Módulos de suavidade e relações com K-funcionais

Cristiano dos Santos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Cristiano dos Santos

Módulos de suavidade e relações com K-funcionais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
Outubro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237m Santos, Cristiano
Módulos de suavidade e relações com K-funcionais /
Cristiano Santos; orientadora Thaís Jordão . -- São
Carlos, 2017.
57 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. módulos de suavidade. 2. K-funcionais. 3.
melhor aproximação. I. , Thaís Jordão, orient. II.
Título.

Cristiano dos Santos

Moduli of smoothness and relations with K-functional

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
October 2017

*Este trabalho é dedicado ao meu pai Sebastião dos Santos que,
em uma noite me falou:
“Fico impressionado com o quanto ainda há para se estudar em Matemática.”*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro, Processo: 2015/11703-8.

Agradeço minha família e minha noiva por sempre estarem ao meu lado nos momentos que necessito.

E por fim, agradeço meus amigos por acima de tudo me proporcionarem um pouco mais de alegria e diversão.

RESUMO

SANTOS, C. **Módulos de suavidade e relações com K-funcionais**. 2017. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho, primeiramente, exploramos certos módulos de suavidade e K - funcionais definidos na esfera unitária m - dimensional e suas propriedades, dando prioridade a suas equivalências assintóticas e comparação com o erro de melhor aproximação. Uma das principais referências utilizadas foi (DAI; XU, 2010).

Posteriormente, consideramos um módulo de suavidade e um K-funcional em espaços mais gerais, os espaços compactos 2-homogêneos, classe de espaços esta que contém a classe das esferas. A relação entre estes objetos e o raio de aproximação do operador translação (translação esférica, no contexto esférico) foi estudada. As principais referências foram (PLATONOV, 2009) e (PLATONOV, 1997).

Palavras-chave: módulos de suavidade, K-funcionais, melhor aproximação.

ABSTRACT

SANTOS, C. **Moduli of smoothness and relations with K-functional**. 2017. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work, we firstly explored certain moduli of smoothness and K - functionals defined on the m -dimensional unit sphere and their properties, mainly their asymptotic equivalence and relation to the best approximation error. The main reference is (DAI; XU, 2010).

Later we consider a moduli of smoothness and a K-functional on a general setting, namely two-point homogeneous spaces, which has the unit spheres as one of its classes. Relations between those tools and the rate of approximation of the shifting operator were studied. The main references here were (PLATONOV, 2009) and (PLATONOV, 1997).

Keywords: moduli of smoothness, K-functional, best approximation.

SUMÁRIO

1	FERRAMENTAS DE APROXIMAÇÃO	17
1.1	Um novo módulo de suavidade	20
1.1.1	Ângulos de Euler	21
1.1.2	Módulo de suavidade dado por rotações por ângulos de Euler	22
1.1.3	Propriedades do módulo de suavidade	25
2	APROXIMAÇÃO NA ESFERA UNITÁRIA	33
2.1	Teoremas direto e inverso para o novo módulo de suavidade	36
2.2	Um outro K-funcional	39
2.3	Comparação com outros módulos de suavidade	40
3	APROXIMAÇÃO NUM CONTEXTO MAIS GERAL	43
3.1	Módulo de suavidade dado por um operador média	45
3.2	Relação com raio de aproximação do operador média	51
	REFERÊNCIAS	55

INTRODUÇÃO

Um dos problemas centrais de aproximação pode ser colocado em uma questão, simples, porém importante. Quando um subespaço Y de um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ está "próximo" ou não de X ? A proximidade aqui mencionada, se refere à existência de um elemento $y \in Y$ de tal forma que $d(x, Y) := \inf_{z \in Y} \{\|x - z\|\} = \|x - y\|$. Neste caso, o elemento y é comumente chamado de melhor aproximação de x em Y . Estas ideias mais fundamentais podem ser encontradas em referências mais antigas, porém clássicas, como (DEVORE; LORENTZ, 1993; DEEB; KHALIL, 1989) e em outras recentes como (BROWN; DAI, 2005; DAI; XU, 2013) e referências mencionadas nelas.

O espaço X , neste trabalho, será a priori o espaço de funções à valores reais, contínuas ou p -integráveis, definidas na esfera unitária d -dimensional centrada na origem. Geralmente, os subespaços Y de X especiais que consideraremos, são os espaços dos polinômios de grau menor ou igual a n em $(d + 1)$ variáveis restritos à esfera.

O problema de aproximação estabelecido inicialmente, consiste em analisar o *operador melhor aproximação* definido por

$$E(f) := \inf_{g \in Y} \|f - g\|_X.$$

Observe que pode não ser fácil de trabalhar com este operador, principalmente em termos computacionais, pois pode não ser tão simples calcular este ínfimo no contexto estabelecido.

Da dificuldade mencionada surgem ferramentas auxiliares, como os módulos de suavidade e os K -funcionais, que são ferramentas muito úteis para obter uma estimativa da melhor aproximação. Os módulos de suavidade são funções reais que oferecem propriedades interessantes sobre a suavidade de uma certa função, além disso, tem uma estreita relação com o operador melhor aproximação através dos teoremas direto e inverso, os quais apresentam desigualdades do seguinte tipo:

$$E(f) \leq c\omega(f)$$

e inversamente,

$$\omega(f) \leq c \sum E(f).$$

Os K -funcionais são também funções reais e a partir da sua definição podemos notar sua relação com a melhor aproximação. Além disso os K -funcionais se relacionam com os módulos

de suavidades através de desigualdades do tipo:

$$c_1 \omega(f) \leq K(f) \leq c_2 \omega(f).$$

Todas estas ferramentas podem ser encontradas definidas e exploradas na referência (DEVORE; LORENTZ, 1993), por exemplo, e nos permitem utilizá-las lateralmente ao operador melhor aproximação, dependendo do contexto e conveniência.

Os assuntos comentados acima serão abordados da seguinte maneira. No primeiro capítulo, apresentaremos o contexto inicial, notações e faremos alguns comentários sobre os "tradicionais" módulos de suavidade na esfera e seus K-funcionais equivalentes. Propriedades básicas, bem como a relação entre eles serão apresentadas. Em seguida, apresentaremos uma justificativa sucinta do porquê estudar o novo módulo de suavidade que não o "tradicional" pode ser importante, introduziremos um novo conceito e mostraremos algumas de suas propriedades. No Capítulo II, focaremos em demonstrar os teoremas direto e inverso para o novo módulo de suavidade, em introduzir um novo K-funcional e mostrar equivalências relacionadas a estas ferramentas. Por fim, no terceiro capítulo, trabalharemos em uma classe mais geral de espaços, classe essa que contempla o contexto esférico discutido nos capítulos um e dois. Definiremos nessa classe o operador média esférica, o módulo de suavidade e um K-funcional. Apresentaremos, também, algumas propriedades e alguns resultados sobre o módulo de suavidade que serão importantes para estabelecer a equivalência entre o módulo de suavidade e o K-funcional. Por último, obteremos a equivalência do módulo de suavidade com o raio de aproximação do operador média. Esta terceira ferramenta (raios de aproximação de operadores média) tem se mostrado importante no estudo de crescimento de coeficientes de Fourier para funções definidas neste contexto e decaimento de autovalores de certos operadores integrais considerados sobre eles.

FERRAMENTAS DE APROXIMAÇÃO

Neste capítulo, apresentamos seis ferramentas de aproximação definidas no contexto esférico, exploramos propriedades atreladas a elas e ao final exibimos as relações existentes entre tais ferramentas. As relações são dadas em termos de equivalências (algumas, pseudoequivalências) com sentido assintótico com relação ao parâmetro utilizado.

Apresentamos, inicialmente, um módulo de suavidade e um K-funcional bem conhecido, e utilizado frequentemente, na literatura, dado em função do operador translação esférica (shifting operator) e a derivada de Laplace-Beltrami, respectivamente. A abundância com que tais ferramentas aparecem na literatura pode ser verificada nas seguintes referências (DAI; DITZIAN, 2004; DAI; XU, 2013; JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014; RUSTAMOV, 1993) e outras citadas nelas. Em seguida apresentamos dois outros módulos de suavidade, ambos, dados em termos de rotações no espaço euclidiano em que a esfera está inserida. O primeiro deles definido por rotações ortogonais unitárias e o segundo por ângulos de Euler. A principal referência utilizada aqui é (DAI; XU, 2010).

Para tanto fixaremos algumas notações. Trabalhamos sobre a esfera d - dimensional unitária centrada na origem, denotada por S^d , do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{d+1}$ munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideramos sobre a esfera a medida de Lebesgue induzida de $\mathbb{R}^{d+1}$, que denotamos por σ_d , e para $1 \leq p < \infty$, os espaços de Banach usuais $L^p(S^d) := (L^p(S^d, \sigma_d), \|\cdot\|_p)$ caracterizados pelas funções definidas na esfera à valores reais tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_{S^d} |f(x)|^p d\sigma_d(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, trabalharemos sobre o espaço das funções contínuas $C(S^d)$ definidas na esfera à valores reais munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Ao longo desta dissertação a comparação entre as ferramentas a serem apresentadas se darão segundo a notação que agora introduzimos: dadas duas funções $A(t)$ e $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$

escrevemos $A \sim B$ se $A(t) \leq cB(t)$, para alguma constante c independente de t e escrevemos $A \asymp B$ para designar que $A \sim B$ e $B \sim A$.

O primeiro módulo de suavidade que apresentaremos é definido via o *operador translação esférica*, ou a média esférica, definido para funções $f \in L^p(S^d)$ e é dado por:

$$S_\theta f(x) := \frac{1}{\sigma_d(\sin\theta)^{d-1}} \int_{\langle x, y \rangle = \cos\theta} f(y) d\sigma_x^\theta(y), \quad 0 < \theta \leq \pi;$$

onde $d\sigma_x^\theta$ representa o elemento de volume da região da esfera que estamos integrando sobre, a saber, o anel $\{y \in S^d : \langle x, y \rangle = \cos\theta\}$ cujo volume é dado por $\sigma_d(\sin\theta)^{d-1}$, onde $\sigma_d = 2\pi^{(d+1)/2}/\Gamma((d+1)/2)$.

Para $r > 0$ e $t > 0$ consideremos primeiro o módulo de suavidade definido por:

$$\omega_r^*(f, t)_p := \left\{ \sup_{|\theta| \leq t} \|(I - S_\theta)^{r/2}(f)\|_p \right\}, \quad f \in L^p(S^d), \quad (1.1)$$

onde

$$(I - S_\theta)^{r/2}(f) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} (S_\theta)^k(f).$$

Os módulos de suavidade apresentam interessantes propriedades, em particular este, como as que seguem. Para $f, g \in L^p(S^d)$ temos:

- (1) $\omega_r^*(f, t)_p \rightarrow 0, t \rightarrow 0$;
- (2) $\omega_r^*(f, t)_p$ é monótona não decrescente em $(0, \pi)$, com relação ao parâmetro t ;
- (3) $\omega_r^*(f + g, t)_p \leq \omega_r^*(f, t)_p + \omega_r^*(g, t)_p$;
- (4) Para $0 < s < r$, $\omega_r^*(f, t)_p \leq 2^{(r-s)/2} \omega_s^*(f, t)_p$.

Mais detalhes sobre este módulo de suavidade e demonstração das propriedades acima podem ser encontradas em (RUSTAMOV, 1993).

Definimos o *operador de Laplace-Beltrami* $\mathcal{B}(f)(x) := -\Delta_0(f)(x)$, $x \in S^d$ via o Laplaciano Δ e a extensão radial da seguinte maneira. Para $f \in C^2(S^d)$ seja $F(y) := f(y/\|y\|)$, $y \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ a extensão radial de f , e assim definimos,

$$\Delta_0(f)(x) = \Delta(F)(x), \quad x \in S^d.$$

A definição do operador de Laplace-Beltrami pode ser vista com mais detalhes em (DAI; XU, 2013; MORIMOTO, 1998).

Os números $n(n+2\lambda)$, $n = 0, 1, \dots$ são autovalores do operador $\mathcal{B}$, correspondentes aos autoespaços $\mathcal{H}_n^d$:

$$\mathcal{H}_n^d = \{g \in C^\infty(S^d) : \mathcal{B}(g) = n(n+2\lambda)g\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

onde $\lambda = (d-1)/2$. Tais espaços $\mathcal{H}_n^d$ são denominados *espaço dos esféricos harmônicos de grau n* em S^d e são mutualmente ortogonais em $L^2(S^d)$, com respeito ao produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^d} f(x) \overline{g(x)} d\sigma_d(x).$$

Adicionalmente, eles oferecem a seguinte decomposição ortogonal de $L^2(S^d)$:

$$L^2(S^d) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n^d,$$

de onde temos a projeção ortogonal $\mathcal{Y}_n : L^2(S^d) \rightarrow \mathcal{H}_n^d$, $n = 0, 1, \dots$, bem definida e representada por

$$\mathcal{Y}_n(f)(x) = \frac{n+\lambda}{\lambda} \int_{S^d} C_n^\lambda(\langle x, y \rangle) f(y) d\sigma_d(y), \quad (1.2)$$

onde C_n^λ é o polinômio de Gegenbauer com índice λ e grau n , normalizado, ou seja por $C_n^\lambda(1) = 1$.

Detalhes das construções até aqui mencionadas e polinômios de Gegenbauer podem ser vistos em (MORIMOTO, 1998) e (SZEGO, 1975), respectivamente.

Associado ao módulo de suavidade apresentado, para $r > 0$ e $t > 0$, temos o K-funcional definido por:

$$K_r^*(f, t)_p := \inf_g \left\{ \|f - g\|_p + t^r \|\mathcal{B}^{r/2}(g)\|_p \right\}$$

e o ínfimo é tomado sobre todas as funções $g \in L^p(S^d)$ tais que $\mathcal{B}^{r/2}(g) \in L^p(S^d)$. Quando $r/2$ é inteiro, $\mathcal{B}^{r/2}$ é obtido, simplesmente, pela composição iterada do operador $\mathcal{B}$. Caso contrário, é dada pela expansão em série, que também com definição anterior para $r/2$ inteiro, (veja (DAI; XU, 2013)),

$$\mathcal{B}^{r/2}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n+2\lambda))^{r/2} \mathcal{Y}_n(f).$$

A associação entre as ferramentas apresentadas até o momento diz respeito à relação, para $f \in L^p(S^d)$ com $1 \leq p < \infty$ e $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$,

$$\omega_r^*(f, t)_p \asymp K_r^*(f, t)_p, \quad 0 < t < \pi,$$

obtida nos anos 90 e bastante difundida atualmente. Mais detalhes desta relação e demonstração podem ser vistos em (RUSTAMOV, 1993).

Adicionalmente, se considerarmos a classe de polinômios esféricos, então temos uma relação adicional como se segue. Denotamos por Π_n^{d+1} o espaço de polinômios de grau menor ou igual a n em $(d+1)$ variáveis definidos em $\mathbb{R}^{d+1}$ e por

$$\Pi_n(S^d) := \Pi_n^{d+1}|_{S^d},$$

o espaço dos polinômios de Π_n^{d+1} restritos à esfera S^d . A *melhor aproximação* de uma função f esférica, isto é, uma função a valores reais definida em S^d , para $1 \leq p \leq \infty$, é definida por:

$$E_n(f)_p := \inf_{g \in \Pi_n(S^d)} \{ \|f - g\|_p \}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

A relação abaixo, também reconhecida por teoremas direto e inverso para a melhor aproximação polinomial, respectivamente, traz as seguintes relações envolvendo o módulo de suavidade definido em (1.1) e, conseqüentemente, o K-funcional associado. Para $f \in L^p(S^d)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$E_n(f)_p \leq c\omega_r^*(f, n^{-1})_p, \quad (1.4)$$

e inversamente,

$$\omega_r^*(f, n^{-1})_p \leq cn^{-r} \sum_{k=0}^n (k+1)^{r-1} E_k(f)_p. \quad (1.5)$$

Para mais detalhes sobre a melhor aproximação, tanto no contexto esférico como em outros veja, por exemplo, (RUSTAMOV, 1993) e (DEVORE; LORENTZ, 1993). Já para a relação estabelecida acima veja, por exemplo, (XU, 2005).

1.1 Um novo módulo de suavidade

Iniciamos esta seção apresentando um segundo módulo de suavidade, dado via operadores rotação. Este por sua vez nos permitirá trabalhar com um terceiro módulo de suavidade, definido recentemente em (DAI; XU, 2010), e em seguida estabeleceremos relações entre eles.

Uma justificativa sucinta do porquê tal abordagem foi escolhida é a seguinte. Os módulos de suavidade definidos através de operadores multiplicativos, como $\omega_r^*(f, t)_p$, permitem um manejo supostamente simples do ponto de vista teórico. Contudo, de difícil manipulação no que se refere ao cálculo efetivo. Além disso, eles apresentam uma dissimilaridade com o módulo de suavidade tradicional definido em (DEVORE; LORENTZ, 1993), por exemplo, para funções definidas na reta, através de operadores diferença dado por translações de uma função. O módulo de suavidade a ser apresentado aqui, por outro lado, está mais próximo da forma tradicional, à medida que a distância na esfera é medida pela distância geodésica, o módulo definido via as rotações nos dá uma boa analogia com o tradicional, já comentado. Contudo, ainda assim, pode ser de difícil cálculo, mesmo para funções simples, devido à grande quantidade de rotações existentes principalmente com o aumento da dimensão da esfera.

O novo módulo de suavidade a ser apresentado é definido através das diferenças dos ângulos de Euler, como veremos. Esses ângulos podem ser descritos por rotações em planos bi-dimensionais, de modo que o novo módulo de suavidade pode ser definido através de uma coleção de diferenças de duas dimensões, que são bem compreendidas e podem ser facilmente calculadas. Na referência (DAI; XU, 2010), pode-se encontrar exemplos de funções que demonstram o que aqui foi comentado.

Consideraremos rotações de funções definidas em $\mathbb{R}^{d+1}$, definidas por

$$T_Q(f)(x) := f(Q(x)), \quad Q \in SO(d+1),$$

onde $SO(d+1)$ denota o grupo de rotações em $\mathbb{R}^{d+1}$, ou o grupo de matrizes ortogonais de determinante 1 em $\mathbb{R}^{d+1}$. Para $t > 0$, definamos

$$O_t := \left\{ Q \in SO(d+1) : \max_{x \in S^d} \text{dist}(x, Q(x)) \leq t \right\}$$

onde $\text{dist}(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$ é a distância geodésica em S^d .

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $f \in L^p(S^d)$ para $1 \leq p < \infty$ e $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$, definimos o módulo de suavidade via rotações da seguinte maneira:

$$\tilde{\omega}_r(f, t)_p := \sup_{Q \in O_t} \{ \|\Delta_Q^r(f)\|_p \}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (1.6)$$

onde $\Delta_Q^r := (T_Q - I)^r$.

Este segundo módulo de suavidade goza das mesmas propriedades das do módulo de suavidade definido em (1.1) (veja (DITZIAN, 1999) para maiores detalhes). E, além disso, se relaciona com o módulo de suavidade definido em (1.1) da seguinte maneira

$$\tilde{\omega}_r(f, t)_p \asymp \omega_{2r}^*(f, t)_p \quad 1 < p < \infty,$$

porém a equivalência falha para $p = 1$ e $p = \infty$ ((DITZIAN, 2010)).

1.1.1 Ângulos de Euler

A partir daqui nos restringiremos à uma subclasse de rotações definida via os chamados ângulos de Euler. Para sua apresentação formal fixaremos algumas notações.

Seja $e_1, \dots, e_{d+1}$ a base canônica em $\mathbb{R}^{d+1}$. Para $1 \leq i \neq j \leq d+1$ e $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $Q_{i,j,\cdot}$ a rotação de ângulo θ no (x_i, x_j) -plano, orientada de tal forma que a rotação do vetor e_i ao e_j seja assumida positiva, ou seja, no sentido anti-horário. Vejamos um exemplo de uma rotação como a definida aqui.

Exemplo 1. A ação de rotação $Q_{1,2,\theta} \in SO(d+1)$, $d \geq 1$, é dada por:

$$Q_{1,2,\theta}(x_1, \dots, x_{d+1}) = (x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta), x_3, \dots, x_{d+1}),$$

onde $(x_1, x_2) = s(\cos(\phi), \sin(\phi))$, $s \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

Desta maneira,

$$Q_{1,2,\theta}(x_1, \dots, x_{d+1}) = (s \cos(\phi + \theta), s \sin(\phi + \theta), x_3, \dots, x_{d+1}), \quad (1.7)$$

com $(x_1, x_2) = s(\cos(\phi), \sin(\phi))$, $s \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

Toda rotação $Q \in SO(d+1)$ pode ser representada por uma composição de rotações da forma:

$$Q = Q_d Q_{d-1} \cdots Q_1, \quad (1.8)$$

onde

$$Q_k = Q_{1,2,\theta_1^k} Q_{2,3,\theta_2^k} \cdots Q_{k,k+1,\theta_k^k}, \quad k = 1, 2, \dots, d,$$

para determinados $\theta_1^k \in [0, 2\pi)$ e $\theta_2^k, \theta_3^k, \dots, \theta_k^k \in [0, \pi)$. A representação (1.8) é única para quase todos elementos Q de $SO(d+1)$, veja (VILENKIN, 1968) (as exceções são os casos quando um dos ângulos θ_j^k , $2 \leq k \leq d-1$ é zero ou π).

Os números, θ_j^k , $j = 1, 2, \dots, k$ e $k = 1, 2, \dots, d$ são chamados *ângulos de Euler da rotação Q* . Existe um total de $d(d+1)/2$ ângulos de Euler, quantidade esta que coincide com a dimensão de $SO(d+1)$.

Dois pontos sobre a esfera S^d , semelhantes em determinado sentido, estão relacionados por rotações em termos de ângulos de Euler como o seguinte lema aponta.

Lema 1. Sejam $i, j \in \{1, 2, \dots, d+1\}$ distintos. Se $x, y \in S^d$ são pontos que diferem apenas na i -ésima e j -ésima coordenadas, então, $y = Q_{i,j,\theta}(x)$, onde o ângulo θ satisfaz:

$$\cos(\theta) = \frac{x_i y_i + x_j y_j}{s^2} \quad \text{e} \quad \theta \asymp \frac{\|x - y\|}{s} \quad \text{com} \quad s = \sqrt{x_i^2 + x_j^2},$$

onde $x_k = \langle x, e_k \rangle$ e $y_k = \langle y, e_k \rangle$, $k = i, j$.

Demonstração. Nas condições do lema como x e y diferem exatamente em duas coordenadas, então eles diferem por uma rotação bi-dimensional positiva, ou seja, $y = Q_{i,j,\theta}(x)$.

Como $x_i^2 + x_j^2 = y_i^2 + y_j^2$, sendo θ o ângulo da rotação $Q_{i,j,\theta}$ temos

$$\cos(\theta) = \frac{x_i y_i + x_j y_j}{s^2}.$$

Adicionalmente, a relação $\theta^2 \asymp 4\text{sen}^2(\theta/2)$, $\theta \in [0, \pi]$ é válida e

$$\begin{aligned} 4\text{sen}^2(\theta/2) &= 2(1 - \cos(\theta)) = 2 \left(1 - \frac{x_i y_i + x_j y_j}{s^2} \right) \\ &= \frac{\|(x_i, x_j) - (y_i, y_j)\|^2}{s^2} \\ &= \frac{\|x - y\|^2}{s^2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\theta \asymp \frac{\|x - y\|}{s}$. □

1.1.2 Módulo de suavidade dado por rotações por ângulos de Euler

Para as rotações $Q_{i,j,\theta}$ de ângulos de Euler, escreveremos:

$$\Delta_{i,j,\theta}^r := \Delta_{Q_{i,j,\theta}}^r, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, d+1\}, \quad i \neq j,$$

e não é difícil ver que $Q_{i,j,\theta} = Q_{j,i,-\theta}$, o que implica

$$\Delta_{i,j,\theta}^r = \Delta_{j,i,-\theta}^r.$$

Seja $\overrightarrow{\Delta}_\theta^r$ o r -ésimo operador diferença agindo em uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido iteradamente por

$$\overrightarrow{\Delta}_\theta(f)(t) := (T_\theta - I)(f) = f(t + \theta) - f(t),$$

ou seja, $\overrightarrow{\Delta}_\theta^r := \overrightarrow{\Delta}_\theta^{r-1} \overrightarrow{\Delta}_\theta$. Podemos escrevê-lo da seguinte maneira

$$\overrightarrow{\Delta}_\theta^r(f)(t) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} f(t + \theta j).$$

Da Equação (1.7), observamos que $\Delta_{i,j,\theta}^r$ pode se expressar pelo r -ésimo operador diferença. E aqui por abuso de notação escrevemos $\overrightarrow{\Delta}_\theta(f)$ para uma função de mais de uma variável e isto significa a ação do operador diferença, que atua na variável da função em questão, será sobre cada uma de suas variáveis. Vejamos um exemplo, o caso geral pode ser provado de maneira análoga.

Exemplo 2. Se tomarmos $(i, j) = (1, 2)$, então:

$$\Delta_{1,2,\theta}^r(f)(x) = \overrightarrow{\Delta}_\theta^r(f)(x_1 \cos(\cdot) - x_2 \sin(\cdot), x_1 \sin(\cdot) + x_2 \cos(\cdot), x_3, \dots, x_{d+1})$$

onde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\overrightarrow{\Delta}_\theta^r$ atua na variável $(\cdot)$, e é avaliado em $t = 0$.

De fato, da fórmula (1.7) temos

$$\begin{aligned} T_{Q_{1,2,\theta}}(f)(x) &= f(x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta), x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta), x_3, \dots, x_{d+1}) \\ &= T_\theta((f(x_1 \cos(\cdot) - x_2 \sin(\cdot), x_1 \sin(\cdot) + x_2 \cos(\cdot), x_3, \dots, x_{d+1}))) \end{aligned}$$

assim, $(T_{Q_{1,2,\theta}} - I)(f)(x)$ é igual a

$$(T_\theta - I)(f(x_1 \cos(\cdot) - x_2 \sin(\cdot), x_1 \sin(\cdot) + x_2 \cos(\cdot), x_3, \dots, x_{d+1}))$$

e portanto,

$$\Delta_{1,2,\theta}^r(f)(x) = \overrightarrow{\Delta}_\theta^r(f)(x_1 \cos(\cdot) - x_2 \sin(\cdot), x_1 \sin(\cdot) + x_2 \cos(\cdot), x_3, \dots, x_{d+1}).$$

O seguinte módulo de suavidade aparece definido, e explorado, em (DAI; XU, 2010), nossa principal referência neste capítulo a partir daqui. Como comentado no início desta seção este módulo de suavidade é descrito em termos de ângulos de Euler que podem ser vistos como rotações em planos bi-dimensionais, de modo que pode ser definido através de uma coleção de diferenças em duas dimensões. Artificio este que nos permite uma boa compreensão do mesmo e pode ser facilmente calculado. Ainda, a referência (DAI; XU, 2010), apresenta exemplos, para determinadas funções, de onde a dificuldade do cálculo dos módulo de suavidade definidos em (1.1) e em (1.6) fica clara, enquanto o a ser apresentado é calculado facilmente.

Definição 1. Sejam r um número natural, $t > 0$ e $f \in L^p(S^d)$, para $1 \leq p < \infty$ ou $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$. Definimos

$$\omega_r(f, t)_p := \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \left\{ \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \right\}.$$

Para $r = 1$ simplesmente escrevemos $\omega(f, t)_p = \omega_1(f, t)_p$.

Este módulo de suavidade se relaciona com o definido em (1.6) da seguinte maneira.

Proposição 1. Sejam r um número natural e $f \in L^p(S^d)$, $1 \leq p < \infty$ ou $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$. Vale a relação:

$$\omega_r(f, t)_p \leq \tilde{\omega}_r(f, t)_p, \quad t > 0.$$

Demonstração. A prova se baseia em mostrar que $Q_{i,j,\theta} \in O_t$, com $\theta \in (0, t]$ e $1 \leq i < j \leq d+1$. Para tanto a verificação da desigualdade $d(Q_{i,j,\theta}(x), x) \leq \theta$, $x \in S^d$ e $\theta \in (0, t]$ se faz necessária. Nestas circunstâncias,

$$\langle Q_{i,j,\theta}(x), x \rangle = (x_i^2 + x_j^2) \cos(\theta) + \sum_{k \neq i,j} x_k^2.$$

Um simples cálculo nos garante a sequência de igualdades abaixo

$$\begin{aligned} \langle Q_{i,j,\theta}(x), x \rangle &= \left(x_i^2 + x_j^2 + \sum_{k \neq i,j} x_k^2 - \sum_{k \neq i,j} x_k^2 \right) \cos(\theta) + \sum_{k \neq i,j} x_k^2 \\ &= \left(1 - \sum_{k \neq i,j} x_k^2 \right) \cos(\theta) + \sum_{k \neq i,j} x_k^2 \\ &= \cos(\theta) + \sum_{k \neq i,j} x_k^2 (1 - \cos(\theta)) \\ &\geq \cos(\theta), \end{aligned}$$

e, sendo $\cos(d(x, y)) = \langle x, y \rangle$, temos

$$d(Q_{i,j,\theta}(x), x) = \arccos(\langle Q_{i,j,\theta}(x), x \rangle) \leq \theta.$$

Assim,

$$\|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq \sup_{Q \in O_t} \{\|\Delta_Q^r(f)\|_p\} = \tilde{\omega}_r(f, t)_p,$$

e, consequentemente,

$$\max_{1 \leq i < j \leq d+1} \{\|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p\} \leq \tilde{\omega}_r(f, t)_p.$$

De onde segue a desigualdade:

$$\omega_r(f, t)_p \leq \tilde{\omega}_r(f, t)_p,$$

o que finaliza a prova. □

Observação 1. Cada rotação $Q \in SO(d+1)$ corresponde a um operador $L(Q)$ no espaço $L^2(S^d)$, definido por $L(Q)(f)(x) := f(Q^{-1}(x))$ para $x \in S^d$. Em termos de ângulos de Euler, o operador infinitesimal de $L(Q_{i,j,\theta})$ tem a forma:

$$D_{i,j} := \frac{\partial}{\partial \theta} [L(Q_{i,j,\theta})]_{|\theta=0} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i < j \leq d+1.$$

De fato,

$$L(Q_{i,j,\theta})(f)(x) = f(x_1, \dots, x_i \cos(\theta) + x_j \sin(\theta), \dots, x_j \cos(\theta) - x_i \sin(\theta), \dots, x_{d+1}),$$

implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} [L(Q_{i,j,\theta})]_{|\theta=0} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta} (x_i \cos(\theta) + x_j \sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta} (x_j \cos(\theta) - x_i \sin(\theta))_{|\theta=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j - \frac{\partial f}{\partial x_j} x_i. \end{aligned}$$

1.1.3 Propriedades do módulo de suavidade

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades do novo módulo de suavidade da Definição 1. Para este fim, precisaremos dos lemas técnicos a seguir, dos quais omitimos a demonstração do primeiro a qual pode ser encontrada em (DUNKL; XU, 2014, Lemas 4.2.3 e 4.3.2, respectivamente).

Lema 2. Sejam d e m inteiros positivos. Se $m \geq 2$, então

$$\int_{S^{d+m}} f(y) d\sigma_{d+m} = \int_{\mathbb{B}^d} (1 - \|x\|^2)^{\frac{m-2}{2}} \left[\int_{S^m} f\left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2} \xi\right) d\sigma_m(\xi) \right] dx$$

enquanto que se $m = 1$, vale o seguinte

$$\int_{S^{d+1}} f(y) d\sigma_{d+1} = \int_{\mathbb{B}^d} \left[f\left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right) + f\left(x, -\sqrt{1 - \|x\|^2}\right) \right] \frac{dx}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}.$$

No lema acima $\mathbb{B}^d$ é a bola unitária centrada na origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{d+1}$ e dx é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{d+1}$.

O seguinte resultado apresenta relações e propriedades envolvendo a norma do operador diferença em termos de ângulos de Euler.

Lema 3. Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $f \in L^p(S^d)$ com $1 \leq p < \infty$, ou $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$.

(i) Para qualquer $\lambda > 0$, $t \in (0, 2\pi)$ e $1 \leq i < j \leq d+1$, vale a desigualdade:

$$\sup_{|\theta| \leq \lambda t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq (\lambda + 1)^r \sup_{|\theta| \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p.$$

(ii) Para $1 \leq i \neq j \leq d+1$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$, valem:

$$\|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq 2^r \|f\|_p \quad \text{e} \quad \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq c |\theta|^r \|D_{i,j}^r(f)\|_p.$$

(iii) Se $f \in \Pi_n(S^d)$ e $1 \leq i < j \leq d+1$, então

$$\|\Delta_{i,j,n^{-1}}^r(f)\|_p \asymp n^{-r} \|D_{i,j}^r(f)\|_p.$$

(iv) Para $1 \leq i < j \leq d+1$ e $t \in (0, 2\pi)$, a seguinte equivalência é verdadeira

$$\sup_{|\theta| \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p^p \asymp \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p^p d\theta,$$

com $\|\cdot\|_p^p$ trocada por $\|\cdot\|_\infty$ quando $p = \infty$.

Demonstração. É suficiente considerarmos o caso $(i, j) = (1, 2)$ para a prova deste resultado. Para f nas condições do lema, definimos

$$g_{s,y}(\phi) := f(s \cos(\phi), s \sin(\phi), (1-s^2)^{1/2}y), \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad (1.9)$$

onde $y \in S^{d-2}$, $s \in [0, 1]$. Para mostrarmos (i) consideramos um inteiro positivo n e temos o seguinte:

$$\overrightarrow{\Delta_{n\theta}}^r(g)(t) = \sum_{v_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{v_r=0}^{n-1} \overrightarrow{\Delta_{\theta}}^r(g)(t + v_1\theta + \cdots + v_r\theta),$$

como consequência do Exemplo (2) vale a seguinte desigualdade

$$\sup_{|\theta| \leq nt} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq n^r \sup_{|\theta| \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p.$$

Assim,

$$\sup_{|\theta| \leq \lambda t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \leq (\lambda + 1)^r \sup_{|\theta| \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p.$$

Mostremos (ii). Do Lema 2, para $d > 2$, vale a igualdade

$$\int_{S^d} f(y) d\sigma_d(y) = \int_{\mathbb{B}^2} \int_{S^{d-2}} f(x_1, x_2, (1-\|x\|^2)^{1/2}y) d\sigma_{d-2}(y) (1-\|x\|^2)^{\frac{d-4}{2}} dx.$$

A partir dela fazendo a mudança de variáveis $(x_1, x_2) = s(\cos(\phi), \sin(\phi))$, obtemos

$$\int_{S^d} f(y) d\sigma_d(y) = \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \int_0^{2\pi} g_{s,y}(\phi) d\phi d\sigma_{d-2}(y) ds.$$

Usando o Exemplo 2, a igualdade acima e simples cálculos, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \|\Delta_{1,2,\theta}^r(f)\|_p^p &= \int_{S^d} |\Delta_{1,2,\theta}^r(f)(x)|^p d\sigma_d(x) \\ &= \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \int_0^{2\pi} |\overrightarrow{\Delta_{\theta}}^r(g_{s,y})(\phi)|^p d\phi d\sigma_{d-2}(y) ds \\ &= \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \|\overrightarrow{\Delta_{\theta}}^r(g_{s,y})\|_p^p d\sigma_{d-2}(y) ds. \end{aligned}$$

A última integral da igualdade acima, claramente, pode ser reescrita como

$$\int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \|(T_{\theta} - I)^r(g_{s,y})\|_p^p d\sigma_{d-2}(y) ds,$$

de onde segue o seguinte

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{1,2,\theta}^r(f)\|_p^p &\leq \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \|T_\theta - I\|_p^{rp} \|g_{s,y}\|_p^p d\sigma_{d-2}(y) ds \\
&\leq 2^{rp} \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \|g_{s,y}\|_p^p d\sigma_{d-2}(y) ds \\
&= 2^{rp} \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \int_0^{2\pi} |g_{s,y}(\phi)|^p d\phi d\sigma_{d-2}(y) ds \\
&= 2^{rp} \|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\Delta_{1,2,\theta}^r(f)\|_p \leq 2^r \|f\|_p$. Agora, observando que

$$(-1)^r D_{1,2}^r f(s \cos(\phi), s \sin(\phi), (1-s^2)^{\frac{1}{2}} y) = g_{s,y}^{(r)}(\phi) \quad (1.10)$$

e como $\|\vec{\Delta}_\theta^r(f)\|_p \leq |\theta|^r \|f^{(r)}\|_p$, por (DEVORE; LORENTZ, 1993, p.46), temos:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{1,2,\theta}^r(f)\|_p^p &= \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}} \int_{S^{d-2}} \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})(\phi)|^p d\phi d\sigma_{d-2}(y) ds \\
&= \|\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})\|_p^p \frac{\sigma(S^{d-2})}{d-2} \\
&\leq |\theta|^{rp} \|g_{s,y}^{(r)}\|_p^p \frac{\sigma(S^{d-2})}{d-2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Delta_{1,2,\theta}^r(f)\|_p \leq c |\theta|^r \|D_{1,2}^r(f)\|_p,$$

e assim fica provado (ii).

Para o item (iii) tomamos $f \in \Pi_n(S^d)$ e neste caso, via definição de $g_{s,y}$ dada pela fórmula (1.9), esta função é um polinômio trigonométrico de grau no máximo n na variável ϕ . De (STECKIN, 1948) garantimos que para um polinômio trigonométrico T_n de grau no máximo n , a equivalência abaixo é verdadeira:

$$\|T_n^{(r)}\|_p \asymp h^{-r} \|\vec{\Delta}_h^r(T_n)\|_p, \quad 0 < h \leq \pi n^{-1}.$$

Desta maneira, lembrando que $g_{s,y}(\phi)$ é um polinômio trigonométrico de grau no máximo n , obtemos

$$\|g_{s,y}^{(r)}(\phi)\|_p \asymp h^{-r} \|\vec{\Delta}_h^r(g_{s,y})\|_p, \quad 0 < h \leq \pi n^{-1}.$$

Não é difícil ver que $\|g_{s,y}^{(r)}(\phi)\|_p \asymp \|D_{i,j}^r(f)\|_p$, logo a equivalência acima se torna

$$\|D_{i,j}^r(f)\|_p \asymp h^{-r} \|\Delta_{i,j,h}^r(f)\|_p, \quad 0 < h \leq \pi n^{-1}$$

Portanto,

$$\|\Delta_{i,j,n^{-1}}^r(f)\|_p \asymp n^{-r} \|D_{i,j}^r(f)\|_p.$$

Finalmente o último item (iv) exige uma sequência de cálculos como segue. Observemos que

$$\begin{aligned}\omega_r(g_{s,y},t)_p &= \sup_{0 \leq \theta \leq t} \|\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})\|_p \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq t} \left(\int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Estima-se a última integral via o (PETRUSHEV; POPOV, 1987, Lema 7.2) que nos garante, $0 < t \leq 2\pi$, a existência uma constante c tal que

$$\sup_{0 \leq \theta \leq t} \left(\int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado, claramente

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi d\theta \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{0 \leq \theta \leq t} \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sup_{0 \leq \theta \leq t} \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq t} \left(\int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Concluimos então que a seguinte equivalência é válida

$$\sup_{0 \leq \theta \leq t} \left(\int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y}(\phi))|^p d\phi d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma vez que, pela Observação 2 é possível por meio de simples cálculos obter a igualdade $\|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p^p = C \|\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})\|_p^p$, para alguma constante C independente de t , temos:

$$\begin{aligned}\sup_{0 \leq \theta \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p^p &\asymp \sup_{0 \leq \theta \leq t} \|\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})\|_p^p \\ &\asymp \frac{1}{t} \int_0^t \|\vec{\Delta}_\theta^r(g_{s,y})\|_p^p d\theta \\ &\asymp \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p^p d\theta.\end{aligned}$$

O que finaliza a prova deste lema. □

A próxima proposição apresenta, efetivamente, propriedades do novo módulo de suavidade, que serão muito úteis na demonstração dos próximos resultados, em particular nos teoremas direto e inverso para este novo módulo de suavidade.

Proposição 2. O módulo de suavidade $\omega_r(f,t)_p$ da Definição 1, satisfaz:

$$(1) \text{ Para } s < r, \omega_r(f,t)_p \leq 2^{r-s} \omega_s(f,t)_p,$$

(2) Para $\lambda > 0$, $\omega_r(f, \lambda t)_p \leq (\lambda + 1)^r \omega_r(f, t)_p$,

(3) Para $0 < t < 1/2$,

$$\omega_r(f, t)_p \leq Ct^r \left\{ \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_{r+1}(f, u)_p^q}{u^{rq+1}} du + \|f\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \text{ onde } q = \begin{cases} p, & 0 < p \leq 2 \\ 2, & 2 \leq p < \infty \\ 1, & p = \infty \end{cases}$$

Demonstração. Em sua totalidade a demonstração destas propriedades se baseiam em cálculos e aqui demonstramos as propriedades (1) e (2), enquanto a (3) que é mais técnica omitimos. Contudo, ela pode ser encontrada em (DITZIAN, 1999, p. 194).

A demonstração da propriedade (1) segue diretamente da estimativa para a norma do operador $T_{i,j,\theta} - I$, como a seguir

$$\begin{aligned} \omega_r(f, t)_p &= \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \\ &= \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|(T_{i,j,\theta} - I)^r(f)\|_p \\ &= \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|(T_{i,j,\theta} - I)^{r-s} ((T_{i,j,\theta} - I)^s(f))\|_p \\ &\leq \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} 2^{r-s} \|(T_{i,j,\theta} - I)^s(f)\|_p \\ &= 2^{r-s} \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} 2^{r-s} \|\Delta_{i,j,\theta}^s(f)\|_p \\ &= 2^{r-s} \omega_s(f, t)_p, \end{aligned}$$

enquanto que a propriedade (2), segue da propriedade (i) do Lema 3 da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \omega_r(f, \lambda t)_p &= \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \sup_{|\theta| \leq \lambda t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \\ &\leq \max_{1 \leq i < j \leq d+1} (\lambda + 1)^r \sup_{|\theta| \leq t} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \\ &= (\lambda + 1)^r \sup_{|\theta| \leq t} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p \\ &= (\lambda + 1)^r \omega_r(f, t)_p. \end{aligned}$$

□

O próximo lema é importante para demonstrarmos os teoremas direto e inverso para nosso novo módulo de suavidade. Afim de demonstrar este resultado, observemos que a relação abaixo é válida

$$\|x - y\| \asymp \text{dist}(x, y), \quad x, y \in S^d, \quad (1.11)$$

onde, lembrando, $\text{dist}(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$. Tal equivalência é obtida diretamente através da desigualdade

$$\frac{2x}{\pi} \leq \text{sen}(x) \leq x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Lema 4. Seja $f \in C(S^d)$. Vale a desigualdade

$$|f(x) - f(y)| \leq c\omega(f, \text{dist}(x, y))_\infty, \quad x, y \in S^d,$$

onde c é uma constante que depende apenas da dimensão da esfera d .

Demonstração. Sem perda de generalidade assumimos $\text{dist}(x, y) \leq \delta_d := \frac{1}{2(d+1)^2}$, $x, y \in S^d$. De fato, caso isso não ocorra podemos escolher um inteiro m e pontos $x = z_0, z_1, \dots, z_m = y$ no grande círculo conectando x e y em S^d , tal que

$$\text{dist}(z_i, z_{i+1}) = \frac{\text{dist}(x, y)}{m} \leq \delta_d, i = 0, 1, \dots, m-1,$$

e usamos a desigualdade triangular no resultado obtido.

Como $\|x\| = 1$ e se $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$, então $|x_i| \geq \frac{1}{\sqrt{d+1}}$ para pelo menos um $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$. Podemos assumir sem perda de generalidade que, $x_{d+1} = \max_{1 \leq j \leq d+1} |x_j| \geq \frac{1}{\sqrt{d+1}}$, pois $\omega_r(f, t)_p$ independe da ordem da base canônica de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Para $1 \leq j \leq d-1$, seja $u'_j := (x_1, \dots, x_j, y_{j+1}, \dots, y_d)$ e $v_j := (1 - \|u'_j\|^2)^{1/2}$ onde, pela escolha de x_{d+1} e δ_d temos:

$$\begin{aligned} \|u'_j\|^2 &= x_1^2 + \dots + x_j^2 + y_{j+1}^2 + \dots + y_d^2 \\ &= x_1^2 + \dots + x_j^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_{d+1}^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_{d+1}^2 + y_{j+1}^2 + \dots + y_d^2 \\ &= 1 + (y_{j+1}^2 - x_{j+1}^2) + \dots + (y_d^2 - x_d^2) - x_{d+1}^2 \\ &= 1 + (y_{j+1} - x_{j+1})(y_{j+1} + x_{j+1}) + \dots + (y_d - x_d)(y_d + x_d) - x_{d+1}^2. \end{aligned}$$

Como $(x_i + y_i) \leq 2$, $i = j+1, j+2, \dots, d$, obtemos

$$\|u'_j\|^2 \leq 1 + 2[(y_{j+1} - x_{j+1}) + \dots + (y_d - x_d)] - x_{d+1}^2.$$

Agora, como $(y_{i+1} - x_{i+1}) \leq \|x - y\|$, $i = j+1, j+2, \dots, d$, pela equivalência da fórmula (1.11) temos

$$\begin{aligned} \|u'_j\|^2 &\leq 1 + 2(d-j-1)d(x, y) - \frac{1}{d+1} \\ &\leq 1 + \frac{(d-2)}{(d+1)^2} - \frac{1}{d+1} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Definimos então, $u_0 = y$, $u_j = (u'_j, v_j) \in S^d$ para $1 \leq j \leq d-1$ e $u_d = x$. Pela definição u_j e u_{j-1} diferem exatamente nos j -ésimo e $(d+1)$ -ésimo elementos. Assim, de acordo com o Lema 1, podemos escrever, $u_{j-1} = \mathcal{Q}_{j, (d+1), \theta_j}(u_j)$, onde o ângulo de Euler θ_j satisfaz:

$$\theta_j \asymp \frac{\|u_{j-1} - u_j\|}{s_j}, \quad \text{com } s_j^2 = x_j^2 + v_j^2.$$

Da penúltima desigualdade acima, segue que

$$s_j^2 \geq v_j^2 = 1 - \|u'_j\|^2 \geq \frac{3}{(d+1)^2}.$$

Logo, $s_j^{-1} \leq c$, onde c é uma constante que depende somente da dimensão d da esfera. E assim, a estimativa $v_j^2 \geq 3/(d+1)^2$, implica

$$\begin{aligned} \|u_j - u_{j-1}\|^2 &= |x_j - y_j|^2 + |v_j - v_{j-1}|^2 \\ &= |x_j - y_j|^2 + \frac{(x_j^2 - y_j^2)^2}{(v_{j+1} + v_j)^2} \\ &\leq \left(1 + \frac{(d+1)^2}{3}\right) |x_j - y_j|^2 \\ &\sim d(x, y)^2. \end{aligned}$$

O desenvolvimento anterior nos permite concluir que $t_j \sim d(x, y)$. E portanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{j=1}^{d-1} |f(Q_{j,d,t_j}(u_j)) - f(u_j)| \\ &\leq (d-1) \omega(f, cd(x, y))_\infty \\ &\leq c \omega(f, d(x, y))_\infty. \end{aligned}$$

O que demonstra o resultado. □

APROXIMAÇÃO NA ESFERA UNITÁRIA

Neste capítulo estabeleceremos os teoremas inverso e direto para nosso novo módulo de suavidade e a melhor aproximação definida pela fórmula (1.3). Mostraremos também que o novo módulo de suavidade é equivalente à um K-funcional que será definido ao longo desta seção. Para estes fins apresentaremos, inicialmente, alguns resultados que auxiliarão nossas demonstrações.

É bem conhecido que o núcleo de reprodução do espaço $\mathcal{H}_n^d$, dos harmônicos esféricos de grau n em $d + 1$ variáveis, em $L^2(S^d)$ é dado por:

$$Z_{n,d}(x, y) := \frac{n + \lambda}{\lambda} C_n^\lambda(\langle x, y \rangle), \quad \lambda = \frac{d - 1}{2}. \quad (2.1)$$

Detalhes sobre os núcleos de reprodução, que não serão apresentados aqui para que não perdamos o foco, podem ser encontrados em (ARONSZAJN, 1950).

Seja $\eta \in C^\infty([0, \infty))$ tal que $\eta(x) = 1$ se $x \in [0, 1]$ e $\eta(x) = 0$ se $x \geq 2$. Definimos o seguinte operador em $L^p(S^d)$

$$V_n(f)(x) = \int_{S^d} f(y) K_n(\langle x, y \rangle) d\sigma_d(y), \quad x \in S^d, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

onde

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \eta(k/n) \frac{k + \lambda}{\lambda} C_k^\lambda(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (2.3)$$

A seguir apresentamos um lema que traz propriedades sobre o operador V_n definido e uma relação dele com a quantidade melhor aproximação definida pela fórmula (1.3).

Lema 5. Seja $f \in L^p(S^d)$ para $1 \leq p < \infty$ ou $f \in C(S^d)$ para $p = \infty$. Valem as seguintes propriedades

- (i) $V_n(f) \in \Pi_{2n}(S^d)$ e $V_n(f) = f$ para $f \in \Pi_n(S^d)$.

(ii) Para $n \in \mathbb{N}$, $\|V_n(f)\|_p \leq c\|f\|_p$.

(iii) Para $n \in \mathbb{N}$, $\|f - V_n(f)\|_p \leq cE_n(f)_p$.

Demonstração. A demonstração de (ii) pode ser vista em (RUSTAMOV, 1993, Lema 3.1) e faz uso de técnicas de multiplicadores que fogem do escopo atual, mas que aparecerão posteriormente. Desta maneira, mostraremos (i) e (iii), respectivamente.

Para a demonstração do item (i), e nas condições do lema, observamos que das fórmulas (2.2) e (2.3), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} V_n(f)(x) &= \int_{S^d} \sum_{k=0}^{2n} \eta\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+\lambda}{\lambda} C_k^\lambda(\langle x, y \rangle) f(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \eta\left(\frac{k}{n}\right) \int_{S^d} \frac{k+\lambda}{\lambda} C_k^\lambda(\langle x, y \rangle) f(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \eta\left(\frac{k}{n}\right) \mathcal{Y}_k(f)(x). \end{aligned}$$

De onde segue que $V_n(f) \in \Pi_{2n}(S^d)$.

Agora, se $f \in \Pi_n(S^d)$, então para $k > n$ $\mathcal{Y}_k(f) = 0$ e $\eta(k/n) = 1$, para $0 \leq k \leq n$. Assim, $V_n(f) = \sum_{k=0}^n \mathcal{Y}_k(f) = f$, o que finaliza a prova.

Para o terceiro item, seja $T \in \Pi_n(S^d)$ tal que $\|f - T\|_p \leq 2E_n(f)_p$. Pelas propriedades (i) e (ii) deste lema temos o seguinte

$$\begin{aligned} \|f - V_n(f)\|_p &= \|f - T - V_n(f - T)\|_p \leq \|f - T\|_p + c\|f - T\|_p \\ &\leq 2(1 + c)E_n(f)_p. \end{aligned}$$

O que completa a prova. □

De (DAI; DITZIAN; HUANG, 2010, Lema 3.3) sabemos que para qualquer inteiro positivo ℓ , $K_n(t)$ satisfaz:

$$|K_n(\cos(\theta))| \leq c_\ell n^{d-1} (1 + n\theta)^{-\ell} =: G_n(\theta), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2.4)$$

A partir desta observação enunciamos o seguinte lema técnico que será de extrema utilidade na demonstração dos teoremas direto e inverso desejados nesta seção.

Lema 6. Suponha que $f \in L^p(S^d)$ para $1 \leq p < \infty$, e $G_n(t)$ dado por (2.4) com $\ell > p + d + 1$. Então,

$$\int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} |f(x) - f(y)|^p G_n(d(x, y)) d\sigma_{d-1}(x) d\sigma_{d-1}(y) \leq c\omega(f, n^{-1})_p^p.$$

Aqui apresentamos apenas a ideia da demonstração que pode ser encontrada integralmente em (DAI; XU, 2010, p.1246).

A ideia básica por trás da demonstração se baseia em definirmos

$$E_j^+ := \{x \in S^d; x_j \geq \frac{1}{\sqrt{d+1}}\} \text{ e } E_j^- := \{x \in S^d; x_j \leq -\frac{1}{\sqrt{d+1}}\}$$

para $1 \leq j \leq d+1$, assim, escrevermos

$$S^d = \bigcup_{j=1}^{d+1} (E_j^+ \cup E_j^-).$$

Para $0 < \delta < \pi$ e $x \in S^d$, seja $c(x, \delta) := \{y \in S^d; d(x, y) \leq \delta\}$. A conclusão da prova segue de cálculos de maneira que é suficiente mostrar que as seguintes relações são verdadeiras:

$$A := \int_{E_{d+1}^+} \int_{c(x, \delta)} |f(x) - f(y)|^p |G_n(d(x, y))| d\sigma_d(x) d\sigma_d(y) \sim \omega(f, n^{-1})_p^p$$

e

$$B := \int_{E_{d+1}^+} \int_{S^d \setminus c(x, \delta)} |f(x) - f(y)|^p |G_n(d(x, y))| d\sigma_d(x) d\sigma_d(y) \sim \omega(f, n^{-1})_p^p.$$

Apresentamos, agora, mais uma propriedade do operador V_n definido previamente, a de comutar com o operador $\Delta_{i,j,t}^r$.

Lema 7. Para $f \in L^p(S^d)$, $1 \leq p < \infty$, $f \in C(S^d)$, $p = \infty$ e $1 \leq i \neq j \leq d+1$ vale a igualdade

$$\Delta_{i,j,t}^r(V_n(f)) = V_n(\Delta_{i,j,t}^r(f)).$$

Em particular, para $t > 0$ vale $\omega_r(f - V_n(f), t) \leq c\omega_r(f, t)_p$.

Demonstração. Lembrando da ação do operador translação $T_Q(f(x)) = f(Q(x))$ para $Q \in SO(d)$, pela definição de $V_n(f)$, temos

$$\begin{aligned} T_Q(V_n(f))(x) &= \int_{S^d} f(y) K_n(\langle Q(x), y \rangle) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^d} f(y) K_n(\langle x, Q^{-1}(y) \rangle) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^d} f(Q(y)) K_n(\langle x, y \rangle) d\sigma(y) \\ &= V_n(T_Q(f))(x). \end{aligned}$$

Como $\Delta_{i,j,t}^r = (I - T_{Q_{i,j,t}})^r$ temos:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j,t}^r(V_n) &= (I - T_{Q_{i,j,t}})^r(V_n) = (I - T_{Q_{i,j,t}})^{r-1}(V_n - V_n(T_{Q_{i,j,t}})) \\ &= (I - T_{Q_{i,j,t}})^{r-1}(V_n(I - T_{Q_{i,j,t}})). \end{aligned}$$

Indutivamente, obtemos $\Delta_{i,j,t}^r(V_n) = V_n(I - T_{Q_{i,j,t}})^r = V_n(\Delta_{i,j,t}^r)$. Assim, fica demonstrado a primeira parte do resultado.

Para segunda afirmação, se $t > 0$, então a partir do item (2) do Lema 5 temos:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,t}^r(f - V_n(f))\|_p &= \|\Delta_{i,j,t}^r(f) - V_n(\Delta_{i,j,t}^r(f))\|_p \\ &\leq \|\Delta_{i,j,t}^r(f)\|_p + \|V_n(\Delta_{i,j,t}^r(f))\|_p \\ &\leq (1+c)\|\Delta_{i,j,t}^r(f)\|_p. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\omega_r(f - V_n(f), t)_p \leq c\omega_r(f, t)_p.$$

□

2.1 Teoremas direto e inverso para o novo módulo de suavidade

Com os resultados obtidos até aqui, apresentamos os teoremas direto e inverso para o novo módulo de suavidade, objetivo principal desta seção e que está resguardada somente para este fim.

Teorema 1. Para $f \in L^p(S^d)$ se $1 \leq p < \infty$ e $f \in C(S^{d-1})$ se $p = \infty$, temos:

$$E_n(f)_p \leq c\omega_r(f, n^{-1})_p, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2.5)$$

Por outro lado,

$$\omega_r(f, n^{-1})_p \leq cn^{-r} \sum_{k=0}^n (k+1)^{r-1} E_k(f)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (2.6)$$

onde c é uma constante que independe de n .

Demonstração. Nesta demonstração, utilizaremos a notação $\lfloor \cdot \rfloor$ para designar a função maior inteiro. Observamos que para $r = 1$ e $1 \leq p < \infty$, via o Lema 5, seguida da desigualdade de Hölder, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \|f - V_{\lfloor n/2 \rfloor}(f)\|_p = \left(\int_{S^d} |f(x) - V_{\lfloor n/2 \rfloor}(f)(x)|^p d\sigma_d(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{S^d} \left| f(x) - \int_{S^d} f(y) K_{\lfloor n/2 \rfloor}(\langle x, y \rangle) d\sigma(y) \right|^p d\sigma_d(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\sim \left(\int_{S^d} \int_{S^d} |f(x) - f(y)|^p K_{\lfloor n/2 \rfloor}(\langle x, y \rangle) d\sigma(x) d\sigma_d(y) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Agora, pela fórmula (2.4) aplicada à última integral acima seguido do Lema 6, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \left(\int_{S^d} \int_{S^d} |f(x) - f(y)|^p G_{\lfloor n/2 \rfloor}(d(x, y)) d\sigma(x) d\sigma_d(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\omega(f, \lfloor n/2 \rfloor^{-1})_p. \end{aligned}$$

E, assim,

$$E_n(f) \sim \omega(f, n^{-1})_p.$$

Agora, ainda para $r = 1$ e para $p = \infty$, usamos o Lema 4 para obter

$$\begin{aligned} E_n(f)_\infty &\leq \|f - V_{[n/2]}(f)\| \\ &\leq \int_{S^d} |f(x) - f(y)| |K_{[n/2]}(\langle x, y \rangle)| d\sigma(y) \\ &\sim \int_{S^d} \omega(f, d(x, y))_\infty K_{[n/2]}(\langle x, y \rangle) d\sigma(y) \\ &\sim \omega(f, n^{-1})_\infty \int_{S^d} (1 + nd(x, y)) |K_{[n/2]}(\langle x, y \rangle)| d\sigma(y) \\ &\sim \omega(f, n^{-1})_\infty. \end{aligned}$$

Feita as demonstrações para $r = 1$, o caso geral segue por processo de indução finita como a seguir.

Suponha verdadeira a desigualdade apresentada na fórmula (2.5) válido para algum $r \geq 1$. Definimos $g := f - V_{[n/2]}(f)$, e observamos que como

$$g - V_{[n/2]}(g) = f - V_{[n/2]}(f) - V_{[n/2]}(f) + V_{[n/2]}(V_{[n/2]}(f)),$$

e este último elemento da igualdade coincide com $f - V_{[n/2]}(f)$, podemos escrever, também $g = g - V_{[n/2]}(g)$.

Via a observação anterior e usando a desigualdade (2.5), pela suposição de ser válida para r , obtemos

$$\begin{aligned} \|f - V_{[n/2]}(f)\|_p &= \|g\|_p = \|g - V_{[n/2]}(g)\|_p \leq E_{[n/2]}(g)_p \\ &\leq c\omega_r(g, [n/2]^{-1}) \leq c\omega_r(g, n^{-1})_p \end{aligned}$$

Das propriedades (2) e (3) apresentadas pelo módulo de suavidade na Proposição 2 e cálculos, segue que

$$\begin{aligned} \omega_r(g, t)_p &\leq Ct^r \left\{ \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_{r+1}(g, u)_p^q}{u^{rq+1}} du + \|g\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= Ct^r \left\{ \int_t^{2^m t} \frac{\omega_{r+1}(g, u)_p^q}{u^{rq+1}} du + \int_{2^m t}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_{r+1}(g, u)_p^q}{u^{rq+1}} du + \|g\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq Ct^r \left\{ \omega_{r+1}(g, 2^m t)_p^q \int_t^{2^m t} u^{-rq-1} du + \|g\|_p^q \left(1 + 2^{rq+q} \int_{2^m t}^{\frac{1}{2}} u^{-rq-1} du \right) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ c_1(m, r) \omega_{r+1}(g, t)_p^q + t^{rq} \|g\|_p^q (1 + 2^{rq+q} (2^{rq} - (2^m t)^{-rq})) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= C \left\{ c_1(m, r) \omega_{r+1}(g, t)_p^q + \|g\|_p^q (2^{-rq} + 2^{rq+q} (1 - 2^{-mrq})) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= C \left\{ c_1(m, r) \omega_{r+1}(g, t)_p^q + c_2(m, r) \|g\|_p^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_1(m, r) \omega_{r+1}(g, t)_p + C_2(m, r) \|g\|_p, \end{aligned}$$

para constantes $c_1(m, r)$, $c_2(m, r)$, $C_1(m, r)$ e $C_2(m, r)$.

Lembrando que $\|g\|_p \leq c\omega_r(g, n^{-1})_p$ as contas acima nos garantem que

$$\|g\|_p \leq C_1(m, r)\omega_{r+1}(g, n^{-1}) + C_2(m, r)\|g\|_p,$$

ou seja,

$$(1 - C_2(m, r))\|g\|_p \leq C_1(m, r)\omega_{r+1}(g, n^{-1})_p,$$

o que implica

$$\|g\|_p \leq \frac{C_1(m, r)}{1 - C_2(m, r)}\omega_{r+1}(g, n^{-1})_p \leq \frac{C_1(m, r)}{1 - C_2(m, r)}\omega_{r+1}(f, n^{-1})_p.$$

Portanto,

$$E_n(f)_p \sim \omega_{r+1}(f, n^{-1})_p.$$

A prova da desigualdade (2.6) segue da seguinte maneira. Observamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,n-1}^r(f)\|_p &\leq \|\Delta_{i,j,n-1}^r(f - V_{2^{m+1}}(f))\|_p + \|\Delta_{i,j,n-1}^r(V_{2^{m+1}}(f))\|_p \\ &\leq \|\Delta_{i,j,n-1}^r\|_p \|f - V_{2^{m+1}}(f)\|_p + \|\Delta_{i,j,n-1}^r(V_{2^{m+1}}(f))\|_p \\ &\leq 2^r c E_{2^{m+1}}(f)_p + \|\Delta_{i,j,n-1}^r(V_{2^{m+1}}(f))\|_p, \end{aligned}$$

para alguma constante c que independe de n .

O segundo termo da desigualdade anterior pode ser limitado como a seguir

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,n-1}^r(V_{2^{m+1}}(f))\|_p &\leq cn^{-r} \|D_{i,j}^r(V_{2^{m+1}}(f))\|_p \\ &\leq cn^{-r} \left\{ \|D_{i,j}^r(V_1(f)) - D_{i,j}^r(V_0(f))\|_p + \sum_{k=0}^m \|D_{i,j}^r(V_{2^{k+1}}(f)) - D_{i,j}^r(V_{2^k}(f))\|_p \right\} \\ &= cn^{-r} \left\{ \|D_{i,j}^r(V_1(f) - V_0(f))\|_p + \sum_{k=0}^m \|D_{i,j}^r(V_{2^{k+1}}(f) - V_{2^k}(f))\|_p \right\} \\ &\leq cn^{-r} \left\{ 2^r 2^r \|V_1(f) - V_0(f)\|_p + \sum_{k=0}^m (2 \cdot 2^{k+1})^r 2^r \|V_{2^{k+1}}(f) - V_{2^k}(f)\|_p \right\} \\ &\leq c4^r n^{-r} \left\{ cE_1(f)_p + cE_0(f)_p + \sum_{k=0}^m 2^{(k+1)r} (cE_{2^{k+1}}(f)_p + cE_{2^k}(f)_p) \right\} \\ &\leq 2c4^r n^{-r} \left\{ E_0(f)_p + \sum_{k=0}^m 2^{(k+1)r} E_{2^k}(f)_p \right\}. \end{aligned}$$

Em suma, temos

$$\|\Delta_{i,j,n-1}^r(f)\|_p \leq 2^r c E_{2^{m+1}}(f)_p + Cn^{-r} \left(E_0(f)_p + \sum_{k=0}^m 2^{(k+1)r} E_{2^k}(f)_p \right)$$

onde C é uma constante que independe de n .

Adicionalmente, para $k \geq 1$, vale a desigualdade

$$2^{(k+1)r} E_{2^k}(f)_p \leq 2^{2r} \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} j^{r-1} E_j(f)_p,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,n^{-1}}^r(f)\|_p &\leq cE_{2^{m+1}}(f)_p + Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + E_1(f)_p + \sum_{k=1}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_p \right\} \\ &= cE_{2^{m+1}}(f)_p + Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + 2E_1(f)_p + \sum_{k=2}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_p \right\} \\ &\leq cE_{2^{m+1}}(f)_p + Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + E_1(f)_p + \sum_{k=2}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_p \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, para n dado, tomamos m de tal forma que $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Nestas circunstâncias

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,n^{-1}}^r(f)\|_p &\leq cE_n(f)_p + Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + E_1(f)_p + \sum_{k=2}^n k^{r-1} E_k(f)_p \right\} \\ &\leq Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + \sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1} E_k(f)_p + (n^r + n^{r-1}) E_n(f)_p \right\} \\ &\leq Cn^{-r} \left\{ E_0(f)_p + \sum_{k=1}^n (k+1)^{r-1} E_k(f)_p \right\}. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos conduz à

$$\omega_r(f, n^{-1})_p \leq cn^{-r} \sum_{k=0}^n (k+1)^{r-1} E_k(f)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

O que finaliza a prova. □

Estabelecido os teoremas direto e inverso relacionados ao novo módulo de suavidade apresentado, temos uma interessante consequência, revelando equivalências no sentido assintótico da melhor aproximação e módulo de suavidade, respectivamente, de acordo com seus parâmetros.

Corolário 1. Para $0 < \alpha < r$ e $f \in L^p(S^d)$ se $1 \leq p < \infty$ e $f \in C(S^d)$ se $p = \infty$,

$$E_n(f)_p = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \quad \text{se, e somente se,} \quad \omega_r(f, t)_p = \mathcal{O}(t^\alpha).$$

2.2 Um outro K-funcional

Via a noção de diferenciabilidade definida na Observação 1, Seção 1 do Capítulo 1, definimos um segundo K-funcional. Denotaremos por $C^r(S^d)$ o espaço das funções r -vezes continuamente diferenciáveis sobre a esfera S^d .

Definição 2. Sejam r um número natural e $t \geq 0$,

$$K_r(f, t)_p := \inf_{g \in C^r(S^d)} \left\{ \|f - g\|_p + t^r \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(g)\|_p \right\}. \quad (2.7)$$

Abaixo mostramos a equivalência do novo módulo de suavidade com o K-funcional definido acima. Além de interessante, tal resultado será muito útil para estabelecermos relações do novo módulo de suavidade com os outros módulos de suavidade definidos em (1.1) e (1.6).

Teorema 2. Seja $r \in \mathbb{N}$ e seja $f \in L^p(S^d)$ se $1 \leq p < \infty$ e $f \in C(S^d)$ se $p = \infty$. Para $0 < t < 1$, vale a relação

$$\omega_r(f, t)_p \asymp K_r(f, t)_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Demonstração. Por (ii) do Lema 3 e pela desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f)\|_p &\leq \|\Delta_{i,j,\theta}^r(f - g)\|_p + \|\Delta_{i,j,\theta}^r(g)\|_p \\ &\asymp \|f - g\|_p + \theta^r \|D_{i,j}^r(g)\|_p. \end{aligned}$$

Assim, segue que $\omega_r(f, t)_p \asymp K_r(f, t)_p$.

Por outro lado, para $t > 0$ seja $n = \lfloor 1/t \rfloor$, então pelo Lema 5, Teorema 1 e item (iii) do Lema 3, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} K_r(f, t)_p &\leq \|f - V_n(f)\|_p + t^r \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(V_n(f))\|_p \\ &\asymp \omega_r(f, n^{-1})_p + t^r n^r \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|\Delta_{i,j,n^{-1}}^r(V_n(f))\|_p \\ &\asymp \omega_r(f, n^{-1})_p \\ &\asymp \omega_r(f, t)_p. \end{aligned}$$

□

Fechamos esta subseção com uma aplicação direta do teorema acima.

Corolário 2. Assumindo as hipóteses do teorema anterior, vale a relação

$$K_r(f, n^{-1})_p \asymp \|f - V_n(f)\|_p + n^{-r} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(V_n(f))\|_p.$$

2.3 Comparação com outros módulos de suavidade

Objetivando comparar os módulos de suavidade e, conseqüentemente dos respectivos K-funcionais, definidos até o momento precisamos de alguns resultados adicionais descritos a seguir. Adiantamos que será útil a equivalência abaixo para estes fins.

$$\max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(g)\|_p \asymp \|\mathcal{B}^r(g)\|_p.$$

O seguinte lema traz a propriedade de comutação envolvendo a derivada fracionária. A demonstração deste lema altamente técnico pode ser encontrada em (DAI; XU, 2010) e será omitida aqui.

Lema 8. Para $1 \leq i \neq j \leq d+1$ e $r \in \mathbb{R}$,

$$D_{i,j}(\mathcal{B})^r = (\mathcal{B})^r D_{i,j}.$$

O seguinte resultado será muito importante para obter as relações desejadas entre os módulos de suavidade.

Lema 9. Se $f \in \cup_{n=0}^{\infty} \Pi_n(S^d)$, então as seguintes relações valem

$$\max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}(f)\|_p \asymp \|\mathcal{B}^{1/2}(f)\|_p, \quad 1 < p < \infty. \quad (2.8)$$

e

$$\max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(f)\|_p \leq c \|\mathcal{B}^{r/2}(f)\|_p, \quad 1 < p < \infty, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Demonstração. De (DAI; DITZIAN; HUANG, 2010, p.183) temos a seguinte relação válida

$$\|\mathcal{B}^{1/2}(f)\|_p \asymp \|\text{grad}(f)\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

onde $\text{grad}(f)$ é definido por:

$$\text{grad}(f) := \nabla F|_{S^d}, \quad \text{com } F(x) := f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\},$$

e $\nabla F := (\partial_1 F, \dots, \partial_d F)$ e $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\|\text{grad}(f)\|_p = \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle^{1/2}$.

Desejamos relacionar $\|\text{grad}(f)\|_p$ com $\|D_{i,j}(f)\|_p$. Desta forma, observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right]_{\|x\|=1} = \partial_j(f) - x_j \sum_{i=1}^{d+1} x_i \partial_i(f) = - \sum_{\{i, 1 \leq i < j \leq d+1\}} x_i D_{i,j}(f).$$

A primeira igualdade da equação acima implica,

$$|D_{i,j}(f)| = |\langle x_i e_j - x_j e_i, \text{grad}(f) \rangle| \leq \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle^{1/2}$$

da qual segue imediatamente que $\|D_{i,j}(f)\|_p \leq \|\text{grad}(f)\|_p$.

Por outro lado, a segunda equação implica que $\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle$ coincide com

$$\sum_{j=1}^{d+1} \left(\sum_{i \neq j} x_i D_{i,j}(f) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{i \neq j} (D_{i,j}(f))^2 \leq (d+1)^2 \max_{1 \leq i < j \leq d+1} (D_{i,j}(f))^2.$$

Assim, temos:

$$\|D_{i,j}(f)\|_p \leq \|grad(f)\|_p \leq (d+1) \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}(f)\|_p,$$

o que prova a equivalência (2.8).

Além disso, pela comutatividade de $D_{i,j}$ e $\mathcal{B}^r$ no Lema 8, temos:

$$\|D_{i,j}^r(f)\|_p \leq c \|\mathcal{B}^{1/2}(D_{i,j}^{r-1})(f)\|_p = c \|D_{i,j}^{r-1} \mathcal{B}^{1/2}(f)\|_p.$$

E assim, a desigualdade (2.9) do Lema 9 segue por indução em r . $\square$

Do lema anterior temos a seguinte proposição:

Proposição 3. A decomposição $-\mathcal{B} = \sum_{1 \leq i < j \leq d+1} D_{i,j}^2$ implica imediatamente que:

$$\|\mathcal{B}(f)\|_p \leq \frac{d(d+1)}{2} \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^2(f)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

De (2.8) e (2.9) vemos que:

$$\|\mathcal{B}^{r/2}(f)\|_p \asymp \max_{1 \leq i < j \leq d+1} \|D_{i,j}^r(f)\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

acontece para $r = 1$ e $r = 2$.

Agora temos o necessário para estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 3. Seja $f \in L^p(S^d)$, $1 < p < \infty$. Para $r \in \mathbb{N}$ e $0 < t < 1$,

$$K_r(f, t)_p \leq c K_r^*(f, t)_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Além disso, para $r = 1$ ou $r = 2$,

$$K_r(f, t)_p \asymp K_r^*(f, t)_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Precisamos apenas provar a desigualdade com $t = n^{-1}$. Além disso, do Corolário 2 precisamos apenas trabalhar com os polinômios $V_n(f)$, para os quais os resultados são consequências do Lema 9 e da Proposição 3.

Agora, como corolário temos as relações dos módulos de suavidade apresentadas ao longo deste capítulo nos permitindo ter um panorama geral das relações obtidas até aqui.

Corolário 3. Seja $f \in L^p(S^d)$ com $1 < p < \infty$. Para $r \in \mathbb{N}$ e $0 < t < 1$,

$$\omega_r(f, t)_p \leq \tilde{\omega}_r(f, t)_p \asymp \omega_{2r}^*(f, t)_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Além disso, para $r = 1$ ou $r = 2$,

$$\omega_r(f, t)_p \asymp \tilde{\omega}_r(f, t)_p \asymp \omega_{2r}^*(f, t)_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Para $1 < p < \infty$ é mostrado em (DAI; DITZIAN; HUANG, 2010) que $\tilde{\omega}_r(f, t)_p \asymp K_r^*(f, t)_p$. Então, $\tilde{\omega}_r(f, t)_p \asymp \omega_r^*(f, t)_p$ para $1 < p < \infty$. Assim, o corolário segue da Proposição 1, Teorema 1 e Teorema 2.

APROXIMAÇÃO NUM CONTEXTO MAIS GERAL

Na teoria da aproximação construtiva existem diversas ferramentas que podem ser usadas para medir, de alguma maneira, a suavidade de funções nos mais diversos contextos, como vimos no caso esférico nos capítulos anteriores. A partir daqui apresentamos uma classe mais geral de espaços, classe esta que contempla o contexto esférico e muitos dos problemas discutidos anteriormente podem ser reproduzidos nesta nova classe devido à sua bem desenvolvida análise harmônica. O enfoque e interesse aqui é obter relações entre algumas das ferramentas dos capítulos anteriores em particular (módulos de suavidade, K-funcionais e raios de aproximação de operadores média) sobre os espaços compactos 2- homogêneos. Estes últimos são simultaneamente variedades Riemannianas m -dimensionais e espaços simétricos de posto 1.

Denotamos por $\mathbb{M}$ os espaços compactos 2-homogêneos de dimensão $m \geq 1$, que podem ser representados pelo quociente L/S_O onde O é um ponto fixo em $\mathbb{M}$, L é um Grupo de Lie compacto relacionado à componente identidade do grupo de isometrias de $\mathbb{M}$ e S_O é o subgrupo estacionário do ponto O . Sejam e a identidade de L e $\pi : L \rightarrow L/S_O$ a aplicação natural, então o polo de $\mathbb{M}$, $o := \pi(e)$, é invariante sobre S_O . Cada $\mathbb{M}$ tem uma métrica Riemanniana invariante $d(\cdot, \cdot)$ e uma medida dx induzida pela medida de Haar normalizada a esquerda em L que é invariante sob a ação de L . Além disso, esses espaços admitem essencialmente um operador diferencial invariante de segunda ordem chamado operador Laplace-Beltrami. Daqui em diante apresentamos, apenas, as informações a respeito deles que convém ao desenvolvimento dos resultados desejados. Sugerimos as referências ([BROWN; DAI, 2005](#); [GANGOLLI, 1967](#); [KUSHPEL; TOZONI, 2012](#); [PLATONOV, 2009](#)) e outras lá citadas, para informações mais detalhadas sobre esses espaços.

Os espaços aqui considerados estão completamente classificados ([WANG, 1952](#)), sendo eles:

- as esferas unitárias: S^m , $m = 1, 2, \dots$;
- os espaços projetivos reais: $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, $m = 2, 3, \dots$;
- os espaços projetivos complexos: $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $m = 4, 6, \dots$;
- os espaços projetivos dos quatérnios: $\mathbb{P}^m(\mathbb{H})$, $m = 8, 12, \dots$ e
- o plano elíptico de Cayley: $\mathbb{P}^{16}(\text{Cay})$.

Esses espaços possuem uma geometria muito similar entre si e assumimos que $\mathbb{M} \neq \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, pois os problemas de análise harmônica nos espaços projetivos reais podem ser reduzidos aos problemas correspondentes na esfera S^m (PLATONOV, 1997), e os resultados que serão apresentados aqui já têm sua versão esférica estudada ((RUSTAMOV, 1993; DAI; XU, 2013) e referência lá citadas).

Restringindo-nos à $m \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$, denotamos por $(L^p(\mathbb{M}), \|\cdot\|_p)$ o espaço de Banach das funções complexas p -integráveis em $\mathbb{M}$. Em particular, $L^2(\mathbb{M})$ é o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável sobre $\mathbb{M}$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{M})$$

onde σ_m é uma constante de normalização dada pelo volume de $\mathbb{M}$. Seja $L_\infty(\mathbb{M}) = C(\mathbb{M})$ o espaço de Banach das funções contínuas em $\mathbb{M}$ com norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C := \max_{x \in \mathbb{M}} |f(x)|.$$

Uma função em $\mathbb{M}$ definida à valores complexos, quando identificada no quociente $\mathcal{L}/S_O$, é invariante pela ação à esquerda de S_O em $\mathcal{L}$ se, e somente se, ela depende somente da distância do seu argumento ao polo de $\mathbb{M}$. Denotamos por θ a distância de um ponto ao polo. Podemos escolher um sistema de coordenadas geodésicas polares (θ, u) , onde u é um parâmetro angular, tal que a parte radial de Δ pode ser escrita, por uma constante multiplicativa, como

$$\Delta_\theta = \frac{1}{(\text{sen} \lambda \theta)^\sigma (\text{sen} 2\lambda \theta)^\rho} \frac{d}{d\theta} (\text{sen} \lambda \theta)^\sigma (\text{sen} 2\lambda \theta)^\rho \frac{d}{d\theta},$$

onde $\lambda = \pi/2l$, $l = \max \{d(x, y) : x, y \in \mathbb{M}\}$, os parâmetros σ e ρ dependem do espaço em questão e dados segundo a tabela abaixo

S^m	$\sigma = 0$	$\rho = m - 1$
$\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$	$\sigma = m - 1$	$\rho = 0$
$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$	$\sigma = m - 2$	$\rho = 1$
$\mathbb{P}^m(\mathbb{H})$	$\sigma = m - 4$	$\rho = 3$
$\mathbb{P}^{16}$	$\sigma = 8$	$\rho = 7$

Através da mudança de variáveis $x = \cos 2\lambda \theta$ temos

$$\Delta_x = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta} \frac{d}{dx},$$

com $\alpha = (\sigma + \rho - 1)/2 = (m-2)/2$ e $\beta = (\rho - 1)/2$.

Desta maneira, definimos $\mathcal{B} = -\Delta_x$ o *operador de Laplace-Beltrami* sobre os espaços de funções definidas em $\mathbb{M}$.

O operador de Laplace-Beltrami em $\mathbb{M}$ possui propriedades similares ao definido sobre a esfera. À saber, possui um espectro discreto dado por números reais não negativos, os quais podem ser organizados de maneira crescente e dados por seus autovalores $\{k(k + \alpha + \beta + 1) : k = 0, 1, \dots\}$. A cada um desses valores está associado o autoespaço $\mathcal{H}_k^m$ de dimensão finita e escrevemos $\dim \mathcal{H}_k^m = d_k^m$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Adicionalmente, estes espaços são mutualmente ortogonais segundo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ e se escrevermos $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^m\}$ para uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k^m$, então $\{Y_{k,j} : k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots, d_k^m\}$ forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{M})$. Quando nos restringimos ao contexto esférico estes elementos são os bem conhecidos espaços dos harmônicos esféricos em $m+1$ variáveis e grau k (RUSTAMOV, 1993; PLATONOV, 1997), como visto no Capítulo 1.

Para $r > 0$, definimos $\mathcal{B}^r$ em $\mathbb{M}$, no sentido distribucional, por

$$\mathcal{B}^r(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \mathcal{Y}_k(f), \quad (3.1)$$

onde f é uma distribuição sobre $\mathbb{M}$, $\mathcal{Y}_k$ é a projeção ortogonal em $L^2(\mathbb{M})$ sobre o espaço $\mathcal{H}_k^m$. Quando r é um número natural par $\mathcal{B}^r$, também pode ser obtido de maneira iterada como $\mathcal{B}^r = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1})$ coincide com a definição dada na fórmula (3.1).

A partir de $\mathcal{B}^r$ consideramos $W_p^r(\mathbb{M})$ o espaço de Sobolev de ordem r ,

$$W_p^r(\mathbb{M}) = \{f \in L^p(\mathbb{M}) : \|\mathcal{B}^r(f)\|_p < \infty\}.$$

Aqui, assumimos que $\mathcal{B}^r(f) \in L^p(\mathbb{M})$ (PLATONOV, 1997) e munimos este espaço com a norma $\|\cdot\|_{W_p^r} := \|\cdot\|_p + \|\mathcal{B}^r(\cdot)\|_p$.

3.1 Módulo de suavidade dado por um operador média

A fim de explorarmos propriedades pertinentes a ferramentas a serem apresentadas, semelhantemente ao feito no Capítulo 1, estabeleceremos algumas notações e definições.

Seja

$$\sigma(x; t) := \{y \in \mathbb{M} : \text{dist}(x, y) = t\}$$

a esfera em $\mathbb{M}$ de raio t centrada no ponto x . Denotamos por $d\sigma_x(y)$ o elemento de área da esfera $\sigma(x; t)$. Seja $|\sigma(t)|$ o volume (que independe de x) da esfera $\sigma(x; t)$ segundo a medida estabelecida.

Para uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$ definimos o *operador média esférica* por

$$S_t(f)(x) := \frac{1}{|\sigma(t)|} \int_{\sigma(x;t)} f(y) d\sigma_x(y), \quad 0 < t < l. \quad (3.2)$$

que é tal que $S_t(f) \in L^p(\mathbb{M})$ e é limitado da seguinte maneira $\|S_t(f)\|_p \leq \|f\|_p$, $f \in L^p(\mathbb{M})$ (PLATONOV, 1997).

Dada um função $f \in L^p(\mathbb{M})$, definimos o seguinte módulo de suavidade

$$\omega_r(f, t)_p := \sup_{0 < h \leq t} \{ \|\Delta_h^r(f)\|_p \}, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

onde $\Delta_h^r(f)(x)$ é o operador diferença de ordem r , para r um número positivo, com passo h , $0 < h < l$, definido por

$$\Delta_h^r(f) := (I - S_h)^{r/2}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} (S_h)^k(f),$$

onde I denota o operador identidade em $L^p(\mathbb{M})$.

Adicionalmente, definimos a melhor aproximação de uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$ pelos polinômios generalizados de grau menor ou igual a n no espaço métrico $L^p(\mathbb{M})$ por:

$$E_n(f)_p := \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_n(\mathbb{M})} \{ \|f - \Phi\|_p \},$$

onde

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{M}) := \mathcal{H}_0^m + \mathcal{H}_1^m + \cdots + \mathcal{H}_n^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente para $t > 0$ e $r > 0$, introduzimos o K-funcional construído via os espaços de Sobolev $W_p^r(\mathbb{M})$ como

$$K_r(f, t; \mathbb{M})_p := \inf_{g \in W_p^r(\mathbb{M})} \{ \|f - g\|_p + t^r \|\mathcal{B}^r(g)\|_p \}, \quad f \in L^p(\mathbb{M}). \quad (3.4)$$

A fim de mostrarmos a equivalência do módulo de suavidade com o K-funcional precisamos de algumas propriedades e resultados sobre o módulo de suavidade que serão apresentados a seguir:

Proposição 4. Se $f \in W_p^2(\mathbb{M})$, então

$$\|S_h(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2} h^2 \|\mathcal{B}^2(f)\|_p, \quad h \in (0, \pi/2).$$

A demonstração deste resultado será omitida aqui pois ela apresenta ferramentas que não foram apresentadas e não são o foco deste texto, mas pode ser encontrada em (PLATONOV, 2009, Proposição 4.1). Um de nossos objetivos é a seguinte proposição apresentando propriedades do módulo de suavidade anteriormente definido.

Proposição 5. Dados r um número natural e $f \in L^p(\mathbb{M})$, o módulo de suavidade definido pela fórmula (3.3), satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\omega_{2r}(f, t)_p$ é não decrescente com respeito a t e $\omega_{2r}(f, t)_p = \omega_{2r}(f, \pi)_p$ para $t \geq \pi$;
- (2) $\omega_{2r}(f, t)_p$ é contínua com respeito a t e $\omega_{2r}(f, t)_p \rightarrow 0$ com $t \rightarrow 0$;
- (3) $\omega_{2r}(f + g, t)_p \leq \omega_{2r}(f, t)_p + \omega_{2r}(g, t)_p$, $g \in L^p(\mathbb{M})$;
- (4) $\omega_{2r}(f, t)_p \leq 2^r \|f\|_p$;
- (5) Se $s \in \mathbb{N}$ e $s < r$, então $\omega_{2r}(f, t)_p \leq 2^{r-s} \omega_{2s}(f, t)_p$;
- (6) Se $f \in W_p^{2s}(\mathbb{M})$, então $\omega_{2r}(f, t)_p \leq c t^{2s} \omega_{2(r-s)}(\mathcal{B}^{2s}(f), t)_p$, para todo $r > s$, onde c é uma constante independente de t ;
- (7) Se $f \in W_p^{2r}(\mathbb{M})$, então $\omega_{2r}(f, t)_p \leq c t^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(f)\|_p$, onde c é uma constante que não depende de t .

Demonstração. As propriedades (1) e (3) seguem da definição do módulo de suavidade em questão.

A propriedade (2) é verdadeira pois a função $S_h(f)$ depende continuamente de h no espaço $L^p(\mathbb{M})$ (veja (PLATONOV, 2009, 2.26)).

As propriedades (4) e (5) seguem da limitação do operador média esférica $\|S_h(f)\|_p \leq \|f\|_p$ para $f \in L^p(\mathbb{M})$.

Se $f \in W_p^{2s}(\mathbb{M})$, então como $\mathcal{B}$ comuta com o operador Δ_h pela Proposição 4 segue

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^{2r}(f)\|_p &= \|(S_h - I)^r(f)\|_p = \|(S_h - I)(\Delta_h^{2(r-1)}(f))\|_p \\ &\leq \frac{1}{2} h^2 \|\mathcal{B}^2(\Delta_h^{2(r-1)}(f))\|_p \\ &= \frac{1}{2} h^2 \|\Delta_h^{2(r-1)}(\mathcal{B}^2(f))\|_p. \end{aligned}$$

Repetindo o processo s vezes obtemos a desigualdade,

$$\|\Delta_h^{2r}(f)\|_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s h^{2s} \|\Delta_h^{2(r-s)}(\mathcal{B}^{2s}(f))\|_p.$$

A propriedade (7) segue diretamente da desigualdade enquanto a propriedade (6) segue da mesma e da definição de módulo de suavidade. $\square$

Seja $\eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função par arbitrária satisfazendo as seguintes condições: $\eta(t) \geq 0$, $\eta(t) = 1$ para $|t| \leq 1$, e $\eta(t) = 0$ para $|t| \geq 2$. Introduzimos uma família de operadores η_t , para $t > 0$ por:

$$\eta_t(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(\frac{k}{t}\right) \mathcal{B}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}).$$

A seguinte proposição apresenta propriedades do operador η_t , e será importante na demonstração da equivalência do módulo de suavidade com o K-funcional.

Proposição 6. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$ e n um número natural positivo. Valem as seguintes propriedades:

- (i) $\eta_n(f) \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{M})$ e $\eta_n(\Phi) = \Phi$ para $\Phi \in \mathcal{P}_n(\mathbb{M})$;
- (ii) $\|\eta_n(f)\|_p \leq c \|f\|_p$;
- (iii) $\|f - \eta_n(f)\|_p \leq c E_n(f)_p$,

onde c é uma constante que não depende de n em ambos, itens (ii) e (iii), mas podendo ser distintas.

Demonstração. A demonstração do item (ii) faz uso de técnicas que fogem do escopo atual, por isso omitimos sua demonstração aqui. Ao leitor interessado ela pode ser encontrada na referência (PLATONOV, 2009, p. 871).

Para a demonstração do primeiro item, como $\eta(k/n) = 0$ para $j \geq 2n$, temos $\eta_n(f) \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{M})$. Se $\Phi \in \mathcal{P}_n(\mathbb{M})$, então $\mathcal{V}(\Phi_k) = 0$ para $j > n$ e, como $\eta(k/n) = 1$ para $0 \leq k \leq n$, temos:

$$\eta_n(\Phi) = \sum_{j=0}^n \mathcal{V}_k(\Phi) = \Phi.$$

O terceiro item desta proposição consiste numa aplicação do item (ii). Seja $\Phi \in \mathcal{P}_n(\mathbb{M})$ tal que $\|f - \Phi\|_p \leq 2E_n(f)_p$. Usando a igualdade $P_n(\Phi) = \Phi$ e a propriedade (ii) obtemos

$$\begin{aligned} \|f - \eta_n(f)\|_p &= \|f - \Phi + \eta_n(f - \Phi)\|_p \leq \|f - \Phi\|_p + c \|f - \Phi\|_p \\ &\leq 2(1 + c)E_n(f)_p. \end{aligned}$$

Finalizando a prova do item (iii). □

A seguir apresentamos mais propriedades satisfeitas pelos operadores η_n , de Laplace-Beltrami e média esférica que serão fundamentais para a obtenção das equivalências que desejamos.

Proposição 7. Seja $f \in L^p(\mathbb{M})$, $r \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. Vale a desigualdade

$$\|\mathcal{B}^{2r}(\eta_t(f))\|_p \leq ch^{-2r} \|\Delta_h^{2r}(f)\|_p, \quad h \in (0, 1/2t].$$

Se $f \in W_p^r(\mathbb{M})$, então

$$\|\Delta_h^{2r}(\eta_t(f))\|_p \leq ch^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(f)\|_p, \quad h \in (0, 1/2t],$$

onde c é uma constante que independe de t .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (PLATONOV, 2009) Proposição 4.4. $\square$

Corolário 4. A desigualdade

$$\|\mathcal{B}^{2r}(\eta_t(f))\|_p \leq c t^{2r} \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{2t}\right)_p$$

vale para qualquer $f \in L^p(\mathbb{M})$, $r \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, onde c é uma constante não dependendo de t .

Demonstração. Da primeira desigualdade da Proposição 7 temos que

$$\|\mathcal{B}^{2r}(\eta_t(f))\|_p \leq c \left(\frac{1}{2t}\right)^{-2r} \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{2t}\right),$$

e portanto, para uma constante c que não depende de t temos

$$\|\mathcal{B}^{2r}(\eta_n(f))\|_p \leq c t^{2r} \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{2t}\right).$$

$\square$

O seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (PLATONOV, 2009, Teorema 4.1), é importante para estabelecer a equivalência entre o módulo de suavidade e o K-funcional.

Teorema 4. Para $f \in L^p(\mathbb{M})$, $r, n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ a desigualdade é verdadeira

$$E_n(f)_p \leq c \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p,$$

onde c é uma constante que não depende de n .

Apresentamos agora como curiosidade uma generalização do teorema anterior, que faz uso deste caso particular em sua prova.

Teorema 5. Sejam $f, \mathcal{B}^2(f), \dots, \mathcal{B}^{2r}(f) \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, onde r é um número inteiro positivo par. Dado $k \in \mathbb{N}$ a seguinte desigualdade acontece para todo $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_p \leq \frac{c}{n^{2r}} \omega_{2k}\left(\mathcal{B}^{2r}(f), \frac{1}{n}\right)_p,$$

onde c é uma constante que não depende de n .

Demonstração. Nas condições do teorema, aplicamos o Teorema 4 para $(k+r)$ e obtemos a seguinte desigualdade

$$E_n(f)_p \leq c \omega_{2(k+r)}\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

onde $c = c(k, r, \mathbb{M})$, é uma constante. Segue da Proposição 5-(6) que

$$\omega_{2(k+r)}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C n^{-2r} \omega_{2k}\left(\mathcal{B}^{2r}(f), \frac{1}{n}\right)_p,$$

onde $C = C(k, r, \mathbb{M})$, o que completa a demonstração. $\square$

Com os resultados obtidos até aqui conseguimos estabelecer a equivalência do módulo de suavidade com o K -funcional definidos, respectivamente, pela fórmulas (3.3) e (3.4).

Teorema 6. Dado r um inteiro, existem constantes positivas $c_1 = c_1(\mathbb{M}, r)$ e $c_2 = c_2(\mathbb{M}, r)$ tais que

$$c_1 \omega_{2r}(f, t)_p \leq K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p \leq c_2 \omega_{2r}(f, t)_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad t > 0.$$

Equivalentemente,

$$\omega_{2r}(f, t)_p \asymp K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p.$$

Demonstração. Para provar a desigualdade esquerda do enunciado do teorema é suficiente mostrar que

$$\omega_{2r}(f, t)_p \leq c K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p \quad (3.5)$$

para $c = c(m, \mathbb{M})$ uma constante. Para tanto, seja $g \in W_p^{2r}(\mathbb{M})$. As propriedades de módulo de suavidade (3), (4) e (7) apresentadas na Proposição 5, respectivamente, garantem que

$$\begin{aligned} \omega_{2r}(f, t)_p &\leq \omega_{2r}(f - g, t)_p + \omega_{2r}(g, t)_p \leq 2^r \|f - g\| + c_3 t^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(g)\|_p \\ &\leq c_4 (\|f - g\|_p + t^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(g)\|_p), \end{aligned}$$

onde $c_4 = \max\{2^m, c_3\}$. Tomando o ínfimo sobre $g \in W_p^{2r}(\mathbb{M})$ na desigualdade acima, concluímos a primeira parte da demonstração.

Agora provemos a outra desigualdade. Se $g = P_n(f)$ para n um número natural positivo, então pela definição de $K_r(f, t; \mathbb{M})_p$ temos

$$K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p \leq \|f - \eta_n(f)\|_p + t^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(\eta_n(f))\|_p. \quad (3.6)$$

Via a propriedade (iii) da Proposição 6, temos

$$\|f - \eta_n(f)\|_p \leq c_5 E_n(f)_p, \quad (3.7)$$

para alguma constante c_5 , não dependendo de n .

Agora, o Corolário 4 combinado ao fato de que a função $\omega_{2r}(f, t)$ é monótona obtemos

$$\|\mathcal{B}^{2r}(\eta_n(f))\|_p \leq c_6 n^{2r} \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \quad (3.8)$$

para alguma outra constante c_6 (também independente de n).

Assim, segue das fórmulas (3.6), (3.7), (3.8), anteriores, e do Teorema 4 que

$$K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p \leq c_7 (1 + (tn)^{2r}) \omega_{2r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \quad (3.9)$$

onde, novamente, c_7 é uma constante independente de n . A arbitrariedade de n nos permite considera-lo de forma que $n > 1/t$ e, da desigualdade acima obtemos:

$$K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p \leq 2c_7 \omega_{2r}(f, t)_p,$$

o que demonstra o teorema. □

Como uma consequência do Teorema 6, obtemos outra propriedade para o módulo de suavidade $\omega_r(f, t)_p$.

Proposição 8. Dado um inteiro não negativo r , existe uma constante $c = c(r, \mathbb{M})$ tal que a desigualdade é verdadeira

$$\omega_{2r}(f, \lambda t)_p \leq c \max\{1, \lambda^{2r}\} \omega_{2r}(f, t)_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad t > 0, \quad \lambda > 0. \quad (3.10)$$

Demonstração. Pode-se facilmente derivar a desigualdade

$$K_{2r}(f, \lambda t; \mathbb{M})_p \leq \max\{1, \lambda^{2r}\} K_{2r}(f, t; \mathbb{M})_p$$

da definição do K-funcional. Do teorema anterior, obtemos a desigualdade da proposição. $\square$

3.2 Relação com raio de aproximação do operador média

Objetivamos agora relacionar por meio de relações com sentido assintótico, como previamente feito entre K-funcionais e os módulos de suavidade apresentados, com uma nova ferramenta: o raio de aproximação do operador média esférica. Relações como a que nos propomos estabelecer aqui podem ser encontradas no contexto esférico e sobre o espaço euclidiano em (DAI; DITZIAN, 2004; JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014; BRAY, 2014). No contexto esférico tal relação se mostrou altamente eficiente na melhora de resultados ligados ao decaimentos de autovalores de certos operadores integrais, por meio de resultados como o (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014, Teorema 1), e tal eficiência pode ser checada na íntegra na referência citada.

O resultado a ser apresentado aqui é novo na literatura e é usado para generalizar resultados obtidos em (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014), no contexto dos espaços compactos 2-homogêneos, como pode ser visto em (GANANCIN; JORDAO, 2017).

Para tanto precisamos do seguinte resultado que é uma versão para os espaços compactos 2-homogêneos do famoso Teorema de multiplicadores de Marcinkiewicz (STEIN, 1970), o qual tem sua versão no contexto esférico e pode ser encontrada em (DAI; XU, 2013). O resultado abaixo, nos dá uma condição suficiente para que um determinado operador construído via sequências (multipliers) seja limitado. A demonstração pode ser encontrada em (BONAMI; CLERC, 1973, Teorema 7.1).

Teorema 7. Sejam $\mathbb{M}$ um espaço compacto 2-homogêneo de dimensão m e $\{\mu_k\}_k$ uma sequência de números reais satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\sup_k \{|\mu_k|\} \leq M < \infty$,
- (ii) $\sup_j \left\{ 2^{j(n-1)} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^n \mu_l| \right\} \leq M < \infty$,

com $n = (m+1)/2$ se m é ímpar e $n = (m+2)/2$ se m é par. Aqui Δ^n denota a n -ésima iteração do operador diferença dado por $\Delta^1 \mu_k = \Delta \mu_k := \mu_{k+1} - \mu_k$ e $\Delta^n \mu_k := \Delta^{n-1} \mu_{k+1} - \Delta^{n-1} \mu_k$ para $n \geq 2$.

Neste caso, vale a desigualdade

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \mathcal{D}_k(f) \right\|_p \leq A_p M \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty, \quad f \in L^p(\mathbb{M})$$

onde A_p é uma constante independente de f .

Nas condições e notações do teorema acima, $T : L^p(\mathbb{M}) \longrightarrow L^p(\mathbb{M})$ dado por

$$T(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \mathcal{D}_k(f)(x), \quad x \in \mathbb{M},$$

está bem definido e é limitado, ele é dito ser um *operador multiplicativo* e a sequência $\{\mu_k\}_k$ seus multiplicadores.

Um exemplo clássico de operador multiplicativo é a média esférica definida na fórmula (3.2) e que pode ser escrita via a sequência de multiplicadores $\{Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t)\}_k$ através da seguinte igualdade. A mesma é obtida facilmente por meio da fórmula de adição (BROWN; DAI, 2005, pag. 405), válida neste contexto,

$$S_t(f) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t) \mathcal{D}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad (3.11)$$

onde $Q_k^{(\alpha, \beta)}$ é o polinômio de Jacobi normalizado por $Q_k^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$, $k \geq 0$. Tal igualdade será usada na demonstração do próximo resultado.

Lema 10. Para $1 < p < \infty$, a seguinte desigualdade acontece

$$\omega_2(f, t)_p \leq c \|f - S_t(f)\|_p, \quad t > 0, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad (3.12)$$

onde c é uma constante que não depende de t nem de f .

Demonstração. Das propriedades (3), (4) e (7) do módulo de suavidade da Proposição 5 e da Proposição 7, a seguinte desigualdade acontece

$$\begin{aligned} \omega_2(f, t)_p &\leq \omega_2(f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f), t)_p + \omega_2(\eta_{\frac{1}{2t}}(f), t)_p \\ &\leq 2 \|f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f)\|_p + ct^2 \|\mathcal{B}^2(\eta_{\frac{1}{2t}}(f))\|_p \\ &\leq 2 \|f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f)\|_p + ct^2 h^{-2} \|S_h(f) - f\|_p, \quad h \in (0, t]. \end{aligned}$$

para uma constante c que não depende de t nem de f .

E assim, obtemos

$$\omega_2(f, t)_p \leq c_0 (\|f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f)\|_p + \|S_t(f) - f\|_p). \quad (3.13)$$

Para terminar a demonstração, precisamos verificar que

$$\|f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f)\|_p \leq c_1 \|S_t(f) - f\|_p, \quad (3.14)$$

para uma constante c_1 que não depende de t e f . Para provar a desigualdade, é suficiente mostrar que

$$\|f - \eta_{\frac{1}{2t}}(f) - (I + S_t + S_t^2 + S_t^3)(I - \eta_{\frac{1}{2t}})(f - S_t(f))\|_p \leq c_2 \|f - S_t(f)\|_p$$

isto é, que

$$m_k = \frac{(1 - \eta(2tk)) \left(Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t) \right)^4}{1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

forma uma sequência de multiplicadores. Para isto, precisamos mostrar que a sequência m_k satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 7.

Façamos isto. Observe primeiro que para $2tk \leq 1$, temos que $\eta(2tk) = 1$ e assim $m_k = 0$ e não temos nada para fazer. Agora para $2tk \geq \tau > 1$ temos de (PLATONOV, 2009, Proposição 3.3) que existe $c_3 > 0$ tal que $1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t) \geq c_3$ e, além disso, $|1 - \eta(2tk)| \leq c_4$. Logo, como o polinômio de Jacobi é sempre limitado por 1 obtemos a condição (i) do Teorema 7.

Para obtermos a condição (ii) observe que a limitação do polinômio de Jacobi dado em (BELINSKY; DAI; DITZIAN, 2003, Lemma 3.2), implica que

$$\begin{aligned} |\Delta^s m_k| &\leq \frac{c_4}{c_3} \Delta^s \left(Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos t) \right)^4 \\ &\leq \frac{c_4}{c_3} B(\alpha, \beta) \frac{t^s}{(kt)^{4\alpha+4/2}} \\ &= c_5 \frac{t^s}{(kt)^{4\alpha+4/2}} \frac{k^s}{k^s} \\ &= c_5 \frac{(kt)^s}{(kt)^{4\alpha+4/2}} \frac{1}{k^s} \\ &= c_5 \left(\frac{1}{kt} \right)^{4\alpha+4/2-s} \frac{1}{k^s} \\ &\leq c_2 \frac{1}{k^s} \end{aligned}$$

para m par ou ímpar, temos $4\alpha + 4/2 - s \geq 0$ e além disso, $1/(kt)$ é limitado.

Com isto, temos

$$\begin{aligned}
\sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s m_k| &\leq \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} c_2 \frac{1}{k^s} \\
&\leq \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} c_2 \frac{1}{(2^j)^s} \\
&= \sup_j 2^{j(s-1)} 2^j c_2 2^{-js} \\
&= c_2
\end{aligned}$$

onde a constante c_2 não depende de t e f , e a condição (ii) do Teorema 7 está satisfeita. Logo, m_k é um multiplicador e assim, vale a desigualdade (3.14).

Portanto, de (3.13) e (3.14) obtemos (3.12), e assim concluímos o Lema. $\square$

Teorema 8. Para $1 < p < \infty$, a seguinte equivalência acontece

$$\omega_{2r}(f, t)_p \asymp \|f - S_t(f)\|_p, \quad t > 0, \quad f \in L^p(\mathbb{M}). \quad (3.15)$$

Demonstração. Note primeiramente que, da definição de módulo de suavidade dada em (3.3) temos

$$\|S_t(f) - f\|_p \leq \omega_{2r}(f, t)_p, \quad t > 0, \quad f \in L^p(\mathbb{M}). \quad (3.16)$$

Assim, de (3.16), (5)-Proposição 5 e do Lema 10 obtemos o resultado. $\square$

Finalizamos comentando que este último resultado é importante no estudo de crescimento de coeficientes de Fourier para funções definidas neste contexto e decaimento de autovalores de certos operadores integrais considerados sobre eles (veja (GANANCIN; JORDAO, 2017)).

REFERÊNCIAS

ARONSZAJN, N. Theory of reproducing kernels. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 68, p. 337–404, 1950. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/1990404>. Citado na página 33.

BELINSKY, E.; DAI, F.; DITZIAN, Z. Multivariate approximating averages. **J. Approx. Theory**, v. 125, n. 1, p. 85–105, 2003. ISSN 0021-9045. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.005>. Citado na página 53.

BONAMI, A.; CLERC, J.-L. Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 183, p. 223–263, 1973. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/1996468>. Citado na página 51.

BRAY, W. O. Growth and integrability of Fourier transforms on Euclidean space. **J. Fourier Anal. Appl.**, v. 20, n. 6, p. 1234–1256, 2014. ISSN 1069-5869. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00041-014-9354-1>. Citado na página 51.

BROWN, G.; DAI, F. Approximation of smooth functions on compact two-point homogeneous spaces. **J. Funct. Anal.**, v. 220, n. 2, p. 401–423, 2005. ISSN 0022-1236. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2004.10.005>. Citado nas páginas 15, 43 e 52.

DAI, F.; DITZIAN, Z. Combinations of multivariate averages. **J. Approx. Theory**, v. 131, n. 2, p. 268–283, 2004. ISSN 0021-9045. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2004.10.003>. Citado nas páginas 17 e 51.

DAI, F.; DITZIAN, Z.; HUANG, H. Equivalence of measures of smoothness in $L_p(S^{d-1})$, $1 < p < \infty$. **Studia Math.**, v. 196, n. 2, p. 179–205, 2010. ISSN 0039-3223. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4064/sm196-2-5>. Citado nas páginas 34, 41 e 42.

DAI, F.; XU, Y. Moduli of smoothness and approximation on the unit sphere and the unit ball. **Adv. Math.**, v. 224, n. 4, p. 1233–1310, 2010. ISSN 0001-8708. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2010.01.001>. Citado nas páginas 9, 11, 17, 20, 23, 35 e 41.

_____. **Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls**. Springer, New York, 2013. xviii+440 p. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 978-1-4614-6659-8; 978-1-4614-6660-4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6660-4>. Citado nas páginas 15, 17, 18, 19, 44 e 51.

DEEB, W.; KHALIL, R. Best approximation in $L^p(I, X)$, $0 < p < 1$. **J. Approx. Theory**, v. 58, n. 1, p. 68–77, 1989. ISSN 0021-9045. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045\(89\)90009-9](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045(89)90009-9). Citado na página 15.

DEVORE, R. A.; LORENTZ, G. G. **Constructive approximation**. Springer-Verlag, Berlin, 1993. v. 303. x+449 p. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], v. 303). ISBN 3-540-50627-6. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-02888-9>. Citado nas páginas 15, 16, 20 e 27.

DITZIAN, Z. A modulus of smoothness on the unit sphere. **J. Anal. Math.**, v. 79, p. 189–200, 1999. ISSN 0021-7670. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02788240>>. Citado nas páginas 21 e 29.

_____. Optimality of the range for which equivalence between certain measures of smoothness holds. **Studia Math.**, v. 198, n. 3, p. 271–277, 2010. ISSN 0039-3223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4064/sm198-3-6>>. Citado na página 21.

DUNKL, C. F.; XU, Y. **Orthogonal polynomials of several variables**. Second. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. v. 155. xviii+420 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 155). ISBN 978-1-107-07189-6. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781107786134>>. Citado na página 25.

GANANCIN, A.; JORDAO, T. On approximation tools and decay rates for eigenvalues sequences of certain operators on a general setting. **arXiv:1708.02576**, 2017. Citado nas páginas 51 e 54.

GANGOLLI, R. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. **Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)**, v. 3, p. 121–226, 1967. Citado na página 43.

JORDAO, T.; MENEGATTO, V. A.; SUN, X. Eigenvalue sequences of positive integral operators and moduli of smoothness. In: **Approximation theory XIV: San Antonio 2013**. Springer, Cham, 2014, (Springer Proc. Math. Stat., v. 83). p. 239–254. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06404-8_13>. Citado nas páginas 17 e 51.

KUSHPEL, A.; TOZONI, S. A. Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces. **Constr. Approx.**, v. 35, n. 2, p. 137–180, 2012. ISSN 0176-4276. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00365-011-9146-7>>. Citado na página 43.

MORIMOTO, M. **Analytic functionals on the sphere**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. v. 178. xii+160 p. (Translations of Mathematical Monographs, v. 178). ISBN 0-8218-0585-1. Citado nas páginas 18 e 19.

PETRUSHEV, P. P.; POPOV, V. A. **Rational approximation of real functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1987. v. 28. xii+371 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 28). ISBN 0-521-33107-2. Citado na página 28.

PLATONOV, S. S. Approximations on compact symmetric spaces of rank 1. **Mat. Sb.**, v. 188, n. 5, p. 113–130, 1997. ISSN 0368-8666. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1070/SM1997v188n05ABEH000233>>. Citado nas páginas 9, 11, 44, 45 e 46.

_____. On some problems in the theory of the approximation of functions on compact homogeneous manifolds. **Mat. Sb.**, v. 200, n. 6, p. 67–108, 2009. ISSN 0368-8666. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1070/SM2009v200n06ABEH004021>>. Citado nas páginas 9, 11, 43, 46, 47, 48, 49 e 53.

RUSTAMOV, K. P. On the approximation of functions on a sphere. **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.**, v. 57, n. 5, p. 127–148, 1993. ISSN 1607-0046. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1070/IM1994v043n02ABEH001566>>. Citado nas páginas 17, 18, 19, 20, 34, 44 e 45.

STECKIN, S. B. A generalization of some inequalities of S. N. Bernštejn. **Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)**, v. 60, p. 1511–1514, 1948. Citado na página 27.

STEIN, E. M. **Singular integrals and differentiability properties of functions**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. xiv+290 p. (Princeton Mathematical Series, No. 30). Citado na página 51.

SZEGO, G. **Orthogonal polynomials**. Fourth. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. xiii+432 p. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. Citado na página 19.

VILENKIN, N. J. **Special functions and the theory of group representations**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968. x+613 p. (Translated from the Russian by V. N. Singh. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 22). Citado na página 22.

WANG, H.-C. Two-point homogeneous spaces. **Ann. of Math. (2)**, v. 55, p. 177–191, 1952. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2307/1969427>>. Citado na página 43.

XU, Y. Weighted approximation of functions on the unit sphere. **Constr. Approx.**, v. 21, n. 1, p. 1–28, 2005. ISSN 0176-4276. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00365-003-0542-5>>. Citado na página 20.