D_i^2) \times I$ é homeomorfo a $\coprod_{i=1}^m (D_i^2 \times I)$, a aplicação $\bar{H}$ pode ser considerada como um coproduto

$$\bar{H} = \coprod_{i=1}^m \bar{H}_i : \coprod_{i=1}^m (D_i^2 \times I) \rightarrow S^2,$$

onde cada $\bar{H}_i : D_i^2 \times I \rightarrow S^2$ é uma homotopia iniciando em F_i e terminando na aplicação constante em $-e_*^0$. Denotamos tal aplicação constante por $\kappa_i : D_i^2 \rightarrow S^2$, de modo que κ é idêntica a aplicação coproduto das aplicações κ_i 's, ou seja, $\kappa = \coprod_{i=1}^m \kappa_i$.

Vamos provar que: *A homotopia $\bar{H}$ pode ser escolhida sendo constante por níveis nas fibras de χ se, e somente se, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ é compatível.* Isto, pelo Lema 5.21, concluirá a prova do teorema.

Suponha que o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ seja compatível. Então é também compatível o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = -\overrightarrow{\deg}(f)$. Seja o vetor inteiro $s = (s_1, \dots, s_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ uma solução deste último sistema.

Vamos construir uma homotopia $\bar{H} : (\coprod_{i=1}^m D_i^2) \times I \rightarrow S^2$, constante por níveis nas fibras de χ , iniciando em F e terminando em κ . Começamos exigindo que, a menos das devidas identificações, $\bar{H}(\cdot, 0)$ seja F e $\bar{H}(\cdot, 1)$ seja κ . Agora vamos construir $\bar{H}$ no bordo $\coprod_{i=1}^m \partial(D_i^2 \times I)$ de $\coprod_{i=1}^m (D_i^2 \times I)$. A esta aplicação, ou seja, a $\bar{H}$ restrita a $\partial((\coprod_{i=1}^m D_i^2) \times I)$ vamos chamar simplesmente H . E mantendo nossas notações, escrevemos H_i para denotar a restrição de H a $\partial(D_i^2 \times I)$, de modo que H é então a aplicação coproduto $\coprod_{i=1}^m H_i$.

Primeiro observe-se que o fato de ser f uma aplicação celular implica que cada aplicação F_i é constante igual a e_*^0 no bordo $S_i^1 = \partial D_i^2$. Logo, cada aplicação $\bar{H}_i$ é constante igual a e_*^0 em $S_i^1 \times 0$.

Selecione um meridiano distinguido $\mathfrak{M}$ na esfera S^2 e defina H sobre cada segmento $p \times I$, $p \in \chi^{-1}(e^0)$, como sendo um homeomorfismo de $p \times I$ sobre $\mathfrak{M}$.

Para cada $1 \leq j \leq n$, sejam $\mathbf{q}_{\pm s_j} : S^2 \rightarrow S^2$ o revestimento ramificado canônico a $|s_j|$ folhas, com dois pontos de ramificação e_*^0 e $-e_*^0$, tais que $\deg(\mathbf{q}_{\pm s_j}) = \pm s_j$. Considere ainda que $\mathbf{q}_{\pm s_j}$ fixe pontualmente o meridiano distinguido $\mathfrak{M}$ (isto é claramente possível).

Seja $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}$ um arco (fechado) arbitrário delimitado pela partição $\chi^{-1}(e^0) \cap S_i^1 = \chi_i^{-1}(e^0)$, de modo que a imagem de $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}$ por χ é $e_{x_j}^1$ e ϵ_i é um índice no conjunto $\{1, \dots, \rho_i\}$.

Então o subconjunto $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I$ da esfera $\partial(D_i^2 \times I)$ é homeomorfo a $I \times I$. Além disso, o índice $\epsilon_i \in \{1, \dots, \rho_i\}$ corresponde a uma (e apenas uma) parcela de uma parcela da soma $\delta_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k_i} \delta_{ij}^{(\lambda)}$, e o sinal de tal parcela é igual ao sinal $\text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j})$, pela definição deste último.

Isto mostra que

$$\sum_{\epsilon_i=1}^{\rho_i} \text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) = \delta_{ij},$$

e portanto, como $(s_1, \dots, s_n)^T$ é solução do sistema $\Delta Y = -\overrightarrow{\deg}(f)$, segue-se que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\epsilon_i=1}^{\rho_i} \text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) s_j = \delta_{i1} s_1 + \dots + \delta_{in} s_n = -\deg(f_i).$$

Seja $\Gamma_{\epsilon_i}^{x_j} : \gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I \rightarrow S^2$ a aplicação quociente que identifica $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times 0$ ao ponto e_*^0 , identifica $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times 1$ ao ponto $-e_*^0$, e identifica as duas componentes (dois segmentos) de $\partial(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) \times I$ sobre o meridiano distinguido $\mathfrak{M}$.

Defina $H|_{\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I} : \gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I \rightarrow S^2$ como sendo a composição

$$H|_{\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I} = \mathfrak{q}_{\text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) s_j} \circ \Gamma_{\epsilon_i}^{x_j}.$$

Para cada $1 \leq i \leq m$, as aplicações F_i , κ_i e $H|_{\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I}$, para $1 \leq j \leq n$ e $\epsilon_i = 1, \dots, \rho_i$, dão juntas uma aplicação contínua $H_i : \partial(D_i^2 \times I) \rightarrow S^2$, que é a aplicação F_i em $D_i^2 \times 0$, é a aplicação constante κ_i em $D_i^2 \times 1$, e em cada $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I$ é tal que reveste com o disco $\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I$ a esfera S^2 exatamente $|s_j|$ vezes, no sentido igual ou oposto ao induzido pela orientação de S^2 , dependendo de ser o sinal $\text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j})$ positivo ou negativo, respectivamente.

(A figura abaixo ilustra a construção de H_i para o caso em que $F_i : D_i^2 \times 0 \rightarrow S^2$ é a aplicação que identifica todo o bordo $\partial(D_i^2 \times 0)$ à 0-célula e_*^0 de S^2 .)

Figura 5.13: Esquema da construção das homotopias H_i

Agora, da fórmula $\sum_{j=1}^n \sum_{\epsilon_i=1}^{\rho_i} \text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) s_j = -\deg(f_i)$, e do fato de ser $f_i^\vee$ aplicação de grau $\deg(f_i)$ e a aplicação constante κ_i de “grau zero”, segue-se que a aplicação $H_i : \partial(D_i^2 \times I) \rightarrow S^2$ é uma aplicação de grau $\deg(H_i) = 0$. Então, H_i estende a uma aplicação $\bar{H}_i : D_i^2 \times I \rightarrow S^2$ consistindo de uma homotopia iniciando em F_i e terminando em κ_i . Além disso, como cada $H|_{\gamma_{\epsilon_i}^{x_j} \times I}$ fica completamente definida pelo sinal $\text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j})$ e pela j -ésima coordenada s_j da solução $(s_1, \dots, s_n)^T$ do sistema $\Delta \mathcal{P} Y = -\overrightarrow{\deg}(f)$, fica claro da construção que $\bar{H}_i$ é constante por níveis nas fibras de χ_i . Além disso, é consequência destes mesmos

argumentos e do fato de serem unitárias as fibras dos pontos interiores às 2-células de $K_{\mathcal{P}}$ que a aplicação $\bar{H} = \coprod_{i=1}^m \bar{H}_i : \coprod (D_i^2 \times I) \rightarrow S^2$ é uma homotopia constante por níveis nas fibras de χ , iniciando em $F = \coprod_{i=1}^m F_i$ e terminando na aplicação constante $\kappa = \coprod_{i=1}^m \kappa_i$.

Agora, suponha que seja $\bar{H} : (\coprod_{i=1}^m D_i^2) \times I \rightarrow S^2$ uma homotopia constante por níveis nas fibras de χ , iniciando em F e terminando na aplicação constante $\kappa : \coprod_{i=1}^m D_i^2 \rightarrow S^2$.

É claro que, salvo as devidas identificações, tem-se $\bar{H}(\cdot, 0) = F$ e $\bar{H}(\cdot, 1) = \kappa$.

Agora, sendo cada $\bar{H}_i : D_i^2 \times I \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua, devemos ter $\deg(H_i) = 0$, onde $H_i = \bar{H}_i|_{\partial(D_i^2 \times I)}$, como já vínhamos denotando.

Além disso, cada aplicação $\bar{H}_i$ é uma homotopia constante por níveis nas fibras de χ_i , iniciando em F_i e terminando na aplicação constante κ_i . Sendo assim, e salvo as devidas identificações, tem-se $H_i(\cdot, 0) = F_i$ e $H_i(\cdot, 1) = \kappa_i$.

Mantendo-se as notações anteriores, de tudo isto se conclui que, para cada i fixado, $1 \leq i \leq m$, existe uma n -upla de números inteiros $(s_1^i, \dots, s_n^i)$, tal que

$$0 = \deg(H_i) = \deg(f_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{\epsilon_i}^{\rho_i} \text{sgn}(\gamma_{\epsilon_i}^{x_j}) s_i^j = \deg(f_i) + \delta_{i1} s_1^i + \dots + \delta_{in} s_n^i.$$

Portanto, $\delta_{i1} s_1^i + \dots + \delta_{in} s_n^i = -\deg(f_i)$, ou seja, a n -upla $(s_1^i, \dots, s_n^i)$ é uma solução inteira para a equação linear diophantina $\delta_{i1} y_1^i + \dots + \delta_{in} y_n^i = -\deg(f_i)$, que é exatamente a i -ésima equação do sistema $\Delta_P Y = -\overrightarrow{\deg}(f)$.

Agora, como $\bar{H} = \coprod_{i=1}^m \bar{H}_i$ é uma homotopia constante por níveis nas fibras de $\chi = \coprod_{i=1}^m \chi_i$, segue-se que existe uma n -upla de números inteiros $(s_1, \dots, s_n)$, tal que $\delta_{i1} s_1 + \dots + \delta_{in} s_n = -\deg(f_i)$ para todo $1 \leq i \leq m$. Logo, o vetor inteiro $s = (s_1, \dots, s_n)^T$ é uma solução inteira para o sistema linear diophantino $\Delta_P Y = -\overrightarrow{\deg}(f)$. Portanto, o sistema $\Delta_P Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ é compatível.

Isto conclui a prova do Teorema 5.20. ■

Este teorema que acabamos de demonstrar tem algumas conseqüências importantes. Dediquemos na seqüência uma subseção à apresentação e demonstração de algumas mais interessantes. Antes, porém, apresentamos alguns exemplos que, embora simples, ilustram bem o resultado do Teorema 5.20.

5.6.3 Alguns exemplos da aplicabilidade do Teorema 5.20

O primeiro exemplo que apresentamos mostra a relação entre o Teorema 5.20 e aqueles da Seção 5.4, quando todos se aplicam.

Exemplo 5.22. Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x | x^p, x^q \rangle$, onde p e q são inteiros arbitrários. Então $K_{\mathcal{P}}$ possui duas células 2-dimensionais, digamos e_1^2 e e_2^2 , e seu 1-esqueleto é a esfera S^1 como decomposição CW minimal. Consideremos que a

2-célula e_1^2 seja aquela colada segunda a palavra relatora x^p , e e_2^2 seja colada segunda a palavra relatora x^q . Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ uma aplicação celular arbitrária e sejam f_1, f_2 constituindo a fatoração celular de f . A matriz diophantina induzida por $\mathcal{P}$ é a matriz $\Delta_{\mathcal{P}} = [p \ q]^T$. Pelo Teorema 5.20, a aplicação f é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \deg(f_1) \\ \deg(f_2) \end{bmatrix}$$

é compatível, ou seja, possui uma solução inteira. Agora, se s é uma solução inteira deste sistema, então devemos ter $\deg(f_1)/p = s = \deg(f_2)/q$. Segue-se disto que

f é livre de raízes se, e somente se, $q \deg(f_1) = p \deg(f_2)$ é inteiro.

Agora, se assumimos que p e q são inteiros primos entre si, então não é difícil checar que $K_{\mathcal{P}}$ é homotopicamente equivalente a esfera S^2 e $\zeta_{K_{\mathcal{P}}} = qe_1^2 - pe_2^2$ representa um gerador do grupo de homologia $H_2(K_{\mathcal{P}}) \approx \mathbb{Z}$. Pela Seção 5.4, tem-se $dH(f) = q \deg(f_1) - p \deg(f_2)$. Pela Proposição 5.14, f é livre de raízes se, e somente se, $q \deg(f_1) - p \deg(f_2) = 0$.

Mas temos $q \deg(f_1) - p \deg(f_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{q \deg(f_1) - p \deg(f_2)}{pq} = 0 \Leftrightarrow \deg(f_1)/p = \deg(f_2)/q$. Além disso, se $q \deg(f_1) - p \deg(f_2) = 0$, então $\deg(f_1)$ é múltiplo de p e $\deg(f_2)$ é múltiplo de q , já que $\text{mdc}(p, q) = 1$. Portanto,

$dH(f) = 0$ e, e somente se $\deg(f_1)/p = \deg(f_2)/q$ é inteiro.

□

Observe-se que se $p = 2$ e $q = 3$, ou vice-versa, então o complexo $K_{\mathcal{P}}$ deste exemplo é aquele do Exemplo 5.19.

Exemplo 5.23. Seja $\mathbb{RP}^2$ o plano projetivo. Então $\mathbb{RP}^2 = K_{\mathcal{P}}$, onde $\mathcal{P} = \langle x | x^2 \rangle$. Seja $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação celular arbitrária e seja $f_1 : S_1^2 \rightarrow S^2$ fatoração celular de f , ou seja, f_1 é a aplicação celular tal que $f = f_1 \circ \omega_1$, onde $\omega_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow S_1^2$ é a aplicação que identifica todo o 1-esqueleto de K em um único ponto, a 0-célula de S_1^2 . Pelo Teorema 5.20, f é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \deg(f_1) \end{bmatrix}$$

é compatível. Mas isto claramente ocorre se, e somente se, $\deg(f_1)$ é um número par.

□

Este exemplo se generaliza para superfícies fechadas não orientáveis de qualquer gênero.

Exemplo 5.24. Seja N_g a superfície fechada não orientável de gênero $g > 1$. Então N_g é o 2-complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, \dots, x_g | x_1^2 x_2^2 \cdots x_g^2 \rangle.$$

Seja $f : N_g \rightarrow S^2$ uma aplicação celular arbitrária e seja $f_1 : S_1^2 \rightarrow S^2$ fatoração celular da aplicação f . Pelo Teorema 5.20, f é livre de raízes se, e somente se, o sistema linear diophantino

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \deg(f_1) \end{bmatrix}$$

é compatível. Mas isto claramente ocorre se, e somente se, $\deg(f_1)$ é um número par. $\square$

Para o caso de aplicações celulares de uma superfície fechada orientável na esfera, apresentamos o exemplo abaixo.

Exemplo 5.25. Seja M_g a superfície fechada orientável de gênero $g \geq 1$. Então M_g é o 2-complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, z_1, x_2, z_2, \dots, x_g, z_g \mid x_1 z_1 x_1^{-1} z_1^{-1} x_2 z_2 x_2^{-1} z_2^{-1} \cdots x_g z_g x_g^{-1} z_g^{-1} \rangle.$$

Seja $f : M_g \rightarrow S^2$ uma aplicação celular arbitrária e seja $f_1 : S_1^2 \rightarrow S^2$ fatoração celular da aplicação f . Note-se que a matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ induzida por $\mathcal{P}$ é a matriz nula. Portanto, pelo Teorema 5.20, f é livre de raízes se, e somente se, $\deg(f_1) = 0$. Em outras palavras, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\mu(f_1) = 0$. $\square$

5.6.4 Algumas conseqüências do Teorema 5.20

Vamos iniciar esta subseção estudando o resultado do Teorema 5.20 para o caso de aplicações $f : K \rightarrow S^2$, onde K não é necessariamente um complexo modelo. Ora, se este é o caso, então sabemos que existe um complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ tal que os pares esqueleto (K, K^1) e $(K_{\mathcal{P}}, K_{\mathcal{P}}^1)$ são homotopicamente equivalentes. Também sabemos que se $\psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow K$ é uma equivalência de homotopia, então $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, $f \circ \psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ é livre de raízes. Portanto, temos o seguinte:

Corolário 5.26. *Seja K um 2-complexo finito. Uma aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, para algum 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ e uma equivalência de homotopia $\psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow K$, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}} Y = \overrightarrow{\deg}(f \circ \psi)$ é compatível.*

Disto se segue que se $K_{\mathcal{P}}$ e $K_{\mathcal{Q}}$ são dois complexos modelo homotopicamente equivalentes, por meio de uma equivalência de homotopia $\psi : K_{\mathcal{Q}} \rightarrow K_{\mathcal{P}}$, e se $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ é uma aplicação celular, então o sistema $\Delta_{\mathcal{P}} Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ é compatível se, e somente se, o sistema $\Delta_{\mathcal{Q}} Y = \overrightarrow{\deg}(f \circ \psi)$ é compatível.

Logo, uma aplicação celular $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, para toda equivalência de homotopia $\psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow K$, com $K_{\mathcal{P}}$ um 2-complexo modelo, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}} Y = \overrightarrow{\deg}(f \circ \psi)$ é compatível.

Agora, se uma dada aplicação $f : K \rightarrow S^2$ não é necessariamente celular, o Teorema 5.20 se aplica para qualquer aproximação celular $f_{cel} : K \rightarrow S^2$. Deste modo, fica provado que:

Corolário 5.27. *Uma aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes se, e somente se, para alguma (logo para toda) aproximação celular $f_{cel} : K \rightarrow S^2$ de f , e alguma (logo toda) equivalência de homotopia $\psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow K$, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f_{cel} \circ \psi)$ é compatível.*

5.7 Nulidade do segundo grupo de cohomotopia

Nesta pequena seção, vamos apresentar alguns resultados envolvendo a nulidade do segundo grupo de cohomotopia dos 2-complexos, todos eles obtidos como imediata consequência do Teorema 5.20. Detalhes sobre a teoria de cohomotopia podem ser encontrados em [25].

Iniciamos lembrando que, dado um 2-complexo K , por definição, $\pi^2(K) = 0$ se, e somente se, toda aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é homotópica a uma aplicação constante. Posto no contexto da teoria de raízes, isto implica que $\pi^2(K) = 0$ se, e somente se, toda aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes.

A seguir, apresentamos alguns corolários do Teorema 5.20 que se referem a possível nulidade do segundo grupo de cohomotopia de 2-complexos. Observe-se que, em concordância com o que temos dito, $\pi^2(K_{\mathcal{P}}) \neq 0$ se, e somente se, existe uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow S^2$ que não é livre de raízes e, portanto, tal que o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \overrightarrow{\deg}(f)$ não é compatível. Em face disto, é importante notar-se o seguinte:

Lema 5.28. *Sejam K um 2-complexo com $\#^2(K) = m$ e $\vec{d} = (d_1, \dots, d_m)^T$ um vetor-coluna inteiro. Então existe uma aplicação celular $f^{\vec{d}} : K \rightarrow S^2$ tal que $\overrightarrow{\deg}(f^{\vec{d}}) = \vec{d}$.*

Prova: Sejam $e_1^2, \dots, e_m^2$ as células 2-dimensionais de K e considere, para $1 \leq i \leq m$, as aplicações $\omega_i : K \rightarrow S_i^2 = c_i^0 \cup c_i^2$ definidas conforme na Seção 5.1. Para cada $1 \leq i \leq m$, seja $f_i : S_i^2 \rightarrow S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$ aplicação celular de grau d_i . Para cada $x \in K$, escolha de uma vez por todas um índice $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in e_{i(x)}^2$. Defina $f^{\vec{d}} : K \rightarrow S^2$ por $f^{\vec{d}}(x) = f_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x))$. Esta aplicação está claramente bem definida e é celular. Além disso, por construção, $\overrightarrow{\deg}(f^{\vec{d}}) = \vec{d}$. ■

Proposição 5.29. *Se K é um 2-complexo finito com $\#^2(K) > \beta_1(K^1)$, então $\pi^2(K) \neq 0$.*

Prova: Podemos supor que $K = K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo. Então a apresentação $\mathcal{P}$ possui $\beta_1(K^1)$ geradores e $\#^2(K)$ relatores. Deste modo, a matriz $\Delta_{\mathcal{P}}$ possui $\#^2(K)$ linhas e $\beta_1(K^1)$ colunas. Como $\#^2(K) > \beta_1(K^1)$, certamente existe um vetor-coluna inteiro $\vec{d} = (d_1, \dots, d_{\beta_1(K^1)})^T$ tal que o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \vec{d}$ não é compatível. Agora, pelo lema anterior, existe uma aplicação celular $f^{\vec{d}} : K \rightarrow S^2$ de tal modo que $\overrightarrow{\deg}(f^{\vec{d}}) = \vec{d}$. Tal aplicação não é livre de raízes, pelo Teorema 5.20. Portanto $\pi^2(K) \neq 0$. ■

O símbolo β_1 no enunciado da proposição anterior denota o primeiro número de Betti.

Diremos que um 2-complexo (conexo e finito) K é *quadrado* se $\#^2(K) = \beta_1(K^1)$. Para o caso em que $K = K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo, $K_{\mathcal{P}}$ é quadrado se, e somente se, a matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ é quadrada, ou seja, a apresentação $\mathcal{P}$ possui o mesmo número de geradores e relatores.

Abaixo, um importante teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 5.30. *Seja $\mathcal{A}$ uma matriz $m \times n$, com $m \leq n$, com entradas no anel comutativo com identidade R . O sistema linear $\mathcal{A}Y = b$ possui solução sobre R para todo vetor $b \in R^m$ se, e somente se, o ideal $\mathfrak{D}_m(\mathcal{A})$ gerado por todos os menores $m \times m$ de A é o anel R .*

Teorema 5.31. *Se K é um 2-complexo homotopicamente equivalente a um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$, então $\pi^2(K) = 0$ se, e somente se, todo sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = b$ é compatível.*

Corolário 5.32. *Sejam $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ uma apresentação e $K_{\mathcal{P}}$ o seu 2-complexo modelo. Então $\pi^2(K_{\mathcal{P}}) = 0$ se, e somente se, $m \leq n$ e o ideal $\mathfrak{D}_m(\Delta_{\mathcal{P}}) = \mathbb{Z}$.*

Corolário 5.33. *Se $K_{\mathcal{P}}$ é quadrado, então $\pi^2(K_{\mathcal{P}}) = 0$ se, e somente se, $\det(\Delta_{\mathcal{P}}) = \pm 1$.*

Prova: Do Teorema 5.20 e do Lema 5.28, segue-se que $\pi^2(K_{\mathcal{P}}) = 0$ se, e somente se, todo sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = b$ é compatível. Mas pelo teorema precedente, isto ocorre se, e somente se, $\det(\Delta_{\mathcal{P}}) = \pm 1$. ■

Corolário 5.34. *Seja K um 2-complexo quadrado. Então $\pi^2(K) = 0$ se, e somente se, $\det(\Delta_{\mathcal{P}}) = \pm 1$ para algum (logo para todo) 2-complexo modelo quadrado $K_{\mathcal{P}}$ homotopicamente equivalente a K .*

Prova: Conseqüência imediata de resultados anteriores. ■

5.8 Nulidade do segundo grupo de cohomologia integral

Pelo Teorema de Hopf (Teorema 11.5 de [25]), segue-se que:

Para todo 2-complexo conexo e finito K , tem-se $\pi^2(K) \approx H^2(K; \mathbb{Z})$.

Isto mostra que se K é um 2-complexo conexo e finito com $H^2(K; \mathbb{Z}) = 0$, então toda aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é livre de raízes. Mostra também que todos os resultados da seção anterior são verdadeiros para $H^2(, \mathbb{Z})$ no lugar de $\pi^2(,)$. Do mesmo modo, o teorema abaixo é verdadeiro para $\pi^2(,)$ no lugar de $H^2(, \mathbb{Z})$.

Teorema 5.35. *Se $K_{\mathcal{P}}$ é um 2-complexo modelo obtido de uma superfície fechada M pela colagem de células 2-dimensionais, então $H^2(K_{\mathcal{P}}; \mathbb{Z}) \neq 0$.*

Prova: Seja $K_{\mathcal{P}}$ induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Se $K_{\mathcal{P}}$ pode ser obtido de M pela colagem de células de dimensão dois, então um dos relatores da apresentação $\mathcal{P}$ é a palavra relatora representando M . Sem perda de generalidade, suponha que tal relator seja r_1 . Então, temos duas possibilidades:

(i) Se M é orientável, então a soma das potências de cada letra da palavra r_1 é igual a zero. Assim, a primeira linha da matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ é o vetor nulo. Seja $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ um vetor-coluna inteiro com $b_1 \neq 0$. Então, é fácil ver que o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \vec{b}$ é incompatível. Pelo Teorema 5.31, $H^2(K_{\mathcal{P}}; \mathbb{Z}) \neq 0$.

(ii) Se M é não orientável, então a soma das potências de cada letra da palavra r_1 é igual 2. Assim, cada entrada da primeira linha da matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ é também igual 2. Seja $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ um vetor coluna inteiro com b_1 ímpar. Então, é fácil ver que o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}}Y = \vec{b}$ é incompatível. Pelo Teorema 5.31, $H^2(K_{\mathcal{P}}; \mathbb{Z}) \neq 0$.

Isto prova o anunciado. ■

A recíproca deste teorema não é verdadeira, em geral. Para ilustrar isso, apresentamos o seguinte exemplo: Seja $\mathbb{P}_d^2$ o pseudo plano projetivo de grau $d \geq 3$, ou seja, $\mathbb{P}_d^2$ é o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x \mid x^d \rangle$. É fácil verificar que $H^2(\mathbb{P}_d^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_d$. Ademais, é claro que $\mathbb{P}_d^2$ não contém qualquer superfície com um subcomplexo.

Classes de Nielsen mínimas e raízes de aplicações levantadas

Dada uma aplicação contínua $f : K \rightarrow M$ de um complexo CW 2-dimensional em uma superfície fechada, existem dois números naturalmente associados a ela, a saber, o número de Nielsen para raízes $N(f)$ e o número mínimo de raízes $\mu(f)$. É bem sabido que $N(f) \leq \mu(f)$. Ademais, existe um número $\mu_C(f)$, associado a f , correspondendo à chamada cardinalidade mínima das classes de Nielsen de f . Um importante problema, que estudamos neste capítulo, consiste em se saber quando se tem a identidade $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$. Apresentamos vários exemplos em que não se verifica esta identidade. Outro problema importante, que nós resolvemos, consiste em se determinar uma completa relação entre o número mínimo de raízes de uma aplicação e o número mínimo de raízes de seus possíveis levantamentos ao longo de recobrimentos. Encontramos uma conexão entre estes dois problemas, através da qual pudemos responder várias questões relacionadas aos mesmos, principalmente no contexto em que a superfície do contra domínio das aplicações consideradas é o espaço projetivo.

6.1 Minimizando classes de Nielsen para raízes

Seja $\mathfrak{H}_f$ o conjunto de todas as homotopias $H : f \simeq H(\cdot, 1) : X \rightarrow Y$ iniciando em uma dada aplicação $f : X \rightarrow Y$, com X e Y Hausdorff, conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos. Para cada classe de raízes $\mathfrak{R} \in \Gamma(f, a)$ da equação

$f(x) = a$, defina a *cardinalidade mínima de $\mathfrak{R}$* como sendo o número

$$\mu_C(\mathfrak{R}) = \min_{H \in \mathfrak{H}_f} \{ \# \mathfrak{R}' \text{ tal que } \mathfrak{R}' \in \Gamma(H(\cdot, 1), a) \text{ e } \mathfrak{R} H \mathfrak{R}' \}.$$

É claro que se $\mathfrak{R}$ é uma classe inessencial, então $\mu_C(\mathfrak{R}) = 0$. Muitos autores têm estudado o seguinte problema: Quais propriedades devem ter os espaços X e Y para que exista $H \in \mathfrak{H}_f$ tal que a equação $H(\cdot, 1)(x) = a$ tenha todas as suas classes mínimas, isto é, toda classe $\mathfrak{R}$ da equação $H(\cdot, 1)(x) = a$ satisfaça $\# \mathfrak{R} = \mu_C(\mathfrak{R})$?

Para o caso menos geral, mas não menos interessante, em que substituímos o espaço arbitrário Y por uma variedade M , temos o seguinte resultado, devido a D. L. Gonçalves e C. Aniz, correspondendo à Proposição 2.3 de [19].

Lema 6.1. *Seja $f : X \rightarrow M$ uma aplicação do espaço conexo e localmente conexo por caminhos X na variedade M e sejam $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ duas classes de raízes arbitrárias da equação $f(x) = a$. Então $\mu_C(\mathfrak{R}_1) = \mu_C(\mathfrak{R}_2)$.*

Este lema mostra que, para o caso de aplicações $f : X \rightarrow M$ cujo contra-domínio é uma variedade, temos bem definida a *cardinalidade mínima das classes de raízes de f*

$$\mu_C(f) := \mu_C(\mathfrak{R}) \text{ para alguma classe de raízes } \mathfrak{R}.$$

Neste contexto, o problema levantado acima se resume no seguinte: *Dada uma aplicação $f : X \rightarrow M$ de um espaço conexo e localmente conexo por caminhos em uma variedade, sob quais condições se verifica a igualdade $\mu(f) = N(f)\mu_C(f)$?*

C. Aniz em sua tese de doutorado [2] provou o seguinte:

Teorema 6.2. *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação de um complexo CW n -dimensional em uma n -variedade fechada, com $n \geq 3$. Se existe uma aplicação $f' : K \rightarrow M$ homotópica a f tal que uma de suas classes de raízes $\mathfrak{R}'$ tem $\mu_C(f)$ raízes e os pontos de $\mathfrak{R}'$ estão todos contidos no interior de n -células de K , então $\mu(f) = N(f)\mu_C(f)$.*

Neste teorema, a hipótese sobre a dimensão do complexo e da variedade é essencial; de fato, H. Hopf [24] (ver também o §4 de [33]) construiu uma aplicação $f : \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, do bitoro no toro, com $\mu(f) = 4$ e $N(f)\mu_C(f) = 3$.

Em [19], Teorema 4.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.3. *Para cada $n \geq 3$, existe um n -complexo K_n e uma aplicação $f_n : K_n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ com $N(f_n) = 2$, $\mu_C(f_n) = 1$ e $\mu(f_n) \geq 3$.*

Este teorema comprova a existência de aplicações $f : K^n \rightarrow M^n$ de n -complexos em n -variedades fechadas ($n \geq 3$) com $\mu(f) \neq N(f)\mu_C(f)$. Na seqüência, mostraremos que

exemplos de tais aplicações podem ser construídos também em dimensão 2. Mais precisamente, construiremos três exemplos neste contexto para os casos em que os contra-domínios das funções construídas são as superfícies fechadas $\mathbb{RP}^2$ (o plano projetivo), $\mathbb{T}^2$ (o toro) e $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ (a garrafa de Klein). Para o caso em que o contra-domínio é a esfera S^2 , é óbvio que toda aplicação $f : K \rightarrow S^2$ satisfaz $\mu(f) = N(f)\mu_C(f)$, haja visto que o fato de S^2 ser simplesmente conexa implica que a equação $f(x) = a$ se possui raízes, possui uma única classe de raízes. Passemos a construção dos exemplos.

Exemplo 6.4. *Seja $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ o recobrimento duplo canônico. Vamos construir um 2-complexo K e uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tendo um levantamento $\tilde{f} : K \rightarrow S^2$ e satisfazendo:*

$$(i) \ N(f) = 2, \quad (ii) \ \mu_C(f) = 1, \quad (iii) \ \mu(f) = 3, \quad (iv) \ \mu(\tilde{f}) = 1.$$

Iniciamos construindo o 2-complexo K . Sejam S_1 , S_2 e S_3 três cópias da 2-esfera consideradas como o bordo do 3-simplexo padrão Δ^3 ,

$$S_1 = \partial\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle, \quad S_2 = \partial\langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle, \quad S_3 = \partial\langle z_0, z_1, z_2, z_3 \rangle.$$

Seja K o 2-complexo (simplicial) obtido da união disjunta $S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$ identificando-se $[x_0, x_1] = [y_0, y_1]$ e $[y_0, y_2] = [z_0, z_1]$. Assim, cada S_i , $i = 1, 2, 3$, está mergulhada em K de modo que

$$S_1 \cap S_2 = [x_0, x_1] = [y_0, y_1] \quad \text{e} \quad S_2 \cap S_3 = [y_0, y_2] = [z_0, z_1].$$

Então, $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ é um único ponto $x_0 = y_0 = z_0$. O 2-complexo K está ilustrado na Figura 6.1.

Figura 6.1: Um 2-complexo simplicial

Dois complexos simpliciais A e B são isomorfos se, e somente se, existe uma bijeção ϕ entre o conjunto de vértices de A e de B tal que $\{v_1, \dots, v_s\}$ é um simplexo de A se, e somente se, $\{\phi(v_1), \dots, \phi(v_s)\}$ é um simplexo de B (veja [3], página 128). Usando este fato, podemos construir homeomorfismos $h_{21} : S_2 \rightarrow S_1$ e $h_{32} : S_3 \rightarrow S_2$ tais que $h_{21}|_{S_1 \cap S_2} = \text{identidade}$ e $h_{32}|_{S_2 \cap S_3} = \text{identidade}$.

Seja $\tilde{f}_1 : S_1 \rightarrow S^2$ qualquer homeomorfismo de S_1 sobre S^2 . Defina $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ h_{21} : S_2 \rightarrow S^2$ e note que $\tilde{f}_2(x) = \tilde{f}_1(x)$ para $x \in S_1 \cap S_2$. Agora, defina $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_2 \circ h_{32} : S_3 \rightarrow S^2$ e note que $\tilde{f}_3(x) = \tilde{f}_2(x)$ para $x \in S_2 \cap S_3$. Em particular, $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0) = \tilde{f}_3(x_0)$. Assim, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$

e $\tilde{f}_3$ podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma aplicação $\tilde{f} : K \rightarrow S^2$ tal que $\tilde{f}|_{S_i} = \tilde{f}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a composição $f = p_2 \circ \tilde{f}$, onde $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é o recobrimento duplo canônico. Note que $f_{\#}\pi_1(K) = (p_2)_{\#}\pi_1(S^2)$. Assim, podemos utilizar o Teorema 1.7 para estudar as classes de Nielsen para raízes de f através do seu levantamento $\tilde{f}$.

Seja $a = f(x_0) \in \mathbb{RP}^2$ e seja $p_2^{-1}(a) = \{\tilde{a}, -\tilde{a}\}$ a fibra de p_2 sobre a .

Certamente, o homomorfismo $\tilde{f}_* : H_2(K) \rightarrow H_2(S^2)$ é sobrejetor, com $H_2(K) \approx \mathbb{Z}^3$ e $H_2(S^2) \approx \mathbb{Z}$. Logo, toda aplicação de K em S^2 homotópica a $\tilde{f}$ é sobrejetora. Segue-se que, para toda aplicação $\tilde{g} : K \rightarrow S^2$ homotópica a $\tilde{f}$, tem-se $\tilde{g}^{-1}(\tilde{a}) \neq \emptyset$ e $\tilde{g}^{-1}(-\tilde{a}) \neq \emptyset$. Pelo Teorema 1.7, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$ e $\tilde{f}^{-1}(-\tilde{a})$ são as classes de Nielsen para raízes de f e ambas são essenciais. Portanto, $N(f) = 2$.

Agora, como $a = f(x_0)$, ou $x_0 \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$ ou $x_0 \in \tilde{f}^{-1}(-\tilde{a})$. Sem perda de generalidade, suponha que $x_0 \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$. Então, pela definição de $\tilde{f}$, tem-se $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a}) = \{x_0\}$. Logo, uma das classes de Nielsen é unitária. Como, além disso, tal classe é essencial, segue-se que sua cardinalidade mínima é igual a um. Isto prova que $\mu_C(f) = 1$.

Para provar que $\mu(f) \geq 3$, note que, como cada restrição $\tilde{f}|_{S_i}$ é um homeomorfismo e $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é um recobrimento duplo, para cada aplicação g homotópica a f , a equação $g(x) = a$ deve possuir ao menos duas raízes em cada S_i , $i = 1, 2, 3$. Pela decomposição de K , isto implica que $\mu(f) \geq 3$. Agora, para provar que $\mu(f) = 3$, basta exibir uma aplicação φ homotópica a f que possua três raízes. Para a construção de uma tal aplicação, vamos utilizar um lema que será demonstrado mais adiante. Pois bem, sejam $a_0 = \tilde{f}(x_0)$ e $a_1 = \tilde{f}(x_1)$. Então a_0 e a_1 são pontos distintos da esfera S^2 e, pelo Lema 6.10 (enunciado e demonstrado mais adiante), existe um recobrimento duplo $q_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, isomorfo e homotópico a p_2 tal que $q_2^{-1}(a) = \{a_0, a_1\}$, onde, como antes, $a = f(x_0)$. Defina $\varphi : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ pela composição $\varphi = q_2 \circ \tilde{f}$. Então φ é homotópica a f e temos $\varphi^{-1}(a) = \tilde{f}^{-1}(\{a_0, a_1\}) = \{x_0, x_1, b\}$, onde $b \in S_3$ é o ponto $h_{32}^{-1}(x_1)$. Isto prova que $\mu(f) = 3$.

Ademais, é fácil ver que $\mu(\tilde{f}) = 1$, com o par $(\tilde{f}, \tilde{f}(a_0))$ realizando $\mu(\tilde{f})$. $\square$

Agora, apresentamos um exemplo similar onde o contra-domínio da aplicação f construída é o toro $\mathbb{T}^2$. Neste exemplo, o complexo K , domínio da aplicação f , é um pouco mais complicado.

Exemplo 6.5. *Seja $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um recobrimento duplo. Vamos construir um 2-complexo K e uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ tendo um levantamento $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ ao longo de p_2 e satisfazendo:*

- (i) $N(f) = 2$, (ii) $\mu_C(f) = 1$, (iii) $\mu(f) = 3$, (iv) $\mu(\tilde{f}) = 1$.

Iniciamos construindo o 2-complexo K . Considere três cópias $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ e $\mathbb{T}_3$ do toro com decomposição celular minimal. Seja α_i (respectivamente β_i) a 1-célula fechada longitudinal

(respectivamente meridional) do toro $\mathbb{T}_i$, $i = 1, 2, 3$. Seja K o 2-complexo obtido da união disjunta $\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \sqcup \mathbb{T}_3$ identificando-se

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \beta_2.$$

Isto é, K é obtido colando-se os toros $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_2$ através das 1-células fechadas longitudinais e, em seguida, colando-se a 1-célula fechada longitudinal do toro $\mathbb{T}_3$ na 1-célula fechada meridional do toro $\mathbb{T}_2$.

Cada toro $\mathbb{T}_i$ está mergulhado em K de modo que

$$\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \alpha_1 = \alpha_2, \quad \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3 = \alpha_3 = \beta_2 \quad \text{e} \quad \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_3 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3 = \{e^0\},$$

onde e^0 é a (única) 0-célula de K , correspondendo as 0-células de $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$ e $\mathbb{T}_3$ através das identificações. O 2-complexo K está ilustrado na Figura 6.2.

Figura 6.2: Um 2-complexo obtido colando-se três toros

Daqui em diante, escrevemos $\mathbb{T}_i$ para denotar a imagem do toro original $\mathbb{T}_i$ em K .

Certamente, existem homeomorfismos $h_{21} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_1$ e $h_{32} : \mathbb{T}_3 \rightarrow \mathbb{T}_2$ com $h_{21}|_{\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2} = \text{identidade}$, $h_{32}|_{\mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3} = \text{identidade}$ e tais que h_{21} aplica β_2 sobre β_1 e h_{32} aplica β_3 sobre α_2 . Assim, dado um ponto $x_3 \in \beta_3$, tem-se $h_{32}(x_3) \in \alpha_1 = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$. Utilizaremos este fato mais adiante.

Seja $\tilde{f}_1 : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo aplicando longitude em longitude e meridiano em meridiano. Defina $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ h_{21} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ e note que $\tilde{f}_2(x) = \tilde{f}_1(x)$ para $x \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$. Agora, defina $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_2 \circ h_{32} : \mathbb{T}_3 \rightarrow \mathbb{T}^2$ e note que $\tilde{f}_3(x) = \tilde{f}_2(x)$ para $x \in \mathbb{T}_2 \cap \mathbb{T}_3$. Em particular, $\tilde{f}_1(e^0) = \tilde{f}_2(e^0) = \tilde{f}_3(e^0)$. Assim, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_3$ podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma aplicação $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $\tilde{f}|_{\mathbb{T}_i} = \tilde{f}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Seja $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um recobrimento duplo arbitrário. (Podemos considerar, por exemplo, o recobrimento duplo longitudinal que associa a cada ponto $z \in \mathbb{T}^2$, considerado como um par $(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$, o ponto $p_2(z) = (z_1^2, z_2)$).

Defina a aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ pela composição $f = p_2 \circ \tilde{f}$.

Para que se possa utilizar o Teorema 1.7 para estudar as classes de Nielsen para raízes de f através das informações sobre $\tilde{f}$, precisamos provar que $f_{\#}\pi_1(K) = (p_2)_{\#}\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Agora, como $f_{\#} = (p_2)_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$, é suficiente provar que $\tilde{f}_{\#}$ é um epimorfismo. É isto o que faremos.

Considere a composição $\tilde{f} \circ l : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}^2$, onde $l : \mathbb{T}_1 \hookrightarrow K$ é a inclusão óbvia. Esta composição é exatamente o homeomorfismo $\tilde{f}_1$ e, portanto, o homomorfismo induzido $\tilde{f}_\# \circ l_\# = (\tilde{f}_1)_\#$ é um isomorfismo. Segue-se que $\tilde{f}_\#$ é um epimorfismo.

Seja $a = f(e^0) \in \mathbb{T}^2$ e seja $p_2^{-1}(a) = \{\tilde{a}, \tilde{a}'\}$ a fibra de p_2 sobre a . (Se p_2 é o recobrimento duplo longitudinal, como acima, então se $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, tem-se $\tilde{a}' = (-\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$).

Claramente, o homomorfismo $\tilde{f}_* : H_2(K) \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2)$ é sobrejetor, com $H_2(K) \approx \mathbb{Z}^3$ e $H_2(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}$. Logo, toda aplicação de K em $\mathbb{T}^2$ homotópica a $\tilde{f}$ é sobrejetora. Segue-se que, para toda aplicação $\tilde{g} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópica a $\tilde{f}$, tem-se $\tilde{g}^{-1}(\tilde{a}) \neq \emptyset$ e $\tilde{g}^{-1}(\tilde{a}') \neq \emptyset$. Pelo Teorema 1.7, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$ e $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a}')$ são as classes de Nielsen para raízes de f e ambas são essenciais. Portanto, $N(f) = 2$.

Agora, como $a = f(e^0)$, ou $e^0 \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$ ou $e^0 \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{a}')$. Sem perda de generalidade, suponha que $e^0 \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{a})$. Então, pela definição de $\tilde{f}$, tem-se $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a}) = \{e^0\}$. Assim, uma das classes de raízes é unitária. Como, além disso, tal classe é essencial, segue-se que sua cardinalidade mínima é igual a um. Portanto, $\mu_C(f) = 1$.

Para provar que $\mu(f) = 3$, note que, como cada restrição $\tilde{f}|_{\mathbb{T}_i}$ é um homeomorfismo e $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um recobrimento duplo, para cada aplicação g homotópica a f , a equação $g(x) = a$ deve possuir ao menos duas raízes em cada $\mathbb{T}_i$, $i = 1, 2, 3$. Pela decomposição de K , isto implica que $\mu(f) \geq 3$. Agora, seja x_3 um ponto β_3 , diferente de e^0 . Como temos visto, $h_{32}(x_3) \in \alpha_1 \subset \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$. Seja $x_{12} = h_{32}(x_3)$. Pela definição de $\tilde{f}$, temos $\tilde{f}(x_{12}) = \tilde{f}(x_3) \neq \tilde{f}(e^0)$. Denote $y_0 = \tilde{f}(e^0)$ e $y_1 = \tilde{f}(x_{12})$.

Seja $a \in \mathbb{T}^2$ e seja $p_2^{-1}(a) = \{\tilde{a}, \tilde{a}'\}$ a fibra de p_2 sobre a . Como $\mathbb{T}^2$ é uma superfície, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópico a aplicação identidade tal que $h(y_0) = \tilde{a}$ e $h(y_1) = \tilde{a}'$. Seja $q_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a composição $q_2 = p_2 \circ h$ e seja $\varphi : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ a composição $\varphi = q_2 \circ \tilde{f}$. Então φ é homotópica a f e $\varphi^{-1}(a) = \{e^0, x_{12}, x_3\}$. Como $\mu(f) \geq 3$, isto mostra que $\mu(f) = 3$.

Ademais, é fácil ver que $\mu(\tilde{f}) = 1$, com o par $(\tilde{f}, \tilde{f}(e^0))$ realizando $\mu(\tilde{f})$. □

Note que, neste exemplo, para todo par (φ, a) realizando $\mu(f)$ (que é igual a 3), tem-se necessariamente $\varphi^{-1}(a) = \{e^0, x_1, x_2\}$ com $x_1 \in \alpha_1$ and $x_2 \in \beta_3$ ou $x_1 \in \beta_1$ and $x_2 \in \beta_2$.

Para o mesmo 2-complexo K do Exemplo 6.5, podemos construir um exemplo similar com o contra-domínio de f sendo a garrafa de Klein. Os argumentos de tal construção são similares aos anteriores e, por isso, serão omitidos.

Exemplo 6.6. *Seja $p_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ o recobrimento duplo orientado. Vamos construir um 2-complexo K e uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ tendo um levantamento $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ ao longo de p_2 e satisfazendo:*

- (i) $N(f) = 2$, (ii) $\mu_C(f) = 1$, (iii) $\mu(f) = 3$, (iv) $\mu(\tilde{f}) = 1$.

Repetimos o exemplo anterior substituindo o recobrimento p_2 pelo recobrimento duplo orientado $\bar{p}_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Também aqui, temos $\mu(\tilde{f}) = 1$, com o par $(\tilde{f}, \tilde{f}(e^0))$ realizando $\mu(\tilde{f})$. $\square$

Pequenos ajustes nas construções dos dois últimos exemplos são suficientes para se demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 6.7. *Seja K o 2-complexo dos dois últimos exemplos. Para cada inteiro positivo n , existem aplicações celulares $f_n : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ e $g_n : K \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ satisfazendo:*

1. $N(f_n) = n$, $\mu_C(f_n) = 1$ e $\mu(f_n) = 2n - 1$.
2. $N(g_n) = 2n$, $\mu_C(g_n) = 1$ e $\mu(g_n) = 4n - 1$.

Prova: Para o primeiro item, seja $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ como no Exemplo 6.5. Seja $p_n : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um recobrimento a n folhas (a existência de um tal recobrimento é óbvia; por exemplo, para cada $z \in \mathbb{T}$ considerado como um par $z = (z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$, defina $p_n(z) = (z_1^n, z_2)$). Defina $f_n = p_n \circ \tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$. Agora proceda aos argumentos do Exemplo 6.5.

Para o segundo item, seja $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{T}^2$ como no Exemplo 6.6. Seja $p_n : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um recobrimento a n folhas (como no parágrafo precedente, por exemplo), e seja $\bar{p}_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ o recobrimento duplo orientado da garrafa de Klein. Defina $q_{2n} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ pela composição $q_{2n} = \bar{p}_2 \circ p_n$. Então q_{2n} é um recobrimento a $2n$ folhas. Defina $f_n = q_{2n} \circ \tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Agora proceda aos argumentos do Exemplo 6.6. $\blacksquare$

6.2 Raízes de aplicações levantadas

Na seção anterior, vimos vários exemplos de aplicações de um complexo em uma superfície fechada que admitem levantamento ao longo de algum espaço de recobrimento e não possuem todas as suas classes de raízes com a cardinalidade mínima. Nesta seção, estudamos a relação entre o número mínimo de raízes de uma aplicação e o número mínimo de raízes de seus possíveis levantamentos ao longo de espaços de recobrimento.

Em toda esta seção, M e N denotarão n -variedades topológicas (sem bordo) compactas ou trianguláveis e X denotará espaço topológico compacto, conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Todas estas hipóteses são satisfeitas, por exemplo, se X é um complexo CW conexo e finito.

Lema 6.8. *Seja $p_k : \bar{Y} \rightarrow Y$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow \bar{Y}$ ao longo de p_k . Sejam $a \in Y$ um ponto $p_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$ a fibra de p_k sobre a . Então $\mu(f, a) \geq \sum_{i=1}^k \mu(\tilde{f}, a_i)$.*

Prova: Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ uma aplicação homotópica a f tal que $\#\varphi^{-1}(a) = \mu(f, a)$. Como p_k é um recobrimento, φ se levanta ao longo de p_k a uma aplicação $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \bar{Y}$ homotópica

a $\tilde{f}$. Segue-se que $\varphi^{-1}(a) = \cup_{i=1}^k \tilde{\varphi}^{-1}(a_i)$, com esta reunião sendo disjunta, e certamente $\#\tilde{\varphi}^{-1}(a_i) \geq \mu(\tilde{f}, a_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Portanto,

$$\mu(f, a) = \# \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{\varphi}^{-1}(a_i) \right) \geq \sum_{i=1}^k \mu(\tilde{f}, a_i).$$

■

Teorema 6.9. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Então $\mu(f) \geq k \mu(\tilde{f})$. Além disso, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\mu(\tilde{f}) = 0$.*

Prova: Seja $a \in N$ um ponto arbitrário e seja $p_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$ a fibra de p_k sobre a . Como M e N são ambas superfícies, tem-se $\mu(f) = \mu(f, a)$ e $\mu(\tilde{f}) = \mu(\tilde{f}, a_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Portanto, pelo lema anterior, $\mu(f) \geq k \mu(\tilde{f})$. E isto implica diretamente que $\mu(\tilde{f}) = 0$ se $\mu(f) = 0$. Para provar o que resta, suponha $\mu(\tilde{f}) = 0$. Então $N(\tilde{f}) = 0$ e, pelo Teorema 1.12, existe uma aplicação $\tilde{g} : X \rightarrow M$ homotópica a $\tilde{f}$ tal que $\dim \tilde{g}(X) \leq n - 1$, (onde n é a dimensão de M e N). Seja $\varphi : X \rightarrow N$ a composição $\varphi = p_k \circ \tilde{g}$. Então φ é homotópica a f e $\dim \varphi(X) \leq n - 1$. Portanto $\mu(f) = 0$. ■

Observa-se que se no teorema anterior tem-se $k = 1$, então o recobrimento $p_k : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo e tem-se $\mu(f) = \mu(\tilde{f})$.

Nos Exemplos 6.4, 6.5 e 6.6 da seção anterior são apresentadas aplicações $f : K \rightarrow N$ de 2-complexos em superfícies (N sendo, respectivamente, o plano projetivo, o toro e a garrafa de Klein) para as quais se verifica

$$\mu(f) \geq 3 > 2 = 2 \mu(\tilde{f}).$$

Isto mostra que existem aplicações $f : K \rightarrow N$ de um 2-complexo em uma superfície fechada N que se levantam a aplicações $\tilde{f} : K \rightarrow M$ ao longo de um recobrimento duplo $p_2 : M \rightarrow N$ e satisfazem a desigualdade estrita

$$\mu(f) > 2 \mu(\tilde{f}).$$

Além disso, o Teorema 6.7 mostra que se N é o toro (respectivamente a garrafa de Klein), então, para cada inteiro $n > 1$, existe um complexo K e uma aplicação $f_n : K \rightarrow N$ que se levanta a uma aplicação $\tilde{f}_n : K \rightarrow \mathbb{T}^2$, ao longo de um recobrimento a n folhas $p_n : \mathbb{T}^2 \rightarrow N$ (respectivamente a $2n$ folhas $q_{2n} : \mathbb{T}^2 \rightarrow N$), que satisfaz a relação $\mu(f_n) = 2n - 1 > n = n \mu(\tilde{f}_n)$ (respectivamente $\mu(f_n) = 4n - 1 > 2n = 2n \mu(\tilde{f}_n)$).

Das provas dos dois últimos resultados, os quais enunciam a desigualdade $\mu(f) \geq k \mu(\tilde{f})$, surge naturalmente uma condição necessária e suficiente para que se verifique a igualdade $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$. Para maior clareza, enunciamos e demonstramos isto na seqüência. Iniciamos com um lema.

Lema 6.10. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas, sejam $a_1, \dots, a_k$ pontos distintos de M e seja $a \in N$ um ponto arbitrário. Então, existe um recobrimento a k folhas $q_k : M \rightarrow N$ isomorfo e homotópico a p_k e tal que $q_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$.*

Prova: Seja $p_k^{-1}(a) = \{b_1, \dots, b_k\}$ a fibra de p_k sobre a . Pode ocorrer que algum a_i seja igual a algum b_j . Neste caso, a menos de reindexação, podemos assumir $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq r$ e $a_i \neq b_i$ para $i > r$, para algum $1 \leq r \leq k$. Se $a_i \neq b_j$ para quaisquer i, j , então ponhamos $r = 0$. Se $r = k$, então nada há para se demonstrar. Assumamos então $r \neq k$.

Para cada $i = r + 1, \dots, k$, seja U_i um aberto de M homeomorfo a uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$, contendo a_i e b_i e não contendo quaisquer outros a_j 's e b_j 's (U_i certamente existe, já que M é uma n -variedade). Seja $h_i : M \rightarrow M$ um homeomorfismo homotópico a aplicação identidade, sendo a própria aplicação identidade fora de U_i e tal que $h_i(a_i) = b_i$.

Seja $h : M \rightarrow M$ o homeomorfismo $h = h_k \circ \dots \circ h_{r+1}$. Então h é homotópico a aplicação identidade e $h(a_i) = b_i$ para cada $1 \leq i \leq k$. Defina $q_k : M \rightarrow N$ pela composição $q_k = p_k \circ h$. Então q_k é um recobrimento a k folhas isomorfo e homotópico a p_k . Além disso, é claro que $q_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$. ■

Teorema 6.11. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Então $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$ se, e somente se, para todo par (φ, a) realizando $\mu(f)$, cada par $(\tilde{\varphi}, a_i)$ realiza $\mu(\tilde{f})$, onde $\tilde{\varphi}$ é levantamento de φ homotópico a $\tilde{f}$ e $p_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$.*

Prova: Seja (φ, a) um par realizando $\mu(f)$, seja $p_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$ a fibra de p_k sobre a , e seja $\tilde{\varphi}$ levantamento de φ homotópico a $\tilde{f}$. Então $\varphi^{-1}(a) = \cup_{i=1}^k \tilde{\varphi}^{-1}(a_i)$, com esta reunião sendo disjunta, e portanto $\mu(f) = \sum_{i=1}^k \# \tilde{\varphi}^{-1}(a_i)$. Agora, certamente, $\# \tilde{\varphi}^{-1}(a_i) \geq \mu(\tilde{f})$ para cada $1 \leq i \leq k$. Portanto, $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$ se, e somente se, $\# \tilde{\varphi}^{-1}(a_i) = \mu(\tilde{f})$ para cada $1 \leq i \leq k$, ou seja, cada par $(\tilde{\varphi}, a_i)$ realiza $\mu(\tilde{f})$. ■

Teorema 6.12. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Então $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$ se, e somente se, dados k pontos distintos $a_1, \dots, a_k$ de M , existe uma aplicação $\tilde{\varphi} : X \rightarrow M$ tal que, para cada $1 \leq i \leq k$, o par $(\tilde{\varphi}, a_i)$ realiza $\mu(\tilde{f})$.*

Prova: Seja (φ, a) um par realizando $\mu(f)$ e seja $q_k : M \rightarrow N$ um recobrimento isomorfo e homotópico a p_k tal que $q_k^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_k\}$, conforme o Lema 6.10.

Suponha $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$. Seja $\tilde{\varphi} : X \rightarrow M$ um levantamento de φ ao longo de q_k , homotópico a $\tilde{f}$. Então, pelo teorema anterior, $(\tilde{\varphi}, a_i)$ realiza $\mu(\tilde{f})$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Por outro lado, suponha que exista uma aplicação $\tilde{\varphi} : X \rightarrow M$ tal que, para cada $1 \leq i \leq k$, o par $(\tilde{\varphi}, a_i)$ realiza $\mu(\tilde{f})$. Seja $\varphi = q_k \circ \tilde{\varphi} : X \rightarrow N$. Então $\tilde{\varphi}$ é um levantamento de φ ao longo de q_k , homotópico a $\tilde{f}$, e temos $\mu(f) \leq \# \varphi^{-1}(a) = \sum_{i=1}^k \# \tilde{\varphi}^{-1}(a_i) = k \mu(\tilde{f})$. Mas, pelo Teorema 6.9, tem-se $\mu(f) \geq k \mu(\tilde{f})$. Portanto $\mu(f) = k \mu(\tilde{f})$. ■

Teorema 6.13. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo do recobrimento p_k . Então $\mu(f) > k\mu(\tilde{f})$ se, e somente se, para toda aplicação $\tilde{\varphi} : X \rightarrow M$ homotópica a $\tilde{f}$, existe no máximo $k - 1$ pontos de M cuja pré-imagem por $\tilde{\varphi}$ contém exatamente $\mu(\tilde{f})$ pontos.*

Prova: Pelo Teorema 6.9, $\mu(f) \neq k\mu(\tilde{f})$ se, e somente se, $\mu(f) > k\mu(\tilde{f})$. Sendo assim, um argumento trivial mostra que a asserção deste teorema é equivalente a asserção do teorema precedente. ■

Exemplo 6.14. Sejam $f : K \rightarrow N$, $p_2 : M \rightarrow N$ e $\tilde{f} : K \rightarrow M$ conforme o Exemplo 6.4 ou 6.5 ou 6.6. Pelo que temos provado, $\mu(f) \geq 3 > 2 = 2\mu(\tilde{f})$. (Mais precisamente, nos Exemplos 6.5 e 6.6 tem-se $\mu(f) = 3$). Portanto, pelo teorema precedente, se $\tilde{\varphi} : K \rightarrow M$ é uma aplicação realizando $\mu(\tilde{f})$ (que é igual a 1), então é único o ponto de M cuja pré-imagem por $\tilde{\varphi}$ consiste de um só ponto. □

Agora, apresentamos uma proposição mostrando equivalências entre a nulidade dos números de Nielsen e os números mínimos de raízes de uma aplicação e de seus possíveis levantamentos ao longo de recobrimentos.

Proposição 6.15. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow M$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Então, as seguintes asserções são equivalentes:*

$$(i) \ N(f) = 0, \quad (ii) \ N(\tilde{f}) = 0, \quad (iii) \ \mu(f) = 0, \quad (iv) \ \mu(\tilde{f}) = 0.$$

Prova: Primeiro, lembramos que, pelo Teorema 6.9, (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Também, como $N(g) \leq \mu(g)$ para toda aplicação g , é óbvio que (iii) $\Rightarrow$ (i) e (iv) $\Rightarrow$ (ii). Por outro lado, pelo Teorema 1.10, temos que (i) $\Rightarrow$ (iii) e (ii) $\Rightarrow$ (iv). Isto completa a prova. ■

Até agora, estudamos os casos em que a dada aplicação f tem um levantamento ao longo de um recobrimento com um número finito de folhas. Quando f tem um levantamento ao longo de um recobrimento com um número infinito de folhas, utilizamos resultados de D. L. Gonçalves e P. Wong apresentados em [18], os quais já foram devidamente inseridos e referenciados no Capítulo 1, para provar o seguinte resultado:

Teorema 6.16. *Seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de um recobrimento $p_\infty : M \rightarrow N$ com um número infinito de folhas. Então $N(f)$, $N(\tilde{f})$, $\mu(f)$ e $\mu(\tilde{f})$ são todos iguais a zero.*

Prova: Certamente, o subgrupo $f_\# \pi_1(X)$ tem índice infinito no grupo $\pi_1(N)$. Assim, pelo Corolário 1.11, $\mu(f) = 0$ e, portanto, $N(f) = 0$. Assim, existem uma aplicação φ homotópica a f e um ponto $a \in N$ tais que $\varphi^{-1}(a) = \emptyset$. Seja $\tilde{\varphi} : X \rightarrow M$ um levantamento de φ ao longo de p_∞ homotópico a $\tilde{f}$. Então $\varphi^{-1}(a) = \bigcup_{\tilde{a} \in p_\infty^{-1}(a)} \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{a})$, o que implica que $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{a}) = \emptyset$ para cada $\tilde{a} \in p_\infty^{-1}(a)$. Isto mostra que $\mu(\tilde{f}) = 0$ e, portanto, também $N(\tilde{f}) = 0$. ■

6.3 Classes mínimas versus raízes de levantamentos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados relacionando os problemas estudados nas duas seções anteriores. Iniciamos lembrando e/ou provando alguns resultados que serão utilizados mais adiante.

Também nesta seção, X será sempre um espaço topológico compacto, conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Ademais, M e N serão n -variedades topológicas compactas ou trianguláveis.

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação com Y tendo as mesmas propriedades pré-fixadas para X . Denotamos o *número de Riedemeister* de f por $\mathcal{R}(f)$, o qual é definido como sendo o índice do subgrupo $f_{\#}\pi_1(X)$ no grupo $\pi_1(Y)$. Em símbolos, $\mathcal{R}(f) = |\pi_1(Y) : f_{\#}\pi_1(X)|$.

Quando Y é uma variedade topológica (não necessariamente compacta), segue de [9] que $N(f) > 0 \Rightarrow N(f) = \mathcal{R}(f) < \infty$. Assim, se $\mathcal{R}(f) = \infty$, então $N(f) = 0$.

Corolário 6.17. *Seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação com $\mathcal{R}(f) = k$, seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $\tilde{f} : X \rightarrow M$ um levantamento de f ao longo de p_k . As seguintes asserções são equivalentes:*

$$(i) \ N(f) \neq 0, \quad (ii) \ N(f) = k, \quad (iii) \ \mu(f) \neq 0, \quad (iv) \ \mu(\tilde{f}) \neq 0.$$

Prova: As equivalências (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) estão provadas na Proposição 6.15. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (i) é trivial. A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) segue do Teorema 1.9. ■

Teorema 6.18. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Se $\mathcal{R}(f) = k$, então $\mu(\tilde{f}) = \mu_C(f)$.*

Prova: Se $N(f) = 0$, então todos $\mu(f)$, $\mu(\tilde{f})$ e $\mu_C(f)$ são também iguais a zero. Neste caso, não há nada para se provar. Agora, suponha $N(f) \neq 0$. Então, pelo Corolário 6.17, $N(f) = k$ e $\mu(f)$ e $\mu(\tilde{f})$ são ambos não nulos. Assim, também $\mu_C(f)$ é não nulo. Seja $\mathfrak{R}$ uma classe de Nielsen para raízes de $f(x) = a$ e seja $H : f \simeq f_1$ uma homotopia iniciando em f e terminando em f_1 . Ainda mais, seja $\mathfrak{R}_1$ a classe de Nielsen para raízes de $f_1(x) = a$ que é H -relacionada com $\mathfrak{R}$. Seja $\tilde{f}_1$ um levantamento de f_1 ao longo de p_k , homotópico a $\tilde{f}$. Pelo Teorema 1.7, $\mathfrak{R}_1 = \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{a})$ para algum $\tilde{a} \in M$ na fibra de p_k sobre $a \in N$. Assim, a cardinalidade $\#\mathfrak{R}_1$ é mínima se, e somente se, a cardinalidade $\#\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{a})$ é mínima, ou seja, $\#\mathfrak{R}_1 = \mu_C(f)$ se, e somente se, $\#\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{a}) = \mu(\tilde{f})$. ■

Teorema 6.19. *Seja $p_k : M \rightarrow N$ um recobrimento a k folhas e seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : X \rightarrow M$ ao longo de p_k . Se $\mathcal{R}(f) = k$, então as seguintes asserções são equivalentes:*

$$(i) \ \mu(f) = \mu_C(f)N(f), \quad (ii) \ \mu(f) = k\mu(\tilde{f}), \quad (iii) \ \mu(f) = \mu(\tilde{f})N(f).$$

Prova: Por resultados anteriores, temos que $N(f) = 0 \Leftrightarrow \mu(f) = 0 \Leftrightarrow \mu(\tilde{f}) = 0$. Assim, se um destes números é igual a zero, então as três asserções são automaticamente equivalentes. Agora, se $N(f) \neq 0$, então $N(f) = \mathcal{R}(f) = k$ e, pelo Teorema 6.18, $\mu(\tilde{f}) = \mu_C(f)$. Isto prova as equivalências anunciadas. ■

6.4 Aplicações no plano projetivo

Neste seção, utilizamos a letra maiúscula K para denotar 2-complexos conexos e finitos. A letra maiúscula M indica superfícies fechadas.

Iniciamos apresentando dois lemas importantes cujas provas podem ser obtidas por simples adaptações daquelas construídas para os Lemas 5.1 e 5.2, respectivamente. Como naqueles lemas, consideramos a 2-esfera do domínio de f com decomposição celular $S^2 = e^0 \cup e^2$ e a 2-esfera do contra-domínio com decomposição celular $S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$.

Lema 6.20. *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação com grau homológico $d \neq 0$ e seja $a \in S^2$ um ponto diferente da 0-célula. Então existe uma aplicação celular $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ tal que $f \simeq \varphi \text{ rel } \{e^0\}$ e $\#\varphi^{-1}(a) = 1 = \#\varphi^{-1}(-a)$.*

Prova: A existência de uma aplicação φ homotópica a f satisfazendo $\#\varphi^{-1}(a) = 1$ é bem conhecida (ver [27] e/ou [6]). O que nos cumpre provar é o fato de tal aplicação poder ser escolhida celular e homotópica a f relativa a $\{e^0\}$ e ainda verificar $1 = \#\varphi^{-1}(-a)$. Sem perda de generalidade, assuma que a seja o polo norte e, portanto, $-a$ seja o polo sul da esfera.

Existe uma aplicação celular $g : S^2 \rightarrow S^2$ homotópica a f e tal que $\#g^{-1}(a) = 1 = \#g^{-1}(-a)$. De fato, considere o esfera do domínio fragmentada em $|d|$ faixas meridionais $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{|d|}$ escolhidas de tal modo que e^0 pertença a $\mathbf{m}_1$. Seja $g : S^2 \rightarrow S^2$ a aplicação definida de modo que cada meridiano $\mathbf{m}_i$, para $1 \leq i \leq |d|$, é aplicado homeomorficamente sobre um mesmo meridiano distinguido $\mathbf{m}$, da esfera do contra-domínio, contendo e_*^0 , e cada uma das $|d|$ faixas meridionais cobre uma vez a esfera S^2 , sempre em uma mesma direção, escolhida de modo a tornar g uma aplicação de grau d .

Como f e g tem o mesmo grau, elas são homotópicas. Além disso, $g^{-1}(a) = \{b\}$ and $g^{-1}(-a) = \{-b\}$, onde b é o polo norte da esfera do domínio de f e, assim, $-b$ é o polo sul de tal esfera. Agora, se nenhuma homotopia entre f e g é relativa a $\{e^0\}$, então, procedemos como na prova do Lema 5.1 para providenciar uma homotopia $\hat{H} : f \simeq \varphi \text{ rel } \{e^0\}$ iniciando em f e terminado em uma aplicação φ que difere de g apenas em uma pequena vizinhança aberta de e^0 não contendo os pontos a e $-a$. Sendo assim, fica garantido que $\varphi^{-1}(a) = \{b\} = \varphi^{-1}(-a)$.

Isto conclui a prova. ■

Lema 6.21. *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação de grau zero e seja $\kappa^0 : S^2 \rightarrow S^2$ a aplicação constante em e_*^0 . Então $f \simeq \kappa^0 \text{ rel } \{e^0\}$ e, se $e_*^0 \neq a \in S^2$, então $(\kappa^0)^{-1}(a) = \emptyset = (\kappa^0)^{-1}(-a)$.*

Prova: A mesma do Lema 5.2. ■

No próximo teorema, voltamos a utilizar os conceitos estudados no Capítulo 4. Por isso, será importante não perder de vista os principais resultados daquele capítulo.

Teorema 6.22. *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação que se levanta a $\tilde{f} : K \rightarrow S^2$ ao longo do recobrimento duplo $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Se $\tilde{f}$ é do tipo ∇_2 (em particular se K é uma superfície), então $2\mu(\tilde{f}) = \mu(f) = \mu_C(f)N(f)$.*

Prova: Como $\tilde{f}$ é do tipo ∇_2 , é também do tipo ∇_3 , pela Proposição 4.5. Sejam $\tilde{\varphi} : K \rightarrow S^2$ uma aplicação celular e seja $a \in S^2 = e_*^0 \cup e_*^2$ um ponto diferente de e_*^0 tal que $\#\tilde{\varphi}^{-1}(a) = \mu(\tilde{f})$ e $\tilde{\varphi}^{-1}(a) \subset K \setminus K^1$. Sejam $e_1^2, \dots, e_m^2$ as 2-células de K e sejam $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m$ a fatoração celular de $\tilde{\varphi}$ (conforme definição da Seção 5.1 deste texto).

Como $\tilde{\varphi}^{-1}(a) \subset K \setminus K^1$, o conjunto $\tilde{\varphi}^{-1}(a)$ está em correspondência um a um com o conjunto $\cup_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i^{-1}(a)$; de fato, $\tilde{\varphi}^{-1}(a) = \cup_{i=1}^m (\tilde{\varphi}_i \circ \omega_i)^{-1}(a)$. Agora, pela prova do Teorema 5.6, para cada $1 \leq i \leq m$, ou $\#\tilde{\varphi}_i^{-1}(a) = 1$ ou $\tilde{\varphi}_i$ é homotópica a aplicação constante em e_*^0 . Então, pelos Lemas 6.20 e 6.21, para cada $1 \leq i \leq m$, existe uma aplicação celular $\tilde{\psi}_i : S_i^2 \rightarrow S^2$ tal que $\tilde{\varphi}_i \simeq \tilde{\psi}_i \text{ rel } \{c_i^0\}$ e $\#\tilde{\psi}_i^{-1}(a) = \#\tilde{\varphi}_i^{-1}(a) = \#\tilde{\psi}_i^{-1}(-a)$. Sejam $H_i : \tilde{\varphi}_i \simeq \tilde{\psi}_i \text{ rel } c_i^0$ tais homotopias, $1 \leq i \leq m$.

Para cada $x \in K$, escolha de uma vez por todas um índice $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in e_{i(x)}$. Defina $\tilde{\psi} : K \rightarrow S^2$ por $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}_{i(x)}(\omega_{i(x)}(x))$. Esta aplicação está claramente bem definida e é celular. Além disso, as homotopias H_i , $1 \leq i \leq m$, podem ser conjuntamente utilizadas para se definir uma homotopia H iniciando em $\tilde{\varphi}$ e terminando em $\tilde{\psi}$.

Por construção, $\#\tilde{\psi}^{-1}(a) = \mu(\tilde{f}) = \#\tilde{\psi}^{-1}(-a)$. Pelo Teorema 6.12, temos $\mu(f) = 2\mu(\tilde{f})$. Agora, é óbvio que $\mathcal{R}(f) = 2$. Então, pelo Teorema 6.19, $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$. ■

O Teorema 6.22 não é verdadeiro, em geral, quando a aplicação f não é do tipo ∇_2 . Apresentamos um exemplo simples para ilustrar isso.

Exemplo 6.23. Seja $K = S_1^2 \vee S_2^2$ o bouquet de duas 2-esferas com decomposição celular minimal com uma 0-célula e^0 e duas 2-células e_1^2 e e_2^2 . Seja $\tilde{f} : K \rightarrow S^2$ uma aplicação que restrita a cada S_i^2 , $i = 1, 2$, é homotópica a aplicação identidade. Pelo Exemplo 4.2, temos que $\mu(\tilde{f}) = 1$ e que $\tilde{f}$ não é do tipo ∇_2 . Além disso, se $(\tilde{\varphi}, a)$ é um par realizando $\mu(\tilde{f})$, então necessariamente $\tilde{\varphi}^{-1}(a) = \{e^0\}$. Assim, para toda aplicação $\tilde{\varphi} : K \rightarrow S^2$ homotópica a $\tilde{f}$, existe no máximo um ponto em S^2 cuja pré-imagem por $\tilde{\varphi}$ consiste de um só ponto (e portanto é um conjunto com cardinalidade $\mu(\tilde{f})$). Agora, seja $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ o recobrimento duplo canônico e defina $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ pela composição $f = p_2 \circ \tilde{f}$. Então $\tilde{f}$ é um levantamento de f ao longo de p_2 e, pelo Teorema 6.13, temos $\mu(f) > 2\mu(\tilde{f})$. Mais precisamente, $\mu(f) = 3$. Ademais, $\mu_C(f) = 1$, $N(f) = 2$ e $\mu(f) \neq \mu_C(f)N(f)$. □

No próximo teorema, $A(f)$ denota o *grau absoluto* da dada aplicação f . (Veja [10] ou [13]).

Teorema 6.24. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação induzindo homomorfismo trivial em grupos fundamentais. Então, $\mu(f) = 0$ se $A(f) = 0$ e $\mu(f) = 2$ se $A(f) \neq 0$.*

Prova: Como $f_{\#}\pi_1(M)$ é trivial, f tem um levantamento $\tilde{f} : M \rightarrow S^2$ ao longo do recobrimento duplo (universal) $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Pelo Proposição 4.6, $\tilde{f}$ é do tipo ∇_2 . Logo, pelo Teorema 6.22, temos $\mu(f) = 2\mu(\tilde{f})$. Pelo Corolário 5.12, $\mu(\tilde{f}) = 0$ se $A(\tilde{f}) = 0$ e $\mu(\tilde{f}) = 1$ se $A(\tilde{f}) \neq 0$. Agora, pela definição de grau absoluto (veja [13], página 371) é fácil checar que $A(f) = 2A(\tilde{f})$. Isto conclui a prova. ■

O Teorema 6.24 não se aplica, em geral, se o homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ é não trivial. Para ilustrar isso, seja $id : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a aplicação identidade. É óbvio que esta aplicação induz o isomorfismo identidade em grupos fundamentais e $\mu(id) = 1$.

No próximo teorema, X é um espaço compacto, conexo, localmente conexo e semilocalmente simplesmente conexo.

Teorema 6.25. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação. Então $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$ se ao menos uma das seguintes afirmativas estiver satisfeita:*

- (i) $f_{\#}\pi_1(X) \neq 0$; (ii) X é um 2-complexo e f é do tipo ∇_2 .

Prova: A menos de isomorfismo, existem somente dois recobrimentos para $\mathbb{RP}^2$, a saber, a aplicação identidade $p_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ e o recobrimento duplo $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Suponha que (i) esteja satisfeita. Então, $f_{\#}\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2$ e p_1 é o recobrimento correspondendo ao subgrupo $f_{\#}\pi_1(X)$ de $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$. Assim, ou $N(f) = 0$ ou $N(f) = \mathcal{R}(f) = 1$. Agora, se $N(f) = 0$, então também $\mu(f) = 0$ pela Proposição 6.15. Se $N(f) = 1$, então o resultado é óbvio. Portanto, temos $\mu(f) = \mu_C(f)N(f)$. Se, por outro lado, (ii) se verifica mas (i) não se verifica, então utilizamos o Teorema 6.22. ■

O Exemplo 6.23 providencia uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$, de um 2-complexo no plano projetivo, a qual, além de não ser do tipo ∇_2 e verificar $f_{\#}\pi_1(K) = 0$, verifica também $\mu(f) \neq \mu_C(f)N(f)$. Isto mostra que as hipóteses do Teorema 6.25 não são supérfluas.

Para encerrar este capítulo, gostaríamos de indicar quatro referências muito importantes para o estudo da teoria de raízes para aplicações entre superfícies fechadas; são elas [4], [5], [6], [20] e [21]. Vários resultados que demonstramos neste capítulo podem ser inserido no contexto destas referências quando consideramos que o domínio X das aplicações dadas seja uma superfície fechada. Deste modo, pode-se testar compatibilidade de resultados e obter algumas conseqüências interessantes quando se considera em conjunto resultados provados neste texto e aqueles contidos nas referências citadas.

O problema de raízes para aplicações convenientes

Neste capítulo, vamos provar condições necessárias e suficientes para que uma aplicação $f : K \rightarrow M$, de um 2-complexo finito em uma superfície fechada, seja livre de raízes. A parte “suficiente” destas condições serão, em geral, restritas a um tipo especial de aplicações, que chamaremos *aplicações convenientes* (definição a seguir). A primeira de tais condições envolve a trivialidade do homomorfismo induzido por f nos segundos grupos de homotopia, o qual nós denotamos $f_{\#_2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(M)$, e a existência de levantamentos para $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)$ através do homomorfismo $l_{\#} : \pi_1(M^1) \rightarrow \pi_1(M)$ induzido pela inclusão natural $l : M^1 \rightarrow M$ do 1-esqueleto M^1 de M em M . (Aqui, sempre consideramos a superfície M com sua decomposição celular minimal). Mais adiante, definiremos o que chamamos uma *mutação* de um homomorfismo. Este conceito será utilizado para providenciar condições para a existência de levantamentos de homomorfismos ao longo de epimorfismos de grupos livres sobre grupos arbitrários. Tais condições serão mais tarde utilizadas para se determinar condições para que uma aplicação seja livre de raízes. Um conceito similar chamado *mutação simbólica* também será apresentado. Na verdade, uma mutação simbólica pode ser considerada com que uma generalização do conceito de mutação de homomorfismos. Usando este novo conceito, apresentamos alguns resultados que tornam mais viável a aplicabilidade dos resultados principais apresentados no capítulo em situações práticas. A saber, nós apresentamos resultados relacionando a aniquilação das raízes de f com a existência de

soluções particulares de certos sistemas de equações em grupos livres induzidos por f . O capítulo se encerra com a apresentação de vários exemplos que ilustram bem a aplicabilidade dos resultados demonstrados.

Em todo este capítulo, usamos a letra maiúscula K para denotar um complexo CW 2-dimensional conexo e finito, e a letra maiúscula M para denotar uma superfície fechada. Esta última será sempre considerada com sua decomposição celular minimal e seu 1-esqueleto segundo tal decomposição será denotado por M^1 . Definimos $l : M^1 \rightarrow M$ como sendo a inclusão natural.

7.1 Aplicações convenientes

Sejam K e L dois 2-complexos finitos e conexos e sejam $\Pi = \pi_1(K)$ e $\Xi = \pi_1(L)$. Seja $f : K \rightarrow L$ uma aplicação de K em L e seja $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$ o homomorfismo induzido por f em grupos fundamentais. Como Ξ atua em $\pi_2(L)$ fazendo de $\pi_2(L)$ um Ξ -módulo, um procedimento de mudança de anel define uma ação de Π em $\pi_2(L)$ que torna este último um Π -módulo. O procedimento é o seguinte: para cada $\pi \in \Pi$ e cada $\gamma \in \pi_2(L)$, definimos a ação de π em γ por $\pi \cdot \gamma = \alpha(\pi)\gamma$, ou seja, pela ação usual de $\alpha(\pi)$ em γ , devido a estrutura de Ξ -módulo que possui $\pi_2(L)$. Para evitar confusão, quando consideramos $\pi_2(L)$ como um Π -módulo através deste procedimento, vamos escrever ${}_{\alpha}\pi_2(L)$ ao invés de simplesmente $\pi_2(L)$.

Observe-se que se o homomorfismo α é trivial, então a ação de Π em $\pi_2(L)$ é também trivial, ou seja, $\pi \cdot \gamma = \gamma$. Isto ocorre, em particular, se K ou L é simplesmente conexo.

Tornado $\pi_2(L)$ um Π -módulo, fica perfeitamente definido o módulo de cohomologia do grupo Π com coeficientes em ${}_{\alpha}\pi_2(L)$, o qual denotamos por $H^2(\Pi; {}_{\alpha}\pi_2(L))$.

Vamos denotar por $[K, L]_{\alpha}$ o conjunto das classes de homotopia baseadas de aplicações baseadas de K em L induzindo o homomorfismo $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$ em grupos fundamentais.

O seguinte resultado corresponde ao Corolário 4.13 da página 95 de [1].

Teorema 7.1. *Classes de homotopia $[f] \in [K, L]_{\alpha}$ são unicamente determinadas por seu homomorfismo de módulos induzido $f_{\#2} : \pi_2(K) \rightarrow {}_{\alpha}\pi_2(L)$ se, e somente se, o módulo de cohomologia $H^2(\Pi; {}_{\alpha}\pi_2(L))$ é trivial.*

Segue-se deste teorema, em particular, que se $\pi_2(L) = 0$, então quaisquer duas aplicações baseadas f e g de K em L induzindo o mesmo homomorfismo em π_1 são homotópicas.

O nulidade do módulo de cohomologia $H^2(\Pi; {}_{\alpha}\pi_2(L))$ será hipótese determinante para a veracidade de alguns resultados que enunciaremos na sequência. Por isso, e para que não tenhamos que escrever repetidamente esta hipótese, definimos o seguinte:

Definição 7.2. Uma aplicação $f : K \rightarrow L$ induzindo $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$ em grupos fundamentais será chamada uma aplicação *conveniente* se $H^2(\Pi; {}_{\alpha}\pi_2(L)) = 0$.

Observação 7.3. Temos os seguintes resultados:

1. Se $\pi_2(L) = 0$, então toda aplicação $f : K \rightarrow L$ é conveniente.
2. Se M é uma superfície fechada que não a esfera S^2 nem o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$, então $\pi_2(M) = 0$ e toda aplicação $f : K \rightarrow M$ é conveniente.
3. Se $\pi_2(K) = 0$, então K é esférico (veja [1]) e, assim, um complexo $K(\Pi, 1)$. Logo, $H^2(\Pi; \alpha \pi_2(L)) \approx H^2(K; \alpha \pi_2(L))$ e uma aplicação $f : K \rightarrow L$ é conveniente se, e somente se, $H^2(K; \alpha \pi_2(L)) = 0$.
4. Se $\Pi = \pi_1(K)$ é um grupo livre, digamos de posto p , então o bouquet de 1-esferas $\vee^p S^1$ é um complexo $K(\Pi, 1)$ e temos $H^2(\Pi; \alpha \pi_2(L)) \approx H^2(\vee^p S^1; \alpha \pi_2(L)) = 0$. Logo, toda aplicação $f : K \rightarrow L$ é conveniente.
5. Se $K = K^1$ é um 1-complexo, então $\Pi = \pi_1(K)$ é um grupo livre e toda aplicação $f : K \rightarrow L$ é conveniente.
6. Uma aplicação $f : K \rightarrow S^2$ é conveniente se, e somente se, $H^2(\Pi; \mathbb{Z}) = 0$.
7. Para que uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ seja conveniente é suficiente que $H^2(\Pi; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ para todo sistema de coeficientes locais (torcidos) $\Pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ que denotamos por $\tilde{\mathbb{Z}}$.

Os cinco primeiros itens da observação acima são triviais. Para justificar as duas últimas, apresentamos um argumento simples:

Sendo L a esfera ou o espaço projetivo, temos $\pi_2(L) \approx \mathbb{Z}$. Agora, dada uma aplicação $f : K \rightarrow L$ e considerando $\alpha = f_{\#} : \Pi \rightarrow \Xi$, temos:

- Se $L = S^2$, então α é o homomorfismo trivial e, neste caso, a ação de Π em $\pi_2(S^2) \approx \mathbb{Z}$ é também trivial, ou seja, para cada $\pi \in \Pi$ e $\gamma \in \pi_2(S^2)$, tem-se $\pi \cdot \gamma = \gamma$.
- Se $L = \mathbb{RP}^2$, então $\Xi \approx \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ e, neste caso, para cada $\pi \in \Pi$ e $\gamma \in \pi_2(\mathbb{RP}^2)$, temos exatamente duas possibilidades: ou $\pi \cdot \gamma = \gamma$ ou $\pi \cdot \gamma = -\gamma$.

Isto mostra que a ação de Π em $\pi_2(L) \approx \mathbb{Z}$ induzida por α define um sistema de coeficientes locais $\tilde{\alpha} : \Pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) \approx \text{Aut}(\pi_2(L))$ para K , bem como para qualquer complexo $K(\Pi, 1)$. De acordo com os dois itens acima, temos:

- Se $L = S^2$, o sistema $\tilde{\alpha} : \Pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ é trivial, ou seja, $\tilde{\alpha}(\pi) = 1$, para todo $\pi \in \Pi$.
- Se $L = \mathbb{RP}^2$, o sistema $\tilde{\alpha} : \Pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ pode ou não ser sobrejetor.

Isto basta para justificar os itens **6** e **7** da Observação 7.3.

Antes de apresentarmos o teorema principal desta seção, apresentamos um importante lema que será utilizado em sua prova.

Lema 7.4. *Todo homomorfismo de grupos $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$ pode ser realizado como o homomorfismo induzido em grupos fundamentais por uma aplicação celular $f : K \rightarrow L$.*

Prova: Sejam $\varphi : K \rightarrow K_{\mathcal{P}}$ e $\psi : L_{\mathcal{Q}} \rightarrow L$ equivalências de homotopia (que existem pelo Teorema 2.2), onde $K_{\mathcal{P}}$ e $L_{\mathcal{Q}}$ são os 2-complexos modelos induzidos por apresentações $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle y_1, \dots, y_u \mid s_1, \dots, s_v \rangle$, respectivamente. Então, os 1-esqueletos de $K_{\mathcal{P}}$ e $L_{\mathcal{Q}}$ são, respectivamente, os bouquets de n pétalas e u pétalas

$$K_{\mathcal{P}}^1 = \vee^n S^1 = e_K^0 \cup e_{x_1}^1 \cup \dots \cup e_{x_n}^1 \quad \text{e} \quad L_{\mathcal{Q}}^1 = \vee^u S^1 = e_L^0 \cup e_{y_1}^1 \cup \dots \cup e_{y_u}^1.$$

Denote $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_u\}$ e sejam $F(\mathbf{x})$ e $F(\mathbf{y})$ os grupos livres de posto n e u gerados por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente. Seja $N(\mathbf{r})$ o subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ gerado pelas palavras $r_1, \dots, r_m$ e seja $N(\mathbf{s})$ o subgrupo normal de $F(\mathbf{y})$ gerado pelas palavras $s_1, \dots, s_v$. Sejam $\Omega_{\Pi} : F(\mathbf{x}) \rightarrow \Pi$ e $\Omega_{\Xi} : F(\mathbf{y}) \rightarrow \Xi$ os homomorfismos quocientes canônicos.

Para cada $1 \leq j \leq n$, escolha uma palavra $w_j \in F(\mathbf{y})$ tal que $\Omega_{\Xi}(w_j) = (\alpha \circ \Omega_{\Pi})(x_j)$. Seja $\alpha^1 : F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{y})$ o único homomorfismo tal que $\alpha^1(x_j) = w_j$. É fácil ver que $\alpha \circ \Omega_{\Pi} = \Omega_{\Xi} \circ \alpha^1$, ou seja, o quadrado do seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N(\mathbf{r}) & \longrightarrow & F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\Omega_{\Pi}} & \Pi \longrightarrow 0 \\ & & & & \alpha^1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & N(\mathbf{s}) & \longrightarrow & F(\mathbf{y}) & \xrightarrow{\Omega_{\Xi}} & \Xi \longrightarrow 0 \end{array}$$

Defina $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow L_{\mathcal{Q}}^1$ como sendo aquela função que aplica cada $e_{x_j}^1$ em $L_{\mathcal{Q}}^1$ exatamente como α^1 aplica x_j em $F(\mathbf{y}) \approx \pi_1(L_{\mathcal{Q}}^1)$, isto é, a imagem de cada $e_{x_j}^1$ por f é um laço que percorrendo $L_{\mathcal{Q}}^1$ exatamente como o homomorfismo α^1 soletra $\alpha^1(x_j)$ como uma palavra em $F(\mathbf{y})$. É óbvio que existe uma identificação natural

$$\alpha^1 = f_{\#}^1 : F(\mathbf{x}) \equiv \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \longrightarrow \pi_1(L_{\mathcal{Q}}^1) \equiv F(\mathbf{y}).$$

Agora, cada relator r_i na apresentação $\mathcal{P}$ é uma palavra no grupo livre $F(\mathbf{x})$ (podendo ser inclusive a palavra vazia ou uma palavra com uma única letra) tal que $(\alpha \circ \Omega_{\Pi})(r_i) = 0$ em Ξ , pois $\Omega_{\Pi}(r_i) = 0$. Além disso, o complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ possui m células de dimensão 2, digamos $e_1^2, \dots, e_m^2$, indexadas de tal modo que a 2-célula e_i^2 é colada em $K_{\mathcal{P}}^1$ segundo a palavra relatora r_i . Seja $l : L_{\mathcal{Q}}^1 \hookrightarrow L_{\mathcal{Q}}$ a inclusão natural. Então $(l \circ f^1)_{\#}(r_j) = (\Omega_{\Xi} \circ \alpha^1)(r_j) = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$. Logo, a aplicação composta $l \circ f^1$ se estende para cada 2-célula e_i^2 , definindo uma aplicação celular $f' : K_{\mathcal{P}} \rightarrow L_{\mathcal{Q}}$ verificando, para cada $1 \leq j \leq n$, $(f'_{\#} \circ \Omega_{\Xi})(x_i) = (l \circ f^1)_{\#}(x_i) = (\Omega_L \circ \alpha^1)(x_i) = (\alpha \circ \Omega_{\Pi})(x_i)$. Isto basta para provar que $f'_{\#} = \alpha$.

Para finalizar, defina $f = \psi \circ f' \circ \varphi : K \rightarrow L$. Como φ e ψ são equivalências de homotopia, segue-se que $f_{\#} = f'_{\#} = \alpha$, como queríamos demonstrar. ■

Observe que para que se cumpra a demonstração anterior, não é necessário que $L_{\mathcal{Q}}$ possua 2-células, podendo ser a apresentação $\mathcal{Q}$ simplesmente da forma $\mathcal{Q} = \langle y_1, \dots, y_u \mid \rangle$, ou seja, $L_{\mathcal{Q}}$ pode ser um complexo 1-dimensional. E se este é o caso, então é evidente que Ξ é isomorfo ao grupo livre $F(\mathbf{y})$ e $\Omega_{\Xi} : F(\mathbf{y}) \rightarrow \Xi$ é o isomorfismo identidade.

Agora, apresentamos o resultado principal desta seção. Para tanto, consideramos M uma superfície fechada com decomposição celular minimal e M^1 o seu 1-esqueleto. Ainda mais, denotamos por $l : M^1 \rightarrow M$ a inclusão natural.

Teorema 7.5. *Uma aplicação conveniente $f : K \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(M)$ é trivial e existe um homomorfismo ϕ tornando comutativo o diagrama abaixo:*

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(M^1) \\ & \nearrow \phi & \downarrow l_{\#} \\ \pi_1(K) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(M) \end{array}$$

Prova: A parte “somente se” é verdadeira mesmo se a aplicação f não é conveniente. Com efeito: Suponha que f seja livre de raízes. Então, sejam φ uma aplicação homotópica a f e $a \in M$ um ponto tais que $\varphi^{-1}(a) = \emptyset$. A menos da composição de φ com um auto-homeomorfismo de M homotópico a aplicação identidade, podemos considerar que $a \in M \setminus M^1$. Assim, M^1 é um retrato por deformação forte de $M \setminus \{a\}$. Seja $r : M \setminus \{a\} \rightarrow M^1$ uma retração. Defina $\bar{\varphi} : K \rightarrow M^1$ como sendo a composição $\bar{\varphi} = r \circ \varphi$. Então, $l \circ \bar{\varphi} : K \rightarrow M$ é uma aplicação homotópica a f . Agora é suficiente definir $\phi = \bar{\varphi}_{\#}$ para se obter $f_{\#} = l_{\#} \circ \phi$. Além disso, como $\pi_2(M^1) = 0$, é óbvio que $f_{\#2}$ é o homomorfismo trivial.

A fim de provar a parte “se”, suponha que $f_{\#2}$ seja trivial e $\phi : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M^1)$ seja um homomorfismo verificando $f_{\#} = l_{\#} \circ \phi$. Pelo Lema 7.4, existe uma aplicação celular $\bar{\varphi} : K \rightarrow M^1$ tal que $\phi = \bar{\varphi}_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M^1)$. Seja $\varphi : K \rightarrow M$ definida pela composição $\varphi = l \circ \bar{\varphi}$. Então $\varphi_{\#} = l_{\#} \circ \phi = f_{\#}$ e $f_{\#2} = 0 = \varphi_{\#2}$. Seja $f^{cel} : K \rightarrow M$ uma aproximação celular de f e considere como ponto base em M a sua (única) 0-célula e como um ponto base em K qualquer de suas 0-células. Como φ e f^{cel} são ambas aplicações celulares, elas são aplicações baseadas. Além disso, $\varphi_{\#} = f_{\#}^{cel}$ e $\varphi_{\#2} = f_{\#2}^{cel} = 0$. Agora, por hipótese, $H^2(\Pi; \alpha \pi_2(M)) = 0$. Pelo Teorema 7.1, segue-se que f^{cel} é homotópica (baseada) a φ . Conseqüentemente, f é homotópica a φ (através de uma homotopia não necessariamente baseada). Como φ é não sobrejetora, f é livre de raízes. ■

Quando o homomorfismo φ no Teorema 7.5 existe, nós o chamamos um *levantamento de $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$* . Alternativamente, diz-se que $f_{\#}$ possui um levantamento ao longo de $l_{\#}$.

É óbvio que se $f_{\#}$ é o homomorfismo trivial, então o levantamento ϕ existe, aliás, é suficiente definir ϕ como sendo também o homomorfismo trivial. Assim, uma aplicação conveniente induzindo o homomorfismo trivial em grupos fundamentais é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#2}$ é também trivial.

A parte “se” do Teorema 7.5 não é verdadeira, em geral, se a aplicação f não é conveniente. Apresentamos agora um exemplo para ilustrar este fato: Seja $\mathbb{T}$ o toro $S^1 \times S^1$. Como $\mathbb{T}$ é um espaço $K(\pi_1(\mathbb{T}), 1)$, temos $H^2(\pi_1(\mathbb{T});_\alpha \pi_2(S^2)) \approx H^2(\mathbb{T}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ para toda aplicação $\mathbb{T} \rightarrow S^2$ induzindo α (o homomorfismo trivial) em grupos fundamentais. Portanto, *não existe aplicação conveniente do toro $\mathbb{T}$ na esfera S^2* . No entanto, é claro que existe uma aplicação $f : \mathbb{T} \rightarrow S^2$ de grau 1, e tal aplicação não é livre de raízes. Agora, é óbvio que $f_\#$ e $f_{\#_2}$ são homomorfismos triviais. Em particular, $f_\#$ possui levantamento ao longo de $l_\#$. Para obter um outro exemplo, seja $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ o recobrimento universal e defina $\bar{f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ pela composição $\bar{f} = p_2 \circ f$. Esta aplicação não é conveniente e não é livre de raízes. No entanto, $\bar{f}_\#$ e $\bar{f}_{\#_2}$ são homomorfismos triviais.

7.2 Algumas conseqüências do Teorema 7.5

Proposição 7.6. *Seja G um grupo finito tal que $\text{Hom}(G; \mathbb{Z}_2)$ é não trivial. Para cada homomorfismo não trivial $\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ existe um 2-complexo finito e conexo K , com $\pi_1(K) \approx G$, e existe uma aplicação celular $f_\alpha : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$, que não é livre de raízes, induzindo α em grupos fundamentais.*

Prova: Da hipótese, G possui uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$, onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{r}$ são finitos. Seja $K = K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P}$. Então $G \approx \pi_1(K)$ e, a menos de isomorfismo, cada homomorfismo $\alpha \in \text{Hom}(G; \mathbb{Z}_2)$ pode ser considerado como um homomorfismo de $\pi_1(K)$ em $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$. Pelo Lema 7.4, cada tal homomorfismo α é realizado como o homomorfismo induzido em grupos fundamentais por uma aplicação celular $f_\alpha : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Então, como $\pi_1(\mathbb{RP}^1) \approx \mathbb{Z}$ e $\pi_1(G)$ é um grupo finito, existe um levantamento $\phi_\alpha : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ de $(f_\alpha)_\#$ ao longo de $l_\#$ se, e somente se, $(f_\alpha)_\#$ é trivial. Agora, como $\text{Hom}(G; \mathbb{Z}_2) \neq 1$, por hipótese, para cada homomorfismo não trivial $\alpha \in \text{Hom}(G; \mathbb{Z}_2)$, cada aplicação $f_\alpha : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ não é livre de raízes, pelo Teorema 7.5. ■

Para ilustrar a aplicabilidade desta proposição, considere o *pseudo plano projetivo* $\mathbb{P}_{2d}^2$ de grau $2d$, o qual é obtido colando-se uma 2-célula na esfera S^1 através de uma aplicação (combinatorial) $S^1 \rightarrow S^1$ de grau $2d$. (Note que $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}_2^2$). É bem sabido que $\pi_1(\mathbb{P}_{2d}^2) \approx \mathbb{Z}_{2d}$ e assim $\text{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}_{2d}^2); \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$. Seja $\alpha : \mathbb{Z}_{2d} \approx \pi_1(\mathbb{P}_{2d}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2$ o único homomorfismo não trivial pertencente a $\text{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}_{2d}^2); \mathbb{Z}_2)$. Pela proposição anterior, existe uma aplicação $f : \mathbb{P}_{2d}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tal que $f_\# = \alpha$ e f não é livre de raízes.

Proposição 7.7. *Seja K um 2-complexo com grupo fundamental livre. Uma aplicação $f : K \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, o homomorfismo $f_{\#_2}$ é trivial.*

Prova: Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação. Pela Observação 7.3, f é conveniente. Para cada gerador x_j do grupo livre $\pi_1(K)$, escolha uma palavra w_j no grupo livre $\pi_1(M^1)$ tal que

$l_{\#}(w_j) = f_{\#}(x_j)$. Então, existe um (único) homomorfismo $\phi : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M^1)$ tal que $\phi(x_j) = w_j$. É claro que ϕ é um levantamento de $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$. Pelo Teorema 7.5, f é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#_2}$ é trivial. ■

Outra prova para esta proposição pode ser elaborada utilizando um Teorema de Wall (veja [1], página 120), que afirma que *toda 2-complexo conexo e finito com grupo fundamental livre é homotopicamente equivalente a um bouquet finito de esferas 1- e 2-dimensionais*.

Outra prova para a Proposição 7.7: Pelo Teorema de Wall citado, K é homotopicamente equivalente a um bouquet finito de esferas 1- e 2-dimensionais. Seja $L = L_1 \vee L_2$ tal bouquet, sendo L_1 um bouquet de 1-esferas e L_2 um bouquet de 2-esferas. Seja $\psi : L \rightarrow K$ uma equivalência de homotopia. Então, pelo Lemma 1.4, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\mu(f \circ \psi) = 0$. Agora, é claro que $L\langle 2 \rangle = L_2$ (confira definição no parágrafo que antecede a Proposição 3.19). Então, pela Proposição 3.19, $\mu(f) = 0$ se, e somente se, $\mu(i \circ \psi \circ f) = 0$, onde $i : L_2 \hookrightarrow L$ é a inclusão natural. Agora, se $\pi_2(M) = 0$, então é claro que $i \circ \psi \circ f$ é homotópica a uma aplicação constante. E portanto, $\mu(f) = 0$. Se, por outro lado, $\pi_2(M) \neq 0$, então M é ou a esfera S^2 ou o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$. Neste caso, é claro que $\mu(i \circ \psi \circ f) = 0$ se, e somente se, $(i \circ \psi \circ f)_{\#_2} : \pi_2(L_2) \rightarrow \pi_2(M)$ é trivial. É também claro que este último fato ocorre se, e somente se, $f_{\#_2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(M)$ é o homomorfismo trivial.

Proposição 7.8. *Seja K um 2-complexo com grupo fundamental finito. Uma aplicação conveniente $f : K \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#}$ e $f_{\#_2}$ são triviais.*

Prova: Como $\pi_1(M^1)$ é um grupo livre e $\pi_1(K)$ é finito, o único homomorfismo de $\pi_1(K)$ em $\pi_1(M^1)$ é o trivial. Logo, $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)$ possui levantamento ao longo de $l_{\#} : \pi_1(M^1) \rightarrow \pi_1(M)$ se, e somente se, $f_{\#}$ é trivial. Segue-se do Teorema 7.5 que f é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#}$ e $f_{\#_2}$ são ambos triviais. ■

A parte “somente se” desta proposição é verdadeira ainda que f não seja conveniente.

Corolário 7.9. *Seja K um 2-complexo com grupo fundamental finito e seja M uma superfície fechada, $S^2 \neq M \neq \mathbb{RP}^2$. Toda aplicação $f : K \rightarrow M$ é livre de raízes.*

Prova: Note que $\pi_2(M) = 0$; assim toda aplicação $f : K \rightarrow M$ é conveniente (veja Observação 7.3) e M é um complexo $K(\pi_1(M), 1)$ finito. É bem sabido que se G é um grupo que contém um subgrupo de torção, então todo complexo $K(G, 1)$ é infinito (veja Proposição II.3 de [30]). Portanto, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é livre de torção. Logo $\text{Hom}(\pi_1(K); \pi_1(M)) = 0$ e o resultado segue da proposição anterior. ■

Este corolário não é verdadeiro, em geral, se M é ou a esfera ou o plano projetivo. Para exemplificar isto, considere as aplicações identidades da esfera e do plano projetivo. Apesar do grupo fundamental destes dois espaços serem finitos, tais aplicações não são livre de raízes.

O resultado da Proposição 7.8 pode não se aplicar nos casos em que $\pi_1(K)$ não é um grupo finito. Por exemplo, se Π é o grupo cíclico infinito, então a esfera 1-dimensional S^1 é um complexo $K(\Pi, 1)$ e toda aplicação de S^1 em $\mathbb{RP}^2$ é uma aplicação conveniente, pela Observação 7.3. Agora, apesar da aplicação $f : S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, que identifica a esfera S^1 ao 1-esqueleto de $\mathbb{RP}^2$, ser livre de raízes, o homomorfismo induzido por ela em grupos fundamentais é idêntico ao epimorfismo canônico $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Agora, vamos considerar casos em que o grupo fundamental de K é uma soma direta da forma $\mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ com $\mathcal{F}$ um grupo abeliano livre e $\mathcal{T}$ um grupo de torção. Sendo K um complexo finito, isto ocorre, por exemplo, se $\pi_1(K)$ é um grupo abeliano.

Diremos que um subgrupo H de um grupo G é *cíclico* (em G) se H ou é trivial ou pode ser gerado por um só elemento.

Suponha que seja A um grupo com subgrupo de torção $\mathcal{T}$ e que o quociente $A/\mathcal{T}$ seja abeliano livre. Então $A \approx \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$, onde $\mathcal{F}$ é o quociente $A/\mathcal{T}$. Um homomorfismo arbitrário de grupos $h : A \rightarrow B$ dá origem a dois homomorfismo de grupos

$$h^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow B \quad \text{e} \quad h^{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow B$$

de maneira natural: Para cada $x \in \mathcal{F}$, definimos $h^{\mathcal{F}}(x) = (h \circ \Lambda)(x, 0)$ e, para cada $y \in \mathcal{T}$, definimos $h^{\mathcal{T}}(y) = (h \circ \Lambda)(0, y)$, onde $\Lambda : \mathcal{F} \oplus \mathcal{T} \approx A$.

Estas construções e notações são assumidas nos resultados doravante apresentados.

É conhecido como Teorema de Nielsen-Schreier o seguinte importante resultado:

“Todo subgrupo de um grupo livre é livre.”

Uma prova para isto, que pode ser encontrada na página 103 de [31], segue-se do fato que todo subgrupo de um grupo livre pode ser realizado como o grupo fundamental de um grafo.

É uma consequência imediata do Teorema de Nielsen-Schreier que se dois elementos de um grupo livre comutam, então eles são potências de um terceiro. Sendo assim, segue-se que:

Todo subgrupo abeliano não trivial de um grupo livre é cíclico infinito.

Em decorrência disso, podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 7.10. *Seja $A = \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ um grupo, com $\mathcal{T}$ o seu subgrupo de torção e $\mathcal{F}$ abeliano livre. Seja $h : A \rightarrow B$ um homomorfismo de grupos. Seja $\xi : F \rightarrow B$ um epimorfismo de um grupo livre F sobre B . Existe um levantamento $\phi : A \rightarrow F$ de h ao longo de ξ se, e somente se, $h^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é cíclico e $h^{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$ é trivial.*

Prova: Como F é livre, é óbvio que $h^{\mathcal{T}}$ tem um levantamento $\phi^{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow F$ ao longo de ξ se, e somente se, $h^{\mathcal{T}}$ é trivial e, neste caso, também $\phi^{\mathcal{T}}$ é trivial.

Agora, se existe um levantamento $\phi^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow F$ de $h^{\mathcal{F}}$ ao longo de ξ , então a imagem $\phi^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é um subgrupo abeliano livre de F e, assim, é cíclico. Portanto, como $h^{\mathcal{F}} = \xi \circ \phi^{\mathcal{F}}$, o subgrupo $h^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ de B também é cíclico.

Reciprocamente, suponha que $h^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ seja cíclico e seja $\vartheta \in h^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ um seu gerador. Seja p o posto de $\mathcal{F}$ e seja $\mathcal{F}'$ o grupo abeliano livre gerado por $u_1, \dots, u_p$. Existe um isomorfismo $\eta : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $(h^{\mathcal{F}} \circ \eta)(u_1) = \vartheta$ e $(h^{\mathcal{F}} \circ \eta)(u_i) = 0$ para cada $1 < i \leq p$. Como ξ é um epimorfismo, podemos selecionar $w \in F$ tal que $\xi(w) = \vartheta$. Seja $\phi' : \mathcal{F}' \rightarrow F$ o único homomorfismo de $\mathcal{F}'$ em F satisfazendo $\phi'(u_1) = w$ e $\phi'(u_i) = \mathbb{1}$ para cada $1 < i \leq p$. Agora, defina $\phi^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow F$ pela composição $\phi^{\mathcal{F}} = \phi' \circ \eta^{-1}$, onde $\eta^{-1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ denota o isomorfismo inverso de η . É óbvio que $\phi^{\mathcal{F}}$ é um levantamento de $h^{\mathcal{F}}$ ao longo de ξ . ■

Proposição 7.11. *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação conveniente com $\pi_1(K) = \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$, onde $\mathcal{F}$ é abeliano livre e $\mathcal{T}$ é um grupo de torção. Temos:*

1. *Se $S^2 \neq M \neq \mathbb{RP}^2$, então f é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#}^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é cíclico.*
2. *Se $M = S^2$, então f é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#_2}$ é trivial.*
3. *Se $M = \mathbb{RP}^2$, então f é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#}$ e $f_{\#_2}$ são ambos triviais.*

Prova: Faremos a prova de cada asserção separadamente, apesar dos argumentos comuns.

1. Temos $\pi_2(M) = 0$ e $\pi_1(M)$ livre de torção. Logo, os homomorfismos $f_{\#_2} : \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(M)$ e $f_{\#}^{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow \pi_1(M)$ são ambos triviais. Neste caso, o Teorema 7.5 implica que f é livre de raízes se, e somente se, o homomorfismo $f_{\#}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \pi_1(M)$ admite um levantamento ao longo do homomorfismo $l_{\#} : \pi_1(M^1) \rightarrow \pi_1(M)$. Pelo lema anterior, isto ocorre se, e somente se, o subgrupo imagem $f_{\#}^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é cíclico.

2. Como o homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(S^2)$ é trivial e, por isso, admite levantamento óbvio ao longo de $l_{\#}$, segue-se do Teorema 7.5 que f é livre de raízes se, e somente se, o homomorfismo $f_{\#_2}$ é trivial.

3. Certamente $f_{\#}^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é cíclico e, assim, $f_{\#}^{\mathcal{F}}$ tem um levantamento ao longo de $l_{\#}$, pelo Lema 7.10. Ainda por este lema, existe um levantamento ϕ de $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$ se, e somente se, $f_{\#}^{\mathcal{T}}$ é trivial. O resultado segue do Teorema 7.5. ■

Desta proposição, podemos extrair um resultado particular para o acaso em que o domínio da aplicação considerada é o toro $\mathbb{T}$.

Corolário 7.12. *Uma aplicação conveniente $f : \mathbb{T} \rightarrow M$ do toro em uma superfície fechada é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#}$ é não injetivo.*

Prova: Se $f_{\#}$ é injetivo, então é claro que $f_{\#}\pi_1(\mathbb{T})$ não é cíclico e, pela Proposição 7.11, f não é livre de raízes. Agora, note que $f_{\#_2} : \pi_2(\mathbb{T}) \rightarrow \pi_2(M)$ é trivial e suponha que $f_{\#}$ seja não injetivo. Então, como $\pi_1(\mathbb{T}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, temos que $f_{\#}\pi_1(\mathbb{T}) = f_{\#}^{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ é cíclico. Pela proposição anterior, f é livre de raízes. ■

Proposição 7.13. *Seja K um 2-complexo esférico e seja $\mathcal{T}_1$ o subgrupo de torção de $H_1(K)$. Se $\text{Hom}(\mathcal{T}_1; \mathbb{Z}_2) = 0$ então toda aplicação conveniente de K em $\mathbb{RP}^2$ é livre de raízes.*

Prova: Primeiro, lembramos que um 2-complexo K (finito e conexo) é esférico se, e somente se, $\pi_2(K) = 0$ (veja [1] para detalhes). Assim, para qualquer aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$, o homomorfismo $f_{\#_2}$ é trivial. Agora, seja $\rho : \pi_1(K) \rightarrow H_1(K)$ o homomorfismo de Hurewicz (o homomorfismo abelianização). Como $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ é um grupo abeliano, existe um único homomorfismo $f_{\otimes} : H_1(K) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ tal que $f_{\otimes} \circ \rho = f_{\#}$. Por hipótese, $f_{\otimes}^{\mathcal{T}_1}$ é trivial. Além disso, é claro que a imagem de $f_{\otimes}^{\mathcal{F}_1}$ é um grupo cíclico, onde $\mathcal{F}_1$ é o subgrupo abeliano livre de $H_1(K)$ tal que $H_1(K) \approx \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{T}_1$. Pelo Lema 7.10, existe um homomorfismo $\phi' : H_1(K) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ tal que $l_{\#} \circ \phi' = f_{\otimes}$. Defina $\phi : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ pela composição $\phi = \phi' \circ \rho$. Então ϕ é um levantamento de $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$. Pelo Teorema 7.5, f é livre de raízes. ■

7.3 Mutações de homomorfismo e existência de levantamentos

Nesta seção, vamos introduzir um novo conceito chamado *mutação de homomorfismo*. Apresentamos sua definição e alguns lemas técnicos. Utilizaremos a relação entre a existência de $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutações de um dado homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ e a existência de levantamentos de um homomorfismo $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$, através de um homomorfismo $\theta : G \rightarrow \Xi$ verificando a comutatividade $\alpha \circ \Omega = \theta \circ \tau$, onde $\Omega : F(\mathbf{x}) \rightarrow \Pi$ é o homomorfismo quociente dado pela apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$. Na próxima seção, utilizaremos esta relação para estudar o problema de raízes.

Seja $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ uma apresentação com alfabeto de n letras $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e conjunto de m relatores $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$. Seja Π o grupo apresentado por $\mathcal{P}$, ou seja, $\Pi = F(\mathbf{x})/N(\mathbf{r})$, e seja $\Omega : F(\mathbf{x}) \rightarrow \Pi$ o homomorfismo quociente óbvio. Seja $\theta : G \rightarrow \Xi$ um homomorfismo de grupos com núcleo $\ker(\theta)$.

Definição 7.14. Dado um homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, por uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação de τ entendemos um homomorfismo $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $w \in F(\mathbf{x})$ existe $\mathcal{M}(w) \in \ker(\theta)$ tal que $\mathcal{M}\tau(w) = \mathcal{M}(w)\tau(w)$;
2. $\mathcal{M}\tau(r_i) = \mathbf{e}_G$, o elemento neutro de G , para todo relator $r_i \in \mathbf{r}$.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightleftharpoons[\mathcal{M}\tau]{\tau} & G \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Pi & & \Xi \end{array}$$

Diremos que um homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ é $(\mathcal{P}, \theta)$ -auto-mutável se ele é uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação de si mesmo. Segue-se diretamente da definição que τ é $(\mathcal{P}, \theta)$ -auto-mutável se, e somente se, $\tau(r_i) = \mathbf{e}_G$ para todo $1 \leq i \leq m$.

O homomorfismo trivial $\epsilon : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, que associa a cada $w \in F(\mathbf{x})$ o elemento neutro ϵ_G de G , uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao de um dado homomorfismo $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ se, e somente se, $\text{Im}(\tau) \subset \ker(\theta)$. Por outro lado, qualquer homomorfismo $h : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ com $h(r_i) = \epsilon_G$, para todo $1 \leq i \leq m$, uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao do homomorfismo trivial $\epsilon : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$. Alis, o homomorfismo trivial sempre $(\mathcal{P}, \theta)$ -auto-mutvel, independentemente de $\mathcal{P}$ e de θ .

Pode ocorrer de um dado homomorfismo $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ no admitir uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao. No entanto, a prova de tal fato pode no ser fcil. Por isso, deixaremos para apresentar um tal exemplo quando j tivermos provado uma interessante equivalncia para a existncia de $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao. O que fazemos por ora apresentar um exemplo em que o dado homomorfismo $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ admite, para cada inteiro $p \in \mathbb{Z}$, uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao $\mathcal{M}_p\tau$ diferente.

Exemplo 7.15. Seja $\mathcal{P} = \langle x, y \mid x^4y^2 \rangle$ uma apresentao de grupo e seja $\tau : F(x, y) \rightarrow F(a)$ um homomorfismo entre grupos livres dado por $\tau(x) = a$ e $\tau(y) = a^{-1}$. Seja H qualquer grupo e seja $\epsilon : F(a) \rightarrow H$ o homomorfismo trivial, isto , $\epsilon(a) = \epsilon_H$, onde ϵ_H o elemento identidade de H . Ento $\ker(\epsilon) = F(a)$. Para cada inteiro $p \in \mathbb{Z}$, defina $\mathcal{M}_p : F(x, y) \rightarrow F(a)$ como sendo o nico homomorfismo de $F(x, y)$ em $F(a)$ satisfazendo $\mathcal{M}_p(x) = a^p$ e $\mathcal{M}_p(y) = a^{-2p-1}$. Seja $\mathcal{M}_p\tau : F(x, y) \rightarrow F(a)$ o homomorfismo $\mathcal{M}_p\tau(w) = \mathcal{M}_p(w)\tau(w)$, para todo $w \in F(x, y)$. Ento $\mathcal{M}_p\tau$ o nico homomorfismo de $F(x, y)$ em $F(a)$ satisfazendo $\mathcal{M}_p\tau(x) = a^{p+1}$ e $\mathcal{M}_p\tau(y) = a^{-2p-2}$. Temos, $\mathcal{M}_p\tau(x^4y^2) = \mathcal{M}_p\tau(x)^4\mathcal{M}_p\tau(y)^2 = a^{4(p+1)}a^{2(-2p-2)} = a^0 = \mathbb{1}$. Portanto $\mathcal{M}_p\tau$ uma $(\mathcal{P}, \epsilon)$ -mutao de τ . $\square$

Os dois lemas abaixo dispensam qualquer demonstrao.

Lema 7.16. *Seja $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao de $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$. Ento a aplicao $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ que associa a cada $w \in F(\mathbf{x})$ o elemento $\mathcal{M}(w) \in \ker(\theta)$ satisfaz:*

1. $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \epsilon_G$, o elemento neutro de G ;
2. $\mathcal{M}(r_i) = \tau(r_i)^{-1}$ para todo ndice $1 \leq i \leq m$.

Lema 7.17. *Seja $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ um homomorfismo e seja $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ uma aplicao que associa a cada $w \in F(\mathbf{x})$ o elemento $\mathcal{M}(w) \in \ker(\theta)$ verificando as seguintes condies:*

1. $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \epsilon_G$, o elemento neutro de G ;
2. $\mathcal{M}(r_i) = \tau(r_i)^{-1}$ para todo ndice $1 \leq i \leq m$.
3. A associao $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ dada por $\mathcal{M}\tau(w) = \mathcal{M}(w)\tau(w)$ um homomorfismo.

Ento $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao de τ .

Estes dois lemas mostram que para se construir uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao de um dado homomorfismo $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, necessrio e suficiente definir uma associao $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, com $\mathcal{M}(w) \in \ker(\theta)$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$, satisfazendo os trs itens do lema anterior. Uma tal associao, quando existe, ser chamada *funo $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadora* de τ (para $\mathcal{M}\tau$).

Teorema 7.18. *Sejam $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ uma apresentação para o grupo Π e seja $\theta : G \rightarrow \Xi$ um homomorfismo de grupos. Suponha que $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ e $\alpha : \Pi \rightarrow \Xi$ sejam dois homomorfismos de grupos fazendo comutar o diagrama abaixo, onde a seta vertical esquerda é o homomorfismo quociente óbvio.*

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\tau} & G \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Pi & \xrightarrow{\alpha} & \Xi \end{array}$$

Então, o homomorfismo α admite um levantamento $\phi : \Pi \rightarrow G$ ao longo de θ se, e somente se, τ admite uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação. Além disso, os levantamentos de α ao longo de θ estão em correspondência um-a-um com as $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutações de τ .

Prova: Observa-se, a princípio, que do fato de ser Ω um epimorfismo e o diagrama acima ser comutativo, segue-se que a imagem de α está contida na imagem de θ e, portanto, faz sentido investigar a existência de levantamentos para α ao longo de θ .

Suponha que exista um homomorfismo $\phi : \Pi \rightarrow G$, levantamento para τ ao longo de θ . Então, no diagrama abaixo, são comutativos o quadrado e o triângulo inferior.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\tau} & G \\ \Omega \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow \theta \\ \Pi & \xrightarrow{\alpha} & \Xi \end{array}$$

Agora, quanto ao triângulo superior, observa-se que, para cada $w \in F(\mathbf{x})$, verifica-se

$$(\theta \circ \phi \circ \Omega)(w) = (\theta \circ \phi)(\Omega(w)) = (\alpha \circ \Omega)(w) = (\theta \circ \tau)(w).$$

Logo, $\theta(\phi \circ \Omega(w)) = \theta(\tau(w))$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$. Isto mostra que os homomorfismos τ e $(\phi \circ \Omega)$ diferem apenas por elementos do núcleo $\ker(\theta)$, ou seja, para cada $w \in F(\mathbf{x})$, o elemento $(\phi \circ \Omega)(w)\tau(w)^{-1} \in \ker(\theta)$. Defina a associação $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ por $\mathcal{M}(w) = (\phi \circ \Omega)(w)\tau(w)^{-1}$. Então, para cada $w \in F(\mathbf{x})$ tem-se $\mathcal{M}(w) \in \ker(\theta)$ e, além disso,

1. $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$;
2. $\mathcal{M}(r_i) = (\phi \circ \Omega)(r_i)\tau(r_i)^{-1} = \tau(r_i)^{-1}$ para todo relator $r_i \in \mathbf{r}$, pois $\Omega(r_i) = \mathbf{e}_\Pi$.
3. $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ dado por $\mathcal{M}\tau(w) = \mathcal{M}(w)\tau(w)$ é um homomorfismo, pois desta definição resulta $\mathcal{M}\tau(w) = (\phi \circ \Omega)(w)$.

Segue-se, então, do Lema 7.17, que o homomorfismo $\mathcal{M}\tau$ é uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação de τ .

Para provar a recíproca, suponha que seja $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, com $\mathcal{M}\tau(w) = \mathcal{M}(w)\tau(w)$, uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação de τ . Então, $\mathcal{M}\tau(r_i) = \mathbf{e}_G$ para toda palavra relatora $r_i \in \mathbf{r}$. Logo, $\mathcal{M}\tau(w) = \mathbf{e}_G$ para todo $w \in N(\mathbf{r})$, onde $N(\mathbf{r})$ é o subgrupo normal de $F(\mathbf{x})$ gerado pelo conjunto de relatores $\mathbf{r}$. Agora, como $\ker(\Omega) = N(\mathbf{r})$, isto prova que $\ker(\Omega) \subset \ker(\mathcal{M}\tau)$.

Logo, existe um (e apenas um) homomorfismo $\phi : \Pi \rightarrow G$ verificando $\phi \circ \Omega = \mathcal{M}\tau$. Tal homomorfismo definido da seguinte forma: Para cada $\bar{w} \in \Pi$, escolha $w \in F(\mathbf{x})$ tal que $\bar{w} = \Omega(w)$; ento defina $\phi(\bar{w}) = \mathcal{M}\tau(w)$. Segue que, para cada $\bar{w} = \Omega(w) \in \Pi$, tem-se

$$(\theta \circ \phi)(\bar{w}) = (\theta \circ \mathcal{M}\tau)(w) = \theta(\mathcal{M}(w)\tau(w)) = \theta(\mathcal{M}(w))\theta(\tau(w)) = (\theta \circ \tau)(w) = (\alpha \circ \Omega)(w) = \alpha(\bar{w}).$$

Portanto, o homomorfismo $\phi : \Pi \rightarrow G$ um levantamento para α ao longo de θ .

A correspondncia um-a-um entre os levantamentos de α ao longo de θ e as $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutaes de τ ficou evidente nos argumentos e construes desta demonstrao. ■

Abaixo, um exemplo em que um dado homomorfismo τ no admite uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao.

Exemplo 7.19. Seja $\mathcal{P} = \langle x, y \mid [x, y] \rangle$. Seja $\tau : F(x, y) \rightarrow F(a, b)$ o isomorfismo definido por $\tau(x) = a$ e $\tau(y) = b$. Seja $\theta : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ o homomorfismo abelianizao. Ento τ no admite uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao. De fato, se escrevemos Π para denotar o grupo apresentado por $\mathcal{P}$, ento existe um nico isomorfismo $\alpha : \Pi \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tornado comutativo o diagrama abaixo, onde $\Omega : F(x, y) \rightarrow \Pi$ o homomorfismo quociente bvio.

$$\begin{array}{ccc} F(x, y) & \xrightarrow{\tau} & F(a, b) \\ \Omega \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Pi & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

Pelo Lema 7.10, o homomorfismo α no admite levantamento ao longo de θ . Portanto, pelo Teorema 7.18, τ no admite $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao. □

7.4 Mutao para a aniquilao de razes

Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicao celular conveniente, onde $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentao $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ e M uma superfcie fechada arbitrria. Seja M^1 o 1-esqueleto de M . Como f celular, sua restrio a $K_{\mathcal{P}}^1$ d origem a uma aplicao, tambm celular, $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow M^1$ verificando a comutatividade do seguinte diagrama esquerda, onde as setas verticais so as inclues naturais:

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{P}}^1 & \xrightarrow{f^1} & M^1 \\ \downarrow & & \downarrow i \\ K_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{f} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(\mathbf{x}) & \xrightarrow{f_{\#}^1} & \pi_1(M^1) \\ \Omega \downarrow & & \downarrow i_{\#} \\ \pi_1(K_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(M) \end{array}$$

O grupo fundamental $\pi_1(K_{\mathcal{P}})$ aquele apresentado por $\mathcal{P}$. O diagrama da direita acima aquele induzido em grupos fundamentais pelo diagrama da esquerda. Considerando-se a devida identificao de $F(\mathbf{x})$ com o grupo fundamental $\pi_1(K_{\mathcal{P}})$, temos:

Teorema 7.20. *Uma aplicação celular e conveniente $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#2} : \pi_2(K_{\mathcal{P}}) \rightarrow \pi_2(M)$ é trivial e $f_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ admite uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação. Mais precisamente, temos:*

1. *Se $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ é uma aplicação celular não sobrejetora e homotópica a f , então o homomorfismo $\varphi_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ é uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação de $f_{\#}^1$.*
2. *Se $\mathcal{M}f_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ é uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação de $f_{\#}^1$ e $f_{\#2}$ é trivial, então existe uma aplicação celular não sobrejetora $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$, homotópica a f , com $\varphi_{\#}^1 = \mathcal{M}f_{\#}^1$.*

Prova: Que $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, $f_{\#2}$ é trivial e o homomorfismo $f_{\#}^1$ admite uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação segue-se diretamente dos Teoremas 7.5 e 7.18. Para concluir os itens 1 e 2, incluímos alguns detalhes.

1. Suponha que seja $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicação celular não sobrejetora e homotópica a f . Seja $a \in M$ um ponto que não pertence a imagem de φ e pertence ao interior da 2-célula de M , (tal ponto certamente existe, já que, como $K_{\mathcal{P}}$ é compacto e M é Hausdorff, a imagem de φ é um subconjunto fechado próprio de M). Então, existe uma retração por deformação forte $r : M \setminus \{a\} \rightarrow M^1$. Como $a \notin \text{im}(\varphi)$ e $M \setminus \{a\}$ é um subconjunto aberto de M , a aplicação $\bar{\varphi} : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M \setminus \{a\}$, obtida de φ pela restrição de seu contra-domínio, é ainda uma aplicação contínua. Seja $\psi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M^1$ a aplicação celular definida pela composição $\psi = r \circ \bar{\varphi}$.

No diagram da esquerda abaixo, onde j e as setas verticais são as inclusões naturais, o quadrado e o pequeno triângulo inferior são comutativos. Além disso, r é uma equivalência de homotopia induzindo o isomorfismo identidade em grupos fundamentais.

$$\begin{array}{ccc}
 K_{\mathcal{P}}^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & M^1 \\
 \downarrow & \nearrow r & \downarrow l \\
 & M \setminus \{a\} & \\
 K_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\varphi} & M \\
 & \nwarrow \bar{\varphi} & \nearrow j
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) & \xrightarrow{\varphi_{\#}^1} & \pi_1(M^1) \\
 \downarrow \Omega & \nearrow \psi_{\#} & \downarrow l_{\#} \\
 \pi_1(K_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\varphi_{\#} = f_{\#}} & \pi_1(M)
 \end{array}$$

Segue-se que $\varphi_{\#} = j_{\#} \circ \bar{\varphi}_{\#} = l_{\#} \circ r_{\#} \circ \bar{\varphi}_{\#} = l_{\#} \circ \psi_{\#}$. Logo, $\psi_{\#}$ é um levantamento para $\varphi_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$. Por outro lado, o grande triângulo superior do diagram também é comutativo. Sendo assim, tem-se $\varphi_{\#}^1 = \psi_{\#} \circ \Omega$. Portanto, é totalmente comutativo o diagrama da direita acima. Pela prova do Teorema 7.18, o homomorfismo $\varphi_{\#}^1$ é uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação de $f_{\#}^1$.

Note-se que a aplicação $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutadora $\mathcal{M} : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ que torna $\mathcal{M}f_{\#}^1 = \varphi_{\#}^1$ é caprichosamente dada por

$$\mathcal{M}(w) = (\psi_{\#} \circ \Omega)(w) f_{\#}^1(w)^{-1} = \varphi_{\#}^1(w) f_{\#}^1(w)^{-1}.$$

2. Suponha que o homomorfismo $f_{\#2}$ seja trivial e que seja $\mathcal{M}f_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação de $f_{\#}^1$. Pelo teorema 7.20, existe um homomorfismo $\phi : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$

consistindo de um levantamento para $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$, ou seja, $f_{\#} = l_{\#} \circ \phi$. Alm disso, vale a identidade $\mathcal{M}f_{\#}^1 = \phi \circ \Omega$. (Observe o diagrama a seguir).

Seja $\varphi_1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow M^1$ uma aplicao celular tal que $(\varphi_1)_{\#} = \mathcal{M}f_{\#}^1$. (Tal aplicao certamente existe, sendo aquela que aplica cada 1-clula $e_{x_j}^1 \in K_{\mathcal{P}}^1 = \vee_{j=1}^n S_{x_j}^1$ em M^1 exatamente como $\mathcal{M}f_{\#}^1$ aplica a letra x_j em $\pi_1(M^1)$, este ltimo um grupo livre, claro).

Como $\mathcal{M}f_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para cada palavra relatora $r_i \in \mathbf{r}$, a aplicao celular φ_1 se estende a uma aplicao $\varphi_2 : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M^1$. Seja $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ a aplicao celular definida pela composio $\varphi = l \circ \varphi_2$. claro que φ no sobrejetora (na verdade, $\text{im}(\varphi) \subset M^1$) e, alm disso, $\varphi^1 = \varphi_1$. Portanto, $\varphi_{\#}^1 = \mathcal{M}f_{\#}^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\mathcal{M}f_{\#}^1} & \\
 \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) & \xrightarrow{f_{\#}^1} & \pi_1(M^1) \\
 \Omega \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow l_{\#} \\
 \pi_1(K_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(M) \\
 & \xleftarrow{\varphi} &
 \end{array}$$

Resta provar que φ homotpica a f . Agora, como $f_{\#2}$ e $\varphi_{\#2}$ so ambos homomorfismos triviais (o primeiro por hiptese e o segundo pela construo de φ), basta provar, pelo Teorema 7.1, que $f_{\#} = \varphi_{\#}$. Mas isto segue da seguinte seqncia de igualdades, onde utilizamos a definio de ϕ segundo o Teorema 7.18: Para cada $\bar{w} = \Omega(w) \in \pi_1(K_{\mathcal{P}})$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\#}(\bar{w}) &= (l \circ \varphi_2)_{\#}(\bar{w}) = (l_{\#} \circ (\varphi_2)_{\#} \circ \Omega)(w) = (l_{\#} \circ (\varphi_1)_{\#})(w) \\
 &= (l_{\#} \circ \mathcal{M}f_{\#}^1)(w) = (l_{\#} \circ \phi \circ \Omega)(w) = (l_{\#} \circ \phi)(\bar{w}) = f_{\#}(\bar{w}).
 \end{aligned}$$

Isto conclui, finalmente, a prova do Teorema. ■

Observao 7.21. Apesar do resultado total enunciado no Teorema 7.20 no se verificar, em geral, para aplicaes no convenientes, a parte “somente se” sempre se verifica (devido a prova do Teorema 7.5), ou seja, se $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicao celular arbitrria livre de razes, ento o homomorfismo $f_{\#}^1$ admite uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutao. Tambm, o item 1 verdadeiro mesmo que f no seja conveniente.

Teorema 7.22. *Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentao $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$. Uma aplicao conveniente $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ livre de razes se, e somente se, o homomorfismo $f_{\#2} : \pi_2(K_{\mathcal{P}}) \rightarrow \pi_2(M)$ trivial e existe uma aplicao celular $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$, homotpica a f , tal que $\varphi_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para todo relator $r_i \in \mathbf{r}$.*

Prova: Suponha que $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ seja livre de razes. Ento j sabemos que $f_{\#2}$ o homomorfismo trivial e existe uma aplicao celular $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$, homotpica a f , tal que $\text{im}(\varphi) \subset M^1$. Seja $f_{\text{cel}} : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aproximao celular de f . Pelo item 1 do Teorema 7.20, $\varphi_{\#}^1$ uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutao de $(f_{\text{cel}}^1)_{\#}$. Portanto, $\varphi_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para cada $r_i \in \mathbf{r}$.

Agora, suponha que $f_{\#2}$ seja o homomorfismo trivial e que seja $\varphi : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicação celular homotópica a f e tal que $\varphi_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para todo $r_i \in \mathbf{r}$. Então, desta última hipótese, segue-se que a aplicação $\varphi^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow M^1$ se estende a uma aplicação $\bar{\varphi} : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M^1$. Assim, é comutativo o triângulo superior dos dois diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{P}}^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & M^1 \\ \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \downarrow l \\ K_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) & \xrightarrow{\varphi_{\#}^1} & \pi_1(M^1) \\ \Omega \downarrow & \nearrow \bar{\varphi}_{\#} & \downarrow l_{\#} \\ \pi_1(K_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\varphi_{\#}=f_{\#}} & \pi_1(M) \end{array}$$

Agora, se mostramos que o triângulo inferior do diagrama da direita acima também é comutativo, então $\bar{\varphi}_{\#}$ consistirá de um levantamento para $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$ e a prova estará concluída, devido ao Teorema 7.5. Isto segue facilmente: Para cada $\bar{w} = \Omega(w) \in \pi_1(K_{\mathcal{P}})$, temos

$$(l_{\#} \circ \bar{\varphi}_{\#})(\bar{w}) = (l_{\#} \circ \bar{\varphi}_{\#} \circ \Omega)(w) = (l_{\#} \circ \varphi_{\#}^1)(w) = (\varphi_{\#} \circ \Omega)(w) = \varphi_{\#}(\bar{w}) = f_{\#}(\bar{w}).$$

A prova do teorema está devidamente concluída. ■

7.5 Fórmulas sobre funções $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadoras.

Esta é uma seção puramente técnica. As fórmulas provadas aqui serão utilizadas nas seções seguintes.

Seja $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$, $\mathcal{M}\tau(w) = \mathcal{M}(w)\tau(w)$, uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutação de um dado homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$. Vamos provar várias fórmulas envolvendo a função $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadora $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$.

Fórmula 7.23. $\mathcal{M}(w_1w_2) = \mathcal{M}(w_1)\tau(w_1)\mathcal{M}(w_2)\tau(w_1)^{-1}$ para quaisquer $w_1, w_2 \in F(\mathbf{x})$.

Prova: Como τ e $\mathcal{M}\tau$ são homomorfismo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(w_1w_2)\tau(w_1)\tau(w_2) &= \mathcal{M}(w_1w_2)\tau(w_1w_2) = \mathcal{M}\tau(w_1w_2) \\ &= \mathcal{M}\tau(w_1)\mathcal{M}\tau(w_2) = \mathcal{M}(w_1)\tau(w_1)\mathcal{M}(w_2)\tau(w_2). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados desta igualdade, pela direita, pelo elemento $\tau(w_2)^{-1}\tau(w_1)^{-1}$ do grupo G , obtemos a fórmula desejada. ■

Fórmula 7.24. $\mathcal{M}(w^{p+1}) = [\mathcal{M}(w)\tau(w)]^p\mathcal{M}(w)\tau(w)^{-p}$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$ e $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$.

Prova: A prova é feita por indução sobre p . Para $p = 0$, a veracidade da fórmula é trivial. Para $p = 1$, o resultado se verifica pela Fórmula 7.23, pois pela igualdade por ela expressa, tem-se

$$\mathcal{M}(w^2) = \mathcal{M}(ww) = [\mathcal{M}(w)\tau(w)]\mathcal{M}(w)\tau(w)^{-1}.$$

Suponha, por hipótese de indução, que a fórmula se verifique para a potência p , ou seja, que valha a igualdade

$$\mathcal{M}(w^p) = [\mathcal{M}(w)\tau(w)]^{p-1}\mathcal{M}(w)\tau(w)^{-(p-1)}.$$

Então, utilizando desta hipótese e da Fórmula 7.23, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(w^{p+1}) &= \mathcal{M}(ww^p) = \mathcal{M}(w)\tau(w)\mathcal{M}(w^p)\tau(w)^{-1} \\ &= \mathcal{M}(w)\tau(w)[\mathcal{M}(w)\tau(w)]^{p-1}\mathcal{M}(w)\tau(w)^{-(p-1)}\tau(w)^{-1} \\ &= [\mathcal{M}(w)\tau(w)]^p\mathcal{M}(w)\tau(w)^{-p}.\end{aligned}$$

Utilizando-se destas duas primeiras fórmulas, é fácil verificar que:

Fórmula 7.25. *Dados $w_1, \dots, w_s \in F(\mathbf{x})$ e inteiros não negativos $p_1, \dots, p_s$, temos*

$$\mathcal{M}(w_1^{p_1} \dots w_s^{p_s}) = \left(\prod_{i=1}^{s-1} [\mathcal{M}(w_i)\tau(w_i)]^{p_i} \right) [\mathcal{M}(w_s)\tau(w_s)]^{p_s-1} \mathcal{M}(w_s)\tau(w_1^{p_1} \dots w_{s-1}^{p_{s-1}} w_s^{p_s-1})^{-1}.$$

Os detalhes da comprovação desta fórmula são omitidos.

Para se obter fórmulas semelhantes às anteriores para casos em que as potências das palavras de $F(\mathbf{x})$ são inteiros negativos, basta se conhecer $\mathcal{M}(w^{-1})$ em função de $\mathcal{M}(w)$ e $\tau(w)$. Para tanto, observe-se que

$$\epsilon_G = \mathcal{M}(1) = \mathcal{M}(ww^{-1}) = \mathcal{M}(w)\tau(w)\mathcal{M}(w^{-1})\tau(w)^{-1}.$$

Disto resulta:

Fórmula 7.26. $\mathcal{M}(w^{-1}) = \tau(w)^{-1}\mathcal{M}(w)^{-1}\tau(w)$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$.

E utilizando-se desta e da Fórmula 7.24, obtemos:

Fórmula 7.27. $\mathcal{M}(w^{-p}) = [\mathcal{M}(w)\tau(w)]^{-p}\tau(w)^p$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$ e $p \geq 0$ inteiro.

Prova: Também esta prova é realizada por indução sobre a potência p . Para $p = 0$ o resultado é trivial e para $p = 1$ o resultado segue da fórmula anterior. Suponha, por hipótese de indução, que a fórmula valha para a potência $-(p-1)$, ou seja, que $\mathcal{M}(w^{-(p-1)}) = [\mathcal{M}(w)\tau(w)]^{-(p-1)}\tau(w)^{p-1}$. Então, pelas Fórmulas 7.24 e 7.26, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(w^{-p}) &= \mathcal{M}((w^{-1})^p) = [\mathcal{M}(w^{-1})\tau(w^{-1})]^{p-1}\mathcal{M}(w^{-1})\tau(w^{-1})^{-(p-1)} \\ &= [\tau(w)^{-1}\mathcal{M}(w)^{-1}\tau(w)\tau(w)^{-1}]^{p-1}\tau(w)^{-1}\mathcal{M}(w)^{-1}\tau(w)\mathcal{M}(w)^{p-1} \\ &= [\tau(w)\mathcal{M}(w)]^{-p}\tau(w)^p.\end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ o alfabeto sobre o qual se considera o grupo livre $F(\mathbf{x})$, estas fórmulas que acabamos de demonstrar mostram o seguinte:

Proposição 7.28. *A função $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadora $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ é completamente determinada pelos seus “valores” assumidos nas letras geradoras $x_1, \dots, x_n$ do alfabeto $\mathbf{x}$ da apresentação $\mathcal{P}$, ou seja, pelos “valores” $\mathcal{M}(x_1), \dots, \mathcal{M}(x_n)$.*

7.6 Mutao simblica

Seja $\{\mathfrak{X}\}_n = \{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n\}$ uma lista de n smbolos abstratos e seja G um grupo no trivial com elemento identidade $\mathfrak{e}_G$. Seja $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$ o conjunto de todas as palavras (reduzidas e de comprimento finito) da forma

$$g_0 \mathfrak{X}_{\lambda_1}^{\delta_1} g_1 \mathfrak{X}_{\lambda_2}^{\delta_2} g_2 \cdots \mathfrak{X}_{\lambda_k}^{\delta_k} g_k,$$

onde cada g_s , para $0 \leq s \leq k$, um elemento do grupo G , cada δ_s um nmero inteiro e cada $\lambda_s \in \{1, \dots, n\}$. Exigimos que cada palavra de $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$ contenha pelo menos um smbolo da lista $\{\mathfrak{X}\}_n$ e um elemento do grupo G , este ltimo podendo ser o elemento identidade. No entanto, o elemento identidade $\mathfrak{e}_G$ ser omitido quando soletramos a palavras. Assim, cada smbolo $\mathfrak{X}_j$, ele prprio, um elemento de $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$. Adicionalmente, tambm consideramos como um elemento de $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$ a “palavra vazia”, a qual denotamos por $\mathbb{I}$. Tal elemento pode ser identificado com $\mathfrak{e}_G$, j que este ltimo pode sempre ser omitido das palavras. Logo, tambm $\mathfrak{e}_G$ pode ser visto como um elemento de $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$. Os outros elementos de G no so por si s elementos de $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$.

Sobre o conjunto $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$, definimos uma multiplicao natural atravs da justaposio de palavras seguida de possveis redues, ou seja, dados $\Lambda = g_0 \mathfrak{X}_{\lambda_1}^{\delta_1} g_1 \mathfrak{X}_{\lambda_2}^{\delta_2} g_2 \cdots \mathfrak{X}_{\lambda_k}^{\delta_k} g_k$ e $\Gamma = \tilde{g}_0 \mathfrak{X}_{\gamma_1}^{\varepsilon_1} \tilde{g}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\gamma_t}^{\varepsilon_t} \tilde{g}_t$ dois elementos arbitrrios em $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$, definimos o produto $\Lambda\Gamma$ como sendo a palavra que se obtm pela reduo da palavra justaposta

$$g_0 \mathfrak{X}_{\lambda_1}^{\delta_1} g_1 \mathfrak{X}_{\lambda_2}^{\delta_2} g_2 \cdots \mathfrak{X}_{\lambda_k}^{\delta_k} (g_k \tilde{g}_0) \mathfrak{X}_{\gamma_1}^{\varepsilon_1} \tilde{g}_1 \cdots \mathfrak{X}_{\gamma_t}^{\varepsilon_t} \tilde{g}_t.$$

O semigrupo $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$, equipado com este produto um grupo (no abeliano) com elemento neutro $\mathbb{I}$ e operao inverso bvvia dada por,

$$[g_0 \mathfrak{X}_{\lambda_1}^{\delta_1} g_1 \mathfrak{X}_{\lambda_2}^{\delta_2} g_2 \cdots \mathfrak{X}_{\lambda_k}^{\delta_k} g_k]^{-1} = g_k^{-1} \mathfrak{X}_{\lambda_k}^{-\delta_k} \cdots g_2^{-1} \mathfrak{X}_{\lambda_2}^{-\delta_2} g_1^{-1} \mathfrak{X}_{\lambda_1}^{-\delta_1} g_0^{-1}.$$

Definio 7.29. Seja $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos, onde $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ um alfabeto de n letras. Uma *mutao simblica* de τ com respeito lista $\{\mathfrak{X}\}_n$ uma associao (no necessariamente um homomorfismo)

$$\mathfrak{X} : F(\mathbf{x}) \rightarrow W(G, \{\mathfrak{X}\}_n),$$

satisfazendo as seguintes condies:

1. $\mathfrak{X}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$;
2. $\mathfrak{X}(x_j) = \mathfrak{X}_j$ para todo ndice $1 \leq j \leq n$;
3. $\mathfrak{X}(w_1 w_2) = \mathfrak{X}(w_1) \tau(w_1) \mathfrak{X}(w_2) \tau(w_1)^{-1}$ quaisquer que sejam $w_1, w_2 \in F(\mathbf{x})$.

Observe-se que estas trs condies definem completamente a associao $\mathfrak{X}$ exclusivamente em termos do homomorfismo τ , uma vez que toda palavra $w \in F(\mathbf{x})$ da forma

$$w = \prod_{k=1}^s (x_1^{p_{1k}} x_2^{p_{2k}} \cdots x_n^{p_{nk}}).$$

Que a imagem da associao $\mathfrak{X}$ est, de fato, no grupo $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$, segue da Proposio 7.31 que apresentamos logo a seguir.

Lema 7.30. *Seja $\mathcal{M}\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ uma $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao de um dado homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$. A funo $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutadora $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ pode ser vista como uma mutao simblica $F(\mathbf{x}) \rightarrow W(G, \{\mathcal{M}\}_n)$ de τ com respeito a lista $\{\mathcal{M}\}_n = \{\mathcal{M}(x_1), \dots, \mathcal{M}(x_n)\}$.*

Prova: Segue diretamente das definies de mutao simblica e de $(\mathcal{P}, \theta)$ -mutao e da Frmula 4.1. ■

Disto e de toda a Seo 7.4 se segue claramente o seguinte:

Proposio 7.31. *Uma mutao simblica $\mathfrak{X} : F(\mathbf{x}) \rightarrow W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$ satisfaz todas as Frmulas da seo anterior, consideradas as devidas identificaes conforme o lema acima. Em resumo, para $p > 0$ inteiro,*

$$\mathfrak{X}(w^{-p}) = [\mathfrak{X}(w)\tau(w)]^{-p}\tau(w)^p \text{ para todo } w \in F(\mathbf{x});$$

e para $w_1, \dots, w_s \in F(\mathbf{x})$ e inteiros no negativos $p_1, \dots, p_s$, todos arbitrrios e no necessariamente distintos,

$$\mathfrak{X}(w_1^{p_1} \cdots w_s^{p_s}) = \left(\prod_{i=1}^{s-1} [\mathfrak{X}(w_i)\tau(w_i)]^{p_i} \right) [\mathfrak{X}(w_s)\tau(w_s)]^{p_s-1} \mathfrak{X}(w_s)\tau(w_1^{p_1} \cdots w_{s-1}^{p_{s-1}})^{-1}.$$

Em particular, $\mathfrak{X}(x_j^{-1}) = \tau(x_j)^{-1}\mathfrak{X}_j^{-1}\tau(x_j)$, donde $\mathfrak{X}_j^{-1} = \tau(x_j)\mathfrak{X}(x_j^{-1})\tau(x_j)^{-1}$.

Estas expresses mostram que a estrutura do grupo $W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$, que existe independentemente do homomorfismo τ , “compatvel” com este homomorfismo, no seguinte sentido:

$$\mathbb{I} = \mathfrak{X}_j\mathfrak{X}_j^{-1} = \mathfrak{X}(x_j)\tau(x_j)\mathfrak{X}(x_j^{-1})\tau(x_j)^{-1} = \mathfrak{X}(x_jx_j^{-1}) = \mathfrak{X}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}.$$

As frmulas correspondentes s duas expressas acima para os casos em que as potncias $p, p_1, \dots, p_s$ so todas negativas ou variam entre positivas, negativas e nulas, podem ser obtidas facilmente destas utilizando-se da definio de mutao simblica.

No prximo resultado, $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentao $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, onde $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ o alfabeto e $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$ o conjunto de relatores. Consideramos a identificao natural $\pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) = F(\mathbf{x})$. Alm disso, $l_{\#} : \pi_1(M^1) \rightarrow \pi_1(M)$ denota o homomorfismo induzido em grupos fundamentais pela incluso natural. (Tudo como sempre!).

Teorema 7.32. *Sejam $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicação celular e $\mathfrak{X} : F(\mathbf{x}) \rightarrow W(\pi_1(M^1), \{\mathfrak{X}\}_n)$ uma mutação simbólica do homomorfismo óbvio $f_{\#}^1 : F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(M^1)$. Se f é livre de raízes, então o homomorfismo $f_{\#2} : \pi_2(K_{\mathcal{P}}) \rightarrow \pi_2(M)$ é trivial e existe uma associação $\mathfrak{A} : \{\mathfrak{X}\}_n \rightarrow \pi_1(M^1)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) \in \ker(l_{\#})$ para todo índice $1 \leq j \leq n$;
2. $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(r_i))f_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ (o elemento identidade de $\pi_1(M^1)$) para todo índice $1 \leq i \leq m$;

onde $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w))$ é a palavra obtida de $\mathfrak{X}(w)$ substituindo-se cada símbolo $\mathfrak{X}_j$ pela palavra $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j)$. A recíproca é verdadeira se f é uma aplicação conveniente.

Prova: Suponha que f seja livre de raízes. Então, pelo Teorema 7.20 e Observação 7.21, $f_{\#2}$ é o homomorfismo trivial e $f_{\#}^1$ admite uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação $\mathcal{M}f_{\#}^1 : F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(M^1)$, sendo $\mathcal{M}f_{\#}^1(w) = \mathcal{M}(w)f_{\#}^1(w)$. Defina a associação $\mathfrak{A} : \{\mathfrak{X}\}_n \rightarrow \pi_1(M^1)$ fazendo $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) = \mathcal{M}(x_j)$ para cada índice $1 \leq j \leq n$. Então, $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w))$ é a palavra obtida de $\mathfrak{X}(w) \in W(\pi_1(M^1), \{\mathfrak{X}\}_n)$ substituindo-se cada símbolo $\mathfrak{X}_j$ por $\mathcal{M}(x_j) \in \pi_1(M^1)$. Pelo Lema 7.30, isto implica que

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w)) = \mathcal{M}(w), \text{ para todo } w \in F(\mathbf{x}).$$

Em particular, segue-se da definição de função $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutadora que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w)) \in \ker(l_{\#})$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$ e, além disso, $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(r_i))f_{\#}^1(r_i) = \mathcal{M}(r_i)f_{\#}^1(r_i) = \mathcal{M}f_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para todo índice $1 \leq i \leq m$. Exatamente o que queríamos concluir.

Agora, suponha que f seja uma aplicação conveniente, que $f_{\#2}$ seja trivial e que exista uma associação $\mathfrak{A} : \{\mathfrak{X}\}_n \rightarrow \pi_1(M^1)$ satisfazendo as condições anunciadas.

Provemos primeiro que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w)) \in \ker(l_{\#})$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$. Para tanto, note-se que se w_1, w_2 são tais que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1))$ e $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_2))$ pertencem a $\ker(l_{\#})$, então $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1w_2))$ pertence a $\ker(l_{\#})$. De fato, se $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1))$ e $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_2))$ pertencem a $\ker(l_{\#})$, então

$$l_{\#}(\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1w_2))) = l_{\#}(\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1))\tau(w_1)\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_2))\tau(w_1)^{-1}) = l_{\#}(\tau(w_1)\tau(w_1)^{-1}) = 1_{\pi_1(M)},$$

onde $1_{\pi_1(M)}$ denota o elemento identidade de $\pi_1(M)$. Isto mostra que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1w_2)) \in \ker(l_{\#})$.

Agora, como para cada índice $1 \leq j \leq n$ tem-se $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(x_j)) = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) \in \ker(l_{\#})$, por hipótese, e cada palavra $w \in F(\mathbf{x})$ é da forma

$$w = \prod_{k=1}^s (x_1^{p_{1k}} x_2^{p_{2k}} \cdots x_n^{p_{nk}}),$$

segue-se por repetição dos argumentos anteriores que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w)) \in \ker(l_{\#})$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$.

Defina a função $\mathcal{M} : F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(M^1)$ que associa a cada $w \in F(\mathbf{x})$ o elemento $\mathcal{M}(w) = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w)) \in \pi_1(M^1)$. Então $\mathcal{M}(w) \in \ker(l_{\#})$ para todo $w \in F(\mathbf{x})$ e, além disso,

1. $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(\mathbb{1})) = \mathbb{1}$;
2. $\mathcal{M}(r_i) = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(r_i)) = f_{\#}^1(r_i)^{-1}$;

3. Defina $\mathcal{M}f_{\#}^1 : F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi_1(M^1)$ pela expressão $\mathcal{M}f_{\#}^1 = \mathcal{M}(w)f_{\#}^1(w)$. Então certamente $\mathcal{M}f_{\#}^1(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e, além disso, dados arbitrariamente $w_1, w_2 \in F(\mathbf{x})$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f_{\#}^1(w_1w_2) &= \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1w_2))f_{\#}^1(w_1w_2) = \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1)f_{\#}^1(w_1)\mathfrak{X}(w_2)f_{\#}^1(w_2)^{-1})f_{\#}^1(w_1w_2) \\ &= \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1))f_{\#}^1(w_1)\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_2))f_{\#}^1(w_2)^{-1}f_{\#}^1(w_1)f_{\#}^1(w_2) \\ &= \mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_1))f_{\#}^1(w_1)\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(w_2))f_{\#}^1(w_2) \\ &= \mathcal{M}(w_1)f_{\#}^1(w_1)\mathcal{M}(w_2)f_{\#}^1(w_2) \\ &= \mathcal{M}f_{\#}^1(w_1)\mathcal{M}f_{\#}^1(w_2), \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{M}f_{\#}^1$ é um homomorfismo.

Pelo Lema 7.17, isto basta para se concluir que $\mathcal{M}f_{\#}^1$ é uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação do homomorfismo $f_{\#}^1$. Portanto, pelo Teorema 7.20, a aplicação f é livre de raízes. ■

Teorema 7.33. *Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicação celular e seja $f_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \rightarrow \pi_1(M^1)$ o homomorfismo óbvio. Se f é livre de raízes, então $f_{\#}^1$ é trivial e o seguinte sistema com n incógnitas e m equações sobre o grupo livre $\pi_1(M^1)$, com incógnitas $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$, possui solução sobre $\ker(l_{\#})$:*

$$\{\mathcal{S}\mathfrak{X}f\} : \begin{cases} \mathfrak{X}(r_1)f_{\#}^1(r_1) = \mathbb{1} \\ \vdots \\ \mathfrak{X}(r_m)f_{\#}^1(r_m) = \mathbb{1} \end{cases}$$

A recíproca é verdadeira se f é uma aplicação conveniente.

Prova: Suponha que f seja livre de raízes. Então é claro que $f_{\#}^1$ é trivial e, além disso, pelo teorema anterior, existe uma associação $\mathfrak{A} : \{\mathfrak{X}\}_n \rightarrow \pi_1(M^1)$, tal que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) \in \ker(l_{\#})$ para todo índice $1 \leq j \leq n$ e, ainda mais, $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(r_i))f_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$, para todo índice $1 \leq i \leq m$. Então o n -vetor $(\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_1), \dots, \mathfrak{A}(\mathfrak{X}_n))$ é uma solução do sistema $\{\mathcal{S}\mathfrak{X}f\}$, com cada coordenada pertencente ao núcleo $\ker(l_{\#})$.

Por outro lado, suponha que f seja aplicação conveniente e que seja $(\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n)$ uma solução do sistema $\{\mathcal{S}\mathfrak{X}f\}$, com cada $\mathfrak{s}_j \in \ker(l_{\#})$. Defina a associação $\mathfrak{A} : \{\mathfrak{X}\}_n \rightarrow \pi_1(M^1)$ fazendo $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) = \mathfrak{s}_j$ para cada $1 \leq j \leq n$. Então é claro que $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}_j) \in \ker(l_{\#})$ para todo índice $1 \leq j \leq n$ e, além disso, $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}(r_i))f_{\#}^1(r_i) = \mathbb{1}$ para cada índice $1 \leq i \leq m$. O resultado segue, então, do Teorema 7.32. ■

7.7 Detalhamento para a prática dos resultados

Nesta seção, demonstraremos algumas “fórmulas” para tornar mais viável a aplicabilidade dos resultados até aqui demonstrados em situações práticas. Isto quer dizer que o objetivo desta breve seção é tornar praticável os resultados anteriores, principalmente o Teorema 7.33.

Lema 7.34. *Seja $\mathfrak{X} : F(\mathbf{x}) \rightarrow W(G, \{\mathfrak{X}\}_n)$ uma mutação simbólica de um dado homomorfismo de grupos $\tau : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$. Então, para cada palavra da forma $x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \in F(\mathbf{x})$, tem-se*

$$\mathfrak{X}(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})\tau(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}) = \prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j \tau(x_j)]^{p_j}.$$

Prova: Suponha que os inteiros $p_1, \dots, p_n$ sejam todos não negativos. Pela Proposição 7.31,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}) &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} [\mathfrak{X}(x_j)\tau(x_j)]^{p_j} \right) [\mathfrak{X}(x_n)\tau(x_n)]^{p_n-1} \mathfrak{X}(x_n)\tau(x_1^{p_1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n^{p_n-1})^{-1} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} [\mathfrak{X}_j \tau(x_j)]^{p_j} \right) [\mathfrak{X}_n \tau(x_n)]^{p_n-1} \mathfrak{X}_n \tau(x_1^{p_1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}} x_n^{p_n-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados pela direita por $\tau(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})$ obtemos, como desejávamos,

$$\mathfrak{X}(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})\tau(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}) = \prod_{i=1}^n [\mathfrak{X}_i \tau(x_i)]^{p_i}.$$

Agora, para $p > 0$ inteiro e $w \in F(\mathbf{x})$, temos, pelas fórmulas da Proposição 7.31,

$$\mathfrak{X}(w^{-p})\tau(w^{-p}) = [\mathfrak{X}(w)\tau(w)]^{-p}\tau(w)^p\tau(w^{-p}) = [\mathfrak{X}(w)\tau(w)]^{-p}.$$

Os casos em que os inteiros $p_1, \dots, p_n$ são todos negativos ou variam entre positivos, negativos e nulos, seguem de argumentos semelhantes, utilizando-se das fórmulas da Proposição 7.31 e destes dois casos mais simples já concluídos. ■

No que se segue, passamos a considerar os símbolos $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$ como incógnitas de equações sobre o grupo livre $\pi_1(M^1)$ (que vem a substituir o grupo arbitrário G).

Teorema 7.35. *Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$, com $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$, onde os relatores estão sob a forma genérica*

$$\begin{aligned} r_1 &= (x_1^{\delta_{11}^{(1)}} \cdots x_n^{\delta_{1n}^{(1)}}) \cdots (x_1^{\delta_{11}^{(k_1)}} \cdots x_n^{\delta_{1n}^{(k_1)}}); \\ &\vdots \\ r_m &= (x_1^{\delta_{m1}^{(1)}} \cdots x_n^{\delta_{mn}^{(1)}}) \cdots (x_1^{\delta_{m1}^{(k_m)}} \cdots x_n^{\delta_{mn}^{(k_m)}}). \end{aligned}$$

Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ uma aplicação de $K_{\mathcal{P}}$ em uma superfície fechada. Se f é livre de raízes, então $f_{\#2}$ é trivial e o seguinte sistema $m \times n$ sobre o grupo livre $\pi_1(M^1)$, com incógnitas $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$, possui solução sobre $\ker(l_{\#})$:

$$\{\mathcal{S}\mathfrak{X}f\} : \begin{cases} \prod_{\lambda=1}^{r_1} \prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j f_{\#}^1(x_j)]^{\delta_{1j}^{(\lambda)}} = \mathbb{1} \\ \vdots \\ \prod_{\lambda=1}^{r_m} \prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j f_{\#}^1(x_j)]^{\delta_{mj}^{(\lambda)}} = \mathbb{1} \end{cases}$$

A recíproca é verdadeira se f é uma aplicação conveniente.

Prova: Segue diretamente do Teorema 7.33 e do Lema 7.34. ■

Segue-se, em particular, que se $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \rangle$ é uma apresentação com n geradores e uma só relação com o formato acima especificado, então uma aplicação conveniente $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow M$ é livre de raízes se, e somente se, o homomorfismo $f_{\#}$ é trivial e a equação $\prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j f_{\#}^1(x_j)]^{p_j} = \mathbb{1}$, nas incógnitas $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$, possui solução sobre $\ker(l_{\#})$.

7.8 Exemplos e aplicações

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos e aplicações dos principais resultados demonstrados neste capítulo, em especial o Teorema 7.35. Separamos os exemplos em algumas subseções, de acordo com a superfície fechada M que consideramos para ser o contra-domínio da aplicação $f : K \rightarrow M$ da qual se estuda a nulidade do número mínimo de raízes.

7.8.1 Aplicações de um 2-complexo no toro

Exemplo 7.36. Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x, y, z \mid x^2 y^3 z^5 \rangle$. Seja $\tau : F(x, y, z) \rightarrow F(a, b)$ o homomorfismo de grupos livres definido por

$$\tau(x) = ab, \quad \tau(y) = ab \quad \text{e} \quad \tau(z) = (ba)^{-1}.$$

Considere o 1-esqueleto $K_{\mathcal{P}}^1 = S_x^1 \vee S_y^1 \vee S_z^1 = e^0 \cup e_x^1 \cup e_y^1 \cup e_z^1$. Seja $\mathbb{T}$ o toro e considere seu 1-esqueleto $\mathbb{T}^1 = S_a^1 \vee S_b^1 = c^0 \cup c_a^1 \cup c_b^1$. Seja $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ a aplicação celular que aplica e_s^1 em $\mathbb{T}^1$ exatamente como τ aplica s em $F(a, b)$, para $s = x, y, z$. Então $f_{\#}^1 = \tau$, salvo as identificações $F(x, y, z) \equiv \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1)$ e $F(a, b) \equiv \pi_1(\mathbb{T}^1)$. Seja $l : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}$ a inclusão natural e seja $l_{\#} : F(a, b) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ o seu homomorfismo induzido em grupos fundamentais. (Note-se que $l_{\#}$ é o homomorfismo abelianização). Temos:

$$(l_{\#} \circ \tau)(x^2 y^3 z^5) = l_{\#}((ab)^2 (ab)^3 (ba)^{-5}) = 0.$$

Logo, $l \circ f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ se estende a uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{T}$. Como $\pi_2(\mathbb{T}) = 0$, tal aplicação é conveniente (veja a Observação 7.3). Pelo Teorema 7.35, f é livre de raízes se, e somente se, a equação

$$[\mathfrak{X}_1 ab]^2 [\mathfrak{X}_2 ab]^3 [\mathfrak{X}_3 (ba)^{-1}]^5 = \mathbb{1}$$

possui solução sobre $\ker(l_{\#})$. Agora, o leitor pode checar sem nenhum pormenor que o terno ordenado $([b, a], [b, a], \mathbb{1})$ é uma tal solução para esta equação, onde, como de costume, $[b, a] = bab^{-1}a^{-1}$. Portanto, f é livre de raízes.

Seja $\mathcal{M}\tau : F(x, y, z) \rightarrow F(a, b) \approx \pi_1(\mathbb{T}^1)$ o homomorfismo definido por

$$\mathcal{M}\tau(x) = [b, a]\tau(x) = [b, a]ab = ba$$

$$\mathcal{M}\tau(y) = [b, a]\tau(y) = [b, a]ab = ba$$

$$\mathcal{M}\tau(z) = \mathbb{1}\tau(z) = (ab)^{-1}.$$

Pelos resultados que temos demonstrado até aqui, são claras as seguintes conclusões:

- $\mathcal{M}\tau$ é uma $(\mathcal{P}, l_{\#})$ -mutação do homomorfismo $\tau = f_{\#}^1$.
- Existe um (e apenas um) homomorfismo $\phi : \pi_1(K_{\mathcal{P}}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^1)$ verificando $\phi \circ \Omega = \mathcal{M}\tau$.
- O homomorfismo ϕ é um levantamento para $f_{\#}$ ao longo de $l_{\#}$. □

Exemplo 7.37. Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação

$$\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_3, x_4] \rangle.$$

Este complexo modelo é o 2-complexo do Exemplo 6.5, o qual é obtido colando-se dois toros $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_2$ através de suas 1-células fechadas longitudinais e, em seguida, identificando-se a 1-célula fechada longitudinal de um terceiro toro $\mathbb{T}_3$ com a 1-célula fechada meridional de toro $\mathbb{T}_2$. Seja $\tilde{f} : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{T}$ a aplicação (celular) do Exemplo 6.5, a qual restrita a cada toro $\mathbb{T}_i \subset K_{\mathcal{P}}$, para $i = 1, 2, 3$, é um homeomorfismo celular. Seja $p_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ a aplicação de revestimento “longitudinal” a n -folhas. Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{T}$ definida pela composição $f = p_n \circ \tilde{f}$. (Esta aplicação pode ser vista como a aplicação f_n do Teorema 6.7). Então a aplicação restrita

$$f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 = S_{x_1}^1 \vee S_{x_2}^1 \vee S_{x_3}^1 \vee S_{x_4}^1 \longrightarrow S_a^1 \vee S_b^1 = \mathbb{T}^1$$

é tal que $f_{\#}^1(x_1) = f_{\#}^1(x_4) = a^n$ e $f_{\#}^1(x_2) = f_{\#}^1(x_3) = b$. Agora, pelo Teorema 6.7, temos $\mu(f) = 2n - 1$, o que mostra que f não é livre de raízes. Como f é uma aplicação conveniente (veja Observação 7.3), o Teorema 7.35 implica que o seguinte sistema de equações sobre o grupo livre $F(a, b)$ não possui solução sobre o núcleo do homomorfismo abelianização $l_{\#} : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_1 a^n \mathfrak{X}_2 b a^{-n} \mathfrak{X}_1^{-1} b^{-1} \mathfrak{X}_2^{-1} = \mathbb{I} \\ \mathfrak{X}_1 a^n \mathfrak{X}_3 b a^{-n} \mathfrak{X}_1^{-1} b^{-1} \mathfrak{X}_3^{-1} = \mathbb{I} \\ \mathfrak{X}_3 b \mathfrak{X}_4 a^n b^{-1} \mathfrak{X}_3^{-1} a^{-n} \mathfrak{X}_4^{-1} = \mathbb{I} \end{cases}.$$

Aliás, como cada $\tilde{f}|_{\mathbb{T}_i}$ é um homeomorfismo, para $i = 1, 2, 3$, cada aplicação $f|_{\mathbb{T}_i} = p_n \circ \tilde{f}|_{\mathbb{T}_i}$ não é livre de raízes (de fato, $\mu(f|_{\mathbb{T}_1}) = n$). Então nenhuma das equações do sistema acima possui solução sobre $\ker(l_{\#})$. □

7.8.2 Aplicações de um 2-complexo na garrafa de Klein

Exemplo 7.38. Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x, y, z \mid x^3 y^2 z^7 \rangle$. Seja $\tau : F(x, y, z) \rightarrow F(a, b)$ o homomorfismo de grupos livres definido por

$$\tau(x) = a^{10}, \quad \tau(y) = b \quad \text{e} \quad \tau(z) = a^{-4}.$$

Considere o 1-esqueleto $K_{\mathcal{P}}^1 = S_x^1 \vee S_y^1 \vee S_z^1 = e^0 \cup e_x^1 \cup e_y^1 \cup e_z^1$. Seja $\mathbb{K}$ a Garrafa de Klein, e considere seu 1-esqueleto $\mathbb{K}^1 = S_a^1 \vee S_b^1 = c^0 \cup c_a^1 \cup c_b^1$. Seja $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{K}^1$ a aplicação celular que aplica e_s^1 em $\mathbb{K}^1$ exatamente como τ aplica s em $F(a, b)$, para $s = x, y, z$. Então $f_{\#}^1 = \tau$,

salvo as identificações $F(x, y, z) \equiv \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1)$ e $F(a, b) \equiv \pi_1(\mathbb{K}^1)$. Seja $l : \mathbb{K}^1 \rightarrow \mathbb{K}$ a inclusão natural e seja $l_{\#} : F(a, b) \rightarrow \pi_1(\mathbb{K})$ o seu homomorfismo induzido em grupos fundamentais. Note-se que $\pi_1(\mathbb{K})$ é o grupo apresentado por $\mathcal{Q} = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$ e $l_{\#} : F(a, b) \rightarrow \pi_1(\mathbb{K})$ é o homomorfismo quociente segundo esta apresentação. Temos:

$$(l_{\#} \circ \tau)(x^3y^2z^7) = l_{\#}(a^{30}b^2a^{-28}) = l_{\#}(a^{28}(a^2b^2)a^{-28}) = 0.$$

Logo, $l \circ f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{K}^1$ se estende a uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{K}$. Como $\pi_2(\mathbb{K}) = 0$, a aplicação f é conveniente (veja a Observação 7.3). Então, o Teorema 7.35 mostra que f é livre de raízes se, e somente se, a equação

$$[\mathfrak{X}_1a^{10}]^3[\mathfrak{X}_2b]^2[\mathfrak{X}_3a^{-4}]^7 = \mathbb{1}$$

possui solução sobre $\ker(l_{\#})$. Agora, é fácil checar que o terno ordenado $(b^{-10}a^{-10}, \mathbb{1}, b^4a^4)$ de palavras em $F(a, b)$ é uma solução desta equação, com cada coordenada pertencente ao núcleo $\ker(l_{\#})$. Portanto, a aplicação $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{K}$ é livre de raízes. $\square$

7.8.3 Aplicações de um 2-complexo no plano projetivo

O fato do 1-esqueleto do plano projetivo ser a esfera S^1 , a qual possui grupo fundamental isomorfo ao grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, pode ser utilizado com muito bom proveito para se estudar a solubilidade do sistema $\{\mathcal{S}\mathfrak{X}f\}$ que aparece no Teorema 7.35.

Nós começamos estudando o caso em que o 2-complexo (modelo) possui uma única célula de dimensão dois. Mais adiante estudaremos o caso geral.

Seja $K_{\mathcal{P}}$ um 2-complexo modelo tendo uma única 2-célula. Então, a apresentação $\mathcal{P}$ é da forma $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 \rangle$. Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação celular e seja $l : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a inclusão natural. ($\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ é o 1-esqueleto de $\mathbb{RP}^2$). Estudaremos a solubilidade da equação abaixo, com incógnitas $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$, sobre o subgrupo $\ker(l_{\#})$ de $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$:

$$\mathfrak{X}(r_1)f_{\#}^1(r_1) = \mathbb{1}. \quad (7.1)$$

Seja $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ a aplicação óbvia obtida por restrição de f e seja $f_{\#}^1 : \pi_1(K_{\mathcal{P}}^1) \approx F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(a) \approx \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ o homomorfismo induzido por f^1 em grupos fundamentais. Seja $\Omega : F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \pi_1(K_{\mathcal{P}})$ o homomorfismo quociente óbvio, o qual se identifica naturalmente com aquele induzido pela inclusão $K_{\mathcal{P}}^1 \hookrightarrow K_{\mathcal{P}}$. Então, temos a comutatividade $l_{\#} \circ f_{\#}^1 = f_{\#} \circ \Omega$. Em particular, $l_{\#}(f_{\#}^1(r_1)) = 0$, ou seja, $f_{\#}^1(r_1) \in \ker(l_{\#})$, onde, é claro, $\ker(l_{\#})$ é o subgrupo de $F(a)$ gerado por a^2 . Segue-se que $f_{\#}^1(r_1) = a^{2d}$ para algum inteiro d .

Por outro lado, para cada índice $1 \leq j \leq n$, existe um inteiro p_j tal que $f_{\#}^1(x_j) = a^{p_j}$. Suponha que o relator r_1 tenha a seguinte forma genérica:

$$r_1 = (x_1^{\delta_1^{(1)}} \cdots x_n^{\delta_n^{(1)}}) \cdots (x_1^{\delta_1^{(k_1)}} \cdots x_n^{\delta_n^{(k_1)}}).$$

Então, como $F(a)$ é um grupo abeliano (o grupo cíclico infinito), obtemos

$$a^{2d} = f_{\#}^1(r_1) = (a^{p_1})^{\delta_1} \cdots (a^{p_n})^{\delta_n},$$

onde, para cada índice $1 \leq j \leq n$, definimos δ_j como sendo o inteiro positivo $\delta_j = \sum_{\lambda=1}^{k_1} \delta_j^{(\lambda)}$.

Ainda por ser $F(a)$ um grupo abeliano, temos

$$\mathfrak{X}(r_1) f_{\#}^1(r_1) = \prod_{\lambda=1}^{k_1} \prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j a^{p_j}]^{\delta_j^{(\lambda)}} = \prod_{j=1}^n [\mathfrak{X}_j a^{p_j}]^{\delta_j}.$$

Assim, a equação (7.1) é equivalente a

$$[\mathfrak{X}_1 a^{p_1}]^{\delta_1} \cdots [\mathfrak{X}_n a^{p_n}]^{\delta_n} = \mathbb{1}. \quad (7.2)$$

Agora, mostrar que esta equação possui uma solução sobre $\ker(l_{\#})$ é equivalente a mostrar que existem inteiros $q_1, \dots, q_n$ tais que

$$[a^{2q_1} a^{p_1}]^{\delta_1} \cdots [a^{2q_n} a^{p_n}]^{\delta_n} = \mathbb{1}.$$

O que, por sua vez, é equivalente a provar que existem inteiros $q_1, \dots, q_n$ tais que

$$\delta_1(2q_1 + p_1) + \cdots + \delta_n(2q_n + p_n) = 0. \quad (7.3)$$

Mas sabemos que $(a^{p_1})^{\delta_1} \cdots (a^{p_n})^{\delta_n} = a^{2d}$ e, portanto, $\delta_1 p_1 + \cdots + \delta_n p_n = 2d$. Segue-se que encontrar uma solução para a equação (7.3) equivale a encontrar uma solução para

$$\delta_1 q_1 + \cdots + \delta_n q_n = -d. \quad (7.4)$$

Até este ponto, podemos concluir ao menos o seguinte:

1. Se $\delta_1, \dots, \delta_n$ são relativamente primos, então a equação (7.4) possui infinitas soluções. Portanto, a equação (7.1) possui infinitas soluções sobre $\ker(l_{\#})$.
2. Se $K_{\mathcal{P}}$ é uma superfície fechada orientável (com sua decomposição celular minimal), então o alfabeto é $\{x_1, y_1, \dots, x_g, y_g\}$ e a (única) palavra relatora é da forma $r_1 = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]$, onde $[,]$ denota o comutador e g é o genus da superfície. Assim, $\delta_1 = \cdots = \delta_{2g} = 0$. Portanto, de acordo com a equação (7.4), a equação (7.1) tem solução sobre $\ker(l_{\#})$ se, e somente se, $d = 0$, ou seja, $f_{\#}^1(r_1) = 1$. E se este é o caso, então qualquer $2g$ -upla de elementos de $\ker(l_{\#})$ é uma solução sobre $\ker(l_{\#})$ da equação (7.1).
3. Se $K_{\mathcal{P}}$ é uma superfície fechada não orientável (com sua decomposição celular minimal), então o alfabeto é $\{x_1, \dots, x_g\}$ e a (única) palavra relatora é da forma $r_1 = x_1^2 \cdots x_g^2$, onde g é o genus da superfície. Assim, $\delta_1 = \cdots = \delta_g = 2$. Portanto, de acordo com a equação (7.4), a equação (7.1) tem solução sobre $\ker(l_{\#})$ se, e somente se, d é par.

Teorema 7.39. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação celular, com X uma superfície fechada orientável (respectivamente, não orientável) com sua apresentação minimal $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid r_1 \rangle$. Se f é livre de raízes, então $f_{\#2}$ é trivial e $f_{\#}^1(r_1) = 1$ (respectivamente, $f_{\#}^1(r_1) \equiv 0 \pmod{4}$). A recíproca é verdadeira se f é uma aplicação conveniente.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 7.35 e dos itens **2** e **3** acima. Note que consideramos a identificação de $F(a) \approx \pi_1(\mathbb{RP}^1)$ com $\mathbb{Z}$ dada identificando-se $a^k \in F(a)$ com $k \in \mathbb{Z}$. ■

Usando o item **3** acima, podemos construir exemplos de aplicações $f : N_g \rightarrow \mathbb{RP}^2$, da superfície não orientável de genus $g > 1$ no plano projetivo que não é livre de raízes.

Exemplo 7.40. A superfície não orientável de genus g , a qual indicamos por N_g , é o 2-complexo modelo induzido pela apresentação (minimal) $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_g \mid x_1^2 \cdots x_g^2 \rangle$. Seja $\tau : F(x, y) \rightarrow F(a)$ o homomorfismo de grupos livres dado por

$$\tau(x_j) = a^2 \text{ para } 1 \leq j \leq g-1 \quad \text{e} \quad \tau(x_g) = a.$$

Seja $l : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a inclusão natural. Então, a menos de identificações, o homomorfismo induzido por l em grupos fundamentais é o homomorfismo quociente óbvio $l_{\#} : F(a) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, onde consideramos o grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$ sendo apresentado por $\langle a \mid a^2 \rangle$. Então $\ker(l_{\#})$ é o subgrupo normal de $F(a)$ gerado por a^2 . Segue-se que $l_{\#}(\tau(x_1^2 \cdots x_g^2)) = l_{\#}(a^{2(2g-1)}) = 0$. Portanto, existe uma aplicação celular $f : N_g \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tal que, a menos de identificações, $f_{\#}^1 = \tau$. Agora, temos $f_{\#}^1(x_1^2 \cdots x_g^2) = a^{2(2g-1)}$ e, obviamente, $2(2g-1) \not\equiv 0 \pmod{4}$. Pela proposição acima, f não é livre de raízes. □

Agora, generalizamos a construção anterior para o caso em que o 2-complexo (modelo) possui qualquer número de células de dimensão dois.

Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-complexo modelo induzido por uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, com $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$, onde as palavras relatoras são da forma genérica

$$\begin{aligned} r_1 &= (x_1^{\delta_{11}^{(1)}} \cdots x_n^{\delta_{1n}^{(1)}}) \cdots (x_1^{\delta_{11}^{(k_1)}} \cdots x_n^{\delta_{1n}^{(k_1)}}); \\ &\vdots \\ r_m &= (x_1^{\delta_{m1}^{(1)}} \cdots x_n^{\delta_{mn}^{(1)}}) \cdots (x_1^{\delta_{m1}^{(k_m)}} \cdots x_n^{\delta_{mn}^{(k_m)}}). \end{aligned}$$

Sejam $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação celular e $f^1 : K_{\mathcal{P}}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ sua restrição óbvia. Então:

1. Para cada $1 \leq j \leq n$, existe um inteiro p_j tal que $f_{\#}^1(x_j) = a^{p_j}$;
2. Para cada $1 \leq i \leq m$, existe um inteiro d_i tal que $f_{\#}^1(r_i) = a^{2d_i}$.
3. Para cada $1 \leq i \leq m$, temos $\delta_{i1}p_1 + \cdots + \delta_{in}p_n = 2d_i$, onde cada inteiro $\delta_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k_i} \delta_{ij}^{(\lambda)}$ é a soma das potências da letra x_j no relator r_i .

Com os mesmos argumentos da construção anterior, podemos provar que a fim de que f seja livre de raízes é necessário (mas não suficiente, em geral) que existam inteiros $q_1, \dots, q_n$ satisfazendo o seguinte sistema de equações diophantinas:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Se f é uma aplicação conveniente, esta condição é também suficiente se, adicionalmente, exigimos que $f_{\#2}$ seja o homomorfismo trivial. Se denotamos $\Delta_{\mathcal{P}} = (\delta_{ij})_{m \times n}$ (como na Seção 5.6) e $\overrightarrow{\deg}(f^1) = (d_1, \dots, d_m)^T$, onde o sobrescrito T indica transposição de matrizes, temos:

Teorema 7.41. *Seja $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ uma aplicação celular. Se f é livre de raízes, então $f_{\#2}$ é trivial e o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}} Y = \overrightarrow{\deg}(f^1)$ é compatível (possui solução inteira). A recíproca é verdadeira se f é uma aplicação conveniente.*

Na Seção 5.6, provamos um resultado similar para o caso de aplicações de 2-complexos na 2-esfera. É interessante comparar estes dois resultados.

O próximo exemplo mostra uma aplicação não conveniente, que não é livre de raízes, tal que o sistema associado $\Delta_{\mathcal{P}} M = \overrightarrow{\deg}(f^1)$ é compatível.

Exemplo 7.42. Seja $\omega : \mathbb{T} \rightarrow S^2$ a aplicação celular do toro na 2-esfera que colapsa todo o 1-esqueleto $\mathbb{T}^1$ de $\mathbb{T}$ sobre a 0-célula de S^2 . Seja $\mathbf{p}_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ o recobrimento universal. Defina a aplicação celular $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ pela composição $f = \mathbf{p}_2 \circ \omega$. Então f não é conveniente e não é livre de raízes (de fato, $\mu(f) = 2$). Contudo, o sistema linear diophantino $\Delta_{\mathcal{P}} Y = \overrightarrow{\deg}(f^1)$, neste caso, é simplesmente a equação $0Y = 0$, a qual tem solução trivial. $\square$

O Teorema 7.41 pode ser usada para construir exemplos mais sofisticados de aplicações de 2-complexos no plano projetivo que não são livres de raízes

Exemplo 7.43. Seja $K_{\mathcal{P}}$ o 2-completo modelo induzido pela apresentação $\mathcal{P} = \langle x, y \mid x^2 y^2, x y^3 \rangle$. Seja $\tau : F(x, y) \rightarrow F(a)$ o homomorfismo de grupos livres dado por $\tau(x) = a$ e $\tau(y) = a$. Sejam $l : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a inclusão natural e $l_{\#} : F(a) \equiv \pi_1(\mathbb{RP}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^2) \equiv \mathbb{Z}_2$ como no Exemplo 7.40. Então,

$$l_{\#}(\tau(x^2 y^2)) = l_{\#}(a^4) = 0 \quad \text{e} \quad l_{\#}(\tau(x y^3)) = l_{\#}(a^4) = 0.$$

Logo, existe uma aplicação celular $f : K_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ tal que $f_{\#}^1 = \tau$. Pela Proposição ??, se f é livre de raízes então o sistema linear diophantino

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

deve ter uma solução inteira. Mas é fácil ver que este sistema não possui uma tal solução. Portanto, f não é livre de raízes. $\square$

Apêndice

Seja $F(\mathbf{x})$ o grupo livre sobre o alfabeto $\mathbf{x}$. A *derivada de Reidemeister-Fox*

$$\frac{\partial}{\partial x} : F(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{Z}F(\mathbf{x}),$$

associada a cada gerador $x \in \mathbf{x}$ é a única *derivação*, isto é, função satisfazendo

$$\frac{\partial w_1 w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x}, \text{ para } w_1, w_2 \in F(\mathbf{x}),$$

cujos valores em $x' \in \mathbf{x}$ é o delta de Kronecker $\delta_{xx'}$. São satisfeitas as propriedades abaixo:

- $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ (o delta de Kronecker) para quaisquer $x_i, x_j \in \mathbf{x}$;
- $\frac{\partial w_1 w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x}$ para quaisquer $x \in \mathbf{x}$ e $w_1, w_2 \in F(\mathbf{x})$;
- $\frac{\partial x^{-1}}{\partial x} = -x^{-1}$ para qualquer $x \in \mathbf{x}$;
- Para $n > 0$ inteiro, $\frac{\partial x^n}{\partial x} = \langle x, n \rangle^+$, onde $\langle x, n \rangle^+ = 1 + x + \dots + x^{n-1}$;
- Para $n > 0$ inteiro, $\frac{\partial x^{-n}}{\partial x} = \langle x, n \rangle^-$, onde $\langle x, n \rangle^- = -x^{-1} - x^{-2} - \dots - x^{-n}$.

Dado um 2-complexo modelo $K_{\mathcal{P}}$ induzido por uma apresentação $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$, com $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$, vamos chamar a *matriz diferencial de Reidemeister-Fox* de $K_{\mathcal{P}}$ (ou de $\mathcal{P}$, conforme a conveniência), a matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{Z}F(\mathbf{x})$ cuja entrada da linha i e coluna j é a derivada $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$. Em símbolos:

$$Fox(K_{\mathcal{P}}) = Fox(\mathcal{P}) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{Z}\Pi).$$

Seja $\xi : \mathbb{Z}F(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{Z}$ o *homomorfismo aumento*. Este apêndice se destina a demonstração do seguinte resultado:

Proposição 7.44. *A matriz diophantina $\Delta_{\mathcal{P}}$ é a matriz aumentada de $Fox(\mathcal{P})$.*

Prova: Seja $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ apresentação. Escreva $\Delta_{\mathcal{P}} = (\delta_{ij})_{m \times n}$. Por definição, δ_{ij} é igual a soma de todas as potências da letra x_j na palavra relatora r_i .

Vamos provar que, para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, tem-se $\delta_{ij} = \xi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$, onde $\xi : \mathbb{Z}F(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo aumento, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Primeiramente, note que cada palavra r_i pode ser escrita como uma palavra de comprimento nk_i da seguinte forma:

$$r_i = (x_1^{\delta_{i1}^{(1)}} x_2^{\delta_{i2}^{(1)}} \dots x_n^{\delta_{in}^{(1)}}) (x_1^{\delta_{i1}^{(2)}} x_2^{\delta_{i2}^{(2)}} \dots x_n^{\delta_{in}^{(2)}}) \dots (x_1^{\delta_{i1}^{(k_i)}} x_2^{\delta_{i2}^{(k_i)}} \dots x_n^{\delta_{in}^{(k_i)}}).$$

Para cada k , $1 \leq k \leq k_i$, seja $r_i^{(k)}$ o k -ésimo bloco (palavra) de comprimento n da representação de r_i acima, ou seja,

$$r_i^{(k)} = (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} x_2^{\delta_{i2}^{(k)}} \dots x_n^{\delta_{in}^{(k)}}).$$

A palavra r_i pode, então, ser reescrita como o produto (justaposição) das palavras $r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(k_i)}$,

$$r_i = r_i^{(1)} r_i^{(2)} \dots r_i^{(k_i)}.$$

Desenvolveremos a demonstração provando várias afirmações que culminarão na prova do teorema.

Afirmção 1.
$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \frac{\partial r_i^{(1)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} \frac{\partial r_i^{(2)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} r_i^{(2)} \frac{\partial r_i^{(3)}}{\partial x_j} + \dots + (r_i^{(1)} r_i^{(2)} \dots r_i^{(k_i-1)}) \frac{\partial r_i^{(k_i)}}{\partial x_j}$$

Com efeito: Utilizando a propriedade de “derivada do produto” anteriormente descrita, procedemos indutivamente os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial r_i^{(1)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} \frac{\partial (r_i^{(2)} \dots r_i^{(k_i)})}{\partial x_j} = \frac{\partial r_i^{(1)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} \left[\frac{\partial r_i^{(2)}}{\partial x_j} + r_i^{(2)} \frac{\partial (r_i^{(3)} \dots r_i^{(k_i)})}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{\partial r_i^{(1)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} \frac{\partial r_i^{(2)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} r_i^{(2)} \left[\frac{\partial (r_i^{(3)} \dots r_i^{(k_i)})}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{\partial r_i^{(1)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} \frac{\partial r_i^{(2)}}{\partial x_j} + r_i^{(1)} r_i^{(2)} \frac{\partial r_i^{(3)}}{\partial x_j} + \dots + (r_i^{(1)} r_i^{(2)} \dots r_i^{(k_i-1)}) \frac{\partial r_i^{(k_i)}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Afirmção 2. *Vale a fórmula*

$$\xi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^{k_i} \xi \left(\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} \right).$$

Com efeito: Note primeiramente que, cada produto $r_i^{(1)} \dots r_i^{(k)}$, para $1 \leq k \leq k_i$, sendo visto como um elemento de $\mathbb{Z}F(\mathbf{x})$, verifica $\xi(r_i^{(1)} \dots r_i^{(k)}) = 1$. Como, além disso, ξ é um homomorfismo, a fórmula cuja validade queremos provar segue diretamente da Afirmção 1.

Afirmção 3. Se $\delta_{ij}^{(k)} = 0$, então $\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} = 0$. Caso contrário, definimos $\text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)}) = +$ se $\delta_{ij}^{(k)} > 0$ e $\text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)})x = -$ se $\delta_{ij}^{(k)} < 0$, e vale a fórmula

$$\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} = x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} x_2^{\delta_{i2}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}} < x, \delta_{ij}^{(k)} > \text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)}) .$$

Com efeito: Para $j = 1$, temos:

$$\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1^{\delta_{i1}^{(k)}}}{\partial x_1} + x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \frac{\partial (x_2^{\delta_{i2}^{(k)}} \cdots x_n^{\delta_{in}^{(k)}})}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1^{\delta_{i1}^{(k)}}}{\partial x_1} = < x, \delta_{i1}^{(k)} > \text{sgn}(\delta_{i1}^{(k)}) .$$

Já para $j \geq 2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}})}{\partial x_j} + (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}}) \frac{\partial (x_j^{\delta_{ij}^{(k)}} \cdots x_n^{\delta_{in}^{(k)}})}{\partial x_1} \\ &= (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}}) \left[\frac{\partial x_j^{\delta_{ij}^{(k)}}}{\partial x_j} + \frac{\partial (x_{j+1}^{\delta_{ij+1}^{(k)}} \cdots x_n^{\delta_{in}^{(k)}})}{\partial x_1} \right] \\ &= (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}}) \frac{\partial x_j^{\delta_{ij}^{(k)}}}{\partial x_j} = x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}} < x, \delta_{ij}^{(k)} > \text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)}) . \end{aligned}$$

Afirmção 4. Vale a fórmula

$$\xi \left(\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}^{(k)}$$

Com efeito: Utilizando a fórmula da Afirmção 3, obtemos

$$\xi \left(\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} \right) = \xi (x_1^{\delta_{i1}^{(k)}} \cdots x_{j-1}^{\delta_{ij-1}^{(k)}} < x, \delta_{ij}^{(k)} > \text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)})) = \xi (< x, \delta_{ij}^{(k)} > \text{sgn}(\delta_{ij}^{(k)})) = \delta_{ij}^{(k)} ,$$

onde a última igualdade segue diretamente das definições de $< x, n >^+$ e $< x, n >^-$.

Afirmção 5. Vale o teorema. Com efeito: Pelas afirmações anteriores, temos

$$\xi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^{k_i} \xi \left(\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^{k_i} \delta_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} .$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] C. H. Angeloni, W. Metzler, A. L. Sieradski, *Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 197, Cambridge University Press 1993.
- [2] C. Aniz, *Raízes de funções de um Complexo em uma Variedade*, Tese, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos SP, Julho 2002.
- [3] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [4] S. Bogatyĭ, D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva and H. Zieschang, *Minimal number of preimages under maps of surfaces*, Mathematical Notes, vol. 75, no. 1, 13-18, (2004).
Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 75, no. 1, 13-19, (2004).
- [5] S. Bogatyĭ, D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva and H. Zieschang, *On the Wecken property for roots problem of mapping between surfaces*, Mosc. Math. J. Vol. 3, no. 4, 1223-1245, (2003).
- [6] S. Bogatyĭ, D. L. Gonçalves and H. Zieschang, *The minimal number of roots of surfaces mappings and quadratic equations in free groups*, Math. Z. 236, 419-452, (2001).
- [7] R. Brooks, *Nielsen Root Theory* in R. F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang, *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, 375-431, Springer, Dordrecht, 2005.
- [8] R. Brooks, *On the sharpness of the Δ_2 and Δ_1 Nielsen numbers*, J. Reine Angew. Math. 259, 101-108 (1973).
- [9] R. Brooks, *Certain subgroups of the fundamental group and the number of roots of $f(x) = a$* , Amer. J. Math., 95, 720-728, (1973).

- [10] R. Brown and H. Schirmer, *Nielsen root theory and Hopf degree theory*, Pacific J. Math., Vol. 198(1), 49-80, (2001).
- [11] W. S. Ching, *Linear Equation over Commutative Rings*, Linear Algebra Appl., 18 (1977), 257-266.
- [12] M. M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, Springer-Verlag New York Inc. 1973.
- [13] D. B. A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. 3(16), 369-383, (1966).
- [14] E. Fadell and S. Husseine, *Fixed Point Theory for non simply connected manifolds*, Topology 20, 53-92, (1981).
- [15] M. C. Fenille and O. M. Neto, *Minimal Nielsen root classes and roots of liftings*, Fixed Point Theory Appl. 2009, Art. ID 346519, 16 pp.
- [16] D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva and H. Zieschang, *Some quadratic equations in the free group of rank 2*, The Zieschang Gedenkschrift, 219-,294, Geom. Topol. Monogr. 14, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008
- [17] D. L. Gonçalves, *Coincidence Theory* in R. F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang, *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, 3-42, Springer, Dordrecht, 2005.
- [18] D. L. Gonçalves and P. Wong, *Wecken property for roots*, Proc. American Math. Soc. 133(9), 2779-2782, (2005).
- [19] D. L. Gonçalves, C. Aniz, *The minimizing of the Nielsen root classes*, Cent. Eur. J. Math., 2(1), 112-122 (2004).
- [20] D. L. Gonçalves, E. Kudryavtseva and H. Zieschang, *Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups*, Manuscripta Math. 107, 311-241 (2002).
- [21] D. L. Gonçalves and H. Zieschang, *Equations in free groups and coincidences of mappings on surfaces*, Math. Z. 237, 1-29 (2001).
- [22] D. L. Gonçalves, *Coincidence theory for maps from a complex into a manifold*, Topology Appl., 92, 63-77 (1999).
- [23] L. R. Hartmann Jr. *Homotopia simples e classificação dos espaços lenticulares*, Dissertação, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos SP, Janeiro 2007.
- [24] H. Hopf, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten II*, Math. Ann. 102, 562-623, (1930).
- [25] S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, Inc., New York, 1959.

- [26] T. H. Kiang, *The theory of fixed point classes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science Press Beijing, 1989.
- [27] H. Kneser, *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann. 103, 347-358, (1930).
- [28] J. R. Munkres, *Topology*, secondy edition, Princiton Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [29] D. Penteado, *Sobre pontos fixos de aplicações entre fibrados com fibra superfície*, Tese, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos SP, Junho de 1988.
- [30] D. Randall, J. Daccach, *Seqüências Espectrais, Espaços de Eilenberg-Maclane, Torres de Postnikov*, Notas Didáticas do ICMC-USP, No. 2, São Carlos - SP, Brasil, 1988.
- [31] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, ISBN 3-540-90516-2, 1980.
- [32] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 1978.
- [33] L. Xiaosong, *On the Root Classes of Mapping*, Acta Math. Sinica, New Series, Vol. 2, No. 3, 199-206 (1986).

Índice Remissivo

- f -equivalência, 22
- H -correspondência, 23
- $\text{ess}(K)$, 36
- $\text{pcb}(K, L)$, 36
- $K_{\ddagger}$, 43
- $K\langle 2 \rangle$, 49
- $\overrightarrow{\deg}(f)$, 58
- $\zeta(f)$, 64
- $dH(f)$, 66
- $\zeta(K, d)$, 68
- Aplicação
 - celular, 29
 - conveniente, 104
 - livre de raízes, 22
 - quociente, 77
- Apresentação
 - de grupo, 30
 - do grupo fundamental de 2-complexos, 30
- Aproximação celular, 29
- Caminho diagonal, 23
- Célula, 27
 - articuladora, 42
- Classe
 - de Nielsen para raízes, 22
 - de raízes mínima, 90
 - de Reidemeister, 24
 - essencial, 23
 - inessencial, 23
- Colapso, 29
- Compatível, 77
- Complexo
 - articulado, 43
 - articulador, 43
 - CW, 28
 - de Reidemeister, 32
 - essencial, 36
 - modelo, 32
 - quadrado, 87
- Deformação, 30
- Equivalência de homotopia simples, 30
- Esqueleto, 27
- Essência de um 2-complexo, 36
- Expansão, 30
- Fatoração celular, 58
- Fibra de aplicação quociente, 77
- Função mutadora, 113
- Grau
 - absoluto, 101
 - homológico, 66
- Grupo de cohomotopia, 86

- Homeomorfismo celular, 28
- Homotopia constante por níveis, 78
- Homotopia simples, 30
- Levantamento de Hopf, 24
- Matriz
 - diferencial de Reidemeister-Fox, 131
 - diophantina, 77
- Mutação, 112
- Mutação simbólica, 120
- Número
 - de Nielsen, 22
 - de Reidemeister, 24, 99
 - mínimo de raízes, 19
- Profundidade celular, 36
- Propriedade de Wecken, 23
- Raiz, 19
- Recobrimento de Hopf, 24
- Sistema linear diophantino, 77
- Subcomplexo, 29
- Subdivisão, 29
- Teorema
 - de Hopf, 87
 - de Nielsen-Schreier, 110
 - de Whitehead, 33
 - do homomorfismo de Hurewicz, 33
 - do isomorfismo de Hurewicz, 33
- Topologia fraca, 28
- Vetor-grau, 58