Robustez da dinâmica sob perturbações: da
semicontinuidade superior à estabilidade
estrutural

Arthur Geromel Fischer

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Arthur Geromel Fischer

Robustez da dinâmica sob perturbações: da semicontinuidade superior à estabilidade estrutural

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

**USP – São Carlos
Setembro de 2015**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F529r Fischer, Arthur Geromel
Robustez da dinâmica sob perturbações: da
semicontinuidade superior à estabilidade estrutural
/ Arthur Geromel Fischer; orientador Hildebrando
Munhoz Rodrigues. -- São Carlos, 2015.
126 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Semigrupos e Atratores Globais. 2.
Semicontinuidade inferior e superior. 3.
Estabilidade estrutural e topológica. 4. Permanência
e continuidade de elementos críticos. 5. Semigrupos
Morse-Smale. I. Rodrigues, Hildebrando Munhoz,
orient. II. Título.

Arthur Geromel Fischer

**Robustness of the dynamics under perturbation: from the
upper semicontinuity to the structural stability**

Master dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues

**USP – São Carlos
September 2015**

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais.

Agradeço ao meu orientador, Professor Hildebrando, e ao Professor Alexandre por toda a ajuda e suporte durante todos esses anos, desde o primeiro ano da minha graduação.

Agradeço também à Universidade de São Paulo e aos professores que colaboraram, de um modo ou de outro, para a minha formação.

Por fim, agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da estabilidade estrutural dos atratores de semigrupos.

Começamos este trabalho apresentando o conceito e propriedades básicas de semigrupos que possuem atratores globais.

Estudamos, então, semigrupos gradientes e dinamicamente gradientes, mostrando que eles são equivalentes e que uma pequena perturbação autônoma de um semigrupo gradiente continua sendo gradiente.

Estudamos as variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio hiperbólico e o comportamento de soluções periódicas sob perturbação.

Concluimos este trabalho com o estudo dos semigrupos Morse-Smale.

Palavras-chave: Semigrupos, atratores globais, estabilidade estrutural, semigrupos gradientes, semigrupos Morse-Smale.

Abstract

The main goal of this work is the study of structural stability of global attractors.

We start this work by presenting the concept and basic properties of semigroups and global attractors.

We then studied gradient and dynamically gradient semigroups, showing that these concepts are equivalent and that a small autonomous perturbation of a gradient semigroup remains a gradient semigroup.

We studied the stable and unstable manifolds in the neighbourhood of a hyperbolic equilibrium point and the behavior of periodic solutions under perturbation.

Finally, we studied the Morse-Smale semigroups.

Keywords: Semigroups, global attractors, structural stability, gradient semigroups, Morse-Smale semigroups.

Sumário

Introdução	1
1 Semigrupos e Atratores Globais	3
1.1 Noções e fatos básicos	3
1.2 Existência de atratores globais	7
2 Semicontinuidade superior e inferior	17
3 Estabilidade Estrutural Topológica de Atratores	23
3.1 Semigrupos gradientes	23
3.2 Semigrupos dinamicamente gradientes	28
3.3 Estruturas homoclínicas	30
3.4 Equivalência entre semigrupos dinamicamente gradientes e gradientes . . .	35
3.4.1 Decomposição de Morse para semigrupos dinamicamente gradientes	37
3.4.2 Funções de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes .	45
3.5 Estabilidade estrutural topológica	50
4 Vizinhança de um Elemento Crítico	57
4.1 Variedades invariantes próximas a um ponto de equilíbrio	58
4.1.1 Variedades invariantes como gráficos	58
4.2 Diferenciabilidade de variedades invariantes	69
4.3 Variedades invariantes sob perturbações	75
4.4 O λ -Lema	77
5 Permanência e Continuidade de Elementos Críticos	89
5.1 Permanência e continuidade de pontos de equilíbrio	89
5.2 Permanência e continuidade de soluções periódicas	94
5.2.1 Soluções periódicas	94
5.2.2 Estabilidade e instabilidade de órbitas periódicas	102
5.2.3 Permanência de órbitas periódicas sob perturbações	109
6 Semigrupos Morse-Smale	115
6.1 Noções básicas	115
6.2 Estabilidade estrutural de semigrupos Morse-Smale	120

6.3 Exemplo	124
Conclusão	125

Introdução

Um sistema dinâmico é uma família de operadores $\{S(t, s) : t \geq s\}$, definida em um espaço X e tomando valores nele mesmo de forma que, se o valor de uma certa variável no instante s for x , então $S(t, s)x$ representa o valor dessa variável num instante posterior t . Conhecendo o sistema dinâmico, podemos saber, no futuro, os valores de variáveis que conhecemos no presente. A variável x pode representar diversos tipos de quantidades, sejam elas físicas, biológicas ou em qualquer outra área do conhecimento. Podemos, por exemplo, querer representar a posição de um corpo no espaço, o crescimento de uma população ou a distribuição da temperatura em um corpo. Dessa forma, o espaço X pode ser de dimensão finita ou infinita.

Podemos utilizar a teoria dos sistemas dinâmicos para representar sistemas físicos existentes no nosso mundo. No entanto, ao fazermos nosso modelo, devemos nos lembrar que ele é uma simplificação do sistema real e, portanto, poderá conter erros. Por isso, o estudo de perturbações dos sistemas dinâmicos é essencial.

Este trabalho tem como objetivo a análise do comportamento assintótico dos semigrupos. Para isso, é fundamental focarmos na estabilidade dos atratores globais destes semigrupos.

Neste trabalho, trabalhamos apenas com sistemas autônomos e os semigrupos serão denotados sob a forma $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Começamos este trabalho apresentando propriedades básicas dos semigrupos e conceitos como invariância, atração, absorção e soluções globais.

Para medirmos a distância entre dois conjuntos, definimos a semi-distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B :

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Por ela, o conjunto A está "próximo" do conjunto B se todo ponto de A estiver "próximo" de algum ponto de B .

Com essas noções, podemos definir o conceito de um atrator global $\mathcal{A}$ para um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ como sendo um conjunto compacto e invariante tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

para todo conjunto B limitado.

Podemos, agora, desenvolver a parte principal deste trabalho: a estabilidade dos atratores de semigrupos sob uma perturbação autônoma.

Começamos o segundo capítulo com o estudo da semicontinuidade superior dos atratores e mostramos que se $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ for uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$ de forma que cada $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global $\mathcal{A}_\eta$, então

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \text{dist}_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Feito isso, estudamos a semicontinuidade inferior dos atratores e mostramos que, sob certas condições, podemos garantir que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \text{dist}_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) = 0.$$

É importante notar que a semicontinuidade superior costuma ser obtida de maneira mais simples que a semicontinuidade inferior. Dessa forma, os capítulos seguintes apresentam condições para obtermos a semicontinuidade inferior.

O terceiro capítulo é dedicado a um tipo importante de semigrupo: os semigrupos gradientes, ou seja, semigrupos que possuem uma função de Lyapunov associada.

Estudamos, ainda no terceiro capítulo, os semigrupos dinamicamente gradientes (semigrupos que possuem as mesmas propriedades dinâmicas de um semigrupo gradiente). Definimos um par atrator-repulsor e decomposição de Morse para construirmos uma função de Lyapunov associada a um semigrupo dinamicamente gradiente, mostrando a equivalência entre semigrupos gradientes e dinamicamente gradientes.

Após caracterizarmos os atratores destes semigrupos, buscamos condições para que uma perturbação de um semigrupo gradiente continue sendo gradiente.

Definimos e estudamos, no quarto capítulo, as variedades estável e instável de um elemento críticos (um ponto de equilíbrio hiperbólico ou uma órbita periódica normalmente hiperbólica). Para isso, utilizamos resultados relacionados à decomposição espectral de operadores lineares (para mais detalhes, consultar [6] e [8]).

Começamos o quinto capítulo provando, sob hipóteses naturais, as semicontinuidades superior e inferior dos pontos de equilíbrio de aplicações.

Finalizamos este capítulo com um estudo da estabilidade assintótica de soluções periódicas.

Por fim, estudamos, no sexto capítulo, os semigrupos Morse-Smale. Uma característica importante destes semigrupos é que eles são dinamicamente gradientes e a família de invariantes isolados é formada apenas por pontos de equilíbrio e órbitas periódicas. Dessa forma, os resultados do quinto capítulo são essenciais para o estudo dos semigrupos Morse-Smale.

Concluimos este trabalho demonstrando um resultado de estabilidade mais forte do que o obtido para semigrupos gradientes: a existência de um isomorfismo entre o diagrama de fase de um semigrupo Morse-Smale e o do semigrupo perturbado.

Esta dissertação utiliza resultados básicos de análise, análise funcional e equações diferenciais em espaços de Banach. Para mais detalhes, consultar [2], [7] e [8].

Semigrupos e Atratores Globais

Neste capítulo, introduzimos noções básicas que serão utilizadas no restante deste trabalho. Em particular, definimos e estudamos os conceitos de semigrupo, soluções globais e atratores globais.

1.1 Noções e fatos básicos

Seja X um espaço métrico com a métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ e denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X . Dado um subconjunto $A \subset X$, definimos a ϵ -vizinhança de A em X como sendo o conjunto

$$\mathcal{O}_\epsilon(A) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon \text{ para algum } a \in A\}$$

Começaremos, agora, com a definição de sistemas dinâmicos autônomos (ou semigrupos) e, de agora em diante, t representa uma variável real.

Definição 1.1.1. *Um **semigrupo** é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ com as seguintes propriedades:*

- (a) $T(0) = I_X$, onde I_X é o operador identidade em X ,
- (b) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$,
- (c) a função $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Definição 1.1.2 (Invariância). *Um subconjunto A de X é dito **invariante** pelo semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)A = A$, para todo $t \geq 0$. Se $A = \{a^*\}$ é um conjunto unitário*

invariante, dizemos que a^* é um **ponto de equilíbrio**, ou simplesmente um **equilíbrio** para $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Dizemos que A é **positivamente invariante** se $T(t)A \subseteq A$, para todo $t \geq 0$. Por fim, dizemos que A é **negativamente invariante** se $A \subseteq T(t)A$, para todo $t \geq 0$.

Vamos definir as noções de atração e absorção pela ação de um semigrupo. Para isso, precisamos da **semi-distância de Hausdorff** $\text{dist}_H(A, B)$ entre dois conjuntos A e B de X , definida por:

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Definimos, também, a distância simétrica de Hausdorff entre dois conjuntos A e B por:

$$d_H(A, B) = \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, A).$$

Utilizando essa distância, dois conjuntos estão perto se todo ponto do primeiro conjunto está perto de algum ponto do segundo conjunto.

Por fim, denotamos por $\text{dist}(A, B)$ a **distância** usual entre conjuntos:

$$\text{dist}(A, B) := \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Observação 1.1.3. Notemos que $\text{dist}_H(A, B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

De fato, se $\overline{A} \subset \overline{B}$, então, pela definição, é imediato que $\text{dist}_H(A, B) = 0$.

Por outro lado, vamos supor que $\text{dist}_H(A, B) = 0$. Temos, então, que $\inf_{y \in B} d(x, y) = 0, \forall x \in A$. Assim, fixados $x \in A$ e $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{2n}$.

Seja $a \in \overline{A}$. Dado $n \in \mathbb{N}^*$, existe $a_n \in A$ tal que $d(a, a_n) < \frac{1}{2n}$. Para cada a_n , existe $b_n \in B$ tal que $d(a_n, b_n) < \frac{1}{2n}$. Dessa forma, $d(a, b_n) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Assim, a sequência $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ converge para a . Logo $a \in \overline{B}$.

Definição 1.1.4 (Atração e absorção). Sejam A e B subconjuntos de X .

(I) Dizemos que A **atrai** B pela ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)B, A) = 0$$

(II) Dizemos que A **absorve** B se existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset A$, para todo $t \geq t_0$.

Em particular, se A absorve B , então A atrai B .

Definição 1.1.5 (Atrator global). *Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de **atrator global** para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $\mathcal{A}$ for compacto, invariante e atrai os subconjuntos limitados de X pela ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Proposição 1.1.6. *Se um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global, então este atrator global é único.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ atratores globais para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Pela invariância de $\mathcal{A}$, temos que $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$. Assim, como $\hat{\mathcal{A}}$ atrai todos os limitados, $\hat{\mathcal{A}}$ atrai $\mathcal{A}$ e

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \text{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$$

Desta forma, $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente, $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, mostrando a igualdade entre os dois atratores. $\square$

Definição 1.1.7. *Uma **solução global** de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.*

*Uma solução global constante será chamada de **solução estacionária** e é fácil ver que seu valor é um ponto de equilíbrio.*

Como $T(t)$ não é necessariamente injetiva, podem existir diferentes soluções globais por x .

*Quando uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x existe, definimos a **órbita de x relativa à solução global ϕ** por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$.*

*Também escrevemos $(\gamma_\phi)_t^-(x) := \{\phi(s) : s \leq t\}$ e definimos o **conjunto α -limite de x com relação a ϕ** como*

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}$$

Lema 1.1.8. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Então, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\phi_x(0) = x$. Consequentemente*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe uma solução global limitada por } x\}.$$

Demonstração. Pela invariância de $\mathcal{A}$, temos que, para cada $x \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x$ é sempre bem definida e relativamente compacta.

Como $\mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, para cada $x \in \mathcal{A}$, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$. Podemos, então, construir uma sequência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que uma sequência com essas propriedades pode não ser única.

Sejam $j, n \in \mathbb{N}$, com $j \leq n$. Então

$$\begin{aligned} T(j)x_{-n} &= T(j-1)T(1)x_{-n} = T(j-1)x_{-n+1} \\ &= T(j-2)T(1)x_{-n+1} = T(j-2)x_{-n+2} = \dots = T(j-j)x_{-n+j} = x_{-n+j} \end{aligned}$$

Definamos

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x & t \geq 0 \\ T(j+t)x_{-j} & t \in [-j, -j+1), j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

É claro que $\phi_x(0) = x$ e que $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ é limitada, já que está contida em $\mathcal{A}$.

Mostremos que ela é uma solução global. Para isso, tomemos $t \geq 0$.

1. Seja $s \geq 0$. Então $T(t)(\phi_x(s)) = T(t)T(s)x = T(t+s)x = \phi_x(t+s)$
2. Seja $s < 0$ e $t+s \geq 0$. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [-j, -j+1)$. Assim,

$$T(t)(\phi_x(s)) = T(t)T(j+s)x_{-j} = T(t+j+s)x_{-j} = T(t+s)T(j)x_{-j} = T(t+s)x = \phi_x(t+s)$$

3. Seja $s < 0$ e $t+s < 0$. Então existem $j, n \in \mathbb{N}$ tais que $s \in [-j, -j+1)$ e $t+s \in [-n, -n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } T(t)(\phi_x(s)) &= T(t)T(j+s)x_{-j} = T(t+j+s)x_{-j} = T([t+n+s] + [j-n])x_{-j} = \\ &= T(t+n+s)T(j-n)x_{-j} = T([t+s+n])x_{-n} = \phi_x(t+s) \end{aligned}$$

Assim, $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma solução global limitada por x e, consequentemente,

$$\mathcal{A} \subset \{x \in X : \text{existe uma solução global limitada por } x\}.$$

Para a outra inclusão, dada uma solução global limitada $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, do fato que $\phi(\mathbb{R})$ é um conjunto invariante limitado e que $\mathcal{A}$ atrai conjuntos limitados, temos que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)\phi(\mathbb{R}), \mathcal{A}) = \text{dist}_H(\phi(\mathbb{R}), \mathcal{A}).$$

Sendo $\mathcal{A}$ fechado, $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Disso,

$$\{x \in X : \text{existe uma solução global limitada por } x\} \subset \mathcal{A}.$$

e o lema está provado. □

Observação 1.1.9. *Pela primeira parte da demonstração acima, podemos ver que se A é um conjunto invariante para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow A$ por x , para todo $x \in A$.*

1.2 Existência de atratores globais

Nesta seção, vamos apresentar resultados que caracterizam semigrupos que possuem um atrator global.

Definição 1.2.1. *O conjunto ω -limite de um conjunto $B \subset X$ é definido por*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)},$$

onde

$$\gamma_t^+(B) := \bigcup_{s \geq t} T(s)B.$$

Proposição 1.2.2. *Seja $B \subset X$. Então $\omega(B)$ é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{existem sequências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B \\ \text{tais que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y\}.$$

Se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ tal que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \text{e } \phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\}$$

Demonstração. O conjunto $\omega(B)$ é fechado pois é a interseção de conjuntos fechados.

Se $y \in \omega(B)$, então $y \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ e, consequentemente, $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \geq 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$.

Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todos $n, k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n.$$

Também, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \epsilon, \text{ sempre que } k \geq k(n, \epsilon),$$

ou seja, $d(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geq k(n, \epsilon)$.

Definamos $t_n := n + q_{k(n, \frac{1}{n})}^n$ e $x_n := x_{k(n, \frac{1}{n})}^n$. Temos que

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Assim, se $y \in \omega(B)$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$, onde $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $x_n \in B$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, sejam $y \in X$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ sequências satisfazendo $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$. Então, fixando $\tau \in \mathbb{R}^+$, temos que $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geq \tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$ e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Consequentemente, $y \in \omega(B)$ e a caracterização de $\omega(B)$ está provada.

Os resultados para $\alpha_\phi(x)$ são análogos. □

Proposição 1.2.3. *Sejam K um conjunto compacto contido em X e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K) = 0$$

Então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para algum ponto de K .

Além disso, dado um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e K um conjunto compacto, se K atrai outro conjunto compacto K_1 , então $\gamma_0^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.

Demonstração. Dado $m \in \mathbb{N}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$, tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Sendo K compacto e tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $y_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_0$, para algum $y_0 \in K$.

Dessa forma, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Isso mostra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K , provando a primeira parte da proposição.

Provemos a segunda parte. Dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\epsilon/2}(K), \forall t \geq t_0$$

Sendo K compacto, existem pontos $y_1, \dots, y_p \in K$ tais que K está na reunião de bolas de raio $\epsilon/2$ e centro y_j , $1 \leq j \leq p$. Como para cada $x \in T(t)K_1$ existe um $y \in K$ tal que $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, y_j) \leq d(x, y) + d(y, y_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Dessa forma, se $t \geq t_0$, $T(t)K_1$ está contido na reunião finita de bolas de raio ϵ . Consequentemente, $\bigcup_{t \geq t_0} T(t)K_1$ está nesta mesma reunião finita de bolas e, logo, é totalmente limitado.

Sendo $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} T(t)K_1$ compacto, segue que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é totalmente limitado.

Assim, $\gamma^+(K_1) \cup K$ é compacto. Disso, segue que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Finalmente, $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ é não-vazio e compacto para para cada $t \in (R)^+$ e $\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)}$ se $s \leq t$. Isso significa que a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ tem a propriedade da interseção finita e

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \emptyset.$$

Dado $y \in \omega(K_1)$ e $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K).$$

Então, $d(y, K) \leq \epsilon$ e, sendo ϵ arbitrário, o resultado segue. $\square$

Lema 1.2.4. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X . Se $B \subset X$, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \geq 0$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B , então $\omega(B)$ é invariante.*

Demonstração. Se $\omega(B) = \emptyset$, não há nada para provar. Vamos, então, assumir que $\omega(B) \neq \emptyset$. Fixemos $t \in \mathbb{R}^+$. Da Proposição (1.2.2), se $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$.

Pela continuidade de $T(t)$, temos que $T(t)y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t+t_n)x_n$ e que $T(t)y \in \omega(B)$. Logo, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Vamos supor que $\omega(B)$ seja compacto e atraia B . Seja $x \in \omega(B)$. Então existem sequências $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ fixado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$, se $n \geq n_0$. Assim, $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B , temos que $d(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da Proposição (1.2.3), obtemos que $\{T(t_n - t)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, que será denotada da mesma forma.

Se $T(t_n - t)x_n \rightarrow y$, temos que $y \in \omega(B)$ e que $T(t)y = x$, ou seja, que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, completando a demonstração. $\square$

Lema 1.2.5. *Seja $x \in X$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ seja compacto. Então $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. Lembrando que $\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}$, $\alpha_\phi(x)$ é compacto porque é um conjunto fechado contido em um compacto e, pela propriedade da interseção finita, $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio.

Seja $t \in \mathbb{R}^+$. Pela Proposição (1.2.2), dado $y \in \alpha_\phi(X)$, existe uma sequência de números reais $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

Pela continuidade de $T(t)$, temos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(t)y$ e que $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$, ou seja, $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$.

Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$. Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de um conjunto compacto, ele é relativamente compacto e, tomando uma subsequência se necessário, assumir que existe $z \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$. Pela continuidade de $T(t)$, obtemos que $T(t)z = w$ e $\alpha_\phi(x) \subset T(t)\alpha_\phi(x)$, provando a invariância de $\alpha_\phi(x)$. □

Lema 1.2.6. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X e $B \subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B . Se B for conexo, então $\omega(B)$ será também conexo.*

Demonstração. A aplicação $[0, \infty) \times X \ni (s, x) \mapsto T(s)x \in X$ é contínua e a imagem do conjunto conexo $[t, \infty) \times B$ é $\gamma_t^+(B)$, que também será conexo para $t \geq 0$.

O resultado então segue, lembrando que $\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$. □

Lema 1.2.7. *Seja B um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto para algum $t_0 \geq 0$. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B .*

Demonstração. Para cada $t \geq t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Como a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geq t_0\}$ tem a propriedade da interseção finita, $\omega(B) = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Vamos provar agora a atração. Vamos supor, por absurdo, que $\omega(B)$ não atraia B . Então existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências, indexadas por $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tais que $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$, para algum $y \in X$.

Disso, segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B)) \geq \epsilon_0$, o que é um absurdo. Assim, $\omega(B)$ atrai B .

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B , o Lema (1.2.4) garante a invariância de $\omega(B)$.

□

Definição 1.2.8. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **assintoticamente compacto** quando, para cada conjunto $B \subset X$ não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B .

Definição 1.2.9. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **eventualmente limitado** quando, para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado.

Lema 1.2.10. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado para algum $t_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B .

Demonstração. Como $T(t)$ é contínuo e $T(t)\gamma_{t_0}^+(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B)$, temos que $T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$.

Como o semigrupo é assintoticamente compacto, temos que existe um conjunto compacto $J \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$. Logo, existem sequências $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $T(t_n)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)$, para todo $t \geq t_n$. Logo, $\emptyset \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, temos que $\omega(B)$ é compacto.

Mostremos que $\omega(B)$ atrai B . Suponhamos que isto não ocorra. Então existem ϵ_0 e sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$. Da compacidade de J e pela Proposição (1.2.3), existem subsequências denotadas por $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $z \in J$ tais que $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ e $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z$.

Desta forma, $z \in \omega(B)$ e $d(z, \omega(B)) \geq \epsilon_0$, o que é um absurdo, provando que $\omega(B)$ atrai B .

Logo, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B . A invariância de $\omega(B)$ segue do Lema (1.2.4). □

Proposição 1.2.11. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo tal que $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é relativamente compacto sempre que $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são limitados e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Então este semigrupo é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto, então $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é relativamente compacto sempre que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sequência limitada em X e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Demonstração. □

Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \geq 0$. Assim, $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B . Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em X , existe $t_0 \geq 0$ tal que $B = \overline{\gamma_{t_0}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ é um conjunto limitado. Como B é positivamente invariante e o semigrupo em questão é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $J \subset B$ de X que atrai B . Em particular, $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para J quando $n \rightarrow \infty$ e, logo, é relativamente compacto.

Definição 1.2.12. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **ponto dissipativo** se existir um conjunto limitado $B \subset X$ que absorve pontos de X .

Definição 1.2.13. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **limitado dissipativo** se existir um conjunto limitado $B \subset X$ que absorve subconjuntos limitados de X .

Definição 1.2.14. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **compacto dissipativo** se existir um conjunto limitado $B \subset X$ que absorve subconjuntos compactos de X .

Observação 1.2.15. Nas três definições acima, poderíamos ter trocado a palavra absorve por atrai sem mudar os conceitos em questão.

Lema 1.2.16. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ for limitado sempre que K for um conjunto compacto, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é compacto dissipativo.

Demonstração. Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio limitado B que absorve pontos de X .

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$.

Como B absorve pontos, U não é vazio pois se $x \in B$, então existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)x \in B$, se $t \geq t_0$. Assim, $T(t_0)x \in U$.

Claramente, $\gamma^+(U) = U$ e U é limitado.

Notemos, também, que, se $x \in X$, então existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)x \in B$, para todo $t \geq t_0$. Disso, $\gamma^+(T(t)x) \subset B$, $t \geq t_0$, ou seja, $T(t)x \in U$, mostrando que U absorve os pontos de X .

Como $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geq 0$ e $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ que atrai U . Então K também atrai os pontos de X .

Mostremos que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitado para algum $t \geq 0$. Vamos supor que isso não ocorra. Então existem sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $y \in K$ tais que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitado. Seja $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então $\overline{A}$ é compacto e, para todo $t \geq 0$, $\gamma_t^+(A)$ não é limitado. Isso contradiz as hipóteses do lema.

Fixemos uma vizinhança V de K e $t_V \in \mathbb{R}^+$ tais que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como K atrai os pontos de X e $T(t)$ é contínuo, para cada $x \in X$, existe $t_x > t_V$ e uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tais que $T(t)x \in V$, $t \geq (t_x - t_V)$ e $T(t_x - t_V)\mathcal{O}_x \subset V$. Disso, $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_V)V$ e $T(t + t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t + t_V)V$, $t \geq 0$. Em outras palavras, $T(t)\mathcal{O}_x \subset \gamma_{t_V}^+(V)$, se $t \geq t_x$. Assim, para cada $x \in X$, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x .

Como podemos cobrir um compacto por um número finito de vizinhanças, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve compactos de X , provando que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo compacto dissipativo. $\square$

Proposição 1.2.17. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo. Se K for um compacto que atrai a si mesmo, então $\omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$.*

Demonstração. Pela definição, é imediato que $\bigcap_{t \geq 0} T(t)K \subset \omega(K)$.

Utilizando a Proposição (1.2.3), com $K = K_1$, obtemos que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto.

Pelo Lema (1.2.7), $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K .

Logo, $\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K$, $\forall t \geq 0$, provando que $\omega(K) \subset \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$. $\square$

Teorema 1.2.18. *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto-dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Vamos supor que $\{T(t) : t \geq 0\}$ seja assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado.

Pelo Lema (1.2.16), este semigrupo é compacto dissipativo.

Sejam C um conjunto limitado que absorve compactos de X e $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Sejam $t \geq 0$ e $x \in T(t)\overline{B}$. Então existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)x_n$. Pela definição de B , vemos que $T(t)x_n \in B$ e $x \in \overline{B}$. Assim, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$.

Notemos que, dado um compacto $K_1 \subset X$, existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)K_1 \subset C$, $t \geq t_0$. Disso, $\gamma^+(T(t)K_1) \subset C$, $t \geq t_0$, ou seja, $T(t)K_1 \subset B$, mostrando que B absorve compactos de X .

Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B . Então K atrai compactos de X .

Seja $\mathcal{A} = \omega(B)$, então $\mathcal{A}$ é não-vazio, compacto e invariante.

Se $J \subset X$ é um compacto, então $\omega(J) \subset K$ e $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$, $s \geq 0$. Pela Proposição (1.2.17), $\omega(J) \subset \bigcap_{s \geq 0} T(s)K = \omega(K)$ e, conseqüentemente, $\omega(K)$ atrai J .

Seja $D \subset X$ um conjunto limitado. Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, pelo Lema (1.2.10), $\omega(D)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai D . Sendo $\omega(D)$ compacto e invariante, podemos tomar $J = \omega(D)$ na etapa anterior para concluir que $\omega(D) = \omega(J) \subset \mathcal{A}$. Assim $\mathcal{A}$ atrai D , provando que $\mathcal{A}$ é um atrator global.

Para a recíproca, vamos supor que $\{T(t) : t \geq 0\}$ tenha atrator global $\mathcal{A}$. Dado um conjunto limitado $B \subset X$, existe $t_B \geq 0$ tal que $T(t)B \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$, $t \geq t_B$. Então $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado e $\mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ absorve pontos de X . Assim $\{T(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e ponto-dissipativo.

Sejam $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Como $\mathcal{A}$ atrai o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e $d(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Pela Proposição (1.2.3), $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em $\mathcal{A}$ e

$\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Pela Proposição (1.2.11), $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. $\square$

Semicontinuidade superior e inferior

Este capítulo é dedicado ao estudo da continuidade do atrator quando um semigrupo é perturbado.

Apresentamos os conceitos de semicontinuidade inferior e superior e condições de continuidade para os atratores de uma família de semigrupos.

Definição 2.0.19. *Sejam X e Λ espaços métricos e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .*

Dizemos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é

(1) ***semicontínua superiormente*** em λ_0 se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \text{dist}_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = 0;$$

(2) ***semicontínua inferiormente*** em λ_0 se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) = 0;$$

Lema 2.0.20. *Seja Λ um espaço métrico, $\lambda_0 \in \Lambda$ e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .*

(1) *Se para toda sequência $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, tem uma subsequência convergente, cujo limite pertence a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente*

em λ_0 .

Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ for semicontínua superiormente em λ_0 , A_{λ_0} for compacto e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, então toda sequência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, tem uma subsequência convergente, com limite em $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

(2) Se A_{λ_0} for compacto e, para todo $x \in A_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, existir uma sequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$, com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 .

Reciprocamente, se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ for semicontínua inferiormente em λ_0 , $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $x \in A_{\lambda_0}$, então existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$, com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, que converge para x . (A compacidade de A_{λ_0} não é necessária aqui).

Demonstração. (1) Suponhamos que, para toda sequência $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, a sequência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, tenha uma subsequência convergente, com limite em $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não seja semicontínua superiormente em λ_0 . Então existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ tais que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $\text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\epsilon$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que $d(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \epsilon$. Isso contradiz o fato de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possuir uma subsequência que converge para um ponto de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Para a recíproca, vamos supor que A_{λ_0} seja compacto, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$. Então, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = 0$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ com $d(x_{\lambda_n}, z_n) < 1/n$ (tomando uma subsequência, se necessário).

Sendo A_{λ_0} compacto, existe uma subsequência $\{z_{n_k}\}$ que converge para $x_0 \in A_{\lambda_0}$. Desta forma, $d(x_{\lambda_{n_k}}, x_0) \leq d(x_{\lambda_{n_k}}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, provando o que queríamos.

(2) Suponha que A_{λ_0} seja compacto e que, para todo $x \in A_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, existam subsequências $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$, com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, tais que para $x_{\lambda_{n_k}} \rightarrow x$ quando $k \rightarrow \infty$.

Suponha, por absurdo, que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não seja semicontínua inferiormente em λ_0 . Então existem $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ tais que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $\text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, existem $y_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ tais que $d(y_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \epsilon$.

Sendo $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ compacto, podemos assumir que $\{y_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Assim, existem subsequências $\lambda_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ tais que $x_{\lambda_{n_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ e $\epsilon \leq d(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) \leq d(x, x_{\lambda_{n_k}}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, o que é um absurdo.

Para a recíproca, vamos supor que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ seja semicontínua inferiormente em λ_0 , $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ e $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Tomando uma subsequência, podemos assumir que $\text{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \leq \frac{1}{2n}$. Assim, $d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \leq \frac{1}{2n}$. Dessa forma, para cada n , podemos encontrar $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$. Temos, então uma sequência satisfazendo as propriedades desejadas. $\square$

Definição 2.0.21. A família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ é **contínua** em $\eta = 0$ se $T_\eta(t)x \rightarrow T_0(t)x$ quando $\eta \rightarrow 0$, uniformemente para (t, x) em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^+ \times X$.

Teorema 2.0.22 (Semicontinuidade superior). *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$.*

Se cada $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tiver um atrator global $\mathcal{A}_\eta$, para $\eta \in [0, 1]$ e $\overline{\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ for compacto, então a família $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Considere as sequências $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{u_{\eta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, tais que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}$.

Como $\overline{\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto, podemos assumir que existe $u_0 \in X$ tal que $u_{\eta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_0$.

Para provarmos a semicontinuidade superior, temos que mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$.

Pelo Lema (1.1.8), basta provarmos que existe uma solução global limitada de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ por u_0 .

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução global limitada de $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$, denotada por $\psi^{(\eta_k)} : \mathbb{R} \rightarrow X$, por u_{η_k} . Para $t \geq 0$, como $[0, 1] \ni \eta \mapsto T_\eta(t)x \in X$ é uniformemente contínua em compactos de $\mathbb{R}^+ \times X$, temos que $\psi^{(\eta_k)}(t) = T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(t)u_0$ uniformemente para t em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^+ \times X$.

Vamos construir uma solução global por u_0 . Tomemos $\eta_k^0 = \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dado $j \in \mathbb{N}^*$, existe uma subsequência $\{\eta_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\eta_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e u_{-j} tais que $\psi^{\eta_k^j}(-j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_{-j}$. Isso ocorre pois $\{\psi^{\eta_k}(-j) : j \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta}$, que é compacto.

Pela convergência de $T_\eta(1)$ a $T_0(1)$ em subconjuntos compactos de X , temos que, para $0 \leq i \leq j$,

$$\psi^{(\eta_k^j)}(-j) = T_{\eta_k}(i)\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(i)u_{-j-i}$$

Pela unicidade do limite, temos então que $T_0(i)u_{-j-i} = u_{-j}$.

Definamos

$$\psi(0)(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0 & t \geq 0 \\ T_0(t+j)u_{-j} & t \in [-j, -j+1), j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Temos que $\psi^{(0)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é solução global de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ por u_0 e $\psi^{(\eta_k^k)}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi^{(0)}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sendo $\psi^{(0)}$ o limite de uma sequência de funções cuja imagem está em um compacto, $\psi^{(0)}(t)$ é limitada e sua imagem está contida em $\mathcal{A}_0$. Em particular, $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Assim, temos uma sequência nas condições do item 1) do Lema (2.0.20), provando a semicontinuidade superior.

□

Definição 2.0.23. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo. As soluções globais que convergem para um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ constituem um conjunto invariante chamado **conjunto instável** $W^u(y^*)$ de y^* , ou seja,*

$$W^u(y^*) = \{y \in X : \text{ existe uma solução global } \phi_y : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ tal que}$$

$$\phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y^*\}$$

Dada uma vizinhança V de y^ , o conjunto de pontos y de V tais que existe uma solução global $\phi_y : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi_y(0) = y$ e $\phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y^*$ para todo $t \in \mathbb{R}^-$ é chamado de **conjunto instável local** de y^* e é denotado por $W_{loc}^u(y^*)$.*

Definição 2.0.24. A órbita γ_ϕ de uma solução global não-constante $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada de **órbita homoclínica** em y^* .

Teorema 2.0.25 (Semicontinuidade inferior). Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$ satisfazendo:

- (i) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$, para cada $\eta \in [0, 1]$.
- (ii) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_\eta \supset \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, em que $\mathcal{E}_\eta$ representa o conjunto de soluções estacionárias de $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$.
- (iii) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\{W_\delta^u(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0, 1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$, onde

$$W_\delta^u(y_j^{*,\eta}) = \{y \in B_\delta(y_j^{*,\eta}) : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ tal que} \\ \phi_y(0) = y, \phi_y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} y_j^{*,\eta} \text{ e } \phi_y(t) \in B_\delta(y_j^{*,\eta}) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^-\}.$$

$$(iv) \mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=1}^p W^u(y_j^{*,0})$$

Então $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Por (iv), temos que $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=1}^p W^u(y_j^{*,0})$.

Disso, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existem uma solução global $\phi^{(0)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ por u_0 , $1 \leq l \leq p$ e $\tau \in \mathbb{R}^+$ tal que $\phi^{(0)}(t) \in B_\delta(y_l^{*,0})$, $t \leq \tau$. Então $\phi^{(0)}(-\tau) \in W_\delta^u(y_l^{*,0})$.

Pela semicontinuidade inferior de $\{W_\delta^u(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0, 1]\}$, dada uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para 0, existem uma subsequência $\{\eta_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $u_{\eta_{k_l}}^{-\tau} \in W_\delta^u(y_j^{*,\eta_{k_l}})$ tais que $u_{\eta_{k_l}}^{-\tau} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \phi^{(0)}(-\tau)$ e, consequentemente, soluções globais $\psi^{(\eta_{k_l})} : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_{\eta_{k_l}}(t) : t \geq 0\}$ com $\psi^{(\eta_{k_l})}(0) = u_{\eta_{k_l}}^{-\tau}$ tais que $\psi^{(\eta_{k_l})}(0) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \phi^{(0)}(-\tau)$.

Usando a continuidade de $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ em $\eta = 0$, temos que $T_{\eta_{k_l}}(\tau)\psi^{(\eta_{k_l})}(0) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} T_0(\tau)\phi^{(0)}(-\tau) = \phi^{(0)}(0) = u_0$.

A sequência $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, com $x_l := T_{\eta_{k_l}}(\tau)\psi^{(\eta_{k_l})}(0)$ usada no Lema (2.0.20) garante a semicontinuidade inferior de $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ em $\eta = 0$.

□

Estabilidade Estrutural Topológica de Atratores

Neste capítulo, estudamos semigrupos bastante utilizados em aplicações: os semigrupos gradientes e os semigrupos dinamicamente gradientes e provamos a equivalência destes dois conceitos.

Primeiramente, definimos os semigrupos gradientes e estudamos algumas propriedades básicas.

Em seguida, apresentamos os semigrupos dinamicamente gradientes e mostramos que um semigrupo gradiente é também dinamicamente gradiente. Para provarmos a equivalência entre estes dois tipos de semigrupos, precisamos entender o que é uma decomposição de Morse. Feito isso, podemos construir uma função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente.

Por fim, provamos que pequenas perturbações de semigrupos gradientes continuam sendo gradientes.

3.1 Semigrupos gradientes

Definição 3.1.1. *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ com um conjunto invariante Ξ é **gradiente** com relação a Ξ se existir uma função contínua $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(i) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é não-crescente para cada $x \in X$.

(ii) Se x é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então $x \in \Xi$.

(iii) V é constante em cada componente conexa de Ξ .

Uma função $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ com essas propriedades é chamada de **função de Lyapunov** para $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Lema 3.1.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente com relação a um conjunto invariante Ξ . Então $\omega(x) \subset \Xi$ para cada $x \in X$. Se existir uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x , então $\alpha_\phi(x) \subset \Xi$.*

Além disso, se Ξ for a reunião disjunta de conjuntos invariantes $\Xi_1, \dots, \Xi_n$ e $\{T(t) : t \geq 0\}$ for assintoticamente compacto, então $\omega(x) \subset \Xi_i$ para algum $1 \leq i \leq n$ e se existir uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x , então $\alpha_\phi(x) \subset \Xi_j$ para algum $1 \leq j \leq n$.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $y \in \omega(x)$. Então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x$.

Sendo V contínua, $V(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(T(t_n)x)$. Como $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ é não-crescente, $V(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(T(t)x)$.

Assim, para $t \in \mathbb{R}^+$,

$$V(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(T(t + t_n)x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(T(t)T(t_n)x) = V(T(t)y)$$

Pela propriedade (ii) dos semigrupos gradientes, $y \in \Xi$, provando a primeira afirmação.

Suponha, agora que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $x \in X$ fixado. Se $y \in \alpha_\phi(x)$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(-t_n)$. Assim, como no caso anterior, $V(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(-t))$ e $V(y) = V(T(t)y)$, mostrando que $y \in \Xi$.

A última afirmação é imediata ao lembrarmos que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexas (Lemas (1.2.6) e (1.2.10)).

□

Teorema 3.1.3. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ for um semigrupo gradiente com relação ao conjunto invariante limitado Ξ e for eventualmente limitado e assintoticamente compacto, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global $\mathcal{A} = W^u(\Xi)$, onde*

$W^u(\Xi) = \{y \in X : \text{existe uma solução global } \phi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ com}$

$$\phi(0) = x \text{ tal que } \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi\}$$

é chamado de conjunto instável de Ξ .

Se $\Xi = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$ onde $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ for uma coleção disjunta de conjuntos fechados invariantes, então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(\Xi_i)$. Finalmente, se existir um conjunto B limitado e conexo que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é conexo.

Demonstração. Pelo Lema 1.2.10, tomando $B = \{x\}$, obtemos que $\omega(X)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x .

Pelo Lema (3.1.2, $\omega(x) \subset \Xi$ e, então, Ξ é um limitado que atrai os pontos de X . Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo e, pelo Teorema 1.2.18, possui atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x . Como $\phi(\mathbb{R})$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$ e, pelo Lema (3.1.2), $\alpha_\phi(x) \subset \Xi$. Isso mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\Xi)$.

Pela Observação 1.1.9, sendo Ξ invariante, existe uma solução global $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \Xi$ por y , para todo $y \in \Xi$ e, sendo Ξ limitado, ψ é limitado. Logo, $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Em particular, $y \in \mathcal{A}$ e $\Xi \subset \mathcal{A}$.

Se $x \in W^u(\Xi)$, então existe solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x e $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi$.

Disso, sendo $\mathcal{A}$ um atrator global, existem $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ tais que $d(\phi(t), \Xi) < 1$, se $t < \tau_1$, e $d(\phi(t), \mathcal{A}) < 1$, se $t > \tau_2$. Então ϕ é limitado em $(-\infty, \tau_1] \cup [\tau_2, +\infty)$ e, sendo $[\tau_1, \tau_2]$ um compacto, ϕ é limitada. Logo $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ e, em particular, $x \in \mathcal{A}$, provando que $W^u(\Xi) \subset \mathcal{A}$. Isso completa a demonstração que $\mathcal{A} = W^u(\Xi)$.

Seja $\Xi = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$, com $\{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ uma coleção disjunta de conjuntos fechados invariantes. Pelo Lema 3.1.2, para cada solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por um $x \in X$, temos que $\alpha_\phi(x) \subset \Xi_j$, para algum $1 \leq j \leq n$. Disso, se $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi$, então $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_j$, provando que $\mathcal{A} = W^u(\bigcup_{i=1}^n \Xi_i) = \bigcup_{i=1}^n W^u(\Xi_i)$.

Se $\mathcal{A}$ está contido em um conjunto conexo limitado B de X , pela invariância de $\omega(B)$ e como $\omega(B) \subset \mathcal{A} = \omega(\mathcal{A}) \subset \omega(B)$, $\mathcal{A} = \omega(B)$ e é, portanto, conexo pelo Lema 1.2.6. $\square$

Lema 3.1.4. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo e Ξ um compacto invariante para este semigrupo. Dados $t \geq 0$ e $\epsilon > 0$, existe δ tal que $\{T(s)y : 0 \leq s \leq t, y \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)\} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$.*

Demonstração. Suponha que existam $t_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, existam $x_k \in \mathcal{O}_{1/k}(\Xi)$ e $s_k \in [0, t_0]$, de forma que $d(T(s_k)x_k, \Xi) > \epsilon_0$.

Sendo $[0, t_0]$ compacto e tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s_0$, para algum $s_0 \in [0, t_0]$ e que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \in \Xi$, pela Proposição 1.2.3.

Pela continuidade de $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$, temos que $d(T(s_0)y, \Xi) \geq \epsilon_0$, o que contradiz o fato de $T(s_0)y \in \Xi$. $\square$

Lema 3.1.5. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente com relação ao conjunto invariante Ξ . Suponha que:*

- (i) $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global $\mathcal{A}$;
- (ii) $\Xi = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$, com $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ uma coleção disjunta de conjuntos fechados invariantes, $n \in \mathbb{N}^*$;
- (iii) a função de Lyapunov associada é contante em cada Ξ_i , $1 \leq i \leq n$.

Seja $V(\Xi) = \{n_1, \dots, n_p\}$, com $n_i \leq n_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$.

Se $1 \leq j \leq p-1$ e $n_j \leq r < n_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X : V(z) \leq r\}$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{T_r(t) : t \geq 0\}$, a restrição de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a X_r , tem atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$ dado por

$$\mathcal{A}^{(j)} = \bigcup \{W^u(\Xi_l) : V(\Xi_l) \leq n_j\}$$

Em particular, $V(z) \leq n_j$ se $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $n_1 = \min\{V(x) : x \in X\}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \bigcup \{\tilde{\Xi} \in \Xi : V(\tilde{\Xi}) = n_1\}$ é formado por todos os conjuntos invariantes assintoticamente estáveis, isto é, para cada $\tilde{\Xi} \in \Xi$, com $\tilde{\Xi} \subset \mathcal{A}^{(1)}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tilde{\Xi}$, sempre que $x \in \mathcal{O}_\epsilon(\tilde{\Xi})$.

Demonstração. Pela propriedade (ii) da Definição (3.1.1), vemos que X_r é positivamente invariante sob ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global, segue que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e ponto-dissipativo. É imediato que $\{T_r(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, assintoticamente compacto, ponto-dissipativo e, consequentemente, que $\{T_r(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global, que será denotado por $\mathcal{A}^{(j)}$.

A restrição de V a X_r , denotado por V_r , é claramente uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \geq 0\}$ associada a $\{\Xi_l : V(\Xi_l) < n_j\}$.

Obtemos, pelo Teorema 3.1.3, a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$.

Seja $\tilde{\Xi} \in \Xi$. Mostremos que se $V(\tilde{\Xi}) = n_1$, então $W^u(\tilde{\Xi}) = \tilde{\Xi}$. Pela invariância de $\tilde{\Xi}$, é imediato que $\tilde{\Xi} \subset W^u(\tilde{\Xi})$.

Seja $y \in W^u(\tilde{\Xi})$. Então existe solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por y tal que $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \tilde{\Xi}$. Pela continuidade de $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(\phi(t))$, temos que $V(\phi(t)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} n_1$ e como esta função é decrescente, $V(\phi(t)) = n_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo Ξ uma família disjunta, temos que $V(\phi(\mathbb{R})) \subset \tilde{\Xi}$ e, em particular, $y \in \tilde{\Xi}$. Logo, $W^u(\tilde{\Xi}) \subset \tilde{\Xi}$.

Provemos, agora, a última afirmação do teorema. Seja $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{\text{dist}(\tilde{\Xi}, \hat{\Xi})\}$, em que este mínimo é tomado sobre os conjuntos $\tilde{\Xi}, \hat{\Xi} \in \Xi$, com $\tilde{\Xi}, \hat{\Xi} \subset \mathcal{A}^{(1)}$ e $\tilde{\Xi} \neq \hat{\Xi}$.

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in \mathcal{O}_\epsilon(\tilde{\Xi})$ de forma que $T(t)x_\epsilon$ não converge para $\tilde{\Xi}$ quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, existe $0 < \delta < \delta_0$ e sequências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{\Xi}$, $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e $d(T(t_k)x_k, \tilde{\Xi}) \geq \delta$.

Sendo $\{T(t) : t \geq 0\}$ assintoticamente compacto, $\{T(t_k)x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, cujo limite será denotado por y .

Como n_1 é o valor mínimo de V em X , temos que

$$n_1 = V(\tilde{\Xi}) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} V(T(t_k)x_k) = V(y) \geq n_1$$

e

$$n_1 = V(\tilde{\Xi}) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} V(T(t + t_k)x_k) = V(T(t)y) \geq n_1$$

Assim, $V(y) = V(T(t)y) = n_1$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \tilde{\Xi}$.

Como $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{\Xi}$, temos que $d(y, \tilde{\Xi}) < \delta_0$ e $y \in \tilde{\Xi}$.

Mas $d(y, \tilde{\Xi}) = \delta$, o que é um absurdo.

Assim, para cada $\tilde{\Xi} \subset \mathcal{A}^{(1)}$, existe $0 < \delta' < \delta_0$ tal que, se $x \in \mathcal{O}_{\delta'}(\tilde{\Xi})$, então $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tilde{\Xi}$, provando o que queríamos.

□

3.2 Semigrupos dinamicamente gradientes

Nesta seção, vamos definir os semigrupos dinamicamente gradientes. Estes semigrupos possuem as mesmas propriedades dinâmicas dos semigrupos gradientes, mas não requerem uma função de Lyapunov.

Vamos, também, mostrar que um semigrupo dinamicamente gradiente é um semigrupo gradiente.

Por fim, vamos provar a estabilidade topológica desses semigrupos, ou seja, que uma pequena perturbação de um semigrupo gradiente continua sendo gradiente.

Definição 3.2.1. *Seja Ξ um conjunto invariante para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Dizemos que Ξ é um **conjunto invariante isolado** quando for o conjunto invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(\Xi)$ para algum $\delta > 0$. Dizemos que $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ é uma **coleção disjunta de conjuntos invariantes isolados** se cada Ξ_i for um conjunto isolado invariante e existir $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$.*

Lema 3.2.2 (Hiperbolicidade topológica). *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global de $\{T(t) : t \geq 0\}$. Suponha que U, V sejam conjuntos abertos de X , com $\bar{U} \subset V$, e Ξ o subconjunto invariante maximal de V .*

Se existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t) \in U$ para todo $t \geq t_0$, então $d(\xi(t), \Xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Analogamente, se existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t) \in U$ para todo $t \leq t_0$, então $d(\xi(t), \Xi) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.

Demonstração. Vamos supor que exista $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t) \in U$ para todo $t \geq t_0$.

Suponhamos, por absurdo, que exista $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $d(\xi(t_n), \Xi) \geq \epsilon$. Como o semigrupo é assintoticamente compacto, a sequência $\{\xi(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Vamos, então, assumir que $\xi(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Então $d(y, \Xi) \geq \epsilon$ e y pertence ao conjunto ω -limite de $x_0 = \xi(0)$.

Logo, $y \in \omega(x_0) \subset \overline{U}$, $\Xi \subset \omega(x_0) \cup \Xi \subset V$ e $\omega(x_0) \cup \Xi$ é um subconjunto invariante de V que não está contido em Ξ . Isso contradiz a hipótese de que Ξ é o subconjunto invariante maximal de V . Assim $d(\xi(t), \Xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

O outro caso é análogo. □

Definição 3.2.3. *Seja $\Xi^* \in \Xi$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0 := \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq j \leq n} \text{dist}(\Xi_i^*, \Xi_j^*)$. Uma ϵ -cadeia de Ξ^* até Ξ^* consiste de:*

- (1) *Uma sub-coleção disjunta $\{\Xi_{l_1}, \dots, \Xi_{l_k}\}$ de Ξ com $\Xi_{l_1} = \Xi_{l_{k+1}} = \Xi^*$;*
- (2) *Um conjunto de pontos $\{x_1, \dots, x_k\}$ em X , com $d(x_i, \Xi_{l_i}) < \epsilon$, para $i = 1, \dots, k$;*
- (3) *Sequências finitas de números reais positivos $\{t_1, \dots, t_k\}$ e $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, com $\tau_i < t_i < \tau_{i+1}$, para todo $i = 1, \dots, k-1$, e $\tau_k < t_k$, tais que*

$$d(T(t_i)x_i, \Xi_{l_{i+1}}) < \epsilon, \text{ para todo } i = 1, \dots, k$$

e

$$d(T(\tau_i)x_i, \bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_{\epsilon_0}(\Xi_{l_j})) > 0$$

Um conjunto invariante isolado $\Xi^ \in \Xi$ é **recorrente por cadeia** se existir $\delta \in (0, \epsilon_0)$ e ϵ -cadeias de Ξ^* até Ξ^* , para cada $\epsilon \in (0, \delta)$.*

Definição 3.2.4. *Seja X um espaço métrico, $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo dinamicamente gradiente** se as duas condições seguintes ocorrem:*

(G1) *Existe uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ em $\mathcal{A}$, com a propriedade de que qualquer solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

(G2) *Ξ não possui nenhum conjunto invariante isolado recorrente por cadeia.*

Observação 3.2.5. *Nas definições anteriores, cada Ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, é compacto.*

De fato, fixemos $1 \leq i \leq n$. Como $\Xi_i \subset \mathcal{A}$, basta mostrar que Ξ_i é fechado. Como Ξ_i é invariante, $\overline{\Xi_i}$ também é invariante. Disso, se Ξ_i não for fechado, ele não pode ser o invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i)$, para $\delta > 0$. Assim, Ξ_i é fechado e, logo, compacto.

Lema 3.2.6. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente, com uma coleção disjunta de conjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ e atrator global $\mathcal{A}$. Dado $x \in X$, existe $\Xi_j \in \Xi$ tal que $d(T(t)x, \Xi_j) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.*

Demonstração. Seja $y \in X$ e $0 < 2\delta_0 < \min_{1 \leq i < j \leq n} \text{dist}(\Xi_i, \Xi_j)$ e notemos que, dado $\delta \in (0, \delta_0)$, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que se $d(y, \Xi_i) < \delta'$ e, para algum $t_y > 0$, $d(T(t_y)y, \Xi_i) \geq \delta$, então $d(T(t)y, \Xi_i) > \delta'$ para todo $t \geq t_y$.

Se isso não ocorresse, poderíamos tomar seqüências $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X , $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tais que $d(y_k, \Xi_i) < \frac{1}{k}$, $d(T(t_k)y_k, \Xi_i) \geq \delta$ e $d(T(\tau_k)y_k, \Xi_i) < \frac{1}{k}$, com $t_k < \tau_k$, o que contradiz (G2).

Sejam $x \in X$ e $B := \overline{\gamma^+(x)}$. Como existe um atrator global, B é limitado. Pelo Lema 3.5.3, dado δ' , existe $T_0 = T_0(\delta', B) \in \mathbb{R}$ tal que, $T(t)y \in \mathcal{O}_{\delta'}(\bigcup_{i=1}^n \Xi_i)$ para $y \in B$ e algum $t \in [0, T_0]$.

Isso equivale a dizer que, para cada $s \in \mathbb{R}^+$, existe um $t \in [s, s + T_0]$ e $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $T(t)x \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_i)$.

Vamos supor que a conclusão do lema seja falsa. Então podemos encontrar uma seqüência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\delta \in (0, \delta_0)$ tais que $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e $d(T(t_k)x, \Xi_j) \geq \delta$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Mas, para cada t_k , existe $\sigma_k \in [t_k, t_k + T_0]$ tal que $T(\sigma_k)x \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_i)$, para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Também temos, tomando uma subsequência se necessário, que $t_{k+1} > \sigma_k$. Isso contradiz a primeira parte da demonstração já que Ξ é finito. Assim, temos que $d(T(t)x, \Xi_j) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$.

□

3.3 Estruturas homoclínicas

Definição 3.3.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente com uma coleção disjunta de conjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$, atrator global $\mathcal{A}$ e*

$0 < 2\delta < \min_{1 \leq i < j \leq n} \text{dist}(\Xi_i, \Xi_j)$. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é uma coleção de conjuntos $\{\Xi_{l_1}, \dots, \Xi_{l_k}\} \subset \Xi$ e uma coleção de soluções globais limitadas $\{\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$, com $\Xi_{l_{k+1}} := \Xi_{l_1}$, tais que

$$(i) \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_i(t) = \Xi_{l_i}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_i(t) = \Xi_{l_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(iii) \min_{j=1, \dots, k} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(\xi_j(t), \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_i)) > 0$$

Lema 3.3.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com uma coleção disjunta de conjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ e atrator global $\mathcal{A}$ que satisfaz (G1). Então (G2) é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.*

Demonstração. Vamos supor que $\mathcal{A}$ possua uma estrutura homoclínica.

Então existe uma coleção de conjuntos $\{\Xi_{l_1}, \dots, \Xi_{l_k}\} \subset \Xi$ e uma coleção de soluções globais limitadas $\{\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X, 1 \leq i \leq k\}$, com $\Xi_{l_{k+1}} := \Xi_{l_1}$, tais que

$$(i) \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_i(t) = \Xi_{l_i}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_i(t) = \Xi_{l_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(iii) \min_{j=1, \dots, k} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(\xi_j(t), \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_i)) > 0$$

Desses fatos, os requisitos da Definição (3.2.3) são imediatos.

Agora, vamos supor que um dos conjuntos invariantes isolados $\Xi \in \Xi$ seja recorrente por cadeia. Então, após reordenarmos Ξ , temos que existem $\{\Xi_1, \dots, \Xi_l\}$ e, para cada inteiro positivo k , pontos $x_1^k, \dots, x_l^k$ e números positivos $t_1^k, \dots, t_l^k$ tais que

$$d(x_i^k, \Xi_i) < \frac{1}{k}, \quad d(T(t_i^k)x_i^k, \Xi_{i+1}) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Adicionando, se necessário, mais conjuntos invariantes isolados às $\frac{1}{k}$ -cadeias, podemos assumir que $\overline{\bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{t \in [0, t_i^k]} T(t)x_i^k} \cap \Xi_j = \emptyset$ para j diferente de i e de $i+1$.

Tomemos $0 < 2\delta < \min\{\text{dist}(\Xi_i, \Xi_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ e números positivos $\tau_1^k, \dots, \tau_l^k$ de forma que $d(T(t)x_i^k, \Xi_i) < \delta$ para todo $0 \leq t \leq \tau_i^k$ e $d(T(\tau_i^k)x_i^k, \Xi_i) = \delta$.

Podemos supor que $\tau_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ pois, caso contrário, poderíamos assumir que $\tau_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tau_i^0 \in \mathbb{R}$, $x_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_i^0 \in \Xi_i$ e que $d(T(\tau_i^0)x_i^0, \Xi_i) = \delta$, contrariando a invariância de Ξ_i .

Sendo $\{T(t) : t \geq 0\}$ assintoticamente compacto, existe uma subsequência de $\{T(\tau_i^k)x_i^k : k \in \mathbb{N}\}$ convergindo para $z_i^0 \in X$ quando $k \rightarrow \infty$. Essa subsequência será denotada da mesma forma por simplicidade. Podemos tomar uma subsequência dessa nova sequência obtida tal que $\{T(\tau_i^k - 1)x_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convirja para z_i^1 . Repetindo o processo, temos, para cada natural n , um ponto z_i^n tal que $T(\tau_i^k - n)x_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_i^n$.

Vamos definir $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X$ por

$$\xi_i(t) = \begin{cases} T(t)z_i^0 & t \geq 0 \\ T(n+t)z_i^n & t \in [-n, -n+1), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Notemos que $T(1)z_i^n = T(1)\lim_{k \rightarrow \infty} T(\tau_i^k - n)x_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\tau_i^k - (n-1))x_i^k = x_i^{n-1}$.

A partir disso é fácil ver que ξ_i é uma solução global.

Para $t \in [-\tau_i^k, \infty)$, definamos $\xi_i^k(t) := T(\tau_i^k + t)x_i^k$. É claro que $d(\xi_i^k(t), \Xi_i) \leq \delta$ para $t \in [-\tau_i^k, 0]$ e que para cada n natural, novamente tomando uma subsequência, temos que $\xi_i^k(-n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_i^n$. Assim, fixado $t \in \mathbb{R}$, temos dois casos a considerar:

- $t \geq 0$:

$$\xi_i^k(t) = T(t)\xi_i^k(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(t)z_i^0 = \xi_i(t).$$

- $t \in [-n, -n+1), n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\xi_i^k(t) = T(t+n)\xi_i^k(-n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(n+t)z_i^n = \xi_i(t).$$

Assim $\xi_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_i^k(t)$ e, para todo $t \leq 0$, temos que $\xi_i(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi_i)$ e $d(\xi_i(0), \Xi_i) = \delta$.

Como vale (G1) e $\overline{\bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{t \in [0, t_i^k]} T(t)x_i^k} \cap \Xi_j = \emptyset$ para j diferente de i e de $i+1$, temos que $\xi_i(t) \rightarrow \Xi_i$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $\xi_i(t) \rightarrow \Xi_{i+1}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Disso, existem $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ tais que $d(\xi_i(t), \Xi_i) < 1$, se $t < \tau_1$, e $d(\xi_i(t), \Xi_{i+1}) < 1$, se $t > \tau_2$. Então ξ_i é limitado em $(-\infty, \tau_1] \cup [\tau_2, +\infty)$ e, sendo $[\tau_1, \tau_2]$ um compacto, ξ_i é limitada.

Assim, todas as propriedades para que $\mathcal{A}$ tenha uma estrutura homoclínica foram satisfeitas.

□

Corolário 3.3.3. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ for um semigrupo dinamicamente gradiente com uma família de conjuntos invariantes disjuntos $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ e $\mathcal{A}$ for seu atrator global, então existem conjuntos invariantes isolados Ξ_α e Ξ_ω tais que Ξ_α possui um conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$, ou seja, $W^s(\Xi_\alpha) \cap \mathcal{A} = \Xi_\alpha$, onde*

$$W^s(\Xi_\alpha) := \{y \in X : T(t)y \rightarrow \Xi_\alpha \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e Ξ_ω possui conjunto instável trivial, ou seja, $W^u(\Xi_\omega) = \Xi_\omega$, onde

$$W^u(\Xi_\omega) := \{y \in X : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ tal que } \xi(0) = y \text{ e } \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_\omega\}$$

Demonstração. Provemos que existe um conjunto invariante isolado Ξ_ω com conjunto instável trivial.

É claro que $\Xi_i \subset W^u(\Xi_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Para provarmos a recíproca, suponha que, para cada i , exista $y_i \notin W^u(\Xi_i)$ e uma solução global $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X$ por y_i tal que $\xi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i$.

Podemos definir $\Xi_{l_1} := \Xi_1$. Como vale (G1), $\xi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{l_2}$, para algum $l_2 \neq l_1$. Da mesma forma, existe $\xi_{l_2}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{l_3}$, para algum $l_3 \neq l_2$.

Assim, vemos que, após um número finito de repetições do processo acima, temos uma estrutura homoclínica, contradizendo (G2). Assim, a existência de um conjunto instável trivial está provada.

Podemos proceder de forma semelhante para mostrar a existência de um conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$. Para isso, devemos construir uma estrutura homoclínica notando que existem soluções globais $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X$ por y_i para todo $y_i \in W^s(\Xi_i) \cap \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$ tais que $\xi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \Xi_i$. □

Lema 3.3.4. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente com respeito à coleção de*

conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com relação a Ξ .

Demonstração. Primeiramente, mostremos que vale (G1). Seja $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global. Pelo Lema 3.1.2, existem $1 \leq i, j \leq n$ tais que $\omega(\xi) \subset \Xi_j$ e $\alpha(\xi) \subset \Xi_i$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \omega(\xi)) = 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0$. De forma análoga, $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i) = 0$.

Mostremos, por contradição, que não existem estruturas homoclínicas associadas a Ξ .

Seja $\{\Xi_1, \dots, \Xi_k\}$ e $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, $1 \leq k \leq n$ uma estruturas homoclínica associada a Ξ (após uma possível reordenação). Assim, temos que $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ é tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_j(t) = \Xi_j \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_j(t) = \Xi_{j+1}$$

para $j = 1, 2, \dots, k$ e $\Xi_{k+1} := \Xi_1$.

O caso $k = 1$ é demonstrado pela corolário anterior. Vamos, então, considerar $k \geq 2$.

Definamos as constantes L_j por $L_j := V|_{E_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que $L_j \geq V(\xi_j(t)) \geq L_{j+1}$. Assim,

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_k \geq L_{k+1} = L_1.$$

Então existe L real tal que $L_j = L$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$.

Dados $t_1 < t_2$, temos

$$L = L_j \geq V(\xi_j(t_1)) \geq V(\xi_j(t_2)) \geq L_{j+1} = L.$$

Dessa forma, $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(\xi_j(t))$ é constante. Isso implica que $\xi_j(\mathbb{R}) \subset \Xi_p$ para algum $p = 1, 2, \dots, n$.

Como cada Ξ_j é um conjunto invariante isolado e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_j(t) = \Xi_j$, $\xi_j(\mathbb{R}) \subset \Xi_j$. Analogamente, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_j(t) = \Xi_{j+1}$, $\xi_j(\mathbb{R}) \subset \Xi_{j+1}$ e, logo, $\Xi_j = \Xi_{j+1}$. Isso quer dizer que existe $\Xi \in \Xi$ tal que $\Xi_j = \Xi$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$ e obtemos uma contradição. $\square$

3.4 Equivalência entre semigrupos dinamicamente gradientes e gradientes

Definição 3.4.1. Dizemos que uma família de semigrupo $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ é **coletivamente assintoticamente compacta** em $\eta = 0$ se, dadas as sequências $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0,1]$, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada em X e $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ tais que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, então $\{T_{\eta_k}(t_k)x_k\}$ é relativamente compacto em X .

Lema 3.4.2. Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta. Sejam as sequências $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$, $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0,1]$ e $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X tais que $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e $\{x_k\}$ é limitada.

Definamos $I_k := [-t_k, \infty)$ e $\xi_k : I_k \rightarrow X$ dada por $\xi_k(t) = T_{\eta_k}(t + t_k)$, para $t \in I_k$ e $k \in \mathbb{N}$.

Então existe uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ e uma subsequência de $\{\xi_k\}$ que converge uniformemente para ξ_0 em compactos de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sendo a família de semigrupos compactamente assintoticamente compacta, podemos tomar $z_0 \in X$ e $N_0 \subset \mathbb{N}$, com N_0 um conjunto infinito, tais que

$$z_0 = \lim_{k \in N_0} T_{\eta_k}(t_k)x_k.$$

Definamos $\xi_0^{(0)} : [0, \infty) \rightarrow X$ por

$$\xi_0^{(0)}(t) = T_0(t)z_0, t \geq 0.$$

Sejam $z_1 \in X$ e $N_1 \subset N_0$ de forma que $t_k > 1$ para todo $k \in N_1$ e

$$z_1 = \lim_{k \in N_1} T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k.$$

Definamos $\xi_0^{(1)} : [-1, 0] \rightarrow X$ por

$$\xi_0^{(1)}(t) = T_0(t + 1)z_1, t \in [-1, 0].$$

Notemos que

$$\xi_0^{(1)}(0) = T_0(1) \lim_{k \in N_1} T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = \lim_{k \in N_1} T_{\eta_k}(1)T_{\eta_k}(t_k - 1)x_k = \lim_{k \in N_1} T_{\eta_k}(t_k)x_k = z_0 = \xi_0^{(0)}(0).$$

Repetindo essa construção, dado $n \in \mathbb{R}$, obtemos $N_n \subset N_{n-1}$ e um ponto z_n tais que

$$z_n = \lim_{k \in N_n} T_{\eta_k}(t_k - n)x_k.$$

Definamos $\xi_0^{(n)} : [-n, -n + 1] \rightarrow X$ por

$$\xi_0^{(n)}(t) = T_0(t + n)z_n, \quad t \in [-n, -n + 1].$$

Finalmente, seja $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \xi_0^{(0)}(t), & \text{se } t \geq 0 \\ \xi_0^{(n)}(t), & \text{se } t \in [-n, -n + 1]. \end{cases}$$

É fácil ver que $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$.

Vamos definir o conjunto N^* de forma que seu n -ésimo elemento seja o n -ésimo elemento do conjunto N_n . Então N^* é um conjunto infinito e vamos mostrar que $\{\xi_k\}_{k \in N^*}$ converge para ξ_0 .

Sejam $C_0 := \overline{\{T_{\eta_k}(t_k)x_k : k \in N_0\}}$ e $0 \leq a < b$. Pela continuidade da família, temos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, k \in N_0} \sup_{(t,x) \in [a,b] \times C_0} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) = 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) &= d(T_{\eta_k}(t + t_k)x_k, T_0(t)z_0) \\ &\leq d(T_{\eta_k}(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k) + d(T_0(t)T_{\eta_k}(t_k)x_k, T_0(t)z_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformemente para em $[a, b]$ quando $k \in N_0$ e $k \rightarrow \infty$, já que $T_{\eta_k}(t_k)x_k \in C_0$.

Tomemos, agora, $n \in \mathbb{N}$ e definamos o compacto $C_n := \overline{\{T_{\eta_k}(t_k - n)x_k : k \in N_n\}}$.

Então

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, k \in N_n} \sup_{(t,x) \in [-n, -n+1] \times C_n} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) = 0$$

e concluímos, analogamente, que

$$\sup_{t \in [-n, -n+1]} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) \rightarrow 0$$

quando $k \in N_n$ e $k \rightarrow \infty$.

Por fim, como N^* é um subconjunto de N_n (a partir do n -ésimo elemento), se $K \subset \mathbb{R}$ for um compacto, então existe um número finito de intervalos da forma $[a, b]$ e $[-n, -n+1]$ que cobrem K e obtemos que

$$\sup_{t \in K} d(\xi_k(t), \xi_0(t)) \rightarrow 0$$

quando $k \in N^*$ e $k \rightarrow \infty$.

□

3.4.1 Decomposição de Morse para semigrupos dinamicamente gradientes

Definição 3.4.3. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que um subconjunto Ξ não-vazio de $\mathcal{A}$ é um **atrator local** se existir $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$.*

*O **repulsor** Ξ^* associado ao atrator local Ξ é o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \emptyset\}$$

O par (Ξ, Ξ^) é chamado de um **par atrator-repulsor** para $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Lema 3.4.4. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Se Ξ for um atrator local, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\Xi^* \cap \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) = \emptyset$. Além disso, Ξ^* é fechado e invariante.*

Demonstração. Pela definição de atrator local, existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$. Assim, se $x \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$, então $\omega(x) \cap \Xi \neq \emptyset$ e $x \notin \Xi^*$, provando a primeira afirmação.

Notemos, agora, que $\omega(T(t)x) = \omega(x)$ para todo $t \geq 0$ e, consequentemente, $x \in \Xi^*$ se, e somente se, $T(t)x \in \Xi^*$, provando a invariância.

Por fim, seja $x \in \overline{\Xi^*}$. Então existe $y \in \Xi^*$ tal que $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Com isso, $d(x, \Xi) > \frac{\epsilon}{2}$. Assim, $\text{dist}(\overline{\Xi^*}, \Xi) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Como Ξ^* é invariante, seu fecho também é invariante e $d(T(t)x, \Xi) \geq \frac{\epsilon}{2}$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, mostrando que $\omega(x) \cap \Xi = \emptyset$ e que $x \in \Xi^*$.

□

Definição 3.4.5. Uma n -upla ordenada $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ de conjuntos invariantes isolados é chamada de **decomposição de Morse** de $\mathcal{A}$ se, para toda solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$, tivermos que

$$\Xi_j \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_i, \text{ com } j > i,$$

ou

$$\phi(\mathbb{R}) \subset \Xi_i,$$

para algum $i \leq n$.

Lema 3.4.6. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Se Ξ for um compacto invariante e existir $\epsilon > 0$ tal que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ então, dado $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, onde $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)} \bigcup_{t \geq 0} T(t)x$.

Demonstração. Dado $0 < \delta < \epsilon$, se não existir $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, então existem $x \in \Xi$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em X e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em $\mathbb{R}^*$ tais que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $d(T(t_n)x_n, \Xi) = \delta$ e $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, para todo $t \in [0, t_n]$.

Se $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_0 \in \mathbb{R}$, então $d(T(t_0)x, \Xi) = \delta$, o que é um absurdo. Por isso, podemos supor que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Definamos, para cada n , $\xi_n : [-t_n, \infty) \rightarrow X$ dado por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$. Como já feito anteriormente, tomando uma subsequência denotada da mesma forma, podemos

assumir que existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\xi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por essa construção, vemos que $\xi((-\infty, 0])$ é limitada.

Temos, também, que existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $d(\xi(t), \mathcal{A}) < 1$ se $t > \tau$. Então ξ_i é limitado em $(-\infty, 0] \cup [\tau, +\infty)$ e, sendo $[0, \tau]$ um compacto, ξ é limitada. Logo $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$.

Dessa forma, temos que $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ para $t \leq 0$ e $d(\xi(0), \Xi) = \delta$.

Mas dado $t \in \mathbb{R}$, $d(T(t)\xi(-t), \Xi) = d(\xi(0), \Xi) = \delta$, contrariando a hipótese que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$.

□

Lema 3.4.7. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em um espaço métrico X com atrator global $\mathcal{A}$ e $S(t) := T(t)|_{\mathcal{A}}$. Então $\{S(t) : t \geq 0\}$ é claramente um semigrupo no espaço métrico $\mathcal{A}$. Se Ξ for um atrator local para $\{S(t) : t \geq 0\}$ no espaço métrico $\mathcal{A}$ e K for um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap \Xi^* = \emptyset$, então Ξ atrai K . Além disso, Ξ é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X .*

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$ tal que $K \cap \Xi^* = \emptyset$. Se Ξ não atrai K , então existem $\delta > 0$, $x \in K$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em K e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ em $\mathbb{R}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $d(T(t_n)x_n, \Xi) \geq \delta$. Pelo Lema (3.4.6), existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $d(T(t)x_n, \Xi) \geq \delta'$ para todo $t \in [0, t_n]$. Isso implica que $d(T(t)x, \Xi) > \delta'$ para todo $t \geq 0$ e, conseqüentemente, que $\omega(x) \cap \Xi = \emptyset$. Isso contradiz o fato que $K \cap \Xi^* = \emptyset$, provando o primeiro resultado.

Para a última afirmação, notemos que existe $\delta > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \emptyset$ para todo $\delta' \in (0, \delta)$. Pela invariância de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ e como Ξ atrai subconjuntos compactos de $\mathcal{A}$ que não interceptam Ξ^* , temos que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Assim, como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$, temos que Ξ é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X .

□

Lema 3.4.8. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em um espaço métrico X com atrator global $\mathcal{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*) . Se uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ for tal que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$, para todo $t \leq 0$, para algum $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \emptyset$, então $d(\xi(t), \Xi^*) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.*

Demonstração. Suponha a conclusão seja falsa. Então existem $\delta' > 0$ e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $d(\xi(-t_n), \Xi^*) \geq \delta'$.

Assim, considerando o compacto $K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, \Xi^*) \geq \delta'\}$, temos que $x_n := \xi(-t_n) \in K$ e $T(t_n)x_n = \xi(0)$, ou seja, Ξ não atrai K , contrariando o Lema (3.4.7). $\square$

Lema 3.4.9. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X com atrator global $\mathcal{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ, Ξ^*) . Se $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ for uma solução global limitada de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, então $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$ e $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi^*$. Além disso, se $x \in X \setminus \mathcal{A}$, então $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi \cup \Xi^*$.*

Demonstração. Como $x \in \mathcal{A}$ e $x \notin \Xi^*$, pelo Lema 3.4.7, temos que $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$.

Vamos supor que $\xi \not\rightarrow \Xi^*$ quando $t \rightarrow -\infty$ e dividir a demonstração em dois casos.

- (1) Se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \emptyset$, então $\xi(\mathbb{R})$ é invariante, contém um ponto que não está em Ξ^* e, pelo Lema 3.4.7, é atraído por Ξ . Assim

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(T(t)\xi(\mathbb{R}), \Xi) = \text{dist}_H(\xi(\mathbb{R}), \Xi),$$

o que é um absurdo.

- (2) Se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \emptyset$, então, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existem sequências $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, $\xi(-t_n + \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \in \Xi^*$, $d(\xi(-t_n + t), \Xi^*) \leq \delta$ para $0 \leq t \leq \tau_n$ e $d(\xi(-t_n), \Xi^*) = \delta$. Disso, podemos obter uma solução global $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ de forma que $d(\zeta(t), \Xi^*) \leq \delta$ para todo $t \geq 0$. Assim, $\omega(\zeta(0)) \notin \Xi$, o que implica que $\zeta(0) \in \Xi^*$, contrariando o fato de $d(\zeta(0), \Xi^*) = \delta$.

Agora, suponha que $x \in X \setminus \mathcal{A}$ e provemos que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi \cup \Xi^*$. Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \emptyset$, dado $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $d(T(t_\epsilon)x, \Xi) < \epsilon$ e, sendo Ξ um atrator local, $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi$.

Agora, se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi = \emptyset$, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \emptyset$. Mostremos que $T(t)x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi^*$. Se isso não fosse verdade, então existiriam $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $d(T(t_n)x, \Xi^*) \geq \epsilon$.

Seja, para cada $n \in \mathbb{R}$, a função $\xi_n : [-t_n, \infty)$, dada por $\xi_n(t) = T(t + t_n)x$. Fixado $t > 0$ e tomando subsequência, podemos definir a solução global ξ por $\xi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(t)$, que satisfaz $d(\xi(0), \Xi^*) \geq \epsilon$ e $d(\xi(t), \Xi) \geq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos então um absurdo, já que $\omega(\xi(0)) \cap \Xi = \emptyset$ e $\xi(0) \notin \Xi^*$. $\square$

Lema 3.4.10. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente em um espaço métrico X , com atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$. Então existe $1 \leq i \leq n$ tal que Ξ_i é um atrator local.*

Demonstração. Suponha que não exista nenhum atrator local em Ξ . Como Ξ_1 não é um atrator local, dado $\epsilon > 0$ existe $x_1 \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_1) \cap \mathcal{A}$ e um número real τ_1 tal que $T(\tau_1)x_1 \notin \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_1)$.

Pelo Lema 3.2.6, existe $t_1 > \tau_1$ tal que $T(t_1)x_1 \in \mathcal{O}_\epsilon(\Xi_j)$ para algum $1 \leq j \leq n$. Se $j = 1$, temos uma contradição com a propriedade (G2). Caso contrário, como Ξ_j não é um atrator local, podemos repetir o processo e construir uma ϵ -cadeia, já que Ξ possui um número finito de elementos e vamos obter, novamente, uma contradição com (G2). $\square$

Vamos, agora, descrever a construção da decomposição de Morse dos atratores de um semigrupo dinamicamente gradiente. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente e $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$ uma coleção de conjuntos invariantes isolados. Podemos assumir, após uma possível reordenação, que Ξ_1 é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$. Temos, também, que

$$\Xi_1^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap \Xi_1 = \emptyset\}$$

Então cada Ξ_i , $i > 1$, está contido em Ξ_1^* e, se $a \notin \mathcal{A} \setminus \{\Xi_1 \cup \Xi_1^*\}$, uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por a satisfaz

$$\Xi_1^* \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_1$$

Já foi mostrado que Ξ_1^* é invariante sob a ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Vamos considerar, agora, a restrição $T_1(t)$ de $T(t)$ a $\Xi_1^* =: \{E_1^*\}_0$. Ao fazermos esta restrição, todas as soluções globais $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tais que $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_1$ foram removidas, ou seja, se $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ for uma solução global de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_i$, então $i > 1$.

É imediato que $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ herda as propriedades (G1) e (G2) de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e, então, $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com a coleção de conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_2, \dots, \Xi_n\}$.

Podemos assumir que Ξ_2 é um atrator local para $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ em Ξ_1^* . Se $\{\Xi_2\}_1^*$ for o repulsor associado ao conjunto invariante isolado Ξ_2 para $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ em Ξ_1^* ,

podemos considerar a restrição $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ de $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ a $\{\Xi_2\}_1^*$, que é um semi-grupo dinamicamente gradiente em $\{\Xi_2\}_1^*$ com conjuntos invariantes disjuntos associados $\{\Xi_3, \dots, \Xi_n\}$. Ao fazermos isso, removemos todas as soluções globais $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tais que $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_1$ e, se $\Xi_j \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_2$, então $j \geq 2$.

Podemos repetir este procedimento n vezes, obtendo uma reordenação de $\{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$, de forma que Ξ_j é um atrator local para a restrição de $\{T(t) : t \geq 0\}$ a $\{\Xi_{j-1}\}_{j-2}^*$, considerando que $\{\Xi_0\}_{-1}^* = \mathcal{A}$.

Com essa construção, se uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ é tal que $\Xi_l \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_k$ então $l \geq k$.

Isso prova que $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$, denotada da mesma forma após reordenação, é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Vamos provar que, para uma sequência apropriada de atratores locais $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = \mathcal{A}$, podemos construir uma decomposição de Morse Ξ .

Para isso, vamos utilizar

$$W^u(\Xi_i) = \{x \in X : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ com} \\ \xi(0) = x \text{ tal que } \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i\}$$

Vamos, também, definir $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \Xi_1$ e, para $j = 2, 3, \dots, n$

$$A_j = \bigcup_{i=1}^j W^u(\Xi_i) \quad (3.4.1)$$

Por essa construção, vemos que $A_n = \mathcal{A}$. (Teorema (3.1.3))

Lema 3.4.11. *Seja A_j definido como em (3.4.1)). Então, para cada $j = 0, \dots, n$, A_j é compacto.*

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que cada $W^u(\Xi_i)$ é fechado, já que eles são subconjuntos de $\mathcal{A}$.

Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ uma sequência em $W^u(\Xi_i)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in \mathcal{A}$. Para cada k , existe uma solução global $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por x_k tal que $\xi_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i$.

Tomando o limite de uma subsequência, obtemos uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por x tal que $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i$. Assim, provamos que $x \in W^u(\Xi_i)$. $\square$

Lema 3.4.12. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente associado à coleção de conjuntos invariantes disjuntos $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$, ordenada de forma a ser uma decomposição de Morse. Então A_j dado por (3.4.1)) é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X e*

$$\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*, j = 1, \dots, n$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) \cap (\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i) = \emptyset$. Se isso não fosse verdade, existiria uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $x_k \in \bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i$ tal que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A_j$. Como a união de conjuntos considerada contém um número finito de conjuntos, podemos assumir que $x_k \in \Xi_{i_0}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, para algum $j+1 \leq i_0 \leq n$ fixado. Pelo Lema 3.4.11, podemos assumir, tomando uma subsequência, que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in A_j \cap \Xi_{i_0} = \emptyset$, o que é um absurdo.

Pelo Lema 3.4.7, é suficiente provarmos que A_j é um atrator local para $\{T(t) : t \geq 0\}$ restrito a $\mathcal{A}$.

Mostremos que, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_j)$.

Caso contrário, poderíamos encontrar $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$(i) \quad t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$(ii) \quad x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A_j$$

$$(iii) \quad d(T(t_k)x_k, A_j) = \delta$$

$$(iv) \quad d(T(t)x_k, A_j) \leq \delta, \text{ se } t \in [0, t_k]$$

Definamos $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow X$, onde $\xi_k(t) = T(t+t_k)x_k$. Pelo Lema 3.4.2, podemos admitir a existência de uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de modo que $d(\xi(0), A_j) = \delta$ e $d(\xi(t), A_j) \leq \delta$ se $t < 0$.

Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente, $\xi(t) \rightarrow \Xi_k$ quando $t \rightarrow -\infty$ para algum $1 \leq k \leq n$. Mas como $\mathcal{O}_{\delta_0}(A_j) \cap (\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i) = \emptyset$ e $d(\xi(t), A_j) \leq \delta$, $t < 0$, temos que $k \leq j$.

Dessa forma, $\xi(0) \in W^u(\Xi_j) \subset A_j$, o que contradiz $d(\xi(0), A_j) = \delta$. Assim, provamos que, para todo $0 < \delta < \delta_0$, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \mathcal{O}_{\delta}(A_j)$.

Disso, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset \overline{\mathcal{O}_{\delta}(A_j)} \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A_j)$. Se $x \in \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$, então existe solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x e $\xi(t) \in \mathcal{O}_{\delta'}(A_j)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Notemos também que $\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_i$, para algum $i \leq j$, ou seja $x \in W^u(\Xi_i) \subset A_j$. Resumindo, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j)) \subset A_j$.

Por outro lado, $A_j \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A_j)$, o que implica que $\omega(A_j) \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$. Pela definição de A_j , é fácil ver que ele é invariante. Assim, $\omega(A_j) = \overline{A_j} \supset A_j$. Logo, $A_j \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j))$, provando que A_j é um atrator local.

Mostremos que $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$. Notemos que $A_{j-1}^* = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \emptyset\}$ e que se $z \in A_j \cap A_{j-1}^*$, então existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ por z tal que

$$\{\Xi_i : 1 \leq i \leq j\} \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \{\Xi_i : j \leq i \leq n\}$$

Como o semigrupo é dinamicamente gradiente e estamos trabalhando com uma decomposição de Morse, também temos que $\Xi_l \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_k$, com $l \geq k$. Como consequência $\Xi_j \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_j$ e, como não podemos ter estruturas homoclínicas, temos que $z \in \Xi_j$.

Por outro lado, se $x \in \Xi_j$, então $\omega(x) \subset \Xi_j$, $\omega(x) \cap A_{j-1} = \emptyset$ e $x \in A_{j-1}^*$. Por fim, é óbvio, da definição de A_j , que $\Xi_j \subset A_j$.

Provamos, então que $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

□

Lema 3.4.13. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente com a coleção de conjuntos variantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$, reordenada de forma a ser uma decomposição de Morse. Então*

$$\bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$$

Demonstração. Se $z \in \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$, então existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $z \in \Xi_k = A_k \cap A_{k-1}^*$.

Como $A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_n$, temos que $z \in A_j$, se $j \geq k$.

Também temos que $A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \dots \subset A_0^*$ e que $z \in A_j^*$, se $j < k$. Assim, $z \in (A_j \cup A_j^*)$, para $0 \leq j \leq n$. Fica então provado que $\bigcup_{i=1}^n \Xi_i \subset \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*)$.

Seja, agora, $z \in \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*)$. Sejam $K := \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $I := \{i \in K : z \in A_i\}$ e $J := \{j \in K : z \in A_j^*\}$

Como $A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_n$, podemos tomar $i = \min I$ e $I = \{i, i+1, \dots, n\}$. Notemos que $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J = K$, o que significa que $J = \{1, 2, \dots, i-1\}$.

Assim $z \in A_i$ e $z \in A_{i-1}^*$, ou seja, $z \in \Xi_i$ e a demonstração está completa.

□

3.4.2 Funções de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes

O objetivo desta seção é provarmos a equivalência entre semigrupos gradientes e semigrupos dinamicamente gradientes.

Para isso, nos próximos lemas, vamos construir uma função de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes.

Lema 3.4.14. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Então a função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A})$$

é bem definida, contínua, não-crescente em soluções de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.

Demonstração. Dado $x \in X$, existe $t_x > 0$ tal que $d(T(t)x, \mathcal{A}) \leq 1$, para todo $t \geq t_x$. Sendo $[0, t_x]$ um compacto e a função $[0, t_x] \ni t \mapsto d(T(t)x, \mathcal{A})$ contínua, vemos que $h(x)$ é finito e h está bem definida.

Pelo Lema (3.4.7), dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\mathcal{A})$, mostrando a continuidade de h em $\mathcal{A}$.

Sejam $x_0 \in X \setminus \mathcal{A}$ e $0 < \mu < h(x_0)$. Pela continuidade da função $X \ni x \mapsto d(x, \mathcal{A}) \in [0, \infty)$, podemos encontrar uma vizinhança limitada V de x_0 de forma que $d(z, \mathcal{A}) > \mu$, para todo $z \in V$. Existe, também, $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(\tau)V) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A})$. Assim, se $z \in V$, temos que $h(z) = \sup_{0 \leq s \leq \tau} d(T(s)z, \mathcal{A})$ e, pela continuidade de $\{T(t) : t \geq 0\}$, obtemos que h é contínua.

Por fim, se $z \in X$ e $t_2 \geq t_1 \geq 0$, então

$$\begin{aligned} h(T(t_1)z) &= \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} d(T(t+t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq t_1} d(T(t)z, \mathcal{A}) \\ &\geq \sup_{t \geq t_2} d(T(t)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_2)z, \mathcal{A}) = h(T(t_2)z) \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.15. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em um espaço métrico X com atrator global $\mathcal{A}$ e seja (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor em $\mathcal{A}$. Então existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:*

- (i) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em X .
- (ii) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é não-crescente em soluções de $\{T(t) : t \geq 0\}$.
- (iii) $f^{-1}(0) = \Xi$ e $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.
- (iv) Dado $z \in X$, se $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$, então $z \in (\Xi \cup \Xi^*)$.

Tal função pode ser definida por

$$f(x) = h(x) + k(x), \quad x \in X$$

em que

$$h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A}), \quad k(x) := \sup_{t \geq 0} l(T(t)x) \quad \text{e} \quad l(x) := \frac{d(x, \Xi)}{d(x, \Xi) + d(x, \Xi^*)}.$$

Demonstração. Sendo Ξ e Ξ^* subconjuntos disjuntos e fechados de $\mathcal{A}$, que é um subconjunto compacto de X , Ξ e Ξ^* são subconjuntos fechados de X . Definindo $d(z, \emptyset) = 1$ para cada $z \in X$, definamos a função (função canônica de Urysohn se Ξ e Ξ^* são não-vazios) $l : X \rightarrow [0, 1]$ associada a (Ξ, Ξ^*) por

$$l(z) = \frac{d(z, \Xi)}{d(z, \Xi) + d(z, \Xi^*)}, \quad z \in X.$$

A função l está bem definida, $l^{-1}(0) = \Xi$ e $l^{-1}(1) = \Xi^*$.

Agora, vamos definir a função $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$k(z) := \sup_{t \geq 0} l(T(t)z).$$

Como $l(T(t)z) \in [0, 1]$ para todo $z \in X$ e $t \geq 0$, temos que $K(X) \subset [0, 1]$.

Para vermos que $[0, \infty) \ni t \mapsto k(T(t)z) \in [0, 1]$ é não-crescente para cada $z \in X$, notemos que, se $0 \leq t_1 \leq t_2$, temos

$$\begin{aligned} k(T(t_1)z) &= \sup_{t \geq 0} l(T(t)T(t_1)z) = \sup_{t \geq 0} l(T(t+t_1)z) = \sup_{t \geq t_1} l(T(t)z) \\ &\geq \sup_{t \geq t_2} l(T(t)z) = \sup_{t \geq 0} l(T(t+t_2)z) = k(T(t_2)z) \end{aligned}$$

Pela invariância de Ξ e ξ^* , é fácil ver que $k(\Xi) = \{0\}$ e $k(\Xi^*) = \{1\}$. Por outro lado, se $z \in X$ e $k(z) = 0$, então $l(T(t)z) = 0$ para todo $t \geq 0$. Em particular, $l(z) = 0$ e $z \in \Xi$. Dessa forma, $k^{-1}(0) = \Xi$.

Mostremos que $l^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$. Seja $z \in \mathcal{A}$ tal que $k(z) = 1$ e $z \notin \Xi^*$. Então $\omega(z) \subset \Xi$. Sendo l contínua e do fato que Ξ atrai z , temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} l(T(t)z) = 0$. Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $1 = k(z) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)z)$. Isso implica que existe $t' \in [0, t_0]$ tal que $l(T(t')z) = 1$, ou seja, $T(t')z \in \Xi^*$. Dessa forma, temos que $\omega(z) = \omega(T(t')z) \subset \Xi^*$, contradizendo o fato de $\omega(z) \subset \Xi$. Assim, se $k(z) = 1$ para algum $z \in \mathcal{A}$, temos que $z \in \Xi^*$.

Provemos, agora, que, se $z \in \mathcal{A}$ e $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$, então $z \in \Xi \cup \Xi^*$. Suponha que isto seja falso. Então existe $z \in \mathcal{A} \setminus \Xi \cup \Xi^*$ tal que $k(T(t)z) = k(z)$, para todo $t \geq 0$. Como $\omega(z) \subset \Xi$ e $\omega(z)$ atrai z , temos que $k(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(T(t)z) = 0$. Como $k^{-1}(0) = \Xi$, $z \in \Xi$, o que é uma contradição.

Para provarmos a continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$, vamos considerar três casos:

- Caso 1: Continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ em Ξ^* .

Como $l(z) \leq k(z) \leq 1$ para todo $z \in X$, dado $z_0 \in \Xi^*$ e $z \in X$, temos que

$$|k(z) - k(z_0)| = 1 - k(z) \leq 1 - l(z)$$

Sendo $l(z_0) = 1$, obtemos a continuidade de k da continuidade de l .

- Caso 2: Continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ em Ξ .

Como $l : x \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em Ξ , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \epsilon)$. Do Lema 3.4.6, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, de onde obtemos que $k(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0, \epsilon)$.

- Caso 3: Continuidade de $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ em $X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$.

Seja $z_0 \in X \setminus (\Xi \cup \Xi^*)$. Do Lema 3.4.9,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0.$$

– Caso 3.1

Suponha que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi^*) = 0$ e, consequentemente, $k(z_0) = 1$, já que $l(T(t)z_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ em Ξ^* , existe uma vizinhança aberta V de Ξ^* em X tal que $l(V) \subset (1 - \epsilon, 1]$. Seja $t_0 > 0$ de forma que $T(t_0)z_0 \in V$. Pela continuidade de $T(t_0) : X \rightarrow X$, existe uma vizinhança U de z_0 tal que $T(t_0)U \subset V$, o que implica que $k(z) > 1 - \epsilon$ para todo $z \in U$, provando este caso.

– Caso 3.2

Suponha que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)z_0, \Xi) = 0$. Como $l(z_0) > 0$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que $l(\mathcal{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(z_0)}{2})$. Pelo Lema 3.4.6, existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$. Disso, existe $t_0 > 0$ tal que $T(t)z_0 \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$ para todo $t \geq t_0$. Pela continuidade de $T(t_0) : X \rightarrow X$, existe uma vizinhança U_1 de z_0 em X tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$. Assim, para todo $z \in U_1$, temos que $T(t_0)z \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$, de forma que $T(t)z \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$ para todo $t \geq t_0$. Finalmente, pela continuidade de l , existe uma vizinhança U_2 de z_0 em X tal que $l(z) > l(z_0)/2$, para todo $z \in U_2$. Tomando $U := U_1 \cap U_2$, temos que, se $z \in U$, $k(z) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)z)$ e obtemos a continuidade de k .

Seja $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(z) = \sup_{t \geq 0} d(T(t)z, \mathcal{A})$ e definamos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(z) := h(z) + k(z), \quad z \in X.$$

A continuidade de f segue da continuidade de k e de h . Como k e h são não-crescentes ao longo de soluções de $\{T(t) : t \geq 0\}$, f também é não-crescente ao longo de soluções.

Como $h(\Xi) = k(\Xi) = 0$, temos que $f(\Xi) = 0$. Se $f(z) = 0$ para algum $z \in X$, então $h(z) = k(z) = 0$ e $z \in \Xi$. Isso mostra que $f^{-1}(0) = \Xi$.

Como $f|_{\mathcal{A}} = k|_{\mathcal{A}}$, temos que $f^{-1}(0) \cap \mathcal{A} = k^{-1}(0) \cap \mathcal{A} = \Xi^*$.

Por fim, seja $z \in X$ tal que $f(T(t)z) = f(z)$ para todo $t \geq 0$. Como h e k não podem crescer ao longo de soluções, temos que $h(T(t)z) = h(z)$ e $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$. Como $d(T(t)z, \mathcal{A}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, temos que $h(z) = 0$ e $z \in \mathcal{A}$. Como $k(T(t)z) = k(z)$ para todo $t \geq 0$, temos que $z \in \Xi \cup \Xi^*$, completando a demonstração. $\square$

Lema 3.4.16. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo num espaço métrico X com atrator global $\mathcal{A}$ e uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$. Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente com relação a Ξ se, e somente se, for dinamicamente gradiente com relação a Ξ . Além disso, a função de Lyapunov $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ de um semigrupo dinamicamente gradiente pode ser escolhida de forma que $V(\Xi_k) = k - 1$, para cada $k = 1, \dots, n$.*

Tal função pode ser definida como

$$V(x) := h(x) + \sum_{j=1}^n k_j(x), \quad x \in X$$

em que

$h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A})$, $k_j(x) := \sup_{t \geq 0} l_j(T(t)x)$ e $l_j(x) := \frac{d(x, A_j)}{d(x, A_j) + d(x, A_j^*)}$ (A_j dado por (3.4.1)).

Demonstração. Já mostramos que um semigrupo gradiente é dinamicamente gradiente (Lema 3.3.4)

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito a Ξ , ordenado de forma a ser uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$. Seja $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = \mathcal{A}$ a sequência de atratores locais dada por (3.4.1) e $\emptyset = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \dots \subset A_0^* = \mathcal{A}$ seus repulsores, de forma que, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, nós temos $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Consideremos as funções $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) := \sup_{t \geq 0} d(T(t)x, \mathcal{A})$; $l_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $l_j(x) := \frac{d(x, A_j)}{d(x, A_j) + d(x, A_j^*)}$ e $k_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $k_j(x) := \sup_{t \geq 0} l_j(T(t)x)$.

Definamos a função $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(z) := h(z) + \sum_{j=1}^n k_j(z), \quad z \in X$$

Vamos mostrar que V é uma função de Lyapunov para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$.

- (i) Como V é a soma de funções contínuas, V é uma função contínua. Além disso, h e cada k_j são não-crescente ao longo de soluções. Logo, V é não-crescente ao longo de soluções.
- (ii) Suponha que $z \in X$ seja tal que $V(T(t)z) = V(z)$ para todo $t \geq 0$. Como h e cada k_j não podem crescer ao longo de soluções, temos que $h(T(t)z) = h(z)$ e $k_j(T(t)z) = k_j(z)$ para todo $t \geq 0$ e $j = 0, 1, \dots, n$. Pelo Lema (3.4.15), $z \in A_j \cup A_j^*$, para cada $j = 0, 1, \dots, n$. Usando o Lema (3.4.13), obtemos que

$$z \in \bigcap_{j=0}^n (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i.$$

- (iii) Se $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $z \in \Xi_k = A_k \cap A_{k-1}^*$, então $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \dots \subset A_n = \mathcal{A}$ e $z \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \dots \subset A_0^* = \mathcal{A}$. Assim, $k_j(z) = 0$ se $k \leq j \leq n$ e $k_j(z) = 1$ se $1 \leq j \leq k-1$ e

$$V(z) = \sum_{j=1}^n k_j(z) = \sum_{j=1}^{k-1} k_j(z) = k-1$$

□

3.5 Estabilidade estrutural topológica

Esta seção é dedicada ao estudo de pequenas perturbações autônomas em semigrupos dinamicamente gradientes.

Lema 3.5.1. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Considere as sequências $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $a_n < b_n < c_n$, $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $c_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.*

Definamos $\mathbb{J}_n = [a_n, c_n]$ e seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n : \mathbb{J}_n \rightarrow X$ uma solução de $\{T_{\eta_n} : t \geq 0\}$.

Vamos, também, supor que $\theta = \overline{\bigcup_n \xi_n(\mathbb{J}_n)}$ é limitado.

Nestas condições, existe uma subsequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $\xi_{n_k}(\cdot + b_{n_k}) \rightarrow \xi_0(\cdot)$ uniformemente em subintervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Como $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\{\xi_n(a_n)\} \subset \theta$ é limitado, podemos tomar uma subsequência $\{n_{0,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\xi_{n_{0,k}}(b_n) = T_{\eta_{n_{0,k}}}(b_{n_k} - a_{n_k})\xi_{n_{0,k}}(a_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

para algum $x_0 \in X$.

Definamos $\xi_0 : [0, \infty) \rightarrow X$ por $\xi_0(t) = T_0(t)x_0$ para $t \geq 0$. Assim,

$$\xi_0(t) = T_0(t)x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\eta_{n_{0,k}}}(t)\xi_{n_{0,k}}(b_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_{0,k}}(t + b_{n_k}).$$

e essa convergência é uniforme em compactos de $\mathbb{R}$ pois, se K é um compacto de $\mathbb{R}$, usando a continuidade da família de semigrupos em $\eta = 0$, temos

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in K} d(\xi_0(t), \xi_{n_{0,k}}(t + b_{n_k})) \leq \\ & \sup_{t \in K} (d(T_0(t)x_0, T_0(t)\xi_{n_{0,k}}(b_{n_k})) + d(T_0(t)\xi_{n_{0,k}}(b_{n_k}), T_{\eta_{n_{0,k}}}(t)\xi_{n_{0,k}}(b_{n_k}))) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Temos também que $\xi_0([0, \infty)) \subset \theta$.

Suponha que já tenhamos construído sequências $\{n_{j,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ para $0 \leq j \leq m-1$ de forma que $\{n_{j+1,k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{n_{j,k} : k \in \mathbb{N}\}$ e que $\xi_{n_{j,k}}(\cdot + b_{n_k}) \rightarrow \xi_0(\cdot)$ quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente em subintervalos compactos de $[-j, \infty)$, onde $\xi_0 : [-(m-1), \infty) \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ contida em θ .

Tomemos, agora, uma subsequência $n_{m,k}$ tal que

$$\xi_{n_{m,k}}(-m + b_{n_k}) = T_{\eta_{n_{m,k}}}(-m + b_{n_k} - a_{n_k})\xi_{n_{0,k}}(a_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_m$$

para algum $x_m \in X$.

Vamos estender $\xi_0(\cdot)$ para $[-m, \infty)$ fazendo $\xi_0(s) = T_0(s-m)x_m$ para $s \in [-m, -(m-1))$. Então

$$\begin{aligned} T_0(1)x_m &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\eta_{n_{m,k}}}(1)\xi_{n_{m,k}}(-m + b_{n_k}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_{m,k}}(-(m-1) + b_{n_k}) = \xi_0(-(m-1)) \end{aligned}$$

e $\xi_0 : [-m, \infty)$ é uma solução de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$. Como feito anteriormente, $\xi_{n_{m,k}} \rightarrow \xi_0$ uniformemente em subintervalos compactos de $[-m, \infty)$ e $\xi_0([-m, \infty)) \subset \theta$

Fazendo $n_k = n_{k,k}$, a sequência $\{\xi_{n_k}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e a solução global ξ_0 correspondente possuem as propriedades que queríamos. $\square$

Corolário 3.5.2. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponhamos que $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possua atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e que $\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado.*

Sejam $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $s = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, ξ_k uma solução global de $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$. Então existe uma subsequência $\{\xi_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\xi_{k_j}(\cdot + s_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em intervalos limitados de $\mathbb{R}$ para uma solução global ξ_0 de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ com $\xi_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_0$.

Em particular, a família $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Lema 3.5.3. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ com atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e as coleções de conjuntos invariantes isolados $\Xi_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \dots, \Xi_{n,\eta}\}$ de forma que $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ satisfaça (G1). Suponhamos que $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ seja semicontínua superiormente em $\eta = 0$.*

Dado $0 < 2\delta < \min\{\text{dist}(\Xi_{i,0}, \Xi_{j,\eta}) : 1 \leq i < j \leq n\}$ e um conjunto limitado $B \subset X$, existem números positivos $t_0 = t_0(\delta, B)$ e $\eta_0 > 0$ tais que $\{T_\eta(t)u_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \cap \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,0}) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$ e $\eta \in [0, \eta_0]$.

Além disso, se $\max_{j=1,\dots,n} d_H(\Xi_{j,\eta}, \Xi_{k,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, então $\{T_\eta(t)u_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \cap \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,\eta}) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$ e $\eta \in [0, \eta_0]$.

Demonstração. Vamos supor que o resultado seja falso. Então existem sequências $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$ e $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ e $\{T_{\eta_k}(t)u_k : 0 \leq t \leq t_k\} \cap \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,0}) = \emptyset$.

Pelo Lema (3.5.1), fazendo $a_n = 0$, $b_n = \frac{t_n}{2}$ e $c_n = t_n$, existe uma solução global limitada $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $T_{\eta_k}(t + \frac{t_k}{2})u_k \rightarrow \xi(t)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Assim, $\xi(t) \notin \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,0})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, contradizendo (G1). □

Lema 3.5.4. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Vamos supor que, para cada $\eta \in [0, 1]$, exista uma coleção de invariantes isolados disjuntos $\Xi_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \dots, \Xi_{n,\eta}\}$, $\mathcal{A}_\eta$ seja o atrator global de $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ e $\max_{1 \leq i \leq n} d_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$. Fixemos, também, $0 < 2\delta_0 < \min_{1 \leq i < j \leq n} \text{dist}(\Xi_{i,0}, \Xi_{j,0})$.*

Nestas condições, se $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ for dinamicamente gradiente e para $0 < \delta < \delta_0$ dado, existem $n_0 > 0$ e $\delta' > 0$ (independente de $\eta \in [0, \eta_0]$) tais que se $\eta \in [0, \eta_0]$, $d(z_0, \Xi_{i,\eta}) < \delta'$ para algum $1 \leq i \leq n$ e, para algum $t_1 > 0$, nós tivermos $d(T_\eta(t_1)z_0, \Xi_{i,\eta}) \geq \delta$, então $d(T_\eta(t)z_0, \Xi_{i,\eta}) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$.

Demonstração. Suponha que para algum $1 \leq i \leq n$ existam sequências $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$, $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ e $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que:

- $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$,
- $d(z_k, \Xi_{i,\eta_k}) < \frac{1}{k}$,
- $\sigma_k < \tau_k$,
- $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)z_k, \Xi_{i,\eta_k}) \geq \delta$
- $d(T_{\eta_k}(\tau_k)z_k, \Xi_{i,\eta_k}) < \frac{1}{k}$.

Vamos mostrar que isso contradiz a propriedade (G2) de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$.

Pela continuidade dos semigrupos, podemos assumir que $d(T_{\eta_k}(\sigma_k)z_k, \Xi_{i,\eta_k}) = \delta$ e $d(T_{\eta_k}(t)z_k, \Xi_{i,\eta_k}) < \delta$ para $t < \sigma_k$. Também temos que $\sigma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$.

Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\xi_k : [-\sigma_k, \infty)$ dada por $\xi_k(t) = T_{\eta_k}(t + \sigma_k)z_k$. Aplicando o Lema 3.5.1, com $a_n = -\sigma_n$, $b_n = \frac{-\sigma_n}{2}$ e $c_n = 0$, obtemos uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\xi_0(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \Xi_{i,0}$. Como $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é dinamicamente gradiente, temos que existe $j \neq i$ tal que $\xi_0(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \Xi_{j,0}$.

Dessa forma, existem sequências $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ e $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $\sigma_{k_m} < t_m < \tau_{k_m}$ tais que

$$d(T_{\eta_{k_m}}(\sigma_{k_m})z_{k_m}, \Xi_{j,\eta_{k_m}}) < \frac{1}{m} \text{ e } d(T_{\eta_{k_m}}(t_{k_m})z_{k_m}, \Xi_{j,\eta_{k_m}}) \geq \delta.$$

Procedendo da mesma forma, obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\xi_1(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \Xi_{j,0}$ e $\xi_1(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \Xi_{l,0}$ para algum $l = 1, 2, \dots, n$, $l \neq i$ e $l \neq j$. Repetindo este procedimento um número finito de vezes, chegamos numa contradição.

□

Teorema 3.5.5. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Vamos assumir que*

- (a) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado;
- (b) para cada $\eta \in [0, 1]$, $\mathcal{A}_\eta$ contém uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \dots, \Xi_{n,\eta}\}$ tal que $\lim_{\eta \rightarrow 0} d_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$;
- (c) existem $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tal que $\Xi_{i,\eta}$ é o conjunto invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,\eta})$, $1 \leq i \leq n$ e $0 \leq \eta \leq \eta_0$;
- (d) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com atrator global $\mathcal{A}_0$ e coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi_0 = \{\Xi_{1,0}, \dots, \Xi_{n,0}\}$.

Então existe $\eta_1 > 0$ tal que, para todo $\eta \in (0, \eta_1)$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito a Ξ_η .

Demonstração. Primeiramente, provemos que, para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ satisfaz (G1). Para isso, vamos supor que isso não ocorra, ou seja, que existam $0 < \delta' < \delta$, uma sequência $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e soluções globais ξ_k de $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tais que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(\xi_k(t), \bigcup_{i=1}^n \Xi_{i, \eta_k}) > \delta'. \quad (3.5.1)$$

Aplicando o Lema 3.5.1, com $s = \{0\}$, obtemos uma subsequência (denotada da mesma forma) e uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $\xi_k(t) \rightarrow \xi_0(t)$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Como $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ satisfaz (G1), existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\xi_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{i,0}$.

Assim, para cada $l \in \mathbb{N}^*$, existem $t_l > 0$ e $k_l \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi_{k_l}(t_l), \Xi_{i,0}) < \frac{1}{k}$, para todo $k \geq k_l$.

Por (3.5.1), existem, para l suficientemente grande, $t'_l > t_l$ tais que $d(\xi_{k_l}(t), \Xi_{i,0}) < \delta'$ para todo $t \in [t_l, t'_l]$ e $d(\xi_{k_l}(t'_l), \Xi_{i,0}) = \delta'$.

Pela continuidade de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ e invariância de $\Xi_{i,0}$, devemos ter que $t'_l - t_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$.

Novamente pelo Lema 3.5.1, com $s = \{t_l\}_{l=1}^\infty$ e, tomando uma subsequência, obtemos uma solução global $\xi_1 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $\xi_1(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{k_l}(t + t_l)$, com convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Pela forma como ξ_1 foi obtido, é fácil ver que $d(\xi_1(t), \Xi_{i,0}) \leq \delta'$ para todo $t \leq 0$ e, consequentemente, $\xi_1(t) \rightarrow \Xi_{i,0}$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Sendo ξ_1 uma solução global de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, existe $j \neq i$ tal que $\xi_1(t) \rightarrow \Xi_{j,0}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como feito anteriormente, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, existem $t_m > 0$ e $k_m \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi_{k_m}(t_m), \Xi_{j,0}) < \frac{1}{m}$, para todo $k \geq k_m$. Também existem, para m suficientemente grande, $t'_m > t_m$ tais que $d(\xi_{k_m}(t), \Xi_{j,0}) < \delta'$ para todo $t \in [t_m, t'_m]$ e $d(\xi_{k_m}(t'_m), \Xi_{j,0}) = \delta'$.

Repetindo este processo, encontramos uma solução global $\xi_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $\xi_2(t) \rightarrow \Xi_{j,0}$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $\xi_2(t) \rightarrow \Xi_{r,0}$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $r \notin \{i, j\}$. Repetindo este processo um número finito de vezes, construímos uma estrutura

homoclínica, o que contraria (G2).

Assim, provamos que existe $\eta_1 > 0$ tal que, se ξ_η for uma solução global em $\mathcal{A}_\eta$ e $\eta < \eta_1$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_\eta(t), \Xi_{i,0}) = 0$. Pela hipótese (b), para η suficientemente pequeno, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_\eta(t), \Xi_{i,\eta}) = 0$.

Analogamente, podemos provar que existe $\eta_2 > 0$ tal que, se ξ_η for uma solução global em $\mathcal{A}_\eta$ e $\eta \in (0, \eta_2)$, temos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_\eta(t), \Xi_{i,\eta}) = 0$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$.

Assim, provamos que se η for suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ satisfaz (G1).

Provemos $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ satisfaz (G2) para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Vamos supor que isso não ocorra. Então existem $\Xi_{1,0}, \dots, \Xi_{p,0}$ em Ξ_0 ($\Xi_{p+1,0} := \Xi_{1,0}$), $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, soluções globais $\xi_k^1, \dots, \xi_k^p$ de $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$ e tempos $t_k^1, \dots, t_k^p$ tais que

$$d(\xi_k^i(0), \Xi_{i,\eta_k}) < \frac{1}{k}, \quad d(\xi_k^i(t_k^i), \Xi_{i+1,\eta_k}) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Esses $\Xi_{1,\eta_k}, \dots, \Xi_{p,\eta_k}$ podem ser escolhidos uma vez que existe apenas um número finito de possibilidades para estruturas homoclínicas.

Pela hipótese (b) e como $\eta_k \rightarrow 0$, podemos supor que

$$d(\xi_k^i(0), \Xi_{i,0}) < \frac{1}{k}, \quad d(\xi_k^i(t_k^i), \Xi_{i+1,0}) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Usando o Lema 3.5.1, através de subsequências, obtemos soluções globais $\xi_l : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, $1 \leq l \leq p$, dadas por $\xi_l(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k^l(t)$.

É fácil ver que $\xi_l(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_{l,0}$ e $\xi_l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{l+1,0}$, ou seja, formam uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}_0$, o que é um absurdo.

□

Vizinhança de um Elemento Crítico

Neste capítulo, buscamos descrever o comportamento de um sistema ao redor de um elemento crítico (ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica). Para isso, devemos estudar as variedades estáveis e instáveis de um ponto, assim como o comportamento dessas variedades quando o sistema sofre uma perturbação.

Vamos considerar, neste capítulo, X um espaço de Banach.

Por fim, é aconselhável que o leitor esteja familiarizado com resultados de análise funcional e teoria espectral. Estes resultados podem ser encontrados em [6].

Definição 4.0.6. *Seja $L : X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Então o **conjunto resolvente** $\rho(L)$ de L é definido como $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - L$ é invertível com inversa linear limitada.*

*O **espectro** de L é o conjunto $\sigma(L) := \rho(L) \setminus \mathbb{C}$.*

*O **raio espectral** de $r(L)$ do operador L é dado por*

$$r(L) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}.$$

Definição 4.0.7. *Um semigrupo é dito ser **continuamente diferenciável** se, para cada $t \geq 0$, $T(t) : X \rightarrow X$ é diferenciável em X e a aplicação $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, x) \mapsto D_x T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua. Aqui, $D_x T(t)$ representa a derivada de Fréchet de $T(t)$ em x , ou seja,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(t)(x + h) - T(t)x - D_x T(t)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Definição 4.0.8. Um ponto de equilíbrio x_0 de um semigrupo diferenciável $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **hiperbólico** se o espectro de $D_{x_0}T(t)$ for disjunto do círculo unitário S^1 em $\mathbb{C}$.

Uma solução $\{x_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com período $p > 0$ é chamada **normalmente hiperbólica** se 1 for um autovalor simples isolado de $U(t) = D_x T(p)|_{x_0(t)}$ e $\sigma(U(t)) \cap S^1 = \{1\}$, para cada $t \in [0, p]$.

4.1 Variedades invariantes próximas a um ponto de equilíbrio

4.1.1 Variedades invariantes como gráficos

Teorema 4.1.1 (Propriedades básicas de variedades invariantes). *Seja X um espaço de Banach, $L : X \rightarrow X$ um operador linear limitado e $\rho > 0$ tal que $\sigma(L) \cap \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = \rho\} = \emptyset$.*

Seja $\gamma(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Definamos as projeções espectrais

$$\Pi_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - L)^{-1} d\lambda \text{ e } \Pi_u = I - \Pi_s$$

e as decomposições de X e L como $X = X_u \oplus X_s$ e $L = L_u \oplus L_s$, com $X_j = \Pi_j X$ e $L_j = L|_{X_j}$, $j = u, s$.

Então existe $\gamma > 0$ e uma norma equivalente em X tal que, se $N : X \rightarrow X$ é globalmente Lipschitz contínua com $\text{Lip} N \leq \gamma$ ($\text{Lip} N$ representa a constante de Lipschitz de N), então existem variedades de Lipschitz $S_{(\rho)}$ e $U_{(\rho)}$ para $T = L + N$ em X tais que:

- (i) $U_{(\rho)}$ é um gráfico sobre X_u e $S_{(\rho)}$ é um gráfico sobre X_s ;
- (ii) $T(U_{(\rho)}) = U_{(\rho)}$, $TS_{(\rho)} = S_{(\rho)} \cap TX$ e a restrição $T|_{U_{(\rho)}}$ é um homeomorfismo;
- (iii) $S_{(\rho)} \cap U_{(\rho)} = \{0\}$;
- (iv) $\text{Lip}(T|_{S_{(\rho)}}) < \rho$ e $\text{Lip}(T|_{U_{(\rho)}}^{-1}) < \rho^{-1}$;
- (v)

$$S_{(\rho)} = \{x \in X : \|T^n x\| = o(\rho^n), \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

$$U_{(\rho)} = \{x \in X : \text{existe uma sequência } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x, \\ x_{j+1} = T(x_j), j < 0, \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j} \|x_j\| < \infty\}.$$

Se $(\rho)^*$ estiver suficientemente próximo de ρ , então $S_{(\rho^*)} = S_{(\rho)}$ e $U_{(\rho^*)} = U_{(\rho)}$;

(vi) existe uma função contínua $P : X \rightarrow U_{(\rho)}$ tal que

$$\|Px - x\| \leq Cd(x, U_{(\rho)}),$$

para algum $C > 0$, $T \circ P = T \circ P$, em que $Px = \xi \in U_{(\rho)}$ se, e somente se, $\|T^n x - T^n \xi\| = o(\rho^n)$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, $d(T^n x, U_{(\rho)}) \leq C\theta^n d(x, U_{(\rho)})$ para todo $n \geq 0$, $x \in X$ e constantes $\theta < \rho$ e $C > 0$ apropriadas.

Se L for um isomorfismo, então, para cada γ suficientemente pequeno, T é um homeomorfismo e $TS_{(\rho)} = S_{(\rho)}$.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < b < \rho < a$, $\sigma(L_u) \subset \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| > a\}$ e $\sigma(L_s) \subset \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < b\}$.

Vamos escolher normas equivalentes em X_u e X_s de forma que $\|L_u^{-1}\| \leq a^{-1}$ e $\|L_s\| \leq b$. Para $X = X_u \oplus X_s$, vamos utilizar a norma dada por $\|x_u + x_s\| := \max\{\|x_u\|, \|x_s\|\}$. Assim, em X , temos que $\|\Pi_j\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, $j = u, s$.

Escolhamos γ de forma que $b + 2\gamma < \rho < a - 2\gamma$. Assim, podemos escrever T como

$$T : X_u \oplus X_s \rightarrow X_u \oplus X_s$$

$$(x_u, x_s) \mapsto (L_u x_u + N_u(x_u + x_s), L_s x_s + N_s(x_u + x_s))$$

com $\text{Lip} N_u \leq \gamma$ e $\text{Lip} N_s \leq \gamma$, em que $N_j = \Pi_j \circ N$, $j = u, s$.

Vamos buscar $U_{(\rho)}$ com a forma $\{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$, para alguma aplicação $\theta : X_u \rightarrow X_s$ tal que $\theta(0) = 0$, $\text{Lip} \theta \leq 1$ e $TU_{(\rho)} \subset U_{(\rho)}$.

A condição $TU_{(\rho)} \subset U_{(\rho)}$ é satisfeita se, e somente se, dado $\xi \in X_u$, existir $\hat{\xi} \in X_u$ tal que $T(\xi + \theta(\xi)) = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$, ou seja,

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + N_u(\xi + \theta(\xi)) \\ \theta(\hat{\xi}) = L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi)). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Definamos, também, para cada $\theta : X_u \rightarrow X_s$, a função $\theta_* : X_u \rightarrow X_s$ por $\theta_*(\hat{\xi}) = L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi))$.

Mostremos que existem θ e $U_{(\rho)} = \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$ que satisfazem as condições do teorema.

Seja $\theta : X_u \rightarrow X_s$ uma função satisfazendo $\theta(0) = 0$ e $\text{Lip}\theta \leq 1$. Fixado $\hat{\xi} \in X_u$, a função $\xi \mapsto L_u^{-1}\hat{\xi} - L_u^{-1}N_u(\xi + \theta(\xi))$ é uma contração.

De fato, sejam $\xi_1, \xi_2 \in X_u$. Então

$$\begin{aligned} & \| (L_u^{-1}\hat{\xi} - L_u^{-1}N_u(\xi_1 + \theta(\xi_1))) - (L_u^{-1}\hat{\xi} - L_u^{-1}N_u(\xi_2 + \theta(\xi_2))) \| = \\ & \| -L_u^{-1}N_u(\xi_1 + \theta(\xi_1)) + L_u^{-1}N_u(\xi_2 + \theta(\xi_2)) \| \leq \\ & a^{-1}\gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \leq 2a^{-1}\gamma\|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

Como $2a^{-1}\gamma < 1$, mostramos que $\xi \mapsto -L_u^{-1}N_u(\xi + \theta(\xi))$ é uma contração.

Com isso, para cada $\hat{\xi} \in X_u$, existe um único $\xi \in X_u$ tal que $\xi = L_u^{-1}\hat{\xi} - L_u^{-1}N_u(\xi + \theta(\xi))$, ou seja, existe um único ξ satisfazendo a primeira equação de (4.1.1).

Sejam $\xi_1, \xi_2, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in X_u$ tais que $\hat{\xi}_i = L_u \xi_i + N_u(\xi_i + \theta(\xi_i))$, $i = 1, 2$.

Então

$$\begin{aligned} \|\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\| &= \|L_u \xi_1 + N_u(\xi_1 + \theta(\xi_1)) - L_u \xi_2 - N_u(\xi_2 + \theta(\xi_2))\| \\ &\geq \|L_u(\xi_1 - \xi_2)\| - \gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \\ &\geq a\|(\xi_1 - \xi_2)\| - 2\gamma\|\xi_1 - \xi_2\| = (a - 2\gamma)\|(\xi_1 - \xi_2)\|. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\theta_*(\hat{\xi}_1) - \theta_*(\hat{\xi}_2)\| &= \|L_s\theta(\xi_1) + N_s(\xi_1 + \theta(\xi_1)) - L_s\theta(\xi_2) - N_s(\xi_2 + \theta(\xi_2))\| \\
&\leq b\|\xi_1 - \xi_2\| + \gamma[\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\theta(\xi_1) - \theta(\xi_2)\|] \\
&\leq (b + 2\gamma)\|\xi_1 - \xi_2\|.
\end{aligned}$$

Dessas duas desigualdades, obtemos que $\|\theta_*(\hat{\xi}_1) - \theta_*(\hat{\xi}_2)\| \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\|\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2\|$, ou seja, que $\text{Lip}\theta_* \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} < 1$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções $\phi : X_u \rightarrow X_s$ com $\theta(0) = 0$ e $\text{Lip}\theta \leq 1$, com a distância

$$d(\theta, \tau) = \sup_{\xi \in X_u, \xi \neq 0} \frac{\|\theta(\xi) - \tau(\xi)\|}{\|\xi\|}.$$

Temos então que $\mathcal{F}$ é um espaço métrico completo.

- Mostremos, agora, que $\mathcal{F} \ni \theta \mapsto \theta_* \in \mathcal{F}$ é uma contração.

Sejam $\theta, \tau \in \mathcal{F}$ e $\hat{\xi} \in X_u$. Definamos $\xi_\theta, \xi_\tau \in X_u$ por

$$\hat{\xi} = L_u\xi_\theta + N_u(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) = L_u\xi_\tau + N_u(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau)).$$

Pela desigualdade (4.1.2), obtemos que $\|\hat{\xi}_1\| \geq (a - 2\gamma)\|\xi_\theta\|$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
a\|\xi_\theta - \xi_\tau\| &= a\|L_u^{-1}(L_u(\xi_\theta - \xi_\tau))\| \leq \|L_u(\xi_\theta - \xi_\tau)\| \\
&= \|N_u(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) - N_u(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau))\| \\
&\leq \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\
&\leq \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\theta)\| + \|\tau(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\
&\leq \gamma[2\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + d(\theta, \tau)\|\xi_\theta\|].
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \leq \frac{\gamma d(\theta, \tau)}{a - 2\gamma} \|\xi_\theta\| \leq \frac{\gamma d(\theta, \tau)}{(a - 2\gamma)^2} \|\hat{\xi}\|.$$

Através dessa última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_*(\hat{\xi}) - \tau_*(\hat{\xi})\| &= \|L_s\theta(\xi_\theta) + N_s(\xi_\theta + \theta(\xi_\theta)) - L_s\tau(\xi_\tau) - N_s(\xi_\tau + \tau(\xi_\tau))\| \\ &\leq b\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\| + \gamma[\|\xi_\theta - \xi_\tau\| + \|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] \\ &= (b + \gamma)\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\| + \gamma\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\ &\leq (b + \gamma)[\|\theta(\xi_\theta) - \tau(\xi_\theta)\| + \|\tau(\xi_\theta) - \tau(\xi_\tau)\|] + \gamma\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\ &\leq (b + \gamma)d(\theta, \tau)\|\xi_\theta\| + (b + 2\gamma)\|\xi_\theta - \xi_\tau\| \\ &\leq \frac{b + \gamma}{a - 2\gamma}d(\theta, \tau)\|\hat{\xi}\| + \frac{(b + 2\gamma)\gamma}{(a - 2\gamma)^2}d(\theta, \tau)\|\hat{\xi}\| \leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma}d(\theta, \tau)\|\hat{\xi}\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(\theta_*, \tau_*) \leq \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma}d(\theta, \tau).$$

Assim, $\mathcal{F} \ni \theta \mapsto \theta_* \in \mathcal{F}$ é uma contração. Vamos, a partir de agora, denotar seu ponto fixo por θ .

Com isso, podemos definir $U_{(\rho)} := \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_u\}$.

- Vamos mostrar que $TU_{(\rho)} = U_{(\rho)}$.

Como $\text{Lip}\theta \leq 1$ e θ satisfaz a equação (4.1.1), temos que $TU_{(\rho)} \subset U_{(\rho)}$.

Seja $\hat{\xi} + \theta(\hat{\xi}) \in U_{(\rho)}$. Já mostramos que existe um (único) $\xi \in U_{(\rho)}$ tal que $\hat{\xi} = L_u\xi + N_u(\xi + \theta(\xi))$. Pela equação (4.1.1), $\theta(\hat{\xi}) = L_s\theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi))$ e $T(\xi + \theta(\xi)) = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$.

Assim, mostramos que $TU_{(\rho)} = U_{(\rho)}$.

- Mostremos que $\text{Lip}(T|_{U_{(\rho)}}^{-1}) < \rho^{-1}$.

Sejam $x, z \in U_{(\rho)}$. Vamos escrever $x = \xi + \theta(\xi)$ e $z = \zeta + \theta(\zeta)$, com $\xi, \zeta \in X_u$. Então $\|x - z\| = \max\{\|\xi - \zeta\|, \|\theta(\xi) - \theta(\zeta)\|\} = \|\xi - \zeta\|$, já que $\text{Lip}\theta \leq 1$.

Sejam, também, $Tx = \hat{\xi} + \theta(\hat{\xi})$ e $Tz = \hat{\zeta} + \theta(\hat{\zeta})$. Assim, usando a desigualdade (4.1.2), temos que

$$\|Tx - Tz\| = \|\hat{\xi} - \hat{\zeta}\| \geq (a - 2\gamma)\|\xi - \zeta\| = (a - 2\gamma)\|x - z\|.$$

Dessa forma, $\text{Lip}(T|_{U_{(\rho)}^{-1}}) \leq (a - 2\gamma)^{-1} < \rho^{-1}$.

- Vamos mostrar que $U_{(\rho)} = \{x \in X : \text{existe uma sequência } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x, x_{j+1} = T(x_j), j < 0, \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j}\|x_j\| < \infty\}$.

Seja $x \in U_{(\rho)}$. Como $TU_{(\rho)} = U_{(\rho)}$, para cada $j = -1, -2, \dots$, podemos encontrar x_j tal que $x_{j+1} = T(x_j)$, com $x_0 = x$. Além disso,

$$\|x_{j+1}\| = \|Tx_j\| = \|Tx_j - T(0)\| \geq (a - 2\gamma)\|x_j\|.$$

Assim, $\|x_j\| \leq \|x\|(a - 2\gamma)^j = o(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$ e $\sup_{j \leq 0} \rho^{-j}\|x_j\| < \infty$.

Dessa forma, $U_{(\rho)} \subset \{x \in X : \text{existe uma sequência } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x, x_{j+1} = T(x_j), j < 0, \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j}\|x_j\| < \infty\}$.

Por outro lado, sejam $x \in X$ e $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $T(x_j) = x_{j+1}$ para $j < 0$ e $\|x_j\| = o(\rho^j)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Para cada $j = -1, -2, \dots$ vamos escrever

$$x_j = \xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j, \text{ com } \xi_j \in X_u \text{ e } \eta_j \in X_s.$$

Como $T(x_j) = x_{j+1}$, temos

$$L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) + L_s(\theta(\xi_j) + \eta_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) = \xi_{j+1} + \theta(\xi_{j+1}) + \eta_{j+1}.$$

Separando os termos em X_u e X_s , obtemos

$$\begin{cases} \xi_{j+1} = L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) \\ \theta(\xi_{j+1}) + \eta_{j+1} = L_s(\theta(\xi_j) + \eta_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j). \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Seja $\hat{\xi}_j = L_u \xi_j + N_u(\xi_j + \theta(\xi_j))$. Então $\theta(\hat{\xi}_j) = L_s \theta(\xi_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j))$.

Isso implica que $\|\hat{\xi}_j - \xi_{j+1}\| = \|N_u(\xi_j + \theta(\xi_j)) - N_u(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j)\| \leq \gamma \|\eta_j\|$.

Assim,

$$\begin{aligned} \|\eta_{j+1}\| - \|\xi_{j+1} - \hat{\xi}_j\| &\leq \|\eta_{j+1}\| - \|\theta(\xi_{j+1}) - \theta(\hat{\xi}_j)\| \leq \|\eta_{j+1} + \theta(\xi_{j+1}) - \theta(\hat{\xi}_j)\| \\ &= \|L_s(\theta(\xi_j) + \eta_j) + N_s(\xi_j + \theta(\xi_j) + \eta_j) - L_s(\theta(\xi_j)) - N_s(\xi_j + \theta(\xi_j))\| \\ &\leq b \|\eta_j\| + \gamma \|\eta_j\| = (b + \gamma) \|\eta_j\|, \end{aligned}$$

e, pela desigualdade anterior, obtemos que $\|\eta_{j+1}\| \leq (b + 2\gamma) \|\eta_j\|$. Consequentemente, $\|\eta_0\| \leq (b + 2\gamma)^{|j|} \|\eta_j\|$, para $j < 0$.

Notemos que $\|\xi_j\| \leq \max\{\|\xi_j\|, \|\theta(\xi_j) + \eta_j\|\} = \|x_j\| = o(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$.

Então

$$\|\eta_j\| = \|x_j - \xi_j - \theta(\xi_j)\| \leq \|x_j\| + 2\|\xi_j\| = o(\rho^j) \text{ quando } j \rightarrow -\infty.$$

Assim,

$$\|\eta_0\| \leq \frac{\|\eta_j\|}{(b + 2\gamma)^j} \leq \frac{\|\eta_j\|}{(\rho)^j} \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow -\infty.$$

Para finalizar, notemos que podemos repetir esse mesmo argumento para $\rho' < \rho$, com ρ' suficientemente próximo de ρ . Isso significa que, $\sup_{j \leq 0} \rho'^{-j} \|x_j\| < \infty$ e, assim, $\|x_j\| = O(\rho'^j) = o(\rho^j)$ quando $j \rightarrow -\infty$.

Com isso, concluímos que $\eta_0 = 0$ e $x = x_0 = \xi_0 + \theta(\xi_0) \in U_{(\rho)}$ e provamos que $U_{(\rho)} \subset \{x \in X : \text{ existe uma sequência } \{x_j\}_{j \leq 0} \text{ com } x_0 = x, x_{j+1} = T(x_j), j <$

$$0, \text{ e } \sup_{j \leq 0} \rho^{-j} \|x_j\| < \infty\}.$$

Definamos $\hat{P} : X \rightarrow U_{(\rho)}$ dada por $\hat{P}x = x_u + \theta(x_u)$, para $x \in X$, em que $x = x_u + x_s$ com $x_u \in X_u$ e $x_s \in X_s$.

Seja, para $n \geq 0$,

$$P_n = (T|_{U_{(\rho)}})^{-n} \circ \hat{P} \circ T^n.$$

Para $x \in X$ fixado, seja a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_0 = x$ e $x_{n+1} = T(x_n)$.

Como feito anteriormente, escrevendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n$, com $\xi_n \in X_u$ e $\eta_n \in X_s$, obtemos que $\|\eta_{n+1}\| \leq (b + 2\gamma)\|\eta_n\|$ e, assim, $\|\eta_n\| \leq (b + 2\gamma)^n \|\eta_0\|$.

Notemos que $\|\eta_0\| - \|x - \xi_0 - \theta(\xi_0)\| = \|x - \hat{P}x\|$ e $\|\eta_n\| \leq (b + 2\gamma)^n \|x - \hat{P}x\|$.

Como $x_{n+1} = T(x_n)$, temos que $\xi_{n+1} + \theta(\xi_{n+1}) + \eta_{n+1} = T(\xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n)$ e, tomando os termos em X_u , obtemos $\xi_{n+1} = L_u \xi_n + N_u(\xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n)$.

Também temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} T^{n+1}P_{n+1}x = T^{n+1}(T|_{U_{(\rho)}})^{-(n+1)}\hat{P}T^{n+1}x = \hat{P}T^{n+1}x = \xi_{n+1} + \theta(\xi_{n+1}) \\ T^{n+1}P_nx = T^{n+1}(T|_{U_{(\rho)}})^{-n}\hat{P}T^n x = T\hat{P}T^n x = T(\xi_n + \theta(\xi_n)) = \hat{\xi}_n + \theta(\hat{\xi}_n), \end{cases}$$

com $\hat{\xi}_n = L_u \xi_n + N_u(\xi_n + \theta(\xi_n))$ e $\theta(\hat{\xi}_n) = L_s \theta(\xi_n) + N_s(\xi_n + \theta(\xi_n))$.

Com isso, temos

$$\|\xi_{n+1} - \hat{\xi}_n\| = \|N_u(\xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n) - N_u(\xi_n + \theta(\xi_n))\| \leq \gamma \|\eta_n\|.$$

Lembrando que $\text{Lip}(T|_{U_{(\rho)}}^{-1}) \leq (a - 2\gamma)^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|P_{n+1}x - P_nx\| &= \|(T|_{U_{(\rho)}})^{-(n+1)}T^{n+1}P_{n+1}x - (T|_{U_{(\rho)}})^{-(n+1)}T^{n+1}P_nx\| \\ &\leq (a - 2\gamma)^{-n-1} \|T^{n+1}P_{n+1}x - T^{n+1}P_nx\| = (a - 2\gamma)^{-n-1} \|\xi_{n+1} + \theta(\xi_{n+1}) - \hat{\xi}_n - \theta(\hat{\xi}_n)\| \\ &= (a - 2\gamma)^{-n-1} \|\xi_{n+1} - \hat{\xi}_n\| \leq \frac{\gamma}{(a - 2\gamma)^{n+1}} \|\eta_n\| \leq \frac{\gamma}{(a - 2\gamma)} \left(\frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma}\right)^n \|x - \hat{P}x\|. \end{aligned}$$

Além disso, lembrando que, se $0 < w < 1$, $\sum_{k=n}^{\infty} w^k = w^n \sum_{k=0}^{\infty} w^k = w^n(1 - w)^{-1}$,

temos que

$$\begin{aligned} \|P_m x - P_n x\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|P_{k+1} x - P_k x\| \leq \frac{\gamma}{a-2\gamma} \|x - \hat{P}x\| \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^k \\ &\leq \frac{\gamma}{a-2\gamma} \|x - \hat{P}x\| \left(\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^n \left(1 - \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

e, junto com o fato de $\hat{P}$ ser limitado em subconjuntos limitados de X , concluímos que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy uniformemente em subconjuntos limitados de X .

Definamos $P : X \rightarrow U_{(\rho)}$ por $Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x$, para cada $x \in X$. Cada P_n é contínua como composição de funções contínuas e, sendo a convergência uniforme em limitados, obtemos a continuidade de P .

Como $P_0 = \hat{P}$, a desigualdade acima nos mostra que

$$\|Px - \hat{P}x\| \leq (C-1)\|x - \hat{P}x\|,$$

$$\text{com } (C-1) = \frac{\gamma}{a-2\gamma} \left(1 - \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma}\right)^{-1}.$$

Além disso, como $\|Px - x\| - \|x - \hat{P}x\| \leq \|Px - \hat{P}x\|$, temos

$$\|Px - x\| \leq C\|x - \hat{P}x\|$$

Para todo $x \in X$, temos

$$TP_{n+1}x = T(T|_{U_{(\rho)}})^{-(n+1)} \hat{P}T^{n+1} = (T|_{U_{(\rho)}})^{-n} \hat{P}T^n(Tx) = P_n Tx,$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $TPx = PTx$.

Por fim, lembrando que $T^n x = \xi_n + \theta(\xi_n) + \eta_n$,

$$\begin{aligned} d(T^n x, U_{(\rho)}) &\leq \|T^n x - T^n Px\| = \|T^n x - PT^n x\| \leq C\|T^n x - \hat{P}T^n x\| = \\ &C\|\eta_n\| \leq C(b+2\gamma)^n \|\eta_0\| = C(b+2\gamma)^n \|x - \hat{P}x\| = C(b+2\gamma)^n d(x, U_{(\rho)}). \end{aligned}$$

Assim, provamos os resultados enunciados para $U_{(\rho)}$. Vamos, agora, encontrar o espaço

$S_{(\rho)}$ da forma $S_{(\rho)} = \{\sigma(\eta) + \eta : \eta \in X_s\}$. Para isso, vamos prosseguir de maneira semelhante ao caso $U_{(\rho)}$.

Dados $\eta \in X_s$ e $\sigma : X_s \rightarrow X_u$, com $\sigma(0) = 0$ e $\text{Lip}\sigma \leq 1$, podemos definir $\hat{\eta}$ e $\sigma_*(\eta)$ por

$$\begin{cases} \sigma(\hat{\eta}) = L_u\sigma_*(\eta) + N_u(\sigma(\eta) + \eta) \\ \hat{\eta} = L_s\eta + N_s(\sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Assim, $\eta = 0$ implica que $\hat{\eta} = 0$ e $\sigma_*(\eta) = 0$. Além disso, é fácil ver que $\|\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2\| \leq (b + 2\gamma)\|\eta_1 - \eta_2\|$. Dessa forma,

$$\|\sigma_*(\eta_1) - \sigma_*(\eta_2)\| \leq a^{-1}(\|\sigma(\hat{\eta}_1) - \sigma(\hat{\eta}_2)\| + \gamma\|\sigma(\eta_1) + \eta_1 - \sigma(\eta_2) - \eta_2\|) \leq \frac{b + 4\gamma}{a}\|\eta_1 - \eta_2\|,$$

ou seja, $\text{Lip}\sigma_* \leq \frac{b+4\gamma}{a} < 1$.

Para ver que a aplicação $\sigma \mapsto \sigma_*$ é uma contração, basta notar que

$$\|\sigma_*^1(\eta) - \sigma_*^2(\eta)\| \leq a^{-1}[\|\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2\| + 2\gamma\|\eta_1 - \eta_2\|] \leq \frac{b + 4\gamma}{a}\|\eta_1 - \eta_2\|.$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo, existe σ , com $\sigma(0) = 0$ e $\text{Lip}\sigma \leq 1$, satisfazendo

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma(\hat{\eta}) &= L_u\sigma(\eta) + N_u(\sigma(\eta) + \eta)\hat{\eta} \\ \hat{\eta} &= L_s\eta + N_s(\sigma(\eta) + \eta) \end{aligned} \right. .$$

Assim, obtemos $S_{(\rho)}$ tal que $TS_{(\rho)} \subset S_{(\rho)}$.

Sejam $\eta_1, \eta_2 \in X_s$. Como $\text{Lip}\sigma \leq 1$, temos que $\|\sigma(\eta_1) + \eta_1 - \sigma(\eta_2) - \eta_2\| = \|\eta_1 - \eta_2\|$ e, com isso,

$$\begin{aligned} & \|T(\sigma(\eta_1) + \eta_1) - T(\sigma(\eta_2) + \eta_2)\| \\ &= \|L_s\eta_1 - L_s\eta_2 + N_s(\sigma(\eta_1) + \eta_1) - N_s(\sigma(\eta_2) + \eta_2)\| \\ &\leq b\|\eta_1 - \eta_2\| + \gamma\|\sigma(\eta_1) + \eta_1 - (\sigma(\eta_2) + \eta_2)\| \leq (b + 2\gamma)\|\eta_1 - \eta_2\|, \end{aligned}$$

provando que $\text{Lip}(T|_{S_{(\rho)}}) \leq (b + 2\gamma) < \rho$.

Os demais resultados para $S_{(\rho)}$ são obtidos de forma análoga aos de $U_{(\rho)}$.

Por fim, como $\text{Lip}\theta < 1$ e $\text{Lip}\sigma \leq 1$, temos que $\text{Lip}(\theta \circ \sigma) < 1$. Seja $x \in S_{(\rho)} \cap U_{(\rho)}$. Então $x = \xi + \theta(\xi) = \sigma(\eta) + \eta$, com $\xi \in X_u$ e $\eta \in X_s$. Então $\xi = \sigma(\eta)$ e $\eta = \sigma(\xi)$, o que implica que $\xi = \sigma(\eta(\xi))$, contradizendo $\text{Lip}(\theta \circ \sigma) < 1$ e provando que $S_{(\rho)} \cap U_{(\rho)} = \{0\}$. $\square$

Corolário 4.1.2 (Estabilidade). *Seja $L \in \mathcal{L}(X)$, com $\sigma(L) \cap \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = \rho\} = \emptyset$, para algum $\rho \leq 1$, $N : X \rightarrow X$, com $N(0) = 0$ e $\text{Lip}N \leq \gamma$. Vamos definir $T := L + N$.*

Se K for um conjunto limitado com $K \subset T(K)$, então $K \subset U_{(\rho)}$. Se K for um subconjunto de $U_{(\rho)}$ com $T(K) \subset K$, então K é estável se, e somente se, K for estável com respeito a $T|_{U_{(\rho)}}$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, K) < \delta$ e $x \in U_{(\rho)}$, então $d(T^n x, K) < \epsilon$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Sendo $\sigma(L)$ fechado e $U_{(\rho)} = U_{(\rho^*)}$ para ρ^* suficientemente próximo de ρ , podemos assumir que $\rho < 1$.

Como $K \subset T(K)$, dado $x \in K$, existe uma sequência $\{x_j\}_{j \leq 0}$ tal que $x_0 = x$, $x_{j+1} = T(x_j)$ para $j \leq 0$ e $\sup_{j \leq 0} \|x_j\| \rho^{-j} < \infty$, já que K é limitado e $\rho < 1$. Pelo teorema anterior, $x \in U_{(\rho)}$, provando que $K \subset U_{(\rho)}$.

Suponha que $T(K) \subset K \subset U_{(\rho)}$ e que K seja estável com respeito a $T|_{U_{(\rho)}}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, K) < \delta$ e $x \in U_{(\rho)}$, então $d(T^n x, K) < \epsilon$, para todo $n \geq 0$.

Definamos

$$A = \{x \in X : d(Px, K) < \delta \text{ e } d(x, U_{(\rho)}) < \frac{\epsilon}{C}\}.$$

que é uma vizinhança aberta de K , já que P é contínua.

Para cada $n \geq 0$ e $x \in A$, temos

$$\begin{aligned} d(T^n x, K) &\leq d(T^n Px, K) + d(T^n x, PT^n x) \leq \\ d(T^n Px, K) + Cd(T^n x, U_{(\rho)}) &< \epsilon + C\theta^n d(x, U_{(\rho)}) < 2\epsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, já que $0 < \theta < \rho < 1$, provando que K é estável.

A recíproca é trivial. $\square$

Observação 4.1.3. *No corolário anterior, K será assintoticamente estável se, e somente se, K for assintoticamente estável com respeito a $T|_{U(\rho)}$.*

4.2 Diferenciabilidade de variedades invariantes

Vamos mostrar, nesta seção, que as variedades obtidas na seção anterior são suaves sempre que a aplicação $T : X \rightarrow X$ for suave.

Lema 4.2.1. *Sejam X, Y espaços de Banach reais, $Q \subset X$ um conjunto aberto e $f : Q \rightarrow Y$ uma aplicação localmente Lipschitz.*

Então f é continuamente diferenciável em Q se, e somente se, para cada $x_0 \in Q$,

$$\|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(\|h\|) \quad (4.2.1)$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$.

Demonstração. Seja f continuamente diferenciável em Q . Mostremos que $\|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(\|h\|)$ quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$.

Notemos que se $x \in Q$, temos que

$$\begin{cases} f(x+h) - f(x) = \left[\int_0^1 f'(x+th) dt \right] h \\ f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|). \end{cases}$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|h\| < \delta$, então $\|f'(x+h) - f'(x_0)\| < \epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} & \|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| \\ & \leq \left\| \left[\int_0^1 (f'(x+th) - f'(x)) dt \right] h \right\| + \|f'(x)h - f'(x_0)h\| + o(\|h\|) \\ & \leq \left\| \left[\int_0^1 (f'(x+th) - f'(x_0)) dt \right] h \right\| + \left\| \left[\int_0^1 (f'(x) - f'(x_0)) dt \right] h \right\| + \|f'(x)h - f'(x_0)h\| + o(\|h\|) \\ & \leq 2\|h\|\epsilon + \|f'(x)h - f'(x_0)h\| + o(\|h\|) \end{aligned}$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$. Assim, vemos que $\|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(\|h\|)$ quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$.

Para a recíproca, vamos primeiro assumir que a derivada de f existe em cada ponto de Q . Assim, $\|f(x+th) - f(x) - f(x_0+th) + f(x_0)\| = o(\|th\|)$ quando $(x, th) \rightarrow (x_0, 0)$, ou seja,

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{t} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{t} \right\| = o(\|h\|).$$

Assim, $\|(f'(x) - f'(x_0))h\| = o(\|h\|)$ quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$. Em outras palavras, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|h\| < \delta$, então

$$\frac{\|(f'(x) - f'(x_0))h\|}{\|h\|} < \epsilon.$$

Assim, $\|f'(x) - f'(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$, ou seja, f' é contínua.

Falta apenas mostrarmos que se $\|(f'(x) - f'(x_0))h\| = o(\|h\|)$ quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$, então a derivada de f existe em todos os pontos de Q .

- Caso 1: $X = Y = \mathbb{R}$.

Sendo f uma função Lipschitz, ela é absolutamente contínua e, consequentemente, diferenciável em quase todo ponto.

Dado $x_0 \in Q$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| + |h| < \delta$, então

$$|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)| \leq \epsilon|h|.$$

Além disso, existe $x^* \in (x_0 - h, x_0 + h)$ tal que $f'(x^*)$ existe. Assim, para $h \neq 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x^*) \right| \leq \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f(x^*+h) + f(x^*)}{h} \right| + \left| \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h} - f'(x^*) \right| \leq 2\epsilon.$$

Definamos $\alpha = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\beta = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Pela desigualdade anterior, vemos que $\alpha, \beta \in [f'(x^*) - 2\epsilon, f'(x^*) + 2\epsilon]$, ou seja, que $0 \leq \alpha - \beta \leq 4\epsilon$.

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, temos que $\alpha = \beta$ e que $f'(x_0)$ existe.

- Caso 2: $X = \mathbb{R}$.

Seja $\eta \in Y^*$. Pelo primeiro caso e como

$$\begin{aligned} & |\langle f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0), \eta \rangle| \\ & \leq \|\eta\|_{Y^*} \|f(x+h) - f(x) - f(x_0+h) + f(x_0)\| = o(\|h\|) \end{aligned}$$

quando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$, a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto \langle f(x), \eta \rangle \in \mathbb{R}$ é C^1 .

Também temos que

$$\left| \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle f(x), \eta \rangle}{h} \right| \leq \|\eta\| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\langle f(x), \eta \rangle\|}{|h|} \leq \|\eta\| \text{Lip} f.$$

Logo, $D(x) : \eta \mapsto \frac{d}{dx} \langle f(x), \eta \rangle$ está em Y^{**} .

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|h\| < \delta$, então

$$|\langle f(x+h) - f(x) + f(x_0+h) - f(x_0), \eta \rangle| \leq \epsilon \|\eta\| \|h\|$$

e, conseqüentemente, $\langle D(x) - D(x_0), \eta \rangle \leq \epsilon \|\eta\|$, ou seja, $x \mapsto D(x) \in Y^{**}$ é contínua.

Assim, se $x_0 \in Q$, $\eta \in Y^*$ com $\|\eta\| \leq 1$ e h suficientemente pequeno, temos que

$$\left\langle \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \eta \right\rangle = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \langle D(x) - D(x_0), \eta \rangle dx \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$ uniformemente para $\|\eta\| \leq 1$.

Seja $\tau : Y \hookrightarrow Y^{**}$ a inclusão canônica, isto é, $\tau(y) = \hat{y}$, em que $\hat{y} : Y^* \rightarrow Y$ é dada por $\hat{y}(\eta) = \eta(y)$, para todo $\eta \in Y^*$.

Dessa forma,

$$\tau\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} D(x_0).$$

Sendo τ uma isometria, concluímos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe em Y .

• Caso 3: Caso Geral

Sejam $x \in Q$ e $h \in X$. Pelo caso anterior, $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x + th) \in Y$ é C^1 para t suficientemente próximo de 0.

Então a derivada de Gâteaux

$$df(x; h) = \frac{d}{dt} f(x + th)|_{t=0}$$

existe para cada $x \in Q$ e $h \in X$. Além disso, temos que, se $x_0 \in Q$,

$$\|f(x + th) - f(x) - f(x_0 + th) + f(x_0)\| = o(\|th\|),$$

quando $(x, th) \rightarrow (x_0, 0)$. Dessa forma, se $\|h\| \leq 1$,

$$\|df(x; h) - df(x_0; h)\| \rightarrow 0, \text{ quando } x \rightarrow x_0 \in Q \text{ uniformemente.}$$

□

Teorema 4.2.2 (Variedades C^1 Invariantes). *Vamos supor que X, L, ρ, N e T satisfaçam as condições do Teorema 4.1.1 e que $N : X \rightarrow X$ é continuamente diferenciável com derivada limitada em uma vizinhança de $U_{(\rho)}$. Então $U_{(\rho)}$ é C^1 .*

Se N for continuamente diferenciável com derivada limitada em uma vizinhança de $S_{(\rho)}$, então $S_{(\rho)}$ é C^1 .

Demonstração. Provemos o resultado para $U_{(\rho)}$. Podemos escrever $U_{(\rho)} = \{\xi + \theta(\xi) \mid \xi \in X_u\}$, com $\theta : X_u \rightarrow X_s$, $\theta(0) = 0$ e $\text{Lip}\theta \leq 1$, dada por

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + N_u(\xi + \theta(\xi)) \\ \theta(\hat{\xi}) = L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + \theta(\xi)). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Vamos definir

$$\lambda_{\xi_0}(\theta) = \limsup_{(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\|h\|} \|\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0)\|.$$

Pelo Lema 4.2.1, basta provarmos que $\lambda_{\xi_0}(\theta) = 0$ para todo $\xi_0 \in X_u$.

Pela definição de $\lambda_{\xi_0}(\theta)$, é imediato que $\lambda_{\xi_0}(\theta) \leq 2\text{Lip}\theta \leq 2$.

Definamos $N_{j,k}^0 = \frac{\partial N_j}{\partial x_k}(\xi_0 + \theta(\xi_0))$, $j = u, s$, $k = 1, 2$. Temos que

$$\begin{aligned} \widehat{(\xi + h)} - \hat{\xi} &= L_u h + N_u(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_u(\xi + \theta(\xi)) \\ &= (L_u + \frac{\partial N_u}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))h + \frac{\partial N_u}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + N_u(\xi + h + \theta(\xi + h)) - \\ &\quad N_u(\xi + \theta(\xi)) - \frac{\partial N_u}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h - \frac{\partial N_u}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) \\ &= (L_u + \frac{\partial N_u}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))h + \frac{\partial N_u}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ em $X_u \times X_s$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta(\xi + h)} - \theta(\hat{\xi}) &= L_s \theta(\xi + h) - L_s \theta(\xi) + N_s(\xi + h + \theta(\xi + h)) - N_s(\xi + \theta(\xi)) \\ &= (L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + \frac{\partial N_s}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h + N_s(\xi + h + \theta(\xi + h)) - \\ &\quad N_s(\xi + \theta(\xi)) - \frac{\partial N_s}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h - \frac{\partial N_s}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) \\ &= (L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi)) + \frac{\partial N_s}{\partial x_1}(\xi_0 + \theta(\xi_0))h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ em $X_u \times X_s$. Assim

$$\begin{aligned} &\theta(\widehat{(\xi + h)}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{(\xi_0 + h)}) + \theta(\hat{\xi}_0) \\ &= (L_s + \frac{\partial N_s}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0)))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0)) + o(\|h\|) \\ &\leq (b + \gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta)\|h\| + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Seja $k = \widehat{(\xi_0 + h)} - \hat{\xi}_0$. Sabemos, do Teorema 4.1.1, que $k \geq (a - 2\gamma)\|h\|$ e temos que

$$\begin{aligned}
& \|(\widehat{\xi + h}) - (\hat{\xi} + k)\| = \|(\widehat{\xi + h}) - \hat{\xi} - (\widehat{\xi_0 + h}) + \hat{\xi}_0\| \\
& = \left\| \frac{\partial N_s}{\partial x_2}(\xi_0 + \theta(\xi_0))(\theta(\xi + h) - \theta(\xi) - \theta(\xi_0 + h) + \theta(\xi_0)) + o(\|h\|) \right\| \\
& \leq (\gamma\lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1))\|h\|.
\end{aligned}$$

Em particular, $\|(\widehat{\xi_0 + h}) - (\hat{\xi}_0 + k)\| = o(\|h\|)$.

Utilizando essas duas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|k\|^{-1} \|\theta(\hat{\xi} + k) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\hat{\xi}_0 + k) + \theta(\hat{\xi}_0)\| \\
& = \|k\|^{-1} \|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{\xi_0 + h}) + \theta(\hat{\xi}_0) - \theta(\widehat{\xi + h}) + \theta(\hat{\xi} + k) - \\
& \quad \theta(\hat{\xi}_0 + k) + \theta(\widehat{\xi_0 + h})\| \\
& \leq \|k\|^{-1} [\|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi}) - \theta(\widehat{\xi_0 + h}) + \theta(\hat{\xi}_0)\| + \|\theta(\widehat{\xi + h}) - \theta(\hat{\xi} + k)\| + \\
& \quad \|\theta(\hat{\xi}_0 + k) - \theta(\widehat{\xi_0 + h})\|] \\
& \leq \|k\|^{-1} \left[(b + \gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta)\|h\| + o(\|h\|) \right] + \left[\gamma\lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1) \right] \|h\| + o(\|h\|) \\
& \leq \|k\|^{-1} [(b + 2\gamma)\lambda_{\xi_0}(\theta)\|h\| + o(\|h\|)] \leq \\
& \quad \frac{b + 2\gamma}{a - 2\gamma} \lambda_{\xi_0}(\theta) + o(1).
\end{aligned}$$

quando $(\xi, h) \rightarrow (\xi_0, 0)$ e $(\hat{\xi}, k) \rightarrow (\hat{\xi}_0, 0)$. Afirmamos que essas duas convergências são equivalentes.

De fato, temos que

$$\begin{cases} \hat{\xi} - \hat{\xi}_0 = L_u(\xi - \xi_0) + N_u(\xi + \theta(\xi)) - N_u(\xi_0 + \theta(\xi_0)) \\ (a - 2\gamma)\|\xi - \xi_0\| \leq \|\hat{\xi} - \hat{\xi}_0\|, \end{cases}$$

o que prova, pela continuidade de L_u , θ e N_u , que $\xi \rightarrow \xi_0$ se, e somente se, $\hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}_0$.

Além disso,

$$k = (\widehat{\xi_0 + h}) - \hat{\xi}_0 = L_u h + N_u(\xi_0 + h + \theta(\xi_0 + h)) - N_u(\xi_0 + \theta(\xi_0))$$

e, usando o caso anterior com $\xi = \xi_0 + h$, temos que $h \rightarrow 0$ se, e somente se, $k \rightarrow 0$.

Logo,

$$\lambda_{\hat{\xi}_0}(\theta) \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} \lambda_{\xi_0}(\theta), \text{ para todo } \xi_0 \in X_u.$$

Seja $\lambda^* = \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta)$. Então $0 \leq \lambda^* \leq 2$ e

$$\lambda^* = \sup_{\hat{\xi}_0 \in X_u} \lambda_{\hat{\xi}_0}(\theta) = \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta) \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} \sup_{\xi_0 \in X_u} \lambda_{\xi_0}(\theta) = \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} \lambda^*.$$

Como $\frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} < 1$, temos que $\lambda^* = 0$, completando a demonstração de que $U_{(\rho)}$ é C^1 .

A demonstração para $S_{(\rho)}$ é análoga.

□

4.3 Variedades invariantes sob perturbações

Vamos estudar, nesta seção, aplicações com parâmetros.

Sejam X, Y espaços de Banach, $L : X \rightarrow X$ e $M : Y \rightarrow X$ aplicações lineares limitadas tais que $\sigma(L) \setminus \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq 1\}$ é fechado e $X = X_u \oplus X_{cs}$ e $L = L_u \oplus L_{cs}$ é a decomposição associada à decomposição espectral $\sigma_{cs} = \sigma(L) \setminus \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq 1\}$ e $\sigma_u = \sigma(L) \setminus \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| > 1\} = \sigma(L) \setminus \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \geq r\}$, para algum $r > 1$. Também temos que $M = M_u + M_{cs}$, $M_i \in \mathcal{L}(Y, X_j)$, $j = u, cs$.

Seja $N : X \times Y \rightarrow X$ uma função de Lipschitz com $\text{Lip} N$ suficientemente pequeno e $N(0, 0) = 0$.

Vamos definir $T(x, y) = Lx + My + N(x, y)$. A seguir, vamos procurar variedades invariantes para $T(\cdot, y)$.

Seja $\mathcal{T} : X \times Y \rightarrow X \times Y$ dada por $\mathcal{T}(x, y) = (T(x, y), \rho y)$ para algum $1 < \rho < r$. Notemos que $\rho \notin \sigma(L)$.

Vamos definir

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L & M \\ 0 & \rho I_Y \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(X \times Y)$$

e $\mathcal{N} = \mathcal{T} - \mathcal{L}$.

É fácil ver que $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(L) \cup \{\rho\}$, já que $\lambda \in \rho(L) \setminus \{\rho\}$ se, e somente se, $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$ e

$$(\lambda - \mathcal{L})^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda - L)^{-1} & (\lambda - \rho)^{-1}(\lambda - L)^{-1}M \\ 0 & (\lambda - \rho)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Seja $\gamma(t) = \nu e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, com $1 < \nu < \rho$. Como $(\lambda - \rho)^{-1}(\lambda - L)^{-1} = (\lambda - \rho)^{-1}(\rho - L)^{-1} - (\lambda - L)^{-1}(\rho - L)^{-1}$, vamos definir a projeção $\Pi_{cs}^{\mathcal{L}}$ associada ao espectro de $\mathcal{L}$ contido em $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ por

$$\Pi_{cs}^{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} d\lambda = \begin{bmatrix} \Pi_{cs}^L & (L_{cs} - \rho I)^{-1} M_{cs} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\Pi_{cs}^{\mathcal{L}}(X \times Y) = \mathcal{X}_{cs} = X_{cs} \times 0$.

Se tomarmos, agora, $1 < \rho < \nu < r$, podemos definir

$$I - \Pi_u^{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} d\lambda = \begin{bmatrix} \Pi_{cs}^L & (I - L_{cs})(\rho I - L)^{-1} M_u \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{cs}^L & -(L_u - \rho I)^{-1} M_u \\ 0 & I_Y \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\Pi_u^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \Pi_u^L & (L_u - \rho I)^{-1} M_u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\Pi_u^{\mathcal{L}}(X \times Y) = \mathcal{X}_u = X_u \times 0$. Vamos definir, também,

$$\Pi_{\rho}^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -(L - \rho I)^{-1} M \\ 0 & I_Y \end{bmatrix},$$

$\mathcal{X}_{\rho} = \{((\rho - L)^{-1} M y, y) \mid y \in Y\}$ e $\Pi_{u,\rho}^{\mathcal{L}} = \Pi_u^{\mathcal{L}} \oplus \Pi_{\rho}^{\mathcal{L}}$.

Se $T : X \times Y \rightarrow X$ for C^1 , então $\mathcal{T}$ é C^1 e as variedades invariantes associadas a $\mathcal{T}$ também serão C^1 . A variedade instável, denotada por $\mathcal{U}_{\rho}$, é o gráfico de uma aplicação $\psi : \mathcal{X}_u \oplus \mathcal{X}_{\rho} \rightarrow \mathcal{X}_{cs}$.

Seja $\alpha = -(\rho - L)^{-1} M_{cs}$. A condição $\mathcal{T}(\mathcal{U}_{\rho}) \subset \mathcal{U}_{\rho}$ garante que se $\xi \in \mathcal{X}_u$ e $y \in Y$, então existem $\hat{\xi} \in \mathcal{X}_u$ e $\hat{y} \in Y$ tais que

$$\begin{cases} (\hat{\xi} + \alpha \hat{y}, \hat{y}) = \mathcal{L}_{u,\rho}(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y) + \mathcal{N}_{u,\rho}(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y) \\ \psi(\hat{\xi} + \alpha \hat{y}, \hat{y}) = \mathcal{L}_{cs}(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y) + \mathcal{N}_{cs}(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y). \end{cases}$$

Logo, separando os termos em X_u e em Y , obtemos que

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_u \xi + M_u y + N_u(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y) \\ \hat{y} = \rho y. \end{cases}$$

Da mesma forma, obtemos que

$$\psi(\hat{\xi} + \alpha \hat{y}, \hat{y}) = L_{cs} \alpha y + L_{cs} \psi(\xi + \alpha y, y), y) + N_{cs}(\xi + \alpha y + \psi(\xi + \alpha y, y), y) + L_{cs} \alpha y + M_{cs} y.$$

Seja $\theta_y : X_u \rightarrow X_{cs}$ dada por $\theta_y = \psi(\xi + \alpha y, y)$. Como $M_{cs} y + L_{cs} \alpha y = \rho \alpha y$, temos que

$$\theta_y(\hat{y}) = L_{cs} \theta_y(\xi) + N_{cs}(\xi + \alpha y + \theta_y(\xi), y) + \rho \alpha y.$$

Assim, a aplicação $y \mapsto \theta_y(\cdot)$ é C^1 e define a variedade instável para $T_y(\cdot) = T(\cdot, y)$.

Analogamente, provamos que a variedade centro-estável para $T_y(\cdot)$ é C^1 com respeito a y .

4.4 O λ -Lema

Teorema 4.4.1 (caso local). *Seja X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação C^1 definida em uma vizinhança de 0 de forma que $T(0) = 0$ e 0 é um **ponto hiperbólico**, ou seja, temos a decomposição espectral de $T'(0)$ em $T'(0) = L = L_1 \oplus L_2$, $X = X_1 \oplus X_2$, com $r(L_2) \leq 1$ e $r(L_1^{-1}) < 1$, e vamos denotar por W_{loc}^u, W_{loc}^s as variedades locais instável e estável, respectivamente.*

Vamos supor que $\dim X_1 < \infty$ ou que $T \in C^{1+}$, ou seja, que $x \mapsto T'(x)$ seja uniformemente contínua numa vizinhança de zero.

Então existe uma vizinhança V de 0 em X tal que se $x = x^0, x^{n+1} = T(x^n) \in V$ para $n \geq 0$ e $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, D^0 for uma subvariedade mergulhada em X tal que $D^0 \cap W_{loc}^s = \{x^0\}$, $T_{x^0} D^0 \oplus T_{x^0} W_{loc}^s = X$ e definindo

$$D^n = \{p \in V : \text{existem } p_0, \dots, p_n \in V \text{ com } p_0 \in D^0, \\ p_n = p \text{ e } p_{j+1} = T(p_j), \text{ para } 0 \leq j \leq n\}$$

temos que, para n suficientemente grande, D^n é uma subvariedade C^1 mergulhada em X e $D^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^*$ na topologia C^1 , em que D^* é a componente conexa de $W_{loc}^u \cap V$ que contém 0.

Além disso, para n suficientemente grande e após uma mudança de coordenadas, D^n e W_{loc}^u possuem as seguintes formas:

$$D^n = \{x^n + \xi + \psi_n(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r\}$$

e

$$W_{loc}^u \cap V = D^* = \{\xi + \psi_n(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r\},$$

em que $\psi_n, \theta : X_1 \rightarrow X_2$ são C^1 e $\|\psi_n - \theta\|_{C^1(B_r(X_1), X_2)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Primeiramente, vamos definir N de forma que $T = L + N$.

Nesta demonstração, vamos escrever $X_1 \times X_2$ em vez de $X = X_1 \oplus X_2$ quando for conveniente e obter

$$\begin{aligned} T : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (L_1x_1 + N_1(x_1, x_2), L_2x_2 + N_2(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Primeira etapa.

Pelos Teoremas 4.1.1 e 4.2.2, sabemos que existe $r_0 > 0$ e aplicações C_1 $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ e $\sigma : X_2 \rightarrow X_1$ tais que

$$W_{loc}^u = \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r_0\} \text{ e } W_{loc}^s = \{\sigma(\eta) + \eta : \eta \in X_2, \|\eta\| < r_0\}.$$

Seja a mudança de coordenadas $h : X_1 \times X_2 \rightarrow X$ dada por $h(\xi, \eta) = \xi + \sigma(\eta) + \eta$.

Então, se $T(h(\xi, \eta)) = h(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, nós temos que

$$T(\xi + \sigma(\eta) + \eta) = L_1\xi + L_1\sigma(\eta) + L_2\eta + N_1(\xi + \sigma(\eta) + \eta) + N_2(\xi + \sigma(\eta) + \eta) = \hat{\xi} + \sigma(\hat{\eta}) + \hat{\eta}$$

e, separando os termos de X_1 e X_2 , obtemos que

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_1\xi + L_1\sigma(\eta) + N_1(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - \sigma(\hat{\eta}) \\ \hat{\eta} = L_2\eta + N_2(\xi + \sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Sabemos que $\sigma : X_2 \rightarrow X_1$ satisfaz

$$\begin{cases} \sigma(\tilde{\eta}) = L_1\sigma(\eta) + N_1(\sigma(\eta) + \eta) \\ \tilde{\eta} = L_2\eta + N_2(\sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Assim, podemos escrever a equação anterior como

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_1\xi + N_1(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_1(\sigma(\eta) + \eta) + \sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\hat{\eta}) \\ \hat{\eta} = L_2\eta + N_2(\xi + \sigma(\eta) + \eta). \end{cases}$$

Vamos definir $\tilde{N}_1(\xi, \eta) := N_1(\xi + \sigma(\eta) + \eta) - N_1(\sigma(\eta) + \eta) + \sigma(\tilde{\eta}) - \sigma(\hat{\eta})$ e $\tilde{N}_2(\xi, \eta) := N_2(\xi + \sigma(\eta) + \eta)$.

Então obtemos $h^{-1} \circ T \circ h : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ dada por

$$(\xi, \eta) \mapsto (\hat{\xi}, \hat{\eta}) = (L_1\xi + \tilde{N}_1(\xi, \eta), L_2\eta + \tilde{N}_2(\xi, \eta)).$$

É fácil ver que $\tilde{N}_1$ e $\tilde{N}_2$ são aplicações C^1 próximas de 0. Além disso, se $\xi = 0$, então $\hat{\eta} = \tilde{\eta}$, mostrando que $\tilde{N}_1(0, \eta) = 0$ e $\hat{\xi} = 0$.

Seja $\tilde{T} = h^{-1} \circ T \circ h$. Pelo que foi feito acima, sua variedade estável é $\{\xi = 0\}$ e, dessa forma, podemos assumir, numa vizinhança de 0, que $W_{loc}^s = X_2$ e que $N_1(\eta) = 0$, para todo $\eta \in X_2$, $\|\eta\| < r_0$.

Da mesma forma, podemos fazer a mudança de coordenadas $(\xi, \eta) \mapsto \xi + \theta(\xi) + \eta$ para assumir que, numa vizinhança de 0, $W_{loc}^u = X_1$ e que $N_2(\xi) = 0$, para todo $\xi \in X_1$, $\|\xi\| < r_0$.

Notemos que essas mudanças de coordenadas são independentes, no sentido que se $N_1(0, \eta) = 0$, então

$$\tilde{N}_1(0, \eta) = N_1(\xi + \theta(\xi) + \eta)|_{\xi=0} = N_1(0, \eta) = 0.$$

Dessa forma, podemos assumir que $W_{loc}^u = X_1$ e $W_{loc}^s = X_2$.

Segunda etapa.

Já sabemos que

$$\begin{aligned} T : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (L_1x_1 + N_1(x_1, x_2), L_2x_2 + N_2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

é uma aplicação C^1 se $\|x_1\| < r_0$ e $\|x_2\| < r_0$. Além disso, temos que $N_1(0, x_2) =$

$N_2(x_1, 0) = 0$ e $\left\| \frac{\partial N_i}{\partial x_j}(x_1, x_2) \right\| \rightarrow 0$, quando $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ para $1 \leq i, j \leq 2$.

Como $T \in C^{1+}$ ou $\dim X_1 < \infty$, temos que

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \rightarrow 0 \text{ quando } x_2 \rightarrow 0, \text{ uniformemente para } \|x_1\| < r_0.$$

Vamos, agora, escolher normas equivalentes em X_1 e X_2 de forma que $\|L_1^{-1}\| = a^{-1}$ e $\|L_2\| = b$, com $1 \leq b < a$. Tomemos $0 < \gamma < \frac{a-b}{4}$ e vamos assumir que $r_0 > 0$ é suficientemente pequeno de forma que, se $N_{i,j} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, então $\|N_{i,j}\| \leq \gamma$ em $V := \{(x_1, x_2) : \|x_1\| < r_0, \|x_2\| < r_0\}$.

Terceira etapa.

Seja $x^0 \in V \cap W_{loc}^s = V \cap X_2$ tal que $x^n = T^n(x^0) \in V$ para $n \geq 0$ e $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Então $x^n \in V \cap W_{loc}^s$, o que implica que $\|x^n\| < r_0$.

Notemos que o espaço tangente de $W_{loc}^s = X_2$ em x^0 é X_2 .

Consideremos a projeção $\pi_1 : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1$ e mostremos que sua restrição ao espaço tangente $T_{x^0}D^0$ de D^0 em x^0 é um isomorfismo sobre X_1 .

Seja $\tilde{\pi}_1$ a restrição de π_1 a $T_{x^0}D^0$. Primeiramente, se $v \in T_{x^0}D^0$ é tal que $\tilde{\pi}_1 v = 0$, então $v \in X_2$. Como $T_{x^0}D^0 \cap X_2 = \{0\}$, temos que $v = 0$ e que $\tilde{\pi}_1$ é injetiva. Para a recíproca, seja $w \in X_1$. Como $X = T_{x^0}D^0 \oplus X_2$, existe $w_1 \in T_{x^0}D^0$ e $w_2 \in X_2$ tal que $w = w_1 + w_2$ e $w = \pi_1 w = \pi_1 w_1 = \tilde{\pi}_1 w_1$, mostrando que $\tilde{\pi}_1$ é sobrejetora. Dessa forma, sendo $\tilde{\pi}_1$ contínua e bijetora, o teorema do gráfico fechado garante que sua inversa é também contínua.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem $\rho_0 > 0$, uma vizinhança $D_{\rho_0}^0$ de x^0 em D^0 e $U_{\rho_0} := \{\xi \in X_1 : \|\xi\| < \rho_0\}$ tais que $\tilde{\pi}_1 : D_{\rho_0}^0 \rightarrow U_{\rho_0}$ é invertível e que sua inversa $\tilde{\pi}_1^{-1} : U_{\rho_0} \rightarrow D_{\rho_0}^0$ é contínua.

Definamos, para cada $\xi \in U_{\rho_0}$, $\psi_0(\xi) = \tilde{\pi}_1^{-1}\xi - \xi - x^0$. Como $\xi \in X_1$ e $x^0 \in X_2$, temos que $\pi_1 \psi_0(\xi) = 0$, ou seja, ψ_0 é uma função contínua de X_1 em X_2 .

Sendo $\tilde{\pi}_1$ um isomorfismo e $\tilde{\pi}_1(x^0) = 0$, temos que $\tilde{\pi}_1^{-1}(0) = x^0$ e que $\psi_0(0) = 0$. Além disso,

$$D_{\rho_0}^0 = \tilde{\pi}_1^{-1}U_{\rho_0} = \{\tilde{\pi}_1^{-1}\xi : \xi \in U_{\rho_0}\} = \{x^0 + \xi + \psi_0(\xi) : \xi \in U_{\rho_0}\}.$$

Consideremos, agora, a aplicação $U_{\rho_0} \ni \xi \mapsto L_1\xi + N_1(x^0 + \xi + \psi_0(\xi))$. Como $\|L_1^{-1}N_{1,1}(x^0)\| \leq a^{-1}\gamma < 1$, dado $\hat{\xi} \in X_1$, existe um único $\xi \in X_1$ tal que $\hat{\xi} = L_1\xi + N_{1,1}(x^0)\xi$ e o operador linear $L_1 + N_{1,1}(x^0) : X_1 \rightarrow X_1$ é um isomorfismo.

O Teorema da Função Inversa garante a existência de $\rho_1 > 0$ e da vizinhança U_{ρ_1} de 0 em X_1 tais que, para todo $\hat{\xi} \in U_{\rho_1}$, existe um único $\xi \in U_{\rho_0}$ tal que $\hat{\xi} = L_1\xi + N_1(x^0 + \xi + \psi_0(\xi))$.

Definamos a aplicação $\psi_1 : U_{\rho_1} \rightarrow X_2$ por

$$\psi_1(\hat{\xi}) = L_2\psi_0(\xi) + N_2(x^0 + \xi + \psi_0(\xi)) - N_2(0, x^0).$$

É fácil ver que ψ_1 é contínua, $\psi_1(0) = 0$ e, como $X_2 \ni x^1 = T(x^0) = L_2x^0 + N_2(x^0)$,

$$\begin{aligned} T(D_{\rho_0}^0) = \{T(x^0 + \xi + \psi_0(\xi)) : \xi \in U_{\rho_0}\} \supset \{\hat{\xi} + \psi_1(\hat{\xi}) + L_2x^0 + N_2(x^0) : \hat{\xi} \in U_{\rho_1}\} = \\ \{x^1 + \xi + \psi_1(\xi) : \xi \in U_{\rho_1}\}. \end{aligned}$$

Suponhamos que tenhamos definido a aplicação contínua $\psi_n : U_{\rho_n} \rightarrow X_2$ tal que $\psi_n(0) = 0$ e $T^n(D_{\rho_0}^0) \supset \{x^n + \xi + \psi_n(\xi) : \xi \in U_{\rho_n}\}$. Como já feito, $L_1 + N_{1,1}(0, x^0) : X_1 \rightarrow X_1$ é um isomorfismo e, pelo Teorema da Função Inversa, existe $\rho_{n+1} > 0$ tal que, para todo $\hat{\xi} \in U_{\rho_{n+1}}$, existe um único $\xi \in U_{\rho_n}$ tal que $\hat{\xi} = L_1\xi + N_1(x^n + \xi + \psi_n(\xi))$.

Definamos a aplicação $\psi_{n+1} : U_{\rho_{n+1}} \rightarrow X_2$ por

$$\psi_{n+1}(\hat{\xi}) = L_2\psi_n(\xi) + N_2(x^n + \xi + \psi_n(\xi)) - N_2(0, x^n).$$

É fácil ver que $\psi_{n+1}(0) = 0$ e

$$T^{n+1}(D_{\rho_0}^0) \supset \{x^{n+1} + \xi + \psi_{n+1}(\xi) : \xi \in U_{\rho_{n+1}}\}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\rho_n > 0$ e uma aplicação contínua ψ_n tais que $\psi_n(0) = 0$ e

$$T^n(D_{\rho_0}^0) \supset \{x^n + \xi + \psi_n(\xi) : \xi \in U_{\rho_n}\}.$$

Quarta etapa. Para $n \geq 0$, seja $\Lambda_n \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ definido por $\Lambda_n := \psi'_n(0)$. Utilizando a definição de ψ_n e como $N_{1,2}(0, x^n) = 0$, temos que

$$\Lambda_{n+1} = [(L_2 + N_{2,2}(0, x^n))\Lambda_n + N_{2,1}(0, x^n)] \circ [L_1 + N_{1,1}(0, x^n)]^{-1}.$$

Notemos que $\|[L_1 + N_{1,1}(0, x^n)]^{-1}\| \leq (a - \gamma)^{-1}$ e, dessa forma, para cada $n \geq 0$,

$$\|\Lambda_{n+1}\| \leq [(b + \gamma)\|\Lambda_n\| + \gamma](a - \gamma)^{-1} = \frac{b + \gamma}{a - \gamma}\|\Lambda_n\| + \frac{\gamma}{a - \gamma}.$$

Provemos que a sequência $\{\|\Lambda_n\|\}_{n \geq 0}$ é limitada. Seja $\gamma^* = \frac{\gamma}{a - b - 2\gamma} < \frac{a - b}{4(a - b - 2\gamma)} < \frac{a - b}{4(a - b - (a - b)/2)} = \frac{1}{2}$.

Se $\|\Lambda_n\| \leq \gamma^*$, então

$$\|\Lambda_{n+1}\| \leq \frac{b + \gamma}{a - \gamma}\gamma^* + \frac{\gamma}{a - \gamma} = \gamma^*.$$

Por outro lado, se $\|\Lambda_n\| > \gamma^*$ e $\|\Lambda_{n+1}\| > \|\Lambda_n\|$, então

$$\|\Lambda_n\| < \|\Lambda_{n+1}\| \leq \frac{b + \gamma}{a - \gamma}\|\Lambda_n\| + \frac{\gamma}{a - \gamma} < \gamma^*,$$

ou seja, isso é um absurdo. Assim, se $\|\Lambda_n\| > \gamma^*$, então $\|\Lambda_{n+1}\| \leq \|\Lambda_n\|$, provando que $\{\|\Lambda_n\|\}_{n \geq 0}$ é limitada.

Seja $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n\|$. Então

$$\alpha \leq \frac{b + \gamma}{a - \gamma}\alpha + \frac{\gamma}{a - \gamma}$$

e $\alpha \leq \gamma^* < \frac{1}{2}$. Assim, existe $n_0 > 0$ tal que, se $n \geq n_0$, $\|\Lambda_n\| \leq \frac{1}{2}$.

Por fim, tomemos $0 < \rho < \min_{0 \leq n \leq n_0} \{\rho_n\}$ de forma que ψ_n seja uma aplicação C^1 definida em $\|\xi\| < \rho$, para cada $0 \leq n \leq n_0$ e

$$\sup_{\|\xi\| \leq \rho} \|\psi'_{n_0}(\xi)\| \leq \|\psi'_{n_0}(0)\| + \|\psi'_{n_0}(\xi) - \psi'_{n_0}(0)\| \leq \|\Lambda_n\| + \frac{1}{2} \leq 1.$$

Quinta etapa.

Mostremos que, para $n \geq n_0$, as funções $\psi_n : U_{\rho_n} \rightarrow X_2$ podem ser estendidas para U_{r_n} , em que $r_n = \min\{\rho(a - \gamma)^{n-n_0}, r_0\}$.

Como $\sup_{\|\xi\| < \rho} \|\psi'_{n_0}(\xi)\| \leq 1$, temos que $\text{Lip}\psi_{n_0} \leq 1$ em U_ρ . Então, se $\xi, \tilde{\xi} \in U_{r_{n_0}}$, temos que

$$\|L_1^{-1}N_1(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)) - L_1^{-1}N_1(x^{n_0} + \tilde{\xi} + \psi_{n_0}(\tilde{\xi}))\| \leq 2a^{-1}\gamma\|\xi - \tilde{\xi}\|.$$

Observando que $N_1(x^{n_0} + \psi_{n_0}(\xi)) = 0$, dado $\hat{\xi} \in U_{r_{n_0+1}}$, temos

$$\|L_1^{-1}\hat{\xi} - L_1^{-1}N_1(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi))\| < a^{-1}\|\hat{\xi}\| + a^{-1}\gamma\|\xi\| \leq a^{-1}r_{n_0+1} + a^{-1}\gamma r_{n_0} \leq a^{-1}r_{n_0}(a - \gamma) + a^{-1}\gamma r_{n_0} \leq r_n$$

Por essas desigualdades e lembrando que $\gamma < \frac{a-b}{4}$, a aplicação $U_{r_{n_0}} \ni \xi \mapsto L_1^{-1}\hat{\xi} - L_1^{-1}N_1(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)) \in U_{r_{n_0}}$ é uma contração.

Assim, para cada $\hat{\xi} \in U_{r_{n_0+1}}$, existe um único $\xi \in U_{r_{n_0}} = U_\rho$ tal que

$$\hat{\xi} = L_1\xi + N_1(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)).$$

Vamos estender ψ_{n_0+1} para $U_{r_{n_0+1}}$ definindo

$$\psi_{n_0+1}(\hat{\xi}) = L_2\psi_{n_0}(\xi) + N_2(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)) - N_2(0, x^{n_0}).$$

Temos que, para todo $\hat{\xi} \in U_{r_{n_0+1}}$,

$$\begin{aligned} \psi'_{n_0+1}(\hat{\xi}) &= [(L_2 + N_2, 2(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)))\psi'_{n_0}(\xi) + N_{2,1}(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi))] \\ &\quad \circ [L_1 + N_{1,1}(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)) + N_{1,2}(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi))\psi'_{n_0+1}(\xi)]^{-1}. \end{aligned}$$

Notemos que, como feito anteriormente e usando que $\|\psi'_{n_0}(\xi)\| \leq 1$, temos

$$\|[L_1 + N_{1,1}(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi)) + N_{1,2}(x^{n_0} + \xi + \psi_{n_0}(\xi))\psi'_{n_0+1}(\xi)]^{-1}\| \leq \frac{1}{a - 2\gamma}.$$

Então

$$\|\psi_{n_0+1}(\hat{\xi})\| \leq \frac{b+\gamma}{a-2\gamma} \|\psi'_{n_0}(\xi)\| + \frac{\gamma}{a-2\gamma}.$$

Consequentemente

$$\sup_{\hat{\xi} \in U_{r_{n_0+1}}} \|\psi_{n_0+1}(\hat{\xi})\| \leq \frac{b+\gamma}{a-2\gamma} \sup_{\xi \in U_{r_{n_0}}} \|\psi'_{n_0}(\xi)\| + \frac{\gamma}{a-2\gamma} \leq \frac{b+2\gamma}{a-2\gamma} < 1.$$

Logo, $\text{Lips}\psi_{n_0+1} \leq 1$.

Podemos proceder analogamente para construir a extensão de ψ_n a U_{r_n} para obter

$$\begin{cases} \hat{\xi} = L_1\xi + N_1(x^{n-1} + \xi + \psi_{n-1}(\xi)) \\ \psi_n(\hat{\xi}) = L_2\psi_{n-1}(\xi) + N_2(x^{n-1} + \xi + \psi_{n-1}(\xi)) - N_1(0, x^{n-1}). \end{cases}$$

Como $a - \gamma > 1$ podemos ver que $\rho \leq r_n \leq r_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$. Além disso, existe $n_1 \geq n_0$ tal que $r_n = r_0$ para todo $n \geq n_1$. Se $n \geq n_1$, podemos definir $\lambda_n = \sup_{\xi \in U_{r_0}} \|\psi'_n(\xi)\|$ e $\lambda_n \leq 1$.

Sexta etapa.

Pela etapa anterior, temos que, se $\|\hat{\xi}\| \leq r_0$,

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+1}(\hat{\xi})\| &\leq b\|\psi_n(\xi)\| + \|N_2(x^n + \xi + \psi_n(\xi)) - N_2(x^n + \psi_n(\xi))\| + \\ &\quad \|N_2(x^n + \xi) - N_2(0, x^n)\| \leq \\ &\quad (b + \gamma)\|\psi_n(\xi)\| + \|N_2(x^n + \xi) - N_2(0, x^n)\|. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|\xi\| = \|L_1^{-1}\hat{\xi} + L_1^{-1}N_1(x^n + \xi + \psi_n(\xi))\| \leq a^{-1}\|\hat{\xi}\| + a^{-1}\gamma\|\xi\|,$$

o que implica que $(a - \gamma)\|\xi\| \leq \|\hat{\xi}\|$. Dessa forma,

$$\frac{\|\psi_{n+1}(\hat{\xi})\|}{\|\hat{\xi}\|} \leq \frac{b+\gamma}{a-\gamma} \|\psi_n(\xi)\| + \frac{1}{a-\gamma} \|N_2(x^n + \psi_n(\xi)) - N_2(0, x^n)\|.$$

Como

$$\frac{\|N_2(\xi, x^n) - N_2(0, x^n)\|}{\|\xi\|} \leq \sup_{\eta \in U_{r_0}} \|N_{2,1}(\eta, x^n)\|,$$

temos que $\sup_{\xi \in U_{r_0}} \frac{\|\psi_n(\hat{\xi})\|}{\|\hat{\xi}\|} \rightarrow 0$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que $\sup_{\xi \in U_{r_0}} \|\psi_n(\xi)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Derivando $\hat{\xi}$ em relação a ξ e lembrando que $\text{Lip}\psi_n \leq 1$, temos que

$$\left\| \frac{d\hat{\xi}}{d\xi} \right\| \geq (a - 2\gamma) \text{ e que } \left\| \left(\frac{d\hat{\xi}}{d\xi} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{a - 2\gamma}.$$

Podemos usar esta estimativa para derivar ψ_n e obter

$$\begin{aligned} \|\psi'_{n+1}(\hat{\xi})\| &\leq \frac{1}{a - 2\gamma} \left\| \frac{\partial \psi_{n+1}(\hat{\xi})}{\partial \xi} \right\| \leq \\ &\frac{1}{a - 2\gamma} \left(b \|\psi'_n(\xi)\| + \|N_{2,1}(x^n + \xi + \psi_n(\xi))\| + \|N_{2,2}(x^n + \xi + \psi_n(\xi))\psi'_n(\xi)\| \right) \leq \\ &\frac{b + \gamma}{a - 2\gamma} \lambda_n + \frac{1}{a - 2\gamma} \sup_{\xi \in U_{r_0}} \|N_{2,1}(x^n + \xi + \psi_n(\xi))\|. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\lambda_{n+1} \leq (b + \gamma)\psi_n + \frac{1}{a - 2\gamma} \sup_{\xi \in U_{r_0}} \|N_{2,1}(x^n + \xi + \psi_n(\xi))\|$$

Dessa forma, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, já que $\frac{b+\gamma}{a-2\gamma} < 1$, $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\psi_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $N_{2,1}(\xi, x_2) \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} 0$ quando $\|\xi\| < r_0$.

Definamos

$$S^n = \{x^n + \xi + \psi_n(\xi) : \xi \in U_{r_0}\}.$$

Lembrando que $V = \{(x_1, x_2) : \|x_1\| < r_0, \|x_2\| < r_0\}$ e $W_{loc}^u = X_1$, temos que $U_{r_0} = V \cap W_{loc}^u = D^*$.

Então $S^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^*$.

Sétima etapa.

Para completarmos a demonstração, falta apenas mostrarmos que $S^n = D^n$ se n for suficientemente grande.

Seja $(\xi, x^n + \psi_n(\xi)) \in S^n$. Para $i = 0, \dots, n$, sejam $\xi^n = \xi$, $\xi^{i+1} = \hat{\xi}^i$ e $p_i = (\xi^i, x^i + \psi_i(\xi^i))$. A quinta etapa mostra que essa construção está bem definida. É fácil ver que $T(p_i) = p_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. e, dessa forma, que $S^n \subset D^n$.

Para a recíproca, seja $p = p_n \in D^n$, $p_0 \in D^0$, $p_1, \dots, p_n \in V$ e $p_{j+1} = T(p_j)$, $0 \leq j < n$. Vamos escrever $p_j = x^j + \xi_j + \eta_j$, com $\xi_j \in X_1$ e $\eta_j \in X_2$. Temos então que

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= x^{j+1} + \xi_{j+1} + \eta_{j+1} = T(p_j) = T(x_j + \xi_j + \eta_j) = \\ &L_1\xi_j + N_1(x_j, \xi_j + \eta_j) + L_2x^j + L_2\eta_j + N_2(x_j, \xi_j + \eta_j) = \\ &Tx^j + L_1\xi_j + N_1(x_j, \xi_j + \eta_j) + L_2\eta_j + N_2(x_j, \xi_j + \eta_j) - N_2(0, x_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \xi_{j+1} = L_1\xi_j + N_1(x_j, \xi_j + \eta_j) \\ \eta_{j+1} = L_2\eta_j + N_2(x_j, \xi_j + \eta_j) - N_2(0, x_j). \end{cases}$$

Se, para algum $0 \leq j < n$, tivermos que $\eta_j = \psi_j(\xi_j)$, então $\eta_i = \psi_i(\xi_i)$ para todo $i \geq j$ e, em particular, $\eta_n = \psi_n(\xi_n)$, ou seja, $p_n \in S^n$.

Como $\|\xi_{j+1}\| \geq (a - \gamma)\|\xi_j\|$, temos

$$\xi_0 \leq \frac{\|\xi_n\|}{(a - \gamma)^n} < \frac{r_0}{(a - \gamma)^n} \leq \rho, \text{ para } n \geq n_1.$$

Assim, $p_0 \in D^0$ e $\|\xi_0\| \leq \rho$, o que implica que $p_0 \in D_\rho^0$ e, consequentemente, $p_0 = x^0 + \xi_0 + \psi_0(\xi_0)$.

Logo $p_n \in S^n$ e $D^n \subset S_n$.

□

Definição 4.4.2. *Seja $T : X \rightarrow X$ uma aplicação num espaço de Banach X tal que o semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ possua atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que T é **reversível** se $T|_{\mathcal{A}}$ for injetivo, T for diferenciável em $\mathcal{A}$ e $T'(z) : X \rightarrow X$ for um operador linear contínuo e injetivo para cada $z \in \mathcal{A}$.*

Proposição 4.4.3. *Seja x um ponto fixo hiperbólico da aplicação reversível T . Então o conjunto $W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^u(x))$ é uma variedade C^1 injetivamente imersa em X .*

Demonstração. Pelos Teoremas 4.1.1 e 4.2.2, existe $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ uma aplicação C^1 de forma que

$$W_{loc}^u(x) = \{x + \xi + \theta(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r_0\}$$

para algum $r_0 > 0$. Assim, dado $z \in W^u(x)$, seja n_z o menor inteiro não negativo tal que $z \in T^{n_z}(W_{loc}^u(x))$. Como T é reversível, $T^{n_z}(W_{loc}^u(x))$ é aberto. Seja U_z uma vizinhança de z em $T^{n_z}(W_{loc}^u(x))$ e seja W_z uma vizinhança em $W_{loc}^u(x)$ tal que $U_z = T^{n_z}(W_z)$.

Seja $\pi_1 : W_{loc}^u(x) \rightarrow X_1$ a projeção de $W_{loc}^u(x)$ em X_1 , ou seja, $\pi_1(x + \xi + \theta(\xi)) = \xi$, com $\xi \in X_1$ e $\|\xi\| < r_0$.

Definamos $\phi_z : \pi_1(W_z) \rightarrow U_z$ por $\phi_z(\xi) = T^{n_z}(x + \xi + \theta(\xi))$. Por essa construção, é imediato que $\{(\pi_1(W_z), \phi_z)\}$ é uma carta C^1 para $W^u(x)$ e, como a inclusão $i : W^u(x) \rightarrow X$ tem a derivada injetiva, temos que $W^u(x)$ está injetivamente imersa em X .

□

Teorema 4.4.4 (caso global). *Seja X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação de forma que o semigrupo $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ tenha atrator global $\mathcal{A}$, e T seja uma aplicação C^1 em uma vizinhança de $\mathcal{A}$ e seja reversível*

Suponha que $T(0) = 0$, $T'(0) = L = L_1 \oplus L_2$, $X = X_1 \oplus X_2$, com $r(L_2) \leq 1$ e $r(L_1^{-1}) < 1$, e vamos denotar por W_{loc}^u, W_{loc}^s as variedades locais instável e estável de 0, respectivamente. Além disso, seja $W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^u)$ e vamos assumir que $\dim X_1 < \infty$ ou $T \in C^{1+}$ em $\mathcal{A}$, ou seja $\mathcal{A} \ni z \mapsto T'(z)$ é uniformemente contínua.

Então, dados $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma subvariedade D^0 de X tal que $D^0 \cap W_{loc}^s = \{x_0\}$ e $T_{x_0} D^0 \oplus T_{x_0} W_{loc}^s = X$, existe uma vizinhança D_ρ^0 de x_0 em D^0 e, para n suficientemente grande, existem conjuntos $S^n \subset T^n(D_\rho^0)$ tais que

$$S^n \rightarrow T^{n_0}(W_{loc}^u), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

na norma C^1 .

Demonstração. Pela terceira etapa da demonstração do λ -Lema local, sabemos que existem vizinhanças D_ρ^0 de x^0 em D^0 e V de 0 em X e, para n suficientemente grande, conjuntos

$$R^n = \{x^n + \xi + \psi_n(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r_0\} \subset T^n(D_\rho^0),$$

em que $x^n = T^n(x^0)$ e $\psi_n : X_1 \rightarrow X_2$ são aplicações C^1 de forma que $R^n \rightarrow W_{loc}^u$ quando $n \rightarrow \infty$, na norma C^1 .

Como podemos escrever, para alguma aplicação $\theta : X_1 \rightarrow X_2$, $W_{loc}^u = \{\xi + \theta(\xi) : \xi \in X_1, \|\xi\| < r_0\}$, temos que

$$\|\psi_n - \theta\|_{C^1(B_{r_0}(X_1), X_2)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $U_r = \{\xi \in X_1 : \|\xi\| < r\}$, para $r > 0$ e definamos $\phi, \mu_n : U_{r_0} \rightarrow T^{n_0}(W_{loc}^u)$ por

$$\begin{cases} \psi(\xi) = T^{n_0}(\xi + \theta(\xi)) \\ \mu_n = T^{n_0}(x^n + \xi + \psi_n(\xi)), \end{cases}$$

para n suficientemente grande.

Como $\dim X_1 < \infty$ ou $T \in C^{1+}$ em uma vizinhança de $\mathcal{A}$, temos

$$\sup_{\xi \in U_{r_0}} \|\mu_n(\xi) - \phi(\xi)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$\sup_{\xi \in U_{r_0}} \|\mu'_n(\xi) - \phi'(\xi)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Definindo $S^n = T^{n_0}(R^{n-n_0})$, para n suficientemente grande, temos que $S^n \subset T^n(D_\rho^0)$ e $S^n \rightarrow T^{n_0}(W_{loc}^u)$ quando $n \rightarrow \infty$.

□

Permanência e Continuidade de Elementos Críticos

Sejam T_η aplicações contínuas em um espaço de Banach X , com $\eta \in [0, 1]$. Começamos este capítulo estudando a continuidade dos conjuntos dos pontos de equilíbrio dessas aplicações.

Neste capítulo, também mostramos que uma órbita normalmente hiperbólica é um invariante isolado e que ela se comporta continuamente sob perturbações.

5.1 Permanência e continuidade de pontos de equilíbrio

Teorema 5.1.1 (semicontinuidade superior de pontos de equilíbrio). *Seja $[0, 1] \times X \ni (\eta, x) \mapsto T_\eta x \in X$ uma aplicação contínua e uniformemente contínua em compactos de X em $\eta = 0$. Vamos supor que a família de semigrupos $\{T_\eta^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta \in [0, 1]}$ seja coletivamente assintoticamente compacta. Se cada T_η tiver o conjunto de pontos fixos $\mathcal{E}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$ e $\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{E}_\eta$ for limitado, então a família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.*

Demonstração. Para cada $\eta \in [0, 1]$, seja $x_\eta^* \in \mathcal{E}_\eta$. Vamos considerar uma sequência $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]$ tal que $\eta_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\{x_{\eta_n}^*\}$ é limitado, $\{T_{\eta_n}^n : n \in \mathbb{N}\}_{\eta_n \in [0, 1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta e $T_{\eta_n} x_{\eta_n}^* = x_{\eta_n}^*$, temos que $\{x_{\eta_n}^*\}$ possui uma subsequência convergente.

Podemos, então, supor que $x_{\eta_n}^* \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pela continuidade da família $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ em $\eta = 0$, temos que

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\eta_n}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\eta_n} x_{\eta_n}^* = T_0 x^*.$$

Assim, $T_0 x^* = x^*$ e $x^* \in \mathcal{E}_0$. Pela Lema 2.0.20, a família $\{\mathcal{E}_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. $\square$

Lema 5.1.2. *Seja X um espaço de Banach e $T_0 \in C(X)$. Seja $x^* \in \mathcal{E}_0$ um ponto fixo de T_0 . Se T_0 for diferenciável em x^* , $1 \notin \sigma(T'_0(x^*))$ e*

$$\|T_0(y + x^*) - T_0(z + x^*) - T'_0(x^*)(y - z)\|_X = o(\|y - z\|_X), \quad (5.1.1)$$

então x^ é isolado.*

Consequentemente, se $\mathcal{E}_0$ for compacto, T_0 for diferenciável em x^ , $1 \notin \sigma(T'_0(x^*))$ e T_0 satisfaz (5.1.1) para todo $x^* \in \mathcal{E}_0$, então $\mathcal{E}_0$ é finito.*

Demonstração. Sendo x^* um ponto fixo de T_0 e $1 \notin \sigma(T'_0(x^*))$, podemos definir a aplicação $\phi : X \rightarrow X$ dada por

$$\phi(y) = (I - T'_0(x^*))^{-1}(T_0(y + x^*) - T_0(x^*) - T'_0(x^*)y).$$

Se $y + x^*$ for um ponto fixo de T_0 , então $\phi(y) = y$. Por outro lado, se $\phi(y) = y$, então $(I - T'_0(x^*))y = T_0(y + x^*) - T_0(x^*) - T'_0(x^*)y$ e $y + x^*$ é um ponto fixo de T_0 . Em particular, 0 é um ponto fixo de ϕ .

Como vale (5.1.1), existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T_0(y + x^*) - T_0(z + x^*) - T'_0(x^*)(y - z)\|_X \leq \frac{1}{2\|I - T'_0(x^*)\|_{\mathcal{L}(X)}} \|y - z\|_X,$$

sempre que $y, z \in \overline{B_\delta(0)}$. Assim, temos que

$$\|\phi(y)\|_X \leq \|(I - T'_0(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y + x^*) - T_0(x^*) - T'_0(x^*)y\|_X \leq \frac{1}{2}\|y\| < \delta$$

e que

$$\|\phi(y) - \phi(z)\|_X \leq \|(I - T'_0(x^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T_0(y + x^*) - T_0(z + x^*) - T'_0(x^*)(y - z)\|_X \leq \frac{1}{2}\|y - z\|,$$

para todo $y, z \in \overline{B_\delta(0)}$. Assim, $\phi(\overline{B_\delta(0)}) \subset \overline{B_\delta(0)}$ e ϕ é uma contração em $\overline{B_\delta(0)}$. Isso implica que x^* é o único ponto fixo de T_0 em $\overline{B_\delta(0)}$ e x^* é um ponto de equilíbrio isolado para T_0 .

Para completar a demonstração, basta notarmos que se $\mathcal{E}_0$ fosse compacto e não finito, poderíamos encontrar uma sequência $\{x_j\} \subset \mathcal{E}_0$, com $x_j \neq x^*$, tal que $x_j \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$, contrariando o fato de x^* ser isolado. $\square$

Teorema 5.1.3. *Seja X um espaço de Banach e $\{T_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de aplicações contínuas. Vamos supor que $x_0^* \in \mathcal{E}_0$ seja um ponto fixo de T_0 , $1 \notin \sigma(T'_0(x_0^*))$ e que*

(i)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|T_\eta(x_0^*) - T_0(x_0^*)\|_X = 0; \quad (5.1.2)$$

(ii) *dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{y \in B_\delta(x_0^*)} \|T'_\eta(y) - T'_0(x_0^*)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \leq \epsilon; \quad (5.1.3)$$

(iii) *para algum $\eta_0 \in (0, 1]$, dado $\rho > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\|T_\eta(y) - T_\eta(z) - T'_\eta(z)(y - z)\|_X \leq \rho\|y - z\|_X, \quad y, z \in B_\epsilon(x_0^*), \quad \forall \eta \in [0, \eta_0]. \quad (5.1.4)$$

Então existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que T_η tem um único ponto fixo $x_\eta^ \in B_\delta(x_0^*)$ para cada $\eta \in [0, \eta_0]$ e $x_\eta^* \rightarrow x_0^*$ quando $\eta \rightarrow 0$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que x_η^* é um ponto fixo de T_η se, e somente se, x_η^* for um ponto fixo para

$$\phi_\eta(y) = (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T'_0(x_0^*)y].$$

Mostremos que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta_\delta > 0$ tal que ϕ_η é uma contração em $\overline{B_\delta(x_0^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_\delta]$. Notemos que

$$\begin{aligned} \phi_\eta(y) - x_0^* &= (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_0(x_0^*) - T'_0(x_0^*)(y - x_0^*)] \\ &= (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(x_0^*) - T'_\eta(x_0^*)(y - x_0^*)] + \\ &\quad (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T'_\eta(x_0^*) - T'_0(x_0^*)](y - x_0^*) + \\ &\quad (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(x_0^*) - T_0(x_0^*)]. \end{aligned}$$

Por (5.1.4), podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que

$$\|(I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(x_0^*) - T'_\eta(x_0^*)(y - x_0^*)]\|_X \leq \frac{1}{4}\|y - x_0^*\|_X$$

para todo $y \in B_\epsilon(x_0^*)$.

Por (5.1.2) e (5.1.3), podemos tomar $\eta_1 > 0$ tal que, para todo $0 \leq \eta \leq \eta_1$

$$\|(I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T'_\eta(x_0^*) - T'_0(x_0^*)]\|_X \leq \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$\|(I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T'_\eta(x_0^*) - T'_0(x_0^*)]\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Assim, $\phi_\eta(\overline{B_\epsilon(x_0^*)}) \subset \overline{B_\epsilon(x_0^*)}$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_1$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\phi_\eta(y) - \phi_\eta(z) &= (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(z) - T'_0(x_0^*)(y - z)] \\
&= (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(z) - T'_\eta(z)(y - z)] + \\
&\quad (I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T'_\eta(z) - T'_0(x_0^*)](y - z).
\end{aligned}$$

Como valem (5.1.3) e (5.1.4), tomemos $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ e $0 < \eta_2 < \eta_1$ tais que, para todo $y, z \in B_{\epsilon'}(x_0^*)$, tenhamos

$$\|(I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T_\eta(y) - T_\eta(z) - T'_\eta(z)(y - z)]\|_X \leq \frac{1}{4}\|y - z\|_X.$$

e

$$\|(I - T'_0(x_0^*))^{-1}[T'_\eta(z) - T'_0(x_0^*)](y - z)\|_X \leq \frac{1}{4}\|y - z\|_X.$$

Pelo que foi feito, é fácil ver que se $0 \leq \eta \leq \eta_2$, $\phi_\eta(\overline{B_{\epsilon'}(x_0^*)}) \subset \overline{B_{\epsilon'}(x_0^*)}$ e que ϕ_η é uma contração em $\overline{B_{\epsilon'}(x_0^*)}$.

Dessa forma, T_η possui um único ponto fixo x_η^* em $\overline{B_{\epsilon'}(x_0^*)}$ para todo $\eta \in [0, \eta_2]$.

Por fim, dado $0 < \epsilon'' < \epsilon'$, podemos tomar $0 < \eta_1'' < \eta_1$ de forma que $\phi_\eta(\overline{B_{\epsilon'}(x_0^*)}) \subset \overline{B_{\epsilon''}(x_0^*)}$ para todo $0 \leq \eta \leq \eta_1$, o que implica que $\|x_\eta^* - x_0^*\|_X \leq \epsilon'''$, para todo $\eta \in [0, \eta_1'']$, provando que $x_\eta^* \rightarrow x_0^*$ quando $\eta \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 5.1.4 (Semicontinuidade inferior). *Seja $\{T_\eta\}_{0 \leq \eta \leq 1}$ uma família de aplicações $C^1(X)$. Suponhamos que:*

(i) $\mathcal{E}_0$ é compacto;

(ii) $1 \notin \bigcup_{x_0^* \in \mathcal{E}_0} \sigma(T'(x_0^*))$;

(iii)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|T_\eta(x_0^*) - T_0(x_0^*)\| = 0, \text{ para cada } x_0^* \in \mathcal{E}_0;$$

(iv) dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{y \in B_\delta(x_0^*)} \|T'_\eta(y) - T'_0(x_0^*)\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \leq \epsilon;$$

(v) para cada $x_0^* \in \mathcal{E}_0$, existe $\eta_0 \in (0, 1]$ tal que, dado $\rho > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|T_\eta(y) - T_\eta(z) - T'_\eta(z)(y - z)\|_X \leq \rho \|y - z\|_X, \quad y, z \in B_\epsilon(x_0^*), \quad \forall \eta \in [0, \eta_0].$$

Então a família $\{\mathcal{E}_\eta : \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. A demonstração é imediata graças ao Teorema 5.1.3 e Lema 2.0.20. $\square$

5.2 Permanência e continuidade de soluções periódicas

Nosso objetivo aqui é mostrar que órbitas periódicas normalmente hiperbólicas são conjuntos invariantes isolados e que elas se comportam continuamente quando são perturbadas.

Os resultados de existência e unicidade de equações diferenciais em espaços de Banach podem ser encontrados em [2].

5.2.1 Soluções periódicas

Definição 5.2.1. *Seja x_0 uma solução periódica com período $p > 0$, ou seja, $x_0(t) = x_0(t + p)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Essa solução é chamada de **orbitalmente estável** se o conjunto $\Gamma = \{x_0(t) : 0 \leq t \leq p\}$ for estável, ou seja, dada uma vizinhança U de Γ , existe uma vizinhança $V \subset U$ de Γ tal que toda solução que começa em V permanece em U para todo $t \geq 0$.*

*Uma solução é chamada **orbitalmente assintoticamente estável** se existe uma vizinhança V de Γ tal que, para toda vizinhança U de Γ , toda solução que começa em V fica em U para $t \geq t_U$, para um certo $t_U > 0$.*

Lema 5.2.2. *Seja X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial (ver Definição 1.3.1 de [2]) e $f : X \rightarrow X$ uma função continuamente diferenciável.*

Suponhamos que o problema

$$\begin{cases} \dot{x} + Ax = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

tenha uma solução periódica $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ de período $p > 0$ e que $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_x(x_0(t)) \in \mathcal{L}(X, X)$ seja uniformemente contínua.

Seja, também, $\{T(t, s) : t \geq s\}$ o processo de evolução associado a

$$\dot{y} + Ay = f_x(x_0(t))y. \quad (5.2.2)$$

Então $T(t + p, s + p) = T(t, s)$ para todo $t \geq s$ e, fixado $n \in \mathbb{N}$,

$$T(t + np, t) = T(t + p, t)^n, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, 1 é um autovalor para $T(t_0 + p, t_0)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e temos

$$\|T(t, s)x\| \leq Me^{m(t-s)}\|x\|,$$

para constantes M e m apropriadas.

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} T(t + p, s + p) &= e^{-A(t-s)} + \int_{s+p}^{t+p} e^{A(t+p-\theta)} f_x(x_0(\theta)) T(\theta, s + p) d\theta \\ &= e^{-A(t-s)} + \int_s^t e^{A(t-\theta)} f_x(x_0(\theta + p)) T(\theta + p, s + p) d\theta \\ &= e^{-A(t-s)} + \int_s^t e^{A(t-\theta)} f_x(x_0(\theta)) T(\theta + p, s + p) d\theta. \end{aligned}$$

Concluimos que $T(t + p, s + p)$ e $T(t, s)$ são o mesmo, já que ambos são obtidos como ponto fixo da equação

$$S(t, s) = e^{-A(t-s)} + \int_s^t e^{A(t-\theta)} f_x(x_0(\theta)) S(\theta, s) d\theta,$$

que é uma contração para t e s suficientemente próximos.

Dessa forma,

$$T(t + np, t) = T(t + np, t + (n - 1)p) \cdots T(t + p, t) = T(t + p, t)^n.$$

Agora, notemos que $x(t)$ e $x(t+h)$ são soluções de $\dot{x} + Ax = f(x)$. Podemos, então, escrever

$$x_0(t+h) = e^{-At}x_0(h) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(x_0(s+h))ds,$$

o que implica que

$$x_0(t+h) - x_0(t) = e^{-At}(x_0(h) - x_0(0)) + \int_0^t e^{-A(t-s)}(f(x_0(s+h)) - f(x_0(s)))ds.$$

Dividindo a expressão acima por h e fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos que $y(t) = \dot{x}(t)$ é solução de

$$\dot{y} + Ay = f_x(x_0(t))y.$$

Assim,

$$\dot{x}_0(s) = \dot{x}_0(s+p) = T(s+p, s)\dot{x}_0(s),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Sendo x_0 uma solução periódica e por unicidade das soluções de equações diferenciais lineares, temos que $\dot{x}_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Assim, provamos que 1 é autovalor para $T(s+p, s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Por fim, dados $t \geq s$, existe um inteiro n_t e $\tau \in [0, p)$ tais que $t = s + n_t p + \tau$. Assim,

$$\|T(t, s)\| \leq \|T(t, s+n_t p)\| \|T(s+p, s)\|^{n_t} \leq \left(\|T(t, s+n_t p)\| e^{-m(t-s-n_t p)} \right) e^{m(t-s-n_t p)} e^{mn_t p} \leq M e^{m(t-s)},$$

$$\text{com } m = \frac{1}{p} \log \|T(s+p, s)\| \text{ e } M = \sup_{0 \leq \tau \leq p} \|T(t, t-\tau)\| e^{-m\tau}. \quad \square$$

Definição 5.2.3. A *aplicação período* ou *aplicação de Poincaré* para um processo de evolução $\{T(t, s) : t \geq s\}$ com período $p > 0$ é definida por

$$U(t) = T(t+p, t).$$

Os autovalores diferentes de zero de $U(t)$ são chamados de **multiplicadores característicos**.

Lema 5.2.4. *Consideremos o operador setorial A , o processo de evolução $\{T(t, s) : t \geq s\}$ dado por (5.2.2) e a aplicação de Poincaré $U(t)$.*

- (i) *Os multiplicadores característicos independem do tempo. Mais precisamente, $\sigma(U(t)) \setminus \{0\}$ independem do tempo.*
- (ii) *Se A tem resolvente compacto, então $U(t)$ é compacto e $\sigma(U(t)) \setminus \{0\}$ é constituído apenas por multiplicadores característicos.*

Demonstração. (i) Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ e $x \neq 0$ tais que $U(s)x = T(s+p, s)x = \mu x$ e tomemos $s \leq t \leq s+p$. Pela periodicidade de $U(\cdot)$, basta provarmos que μ é um autovalor de $U(t)$.

Definamos $y = T(t, s)x$, de forma que $T(s+p, t)y = \mu x$. Assim, $y \neq 0$ e $U(t)y = T(t+p, t)T(t, s)x = T(t+p, s+p)T(s+p, s)x = \mu T(t, s)x = \mu y$, provando que os multiplicadores característicos independem do tempo.

Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in \rho(U(s)) \setminus \{0\}$. Pela periodicidade de $U(\cdot)$, basta provarmos o resultado para $s \leq t \leq s+p$.

Fixado x , temos que

$$\begin{aligned} T(s+p, t)(\mu - U(t))x &= [\mu - T(s+p, t)T(t+p, s+p)]T(s+p, t)x \\ &= (\mu - T(s+p, t)T(t, s))T(s+p, t)x = (\mu - U(s))T(s+p, t)x. \end{aligned}$$

Seja $y = (\mu - U(t))x$. Então $\mu x = y + w$, com

$$\begin{aligned} w = U(t)x &= T(t+p, s+p)T(s+p, t)x = T(t, s)T(s+p, t)x = \\ &= T(t, s)(\mu - U(s))^{-1}T(s+p, t)y. \end{aligned}$$

Assim,

$$T(s+p, t)x = (\mu - U(s))^{-1}T(s+p, t)y.$$

Através destes cálculos, podemos ver que, dado y , podemos definir $x = \mu^{-1}(y + w)$, com $w = T(t, s)(\mu - U(s))^{-1}T(s+p, t)y$, de forma que $(\mu - U(t))x = y$. Além disso, $(\mu - U(t))^{-1}$ é limitado, já que

$$\|x\| \leq \mu^{-1}(1 + \|T(t, s)\| \|(\mu - U(s))^{-1}\| \|T(s+p, t)\|)\|y\|,$$

mostrando que $\mu \in \rho(U(t))$.

Assim, $\rho(U(s)) \setminus \{0\} \subset \rho(U(t))$, concluindo esta etapa da demonstração.

- (ii) Como A tem resolvente compacto, $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto e, lembrando que $T(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t-s)}(\lambda - A)^{-1}d\lambda$, para uma curva Γ apropriada, obtemos que $T(t, s)$ é compacto para todo $t \geq s$. Em particular, $U(t)$ é compacto e, conseqüentemente, $\sigma(U(t)) \setminus \{0\}$ consiste apenas de autovalores.

□

Teorema 5.2.5. *Seja σ_1 um conjunto espectral de $\sigma(U(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, o espaço X pode ser decomposto em $X_1(t) + X_2(t)$, com $\sigma(U(t)|_{X_1(t)}) = \sigma_1$, $\sigma(U(t)|_{X_2(t)}) = \sigma(U(t)) \setminus \sigma_1$ e, para $i = 1, 2$, $T(t, s)$ leva $X_i(s)$ em $X_i(t)$. Se $0 \notin \sigma_1$, então $T(t, s) : X_1(s) \rightarrow X_1(t)$ é injetora.

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\beta p} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_1\}$. Então para qualquer $\epsilon > 0$, existe $M_\epsilon > 0$ tal que

$$\|T(t, s)x\| \leq M_\epsilon e^{(\beta+\epsilon)(t-s)}\|x\|$$

para $t \geq s$ e $x \in X_1(s)$.

Vamos supor que $0 \notin \sigma_1$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ seja tal que $e^{\gamma p} = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_1\} > 0$. Então $T(t, s)x$, $x \in X_1(s)$ pode ser definido para $t \leq s$ e

$$\|T(t, s)x\| \leq M_\epsilon e^{(\gamma-\epsilon)(t-s)}\|x\|$$

para $t \leq s$.

Por fim, seja $s_0 \in \mathbb{R}$. Se existir uma linha de 0 até ∞ no plano complexo disjunta de σ_1 , então existe uma família de operadores limitados invertíveis $P(t) : X_1(s_0) \rightarrow X_1(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $P(t+p) = P(t)$, $P(s_0) = 1$ e um operador limitado em $X_1(s_0)$ com espectro $\sigma(C) = \frac{1}{p} \ln \sigma_1$ e, para todo t, s , temos

$$T(t, s)x = P(t)e^{C(t-s)}P^{-1}(s)x.$$

Demonstração. Seja γ uma curva orientada positivamente, disjunta de $\sigma(U(t))$, para $t \in \mathbb{R}$, tal que σ_1 esteja no interior de γ e $\sigma(U(t)) \setminus \sigma_1$ esteja em seu exterior. Definamos

$$T_{\sigma_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - U(\tau))^{-1} d\lambda \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}.$$

Seja $t \geq s$. Então

$$T(t, s)U(s) = T(t, s)T(s, s-p) = T(t, s-p) = T(t, t-p)T(t-p, s-p) = U(t)T(t, s).$$

Assim, para $t \geq s$ e $\lambda \notin \sigma(U(t))$, temos

$$(\lambda - U(t))T(t, s) = T(t, s)(\lambda - U(s)) \text{ e } (\lambda - U(t))^{-1}T(t, s) = T(t, s)^{-1}(\lambda - U(s)).$$

Dessa forma, temos que

$$T(t, s)P_{\sigma_1}(s) = P_{\sigma_1}(t)T(t, s),$$

provando que $T(t, s)$ leva $X_i(s)$ em $X_i(t)$, $i = 1, 2$.

Mostremos que se $0 \notin \sigma_1$, então, para $t \geq s$, $T(t, s) : X_1(s) \rightarrow X_1(t)$ é injetora. Para isso, vamos supor que $T(t, s)x = 0$, para $x \in X_1(s)$ e $x \neq 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \leq t \leq s+np$. Então $0 = T(s+np, t)T(t, s)x = T(s+np, s)x = (U(s))^n x$, o que significa que $0 \in \sigma_1$, provando o que queríamos.

Seja $\epsilon > 0$. Mostremos existe $M_\epsilon > 0$ tal que $\|T(t, s)x\| \leq M_\epsilon e^{(\beta+\epsilon)(t-s)}\|x\|$. Para isso, basta mostrarmos que

$$e^{-(\beta+\epsilon)(t-s)}\|T(t, s)|_{X_1(s)}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Se isso fosse falso, poderíamos tomar $C_0 > 0$ e uma sequência $t_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, de forma que

$$e^{-(\beta+\epsilon)(pn_j+\theta_j)}\|(U(s)|_{X_1(s)})^{n_j}\| \cdot \|T(\theta_j + s, s)|_{X_1(s)}\| \geq C_0,$$

em que $t_j - s = pn_j + \theta_j$, com $n_j \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \theta_j < p$.

Equivalentemente (após tomarmos a raiz n_j -ésima),

$$e^{-(\beta+\epsilon)p}\|(U(s)|_{X_1(s)})^{n_j}\|^{\frac{1}{n_j}}\|T(\theta_j + s, s)|_{X_1(s)}\|^{\frac{1}{n_j}} \geq (C_0 e^{(\beta+\epsilon)\theta_j})^{\frac{1}{n_j}}.$$

Fazendo $j \rightarrow \infty$, temos que $n_j \rightarrow \infty$ e

$$e^{-\epsilon p} \geq 1,$$

o que é um absurdo, completando a demonstração da primeira estimativa.

Para a segunda estimativa, se $0 \notin \sigma_1$, então $U(s)|_{X_1(s)}$ e $T(t, s)|_{X_1(s)}$ são invertíveis. Analogamente, mostramos que $e^{-(\gamma-\epsilon)(t-s)}\|T(t, s)|_{X_1(s)}\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, e concluímos que $\|T(t, s)x\| \leq M_\epsilon e^{(\gamma-\epsilon)(t-s)}\|x\|$ para $t \leq s$ e $x \in X_1$.

Vamos, agora, supor que exista uma linha γ de 0 até ∞ disjunta de σ_1 e tomemos $s_0 \in \mathbb{R}$. Em particular, notemos que $0 \notin \sigma_1$.

Seja L uma curva disjunta de γ e tal que σ_1 esteja em seu interior. Tomando um ramo apropriado para a função $\log(\cdot)$, podemos definir

$$C = \frac{1}{2\pi ip} \int_L (\lambda - U(s_0)|_{X_1(s_0)})^{-1} \log \lambda d\lambda,$$

de forma que $U(s_0)|_{X_1(s_0)} = e^{pC}$ e $\sigma(C) = \frac{1}{p} \log \sigma_1$.

Como $0 \notin \sigma_1$, se $t \geq s$, então $T(t, s)|_{X_1(s)}$ tem inversa contínua dada por

$$(T(t, s)|_{X_1(s)})^{-1} = (U(s)|_{X_1(s)})^{-n} T(s + np, t)|_{X_1(t)},$$

com n escolhido de forma que $s + np \geq t$.

Definamos, para $t \geq s_0$

$$P(t) = T(t, s_0)|_{X_1(s_0)} e^{-C(t-s_0)} : X_1(s_0) \rightarrow X_1(t).$$

Então

$$\begin{aligned} P(t+p) &= T(t+p, s_0)|_{X_1(s_0)} e^{-C(t+p-s_0)} \\ &= T(t+p, s_0+p)|_{X_1(s_0)} U(s_0+p)|_{X_1(s_0)} e^{-Cp} e^{-C(t-s_0)} = P(t) \end{aligned}$$

e podemos, então, estender a definição de $P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $t \geq s \geq s_0$, temos

$$T(t, s)|_{X_1(s)} = T(t, s_0)|_{X_1(s_0)} e^{-C(t-s_0)} e^{C(t-s)} [e^{C(s-s_0)} (T(s, s_0)|_{X_1(s_0)})^{-1}] = P(t) e^{C(t-s)} P^{-1}(s)$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $s \geq s_0$, vamos definir

$$T(t, s)|_{X_1(s)} = P(t) e^{C(t-s)} P^{-1}(s),$$

o que implica que

$$T(s, t)|_{X_1(t)} T(t, s)|_{X_1(s)} = P(t) e^{C(t-s)} P^{-1}(s) P(s) e^{C(s-t)} P^{-1}(t) = I_{X_1(s)},$$

ou seja,

$$T(s, t)|_{X_1(t)} = (T(t, s)|_{X_1(s)})^{-1}$$

e $T(t, s)$ pode ser definida para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

□

5.2.2 Estabilidade e instabilidade de órbitas periódicas

Teorema 5.2.6. *Vamos assumir as hipóteses do Lema 5.2.2. Se o multiplicador 1 for um autovalor simples isolado de $U(t) = T(t + p, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e o restante do espectro de U estiver em $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < e^{-\beta p}\}$ para algum $\beta > 0$, então Γ é assintoticamente estável.*

Demonstração. Seja z satisfazendo

$$\dot{z} + [A - f_x(x_0(t))]z = g(t, z),$$

em que $g(t, z) = f(x_0(t) + z) - f(x_0(t)) - f_x(x_0(t))z$. É fácil ver que $g(t, 0) = 0$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| &= \|f(x_0(t) + z_1) - f(x_0(t) + z_2) - f_x(x_0(t))(z_1 - z_2)\| \\ &\leq \|f(x_0(t) + z_1) - f(x_0(t) + z_2) - f_x(x_0(t) + z_1)(z_1 - z_2)\| + \\ &\quad \|(f_x(x_0(t) + z_1) - f_x(x_0(t)))(z_1 - z_2)\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que $\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|$ para $\|z_i\| \leq \rho$, $i = 1, 2$, com $k(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$.

Definamos $x = x_0(t) + z$.

Seja $P_{\{1\}}$ a projeção espectral associada ao autovalor 1 de $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$P_{\{1\}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\{1\}}} (\lambda - U(t))^{-1} d\lambda,$$

em que $\gamma_{\{1\}}$ é uma curva fechada orientada positivamente, cujo único autovalor em seu interior é o 1.

Como $U(t + jp) = U(t)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $P(t + jp) = P(t)$.

Por essa projeção que nós definimos, temos $X = X_1(t) \oplus X_2(t)$, em que $X_1(t) = R(P_{\{1\}}(t)) = [\dot{x}_0(t)]$ (já que 1 é autovalor simples) e $X_2(t) = \ker(P_{\{1\}}(t))$.

Sejam $t \geq s$ e $x_1 \in X_1(s)$. Como $T(s + p, s)x_1 = x_1$ e $T(\cdot, \cdot)$ é contínua, existe M_1 tal que $\|T(t, s)x_1\| \leq M_1\|x_1\|$.

Pelo Lema 5.2.2 e como $T(s+p, s) \in \mathcal{L}(X_2(s))$ tem raio espectral estritamente menor que 1, se $x_2 \in X_2(s)$, temos que existem $M_2 > 0$ e $\beta' > 0$ tais que

$$\|T(t, s)x_2\| \leq M_2 e^{-\beta'(t-s)} \|x_2\|.$$

Para simplificar os cálculos a seguir, vamos tomar $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Sejam $0 < \beta < \beta'$ e $\rho > 0$ tais que

$$Mk(\rho)M_0\left(\frac{1}{\beta} + \int_0^\infty e^{-(\beta'-\beta)u} du\right) \leq \frac{1}{2}$$

com $M_0 = \sup\{\|P_{\{1\}}(s)\| + 1\}$.

Vamos supor que $y : \mathbb{R} \rightarrow X$ satisfaça, para todo t_0 fixado e $t \geq t_0$, $\sup_{s \geq t_0} \|y(s)\| e^{\beta(s-t_0)} \leq \rho$ e

$$\dot{y} + [A - f_x(x_0(t))]y = g(t, y).$$

Podemos escrever

$$P_{\{1\}}(t)y(t) = T(t, t_0)P_{\{1\}}(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t T(t, s)P_{\{1\}}(s)g(s, y(s))ds.$$

Assim, como $T(\cdot, t_0)|_{X_1(t_0)}$ é periódico, $T(t, t_0)|_{X_1(t_0)}$ está bem definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então

$$T(t_0, t)P_{\{1\}}(t)y(t) = P_{\{1\}}(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t T(t_0, s)P_{\{1\}}(s)g(s, y(s))ds.$$

Como $\|y(t)\| \leq e^{-\beta(t-t_0)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, temos que $T(t_0, t)P_{\{1\}}(t)y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e

$$P_{\{1\}}(t_0)y(t_0) = - \int_{t_0}^\infty T(t_0, s)P_{\{1\}}(s)g(s, y(s))ds.$$

Fixado $t_0 \in \mathbb{R}$, seja o espaço $Z = \{z \in C([t_0, \infty) \rightarrow X) : \sup_{t \geq t_0} \{\|z\|e^{\beta(t-t_0)}\} \leq \rho\}$ com a métrica $|z - w|_\beta = \sup_{t \geq t_0} \{\|z - w\|e^{\beta(t-t_0)}\}$.

Definamos, para $t \geq t_0$, a aplicação

$$F(z)(t) = T(t, t_0)a + \int_{t_0}^t T(t, s)(I - P_{\{1\}})(s)g(s, z(s))ds - \int_t^\infty T(t, s)P_{\{1\}}(s)g(s, z(s))ds$$

e mostremos que ela é uma contração para $a \in X_2(t_0)$, $\|a\| \leq \frac{\rho}{2M}$.

De fato, temos as 3 desigualdades a seguir:

$$e^{\beta(t-t_0)}T(t, t_0)a \leq Me^{(\beta-\beta')(t-t_0)}\|a\|_\alpha \leq M\|a\| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Lembrando que $\|g(s, z)\| \leq k(\rho)\|z\| \leq k(\rho)e^{-\beta(s-t_0)}|z(s)|_\beta$, temos

$$\begin{aligned} & e^{\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t T(t, s)(I - P_{\{1\}})(s)g(s, z(s))ds \\ & \leq e^{\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t [Me^{-\beta'(t-s)}][M_0][k(\rho)e^{-\beta(s-t_0)}|z(s)|_\beta]ds \\ & \leq Mk(\rho)M_0 \int_{t_0}^t e^{-(\beta'-\beta)(t-s)}|z|_\beta ds \\ & \leq Mk(\rho)M_0|z|_\beta \int_0^\infty e^{-(\beta'-\beta)u} du, \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} & e^{\beta(t-t_0)} \int_t^\infty T(t, s)P_{\{1\}}(s)g(s, z(s))ds \\ & \leq e^{\beta(t-t_0)} \int_t^\infty [M][M_0][k(\rho)e^{-\beta(s-t_0)}|z|_\beta]ds \\ & \leq Mk(\rho)M_0|z|_\beta \int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}ds = Mk(\rho)M_0|z|_\beta \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Dessa forma, como $|z|_\beta \leq \rho$, temos que $e^{\beta(t-t_0)}\|F(z)(t)\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2} + Mk(\rho)M_0\rho(\frac{1}{\beta} + \int_0^\infty e^{-(\beta'-\beta)u} du \leq \rho$ e segue que $F : Z \rightarrow Z$ é uma aplicação bem definida.

Pelas desigualdades acima, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
& e^{\beta(t-t_0)} \|F(z)(t) - F(w)(t)\| \\
& \leq Mk(\rho)M_0|z - w|_\beta \int_0^\infty e^{-(\beta' - \beta)u} + Mk(\rho)M_0|z - w|_\beta \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{2}|z - w|_\beta
\end{aligned}$$

e que F é uma contração uniforme em Z para $\|a\| \leq \frac{\rho}{2M}$.

Para $a \in X_2(t_0)$, $\|a\| \leq \frac{\rho}{2M}$, seja $z = z^*(\cdot, a)$ o único ponto fixo de F . Se $a, b \in B_{\rho/2M}^{X_2}(0)$, usando as estimativas já feitas, temos

$$\|e^{\beta(t-t_0)}(z^*(\cdot, a) - z^*(\cdot, b))\| \leq M\|a - b\| + \frac{1}{2}|z^*(\cdot, a) - z^*(\cdot, b)|_\beta$$

e, conseqüentemente,

$$|z^*(\cdot, a) - z^*(\cdot, b)|_\beta \leq M\|a - b\| + \frac{1}{2}|z^*(\cdot, a) - z^*(\cdot, b)|_\beta.$$

Assim,

$$|z^*(\cdot, a) - z^*(\cdot, b)|_\beta \leq 2M\|a - b\|.$$

Definamos

$$H(a) = z^*(t_0, a) - a = - \int_{t_0}^\infty T(t_0, s)P_{\{1\}}(s)g(s, z^*(s, a))ds.$$

Usando a última desigualdade obtida, temos que

$$\begin{aligned}
|g(s, z^*(s, a)) - g(s, z^*(s, b))|_\beta & \leq k(\max\{|z^*(s, a)|_\beta, |z^*(s, b)|_\beta\})|z^*(s, a) - z^*(s, b)|_\beta \\
& \leq k(2M \max\{\|a\|, \|b\|\})2M\|a - b\|
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\|H(a) - H(b)\| &\leq \int_{t_0}^{\infty} [M][M_0][e^{-\beta(s-t_0)}k(2M \max\{\|a\|, \|b\|\})2M\|a - b\|]ds \\
&= 2M^2 M_0 k(2M \max\{\|a\|, \|b\|\})\|a - b\| \int_{t_0}^{\infty} [e^{-\beta(s-t_0)}]ds \\
&= 2M^2 M_0 k(2M \max\{\|a\|, \|b\|\})\|a - b\| \frac{1}{\beta}.
\end{aligned}$$

Vamos definir

$$x^*(t, a) = x_0(t) + z^*(t, a).$$

Substituindo a expressão de g , vemos que x^* é uma solução para $\dot{x} + Ax = f(x)$, para $t > t_0$ e todo $a \in X$, $\|a\| \leq \rho/2M$.

Seja $x(\cdot, \xi)$ a solução para $\dot{x} + Ax = f(x)$ para $t > t_0 - p$, com $x(t_0 - p, \xi) = \xi$. Se $\|\xi - x(t_0, \xi)\|$ for suficientemente pequeno, então $x(t, \xi)$ existe para $t \in (t_0 - p, t_0 + p]$ e mostraremos que existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in X_2(t_0)$ suficientemente pequenos tais que

$$x(t_0 + \theta, \xi) = x^*(t_0, a).$$

Por unicidade da solução, isso significa que $x(t, \xi) = x^*(t - \theta, a)$, para $t \geq t_0 + \theta$. Assim,

$$\|x(t, \xi) - x_0(t - \theta)\| = \|z^*(t - \theta, a)\| \leq \rho e^{-\beta(t - \theta - t_0)}$$

e teremos provado que Γ é orbitalmente assintoticamente estável, concluindo a demonstração do teorema.

Para isso, notemos que $x(t_0 + \theta, \xi) = x^*(t_0, a)$ se, e somente se,

$$G(\theta, a; \xi) = a - \theta \dot{x}_0(t_0),$$

$$\text{com } G(\theta, a; \xi) = x(t_0 + \theta, \xi) - x_0(t_0 + \theta) - H(a) + x_0(t_0 + \theta) - x_0(t_0) - \theta \dot{x}_0(t_0).$$

Notemos que

$$\begin{cases} G(0, 0; x_0(t_0)) = 0 \\ P_{\{1\}}(t_0)(a - \theta \dot{x}_0(t_0)) = -\theta \dot{x}_0(t_0) \\ (I - P_{\{1\}}(t_0))(a - \theta \dot{x}_0(t_0)) = a. \end{cases}$$

Assim, $(\theta, a) \mapsto a - \theta \dot{x}(t_0)$ é invertível.

Dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < p$ tal que $\|H(a) - H(\hat{a})\| \leq \epsilon \|a - \hat{a}\|$ e $\|\dot{x}_0(t_0 + \theta) - \dot{x}_0(t_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $|\theta| \leq \delta$ e $\|a\|, \|\hat{a}\| \leq \delta$. Além disso, se $t \in (t_0 - p, t_0 + p]$ e $0 < \gamma < 1$, temos, pelo Teorema 3.5.3 de [2], que existe $C > 0$ tal que

$$\|\dot{x}(t, \xi) - \dot{x}_0(t)\| \leq C(t - t_0 + p)^{-1} \|\xi - x_0(t_0)\|^{1-\gamma}.$$

Assim, se $\theta, \hat{\theta}, \|a\|, \|\hat{a}\| \leq \delta$, temos que

$$\begin{aligned} & \| (x(t_0 + \theta, \xi) - x_0(t_0 + \theta)) - (x(t_0 + \hat{\theta}, \xi) - x_0(t_0 + \hat{\theta})) \| \\ & \leq \| (\theta \dot{x}(t_0, \xi) - \theta \dot{x}_0(t_0)) - (\hat{\theta} \dot{x}(t_0, \xi) - \hat{\theta} \dot{x}_0(t_0)) \| + o(|\theta| + |\hat{\theta}|) \\ & \leq \| (\dot{x}(t_0, \xi) - \dot{x}_0(t_0)) \| |\theta - \hat{\theta}| + o(|\theta| + |\hat{\theta}|) \end{aligned}$$

e

$$\| (x_0(t_0 + \theta) - x_0(t_0) - \theta \dot{x}_0(t_0)) - (x_0(t_0 + \hat{\theta}) - x_0(t_0) - \hat{\theta} \dot{x}_0(t_0)) \| = o(|\theta - \hat{\theta}|).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|G(\theta, a; \xi) - G(\hat{\theta}, \hat{a}; \xi)\| & \leq \frac{C}{p} \|\xi - x_0(t_0)\|^{1-\gamma} |\theta - \hat{\theta}| + \epsilon \|a - \hat{a}\| + \frac{\epsilon}{2} |\theta - \hat{\theta}| \\ & \leq \epsilon (\|a - \hat{a}\| + |\theta - \hat{\theta}|), \end{aligned}$$

para δ e $\|\xi - x_0(t_0)\|$ suficientemente pequenos. Dessa forma, mostramos que G é uma contração e, logo, que existe um único par (θ, a) , com $|\theta|, \|a\| \leq \delta$, tal que $a - \theta \dot{x}_0(t_0) = G(\theta, a; \xi)$, concluindo a demonstração.

□

Teorema 5.2.7. *Vamos assumir as mesmas condições do Teorema 5.2.6, mas supor que $\sigma(U(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ seja um conjunto espectral não vazio. Então a solução $x_0(\cdot)$ é orbitalmente instável, ou seja, existe uma vizinhança W de $\Gamma = \{x_0(t) : t \in [0, p]\}$ e uma sequência $x_n \in U$ tal que $d(x_n, \Gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mas cada $x(t, t_0; x_n)$ sai de W .*

Demonstração. Seja $\sigma_1 = \sigma(U(t)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ e definamos

$$I - P_{\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - U(t))^{-1} d\lambda,$$

com $\gamma(t) = \rho e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$ e $\rho > 1$ tal que $\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(U(t)) : |\lambda| > \rho\}$. Sejam $X_1(t) = R(P_{\sigma_1}(t))$, $X_2(t) = \ker(P_{\sigma_1}(t))$ e $X^\alpha = X_1(t) \oplus X_2(t)$. Então existem constantes $M \geq 1$ e $\beta > 0$ tais que, se $t > s$ e $x_2 \in X_2(s)$, temos

$$\|T(t, s)x_2\| \leq M e^{\beta(t-s)} \|x_2\|.$$

Além disso, pela forma como a decomposição espectral foi feita, o espectro de $(U(t)|_{X_1})^{-1}$ está dentro da bola unitária. Se $x_1 \in X_1(s)$ e $t < s$, então $t = s - np + \tau$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\tau \in [0, p)$, e vamos escrever $T(t, s)x_1 = T(t, s - np)T(s - np, s)x_1 = T(s - np)(U(t)|_{X_1})^{-1}x_1$.

Podemos, então, fazer uma estimativa para $\|T(t, s)x_1\|$ e supor que $\beta > 0$ é tal que

$$\|T(t, s)x_1\| \leq M e^{3\beta(t-s)} \|x_1\|.$$

Se $\sup_{t \leq t_0} \|z(t)\| e^{-2\beta(t-t_0)} < \infty$, então $g(t) := g(t, z(t))$ satisfaz $\sup_{t \leq t_0} \|g(t)\| e^{-2\beta(t-t_0)} < \infty$.

De forma análoga ao teorema anterior, a única solução de

$$\dot{z} + (A - f_x(x_0(t)))z = g(t), \quad t < t_0$$

tal que $\sup_{t \leq t_0} \|z(t)\| e^{-2\beta(t-t_0)} < \infty$ é dada por

$$z^*(t) = T(t, t_0)a + \int_{t_0}^t T(t, s)P_{\sigma_1(s)}g(s, z^*(s))ds + \int_{-\infty}^t T(t, s)(I - P_{\sigma_1(s)})g(s, z^*(s))ds,$$

com $P_{\sigma_1(t_0)}z(t_0) = a \in X_1$.

Pelas estimativas feitas e fazendo $t \rightarrow -\infty$, temos que $\|z^*(t)\| \rightarrow 0$, o que implica instabilidade.

□

5.2.3 Permanência de órbitas periódicas sob perturbações

Teorema 5.2.8. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial e $f(\cdot, \cdot) : X \times (-1, 1) \rightarrow X$ uma função continuamente diferenciável. Vamos assumir que $x_0(\cdot)$ é uma solução com período $p > 0$ de*

$$\dot{x} + Ax = f(x, 0).$$

Vamos supor que 1 seja um autovalor simples isolado da aplicação de Poincaré associada à equação

$$\dot{y} + Ay - f_x(x_0(t), 0)y = 0. \quad (5.2.3)$$

Então existem uma vizinhança U de $\{x_0(t) : t \in [0, p]\}$ em X , $\eta_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que, para cada $\eta \in (0, \eta_0)$, existe uma única solução $x_\eta(\cdot)$ de $\dot{x} + Ax = f(x, \eta)$ em U com período $p(\eta)$, com $|p(\eta) - p| \leq \delta_0$. Além disso, $p(\eta) \rightarrow p$ e $x_\eta(t) \rightarrow x_0(t)$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Por fim, se 1 for o único ponto do espectro da aplicação de Poincaré que está no círculo unitário, então a órbita periódica é um conjunto invariante isolado.

Demonstração. Seja $\{T(t, s) : t \geq s\}$ o processo de evolução associado a (5.2.3) e $T(p, 0)$ a aplicação de Poincaré associada. Sabemos que $T(p, 0)\dot{x}_0(0) = \dot{x}_0(0)$. Definamos a projeção espectral associada ao conjunto espectral $\sigma_0 = \{1\}$ por

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - T(p, 0))^{-1} d\lambda,$$

com $\gamma(t) = 1 + \delta e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$ e δ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq \delta\} \cap \sigma(T(p, 0)) = \{1\}$.

Vamos escrever $X = [\dot{x}_0(0)] \oplus Z$, com $PX = [\dot{x}_0(0)]$ e $Z = \ker P$.

Definamos x_0^* de forma que $\langle x_0^*, t\dot{x}_0 + z \rangle = t$ para todo escalar t e $z \in Z$. Então Z é o núcleo de x_0^* e $\langle x_0^*, \dot{x}_0(0) \rangle = 1$.

Definamos $W = \{x \in X : \langle x_0^*, x - x_0(0) \rangle = 0\} = x_0 + Z$.

Sabemos que existe uma única solução z_η para

$$\dot{z} + Az - f_x(x_0(t), 0)z = f(x_0(t) + z, \eta) - f(x_0(t), 0) - f_x(x_0(t), 0)z \quad (5.2.4)$$

com $\|f(x_0(t) + z, \eta) - f(x_0(t), 0) - f_x(x_0(t), 0)z\|_X \leq B(\eta + k(\|z\|))\|z\|$ para $\|z\|$ e η suficientemente pequenos, em que $k(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0^+} 0$ e $t \mapsto f_x(t, x_0(t)) \in \mathcal{L}(X)$ é uniformemente contínua.

Definamos $x_\eta = x_0 + z_\eta$ e é fácil ver que x_η é solução de $\dot{x} + Ax = f(x, \eta)$.

Vamos denotar por $x(t, x_1, \eta)$ a solução de $\dot{x} + Ax = f(x, \eta)$ tal que $x_\eta(0) = x_1$, definida em $[0, 2p]$, se $x_1 \in W$ e $\|x_1 - x_0(0)\| + |\eta|$ for suficientemente pequeno.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe um único instante de tempo $\tau(x_1, \eta)$ numa vizinhança de 0 tal que

$$g(\tau, x_1, \eta) := \langle x_0^*, x(p + \tau, x_1, \eta) - x_0(0) \rangle = 0,$$

já que

$$\begin{cases} g(0, x_0(0), 0) = \langle x_0^*, x(p, x_0(0), 0) - x_0(0) \rangle = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \tau}(0, x_0(0), 0) = \langle x_0^*, \dot{x}_0(0) \rangle = 1. \end{cases}$$

Definamos, então, $G(x_1, \eta) \in W$ por

$$G(x_1, \eta) = x(\tau(x_1, \eta) + p, x_1, \eta),$$

É fácil ver que, como $\tau(x_0(0), 0) = 0$, então $G(x_0(0), 0) = x_0(p) = x_0(0)$ e que

$$G_x(x_0(0), 0)z = \dot{x}_0(0)\tau_x(x_0(0), 0)z + T(p, 0)z, \text{ com } z \in Z_1.$$

Assim, como $G_x \in Z_1$, temos que

$$0 = \langle x_0^*, G_x(x_0(0), 0), z \rangle = \tau_x(x_0(0), 0)z + \langle x_0^*, T(p, 0)z \rangle$$

e, conseqüentemente, $\tau_x(x_0(0), 0)z = 0$.

Sendo 1 um autovalor simples, $1 \notin \sigma(T(p, 0)|_{Z_1})$ e $G_x(x_0(0), 0) - I$ tem inversa limitada em Z_1 .

Pelo Teorema da Função Implícita, existe um único $x_1(\eta) \in W$. Assim, se η for suficientemente pequeno, existe um único ponto fixo $x_1 = G(x_1, \eta) \in W$, o que significa que existe uma solução periódica com período $p + \tau(x_1, \eta)$.

Por essa construção, é fácil ver que $G : Z_1 \rightarrow Z_1$ é hiperbólico e se $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ for uma solução global limitada de $\{G^n : n \geq 1\}$, ou seja, $G(z_n z_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, a órbita periódica obtida é isolada. $\square$

Corolário 5.2.9. *Fixemos $N \in \mathbb{N}^*$. Assumindo as hipóteses do Teorema 5.2.8, que p é o menor período de x_0 e que $\sigma(U(t)) \setminus \{1\}$ não contém nenhuma raiz n -ésima da unidade para $1 \leq n \leq N$, então a solução periódica x_1 construída no Teorema 5.2.8 é a única solução periódica próxima de $\{x_0(t) : t \in [0, p]\}$ com período menor do que $(N + \frac{1}{2})p$, para η suficientemente pequeno.*

Teorema 5.2.10. *Vamos assumir as hipóteses do Teorema 5.2.8 e supor que $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ seja normalmente hiperbólica. Então, a órbita periódica $x_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X$ obtida no Teorema 5.2.8 para*

$$\dot{x} + Ax = f(x, \eta) \tag{5.2.5}$$

é normalmente hiperbólica. Além disso, existe uma vizinhança U de $\{x_0(t) : t \in [0, p]\}$ em X e $\eta_0 > 0$ tais que, se $\eta \in (0, \eta_0)$, a única solução global de (5.2.5) que permanece em U para todo $t \in \mathbb{R}$ é x_η .

Demonstração. Para uma órbita periódica ser normalmente hiperbólica, 1 deve ser autovalor simples da aplicação de Poincaré e o resto do espectro da aplicação de Poincaré deve estar fora do círculo unitário.

Sejam $T(p, 0)$ e $T_\eta(p_\eta, 0)$ as aplicações de Poincaré para o sistema linearizado em torno de x_0 e para os sistemas linearizados em torno de x_η , respectivamente. Então temos

$$\begin{cases} T(p, 0) = e^{-Ap} + \int_0^p e^{A(p-s)} f_x(x_0(s)) T(s, 0) ds \\ T_\eta(p_\eta, 0) = e^{-Ap_\eta} + \int_0^{p_\eta} e^{A(p_\eta-s)} f_x(x_\eta(s)) T_\eta(s, 0) ds. \end{cases}$$

Sejam $r_\eta = \min\{p, p_\eta\}$, $q_\eta = \max\{p, p_\eta\}$ e $s < r_\eta$. Se $\eta > 0$ for suficientemente pequeno, temos

$$\|e^{-Ap_\eta} - e^{-Ap}\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

e

$$\begin{aligned} \|e^{-A(p_\eta-s)} - e^{-A(p-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(e^{-A(q_\eta-r_\eta)} - I)e^{-A(r_\eta-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|(e^{-A(q_\eta-r_\eta)} - I)\|_{\mathcal{L}(X)} \|e^{-A(r_\eta-s)}\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Como f_x é uniformemente contínua, temos que

$$\|f_x(x_\eta(s)) - f_x(x_0(s))\|_{\mathcal{L}(X,X)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

e, consequentemente,

$$\|T(p, 0) - T_\eta(p_\eta, 0)\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Vamos escrever $\sigma(T(p, 0)) = \sigma_S \cup \{1\} \cup \sigma_U$, com $\sigma_S = \sigma(T(p, 0)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ e $\sigma_U = \sigma(T(p, 0)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Sejam, agora, γ_S e γ_U curvas fechadas simples em torno dos conjuntos σ_S e σ_U , respectivamente, sem interceptar $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ e $\gamma_{\{1\}}$ uma curva em torno de 1, sem tocar em σ_S e σ_U . Dados η suficientemente pequeno, temos que $\gamma_i \subset \rho(T_\eta(p_\eta, 0))$, $i = S, \{1\}, U$, e todo o espectro de $T_\eta(p_\eta, 0)$ está contido no interior dessas curvas.

Definamos as projeções

$$P_S^\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_S} (\lambda - T_\eta(p_\eta, 0))^{-1} d\lambda,$$

$$P_{\{1\}}^\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\{1\}}} (\lambda - T_\eta(p_\eta, 0))^{-1} d\lambda \text{ e}$$

$$P_U^\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_U} (\lambda - T_\eta(p_\eta, 0))^{-1} d\lambda.$$

Como essas projeções se comportam de forma contínua com relação a η e, pelo Teorema 5.2.8, 1 é autovalor simples de $T_\eta(p_\eta, 0)$. Consequentemente, x_η é uma órbita periódica normalmente hiperbólica.

A existência dessas curvas dividindo o espectro garantem a existência das variedades estável e instável para (5.2.4). Isso implica que a órbita periódica é isolada. $\square$

Semigrupos Morse-Smale

Neste capítulo, estudamos os semigrupos Morse-Smale. Mostramos algumas propriedades destes semigrupo e, em particular, que estes semigrupos são dinamicamente gradientes.

O objetivo deste capítulo é provarmos que pequenas perturbações nos semigrupos Morse-Smale mantêm a estrutura do diagrama de fases. para isso, vamos mostrar que existe um isomorfismo entre os conjuntos isolados invariantes de um semigrupo Morse-Smale e dos semigrupos sob pequenas perturbações.

6.1 Noções básicas

Definição 6.1.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Definimos o conjunto **não-errante** Ω de $\{T(t) : t \geq 0\}$ como o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{A}$ tais que, dados $t_0 \geq 0$ e uma vizinhança V_x de x em X , existe $t \geq t_0$ tal que $(T(t)V_x) \cap V_x \neq \emptyset$.*

Definição 6.1.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo Morse-Smale** se ele satisfizer:*

- (i) *$\{T(t) : t \geq 0\}$ é reversível, ou seja, $T(t)|_{\mathcal{A}}$ é injetivo, $T(t)$ é diferenciável em $\mathcal{A}$ e $D_x T(t)(z) : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado injetivo para todo $t \geq 0$ e $z \in \mathcal{A}$.*
- (ii) *Existem um número finito de pontos de equilíbrio hiperbólicos $z_1, \dots, z_n$ e um número finito de órbitas periódicas normalmente hiperbólicas $\xi_1, \dots, \xi_m : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ tais que*

$$\Omega = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}.$$

(iii) Se $\Xi \in \Omega$, então $\dim W_{loc}^u(\{\Xi\}) < \infty$.

(iv) Se $\Xi, \hat{\Xi} \in \Omega$, então $W^u(\Xi)$ e $W_{loc}^s(\hat{\Xi})$ se interceptam transversalmente, ou seja, se $z \in W^u(\Xi) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi})$, então $T_z W^u(\Xi) + T_z W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = X$ ($T_z W^u(\Xi)$ e $T_z W_{loc}^s(\hat{\Xi})$ são os espaços tangente de $W^u(\Xi)$ e $W_{loc}^s(\hat{\Xi})$ em X , respectivamente, no ponto z).

Observação 6.1.3. Se $W^u(\Xi)$ e $W_{loc}^s(\hat{\Xi})$ não se interceptam, então a condição (iv) é trivialmente satisfeita.

Lema 6.1.4. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ e conjunto não-errante Ω . Então Ω é compacto, $T(t)\Omega \subset \Omega$ para todo $t \geq 0$ e $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são subconjuntos de Ω , para todo $x \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $z_n \rightarrow z \in \mathcal{A}$ quando $n \rightarrow \infty$ e seja V_z uma vizinhança de z em X . Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que V_z é uma vizinhança de V_{n_0} e, como $z_{n_0} \in \Omega$, dado $t_0 \geq 0$, existe $t \geq t_0$ tal que $V(t)V_z \subset V_z \neq \emptyset$, mostrando que $z \in \Omega$. Assim Ω é fechado e, conseqüentemente, compacto.

Sejam $z \in \Omega$, $t, t_0 \geq 0$ e V uma vizinhança de $T(t)z$. Pela continuidade de $T(t)$, existe uma vizinhança U de z tal que $T(t)U = V$. Como $z \in \Omega$, existe $s \geq t_0$ tal que $T(s)U \cap U \neq \emptyset$. Logo, $T(s)V \cap V = T(t+s)U \cap T(t)U \neq \emptyset$.

Por fim, sejam $z \in \omega(x) \subset \mathcal{A}$, para algum $x \in X$, $t_0 \geq 0$ e V uma vizinhança de z em X . Seja $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $z = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(t_n)x \in V$, para todo $n \geq n_0$. Tomemos $n_1 \geq n_0$ tal que $t := t_{n_1} - t_{n_0} \geq t_0$. Assim, $T(t_{n_1})x \in V$ e $T(t_{n_1})x = T(t)T(t_{n_0})x \in T(t)V$, mostrando que $T(t)V \cap V \neq \emptyset$ e, conseqüentemente, $z \in \Omega$.

O caso $\alpha_\phi(x)$ é análogo. □

Corolário 6.1.5. Se forem válidas as hipóteses do teorema anterior e o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ for reversível, então Ω é invariante.

Demonstração. Seja $z \in \Omega$. Como $T(s)|_{\mathcal{A}}$ é injetivo e $\mathcal{A}$ é invariante, existe um único $x \in \mathcal{A}$ tal que $T(s)x = z$. Sejam $t_0 \geq 0$ e V uma vizinhança de x em X . Então $T(s)V$ é uma vizinhança de z e, assim, existe $t \geq t_0$ tal que $T(t)T(s)V \cap T(s)V \neq \emptyset$. Logo, $T(t)V \cap V \neq \emptyset$ e $x \in \Omega$, concluindo a demonstração. $\square$

Proposição 6.1.6. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo Morse-Smale com a coleção de conjuntos invariantes isolados disjuntos $\Xi = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$ e sejam $\Xi, \hat{\Xi} \in \Xi$. Se $W^u(\Xi) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}) \neq \emptyset$, então $\dim W^u(\Xi) \geq \dim W^u(\hat{\Xi})$.*

Demonstração. Seja $z \in W^u(\Xi) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi})$. Então $T_z W^u(\Xi) + T_z W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = X$. Por outro lado, se $\hat{z} \in \hat{\Xi}$, então $T_{\hat{z}} W_{loc}^u(\Xi) \oplus T_{\hat{z}} W_{loc}^c(\hat{\Xi}) \oplus T_{\hat{z}} W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = X$. Assim,

$$\dim W^u(\Xi) = \dim T_z W^u(\Xi) \geq \dim T_{\hat{z}} W^u(\Xi) + \dim T_{\hat{z}} W^c(\hat{\Xi}) \geq \dim T_{\hat{z}} W^u(\hat{\Xi}) = \dim W^u(\hat{\Xi}).$$

$\square$

Proposição 6.1.7. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo Morse-Smale com a coleção de conjuntos invariantes isolados disjuntos $\Xi = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$ e sejam $\Xi, \hat{\Xi} \in \Xi$. Se $W^u(\Xi) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}) \neq \emptyset$, então existe uma subvariedade $D^0 \subset W^u(\Xi)$ tal que $D^0 \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = \{x^0\}$ e $T_{x^0} D^0 \oplus T_{x^0} W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = X$.*

Demonstração. Seja $x^0 \in W^u(\Xi) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi})$. Existe uma vizinhança V de x^0 em $W^u(\Xi)$, uma vizinhança W de 0 em $T_{x^0} W^u(\Xi)$ e uma aplicação C^1 aberta $\psi : W \rightarrow V$. Como $\dim W = \dim W^u(\Xi) \geq \dim W^u(\hat{\Xi})$, existe um subespaço vetorial F de $T_{x^0} W^u(\Xi)$ tal que $F \oplus T_{x^0} W_{loc}^s(\hat{\Xi}) = X$.

A demonstração está completa se tomarmos $D^0 = \psi(F)$. $\square$

Na próxima proposição, usamos que a transversalidade é uma propriedade aberta. Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em [3], em especial, no Teorema 5.10.

Proposição 6.1.8. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo Morse-Smale com a coleção disjunta de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$ e se-*

jam $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3 \in \Xi$. Se $W^u(\Xi_1) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}_2) \neq \emptyset$ e $W^u(\Xi_2) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}_3) \neq \emptyset$, então $W^u(\Xi_1) \cap W_{loc}^s(\hat{\Xi}_3) \neq \emptyset$.

Demonstração. Sejam x_{12} o ponto de intersecção transversal entre $W^u(\Xi_1)$ e $W_{loc}^s(\Xi_2)$ e x_{23} o ponto de intersecção transversal entre $W^u(\Xi_2)$ e $W_{loc}^s(\Xi_3)$. Pela proposição 6.1.7, existe uma subvariedade D^0 de X tal que $D^0 \subset W^u(\Xi_1)$, $D^0 \cap W_{loc}^s(\Xi_2) = \{x_{12}\}$, $T_{x_{12}}D^0 \oplus T_{x_{12}}W_{loc}^s(\Xi_2) = X$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{23} \in T^{n_0}(W_{loc}^u(\Xi_2))$. Pelo λ -Lema, existe uma vizinhança D_ρ^0 de x_{12} em D^0 e conjuntos $R^n \subset T^n(D_\rho^0) \subset W^u(\Xi_1)$ tais que

$$R^n \rightarrow T^{n_0}(W_{loc}^u(\Xi_2)) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Sendo a transversalidade uma propriedade aberta, existe um ponto $x_{13} \in W^u(\Xi_1) \cap W_{loc}^s(\Xi_3)$ de intersecção transversal.

□

Teorema 6.1.9. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo Morse-Smale com atrator global $\mathcal{A}$ e conjunto não-errante $\Omega = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$. Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente e Ω é o conjunto de famílias invariantes disjuntas isoladas.*

Demonstração. Provemos (G1). Seja $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ uma solução global fora de Ω e seja $x = \xi(0)$. Sabemos que $\omega(x) \subset \Omega$. Tomemos $x_1 \in \omega(x)$ e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\xi(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1$. Se x_1 for um ponto de uma órbita periódica, vamos utilizar x_1 para representar toda a órbita periódica, e não apenas um ponto.

Suponhamos que $\xi(t)$ não convirja para x_1 quando $t \rightarrow \infty$. Então existem $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\tau_n > t_n$, de forma que $d(\xi(\tau_n), x_1) \geq \epsilon_0$, para todo $n \geq 0$. Como $\mathcal{A}$ é compacto, podemos assumir que $\xi(\tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2 \in \omega(x) \setminus \{x_1\}$.

Seja $\delta > 0$ de forma que $\mathcal{O}_\delta(y) \cap \mathcal{O}_\delta(z) = \emptyset$, para todo $y \neq z \in \Omega$. Podemos, então, construir uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n < s_n < \tau_n$ e $\xi(s_n) \notin \mathcal{O}_\delta(x_1) \cap \mathcal{O}_\delta(x_2)$. Pela compacidade de $\mathcal{A}$, podemos assumir que $\xi(s_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_3 \in \omega(x) \setminus \{x_1, x_2\}$. Podemos repetir este processo e obter uma sequência infinita de pontos de equilíbrio em Ω , ou seja, um absurdo.

Logo, $\xi(t) \rightarrow x_1$ quando $t \rightarrow \infty$. Mostramos, de forma análoga, o resultado para $\alpha_\xi(x)$ e $t \rightarrow -\infty$, concluindo a demonstração de (G1).

Provemos, agora, (G2). Suponhamos que exista uma estrutura homoclínica em Ω . Usando a Proposição 6.1.8, podemos assumir que existe $x \in \Omega$ e uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\xi(t_0) \notin \Omega$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e

$$x \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x.$$

Seja $x^0 = \xi(t_0)$ e podemos assumir que $x^0 \in W_{loc}^s(x)$. Seja D^0 uma vizinhança de x^0 transversal a $W_{loc}^s(x)$ em x^0 . Pelo λ -Lema, existe uma vizinhança D_ρ^0 de x^0 em D^0 e conjuntos $S^n \subset T^n(D_\rho^0)$ tais que $S^n \rightarrow T^{n_0}(W_{loc}^u(x))$ quando $n \rightarrow \infty$, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$. Em particular, tomando n_0 tal que $x^0 \in T^{n_0}(W_{loc}(x))$, então $x^0 \in \Omega$, contradizendo nossa hipótese inicial. Logo, provamos (G2) e a demonstração está completa. $\square$

Teorema 6.1.10. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradiente reversível associado à coleção disjunta de conjuntos invariantes isolados dada por $\Xi = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$, onde cada z_i é um ponto de equilíbrio hiperbólico e $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma órbita periódica normalmente hiperbólica, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Além disso, vamos supor que se $\Xi \in \Xi$, então $\dim W_{loc}^u(\Xi) < \infty$ e, se $\Xi, \hat{\Xi} \in \Xi$, então $W^u(\Xi)$ e $W_{loc}^s(\hat{\Xi})$ se interceptam transversalmente.*

Sob essas condições, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo Morse-Smale e seu conjunto não-errante Ω é Ξ .

Demonstração. Falta apenas provarmos que $\Omega = \Xi$. Como Ξ possui apenas pontos de equilíbrios e órbitas periódicas, é fácil ver que $\Xi \subset \Omega$.

Suponhamos que existe $x \in \Omega \setminus \Xi$ e seja $\xi_1 : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global por x . Então existem x_1 e x_2 em Ξ , com $x_1 \neq x_2$, tais que

$$x_1 \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_2.$$

Seja $\delta_0 = \frac{d(x, x_2)}{2} > 0$. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade do semigrupo, existem $\tau_2 > \tau_1 > 0$ e uma vizinhança V_x de x tais que $T(\tau_1)V_x \subset \mathcal{O}_\epsilon(x_2)$ e $T(\tau_2)V_x \cap V_x \neq \emptyset$. Assim, existem

sequências $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $y_n \in \mathcal{O}_{1/n}(x_2)$ e $T(t_n)y_n \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(x_2)$. Isso garante a existência de uma solução global $\xi_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

$$x_2 \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_3,$$

para algum x_3 em Ξ e, por (G2), $x_3 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_2$. Podemos repetir esse processo e obter uma contradição com o fato de Ξ possuir apenas um número finito de invariantes isolados. Assim, $\Xi \subset \Omega$ e o teorema está provado. $\square$

Através destes dois teoremas, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 6.1.11. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo reversível associado a um número finito n de pontos de equilíbrio e m de órbitas periódicas. Seja $\Omega = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$, onde cada z_i é um ponto de equilíbrio hiperbólico e $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma órbita periódica normalmente hiperbólica, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Vamos supor que se $x \in \Omega$, então $\dim W_{loc}^u(x) < \infty$ e, se $x, y \in \Omega$, então $W^u(x)$ e $W_{loc}^s(y)$ se interceptam transversalmente.*

Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo Morse-Smale se, e somente se, ele for um semigrupo dinamicamente gradiente com respeito a Ω .

6.2 Estabilidade estrutural de semigrupos Morse-Smale

Definição 6.2.1. *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ dois semigrupos dinamicamente gradientes. Dizemos que existe um **isomorfismo de diagramas de fase** entre os atratores de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *Se $\Xi_T = \{\{z_1\}, \dots, \{z_n\}, \xi_1(\mathbb{R}), \dots, \xi_m(\mathbb{R})\}$ e $\Xi_S = \{\{\hat{z}_1\}, \dots, \{\hat{z}_{\hat{n}}\}, \hat{\xi}_1(\mathbb{R}), \dots, \hat{\xi}_{\hat{m}}(\mathbb{R})\}$ forem as coleções disjuntas de conjuntos invariantes isolados para $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$, respectivamente, então $n = \hat{n}$ e $m = \hat{m}$.*

(ii) *Existe uma bijeção $\mathcal{D} : \Xi_T \rightarrow \Xi_S$ de forma que exista uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \Xi_j) = 0$$

se, e somente se, existir uma solução global $\psi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{S(t) : t \geq 0\}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\psi(t), \mathcal{D}(\Xi_i)) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\psi(t), \mathcal{D}(\Xi_j)) = 0.$$

Lema 6.2.2. *Vamos supor as mesmas condições do Teorema 3.5.5, ou seja, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ é uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ que satisfaz*

- (a) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\bigcup_{\eta \in [0,1]} \mathcal{A}_\eta$ é limitado;
- (b) para cada $\eta \in [0, 1]$, $\mathcal{A}_\eta$ contém uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \dots, \Xi_{n,\eta}\}$ tal que $\lim_{\eta \rightarrow 0} d_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$;
- (c) existem $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tal que $\Xi_{i,\eta}$ é o conjunto invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(\Xi_{i,\eta})$, $1 \leq i \leq n$ e $0 \leq \eta \leq \eta_0$;
- (d) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente com atrator global $\mathcal{A}_0$ e coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi_0 = \{\Xi_{1,0}, \dots, \Xi_{n,0}\}$.

Além disso, vamos supor que $\eta_k \rightarrow 0$ e $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global de $\{T_{\eta_k}(t) : t \geq 0\}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_k(t), \Xi_{i,\eta_k}) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_k(t), \Xi_{j,\eta_k}) = 0.$$

Então existe uma sequência de soluções globais $\xi^l : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, com $1 \leq l \leq m-1$ ($m \leq n$), e conjuntos invariantes isolados $\{\Xi_{n_l}\}_{1 \leq l \leq m} \subset \Xi_0$ tais que $\Xi_{n_1} = \Xi_{1,0}$, $\Xi_{n_m} = \Xi_{j,0}$ e

$$\Xi_{n_l} \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \xi^l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{n_{l+1}}, \text{ para } 1 \leq l \leq m-1.$$

Demonstração. Seja $0 < \delta < \frac{1}{2} \min\{d(\Xi_{i,0}, \Xi_{j,0}) : i < j\}$. Como $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_k(t), \Xi_{i,\eta_k}) = 0$ e $d_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$, podemos considerar uma subsequência de $\{\xi_k\}$ e assumir que $\xi_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi^1(t)$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$, para alguma solução global ξ^1 de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que $\xi^1(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_{n_1} := \Xi_{i,0}$.

Por (G1), existe um conjunto invariante isolado $\Xi_{n_2} \in \Xi_0$, $\Xi_{n_1} \neq \Xi_{n_2}$ tal que $\xi^1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{n_2}$.

Se $\Xi_{n_2} = \Xi_{j,0}$, a demonstração está concluída. Caso contrário, existem $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ e $t'_l > t_l$ de forma que $d(\xi_{k_l}(t_l), \Xi_{n_2}) < \frac{\delta}{l}$, $d(\xi_{k_l}(t), \Xi_{n_2}) < \delta$ para todo $t \in [t_l, t'_l]$ e $d(\xi_{k_l}(t'_l), \Xi_{n_2}) = \delta$.

Temos que $t'_l - t_l \rightarrow \infty$ quando $l \rightarrow \infty$, pois, caso contrário, poderíamos assumir que $t'_l - t_l \rightarrow \tau$ e $\xi_{k_l}(t_l) \rightarrow x \in \Xi_{n_2}$, implicando que $\lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{k_l}(t'_l) = T_0(\tau)x \in \Xi_{n_2}$, o que contradiz nossa hipóteses.

Tomando uma subsequência, podemos assumir que existe $\xi^2(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{k_l}(t + t'_l)$. Como $t'_l - t_l \rightarrow \infty$, temos que $d(\xi^2(t), \Xi_{n_2}) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$ e, conseqüentemente, $\xi^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Xi_{n_2}$. Além disso, existe $\Xi_{n_3} \in \Xi_0 \setminus (\Xi_{n_1}, \Xi_{n_2})$ tal que $\xi^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{n_3}$. Podemos repetir esse argumento e, sendo Ξ_0 finito, obtemos a sequência desejada.

□

Teorema 6.2.3. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$, satisfazendo*

(i) *$\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tem atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$, $\overline{\bigcup_{\eta \in (0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto e $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é reversível para todo $\eta \in [0, 1]$;*

(ii) *$\Xi_\eta = \{\{z_{1,\eta}\}, \dots, \{z_{n,\eta}\}, \xi_{1,\eta}(\mathbb{R}), \dots, \xi_{m,\eta}(\mathbb{R})\}$ é uma coleção de conjuntos invariantes isolados para $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} d(z_{j,\eta}, z_{j,0}) = 0 \text{ e } \lim_{\eta \rightarrow 0} d_H(\xi_{i,\eta}(\mathbb{R}), \xi_{i,0}(\mathbb{R})) = 0,$$

para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq i \leq m$;

(iii) *existe $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tais que, se $0 \leq \eta \leq \eta_0$ e $\Xi_\eta \in \Xi_\eta$, então Ξ_η é o conjunto invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(\Xi_\eta)$;*

(iv) *para cada conjunto compacto $J \subset \mathbb{R}^+$, nós temos*

$$\sup_{t \in J} \|D_x T_\eta(t)(z) - D_x T_0(t)(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

uniformemente para z em uma vizinhança de $\overline{\bigcup_{\eta \in (0,1]} \mathcal{A}_\eta}$.

(v) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo Morse-Smale dinamicamente gradiente em X com atrator global $\mathcal{A}_0$.

Então existe $\eta_0 > 0$ tal que, se $\eta \in (0, \eta_0)$, então $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo Morse-Smale dinamicamente gradiente e existe um isomorfismo de diagrama de fase entre os atratores de $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ e $\{T_0(t) : t \geq 0\}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.5, sabemos que existe $\eta_0 > 0$ tal que, se $\eta \in (0, \eta_0)$, então o semigrupo $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é dinamicamente gradiente com respeito à coleção de conjuntos invariantes isolados Ξ_η e, se η_0 for suficientemente pequeno, cada solução global em Ξ_η será um ponto de equilíbrio hiperbólico ou uma órbita normalmente hiperbólica.

Vamos definir $\mathcal{D} : \Xi_0 \rightarrow \Xi_\eta$ por

$$\mathcal{D}(\Xi_{i,0}) = \Xi_{i,\eta}, \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Dessa forma, $\mathcal{D}$ será uma bijeção e nós podemos assumir que, sendo a transversalidade uma propriedade aberta, que η_0 é suficientemente pequeno para que, se $W^u(\Xi_{i,0}) \cap W_{loc}^s(\Xi_{j,0}) \neq \emptyset$, então $W^u(\Xi_{i,\eta}^*) \cap W_{loc}^s(\Xi_{j,\eta}) \neq \emptyset$ e existe um ponto de interseção transversal.

Isso mostra que, se existir uma conexão entre $\Xi_{i,0}$ e $\Xi_{j,0}$, então existe uma conexão entre $\Xi_{i,\eta}$ e $\Xi_{j,\eta}$.

Para a recíproca, tomemos uma sequência $\eta_k \rightarrow 0$ e uma sequência de soluções globais $\xi_k : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi_k(t), \Xi_{i,\eta_k}) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi_k(t), \Xi_{j,\eta_k}) = 0.$$

Pelo Lema 6.2.2, existem uma coleção de soluções globais $\psi_l : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$, $l = 1, \dots, m-1$, com $m \leq n$, e uma coleção de conjuntos invariantes isolados $\Xi_{n_l,0}$ em Ξ_0 tais que $\Xi_{n_1,0} = \Xi_{i,0}$, $\Xi_{n_m,0} = \Xi_{j,0}$ e

$$\Xi_{n_l,0} \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \psi_l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{n_{l+1},0}, \text{ para todo } l = 1, \dots, m-1.$$

Pela Proposição 6.1.8, existe uma solução global $\psi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ tal que

$$\Xi_{i,0} \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} \psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Xi_{j,0},$$

concluindo a demonstração. $\square$

6.3 Exemplo

Mostraremos, através de um exemplo, que a transversalidade é essencial para garantir a estabilidade estrutural.

Notemos, na primeira figura, que a variedade instável $W^u(e_2)$ de e_2 e a variedade estável local $W_{loc}^s(e_3)$ de e_3 não se interceptam transversalmente.

Após uma pequena perturbação autônoma, vemos na segunda figura que a conexão entre e_2 e e_3 foi perdida e que, conseqüentemente, não existe um isomorfismo de diagramas de fase entre os atratores do sistema original e o do sistema perturbado.

Figura 6.1: Atrator global sem transversalidade.

Figura 6.2: Atrator global do sistema perturbado.

Conclusão

Neste trabalho, fizemos um estudo detalhado da perturbação de semigrupos. Começamos, no primeiro capítulo, com demonstrações de resultados fundamentais dos sistemas dinâmicos e provamos as noções de estabilidade sob diferentes perspectivas.

Primeiro estudamos a noção mais simples de continuidade para atratores: a semi-continuidade superior. Estudamos, então, a semicontinuidade inferior e, por causa das dificuldades de garantirmos condições para ela, tivemos que buscar novas hipóteses sobre semigrupos.

Um primeiro tipo de semigrupo estudado foram os semigrupo gradientes. É importante dizer que as hipóteses adicionais feitas para estes semigrupos se verificam em fenômenos naturais e justificam este estudo. Um resultado bastante forte relacionado à estabilidade foi que uma pequena perturbação de semigrupos gradientes continua gradiente.

Por fim, estudamos os semigrupos Morse-Smale, o que nos permitiu provarmos a existência de isomorfismos entre os conjuntos isolados invariantes de um semigrupo e os dos semigrupos perturbados.

Fizemos, além disso, um trabalho bem detalhado sobre as variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio hiperbólico e a permanência de órbitas periódicas. Estes resultados foram fundamentais para o estudo de estabilidade.

Este estudo, feito até aqui com caráter teórico, está bem detalhado e pronto para aplicações, em particular, em equações diferenciais ordinárias, parciais ou funcionais.

Por fim, notemos que este trabalho pode ser continuado com o estudo do caso não-autônomo. Os semigrupos, denotados até aqui por $\{T(t) : t \geq 0\}$, deverão então ser denotados por $\{T(t, s) : t \geq s\}$, indicando que a evolução do sistema depende dos instantes inicial e final considerados, e não apenas do tempo decorrido. Conceitos básicos, como atratores e continuidade, deverão ser adaptados para este caso, e teremos então a noção de atrator-pullback. A partir disso, poderemos fazer todo o estudo da estabilidade semigrupos gradientes e Morse-Smale, agora no caso não-autônomo.

Referências Bibliográficas

- [1] Bortolan, M.C., Carvalho, A.N. & Langa, J.A. *Structural stability of attractors under autonomous or non-autonomous perturbations*.
- [2] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer Verlag (1981).
- [3] D. Henry, *Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations*, London Mathematical Society Lecture Note Series 318, Cambridge University Press (2005).
- [4] Aragão-Costa, E.R., *Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação*, Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2012.
- [5] Carvalho, A. N., *Sistemas Dinâmicos Não-Lineares*, 2012. <http://www.icmc.usp.br/~andcarva/SDNL2012.pdf>
- [6] Carvalho, A. N., *Análise Funcional II*, 2012. <http://www.icmc.usp.br/~andcarva/AnaliseFuncional-II.pdf>
- [7] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1976).
- [8] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, (2) (1987).