Sistemas semidinâmicos dissipativos com impulsos

Jaqueline da Costa Ferreira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jaqueline da Costa Ferreira

Sistemas semidinâmicos dissipativos com impulsos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
Maio de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383s Ferreira, Jaqueline da Costa
 Sistemas semidinâmicos dissipativos com impulsos
 / Jaqueline da Costa Ferreira; orientador Everaldo
 de Mello Bonotto. -- São Carlos, 2016.
 87 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

 1. Sistemas semidinâmicos impulsivos. 2. Sistemas
 não autônomos. 3. Sistemas dissipativos. 4. Funções
 de Lyapunov. 5. Estabilidade. I. Bonotto, Everaldo
 de Mello, orient. II. Título.

Jaqueline da Costa Ferreira

Dissipative semidynamical systems with impulses

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto

USP – São Carlos
May 2016

À minha amada mãe (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço à Deus.

À minha mãe, principal inspiração, minha incentivadora emocional. Agradeço pela incansável determinação em me educar, pelo amor incondicional, pelos anos de apoio em presença e agora em espírito que é o que me leva a continuar. Ao meu querido irmão.

Ao meu orientador, inspiração como pesquisador e educador, pela incansável paciência, pelos incontáveis ensinamentos ao longo desses seis anos, sem ele nenhuma linha desse texto seria possível, obrigada de verdade.

Agradeço as dezenas e dezenas de professores que tive a honra de conhecer e conviver nesses 10 anos, da UFES, da USP, da US na Espanha e da UFSCAR, de cada um levo uma coisa. Pelas aulas encantadoras, ricos conselhos, incentivos, notas baixas, aos que me apresentaram essa ciência maravilhosa meu muito obrigada. Aos outros tantos servidores dessas universidades que passei também quero deixar meu agradecimento.

Aos amigos de jornada, pela companhia, troca de ideias, listas de exercícios, risadas, por me permitirem fazer um pouco da parte da vida de vocês, obrigada.

À CAPES, pelo apoio financeiro, incluindo o meu estágio no exterior.

*“Ever tried.
Ever failed.
No matter.
Try again.
Fail again.
Fail better.”*
(Samuel Beckett)

“‘Playing like a girl’ means being the best”
(Barack Obama)

Resumo

O presente trabalho apresenta a teoria de sistemas dinâmicos dissipativos impulsivos. Apresentamos resultados suficientes e necessários para obtermos dissipatividade para sistemas impulsivos autônomos e não autônomos utilizando funções de Lyapunov. No que segue, desenvolvemos a teoria de estabilidade para a seção nula de um sistema dinâmico não autônomo com impulsos. Utilizando os resultados da teoria abstrata para sistemas não autônomos com impulsos, apresentamos o estudo da estabilidade de um modelo presa-predador com controle e impulsos.

Palavras Chaves: Sistemas dinâmicos impulsivos, Sistemas dissipativos, Funções de Lyapunov, Estabilidade.

Abstract

The present work presents the theory of impulsive dissipative dynamical systems. We present necessary and sufficient conditions to obtain dissipativity for autonomous and non-autonomous impulsive dynamical systems via Lyapunov functions. In the sequel, we develop the theory of stability for the null section of non-autonomous dynamical systems with impulses. Using the results from the abstract theory we present the study of stability for a controlled prey-predator model under impulse conditions.

Keywords: Impulsive dynamical systems, Dissipative systems, Lyapunov functions, Stability.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Notações	5
1.2 Equações diferenciais impulsivas	6
1.2.1 Existência de soluções	11
2 Sistemas dinâmicos impulsivos	15
2.1 Sistemas dinâmicos	15
2.2 Sistemas dinâmicos com impulsos	17
2.3 Continuidade da função ϕ e resultados de convergência	20
2.4 Conjunto limite e invariância	24
3 Sistemas dissipativos	29
3.1 Dissipatividade em sistemas impulsivos	29
3.2 Sistemas autônomos dissipativos via funções de Lyapunov	33
4 Sistemas não autônomos dissipativos impulsivos	41
4.1 Sistemas dinâmicos não autônomos	41

4.2	Sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos	44
4.3	Dissipatividade via funções de Lyapunov	46
4.4	Aplicação às equações diferenciais não autônomas impulsivas	55
5	Estabilidade em sistemas não autônomos impulsivos	59
5.1	Estabilidade em sistemas não autônomos impulsivos	59
5.2	Estabilidade para uma classe de equações diferenciais impulsivas não autô- nomas	70
5.3	O modelo presa-predador impulsivo	73
A	Topologia	79
A.1	Topologia em espaço de funções	79
A.2	Fibrados	81
	Referências Bibliográficas	85

A teoria de equações diferenciais impulsivas é utilizada para estudar uma ampla classe de modelos matemáticos em vários processos ou fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, etc., como por exemplo em controle ótimo de modelos econômicos e em dinâmica de populações. Tais equações estudam processos de evolução que sofrem uma variação brusca em um intervalo de tempo muito curto, que podem ser consideradas instantâneas. A teoria geral sobre equações impulsivas pode ser encontrada em vários textos da literatura, como por exemplo nos textos clássicos [1, 31].

Os primeiros trabalhos sobre a teoria de sistemas dinâmicos descontínuos em tempo pré-fixados foram publicados na década de 70 pelo matemático Rozko, veja [32, 33]. Entretanto, somente em 1990 que Saroop Kaul, em seu trabalho [26], formalizou a teoria de sistemas dinâmicos com impulsos em tempo variável. Ainda, no início da década de 90, Kaul contribuiu com a teoria de sistemas impulsivos apresentando resultados de movimentos recursivos e de estabilidade, veja [27, 28, 29]. Devido à dificuldade de lidar com os momentos de impulsos e algumas inconsistências encontradas nos trabalhos de Kaul, o matemático Krzysztof Ciesielski publicou uma série de trabalhos, [19, 20, 21, 22], que possibilitou o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos com impulsos em tempo variável. A partir deste momento, Bonotto e seus colaboradores, apresentaram várias contribuições para a teoria de sistemas impulsivos como conjugação topológica, fluxos de característica 0^+ , o teorema de Poincaré-Bendixson, estabilidade de Poisson, estabilidade de LaSalle, sistemas dissipativos, teoria de atratores e movimentos recorrentes, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Recentemente, a teoria de sistemas dinâmicos para o caso não autônomo começou a ser desenvolvida, veja [8]. Para ilustrar a abordagem que motiva as generalizações feitas nesse texto, consideremos a seguinte equação diferencial não autônoma,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

onde f é uma função regular, ou seja, as condições de existência, unicidade e extensão de soluções estão satisfeitas. Assim para cada $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$ a solução de (1), representada por $u(t, f, u_0)$, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Seguindo [34], define $H(f) = \{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, onde $f_\tau(t, u) = f(t + \tau, u)$ para todo $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Então a aplicação $\pi(u_0, f, t) = (u(t, f, u_0), f_t)$ definida em $\mathbb{R}^n \times H(f) \times \mathbb{R}$ gera um sistema dinâmico autônomo em $\mathbb{R}^n \times H(f)$, chamado de *Produto Skew*. Nesse contexto de produto skew, alguns autores como D. Cheban, [17], desenvolvem a teoria de atratores globais, estabilidade e dissipatividade, por exemplo.

Em [10], Bonotto e Demuner iniciaram o estudo de sistemas dinâmicos não autônomos para o caso impulsivo, apresentando uma série de resultados de estabilidade. A partir deste trabalho, propomos o estudo de dissipatividade para sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos utilizando funções de Lyapunov. A proposta de nosso trabalho foi motivada pelo livro [17] (caso contínuo) e pelo artigo [10] (caso impulsivo), cujo objetivo principal é estabelecer o estudo de sistemas dissipativos e a estabilidade da seção nula de um fibrado (X, h, Y) com relação a um sistema não autônomo impulsivo abstrato. E como consequência, aplicamos os resultados da teoria abstrata ao estudo de uma classe de equações diferenciais não autônomas impulsivas.

O presente texto está organizado em cinco capítulos, que compõe os resultados preliminares e os resultados principais, e um Apêndice. No que segue, descrevemos um resumo de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos uma seção que descreve algumas notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho e uma seção que apresenta um resumo da teoria de equação diferenciais impulsivas, como a descrição de um sistema impulsivo e teoremas de existência. O texto base para a teoria de equações impulsivas é extraído de [1, 31].

O Capítulo 2 se concentra em apresentar a teoria elementar de sistemas dinâmicos impulsivos. Na Seção 2.1, apresentamos os conceitos básicos de sistemas dinâmicos contínuos. Na Seção 2.2, definimos o conceito de sistemas dinâmicos com impulsos e apresentamos a construção da trajetória impulsiva. Já na Seção 2.3, discutimos a continuidade da função que representa o menor tempo positivo que uma órbita sofre impulso. A continuidade de tal função permite o desenvolvimento de resultados de convergência para órbitas descontínuas, veja Lemas 2.19 e 2.20. Finalizamos o capítulo com a Seção 2.4, que apresenta as generalizações de conjunto limite e invariância para sistemas impulsivos. Nesta seção, mostramos que o conceito de invariância não é preservado quando se passa de um sistema contínuo para o sistema impulsivo correspondente.

No Capítulo 3, apresentamos as primeiras contribuições de nosso trabalho. Iniciamos com a apresentação dos conceitos preliminares de sistemas dissipativos, para o caso autônomo, extraídos dos textos [8] e [9], veja a Seção 3.1. Na Seção 3.2, apresentamos os resultados provenientes do artigo [14]. Nos Teoremas 3.14 e 3.15, apresentamos condições suficientes, via funções de Lyapunov, para assegurar que um sistema impulsivo seja localmente dissipativo. No Exemplo 3.15, apresentamos condições para que a equação $x' = f(x)$, sob condições de impulsos, seja dissipativa. Finalizamos a seção com o Teorema 3.20, que mostra um tipo recíproca para o Teorema 3.14, onde sob a condição de dissipatividade exibimos a existência de uma função do tipo Lyapunov.

No Capítulo 4, apresentamos nossa contribuição para a teoria de sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos. Os resultados são provenientes do artigo [14]. Na Seção 4.1, expomos a motivação para o estudo de sistemas não autônomos. Já na Seção 4.2, apresentamos a definição de um sistema não autônomo abstrato com impulsos e exibimos alguns exemplos. No final desta seção, mostramos como obter um sistema não autônomo abstrato para um sistema de equações diferenciais com impulsos da forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, \\ I : M \longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Na Seção 4.3, nos dedicamos ao estudo de dissipatividade para sistemas não autônomos impulsivos. Nos Teoremas 4.8, 4.11 e 4.12, com o auxílio de funções de Lyapunov, estabelecemos condições suficientes para um sistema não autônomo impulsivo ser dissipativo. Já no Teorema 4.13, apresentamos a existência de uma função do tipo Lyapunov para um sistema não autônomo impulsivo dissipativo. A última seção, Seção 4.4, caracteriza a dissipatividade para o sistema (2).

O Capítulo 5 é fruto do nosso trabalho [15]. Inspirados no livro [17] e em outros textos do mesmo autor, estabelecemos o estudo de estabilidade para a seção nula de um fibrado com respeito a um sistema não autônomo impulsivo. Na Seção 5.1, apresentamos os conceitos de estabilidade uniforme para sistemas com impulsos. Os Teoremas 5.6 e 5.10 lidam com a estabilidade uniforme assintótica global para a seção nula. No caso de estabilidade local, temos o Teorema 5.11. Na Seção 5.2, estudamos a estabilidade para o sistema (2), utilizando os resultados de sistemas abstratos desenvolvidos na Seção 5.1. Finalizamos, na Seção 5.3, apresentando um modelo presa-predador, em que estão envolvidas duas espécies de presas e um predador, com ação de controle e impulsos. Estudamos a estabilidade da origem desse sistema presa-predador. Os resultados do Capítulo 5, também, foram realizados com o auxílio de funções de Lyapunov.

O Apêndice A constitui um material de apoio sobre alguns conceitos topológicos. A primeira seção exibe a construção de um sistema dinâmico em espaços de funções. Na segunda seção, familiarizamos o leitor com o conceito de fibrados de forma simplificada.

CAPÍTULO 1

Preliminares

O presente capítulo dedica-se à apresentação dos conceitos básicos da teoria de equações diferenciais impulsivas. Inicialmente, apresentamos as notações básicas utilizadas neste trabalho. No que segue, apresentamos uma introdução sobre a teoria de equações diferenciais com impulsos.

1.1 Notações

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos. O conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Já $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_+$ representam o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números inteiros não negativos, respectivamente. O espaço euclidiano n -dimensional é denotado por $\mathbb{R}^n$.

Seja (X, d) um espaço métrico com métrica d . Dados $\epsilon > 0$, $x \in X$ e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, vamos considerar

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\},$$

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$$

e

$$B(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}.$$

Dados $A, B \subset X$ subconjuntos não vazios, denotamos por $C(A, B)$ como sendo o conjunto das funções contínuas definidas em A tomando valores em B .

Vamos representar por $\{x_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X , onde n pertence ao conjunto

dos números naturais. Às vezes, representaremos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ simplesmente como

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Dado uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos os limites laterais $f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} f(s)$ e $f(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} f(s)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Em cada resultado deste trabalho apresentamos uma referência bibliográfica. Os resultados dos trabalhos do autor estão em **negrito**.

1.2 Equações diferenciais impulsivas

Inicialmente, apresentamos um exemplo básico com intuito de mostrar como os impulsos ocorrem de maneira natural em problemas da realidade.

Exemplo 1.1. *Consideremos a equação diferencial de Verhulst:*

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (1.1)$$

onde $r > 0$ e $K > 0$ são constantes. A equação (1.1) descreve a variação de $x(t)$ que representa uma população isolada de alguma espécie biológica com reprodução incessante habitando um ambiente estável com recursos limitados. As constantes $r > 0$ e $K > 0$ são chamadas de taxa de coeficiente e taxa de capacidade do ambiente, respectivamente.

As curvas integrais das soluções positivas da equação (1.1) estão esboçadas na Figura 1.1. Assumiremos que $x(t)$ representa a quantidade de uma certa espécie de micro-organismo cultivado em um biorreator.

Figura 1.1: Curvas integrais da equação de Verhulst (1.1).

Um efeito externo no desenvolvimento da espécie pode causar mudanças na quantidade de biomassa $x(t)$. Por exemplo, isso é possível com uma simples remoção de uma parte da biomassa ou com a introdução de uma quantidade suplementar de biomassa dentro

do biorreator. Dessa maneira, um efeito externo (efeito impulsivo) no instante $t = \tau_k$, produzirá um acréscimo δ_k na quantidade de biomassa, ou seja,

$$\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k^+) - x(\tau_k^-) = \delta_k,$$

onde $x(\tau_k^-)$ e $x(\tau_k^+)$, são respectivamente, as quantidades de biomassa antes e depois do efeito externo. Se existir uma adição de biomassa então $\delta_k > 0$. Por outro lado, se existir uma remoção de biomassa então $\delta_k < 0$. No entanto,

$$x(\tau_k^+) = x(\tau_k^-) + \delta_k > 0.$$

Portanto, isso significa que a população não será destruída com o resultado do efeito impulsivo.

Os momentos τ_k , de efeito impulsivo, podem ser escolhidos de vários modos. Porém, as duas seguintes escolhas são de interesse prático.

- (a) Os momentos de impulsos τ_k são pré-fixados, isto é, tais momentos são determinados antes de estudarmos o modelo matemático. Um caso interessante é quando os momentos τ_k são T -periódicos:

$$\tau_k = \tau_0 + kT, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- (b) Os momentos de impulsos τ_k ocorrem quando cada quantidade $x(\tau_k)$ é solução de alguma equação $\phi(x) = 0$. Se a equação $\phi(x) = 0$ possui apenas uma raiz $x = N$ e os acréscimos δ_k são constantes e iguais a C , então podemos escrever:

$$x(\tau_k^-) = N \quad \text{e} \quad \Delta x(\tau_k) = C, \quad (1.2)$$

onde $N + C > 0$.

No caso (b), a solução da equação (1.1) com condição inicial $x(0) = N + C$ e condição de impulso (1.2) é T -periódica e é dada por:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{K(N+C)}{N+C+(K-N-C)e^{-rt}} & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \frac{K(N+C)}{N+C+(K-N-C)e^{-r(t-kT)}} & \text{para } kT < t \leq kT + T, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

onde $T = \frac{1}{r} \ln \left[\frac{(K-N-C)N}{(N+C)(K-N)} \right]$.

Este exemplo é um dos muitos problemas de modelagem, onde o processo de evolução do modelo não é contínuo. Desta forma, necessitamos de uma teoria que estude o comportamento de soluções descontínuas. Apresentamos no que segue, a abordagem do estudo de equações impulsivas desenvolvida por Lakshmikantham, Bainov e Simeonov, [31].

Represente por Ω o espaço de fase de um processo de evolução, isto é, o conjunto dos estados. Denotamos por P_t o ponto que representa o estado do processo no instante t e assumimos que tal estado é determinado por n parâmetros. Então P_t pode ser interpretado como um ponto (t, x) de $\mathbb{R}^{n+1}$ e Ω como um subconjunto em $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathbb{R} \times \Omega$ será chamado de uma extensão do espaço de fase do processo de evolução. Assumiremos que a lei de evolução do processo seja descrita por:

i) uma equação diferencial da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.3)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ e $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$;

ii) subconjuntos $M_t, N_t \subset \mathbb{R} \times \Omega$ para cada $t \in \mathbb{R}$;

iii) um operador $A_t : M_t \rightarrow N_t$ definido para cada $t \in \mathbb{R}$.

O movimento do ponto P_t no espaço de fase é descrito do seguinte modo: o ponto P_t inicia seu movimento a partir do ponto inicial $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ e move-se ao longo da curva $(t, x(t))$ descrita pela solução $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ da equação (1.3) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ até o instante $t_1 > t_0$, quando P_t encontra o conjunto M_{t_1} . Nesse determinado instante t_1 o operador A_{t_1} “instantaneamente” transfere o ponto P_{t_1} da posição $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ para a posição $P_{t_1}^+ = (t_1, x_1^+) \in N_{t_1}$, onde $x_1^+ = A_{t_1}x(t_1)$. O ponto P_t continua seu movimento ao longo da curva $(t, x(t))$ descrita pela solução $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ da equação (1.3), neste momento, com condição inicial $x(t_1) = x_1^+$ até um novo encontro como conjunto M_{t_2} e assim por diante. Veja a Figura 1.2.

Figura 1.2: Curva integral da equação (1.3) com ação impulsiva.

As relações i), ii) e iii) caracterizam o processo de evolução que será chamado de *equação diferencial impulsiva* (EDI). A curva descrita pelo ponto P_t no espaço de fase é chamada uma *curva integral* e a função definida por essa curva é chamada uma *solução da equação diferencial impulsiva*, o qual será denotada por $\tilde{x}(t)$, associada a solução contínua $x(t)$ da equação diferencial (1.3). Os instantes t_k 's tais que o ponto P_t encontra o conjunto M_{t_k} são chamados de *momentos (ou instantes) de impulso*. Neste texto, vamos assumir que a solução da EDI é contínua à direita nos instantes de impulsos, ou seja, $\tilde{x}(t_k^+) = \tilde{x}(t_k)$ para todo k tal que P_{t_k} encontra o conjunto M_{t_k} .

A liberdade da escolha dos conjuntos M_t e N_t , e, do operador A_t , nos leva a uma grande diversidade de equações com impulsos. Um tipo de equação com abordagem recorrente na literatura é o caso em que os instantes de impulsos ocorrem quando alguma relação de

espaço-tempo $\phi(t, x)$ é satisfeita, isto é, quando $(t, x(t))$ encontra uma superfície definida pela equação $\phi(t, x) = 0$. Assim, a equação impulsiva é escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & \text{se } \phi(t, x) \neq 0, \\ \Delta x = I(t, x), & \text{se } \phi(t, x) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Nesse caso, os conjuntos M_t , N_t e o operador A_t são definidos pelas relações:

$$M_t = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : \phi(t, x) = 0\}, \quad N_t = \mathbb{R} \times \Omega \text{ e}$$

$$A_t : M_t \longrightarrow N_t, \quad (t, x) \longmapsto (t, x + I(t, x)),$$

onde $I : M_t \longrightarrow \Omega$ é uma *função impulso* e os pontos $t = t_k$ tais que $\phi(t_k, x(t_k)) = 0$ são os instantes de impulsos para a solução $\tilde{x}(t)$ do sistema (1.4). Por conseguinte, $\Delta \tilde{x}(t_k) = \tilde{x}(t_k) - \tilde{x}(t_k^-) = I(t_k, \tilde{x}(t_k^-))$ para cada k .

Denotamos por $\tilde{x}(t, t_0, x_0)$ a solução da equação (1.4) tal que $\tilde{x}(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Em [31], os autores desenvolvem a teoria em torno de três classes de equações diferenciais impulsivas. No que segue, apresentamos um breve resumo dessas classes.

Classe I: *Equações com impulsos pré-fixados.* As equações desta classe são descritas pelo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde os momentos de impulsos são previamente fixados definindo uma sequência $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que $\tau_k < \tau_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ a solução $\tilde{x}(t)$ de (1.5) satisfaz a equação $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, e para os instantes $t = \tau_k$, $\tilde{x}(t)$ satisfaz a relação $\tilde{x}(\tau_k) = \tilde{x}(\tau_k^-) + I_k(\tilde{x}(\tau_k^-))$.

Classe II: *Equações com impulsos não fixados.* As equações desta classe possuem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\tau_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ para todos $x \in \Omega$ e $k \in \mathbb{Z}$. Os momentos de impulsos do sistema (1.6) ocorrem quando o ponto (t, x) encontra alguma hipersuperfície σ_k dada pela equação $t = \tau_k(x)$, isto é, quando $t = \tau_k(\tilde{x}(t))$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Classe III: *Equações impulsivas autônomas.* Uma equação autônoma com impulsos é representada pelo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & x \notin \sigma, \\ \Delta x = I(x), & x \in \sigma, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde σ é uma superfície $(n - 1)$ -dimensional no espaço de fase $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Os momentos de impulsos da equação autônoma (1.7) ocorrem quando $\tilde{x}(t)$ encontra a superfície σ . Se a superfície σ é dada pela equação $\phi(x) = 0$, então podemos reescrever a equação (1.7) por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & \phi(x) \neq 0, \\ \Delta x = I(x), & \phi(x) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Podemos destacar algumas peculiaridades entre essas classes de equações impulsivas. Primeiro, uma característica comum dentre as equações impulsivas em distinção com as equações diferenciais ordinárias “clássicas” (sem impulsos) é que as soluções das equações que sofrem efeito impulsivo são contínuas por partes e com descontinuidades nos instantes de impulsos. No entanto, podemos notar que na equação (1.5) todas as soluções possuem instantes de impulsos iguais. Enquanto soluções distintas da equação (1.6) (ou (1.7)) possuem instantes de impulsos diferentes. O que torna o estudo das equações (1.6) e (1.7) mais difícil.

Outra peculiaridade a ser explorada é o fato que a equação (1.7) possui a propriedade de ser autônoma, isto é, $\tilde{x}(t, t_0, x_0) = \tilde{x}(t - t_0, 0, x_0)$ para todos $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ e $t > t_0$. Entretanto, no geral, os sistemas (1.5) e (1.6) não contemplam desta propriedade mesmo nos casos em que $f(t, x) = f(x)$ e $I_k(x) = I(x) \neq 0$ para $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \Omega$. Veja a seguir dois simples exemplos que mostram esse fato.

Exemplo 1.2. Consideremos a equação impulsiva com instantes de impulsos pré-fixados:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, & t \neq 2, \\ \Delta x = 1, & t = 2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Agora, note que:

$$\tilde{x}(t, 1, 0) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t < 2, \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

e

$$\tilde{x}(t - 1, 0, 0) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t < 3, \\ 1, & t \geq 3. \end{cases}$$

Assim $\tilde{x}(t, 1, 0) \neq \tilde{x}(t - 1, 0, 0)$ para $2 \leq t < 3$. Portanto, apesar da simplicidade da equação, o sistema (1.9) não possui a propriedade de ser autônomo.

Exemplo 1.3. Consideremos a equação diferencial impulsiva com instantes não fixados:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, & t \neq \tau_k(x), \quad t \geq 0, \\ \Delta x = x^2 \operatorname{sgn} x - x, & t = \tau_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $\tau_k(x) = x + 6k$, para $|x| < 3$, descreve a superfície $\sigma_k : t = \tau_k(x)$ e

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Note que:

$$\tilde{x}\left(t, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{para } 1 \leq t \leq 6,$$

e

$$\tilde{x}\left(t-1, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \text{para } \frac{3}{2} \leq t \leq 6.$$

Assim $\tilde{x}(t, 1, \frac{1}{2}) \neq \tilde{x}(t-1, 0, \frac{1}{2})$ para $\frac{3}{2} \leq t \leq 6$.

1.2.1 Existência de soluções

Nesta seção, apresentamos dois resultados importantes da teoria clássica de equações diferenciais com impulsos, no que diz respeito a existência de soluções.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Assumiremos, que para cada $k \in \mathbb{Z}$, a função $\tau_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em Ω e satisfaz as condições:

$$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \tau_k(x) = \pm\infty \quad (x \in \Omega).$$

Considere as funções $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $I_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, o par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, $\alpha < \beta$ e a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.11)$$

com condição inicial

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.12)$$

Definição 1.4. Uma função $\tilde{x} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de *solução* do sistema (1.11) se:

- (a) $(t, \tilde{x}(t)) \in \mathbb{R} \times \Omega$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$;
- (b) para $t \in (\alpha, \beta)$ e $t \neq \tau_k(\tilde{x}(t^-))$, $k \in \mathbb{Z}$, a função $\tilde{x}$ é diferenciável e $\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(t, \tilde{x}(t))$;
- (c) a função $\tilde{x}$ é contínua à direita em (α, β) e se $t \in (\alpha, \beta)$, $t = \tau_k(\tilde{x}(t^-))$ e $t \neq \beta$, então $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t^-) + I_k(\tilde{x}(t^-))$. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que $s \neq \tau_j(\tilde{x}(s^-))$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e $t < s < t + \delta$.

Definição 1.5. A solução do sistema (1.11) definida em um intervalo da forma $[t_0, t_0 + \beta)$, $\beta > 0$, a qual satisfaz a condição $x(t_0) = x_0$ é chamada uma *solução do problema de valor inicial* (1.11)-(1.12).

Seja $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ a solução contínua da equação $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Agora, seja $\tilde{x}(t, t_0, x_0)$ a solução do sistema impulsivo (1.11)-(1.12), existindo em algum intervalo $[t_0, t_0 + \beta)$ e com instantes de impulsos $\{t_i : i \in J \subset \mathbb{Z}\}$, $0 < t_0 < t_i < t_0 + \beta$ e $t_i < t_j$ se $i < j$, $i, j \in J$. Então, temos a seguinte relação:

$$\tilde{x}(t, t_0, x_0) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0^+), & t_0 \leq t < t_1, \\ x(t, t_1, x_1^+), & t_1 \leq t < t_2, \\ \vdots \\ x(t, t_i, x_i^+), & t_i \leq t < t_{i+1}, \\ \vdots \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $x_0^+ = x_0$ e $x_i^+ = x(t_i, t_{i-1}, x_{i-1}^+) + I_i(x(t_i, t_{i-1}, x_{i-1}^+))$ para $i = 1, 2, 3, \dots$. Observe que $x(t, t_i, x_i^+)$ é a solução do problema de valor inicial clássico:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_i) = x_i^+, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Se $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, então a existência e unicidade de uma solução local do problema de valor inicial (1.11)-(1.12) depende somente das propriedades da função f similarmente ao caso não impulsivo de equações. Por exemplo, se a função f é contínua em uma vizinhança do par (t_0, x_0) , então existe uma solução do problema valor inicial (1.11)-(1.12). Além disso, a solução é única se f for Lipschitz contínua nessa vizinhança.

Por outro lado, se $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, isto é, o par (t_0, x_0) pertence a alguma hipersuperfície $\sigma_k : t = \tau_k(x)$, então é possível que a solução $x(t)$ do problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.14)$$

esteja inteiramente contida em σ_k . Dessa maneira, é natural adicionar condições em f e em τ_k afim de garantir a existência de uma solução $x(t)$ do problema de valor inicial (1.14) em algum intervalo $[t_0, t_0 + \beta)$ de tal forma que

$$t \neq \tau_k(x(t)) \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + \beta) \quad \text{e } k \in \mathbb{Z}.$$

Vejam os próximos resultados.

Teorema 1.6. [31, Teorema 1.2.1] *Considere as seguintes condições:*

i) A função $f : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $t \neq \tau_k(x)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$;

ii) Para cada par $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, existe uma função localmente integrável $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que em uma pequena vizinhança W de (t, x) , tem-se

$$|f(s, y)| \leq \ell(s) \quad \text{para todo } (s, y) \in W;$$

iii) Para cada $k \in \mathbb{Z}$ a condição $t_1 = \tau_k(x_1)$ implica na existência de $\delta > 0$ tal que

$$t \neq \tau_k(x)$$

para todo $0 < t - t_1 < \delta$ e $|x - x_1| < \delta$.

Então, para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, existe uma solução $\tilde{x} : [t_0, t_0 + \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ do problema de valor inicial (1.11)-(1.12) para algum $\beta > 0$.

Ainda, em relação ao Teorema 1.6, notemos que a hipótese iii) somente é razoável quando as funções τ_k 's não possuem algum tipo de regularidade. De fato, se τ_k for diferenciável no ponto x_0 e $\tau'_k(x_0) \neq 0$, então o Teorema da Função Implícita garantirá que a condição iii) nunca irá acontecer. Por conseguinte, temos o seguinte Teorema de existência, para quando as funções τ_k 's são diferenciáveis.

Teorema 1.7. [31, Teorema 1.2.2] *Assuma que:*

i) $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;

ii) $\tau_k : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ é diferenciável para cada $k \in \mathbb{Z}$;

iii) se $t_1 = \tau_k(x_1)$ para algum $(t_1, x_1) \in \mathbb{R} \times \Omega$ e $k \geq 1$, então existe um $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} f(t, x) \neq 1 \tag{1.15}$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ tal que $|x - x_1| < \delta$ e $0 < t - t_1 < \delta$.

Então, para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, existe uma solução $\tilde{x} : [t_0, t_0 + \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ do problema de valor inicial (1.11)-(1.12) para algum $\beta > 0$.

As demonstrações dos teoremas de existência apresentados acima, bem como resultados sobre teoremas de continuação de soluções, unicidade, existência global e estabilidade, podem ser encontrados no livro [31]. De nenhuma maneira, a falta de um estudo mais profundo na teoria de equações diferenciais impulsivas compromete o entendimento deste trabalho nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 2

Sistemas dinâmicos impulsivos

Neste Capítulo, apresentamos a teoria de sistemas dinâmicos impulsivos. A Seção 2.1 introduz a teoria básica de sistemas dinâmicos para o caso contínuo. Na Seção 2.2, seguindo os textos [19, 20] e [26], descrevemos a teoria de sistemas dinâmicos com impulsos. Na Seção 2.3, apresentamos o estudo da continuidade da função que caracteriza o menor momento de tempo para o qual uma órbita encontra o conjunto de impulso. Além disso, apresentamos alguns resultados de convergência para sistemas impulsivos. Na última seção, apresentamos alguns conceitos e resultados auxiliares da teoria de sistemas impulsivos que serão utilizados neste trabalho.

2.1 Sistemas dinâmicos

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função tal que para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ o PVI (2.1) admite uma única solução $x(t, t_0, x_0)$ definida em $\mathbb{R}$. Deste modo, podemos definir uma família de aplicações definidas em $\mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$, representada por $\{\pi(t)\}_{t \geq 0}$, pela lei $\pi(t)x_0 = x(t, 0, x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e para cada $t \geq 0$. Note que essa família satisfaz as seguintes condições:

- i) $\pi(0) = id_{\mathbb{R}^n}$ (operador identidade);

- ii) $\pi(t+s) = \pi(t) \circ \pi(s)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}_+$;
- iii) $\pi(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

A condição ii) apresentada previamente resulta da unicidade de soluções e da identidade $x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Além disso, vamos denotar a composição $\pi(t) \circ \pi(s)$ simplesmente por $\pi(t)\pi(s)$.

As propriedades i), ii) e iii) definem um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$. De maneira geral, um sistema dinâmico em um espaço métrico X , com métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, é definido da seguinte maneira:

Definição 2.1. A tripla $(X, \pi, \mathbb{R})$ é chamada de *sistema dinâmico* em X se a aplicação

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

satisfaz as seguintes condições:

- a) $\pi(0)x = x$ para todo $x \in X$ (*Princípio da Identidade*);
- b) $\pi(t+s)x = \pi(t)\pi(s)x$ para todos $x \in X$ e $t, s \in \mathbb{R}$ (*Propriedade de Semigrupo*);
- c) A aplicação $X \times \mathbb{R} \ni (x, t) \rightarrow \pi(t)x$ é contínua.

Dizemos, também, que a família $\{\pi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ define um *sistema dinâmico* em X ou um *fluxo* em X . A tripla $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ ou a família $\{\pi(t)\}_{t \geq 0}$ de aplicações com restrição ao conjunto $\mathbb{R}_+$, satisfazendo as condições a), b) e c) acima, é chamada de *sistema semidinâmico* em X ou um *semifluxo* em X . O espaço X é denominado de *espaço de fase*. No espaço $X \times \mathbb{R}$ ($X \times \mathbb{R}_+$), consideramos a topologia produto. O leitor pode consultar as referências [2, 3, 17] sobre a teoria geral de sistemas dinâmicos contínuos.

No que segue, vamos considerar um sistema semidinâmico $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$. Por simplicidade, vamos denotar um sistema semidinâmico por (X, π) .

Denotemos, também, $\pi(t)x = \pi(x, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x \in X$. Para cada $x \in X$ fixo a *órbita positiva* (ou *trajetória positiva*) de x é definida por $\pi^+(x) = \{\pi(x, t) : t \in \mathbb{R}_+\}$, isto é, a evolução de x pela família $\{\pi(t)\}_{t \geq 0}$. Se $x \in X$ é tal que $\pi(x, t) = x$ para todo $t \geq 0$ então dizemos que x é *estacionário* (ou *crítico* ou *equilíbrio*). Se $\pi(x, T) = x$ para algum $T > 0$ então x é *periódico* com período T . Se $A \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$, $\pi(A, \Delta) = \{\pi(x, t) : x \in A \text{ e } t \in \Delta\}$.

Dizemos que um subconjunto A de X é *positivamente π -invariante* se $\pi^+(A) = \{\pi^+(x) : x \in A\} \subset A$. Claramente a órbita positiva de qualquer $x \in X$, $\pi^+(x)$, é positivamente π -invariante. Ainda, dizemos que A é *invariante* se $A = \pi^+(A)$.

O conceito de conjunto limite é introduzido a seguir. Tal conceito está ligado ao desdobramento da teoria de *atratores globais*. A tese [23] apresenta um rico material a cerca dessa teoria.

Definição 2.2. Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e A um subconjunto de X . O conjunto

$$L^+(A) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} \pi(A, s)} \right)$$

é chamado de *conjunto limite* de A . Se $A = \{a\}$ definimos $L^+(a) = L^+(\{a\})$.

O Lema 2.3 exibe uma caracterização muito útil do conjunto limite.

Lema 2.3. [17, Lema 1.2] *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e A um subconjunto de X , então*

$$L^+(A) = \left\{ y \in X : \text{existem sequências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \right. \\ \left. \text{tais que } t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e } \pi(a_n, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \right\}.$$

Pela Definição 2.2, o conjunto limite de um subconjunto A de X é um conjunto fechado. Além disso, o conjunto limite é positivamente π -invariante [17, Lema 1.2] e, se $\pi^+(x)$ for relativamente compacto para algum $x \in X$, então $L^+(x)$ será um conjunto não vazio e compacto, veja [17, Corolário 1.2].

Utilizando o Lema 2.3, verificamos que se A e B são subconjuntos de X então $L^+(A \cup B) \subset L^+(A) \cup L^+(B)$. Além disso, se $A \subset B$ então $L^+(A) \subset L^+(B)$.

Em relação a estabilidade, temos os seguintes conceitos.

Definição 2.4. Um subconjunto A de X é denominado:

1. π -estável, se dados $\epsilon > 0$ e $a \in A$ existe $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$ então $d(\pi(x, t), A) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$;
2. uniformemente π -estável, se ele for π -estável com δ independente de pontos de A .

2.2 Sistemas dinâmicos com impulsos

Nesta seção apresentamos o principal objeto de estudo do nosso trabalho. Motivados pelas equações com efeito impulsivo, estamos interessados em uma estrutura semelhante aos sistemas dinâmicos contínuos que contemplem e generalizam vários resultados da teoria clássica.

Consideremos, a seguir, alguns pré-requisitos para descrever um sistema semidinâmico impulsivo.

Sejam (X, π) um sistema semidinâmico, $t \geq 0$ e $x \in X$. Definimos o “passado” de x pelo seguinte conjunto: $F(x, t) = \{y \in X : \pi(y, t) = x\}$. E, para $\Delta \subset [0, +\infty)$ e $D \subset X$, definimos $F(D, \Delta) = \{F(x, t) : x \in D \text{ e } t \in \Delta\}$. Se $F(x, t) = \emptyset$ para todo $t > 0$ então x é chamado de *ponto inicial*.

Exemplo 2.5. Seja $(\mathbb{R}^2, \pi)$ um sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^2$, onde $\pi((x, y), t) = (x+t, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Considere $(x, y) = (1, 1)$ e $t = 1$, então $F((x, y), 1) = (0, 1)$, pois $(0, 1)$ é o único ponto tal que $\pi((0, 1), 1) = (1, 1)$. $F((x, y), \Delta) = [0, 1] \times \{1\}$ para o intervalo $\Delta = [0, 1]$. Finalmente, para o subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $D = \{1\} \times [0, 1]$, obtemos $F(D, \Delta) = [0, 1] \times [0, 1]$. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1: Conjuntos $F((1, 1), 1)$, $F((1, 1), [0, 1])$ e $F(\{1\} \times [0, 1], [0, 1])$.

Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e M um subconjunto não vazio e fechado de X tal que para cada $x \in M$, existe um $\epsilon_x > 0$ satisfazendo as condições:

$$F(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad \pi(x, (0, \epsilon_x)) \cap M = \emptyset. \quad (2.2)$$

Então a função $\phi : X \rightarrow (0, +\infty]$ dada pela lei

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{se } \pi(x, s) \in M \text{ e } \pi(x, t) \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ +\infty, & \text{se } M^+(x) = \emptyset, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} \pi(x, t) \right) \cap M$, $x \in X$, está bem definida. Se $M^+(x) \neq \emptyset$, então existe um único menor número positivo s tal que $\pi(x, s) \in M$ e $\pi(x, t) \notin M$ para $0 < t < s$. E neste caso, $\phi(x)$ representa o menor tempo positivo para o qual a órbita positiva de x encontra M .

A condição (2.2) significa que as trajetórias do sistema semidinâmico (X, π) são transversais ao conjunto M .

Neste momento, podemos apresentar a definição de um sistema impulsivo.

Definição 2.6. Um *sistema semidinâmico impulsivo*, denotado por $(X, \pi; M, I)$, consiste de um sistema semidinâmico (X, π) juntamente com um subconjunto fechado não vazio M de X satisfazendo a condição (2.2) e uma função contínua $I : M \rightarrow X$. A trajetória impulsiva de um ponto $x \in X$, representada por $\tilde{\pi}^+(x)$, é dada indutivamente como segue: se $M^+(x) = \emptyset$ então $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e neste caso, $\phi(x) = +\infty$. Se $M^+(x) \neq \emptyset$ então $\pi(x, \phi(x)) = x_1 \in M$ e $\pi(x, t) \notin M$ para $0 < t < \phi(x)$. Daí, definimos $\tilde{\pi}(x, \cdot)$ no intervalo $[0, \phi(x)]$ por:

$$\tilde{\pi}(x, t) = \begin{cases} \pi(x, t), & \text{para } t \in [0, \phi(x)) \\ I(x_1), & \text{para } t = \phi(x). \end{cases}$$

Denotamos x por x_0^+ e $I(x_1) = x_1^+$. Continuamos o processo a partir de x_1^+ .

Se $M^+(x_1^+) = \emptyset$ então, para $t \in [\phi(x), +\infty)$, definimos $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x_1^+, t - \phi(x))$. Neste caso, temos $\phi(x_1^+) = +\infty$. Agora, se $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, então temos que $\pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) = x_2 \in M$ e $\pi(x_1^+, t - \phi(x)) \notin M$ para $\phi(x) < t < \phi(x) + \phi(x_1^+)$. Assim, definimos $\tilde{\pi}(x, \cdot)$ no intervalo $[\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^+)]$ por:

$$\tilde{\pi}(x, t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - \phi(x)), & \text{para } t \in [\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^+)) \\ I(x_2), & \text{para } t = \phi(x) + \phi(x_1^+). \end{cases}$$

Denotamos $I(x_2) = x_2^+$. Portanto, $\tilde{\pi}(x, t)$ está definida no intervalo $[0, \phi(x) + \phi(x_1^+)]$. O processo continua a partir de x_2^+ e assim por diante. Veja a Figura 2.2.

Figura 2.2: Trajetória impulsiva do ponto x em $(X, \pi; M, I)$.

O processo descrito acima termina em um número finito de passos se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, ou ele continua indefinidamente se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, e, neste último caso, para $x \in X$, $\tilde{\pi}(x, \cdot)$ está definida no intervalo $[0, T(x))$ onde $T(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi(x_i^+)$.

Chamamos o conjunto M de *conjunto impulsivo*, a função I de *função impulso* e o ponto $\pi(x, \phi(x))$ de *ponto de impulso* de x .

A Proposição 2.7 seguinte nos diz que um sistema impulsivo satisfaz o princípio da identidade e a condição de semigrupo.

Proposição 2.7. [5, Proposição 2.1] *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Então:*

$$i) \tilde{\pi}(x, 0) = x;$$

$$ii) \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t), s) = \tilde{\pi}(x, t + s) \text{ para todos } t, s \in [0, T(x)) \text{ tais que } t + s \in [0, T(x)).$$

Observação 2.8. Como descrito na construção do sistema impulsivo, iremos utilizar a seguinte notação no decorrer deste trabalho:

$$x = x_0^+, \quad x_k = \pi(x_{k-1}^+, \phi(x_{k-1}^+)) \quad \text{e} \quad I(x_k) = x_k^+,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $t \geq 0$ temos que $\tilde{\pi}(x, t) = \pi(x, t)$ caso $0 \leq t < \phi(x)$, entretanto, se $t \geq \phi(x)$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{\pi}(x, t) = \pi \left(x_k^+, t - \sum_{j=0}^{k-1} \phi(x_j^+) \right).$$

2.3 Continuidade da função ϕ e resultados de convergência

A função ϕ definida em (2.3), que determina o menor instante estritamente positivo para o qual a órbita positiva de $x \in X$ sofre impulso, é uma ferramenta fundamental na teoria de sistemas com impulsos. Devido a importância dessa função, o autor K. Ciesielski dedica o artigo [20] ao estudo da semicontinuidade da função ϕ no contexto de sistemas dinâmicos e semidinâmicos. No que segue, abordaremos os resultados de semicontinuidade para sistemas semidinâmicos.

Iniciamos introduzindo o conceito de *seção*. Seções em sistemas dinâmicos são usadas para descrever o comportamento local de um ponto não estacionário. A definição a seguir permite descrever uma vizinhança de um ponto não estacionário de X de forma paralelizável, ou seja, como uma “caixa” em que os semifluxos vão de um lado ao outro da caixa durante um intervalo igual de tempo. A existência de tal seção é provada em [19].

Definição 2.9. Seja (X, π) um sistema semidinâmico. Um subconjunto fechado S contendo $x \in X$ é chamado de *seção* ou λ -*seção* através de x , com λ um número real positivo, se existe um subconjunto fechado L em X tal que:

$$(a) \quad F(L, \lambda) = S;$$

- (b) $F(L, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de x ;
- (c) $F(L, \mu) \cap F(L, \nu) = \emptyset$, para $0 \leq \mu < \nu \leq 2\lambda$.

Denominamos o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ de *tubo* (ou λ -*tubo*) e o conjunto L de *barra*. Veja a Figura 2.3.

Figura 2.3: λ -tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x .

Lema 2.10. [19, Lema 1.9] *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Assuma que S é uma λ -seção através de x e $0 < \mu \leq \lambda$. Então S é uma μ -seção através de x .*

As condições TC e STC para um tubo são apresentadas a seguir.

Definição 2.11. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo.

1. Um λ -tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado por uma seção S através de $x \in X$ tal que

$$S \subset M \cap F(L, [0, 2\lambda])$$

é chamado um *TC-tubo* através de x . Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a *Condição de Tubo* e escrevemos abreviadamente (TC), se existir um TC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x .

2. Um λ -tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ dado por uma seção S através de $x \in X$ tal que

$$S = M \cap F(L, [0, 2\lambda])$$

é chamado um *STC-tubo* através de x . Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz a *Condição Forte de Tubo* e escrevemos abreviadamente (STC), se existir um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x .

Note que pela condição (2.2), o conjunto impulsivo M não contém pontos estacionários.

Figura 2.4: $(0,0)$ satisfaz TC.

Exemplo 2.12. [20, Exemplo 2.5] *Considere o sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^2$ dado por $\pi((x,y),t) = (x+t,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}_+$, e $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=y, x \geq 0\}$ (veja a Figura 2.4). O ponto $(0,0)$ verifica a condição TC, mas não satisfaz a condição STC.*

O próximo resultado é uma consequência do Lema 2.10.

Lema 2.13. [20, Lema 3.3] *Assuma que em um sistema impulsivo $(X, \pi; M, I)$ um ponto $x \in X$ satisfaça a condição TC (STC) com um TC-tubo (STC-tubo) U_λ dado por uma λ -seção S . Então para qualquer $0 < \mu < \lambda$ o conjunto S gera uma μ -seção com um TC-tubo (STC-tubo).*

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *semicontínua superiormente* no ponto $a \in X$, quando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta$ então $f(x) < f(a) + \epsilon$. Ainda, f é *semicontínua inferiormente* no ponto $a \in X$, quando dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta$ então $f(x) > f(a) - \epsilon$. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *semicontínua superiormente (inferiormente)* se f é semicontínua superiormente (inferiormente) em cada ponto de X .

Exemplo 2.14. [20, Exemplo 2.9] *Considere o sistema semidinâmico e o conjunto impulsivo dados no Exemplo 2.12. Sabemos que cada $(x,y) \in M$ satisfaz a condição TC. Note que $\phi(0,y) = y$ para $y > 0$ e que $\phi(0,0) = +\infty$. Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente no ponto $(0,0)$.*

De acordo com o Exemplo 2.14, a função $X \ni x \mapsto \phi(x)$ não é semicontínua inferiormente sempre. Porém, em pontos fora do conjunto impulsivo M é válido o seguinte resultado.

Teorema 2.15. [20, Teorema 3.5] *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. A função ϕ é semicontínua inferiormente em qualquer ponto $x \notin M$.*

O Exemplo 2.14 nos diz, em particular, que $\phi|_M$ não é geralmente semicontínua inferiormente. No entanto, sob a condição de STC garantimos o seguinte resultado:

Teorema 2.16. [20, Teorema 3.7] *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que cada $x \in M$ satisfaça STC. Então $\phi|_M$ é semicontínua inferiormente.*

Em relação à continuidade superior de ϕ , a condição TC é requerida.

Teorema 2.17. [20, Teorema 3.4] *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que cada $x \in M$ satisfaça TC. Então ϕ é semicontínua superiormente em X .*

Desta maneira, concluímos o seguinte resultado sobre a continuidade da função ϕ .

Teorema 2.18. [20, Teorema 3.8] *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que cada $x \in M$ satisfaça TC e que M não contenha pontos iniciais do sistema (X, π) . Então ϕ é contínua em x se, e somente se, $x \notin M$.*

Agora, em posse do Teorema 2.18 e da continuidade da função impulso $I : M \rightarrow X$, podemos obter algumas propriedades de convergência.

Fixando um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ e assumindo que os pontos de M satisfaçam STC e $M \cap I(M) = \emptyset$, obtemos os Lemas 2.19, 2.20 e 2.21.

Lema 2.19. [5, Lema 3.2] *Sejam $x \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X que converge para x . Então para cada $t \geq 0$, existe uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $\tilde{\pi}(z_n, t + \epsilon_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x, t)$.*

Lema 2.20. [6, Lema 3.3] *Sejam $x \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X que converge para x . Então para $t \geq 0$ tal que $t \neq \sum_{j=0}^k \phi(x_j^+)$ para todo inteiro $k \in \mathbb{Z}_+$ tem-se $\tilde{\pi}(z_n, t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x, t)$.*

Lema 2.21. [14, Lema 4.1] *Sejam $x \in X \setminus M$ e $t \neq \sum_{j=0}^k \phi(x_j^+)$ para todo inteiro $k \geq 0$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B(x, \delta), t) \subset B(\tilde{\pi}(x, t), \epsilon)$.*

Observação 2.22. É importante mencionar, que nas provas dos Lemas 2.19 e 2.20, utilizamos o seguinte fato: como $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, $x \notin M$, I é contínua e M satisfaz STC então

$$(z_n)_{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_{k+1} \quad \text{e} \quad (z_n)_k^+ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_k^+,$$

onde $x_0^+ = x$, $(z_n)_0^+ = z_n$, $x_{k+1} = \pi(x_k^+, \phi(x_k^+))$, $(z_n)_{k+1} = \pi((z_n)_k^+, \phi((z_n)_k^+))$, $x_{k+1}^+ = I(x_{k+1})$ e $(z_n)_{k+1}^+ = I((z_n)_{k+1})$ para todo inteiro $k \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Fixe $x \in M$ e consideremos um λ -tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x dado por uma seção S . Então existe $\nu > 0$ tal que $B(x, \nu) \subset F(L, [0, 2\lambda])$, pois $F(L, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de x . Denotemos H_1 e H_2 pelos conjuntos

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(x, \nu) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(x, \nu).$$

Seja $\{z_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X tal que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Se $z_n \in H_1$ para todo inteiro $n \geq 1$ então $\phi(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Por outro lado, se $z_n \in H_2$ para todo inteiro $n \geq 1$ então $\phi(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(x)$. Veja as Figuras 2.5 e 2.6.

Quando a sequência $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset H_1$, então $\pi(z_n, \phi(z_n)) = (z_n)_1 \in M$ para todo inteiro $n \geq 1$ e $(z_n)_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Consequentemente, $\tilde{\pi}(z_n, \phi(z_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I(x)$.

Quando a sequência $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset H_2$, tomando $0 < \epsilon < \phi(x)$, seque que $\tilde{\pi}(z_n, \epsilon) = \pi(z_n, \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi(x, \epsilon) = \tilde{\pi}(x, \epsilon)$.

Em casos gerais, consideramos subsequências de $\{z_n\}_{n \geq 1}$ que estão em H_1 ou em H_2 .

Figura 2.5: $H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(x, \nu)$.

Figura 2.6: $H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(x, \nu)$.

2.4 Conjunto limite e invariância

Nesta seção, estenderemos alguns conceitos conhecidos da teoria clássica de sistemas dinâmicos para o caso impulsivo. Vamos considerar a partir deste momento e em todo o resto deste trabalho, as seguintes hipóteses gerais:

H1. Para cada $x \in X$ a evolução $\tilde{\pi}(x, \cdot)$ está definida para todo $t \geq 0$.

H2. $M \cap I(M) = \emptyset$.

H3. Os pontos de M não são pontos iniciais e satisfazem a condição STC. Consequentemente, a função ϕ é contínua em $X \setminus M$ e $\phi|_M$ é contínua.

A hipótese H1 é requerida para estudarmos a evolução do fluxo no infinito. O leitor pode encontrar condições suficientes para obter a hipótese H1 no artigo [22]. As hipóteses H2 e H3 são fundamentais para obtermos propriedades de convergência como apresentadas nos Lemas 2.19 e 2.20. Estas hipóteses são necessárias para obtermos propriedades qualitativas de sistemas impulsivos, como invariância, estabilidade, etc.

Exemplo 2.23. Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$ associado ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y, \end{cases} \quad (2.4)$$

isto é, $\pi((x, y), t) = \varphi(t, 0, (x, y))$, onde $\varphi(t, 0, (x, y))$ é a solução de (2.4) com condição inicial (x, y) em $t = 0$. Considere o conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$ e a função contínua I definida em M pela lei $I(3, y) = \left(1, \frac{y}{2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$. Assim $(X, \pi; M, I)$ é um sistema impulsivo satisfazendo as hipóteses H1, H2 e H3. Não é difícil ver que os pontos do conjunto M satisfazem STC. Veja a Figura 2.7.

Figura 2.7: Trajetória impulsiva do ponto (x, y) .

O sistema (2.4) sob ação de impulsos compreende pontos que possuem infinitos instantes de impulsos e outros que sequer sofrem ação impulsiva.

A noção de invariância em sistemas impulsivos é naturalmente estendida. Ou seja, dizemos que um subconjunto A de X é *positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante* se $\tilde{\pi}^+(A) = \{\tilde{\pi}^+(x) : x \in A\} \subset A$. Dizemos que A é *I-invariante* se $I(x) \in A$ para todo $x \in M \cap A$.

O Exemplo 2.23 mostra que os conceitos de invariância em sistemas contínuos e não contínuos não são equivalentes. Com efeito, o conjunto $A = [1, 3) \times \mathbb{R}$ é positivamente

$\tilde{\pi}$ –invariante mas não é positivamente π –invariante. Entretanto, uma implicação pode ser obtida perante hipóteses adicionais.

Teorema 2.24. [21, Proposição 2.1] *Seja A um subconjunto I –invariante e positivamente π –invariante de X . Então A é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante.*

Mesmo com as descontinuidades do sistema impulsivo, temos um resultado de compacidade para uma parte limitada da órbita positiva de um conjunto.

Lema 2.25. [8, Lema 3.6] *Seja A um subconjunto não vazio e relativamente compacto de X . Então o conjunto $\tilde{\pi}(A, [0, \ell])$ é relativamente compacto em X para cada $\ell > 0$.*

A seguir apresentamos o conceito de conjunto limite, análogo ao caso contínuo.

Definição 2.26. O conjunto limite de um subconjunto $A \subset X$ com respeito a $\tilde{\pi}$ é representado por:

$$\tilde{L}^+(A) = \bigcap_{t>0} \overline{\tilde{\pi}(A, [t, +\infty))}.$$

Se $A = \{a\}$, definimos $\tilde{L}^+(a) = \tilde{L}^+(\{a\})$.

O conjunto limite impulsivo $\tilde{L}^+(A)$ é fechado para todo $A \subset X$. Assim como no caso contínuo, onde foi usado argumentos topológicos, caracterizamos o conjunto limite no seguinte resultado.

Lema 2.27. [13, Lema 3.2] *Seja A um subconjunto de X , então*

$$\tilde{L}^+(A) = \left\{ y \in X : \text{existem sequências } \{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } \{x_n\}_{n \geq 1} \subset A \text{ tais que} \right. \\ \left. t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e } \tilde{\pi}(x_n, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \right\}.$$

Em particular, para $x \in X$, obtemos:

$$\tilde{L}^+(x) = \left\{ y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que} \right. \\ \left. t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e } \tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \right\}.$$

No Exemplo 2.23, $\tilde{L}^+(x, y) = [1, 3] \times \{0\}$. Em particular, note que o semifluxo impulsivo de $(3, 0)$ não está contido em $\tilde{L}^+(x, y)$. Concluimos que nem sempre o conjunto limite com respeito a um sistema impulsivo é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante. Diferenciando-se dos sistemas sem ação impulsiva. Veja a Figura 2.8.

No entanto, o conjunto $\tilde{L}^+(x, y) \setminus M$ é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante no Exemplo 2.23. Esse fenômeno reflete o resultado a seguir.

Teorema 2.28. [12, Proposição 4.1] *Seja A um subconjunto de X . Então o conjunto $\tilde{L}^+(A) \setminus M$ é positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante.*

Figura 2.8: Conjunto Limite impulsivo do ponto (x, y) .

O fato do semifluxo contínuo de (X, π) “atravessar” o conjunto impulsivo M e termos a hipótese H2, nos assegura que dado $x \in X$ o seu respectivo conjunto limite $\tilde{L}^+(x)$, quando existe, não pode estar contido em M . Observe o resultado a seguir.

Lema 2.29. [14, Lema 4.15] *Seja $x \in X$ e suponha que $\tilde{L}^+(x) \neq \emptyset$. Então $\tilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$.*

Demonstração. Se $\tilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$ não há nada o que provar. Do contrário, consideremos $y \in \tilde{L}^+(x) \cap M$.

Como temos a hipótese H3, podemos considerar um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de y dado por uma seção S . Portanto, existe $\eta > 0$ tal que $B(y, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Denotamos H_1 e H_2 da seguinte forma

$$H_1 = B(y, \eta) \cap F(L, (\lambda, 2\lambda]) \quad \text{e} \quad H_2 = B(y, \eta) \cap F(L, [0, \lambda]).$$

Como $y \in \tilde{L}^+(x)$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Para $\eta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_n) \in B(y, \eta)$ para todo $n \geq n_0$.

Se $\{t_n\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $\{t_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_{n_k}) \in H_1$ para todo $k \geq 1$, obtemos

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_{n_k}), \phi(\tilde{\pi}(x, t_{n_k}))) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I(y) \notin M.$$

Por outro lado, se $\{t_n\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $\{t_{n_r}\}_{r \geq 1}$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_{n_r}) \in H_2$ para todo $r \geq 1$, tomando $\epsilon_y > 0$ tal que $\pi(y, (0, \epsilon_y]) \cap M = \emptyset$, obtemos

$$\tilde{\pi}(\tilde{\pi}(x, t_{n_r}), \epsilon_y) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \pi(y, \epsilon_y) \notin M.$$

Em ambos os casos, obtemos $\tilde{L}^+(x) \setminus M \neq \emptyset$. □

O próximo resultado apresenta algumas condições para obtermos a compacidade do conjunto limite.

Lema 2.30. [8, Lema 3.6] *Seja $A \subset X$. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *para quaisquer sequências $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, a sequência $\{\tilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n \geq 1}$ é relativamente compacta;*

ii) *$\tilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e a convergência é válida*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} d(\tilde{\pi}(x, t), \tilde{L}^+(A)) = 0;$$

iii) *existe um subconjunto compacto não vazio $K \subset X$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} d(\tilde{\pi}(x, t), K) = 0.$$

CAPÍTULO 3

Sistemas dissipativos

Um sistema é *dissipativo* quando este transforma energia. Por exemplo, um carro em alta velocidade quando freia, o modelo mecânico envolvido transforma energia cinética em energia térmica e sonora. Logo, este “perde” um tipo de energia. A teoria sobre sistemas dissipativos em semigrupos é amplamente desenvolvida e se relaciona com atratores globais.

Uma ação externa agindo em um sistema - efeito impulsivo - pode “acelerar” ou “retardar” a perda de energia desse sistema. O propósito deste capítulo é apresentar os conceitos de atração e dissipatividade no contexto de sistemas impulsivos e desenvolver resultados para garantir que sistemas com impulsos gozem de tal natureza.

A Seção 3.1 define o conceito de dissipatividade em sistemas impulsivos e exhibe os principais resultados compreendidos em [8, 9]. A Seção 3.2 inclui as primeiras contribuições originais do trabalho para sistemas impulsivos autônomos. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para obtermos dissipatividade local utilizando funcionais de Lyapunov.

3.1 Dissipatividade em sistemas impulsivos

A noção de *atração* está intimamente ligada ao conceito da semidistância de Hausdorff. Recordemos que dados dois subconjuntos não vazios $A, B \subset X$, a *semidistância de Hausdorff* de A e B é definida por

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que um subconjunto A de X *atrai* um subconjunto B de X (ou B é *atraído* por A), pela ação de $\tilde{\pi}$, se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(B, t), A) = 0.$$

Equivalentemente, B é atraído por A , se dado $\epsilon > 0$ existe $l(\epsilon, B) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B, t) \subset B(A, \epsilon)$ para todo $t \geq l(\epsilon, B)$.

Definição 3.1. Seja $\mathfrak{M}$ uma família de subconjuntos de X . Um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é dito $\mathfrak{M}$ -*dissipativo*, se existe um subconjunto limitado $\mathcal{A} \subset X \setminus M$ tal que para todo $B \in \mathfrak{M}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(B, t), \mathcal{A}) = 0.$$

Neste caso, o conjunto $\mathcal{A}$ é denominado um *atrator* para a família $\mathfrak{M}$.

A Definição 3.2 exhibe os casos mais interessantes e usuais de dissipatividade.

Definição 3.2. O sistema $(X, \pi; M, I)$ é chamado:

1. *ponto dissipativo*, se existe um subconjunto limitado $\mathcal{A} \subset X \setminus M$ tal que para todo $x \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{\pi}(x, t), \mathcal{A}) = 0; \quad (3.1)$$

2. *compacto dissipativo*, se a convergência em (3.1) vale uniformemente em subconjuntos compactos de X ;
3. *localmente dissipativo*, se para qualquer ponto $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que a convergência em (3.1) vale uniformemente em $B(x, \delta_x)$;
4. *limitado dissipativo*, se o limite (3.1) vale uniformemente em subconjuntos limitados de X .

Note que um sistema ponto (compacto, localmente ou limitado) dissipativo é um sistema $\mathfrak{M}$ -dissipativo com $\mathfrak{M} = \{\{x\} : x \in X\}$ ($\mathfrak{M}$ = conjunto dos compactos de X , $\mathfrak{M} = \{B(x, \delta_x) : x \in X, \delta_x > 0\}$ ou $\mathfrak{M}$ = conjunto dos limitados de X).

Definição 3.3. Se $\mathcal{A}$ for compacto na Definição 3.2, o sistema $(X, \pi; M, I)$ será chamado de *ponto* (*compacto*, *localmente*, *limitado*) k -*dissipativo*.

Definição 3.4. O sistema $(X, \pi; M, I)$ é chamado:

1. *fracamente dissipativo*, se existe um subconjunto não vazio limitado $\mathcal{A} \subset X$ tal que $\tilde{\pi}^+(x) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Neste caso, $\mathcal{A}$ é chamado de *atrator fraco* do sistema $(X, \pi; M, I)$;
2. *fracamente k -dissipativo*, se existe um subconjunto não vazio compacto $\mathcal{K} \subset X$ tal que para todos $\epsilon > 0$ e $x \in X$ existe $\tau = \tau(x, \epsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, \tau) \in B(\mathcal{K}, \epsilon)$, isto é, $\tilde{L}^+(x) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Neste caso, $\mathcal{K}$ é chamado de *k -atrator fraco* para o sistema $(X, \pi; M, I)$;

3. *completamente contínuo*, se para todo subconjunto limitado B de X existe um $\tau = \tau(B) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B, \tau)$ é relativamente compacto e $\overline{\tilde{\pi}(B, \tau)} \cap M = \emptyset$;
4. *quase completamente contínuo*, se para todo subconjunto limitado B de X existe um $\tau = \tau(B) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B, \tau)$ é relativamente compacto.

Exemplo 3.5. [8, Exemplo 3.53] *Considere a equação diferencial linear $\dot{x} = Ax$ no espaço de Hilbert $H = L_2[0, 1]$, onde $A : H \rightarrow H$ é definido por*

$$(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau) \quad \text{para todos } \tau \in [0, 1] \text{ e } \varphi \in H.$$

O sistema dinâmico gerado por $\dot{x} = Ax$ é dado por

$$\pi(\varphi, t) = U(t)\varphi \quad \text{para todos } t \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi \in H,$$

onde $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in H$.

Considere o conjunto fechado $M = \left\{ \psi \in H : \int_0^1 |\psi(s)|^2 ds = 1 \right\}$ e uma função impulso $I : M \rightarrow H$ que satisfaça a condição $|I(\psi)|_H \leq \alpha|\psi|_H$ para todo $\psi \in M$ com $0 < \alpha < 1$. Note que $I(M) \cap M = \emptyset$.

O sistema impulsivo associado é ponto k -dissipativo, pois como $|\pi(\varphi, t)|_H \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ para todo $\varphi \in H$ e $|I(\psi)|_H \leq \alpha|\psi|_H$ para todo $\psi \in M$, podemos concluir que $|\tilde{\pi}(\varphi, t)|_H \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ para todo $\varphi \in H$. Assim, o sistema impulsivo é ponto k -dissipativo com atrator $\mathcal{A} = \{0\}$.

Assim como no caso contínuo, veja [17], o conceito de centro de Levinson é uma importante caracterização para sistemas compacto k -dissipativos com impulsos. Por esta razão, o artigo [8] apresenta o estudo da generalização desse conjunto para o contexto impulsivo. Nas próximas linhas, estabelecemos o conceito para o centro de Levinson.

Sejam $(X, \pi; M, I)$ compacto k -dissipativo e $\mathcal{A}$ um subconjunto compacto de X que atrai todos os subconjuntos compactos de X tal que $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$. Logo, para todo subconjunto compacto K de X , temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(K, t), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.2)$$

Pelo Lema 2.30, o conjunto limite $\tilde{L}^+(\mathcal{A})$ é não vazio e compacto. Defina

$$\tilde{\mathcal{J}} := \tilde{L}^+(\mathcal{A}). \quad (3.3)$$

Segue por [8, Lema 3.13] que $\tilde{\mathcal{J}} = \bigcap_{t \geq 0} \{\tilde{\pi}(\mathcal{A}, t)\}$. O conjunto $\tilde{\mathcal{J}}$ não depende da escolha do conjunto $\mathcal{A}$ o qual atrai a família de compactos de X , veja [8, Lema 3.15]. Chamamos o conjunto $\tilde{\mathcal{J}}$ de *centro de Levinson* do sistema impulsivo compacto k -dissipativo $(X, \pi; M, I)$.

Exemplo 3.6. [8, Exemplo 3.17] Considere o espaço $X = \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ e o sistema dinâmico gerado pelas equações

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (3.4)$$

em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$, independentemente. Considere $M = M_1 \cup M_2$, onde $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ e $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = 1\}$. Defina a função impulso $I : M \rightarrow X$ da seguinte maneira: $I(x, y, 0) = (x, y, 1)$ para $(x, y, 0) \in M_1$ e $I(x, y, 1) = (x, y, 0)$ para $(x, y, 1) \in M_2$.

O sistema impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é compacto k -dissipativo e $\tilde{\mathcal{J}} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é o seu centro de Levinson.

Definição 3.7. A variedade estável de um subconjunto A em $(X, \pi; M, I)$ é representada pelo conjunto $\tilde{W}^s(A) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{\pi}(x, t), A) = 0\}$.

Definição 3.8. Um subconjunto A em $(X, \pi; M, I)$ é chamado de:

1. *orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável*, se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $x \in X$ e $d(x, A) < \delta$ então $d(\tilde{\pi}(x, t), A) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$;
2. *$\tilde{\pi}$ -atrator*, se existe $\gamma > 0$ tal que $B(A, \gamma) \subset \tilde{W}^s(A)$;
3. *assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável*, se A é orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável e $\tilde{\pi}$ -atrator;
4. *globalmente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável*, se A é assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável e $\tilde{W}^s(A) = X$;

No que segue, apresentamos alguns resultados auxiliares que utilizaremos posteriormente neste trabalho.

Teorema 3.9. [8, Teorema 3.20] Sejam $(X, \pi; M, I)$ compacto k -dissipativo e $\tilde{\mathcal{J}}$ seu centro de Levinson. Então:

- i) $\tilde{\mathcal{J}} \cap M = \emptyset$;
- ii) $\tilde{\mathcal{J}}$ é compacto e positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante;
- iii) $\tilde{\mathcal{J}}$ é o atrator da família de subconjuntos compactos de X ;
- iv) $\tilde{\mathcal{J}}$ é o maior compacto positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante em $(X, \pi; M, I)$ tal que $\tilde{\mathcal{J}} \subset \tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{J}}, t)$ para cada $t \geq 0$.

Teorema 3.10. [8, Teorema 3.23] Seja A um subconjunto não vazio, compacto, positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante e assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável em $(X, \pi; M, I)$. Suponha que $I(\tilde{W}^s(A) \cap M) \subset \tilde{W}^s(A)$. Então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(K, t), A) = 0$ é válido para todo compacto K em $\tilde{W}^s(A)$.

Seja $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de subconjuntos não vazios, compactos, positivamente $\tilde{\pi}$ -invariantes e globalmente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estáveis em $(X, \pi; M, I)$, tais que $H_\lambda \cap M = \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 3.11. [8, Teorema 3.25] *Assuma que $(X, \pi; M, I)$ seja compacto k -dissipativo com centro de Levinson $\tilde{\mathcal{J}}$. Então $\tilde{\mathcal{J}} = \cap \{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.*

3.2 Sistemas autônomos dissipativos via funções de Lyapunov

Nesta seção, apresentamos a nossa contribuição à teoria de sistemas impulsivos dissipativos autônomos. Os resultados principais, apresentam condições para obtermos dissipatividade local via funções do tipo Lyapunov. Os resultados desta seção estão apresentados no artigo [14].

No que segue, utilizaremos funções a valores reais definidas em X que são não crescentes ao longo do semifluxo. Tais funções são chamadas de funções do tipo Lyapunov.

Iniciamos apresentando um resultado preliminar para sistemas fracamente dissipativos.

Lema 3.12. [14, Proposição 4.2] *Seja $(X, \pi; M, I)$ fracamente dissipativo com atrator fraco $\mathcal{A}$. Dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existem $T = T(x, \epsilon) > 0$ e $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tais que*

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta), [T, +\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(\mathcal{A}, \epsilon), [0, +\infty)).$$

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$ dados. Como $\mathcal{A}$ é atrator fraco, segue que existe um número $t_x = t_x(\epsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_x) \in B(\mathcal{A}, \frac{\epsilon}{2})$. Sem perda de generalidade,

assumimos que $t_x \neq \sum_{i=0}^k \phi(x_i^+)$ para todo inteiro $k \geq 0$, pois $B(\mathcal{A}, \frac{\epsilon}{2})$ é aberto.

Se $x \notin M$, o resultado segue pelo Lema 2.21.

Se $x \in M$, pela hipótese H3 (apresentada na Seção 2.4), o conjunto M satisfaz a condição STC, consequentemente, existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ passando por x dado por uma seção S . Além disso, podemos obter $\eta > 0$ tal que $B(x, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$, pois o tubo é uma vizinhança de x . Denote H_1 e H_2 por

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(x, \eta) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(x, \eta).$$

Usando as continuidades de I , π e ϕ , obtemos $0 < \eta_2 < \eta$ tal que $\tilde{\pi}(B(x, \eta_2) \cap H_2, t_x) \subset B(\mathcal{A}, \epsilon)$.

Por outro lado, uma vez que $I(x) \notin M$, segue que existe $t_{I(x)} = t_{I(x)}(\epsilon) > 0$ tal que $\tilde{\pi}(I(x), t_{I(x)}) \in B(\mathcal{A}, \frac{\epsilon}{2})$. Podemos assumir que $t_{I(x)} \neq \sum_{i=0}^k \phi(I(x)_i^+)$ para todo inteiro

$k \geq 0$. Logo, podemos obter $\eta_1 > 0$ ($\eta_1 < \eta$) tal que

$$\tilde{\pi}(B(x, \eta_1) \cap H_1, t_{I(x)}) \subset B(\mathcal{A}, \epsilon).$$

Portanto, concluímos o resultado tomando $\delta = \delta(x, \epsilon) = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ e $T = T(x, \epsilon) = \max\{t_x, t_{I(x)}\}$. $\square$

Corolário 3.13. [14, Corolário 4.3] *Seja $(X, \pi; M, I)$ fracamente k -dissipativo com k -atrator fraco $\mathcal{K}$. Dados $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existem $T = T(x, \epsilon) > 0$ e $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tais que*

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta), [T, +\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(\mathcal{K}, \epsilon), [0, +\infty)).$$

É sabido que dissipatividade local implica em dissipatividade fraca, veja [8]. O próximo resultado mostra condições suficientes para uma recíproca desse fato utilizando funções de Lyapunov.

Teorema 3.14. [14, Teorema 4.4] *Seja $(X, \pi; M, I)$ fracamente dissipativo com atrator fraco $\mathcal{A} \subset X$. Suponha que existam $\eta > 0$, $r \geq 0$ e uma função $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $t \geq 0$;
- ii) $B_\eta \cap M = \emptyset$, em que $B_\eta = B(\mathcal{A}, \eta)$;
- iii) para toda sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, temos que $d(x_n, B_\eta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ se, e somente se, $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$.

Então $(X, \pi; M, I)$ é localmente dissipativo.

Demonstração. Defina

$$c = \inf\{\mathcal{V}(x) : x \notin B(\mathcal{A}, 2\eta) \cup M\}.$$

Note que $c > r$, pois a função $\mathcal{V}$ satisfaz a condição iii).

Dados $\epsilon > 0$ ($\epsilon < \eta$) e $x \in X$, segue pelo Lema 3.12 que existem $\delta_x = \delta(x, \epsilon) > 0$ e $T_x = T(x, \epsilon) > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta_x), [T_x, +\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(\mathcal{A}, \epsilon), [0, +\infty)).$$

Afirmamos que existe $\tau > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(\mathcal{A}, \epsilon), t) \subset B(\mathcal{A}, 2\eta) \quad \text{para todo } t \geq \tau.$$

Com efeito, suponhamos o contrário que existem $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset B(\mathcal{A}, \epsilon)$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x_n, t_n) \notin B(\mathcal{A}, 2\eta)$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Primeiro, notamos que

$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_n, t_n)) \geq c$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Por outro lado, o item *iii*) implica que existe um natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V}(x_n) < c$ para todo $n \geq n_0$. Portanto

$$c \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_{n_0}, t_{n_0})) \leq \mathcal{V}(x_{n_0}) < c,$$

o que é uma contradição. Portanto a afirmação está provada e

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta_x), [T_x + \tau, +\infty)) \subset B(\mathcal{A}, 2\eta),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Quando o atrator fraco é compacto, o seguinte resultado é obtido.

Teorema 3.15. [14, Teorema 4.5] *Seja $(X, \pi; M, I)$ fracamente k -dissipativo com k -atrator fraco $\mathcal{K}$. Suponha que existam um subconjunto limitado $\mathcal{B} \supset \mathcal{K}$, um número $r \geq 0$ e uma função $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em uma vizinhança de $\mathcal{K}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $t \geq 0$;*
- ii) $d(\mathcal{B}, M) = \inf\{d(x, y) : x \in \mathcal{B} \text{ e } y \in M\} > 0$;*
- iii) para toda sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, temos que $d(x_n, \mathcal{B}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ se, e somente se, $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$.*

Então $(X, \pi; M, I)$ é localmente dissipativo.

Demonstração. Seja $\eta > 0$ tal que $B(\mathcal{B}, \eta) \cap M = \emptyset$ e defina

$$c = \inf\{\mathcal{V}(x) : x \notin B(\mathcal{B}, \eta) \cup M\}.$$

Pela condição *iii*), temos que $c > r$. Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < c - r$, existe $a_0 > 0$ tal que

$$z \in B(\mathcal{K}, a_0) \implies \mathcal{V}(z) - r < \epsilon, \quad (3.5)$$

pois $\mathcal{K}$ é compacto e a função $\mathcal{V}$ é contínua em uma vizinhança de $\mathcal{K}$.

O Corolário 3.13 garante que dado $x \in X$ existem $\delta_x = \delta(x, a_0) > 0$ e $T_x = T(x, a_0) > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta_x), [T_x, +\infty)) \subset \tilde{\pi}(B(\mathcal{K}, a_0), [0, +\infty)).$$

Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 3.14 e a implicação (3.5), asseguramos que existe $\tau > 0$ tal que

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta_x), [T_x + \tau, +\infty)) \subset B(\mathcal{B}, \eta).$$

Assim, provamos o resultado. $\square$

Corolário 3.16. [14, Corolário 4.6] *Sob as hipóteses do Teorema 3.14, se o sistema $(X, \pi; M, I)$ for completamente contínuo então $(X, \pi; M, I)$ será localmente k -dissipativo. Analogamente, nas hipóteses do Teorema 3.15, o sistema $(X, \pi; M, I)$ será localmente k -dissipativo se $(X, \pi; M, I)$ for completamente contínuo.*

Corolário 3.17. [14, Corolário 4.7] *Sob as hipóteses do Teorema 3.14, se $\dim X < \infty$ então $(X, \pi; M, I)$ é localmente k -dissipativo. Analogamente, sob as hipóteses do Teorema 3.15, o sistema $(X, \pi; M, I)$ será localmente k -dissipativo se $\dim X < \infty$.*

Corolário 3.18. [14, Corolário 4.8] *Sob as condições do Corolário 3.16 (Corolário 3.17), o sistema $(X, \pi; M, I)$ é limitado k -dissipativo. Além disso, o sistema $(X, \pi; M, I)$ admite um atrator compacto que atrai limitados.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.16, o sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente k -dissipativo e, consequentemente, é compacto k -dissipativo. Seja $\tilde{\mathcal{J}}$ o centro de Levinson de $(X, \pi; M, I)$ e $B \subset X$ um subconjunto limitado. Note que existe $\ell > 0$ tal que $\tilde{\pi}(B, \ell)$ é compacto e $\tilde{\pi}(B, \ell) \cap M = \emptyset$, pois $(X, \pi; M, I)$ é completamente contínuo. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(B, t), \tilde{\mathcal{J}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\tilde{\pi}(\overline{\tilde{\pi}(B, \ell)}), t, \tilde{\mathcal{J}}) = 0$$

concluindo o resultado. □

Exemplo 3.19. [14, Exemplo 4.9] *Seja $(\mathbb{R}^n, \pi)$ um sistema dinâmico dado pela equação diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x_i f_i(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, e para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Dado $r_0 > 0$, considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r_0\}$, onde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Sejam M um conjunto impulsivo em $\mathbb{R}^n$ e $I : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função impulso tais que:

1. $I(M) \cap M = \emptyset$;
2. $\|I(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in M$;
3. $M \cap A = \emptyset$.

Afirmamos que o sistema impulsivo $(\mathbb{R}^n, \pi; M, I)$ é fracamente k -dissipativo.

De fato, considere a função $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp \left[\frac{-1}{\|x\| - r_0} \right], & \text{se } x \notin A, \\ 0, & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Notemos que ψ é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $\psi(x) \rightarrow 0$ se, e somente se, $d(x, A) \rightarrow 0$.

Afirmção 1: $\psi(\pi(x_0, t)) \leq \psi(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \geq 0$.

Ora, sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $x(t) := x(t, 0, x_0) = \pi(x_0, t)$, onde $x(t, 0, x_0)$ é a solução de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x_0$. Supondo que $\|x(t)\| > r_0$, obtemos

$$\psi'(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \exp \left[\frac{-1}{\|x(t)\| - r_0} \right] \cdot \frac{x_i(t) f_i(x)}{(\|x(t)\| - r_0)^2 \|x(t)\|} < 0$$

para todo $t \geq 0$ tal que $x(t) \notin A$. Agora, se $x(t) \in A$ então $\psi'(x(t)) = 0$. Isto garante que $\psi'(\pi(x_0, t)) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. Assim, $\psi(\pi(x_0, t)) \leq \psi(x_0)$ para todo $t \geq 0$.

Afirmção 2: $\psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) \leq \psi(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para $0 \leq t < \phi(x_0)$, segue da Afirmção 1 que

$$\psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) = \psi(\pi(x_0, t)) \leq \psi(x_0).$$

Em $t = \phi(x_0)$, a Condição 2 e a Afirmção 1 implicam que

$$\psi(\tilde{\pi}(x_0, \phi(x_0))) = \psi(I((x_0)_1)) \leq \psi((x_0)_1) = \psi(\pi(x_0, \phi(x_0))) \leq \psi(x_0).$$

Analogamente, para $\phi(x_0) < t < \phi(x_0) + \phi((x_0)_1^+)$,

$$\psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) = \psi(\pi((x_0)_1^+, t - \phi(x_0))) \leq \psi((x_0)_1^+) = \psi(I((x_0)_1)) \leq \psi(x_0),$$

e assim por diante.

Afirmção 3: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. O limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\tilde{\pi}(x_0, t))$ existe, pois pela Afirmção 2, temos $0 \leq \psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) \leq \psi(\tilde{\pi}(x_0, s))$ para todo $t \geq s \geq 0$. Suponhamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) = \ell > 0. \quad (3.6)$$

Defina o conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \|x_0\| \text{ e } \ell \leq \psi(x) \leq \psi(x_0)\}$. Note que K é compacto, e portanto, podemos definir

$$\eta := \min\{-\psi'(w) : w \in K\}.$$

Note que $A \cap K = \emptyset$ pois $\psi|_A = 0$. Desta maneira, $\eta > 0$. A propósito, $\tilde{\pi}(x_0, t) \in K$ para todo $t \geq 0$. Assim, $-\psi'(\tilde{\pi}(x_0, t)) \geq \eta$ para todo $t \geq 0$. Integrando a última inequação de 0 a t , obtemos

$$\psi(\tilde{\pi}(x_0, t)) \leq \psi(x_0) - \eta t, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Isso é um absurdo, pois ψ é uma função positiva. Portanto, $\ell = 0$.

Pela Afirmção 3, o sistema $(\mathbb{R}^n, \pi; M, I)$ é fracamente k -dissipativo e $\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \frac{r_0}{2}\right\}$ é um k -atrator fraco.

Finalizamos esta seção, apresentando uma “recíproca” para o Teorema 3.14.

Teorema 3.20. [14, Teorema 4.23] *Seja $(X, \pi; M, I)$ localmente dissipativo com atrator local $\mathcal{A}$. Suponha que exista $\beta > 0$ tal que $\phi(x) \geq \beta$ para todo $x \in I(M)$. Dado $\eta > 0$ existe uma função $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínua em $X \setminus M$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $t \geq 0$;
- ii) Se $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ é uma sequência tal que $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ então $d(x_n, B_\eta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, onde $B_\eta = B(\mathcal{A}, \eta)$.

Demonstração. Defina $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\mathcal{V}(x) = \sup_{t \geq 0} d(\tilde{\pi}(x, t), B_\eta), \quad x \in X. \quad (3.7)$$

Note que $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) = \sup_{s \geq 0} d(\tilde{\pi}(x, t + s), B_\eta) \leq \sup_{s \geq 0} d(\tilde{\pi}(x, s), B_\eta) = \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$. Além disso, se $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ é uma sequência tal que $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ então,

$$d(x_n, B_\eta) \leq \sup_{t \geq 0} d(\tilde{\pi}(x_n, t), B_\eta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Resta mostrar que a função $\mathcal{V}$ é contínua em $X \setminus M$. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideremos a notação

$$D(x_k^+) = \begin{cases} [0, \phi(x_k^+)], & \text{se } \phi(x_k^+) < +\infty \\ [0, +\infty), & \text{se } \phi(x_k^+) = +\infty. \end{cases}$$

Sejam $x \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X$ uma sequência tal que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Podemos assumir que $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X \setminus M$. Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < \eta$, existem $\delta_x > 0$ e $T_x > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(B(x, \delta_x), [T_x, +\infty)) \subset B(\mathcal{A}, \epsilon) \subset B_\eta, \quad (3.8)$$

pois $(X, \pi; M, I)$ é localmente dissipativo.

Já que $B(\mathcal{A}, \epsilon)$ é aberto, podemos assumir que $T_x \neq \sum_{i=0}^j \phi(x_i^+)$ para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Além disso, a hipótese de que $\phi(x) \geq \beta$ para todo $x \in I(M)$, garante que o semifluxo impulsivo de x admite um número finito de descontinuidades no intervalo $[0, T_x]$, digamos m instantes de impulsos.

A atração (3.8) nos permite dizer que o supremo da definição da função $\mathcal{V}$ em (3.7) é atingido. Logo, existem $k = k(x) \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $\tau_x \in D(x_k^+) \cap [0, T_x]$ tais que

$$\mathcal{V}(x) = d(\pi(x_k^+, \tau_x), B_\eta).$$

Uma vez que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, podemos assumir que existem $\ell_n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $\tau_n \in D((z_n)_{\ell_n}^+) \cap [0, T_x)$ tais que $\mathcal{V}(z_n) = d(\pi((z_n)_{\ell_n}^+, \tau_n), B_\eta)$ para todo inteiro $n \geq 1$. Consequentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que podemos decompor a sequência $\{z_n\}_{n \geq n_0}$ da seguinte maneira,

$$\{z_n\}_{n \geq n_0} = \{z_{n_{1j}}\}_{j \geq n_0} \cup \dots \cup \{z_{n_{rj}}\}_{j \geq n_0},$$

onde $\{z_{n_{ij}}\}_{j \geq n_0}$ é uma subsequência de $\{z_n\}_{n \geq n_0}$, $\ell_{n_{ij}} = \ell_{n_i} \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ para todo inteiro $j \geq n_0$, $1 \leq r \leq m + 1$ e $1 \leq i \leq r$.

Consideremos, agora, uma subsequência arbitrária $\{z_{n_{ij}}\}_{j \geq n_0}$, onde $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Por conveniência, denotemos $\{z_{n_{ij}}\}_{j \geq n_0}$ por $\{z_{n_j}\}_{j \geq n_0}$ e $\ell_{n_{ij}} = \ell$. Portanto, $\mathcal{V}(z_{n_j}) = d(\pi((z_{n_j})_{\ell}^+, \tau_{n_j}), B_\eta)$ para todo inteiro $j \geq n_0$.

Podemos assumir que $\tau_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nu \in D(x_{\ell}^+) \cap [0, T_x]$ (a menos de subsequência). Note que

$$\mathcal{V}(z_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} d(\pi(x_{\ell}^+, \nu), B_\eta).$$

Vamos mostrar que $\mathcal{V}(x) = d(\pi(x_{\ell}^+, \nu), B_\eta)$. Com efeito, podemos escolher uma sequência $\{\beta_j\}_{j \geq n_0}$ tal que $\beta_j \in D((z_{n_j})_k^+) \cap [0, T_x)$, $j \geq n_0$, e $\beta_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \tau_x$. Pela definição de $\mathcal{V}$, obtemos

$$d(\pi((z_{n_j})_{\ell}^+, \tau_{n_j}), B_\eta) \geq d(\pi((z_{n_j})_k^+, \beta_j), B_\eta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tomando o limite quando $j \rightarrow +\infty$, obtemos

$$d(\pi(x_{\ell}^+, \nu), B_\eta) \geq d(\pi(x_k^+, \tau_x), B_\eta) = \mathcal{V}(x).$$

Por outro lado, temos que $\mathcal{V}(x) \geq d(\pi(x_{\ell}^+, \nu), B_\eta)$, ou seja, $\mathcal{V}(x) = d(\pi(x_{\ell}^+, \nu), B_\eta)$.

Em conclusão, $\mathcal{V}(z_{n_{ij}}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x)$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$, e consequentemente, $\mathcal{V}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x)$, o que mostra a continuidade de $\mathcal{V}$ em $X \setminus M$. $\square$

Sistemas não autônomos dissipativos impulsivos

Este capítulo apresenta a teoria de sistemas não autônomos dissipativos com impulsos. Na Seção 4.1, abordamos a motivação para a formulação de um sistema não autônomo abstrato. Na Seção 4.2, introduzimos a teoria de sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos. Na Seção 4.3, obtemos resultados de dissipatividade para sistemas dinâmicos não autônomos impulsivos utilizando funções do tipo Lyapunov. Na última seção, a saber Seção 4.4, aplicamos os resultados da teoria abstrata de sistemas não autônomos para uma classe de equações diferenciais não autônomas com impulsos.

4.1 Sistemas dinâmicos não autônomos

Consideremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(p, x), & x \in \mathbb{R}^m, \\ \frac{dp}{dt} = f(p), & p \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções tais que o sistema (4.1) admita soluções globais com unicidade.

A solução $p(t)$ da equação $\frac{dp}{dt} = f(p)$ representa um sistema dinâmico autônomo independente em $\mathbb{R}^n$. Denote por $p(t) = p(t, p_0)$ como sendo a solução de $\frac{dp}{dt} = f(p)$ com condição inicial $p(0) = p_0$. Utilizando a solução $p(t, p_0)$ na primeira equação do sistema

(4.1), obtemos

$$\frac{dx}{dt} = g(p(t, p_0), x) \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^m, \quad (4.2)$$

o qual é não autônoma. Seja $x(t, p_0, x_0)$ a solução de (4.2) com condição inicial $x(0) = x_0$. Então, a função $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$\pi((p_0, x_0), t) = (p(t, p_0), x(t, p_0, x_0)),$$

define um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^{n+m}$. Ademais, pela propriedade de semigrupo de π concluímos a seguinte propriedade para $x(t)$:

$$x(t + s, p_0, x_0) = x(t, p(s, p_0), x(s, p_0, x_0)) \quad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R} \text{ e } (p_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Tal propriedade é conhecida como *propriedade de cociclo*.

A solução $p(t, p_0)$ é considerada o “dirigente” do sistema não autônomo (4.2), isto é, ela é responsável pela mudança no campo de vetores com a passagem do tempo. A solução $x(t, p_0, x_0)$ de (4.2) com condição inicial $x(0) = x_0$ é chamada de *cociclo*. Esta solução depende da escolha de p_0 como parâmetro e descreve a evolução da solução da equação diferencial não autônoma (4.1) com o respectivo “sistema dirigente” $(\mathbb{R}^n, p, \mathbb{R})$. O sistema dinâmico produto $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \pi, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{n+m}$ dado pela aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\pi((p_0, x_0), t) = (p(t, p_0), x(t, p_0, x_0))$, é chamado de *produto Skew*, devido a sua assimetria nas duas componentes.

O conceito formal de um cociclo é apresentado na próxima definição.

Definição 4.1. Sejam $(Y, \sigma, \mathbb{R})$ um sistema dinâmico em Y e W um espaço métrico. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times W \times Y \rightarrow W \times Y$ que satisfaz as propriedades:

- (a) φ é contínua em $\mathbb{R} \times W \times Y$,
- (b) $\varphi(0, w, y) = w$ para todo $w \in W$ e $y \in Y$,
- (c) $\varphi(t + s, w, y) = \varphi(t, \varphi(s, w, y), \sigma(s, y))$ para todo $w \in W$, $y \in Y$ e $t, s \in \mathbb{R}$,

é chamada de *cociclo*. A Figura 4.1 apresenta a propriedade de um cociclo.

Agora, consideremos uma equação diferencial não autônoma do tipo

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3)$$

onde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Assumamos que a equação (4.3) admita uma única solução global $u(t, s, x)$ com condição inicial $u(s) = x$. Devido à dependência do tempo, (4.3) não gera um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$. Uma alternativa para construir um sistema dinâmico associado a (4.3), é adicionar uma dimensão e seguir a construção do produto Skew considerando o seguinte sistema triangular:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{dt}{dt} = 1. \end{cases}$$

Figura 4.1: Propriedade de cociclo.

Neste caso, o sistema dirigente corresponde ao sistema de translações, isto é, $\sigma(s, t) = t - s$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$, e o cociclo é definido por $\varphi(t, s, x) = u(t + s, s, x)$. Portanto, o produto skew é definido pela lei

$$\pi((x, s), t) = (u(t + s, s, x), t - s), \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta formulação apresenta algumas desvantagens relacionadas com compacidade.

Para estudarmos a dinâmica de (4.3), devemos ter uma estrutura que capture a topologia das componentes do sistema ao invés da natureza diferencial do espaço, pois a diferenciabilidade de f com respeito a t usualmente contribui para a regularidade das soluções e não para seu comportamento dinâmico.

De maneira precisa, seguindo [17], consideremos o espaço $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, onde

$$f_\tau(t, u) = f(t + \tau, u),$$

para todo $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\tau \in \mathbb{R}$. O fecho na definição de $H(f)$ é tomado no espaço $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Temos que $(H(f), \sigma, \mathbb{R})$, onde $\sigma(g, t) = g_t$ para todo $g \in H(f)$ e $t \in \mathbb{R}$, define um sistema dinâmico em $H(f)$, conhecido como sistema das translações em $H(f)$, veja [17].

Para cada $g \in H(f)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, seja $u(t, x, g)$ a única solução global da equação

$$\frac{du}{dt} = g(t, u), \quad u(0) = x. \quad (4.4)$$

Então, (4.3) gera um produto skew $(\mathbb{R}^n \times H(f), \pi, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n \times H(f)$, onde a aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \times H(f) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times H(f)$ é dada pela lei:

$$\pi((x, g), t) = (\varphi(t, x, g), \sigma(g, t)) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } g \in H(f).$$

Tal configuração topológica permite aplicar a teoria abstrata de dinâmica topológica, uma vez que a projeção na segunda coordenada $p_2 : \mathbb{R}^n \times H(f) \rightarrow H(f)$ induz um *homomorfismo*, ou seja, $p_2(\pi((x, g), t)) = \sigma(p_2(x, g), t)$ para todo $(x, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f)$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 4.2. A tripla $\langle (X, \pi), (Y, \sigma), h \rangle$, onde $(X, \pi, \mathbb{R}), (Y, \sigma, \mathbb{R})$ são sistemas dinâmicos, h é um homomorfismo de (X, π) em (Y, σ) e (X, h, Y) é um fibrado localmente trivial (veja Apêndice A) é chamado *sistema dinâmico não autônomo*.

A equação (4.3) gera um sistema não autônomo abstrato como na Definição 4.2, sendo $h : \mathbb{R}^n \times H(f) \longrightarrow H(f)$ a projeção na segunda coordenada. Note que, em particular, $(\mathbb{R}^n \times H(f), h, H(f))$ é um fibrado localmente trivial.

O leitor pode consultar [17] para um estudo detalhado da teoria de sistemas dinâmicos não autônomos abstrato no caso contínuo.

4.2 Sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos

Esta seção apresenta a generalização do conceito de sistemas dinâmicos não autônomos para o caso impulsivo. No decorrer deste trabalho, utilizaremos algumas noções da teoria de fibrados que estão definidas no “Apêndice A”.

Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ e $(Y, \sigma; M_Y, I_Y)$ dois sistemas dinâmicos impulsivos em X e Y , respectivamente. Vamos assumir que $(X, \pi; M_X, I_X)$ satisfaz as hipóteses H1, H2 e H3 e que o sistema $(Y, \sigma; M_Y, I_Y)$ satisfaz H1 e H3.

Uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ é chamada um *homomorfismo* do sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$ em $(Y, \sigma; M_Y, I_Y)$, se as seguintes condições forem válidas:

1. h é contínua em X ;
2. h é sobrejetora;
3. $h(\tilde{\pi}(x, t)) = \tilde{\sigma}(h(x), t)$, para todos $x \in X$ e $t \geq 0$.

A próxima definição estabelece o conceito de sistemas dinâmicos não autônomos com impulsos. Esse conceito de sistema impulsivo é estabelecido de acordo com a Definição 4.2. No entanto, estamos tratando de sistemas impulsivos gerados por sistemas semidinâmicos.

Definição 4.3. A tripla $\langle (X, \pi; M_X, I_X), (Y, \sigma; M_Y, I_Y), h \rangle$, onde $h : X \rightarrow Y$ é um homomorfismo e (X, h, Y) é um fibrado localmente trivial, é chamada de *sistema dinâmico não autônomo impulsivo*. O sistema impulsivo $(Y, \sigma; M_Y, I_Y)$ é chamado uma *fatia* do sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$ pelo homomorfismo h .

No que segue, apresentamos dois exemplos de sistemas impulsivos não autônomos.

Exemplo 4.4. Considere os sistemas impulsivos $(\mathbb{R}^2, \pi; M_X, I_X)$ e $(\mathbb{R}, \sigma; M_Y, I_Y)$, onde:

- $M_X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3\}$, $I_X(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ para todo $(x, y) \in M_X$ e $\pi((x, y), t) = (e^{-t}x, e^{-t}y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$;

- $M_Y = \{1, 3\}$, $I_Y(1) = \frac{1}{2}$, $I_Y(3) = \frac{3}{2}$ e $\sigma(y, t) = e^{-t}y$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

Tomando $h := p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a projeção na segunda coordenada, concluímos que $\langle (\mathbb{R}^2, \pi; M_X, I_X), (\mathbb{R}, \sigma; M_Y, I_Y), h \rangle$ é um sistema dinâmico não autônomo impulsivo.

Exemplo 4.5. Considere os sistemas impulsivos $(\mathbb{R}^3, \pi; M_X, I_X)$ e $(\mathbb{R}, \sigma; M_Y, I_Y)$, onde:

- $M_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$, $I_X(x, y, z) = (x, y, 0)$ para todo $(x, y, z) \in M_X$ e $\pi((x, y, z), t) = (x, y, z + t)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $t \geq 0$;
- $M_Y = \{1\}$, $I_Y(1) = 0$ e $\sigma(z, t) = z + t$ para todo $z \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

Considere $h := p_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a projeção na terceira coordenada. Então $\langle (\mathbb{R}^3, \pi; M_X, I_X), (\mathbb{R}, \sigma; M_Y, I_Y), h \rangle$ é um sistema não autônomo impulsivo.

Definição 4.6. O sistema dinâmico não autônomo impulsivo

$$\langle (X, \pi; M_X, I_X), (Y, \sigma; M_Y, I_Y), h \rangle \quad (4.5)$$

é chamado *ponto (compacto, localmente, limitado, fracamente) dissipativo (k-dissipativo)* quando o sistema impulsivo $(X, \pi; M_X, I_X)$ possui essa mesma propriedade.

Notemos que o sistema não autônomo impulsivo do Exemplo 4.4 é dissipativo em contraste com o sistema do Exemplo 4.5.

Definição 4.7. Assuma que o sistema (4.5) seja compacto k -dissipativo e $\tilde{\mathcal{J}}_X$ seja o centro de Levinson de $(X, \pi; M_X, I_X)$. Definimos o conjunto $\tilde{\mathcal{J}}_X$ como sendo o *centro de Levinson* de (4.5).

Agora, vamos mostrar como construir um sistema não autônomo abstrato associado a uma equação diferencial não autônoma impulsiva.

Consideremos a seguinte equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, \\ I : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, I é uma função impulso e $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto impulsivo.

Dados $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, considere a solução $\varphi(t, x, g)$ da equação $\frac{du}{dt} = g(t, u)$ tal que $\varphi(0, x, g) = x$. Agora, considere o produto Skew em $(\mathbb{R}^n \times H(f), \pi)$ com restrição à $\mathbb{R}_+$, isto é, a aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \times H(f) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \times H(f)$ dada por

$$\pi((x, g), t) = (\varphi(t, x, g), \sigma(g, t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, (x, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f).$$

Denote $X = \mathbb{R}^n \times H(f)$ e defina a aplicação $\phi_X : X \rightarrow (0, +\infty]$ pela lei

$$\phi_X(v, g) = \begin{cases} s, & \text{se } \varphi(s, v, g) \in M \text{ e } \varphi(t, v, g) \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ +\infty, & \text{se } \varphi(t, v, g) \notin M \text{ para todo } t > 0. \end{cases}$$

Agora, defina o conjunto impulsivo $M_X = M \times H(f)$ e a função impulso $I_X : M_X \rightarrow X$ por

$$I_X(v, g) = (I(v), g) \text{ para todo } (v, g) \in M_X.$$

Temos que $(X, \pi; M_X, I_X)$ é um sistema impulsivo, onde $\tilde{\pi}((v, g), \cdot)$, para $(v, g) \in X$, é definida da seguinte maneira: se $\phi_X(v, g) = +\infty$, então

$$\tilde{\pi}((v, g), t) = \pi((v, g), t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+.$$

Entretanto, se $\phi_X(v, g) = s_0$, isto é, $\varphi(s_0, v, g) = v_1 \in M$ e $\varphi(t, v, g) \notin M$ para $0 < t < s_0$, então definimos $\tilde{\pi}((v, g), \cdot)$ em $[0, s_0]$ por

$$\tilde{\pi}((v, g), t) = \begin{cases} \pi((v, g), t), & 0 \leq t < s_0, \\ (v_1^+, g_{s_0}), & t = s_0, \end{cases}$$

onde $v_1^+ = I(v_1)$. O processo continua a partir de (v_1^+, g_{s_0}) da mesma forma como apresentamos na construção do sistema impulsivo na Definição 2.6 (Seção 2.2, Capítulo 2).

Por construção, dados $(v, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f)$ e $t \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{\pi}((v, g), t) = (\varphi(t - t_{n-1}, v_n^+, g_{t_{n-1}}), g_t), \quad t_{n-1} \leq t < t_n,$$

onde $v_0^+ = v$, $t_{-1} = 0$ e $t_n = s_0 + \dots + s_n$.

Seja $(H(f), \sigma)$ o sistema dinâmico das translações em $H(f)$ e considere um conjunto impulsivo $M_{H(f)} \subset H(f)$. Defina $I_{H(f)} : M_{H(f)} \rightarrow H(f)$ por $I_{H(f)}(g) = g$ para todo $g \in H(f)$. Então,

$$\langle (X, \pi; M_X, I_X), (H(f), \sigma; M_{H(f)}, I_{H(f)}), h \rangle$$

é um sistema dinâmico não autônomo impulsivo, onde h é a projeção na segunda coordenada.

4.3 Dissipatividade via funções de Lyapunov

Nesta seção, estabelecemos condições suficientes para obtermos dissipatividade limitada e local via funções de Lyapunov. Além disso, semelhante ao caso autônomo, apresentaremos a construção de um funcional do tipo Lyapunov para sistemas localmente dissipativos.

No decorrer deste texto, vamos considerar o sistema dinâmico não autônomo impulsivo

$$\langle (X, \pi, M_X, I_X), (Y, \sigma, M_Y, I_Y), h \rangle, \quad (\text{SDNI})$$

onde X está munido da métrica d_X e o qual satisfaz a hipótese:

H4. (X, h, Y) é um fibrado vetorial.

Seja $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação definida pela lei $|x| = d_X(x, \theta_{h(x)})$, $x \in X$.

Como apresentado no Apêndice A, seja $\Theta = \{\theta_y : y \in Y\}$ a seção nula do fibrado (X, h, Y) , onde θ_y é o vetor nulo do espaço vetorial $h^{-1}(\{y\})$, $y \in Y$.

O Lema A.7 (apresentado no Apêndice A) garante que Θ é um subconjunto compacto de X sempre que Y for compacto. Consequentemente, a vizinhança da seção nula definida por

$$U_r = \{x \in X : |x| \leq r\},$$

é um conjunto limitado para todo $r > 0$.

O Teorema 4.8 apresenta condições suficientes para o sistema (SDNI) ser limitado k -dissipativo.

Teorema 4.8. [14, Teorema 4.16] *Assuma que $(X, \pi; M_X, I_X)$ seja completamente contínuo e Y seja compacto. Suponha que existam um número $r > 0$ tal que $\inf\{d_X(a, b) : a \in U_r \text{ e } b \in M_X\} > 0$, onde $U_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$, e uma função $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq V(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$;
- ii) o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para todo $c \geq r$;
- iii) $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$ se, e somente se, $d_X(x_n, U_r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, para qualquer sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$;
- iv) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subset \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > r$ e $x \in X$.

Então o sistema (SDNI) é limitado k -dissipativo.

Demonstração. Como mencionado anteriormente, a compacidade de Y garante que $U_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$ é um conjunto limitado.

Afirmamos que $\tilde{L}_X^+(x) \cap U_r \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. De fato, suponhamos o contrário, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $\tilde{L}_X^+(x_0) \cap U_r = \emptyset$. De acordo com a condição i),

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t)) \leq \mathcal{V}(x_0) := c_0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Além disso, a condição ii) garante que o conjunto $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é limitado. Uma vez que o sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo e temos o Lema 2.25, concluímos que $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é relativamente compacto. Consequentemente, o conjunto limite $\tilde{L}_X^+(x_0)$ é não vazio e compacto. Segue do Lema 2.29 que $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \neq \emptyset$.

Se $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X = \{p_0\}$, então $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(c_1)$, onde $\mathcal{V}(p_0) = c_1 > r$ pois $\tilde{L}_X^+(x_0) \cap U_r = \emptyset$. Entretanto, isto contradiz com a condição iv).

Se $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ não for unitário, podemos tomar $p, q \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ tais que $p \neq q$. Sabemos que existem sequências $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n, s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$,

$$\tilde{\pi}(x_0, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_0, s_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q.$$

Extraindo subsequências $\{t_{n_k}\}_{k \geq 1}$ e $\{s_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tais que $t_{n_k} > s_{n_k}$ para todo $k \geq 1$, obtemos

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t_{n_k})) \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, s_{n_k})) \text{ para todo } k \geq 1.$$

Uma vez que a aplicação $\mathcal{V}$ é contínua em $X \setminus M_X$, quando $k \rightarrow +\infty$, obtemos $\mathcal{V}(p) \leq \mathcal{V}(q)$ já que $p, q \notin M_X$. Analogamente, extraíndo outras subsequências $\{t_{n_l}\}_{l \geq 1}$ e $\{s_{n_l}\}_{l \geq 1}$ tais que $t_{n_l} < s_{n_l}$ para todo $l \geq 1$, temos

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t_{n_l})) \geq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, s_{n_l})) \text{ para todo } l \geq 1.$$

A continuidade da aplicação $\mathcal{V}$ em $X \setminus M_X$ garante que $\mathcal{V}(q) \leq \mathcal{V}(p)$. Portanto, existe $c \geq r$ tal que $\mathcal{V}(q) = c$ para todo $q \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$.

Agora, pela compacidade de $\tilde{L}_X^+(x_0)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\tilde{L}_X^+(x_0), \epsilon) \cap U_r = \emptyset$. Como consequência da condição *iii*), temos $c \neq r$. Porém, isto contradiz a condição *iv*). Portanto, $\tilde{L}_X^+(x) \cap U_r \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, como queríamos provar.

Seguindo a prova, podemos tomar $\ell > 0$ tal que $\overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)} \cap M_X = \emptyset$ e $\tilde{\pi}(U_r, \ell)$ é relativamente compacto, pois $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo. Considere o conjunto $K = \overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)}$. Veja que $\tilde{L}_X^+(x) \cap K \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, pois dado $y \in \tilde{L}_X^+(x) \cap U_r$ ($y \notin M_X$ uma vez que $U_r \cap M_X = \emptyset$), segue da $\tilde{\pi}$ -invariância positiva do conjunto $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X$ que $\tilde{\pi}(y, \ell) \in \tilde{L}_X^+(x) \cap K$. Além disso, a inclusão $K \subset U_r$ é verdadeira. Ora, primeiro note que U_r é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. De fato, se existe $x_0 \in U_r$ e $\tau > 0$ tais que $\tilde{\pi}(x_0, \tau) \notin U_r$, isto é, $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \tau)) > r$, então a condição *iii*) mostra que $\mathcal{V}(x_0) = r$ o que é uma contradição, pois

$$r < \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \tau)) \leq \mathcal{V}(x_0) = r.$$

Consequentemente, $K = \overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)} \subset \overline{U_r} = U_r$. Isso mostra que K é o k -atrator fraco do sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$. Usando o Corolário 3.18 concluímos o resultado. $\square$

Podemos modificar a condição *iv*) do Teorema 4.8 em termos da órbita positiva ao invés do conjunto limite. Vejamos a seguinte proposição.

Proposição 4.9. [14, Proposição 4.17] *Seja $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema completamente contínuo e $r \geq 0$. Suponha que existe uma aplicação $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $t \geq 0$ e $x \in X$;
- ii) o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para todo $c \geq r$.

Então as seguintes condições são equivalentes:

- 1) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subseteq \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > r$ e $x \in X$;
- 2) $\tilde{\pi}^+(x) \not\subseteq \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > r$ e $x \in X$.

Demonstração. Assuma que a condição 1) seja verdade e suponha por contradição que existam $x_0 \in X$ e $c_0 > r$ tais que

$$\tilde{\pi}^+(x_0) \subset \mathcal{V}^{-1}(c_0). \quad (4.7)$$

As condições i) e ii) garantem que a órbita positiva $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é limitada. Então $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é relativamente compacto, pois $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo. Aplicando o Lema 2.29, temos que $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \neq \emptyset$. Seja $p \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(x_0, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$. Pela continuidade da função $\mathcal{V}$ em $X \setminus M_X$,

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(p).$$

Por (4.7), concluímos que $\mathcal{V}(p) = c_0$ para todo $p \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$. Assim, $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subseteq \mathcal{V}^{-1}(c_0)$ o que é uma contradição.

Por outro lado, assuma que a condição 2) seja verdade. Suponha que existam $x_1 \in X$ e $c_1 > r$ tais que

$$\tilde{L}_X^+(x_1) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(c_1). \quad (4.8)$$

Como o conjunto $\tilde{L}_X^+(x_1) \setminus M_X$ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante, segue que para todo $y \in \tilde{L}_X^+(x_1) \setminus M_X$ e $t \geq 0$, temos $\tilde{\pi}(y, t) \in \tilde{L}_X^+(x_1) \setminus M_X$. Usando (4.8), podemos concluir que $\tilde{\pi}^+(y) \subset \mathcal{V}^{-1}(c_1)$ para todo $y \in \tilde{L}_X^+(x_1) \setminus M_X$ e isso é uma contradição. Portanto, concluímos a outra implicação. $\square$

Corolário 4.10. [14, Corolário 4.18] *Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema completamente contínuo e Y compacto. Se existe um número $r \geq 0$ tal que $\inf\{d_X(a, b) : a \in U_r \text{ e } b \in M_X\} > 0$ e uma aplicação $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$;
- ii) $\mathcal{V}(x) \geq a(|x|)$ para todo $x \in X$, onde $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua, monotonicamente crescente, $a(0) = 0$ e $\text{Im}(\mathcal{V}) \subset \text{Im}(a)$;
- iii) $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$ se, e somente se, $d_X(x_n, U_r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, para qualquer sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$;
- iv) $\tilde{\pi}^+(x) \not\subseteq \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $x \in X$ e $c > r$.

Então o sistema (SDNI) é limitado k -dissipativo.

Demonstração. É suficiente mostrar que o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para todo $c \geq r$. Com efeito, seja $x \in X$ tal que $\mathcal{V}(x) \leq c$ para algum $c \geq r$. Então

$$a(|x|) \leq \mathcal{V}(x) \leq c.$$

Assim $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\} \subset U_{a^{-1}(c)}$ o qual é limitado. Portanto o resultado segue do Teorema 4.8 e da Proposição 4.9. $\square$

A prova do Teorema 4.8 evidencia o uso da completude contínua do sistema autônomo $(X, \pi; M_X, I_X)$. No resultado a seguir, obtemos a dissipatividade local sem exigir que o sistema autônomo seja completamente contínuo.

Teorema 4.11. [14, Teorema 4.19] *Seja Y compacto e suponha que $\tilde{L}_X^+(x) \neq \emptyset$ sempre que $\tilde{\pi}^+(x)$ for limitado, $x \in X$. Além disso, suponha que existe $r > 0$ tal que $B_r \cap M_X = \emptyset$, onde $B_r = \{x \in X : |x| < r\}$. Se existe uma função $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$;
- ii) o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para qualquer $c \in \mathbb{R}_+$;
- iii) existe $\mu > 0$ tal que $\mathcal{V}(x) \geq \mu$ se, e somente se, $x \notin B_r$;
- iv) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subset \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > 0$ e $x \in X$.

Então o sistema (SDNI) é localmente dissipativo.

Demonstração. Note que B_r é limitado, pois Y é compacto.

Afirmamos que $\tilde{\pi}^+(x) \cap B_r \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, ou seja, B_r é um atrator fraco. Suponhamos por contradição que existe $x_0 \in X$ tal que $\tilde{\pi}^+(x_0) \cap B_r = \emptyset$. De acordo com a condição i),

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t)) \leq \mathcal{V}(x_0) = c_0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

A condição ii) garante que o conjunto $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é limitado. Ademais, pelo Lema 2.29, obtemos $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \neq \emptyset$. Usando as ideias da prova do Teorema 4.8, podemos mostrar que $\mathcal{V}(p) = c_1$ para todo $p \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ e para algum $c_1 \geq 0$. Já que $\tilde{L}_X^+(x_0) \subset \{x \in X : |x| \geq r\}$, segue da condição iii) que $c_1 \geq \mu > 0$. No entanto, isso contradiz a condição iv). Portanto, $\tilde{\pi}^+(x) \cap B_r \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Dado $x \in X$, afirmamos que existem $\delta_x > 0$ e $T_x > 0$ tais que

$$\tilde{\pi}(B_X(x, \delta_x), [T_x, +\infty)) \subset B_r. \quad (4.9)$$

Suponhamos por contradição que existem sequências $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\tilde{\pi}(z_n, t_n) \notin B_r$ para todo $n = 1, 2, \dots$

Seja $t_x > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, t_x) \in B_r$. Podemos supor que $t_x \neq \sum_{i=0}^k \phi(x_i^+)$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, pois B_r é aberto.

Caso 1) $x \notin M_X$.

Pelo Lema 2.20, temos que $\tilde{\pi}(z_n, t_x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x, t_x)$. Assim, existe $n_0 > 0$ tal que $\tilde{\pi}(z_n, t_x) \in B_r$ e $t_n > t_x$ para todo $n \geq n_0$. Então

$$\mu \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(z_{n_0}, t_{n_0})) \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(z_{n_0}, t_x)) < \mu,$$

o que é um absurdo.

Caso 2) $x \in M_X$.

Como o conjunto M_X satisfaz a condição STC, então existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ passando por x dado por uma λ -seção S . Além disso, é possível considerar um número $\eta > 0$ tal que $B_X(x, \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$ pois o tubo é uma vizinhança de x . Denotemos H_1 e H_2 como segue

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B_X(x, \eta) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B_X(x, \eta).$$

Se $\{z_n\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset H_2$, então $\tilde{\pi}(z_{n_k}, t_x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x, t_x)$. A conclusão segue pelo Caso 1.

Se $\{z_n\}_{n \geq 1}$ admite uma subsequência $\{z_{n_l}\}_{l \geq 1} \subset H_1$, então $\tilde{\pi}(z_{n_l}, \phi(z_{n_l})) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} I(x) \notin M_X$. Tomemos $t_{I(x)} \neq \sum_{i=0}^k \phi((I(x))_i^+)$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, tal que $\tilde{\pi}(I(x), t_{I(x)}) \in B_r$. Usando o Lema 2.20, obtemos um número $l_0 > 0$ tal que $\tilde{\pi}(z_{n_l}, \phi(z_{n_l}) + t_{I(x)}) \in B_r$ e $t_{n_l} > \phi(z_{n_l}) + t_{I(x)}$ para todo $l \geq l_0$. Assim

$$\mu \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(z_{n_{l_0}}, t_{n_{l_0}})) \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(z_{n_{l_0}}, \phi(z_{n_{l_0}}) + t_{I(x)})) < \mu,$$

levando a um absurdo novamente. Portanto, a inclusão (4.9) é verdadeira e o resultado está provado. $\square$

Observemos, agora, que o Teorema 4.8 ainda é válido se as condições *i*) e *iv*) forem substituídas pela condição: $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) < \mathcal{V}(x)$ sempre que $\tilde{\pi}(x, \tau) \in E_r$ para todo $\tau \in [0, t]$, onde $E_r = \{x \in X : |x| \geq r\}$. Vejamos o próximo teorema.

Teorema 4.12. [14, Teorema 4.20] *Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema completamente contínuo e Y compacto. Suponha que existem $r > 0$ tal que $\inf\{d_X(a, b) : a \in U_r \text{ e } b \in M_X\} > 0$ e uma aplicação $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) se $\tilde{\pi}(x, \tau) \in E_r$ para todo $\tau \in [0, t]$, então $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) < \mathcal{V}(x)$;

- ii) o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para qualquer $c \geq r$;
- iii) $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$ se, e somente se, $d_X(x_n, U_r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, para qualquer sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$.

Então o sistema (SDNI) é limitado k -dissipativo.

Demonstração. Note que o conjunto U_r é limitado. Afirmamos que a órbita impulsiva $\tilde{\pi}^+(x)$ intercepta o conjunto U_r para todo $x \in X$. De fato, suponhamos que existe $x_0 \in X$ ($x_0 \notin U_r$) tal que $\tilde{\pi}^+(x_0) \cap U_r = \emptyset$, ou seja, $\tilde{\pi}^+(x_0) \subset E_r = \{x \in X : |x| \geq r\}$. De acordo com a condição i),

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, t)) < \mathcal{V}(x_0) = c_0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto, a condição ii) garante que a órbita impulsiva $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é limitada. Consequentemente, $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é relativamente compacto, pois $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo. O Lema 2.29 nos permite concluir que $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \neq \emptyset$. Além disso, $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset E_r$. A partir da continuidade da função $\mathcal{V}$ em $X \setminus M_X$ segue que $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(c_1)$ para algum $c_1 \geq r$ (esse fato segue pela prova do Teorema 4.8).

Agora, seja $y \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$. Então pela $\tilde{\pi}$ -invariância positiva de $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$,

$$\tilde{\pi}^+(y) \subset \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset E_r.$$

Disso, segue que

$$c_1 = \mathcal{V}(\tilde{\pi}(y, t)) < \mathcal{V}(y) = c_1 \text{ para todo } t > 0.$$

Todavia, isto é uma contradição. À vista disso, $\tilde{\pi}^+(x) \cap U_r \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, como queríamos. Desta forma, U_r é um atrator fraco para o sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$.

Agora, considere $\ell > 0$ tal que $\overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)}$ é compacto e $\overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)} \cap M_X = \emptyset$, pois $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo. Tomemos $K = \overline{\tilde{\pi}(U_r, \ell)}$. Logo para cada $x \in X$, existe $\tau_x > 0$ tal que $\tilde{\pi}(x, \tau_x) \in K$. Neste caso, K é o k -atrator fraco para o sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$. As condições i) e iii) asseguram que o conjunto U_r é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante, daí $K \subset U_r$. O resultado segue pelo Corolário 3.18. $\square$

No próximo resultado, apresentamos uma forma de construir um funcional do tipo Lyapunov para sistemas localmente dissipativos.

Teorema 4.13. [14, Teorema 4.24] *Sejam $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema completamente contínuo e Y compacto. Suponha que o sistema (SDNI) seja localmente dissipativo. Então existem um número $r > 0$ e uma aplicação $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $X \setminus M_X$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$;
- ii) o conjunto $\{x \in X : \mathcal{V}(x) \leq c\}$ é limitado para todo $c \geq r$;
- iii) se $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ é uma sequência tal que $\mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$ então $d_X(x_n, U_r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

iv) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subset \mathcal{V}^{-1}(c)$ para qualquer $c > r$ e $x \in X$.

Demonstração. Dado que o sistema (SDNI) é localmente dissipativo, segue que $(X, \pi; M_X, I_X)$ é localmente dissipativo. Em particular, $(X, \pi; M_X, I_X)$ é compacto k -dissipativo. Considere $\tilde{\mathcal{J}}_X$ o centro de Levinson do sistema impulsivo $(X, \pi; M_X, I_X)$. Como $\tilde{\mathcal{J}}_X$ é compacto, seja $r > 0$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}_X \subset U_r$.

Defina a função $\mathcal{V} : X \rightarrow [r, +\infty)$ por

$$\mathcal{V}(x) = \max \{ \sup \{ |\tilde{\pi}(x, t)| : t \geq 0 \}, r \}. \quad (4.10)$$

A aplicação $\mathcal{V}$ está bem definida, pois o sistema é compacto k -dissipativo.

A condição iii) é facilmente verificada a partir da definição da aplicação $\mathcal{V}$.

Afim de estabelecer a condição i), notemos que para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) &= \max \{ \sup \{ |\tilde{\pi}(x, t + s)| : s \geq 0 \}, r \} \leq \\ &\leq \max \{ \sup \{ |\tilde{\pi}(x, t)| : t \geq 0 \}, r \} = \mathcal{V}(x). \end{aligned}$$

Além disso, $|x| \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$. Portanto aplicação $\mathcal{V}$ satisfaz o item ii).

A partir da dissipatividade do sistema, o conjunto limite $\tilde{L}_X^+(x) \subset \tilde{\mathcal{J}}_X$ para todo $x \in X$. Consequentemente, $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(r)$, pois $\tilde{L}_X^+(x) = \tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X$ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante. Portanto, a condição iv) está verificada.

Resta-nos provar que a aplicação $\mathcal{V}$ é contínua em $X \setminus M_X$. Sejam $x \in X \setminus M_X$ e uma sequência $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X$ de tal forma que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Podemos supor que $z_n \notin M_X$ para todo natural $n \in \mathbb{N}$.

Considere $R = \sup \{ |z_n| : n \geq 1 \} < \infty$. Uma vez que o sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$ é completamente contínuo, $\tilde{\mathcal{J}}_X$ atrai subconjuntos limitados de X . Isto posto, existe $T > 0$ tal que $|\tilde{\pi}(y, t)| \leq r$ para todo $t \geq T$ sempre que $|y| \leq R$. Se $|y| \leq R$ então $\mathcal{V}(y) = r$ ou existe $\tau_y \in [0, T]$ tal que

$$\mathcal{V}(y) = |\tilde{\pi}(y, \tau_y)|.$$

Devemos considerar alguns casos:

Caso 1: $\mathcal{V}(x) = r$ e $\mathcal{V}(z_n) = r$, $n = 1, 2, \dots$

Notoriamente a continuidade de $\mathcal{V}$ é verificada.

Caso 2: $\mathcal{V}(x) = r$ e $\mathcal{V}(z_{n_k}) > r$, $k = 1, 2, \dots$, para alguma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k \geq 1}$ de $\{z_n\}_{n \geq 1}$.

Neste caso, $\mathcal{V}(z_{n_k}) = |\tilde{\pi}(z_{n_k}, \tau_k)|$ para algum $\tau_k \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$. Podemos assumir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = \tau \in [0, T]$.

Se $\tau \neq \sum_{j=0}^m \phi(x_j^+)$ para todo inteiro $m \geq 0$ (por conseguinte podemos assumir que $\tau_k \neq \sum_{j=0}^m \phi((z_{n_k})_j^+)$ para todo $m \geq 0$ e todo $k \geq 1$) então

$$r \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(z_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}(z_{n_k}, \tau_k)| = |\tilde{\pi}(x, \tau)| \leq r,$$

onde usamos o Lema 2.20 na segunda igualdade acima.

Se $\tau = \sum_{j=0}^m \phi(x_j^+)$ para algum inteiro $m \geq 0$, então

$$\tilde{\pi}(z_{n_k}, \tau_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pi(x_m^+, \phi(x_m^+)) = x_{m+1} \in M_X$$

ou

$$\tilde{\pi}(z_{n_k}, \tau_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I(\pi(x_m^+, \phi(x_m^+))) = x_{m+1}^+ = \tilde{\pi}(x, \tau).$$

Em ambos os casos obtemos $r \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(z_{n_k}) \leq r$. Logo, $\mathcal{V}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r = \mathcal{V}(x)$.

Caso 3: $\mathcal{V}(x) > r$.

Neste caso, existem $\tau_x, \tau_n \in [0, T]$ tais que $\mathcal{V}(x) = |\tilde{\pi}(x, \tau_x)|$ e $\mathcal{V}(z_n) = |\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)|$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Podemos assumir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \tau \in [0, T]$. Dividimos este caso em outros dois subcasos.

Subcaso 3a) $\tau \neq \sum_{j=0}^k \phi(x_j^+)$ para todo inteiro $k \geq 0$.

Nessa primeira situação, é válido considerar que $\tau_n \neq \sum_{j=0}^k \phi((z_n)_j^+)$ para todo inteiro $k \geq 0$ e todo inteiro $n \geq 1$. Fazendo o uso do Lema 2.20, obtemos

$$\mathcal{V}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}(x, \tau)| =: d_0. \quad (4.11)$$

Nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{V}(x) = d_0$. Suponha que $\mathcal{V}(x) \neq d_0$. Da definição da aplicação $\mathcal{V}$, podemos considerar $|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |\tilde{\pi}(x, \tau)|$. Assim podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que $|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |\tilde{\pi}(x, \tau)| + 2\epsilon$. A partir do Lema 2.19 e da equação (4.11), existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tais que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e

$$||\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| - |\tilde{\pi}(x, \tau_x)|| < \epsilon \text{ para } n \geq n_0 \quad (4.12)$$

e

$$|\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| - |\tilde{\pi}(x, \tau)| < \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (4.13)$$

Usando (4.12) e (4.13), concluímos que

$$|\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| > |\tilde{\pi}(x, \tau_x)| - \epsilon > |\tilde{\pi}(x, \tau)| + \epsilon > |\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| = \mathcal{V}(z_n), \quad \text{para } n \geq n_0,$$

o que contradiz a escolha do número τ_n .

$$\textbf{Subcaso 3b)} \quad \tau = \sum_{j=0}^k \phi(x_j^+) \quad \text{para algum inteiro } k \geq 0.$$

Sob essas condições, temos

$$\tilde{\pi}(z_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi(x_k^+, \phi(x_k^+)) = x_{k+1} \in M_X$$

ou

$$\tilde{\pi}(z_n, \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I(\pi(x_k^+, \phi(x_k^+))) = x_{k+1}^+ = \tilde{\pi}(x, \tau).$$

Na primeira situação, suponha que $\mathcal{V}(x) \neq |x_{k+1}|$. É suficiente assumirmos que $|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |x_{k+1}|$. Desta forma, tomemos $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ com $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (veja Lema 2.19) tais que

$$|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |x_{k+1}| + 2\epsilon, \quad |\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| - |\tilde{\pi}(x, \tau_x)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| - |x_{k+1}| < \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Assim, para n suficientemente grande,

$$|\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| > |\tilde{\pi}(x, \tau_x)| - \epsilon > |x_{k+1}| + \epsilon > |\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| = \mathcal{V}(z_n),$$

o que é uma contradição.

Na segunda situação, supomos que $\mathcal{V}(x) \neq |x_{k+1}^+|$, isto é, $|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |x_{k+1}^+|$. Escolha $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\epsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ com $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (veja Lema 2.19) tais que $|\tilde{\pi}(x, \tau_x)| > |x_{k+1}^+| + 2\epsilon$, $|\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| - |\tilde{\pi}(x, \tau_x)| < \epsilon$ e $|\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| - |x_{k+1}^+| < \epsilon$ para n suficientemente grande. Então, para n grande,

$$|\tilde{\pi}(z_n, \tau_x + \epsilon_n)| > |\tilde{\pi}(x, \tau_x)| - \epsilon > |x_{k+1}^+| + \epsilon > |\tilde{\pi}(z_n, \tau_n)| = \mathcal{V}(z_n),$$

levando novamente a uma contradição. Portanto, em qualquer caso considerado acima, provamos que $\mathcal{V}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x)$. Isso conclui a prova da continuidade da aplicação $\mathcal{V}$ em $X \setminus M_X$. $\square$

4.4 Aplicação às equações diferenciais não autônomas impulsivas

Consideremos a equação diferencial não autônoma

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad (4.14)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua. Como apresentado na Seção 4.1, consideremos a família de equações diferenciais

$$\frac{du}{dt} = g(t, u), \quad g \in H(f), \quad (4.15)$$

onde $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$.

Denotemos por $\varphi(t, u_0, g)$ a solução da equação (4.15) com condição inicial $\varphi(0) = u_0$. Seja $\|\cdot\|$ uma normal usual de $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.14. A equação (4.14) é dita *dissipativa* se para todo $R > 0$ existem $R_0 > 0$ e $\ell(R) > 0$ tais que $\|\varphi(t, u_0, g)\| < R$ sempre que $\|u_0\| < R_0$, $t > \ell(R)$ e $g \in H(f)$.

De maneira natural, consideremos a equação diferencial impulsiva associada a equação (4.14),

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ I : M \longrightarrow \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é limitada, I é uma função impulso e $M \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto impulsivo. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$ e $g \in H(f)$, denote por $\tilde{\varphi}(t, v, g)$ a solução do sistema impulsivo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(t, u), \\ I : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ u(0) = v. \end{cases} \quad (4.17)$$

Definição 4.15. A sistema (4.16) é chamado *dissipativo* se para todo $R > 0$ existem números $R_0 > 0$ e $\ell(R) > 0$ tais que $\|\tilde{\varphi}(t, v, g)\| \leq R$ para todo $t \geq \ell(R)$ sempre que $\|v\| < R_0$ e $g \in H(f)$.

Definição 4.16. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular*, se as condições de existência, unicidade e extensão de solução em $\mathbb{R}_+$ da equação $v' = g(t, v)$ (sem impulsos) e do sistema (4.17) estão satisfeitas.

Assim como apresentado no final da Seção 4.2, o sistema (4.16) gera um sistema não autônomo impulsivo abstrato

$$\langle (\mathbb{R}^n \times H(f), \pi; M_{\mathbb{R}^n \times H(f)}, I_{\mathbb{R}^n \times H(f)}), (H(f), \sigma; M_{H(f)}, I_{H(f)}), h \rangle, \quad (4.18)$$

onde h é a projeção na segunda coordenada.

Denotemos $X = \mathbb{R}^n \times H(f)$. Sejam $\|\cdot\|$ uma normal usual de $\mathbb{R}^n$ e $|\cdot|_{H(f)}$ uma norma em $H(f)$ induzida pela normal usual do espaço $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Definimos a métrica ρ_X em X pela lei

$$\rho_X((v_1, g_1), (v_2, g_2)) = \|v_1 - v_2\| + |g_1 - g_2|_{H(f)},$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e $g_1, g_2 \in H(f)$. Note que o elemento nulo da fibra $h^{-1}(\{g\})$, $g \in H(f)$, é dado por $(0, g)$, onde $h : X \rightarrow H(f)$ denota a projeção na segunda coordenada. Assim,

$$|(v, g)| = \rho_X((v, g), \theta_{h(v, g)}) = \|v\|, \quad (v, g) \in X.$$

Seja $U_r = \{(v, g) \in X : |(v, g)| \leq r\}$, para $r > 0$.

Utilizando os resultados para sistemas abstratos, vamos estabelecer condições de dissipatividade para o sistema (4.16).

Teorema 4.17. *Sejam $H(f)$ compacto e $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ uma função regular limitada. Suponha que existam um número $r > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \cap M = \emptyset$ e uma aplicação $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \rightarrow [r, +\infty)$ contínua em $\mathbb{R}^n \setminus M$ satisfazendo as condições:*

- i) $\mathcal{W}(\varphi(t, u, g)) \leq \mathcal{W}(u)$ para $(u, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f)$ e para todo $t \geq 0$;
- ii) $\mathcal{W}(I(u)) \leq \mathcal{W}(u)$ para todo $u \in M$;
- iii) $\mathcal{W}(u) \geq a(\|u\|)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$, onde a aplicação $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua, monotonicamente crescente, $a(0) = 0$ e $\text{Im}(\mathcal{W}) \subset \text{Im}(a)$;
- iv) $\mathcal{W}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \leq r$, para cada sequência $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$;
- v) as curvas de nível da aplicação $\mathcal{W}$ não contém órbitas impulsivas de (4.17).

Então o sistema (4.16) é dissipativo.

Demonstração. Seja (4.18) o sistema não autônomo impulsivo associado ao sistema (4.16).

Defina $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times H(f) \rightarrow [r, +\infty)$ pela lei

$$\mathcal{V}(v, g) = \mathcal{W}(v),$$

para todo $(v, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f)$.

Afirmamos que a aplicação $\mathcal{V}$ satisfaz as condições do Corolário 4.10. Ora, a continuidade da aplicação $\mathcal{W}$ em $\mathbb{R}^n \setminus M$ implica na continuidade da aplicação $\mathcal{V}$ em $X \setminus M_X$, em que $X = \mathbb{R}^n \times H(f)$ e $M_X = M \times H(f)$.

Além disso, dado $(v, g) \in X$, temos

$$\mathcal{V}(\pi((v, g), t)) = \mathcal{W}(\varphi(t, v, g)) \leq \mathcal{W}(v) = \mathcal{V}(v, g) \quad \text{para todo } t \in [0, \phi_X(v, g)].$$

Em particular, $\mathcal{V}(\pi((v, g), \phi_X(v, g))) \leq \mathcal{V}(v, g)$. Uma vez que $\varphi(\phi_X(v, g), v, g) \in M$, segue pela condição ii) que

$$\mathcal{V}(\pi((v, g), \phi_X(v, g))) = \mathcal{V}(I(\pi((v, g), \phi_X(v, g)))) \leq \mathcal{V}(\pi((v, g), \phi_X(v, g))) \leq \mathcal{V}(v, g).$$

Repetindo o processo acima, podemos mostrar que $\mathcal{V}(\tilde{\pi}((v, g), t)) \leq \mathcal{V}(v, g)$ para todo $t \geq 0$.

A partir da condição *iii*) do enunciado,

$$\mathcal{V}(v, g) = \mathcal{W}(v) \geq a(\|v\|) = a(\|(v, g)\|), \quad (v, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f).$$

Agora, seja $\{(v_n, g_n)\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^n \times H(f)$ uma sequência tal que $\mathcal{V}(v_n, g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$. Assim $\mathcal{W}(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$, e pela condição *iv*), concluímos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| \leq r$. Equivalentemente, $\rho_X((v_n, g_n), U_r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. A recíproca também é válida.

Dados $c > r$ e $(v, g) \in \mathbb{R}^n \times H(f)$, suponhamos que $\mathcal{V}(\tilde{\pi}((v, g), t)) = c$ para todo $t \geq 0$. Portanto $\mathcal{W}(\tilde{\varphi}(t, v, g)) = c$ para todo $t \geq 0$ e isto contradiz a condição *v*). Assim $\tilde{\pi}^+(v, g) \not\subseteq V^{-1}(c)$ para todo $(v, g) \in X$ e $c > r$.

Concluímos, pelo Corolário 4.10, que o sistema (4.18) é limitado k -dissipativo. Seguindo a prova do Teorema 4.8, o conjunto U_r é um k -atrator limitado, pois $H(f)$ é compacto. Portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho_X(\tilde{\pi}((v, g), t), U_r) = 0$ uniformemente em subconjuntos limitados de X , ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}(t, v, g)\| \leq r$ em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$. Deste modo, o sistema impulsivo (4.16) é dissipativo. $\square$

Estabilidade em sistemas não autônomos impulsivos

O estudo sobre estabilidade em sistemas dinâmicos é essencial, uma vez que os modelos matemáticos de fenômenos físicos, biológicos ou econômicos, são estabelecidos muitas vezes empiricamente.

Este capítulo dedica-se ao estudo da estabilidade da seção nula em um sistema dinâmico não autônomo impulsivo. Na Seção 5.1, estudamos resultados de estabilidade para o sistema impulsivo não autônomo abstrato. Na Seção 5.2, aplicamos os resultados do caso abstrato para uma classe de equações diferenciais não autônomas com impulsos. Finalizamos este trabalho, na Seção 5.3, com a apresentação de um modelo presa-predador sob ação de impulsos, onde mostramos que o ponto de equilíbrio desse sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável. Os resultados deste capítulo são provenientes de nosso trabalho [15].

5.1 Estabilidade em sistemas não autônomos impulsivos

Considere o sistema não autônomo impulsivo

$$\langle (X, \pi, M_X, I_X), (Y, \sigma, M_Y, I_Y), h \rangle, \quad (\text{SDNI})$$

onde $h : X \rightarrow Y$ é um homomorfismo, $(X, \pi; M_X, I_X)$ e $(Y, \sigma; M_Y, I_Y)$ são sistemas impulsivos em X e Y , respectivamente, (X, d_X) é um espaço métrico com métrica d_X e (X, h, Y) é um fibrado vetorial de dimensão finita.

A *seção nula* do fibrado vetorial (X, h, Y) é definida, como apresentada no Apêndice A, por $\Theta = \{\theta_y : y \in Y\}$, onde θ_y é o elemento neutro da fibra $h^{-1}(\{y\})$. O Lema A.7, no

Apêndice A, garante que Θ é um subconjunto compacto de X sempre que Y for compacto. Além disso, a vizinhança da seção nula definida por

$$U_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$$

é um conjunto limitado para todo número $r > 0$.

Definição 5.1. Dados $y \in Y$ e $K \subset X$, definimos $K_y = K \cap h^{-1}(\{y\})$.

A seguinte definição apresenta os conceitos de estabilidade orbital para sistemas impulsivos não autônomos. A teoria desse tipo de estabilidade foi desenvolvida no artigo [10].

Definição 5.2. Um subconjunto não vazio $K \subset X$ é denominado:

1. *orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $y \in Y$, $K_{\tilde{\sigma}(y,t)} \neq \emptyset$ para todo $t \geq 0$ e $d_X(x, K_y) < \delta$ ($x \in X$ e $y = h(x)$), então $d_X(\tilde{\pi}(x, t), K_{\tilde{\sigma}(y,t)}) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$;
2. *assintoticamente orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se K é simultaneamente orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a (SDNI) e existe $\gamma > 0$ tal que para todo $y \in Y$ com $K_{\tilde{\sigma}(y,t)} \neq \emptyset$, $t \geq 0$, satisfazendo $d_X(x, K_y) < \gamma$ ($x \in X$ e $y = h(x)$), temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_X(\tilde{\pi}(x, t), K_{\tilde{\sigma}(y,t)}) = 0$;
3. *globalmente assintoticamente orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se K é orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a (SDNI) e para todo $y \in Y$ com $K_{\tilde{\sigma}(y,t)} \neq \emptyset$, $t \geq 0$, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_X(\tilde{\pi}(x, t), K_{\tilde{\sigma}(y,t)}) = 0$ para todo $x \in X$.

No que segue, apresentamos os conceitos de estabilidade para a seção nula Θ em relação ao sistema impulsivo não autônomo.

Definição 5.3. A seção nula Θ é dita:

1. *uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $y \in Y$, $x \in h^{-1}(\{y\})$ e $|x| < \delta$ então $|\tilde{\pi}(x, t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$;
2. *uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se Θ é simultaneamente uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a (SDNI) e existe $r > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}(x, t)| = 0$ para todo $x \in U_r$;
3. *globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável* com respeito ao sistema (SDNI), se Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a (SDNI) e $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}(x, t)| = 0$ para todo $x \in X$.

Observação 5.4. Uma vez que $\Theta_y = \Theta \cap h^{-1}(\{y\}) = \theta_y$ para $y \in Y$, temos

$$d_X(x, \Theta_{h(x)}) = d_X(x, \theta_{h(x)}) = |x|,$$

para todo $x \in X$. Isto mostra as seguintes equivalências entre as Definições 5.2 e 5.3:

- (a) Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI) se, e somente se, Θ é orbitalmente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI).
- (b) Θ é uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI) se, e somente se, Θ é assintoticamente orbitalmente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI).
- (c) Θ é globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI) se, e somente se, Θ é globalmente assintoticamente orbitalmente $\tilde{\pi}$ –estável com respeito a (SDNI).

Seja $\mathcal{B}_X$ a família de todos os subconjuntos limitados e fechados de X munida da distância de Hausdorff.

Definição 5.5. Um subconjunto não vazio $K \subset X$ satisfaz a condição (C) se a aplicação $F : Y \rightarrow \mathcal{B}_X$ definida por

$$F(y) = \{x \in K : h(x) = y\} = K_y$$

for contínua em $h(K)$.

Consideremos o sistema não autônomo impulsivo (SDNI). Note que a seção nula Θ satisfaz a condição (C), pois a aplicação F coincide com a seção nula $\theta : Y \rightarrow X$, a qual sabemos que é contínua.

O Teorema 5.6 mostra condições suficientes para que a seção nula Θ seja globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ –estável.

Teorema 5.6. [15, Teorema 3.1] *Suponha que o sistema (SDNI) seja compacto k –dissipativo e que seu centro de Levinson $\tilde{\mathcal{J}}_X$ esteja contido em Θ . Se Θ for positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante, então a seção nula Θ será globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ –estável.*

Demonstração. Por hipótese temos que $\tilde{\mathcal{J}}_X \subset \Theta$. Assim é suficiente mostrar que Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ –estável, pois o centro de Levinson atrai uniformemente subconjuntos compactos de X . Suponha o contrário que Θ não seja uniformemente $\tilde{\pi}$ –estável, ou seja, existem um número $\epsilon_0 > 0$, sequências $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset Y$, $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $x_n \in X_{y_n}$ e $|x_n| < \frac{1}{n}$ tais que

$$|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| \geq \epsilon_0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Podemos assumir que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, pois Θ é compacto e positivamente $\tilde{\pi}$ –invariante.

Pela compacidade da seção nula Θ , podemos concluir que o conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ é relativamente compacto. Além disso, como $\tilde{\mathcal{J}}_X$ atrai a família de compactos de X , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} d_X(\tilde{\pi}(x_n, t), \tilde{\mathcal{J}}_X) = 0.$$

Assim, podemos assumir que a sequência $\{\tilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n \geq 1}$ converge para um ponto $\bar{x} \in \tilde{\mathcal{J}}_X$. Consequentemente, $\bar{x} \in \Theta$ pois $\tilde{\mathcal{J}}_X \subset \Theta$. Desse modo $|\bar{x}| = 0$, que contradiz (5.1) quando fazemos $n \rightarrow +\infty$. Portanto o resultado está demonstrado. $\square$

O Teorema 5.8 a seguir, exibe condições para que a recíproca do Teorema 5.6 seja válida. Porém, antes de apresentá-lo, necessitamos de um resultado topológico auxiliar.

Lema 5.7. [15, Lema 3.1] *Para todo $\delta > 0$ existe $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ tal que*

$$B_X(\Theta, \gamma) \subset \bigcup_{y \in Y} B_y(\Theta, \delta),$$

onde $B_y(\Theta, \delta) = \{x \in X : h(x) = y \text{ e } d_X(x, \Theta_y) < \delta\}$.

Teorema 5.8. [15, Teorema 3.2] *Suponha que a seção nula Θ seja globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável. Então Θ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante e a convergência*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_X(\tilde{\pi}(x, t), \Theta) = 0 \quad (5.2)$$

ocorre uniformemente em subconjuntos compactos de X . Além disso, se $\Theta \cap M_X = \emptyset$, então o sistema (SDNI) é compacto k -dissipativo, o centro de Levinson $\tilde{\mathcal{J}}_X$ está contido em Θ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq r} |\tilde{\pi}(x, t)| = 0 \text{ para todo } r > 0. \quad (5.3)$$

Demonstração. Note que a estabilidade de Θ implica em sua $\tilde{\pi}$ -invariância positiva.

Primeiramente, mostremos que Θ é globalmente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a $(X, \pi; M_X, I_X)$. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ tal que se $|x| = d_X(x, \theta_y) < \delta_1$ ($x \in X$, $y = h(x)$), então $|\tilde{\pi}(x, t)| = d_X(\tilde{\pi}(x, t), \theta_{\tilde{\sigma}(y, t)}) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$, pois Θ é globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a (SDNI). O Lema 5.7 garante que existe $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$ tal que

$$B_X(\Theta, \delta_2) \subset \bigcup_{y \in Y} B_y(\Theta, \delta_1).$$

Nessas condições, seja $x \in X$ tal que $d_X(x, \Theta) < \delta_2$. Então $x \in B_{h(x)}(\Theta, \delta_1)$ e

$$d_X(\tilde{\pi}(x, t), \theta_{\tilde{\sigma}(h(x), t)}) < \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Então,

$$d_X(\tilde{\pi}(x, t), \Theta) \leq d_X(\tilde{\pi}(x, t), \theta_{\tilde{\sigma}(h(x), t)}) < \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Assim a seção nula Θ é orbitalmente $\tilde{\pi}$ -estável. Ademais, para todo $x \in X$,

$$d_X(\tilde{\pi}(x, t), \Theta) \leq d_X(\tilde{\pi}(x, t), \theta_{\tilde{\sigma}(h(x), t)}) = |\tilde{\pi}(x, t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Isto conclui que Θ é globalmente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável com respeito a $(X, \pi; M_X, I_X)$ como queríamos.

Usando o Teorema 3.10, segue que a convergência

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_X(\tilde{\pi}(x, t), \Theta) = 0 \quad (5.4)$$

vale uniformemente em subconjuntos compactos de X . Além disso, se $\Theta \cap M_X = \emptyset$, (5.4) implica que o sistema impulsivo $(X, \pi; M_X, I_X)$ é compacto k -dissipativo. Logo, o sistema (SDNI) é compacto k -dissipativo. Decorre do Teorema 3.11 que $\tilde{\mathcal{J}}_X \subseteq \Theta$, onde $\tilde{\mathcal{J}}_X$ é o centro de Levinson do sistema (SDNI).

A fim de concluir a última parte do teorema, suponhamos por contradição que (5.3) não ocorre para todo $r > 0$. Ou seja, existem números $\epsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$, e seqüências $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $|x_n| < r_0$ e $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ tais que

$$|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| > \epsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (5.5)$$

Em virtude da dissipatividade do sistema (SDNI) podemos supor sem perda de generalidade que a seqüência $\{\tilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n \geq 1}$ é convergente. Seja $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x_n, t_n)$. Note que $z \in \tilde{\mathcal{J}}_X \subset \Theta$, isto é, $|z| = 0$. Ora, isso contradiz (5.5) quando fazemos $n \rightarrow +\infty$. Portanto (5.3) ocorre para todo $r > 0$, como queríamos mostrar. $\square$

Observação 5.9. A prova do Lema 2.29 nos permite concluir que se $y \in \tilde{L}_X^+(x) \cap M_X$ então:

- (a) $I_X(y) \in \tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X$ ou
- (b) $\pi(y, \beta) \in \tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X$ para cada $\beta \in (0, \phi_X(y))$.

Lembremos que um sistema impulsivo $(X, \pi; M_X, I_X)$ é chamado *quase completamente contínuo*, veja Definição 3.4, se para todo subconjunto não vazio limitado B de X existe $\tau = \tau(B) \in \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(B, \tau)$ é relativamente compacto.

Consideremos $\mathcal{U}$ como sendo a família de todas as funções contínuas $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monotonicamente não decrescente com $a(0) = 0$.

Teorema 5.10. [15, Teorema 3.3] *Seja $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema quase completamente contínuo tal que $I_X(M_X \setminus \Theta) \cap \Theta = \emptyset$. Suponha que existe um funcional $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínuo em $X \setminus (M_X \setminus \Theta)$ no qual sua restrição ao conjunto impulsivo M_X é contínuo e satisfaz as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(\theta_y) = 0$ para todo $y \in Y$;
- ii) $\mathcal{V}(x) \geq a(|x|)$ para todo $x \in X$, para alguma aplicação $a \in \mathcal{U}$ com $\text{Im}(a) = \text{Im}(\mathcal{V})$;
- iii) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$ e $t \geq 0$;
- iv) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subseteq \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > 0$ e $x \in X$.

Então a seção nula Θ é globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável. Além disso, se existe um número $\beta > 0$ tal que $\phi_X(w) \geq \beta$ para todo $w \in I_X(M_X)$ e $\Theta \cap M_X = \emptyset$, então a recíproca é verdadeira.

Demonstração. Vamos apresentar várias afirmações para concluir este resultado.

Afirmação 1: A seção nula Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável.

Com efeito, suponha o contrário. Ou seja, existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset Y$, $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $x_n \in X_{y_n}$ e $|x_n| < \frac{1}{n}$ tais que

$$|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| \geq \epsilon_0, \text{ para cada } n \geq 1. \quad (5.6)$$

As condições *ii*) e *iii*) garantem que

$$0 \leq a(|\tilde{\pi}(x_n, t_n)|) \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_n, t_n)) \leq \mathcal{V}(x_n), \text{ para cada } n \geq 1. \quad (5.7)$$

Note que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_X(x_n, \theta_{y_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 0. \quad (5.8)$$

Como Θ satisfaz a Condição (C) e Y é compacto, então podemos assumir que existe $y \in Y$ tal que

$$d_X(\theta_{y_n}, \theta_y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (5.9)$$

Se existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que $x_{n_k} \in M_X$ para cada $k \geq 1$, então por (5.8) e (5.9) obtemos $\theta_y \in M_X$, pois M_X é fechado. Uma vez que $\mathcal{V}|_{M_X} : M_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua, $\mathcal{V}(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\theta_y) = 0$. Logo, como $a \in \mathcal{U}$ e temos (5.7), concluímos que $|\tilde{\pi}(x_{n_k}, t_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. No entanto isso contradiz (5.6).

Por outro lado, se existe uma subsequência $\{x_{n_r}\}_{r \geq 1} \subset X \setminus M_X$, usamos a continuidade da aplicação $\mathcal{V}$ em $X \setminus (M_X \setminus \Theta)$ e obtemos $\mathcal{V}(x_{n_r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\theta_y) = 0$, levando novamente a uma contradição. Portanto, Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável.

Como consequência da estabilidade, temos que Θ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante.

Afirmação 2: $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}(x, t)| = 0$ para qualquer $x \in X$.

De fato, suponha o contrário, que existem $x_0 \in X$ ($|x_0| > 0$ pois Θ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante pela Afirmação 1), $\epsilon_1 > 0$ e uma sequência $s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ tais que

$$|\tilde{\pi}(x_0, s_n)| \geq \epsilon_1 \text{ para todo } n \geq 1. \quad (5.10)$$

Das condições *ii*) e *iii*), temos

$$|\tilde{\pi}(x_0, t)| \leq a^{-1}(\mathcal{V}(x_0)) \text{ para todo } t \geq 0,$$

o qual mostra que a órbita impulsiva $\tilde{\pi}^+(x_0)$ é limitada.

Como o sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$ é quase completamente contínuo, segue que $\overline{\tilde{\pi}^+(x_0)}$ é compacto. Portanto a sequência $\{\tilde{\pi}(x_0, s_n)\}_{n \geq 1}$ pode ser considerada convergente. Denote

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\pi}(x_0, s_n) = \tilde{x} \in \tilde{L}_X^+(x_0).$$

Vamos provar que

$$\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(0). \quad (5.11)$$

Ora, o conjunto limite $\tilde{L}_X^+(x_0) \neq \emptyset$. Então pelo Lema 2.29, $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \neq \emptyset$. Se o conjunto $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ for unitário, segue diretamente que $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(c)$ para algum $c \in \mathbb{R}_+$. Concluimos que $c = 0$ pois $\mathcal{V}$ satisfaz a condição *iv*). Por outro lado, se $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ não for unitário, tome $p, q \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ tais que $p \neq q$. Assim, existem sequências $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}, \{\eta_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ tais que

$$\tilde{\pi}(x_0, \lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(x_0, \eta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q.$$

Podemos tomar subsequências $\{\lambda_{n_k}\}_{k \geq 1}, \{\eta_{n_k}\}_{k \geq 1}, \{\lambda_{n_r}\}_{r \geq 1}$ e $\{\eta_{n_r}\}_{r \geq 1}$ de modo que

$$\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \lambda_{n_k})) \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \eta_{n_k})) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \lambda_{n_r})) \geq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_0, \eta_{n_r})),$$

$r, k = 1, 2, \dots$. Uma vez que $p, q \notin M_X$ e a aplicação $\mathcal{V}$ é contínua em $X \setminus M_X$, então $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(q)$. Portanto, a aplicação $\mathcal{V}$ é constante em $\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$, ou seja, existe $c \geq 0$ tal que

$$\tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(c).$$

Novamente, usando a condição *iv*), obtemos $c = 0$. Assim, está provado a inclusão (5.11).

Note que a inequação (5.10) implica em $|\tilde{x}| > 0$. Deste modo $a(|\tilde{x}|) > 0$, pois $a \in \mathcal{U}$. Agora precisamos considerar dois casos em relação ao ponto $\tilde{x}$ ser ou não um ponto de impulso do sistema.

Caso 1: $\tilde{x} \notin M_X$.

Neste caso, fazemos uso de (5.11) para obter $\mathcal{V}(\tilde{x}) = 0$. Pela condição *ii*), obtemos

$$0 < a(|\tilde{x}|) \leq \mathcal{V}(\tilde{x}) = 0,$$

o que é uma contradição.

Caso 2: $\tilde{x} \in M_X$.

Pela Observação 5.9, $I_X(\tilde{x}) \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ ou $\pi(\tilde{x}, \beta) \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ para cada $\beta \in (0, \phi_X(\tilde{x}))$. Se $I_X(\tilde{x}) \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$, segue de (5.11) que $\mathcal{V}(I_X(\tilde{x})) = 0$. Por outro lado, a condição $I_X(M_X \setminus \Theta) \cap \Theta = \emptyset$ implica que $|I_X(\tilde{x})| > 0$, o que é uma contradição já que $0 = \mathcal{V}(I_X(\tilde{x})) \geq a(|I_X(\tilde{x})|) > 0$.

Agora, se $\pi(\tilde{x}, \beta) \in \tilde{L}_X^+(x_0) \setminus M_X$ para cada $\beta \in (0, \phi_X(\tilde{x}))$, podemos escolher $0 < \nu < \min\{\frac{\lambda}{2}, \phi_X(\tilde{x})\}$ tal que $|\pi(\tilde{x}, \nu)| > 0$, pois $|\tilde{x}| > 0$. Então

$$0 < a(|\pi(\tilde{x}, \nu)|) \leq \mathcal{V}(\pi(\tilde{x}, \nu)) = 0,$$

que é um absurdo novamente.

Portanto, a Afirmação 2 está provada.

Assim concluimos que Θ é globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável.

Agora, mostremos a recíproca. Suponhamos que a seção nula Θ seja globalmente assintoticamente uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável e $\Theta \cap M_X = \emptyset$. Defina $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\mathcal{V}(x) = \sup_{t \geq 0} |\tilde{\pi}(x, t)|. \quad (5.12)$$

Considere a função $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $a(u) = u$, $u \in \mathbb{R}$. É claro que $a \in \mathcal{U}$. Note também que $\mathcal{V}(x) \geq |\tilde{\pi}(x, 0)| = |x| = a(|x|)$ e $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ para todos $x \in X$ e $t \geq 0$. O Teorema 5.8 permite concluir que Θ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante e portanto $\mathcal{V}(\theta_y) = 0$ para todo $y \in Y$. Também, pelo Teorema 5.8,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq r} |\tilde{\pi}(x, t)| = 0 \text{ para todo } r > 0. \quad (5.13)$$

Em particular, $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \subset \tilde{L}_X^+(x) \subset \Theta$ para todo $x \in X$. Isto significa que $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \subset \mathcal{V}^{-1}(0)$. Assim, as condições *i*), *ii*), *iii*) e *iv*) estão estabelecidas.

Agora, vamos mostrar que o funcional $\mathcal{V}$ é contínuo em $X \setminus (M_X \setminus \Theta)$ e que sua restrição ao conjunto impulsivo M_X também é contínua.

Começamos, demonstrando que o funcional $\mathcal{V}$ é contínuo em Θ . De fato, sejam $x \in \Theta$ e $\{w_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X tais que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Sabemos que Θ é positivamente $\tilde{\pi}$ -invariante, então $\mathcal{V}(x) = 0$. Da estabilidade uniforme de Θ , dado $\epsilon > 0$ existe um natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos

$$|\tilde{\pi}(w_n, t)| < \epsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

Então $\mathcal{V}(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \mathcal{V}(x)$.

Seguindo, provaremos a continuidade do funcional $\mathcal{V}$ em $X \setminus (\Theta \cup M_X)$. Sejam $x \in X \setminus (\Theta \cup M_X)$ e $\{z_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência em X tais que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Podemos assumir que $z_n \notin \Theta \cup M_X$ para todo $n \geq 1$, pois M_X é fechado. Considere $r_0 = \max\{|z_n| : n \geq 1\}$ e $R = \min\{|z_n| : n \geq 1\}$. Então por (5.13), tomando $r = r_0$, existe $T > 0$ (o qual podemos assumir que $T \neq \sum_{i=0}^j \phi_X(x_i^+)$ para todo $j \in \mathbb{N}$) tal que para cada $n \geq 1$ tenhamos

$$|\tilde{\pi}(z_n, t)| < R \text{ e } |\tilde{\pi}(x, t)| < R \text{ para todo } t \geq T. \quad (5.14)$$

Dado $j \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto

$$D(x_{j-1}^+) = \begin{cases} [0, \phi_X(x_{j-1}^+)], & \text{se } \phi_X(x_{j-1}^+) < +\infty, \\ [0, +\infty), & \text{se } \phi_X(x_{j-1}^+) = +\infty. \end{cases}$$

A hipótese de que $\phi_X(a) \geq \beta$ para todo $a \in I_X(M_X)$ permite dizer que o semifluxo impulsivo de x admite um número finito de descontinuidades no intervalo $[0, T]$, digamos m saltos. Além disso, pelos Lemas 2.19 e 2.20, podemos assumir que o semifluxo

impulsivo de z_n , para n suficientemente grande, admite o mesmo número m de descon-
tinuidades no intervalo $[0, T]$. A partir da definição do funcional $\mathcal{V}$ e de (5.14), existem
 $p \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $\tau_x \in D(x_p^+) \cap [0, T]$ tais que

$$\mathcal{V}(x) = |\pi(x_p^+, \tau_x)|. \quad (5.15)$$

Analogamente, para cada $n \geq 1$, existem $\ell_n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $\tau_n \in D((z_n)_{\ell_n}^+) \cap [0, T]$
tais que

$$\mathcal{V}(z_n) = |\pi((z_n)_{\ell_n}^+, \tau_n)|. \quad (5.16)$$

Note que $0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \ell_n \leq m$ e $0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n \leq m$. Seja $\{\ell_{n_k}\}_{k \geq 1}$ uma subsequência
convergente arbitrária de $\{\ell_n\}_{n \geq 1}$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ell_{n_k} = q$ para todo $k \geq k_0$,
onde $q \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Assim

$$\mathcal{V}(z_{n_k}) = |\pi((z_{n_k})_q^+, \tau_{n_k})| \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Como $\phi((z_n)_q^+) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(x_q^+)$ e $\tau_{n_k} \in D((z_{n_k})_q^+) \cap [0, T]$ para $k \geq k_0$, podemos assumir que
 $\tau_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \nu \in D(x_q^+) \cap [0, T]$. Agora, observe que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(z_{n_k}) = |\pi(x_q^+, \nu)| \leq \mathcal{V}(x).$$

Por outro lado,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(z_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\pi((z_{n_k})_q^+, \tau_{n_k})| \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} |\pi((z_{n_k})_p^+, \tau_x)| = |\pi(x_p^+, \tau_x)| = \mathcal{V}(x).$$

Assim, $\mathcal{V}(x) = |\pi(x_p^+, \tau_x)| = |\pi(x_q^+, \nu)|$ implicando que $\mathcal{V}(z_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x)$. Pela arbitrariedade da subsequência, concluímos que $\mathcal{V}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x)$.

Para não estendermos ainda mais e repetirmos as ideias já expostas, concluímos a
prova observando que como M_X satisfaz a condição STC então podemos mostrar que
 $\mathcal{V}|_{M_X}$ é contínua no conjunto impulsivo M_X . $\square$

Utilizando as ideias da demonstração do Teorema 5.10, podemos estabelecer os seguin-
tes resultados sobre estabilidade uniforme assintótica e estabilidade uniforme em sistemas
impulsivos não autônomos.

Lembremos que para $r > 0$, estamos denotando $U_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$.

Teorema 5.11. [15, Teorema 3.4] *Seja $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema impulsivo quase
completamente contínuo tal que $I_X(M_X \setminus \Theta) \cap \Theta = \emptyset$ e $|I_X(v)| \leq |v|$ para todo $v \in$
 M_X . Suponha que existe um número $r > 0$ e um funcional $\mathcal{V} : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínuo em
 $U_r \setminus (M_X \setminus \Theta)$, o qual sua restrição em M_X também é contínua, e satisfaz as seguintes
propriedades:*

i) $\mathcal{V}(\theta_y) = 0$ para todo $y \in Y$;

- ii) $\mathcal{V}(x) \geq a(|x|)$ para todo $x \in U_r$, para alguma função $a \in \mathcal{U}$ com $\text{Im}(a) = \text{Im}(\mathcal{V})$;
- iii) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ se $\tilde{\pi}(x, \tau) \in U_r$ para todo $\tau \in [0, t]$;
- iv) $\tilde{L}_X^+(x) \setminus M_X \not\subseteq \mathcal{V}^{-1}(c)$ para todo $c > 0$ e $x \in U_r$.

Então a seção nula Θ é uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável. Além disso, se existe $\beta > 0$ tal que $\phi_X(w) \geq \beta$ para todo $w \in I_X(M_X)$ e $\Theta \cap M_X = \emptyset$, então a recíproca é verdadeira.

Demonstração. A prova segue as ideias da prova do Teorema 5.10. A fim de provar que Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável, procedemos como na Afirmação 1 do Teorema 5.10, onde a existência da sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\pi}(x_n, [0, t_n]) \subset U_r$ e $|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| \geq \epsilon_0$ é uma consequência do fato que $|I_X(v)| \leq |v|$ para todo $v \in M_X$.

Por outro lado, para a condição necessária do Teorema, definimos o funcional $\mathcal{V} : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $\mathcal{V}(x) = \sup_{t \geq 0} |\tilde{\pi}(x, t)|$. □

Doravante, podemos retirar as condições $I_X(M_X \setminus \Theta) \cap \Theta = \emptyset$ e $\Theta \cap M_X = \emptyset$ para obter a estabilidade uniforme. Além disso, notamos que Y não precisa ser compacto.

Teorema 5.12. [15, Teorema 3.5] *Seja $(X, \pi; M_X, I_X)$ um sistema quase completamente contínuo tal que $|I_X(v)| \leq |v|$ para todo $v \in M_X$. Então são equivalentes:*

1. A seção nula Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável;
2. Existe um número $r > 0$ e um funcional $\mathcal{V} : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo as seguintes propriedades:
 - i) $\mathcal{V}(x) \geq |x|$ para todo $x \in U_r$ e $\lim_{|x| \rightarrow 0} \mathcal{V}(x) = 0$;
 - ii) $\mathcal{V}(\tilde{\pi}(x, t)) \leq \mathcal{V}(x)$ se $\tilde{\pi}(x, \tau) \in U_r$ para $\tau \in [0, t]$.

Demonstração. Suponha o contrário, que a seção nula Θ não seja uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável. Então existem, $\epsilon_0 > 0$, ($\epsilon_0 < r$), sequências $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset Y$, $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset U_r$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $x_n \in X_{y_n}$, $|x_n| < \frac{1}{n}$ e $\tilde{\pi}(x_n, \tau) \in U_r$ para todo $\tau \in [0, t_n]$ (pois $|I_X(v)| \leq |v|$ para todo $v \in M_X$) tais que

$$|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| \geq \epsilon_0, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

A partir das condições i) e ii), obtemos $|\tilde{\pi}(x_n, t_n)| \leq \mathcal{V}(\tilde{\pi}(x_n, t_n)) \leq \mathcal{V}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, pois $\lim_{|x| \rightarrow 0} \mathcal{V}(x) = 0$. Porém isso contradiz (5.17). Portanto, a seção nula Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável.

Com a finalidade de provar a recíproca, seja $\epsilon = 1$ e tome $\delta > 0$ ($\delta \leq 1$) dado pela estabilidade uniforme de Θ . Considere $r = \delta$ e defina o funcional $\mathcal{V} : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\mathcal{V}(x) = \sup_{t \geq 0} |\tilde{\pi}(x, t)|.$$

Assim, as condições *i*) e *ii*) são verificadas. Logo a prova está completa. $\square$

Nos Teoremas 5.10 e 5.11, podemos mudar a condição *iv*) pela condição: as curvas de nível do funcional $\mathcal{V}$ não contém nenhum semifluxo impulsivo do sistema $(X, \pi; M_X, I_X)$. Este fato foi apresentado na Proposição 4.9.

Exemplo 5.13. [15, Exemplo 3.1] *Sejam $X = \mathbb{R}^2$ e $\pi((x, y), t) = (t + x, e^{-t}y)$ um sistema dinâmico em X . Seja $M_X = \bigcup_{n \geq 0} M_n$ um conjunto impulsivo, onde $M_n = \{(x, y) : y = x - n \text{ para } x \geq 0\} \cup \{(x, y) : y = -x + n \text{ para } x \geq 0\}$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, veja a Figura 5.1.*

Figura 5.1: Conjunto impulsivo M_X .

Considere a função impulso $I_X : M_X \longrightarrow X$ por $I_X(x, y) = (x + \frac{1}{2}, \frac{y}{2})$, $(x, y) \in M_X$.

Agora, seja $Y = \mathbb{R}$ e $\sigma(y, t) = t + y$ um sistema dinâmico em Y . Então, $\langle (X, \pi; M_X, I_X), (Y, \sigma), h \rangle$ é um sistema não autônomo, em que $h = \text{proj}_1$ denota a projeção na primeira coordenada. A seção nula do fibrado (X, h, Y) é dada por $\Theta = \mathbb{R} \times \{0\}$.

O funcional $\mathcal{V} : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$\mathcal{V}(x, y) = \sup_{t \geq 0} |\tilde{\pi}((x, y), t)|,$$

satisfaz as condições do Teorema 5.12. Note que $\mathcal{V}(y, z) = \|z\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em $\mathbb{R}$. Portanto, Θ é uniformemente $\tilde{\pi}$ -estável.

5.2 Estabilidade para uma classe de equações diferenciáveis impulsivas não autônomas

Consideremos o sistema diferencial impulsivo,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, \\ I : M \longrightarrow \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é regular, I é uma função contínua e $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto impulsivo. Lembre-se que o conceito de função regular foi definido na Definição 4.16.

Considere $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ e a família de sistemas

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(t, u), & u \in \mathbb{R}^n, g \in H(f), \\ I : M \longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.19)$$

Denote por $\tilde{\varphi}(t, v, g)$ a solução de (5.19) tal que $\tilde{\varphi}(0, v, g) = v$.

Denotando $X = \mathbb{R}^n \times H(f)$, $M_X = M \times H(f)$ e $I_X : M_X \rightarrow X$ por $I_X(v, g) = (I(v), g)$, segue pela Seção 4.2 que o sistema (5.18) gera o sistema dinâmico não autônomo impulsivo

$$\langle (X, \pi; M_X, I_X), (H(f), \sigma; M_{H(f)}, I_{H(f)}), h \rangle, \quad (5.20)$$

onde $h = p_2$ (projeção na segunda coordenada) e $(H(f), \sigma)$ é o sistema das translações em $H(f)$.

A fim de discutirmos a estabilidade da solução nula, vamos assumir que $I(0) = 0$ e $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\|\cdot\|$ uma norma usual em $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.14. A solução nula do sistema (5.18) é denominada:

1. *uniformemente estável*, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $v \in \mathbb{R}^n$ e $\|v\| < \delta$ então $\|\tilde{\varphi}(t, v, f)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$;
2. *uniformemente assintoticamente estável*, se a solução nula é uniformemente estável e existe $\gamma > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}(t, v, f)\| = 0$ para $\|v\| \leq \gamma$;
3. *globalmente uniformemente assintoticamente estável*, se a solução nula é uniformemente estável e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}(t, v, f)\| = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Observe que a seção nula Θ do fibrado $(X, h, H(f))$ coincide com $\{0\} \times H(f)$. Desta forma, podemos notar que a Definição 5.14 é um caso particular da Definição 5.3. Consequentemente, podemos utilizar os resultados da seção anterior para obtermos critérios de estabilidade para a solução nula do sistema de equações impulsivas (5.18).

No seguinte resultado auxiliar, vamos utilizar as notações descritas na Seção 4.2, isto é, $v_0^+ = v$, $t_{-1} = 0$ e $t_k = s_0 + \dots + s_k$, onde $s_0 = \phi_X(v, g)$, $s_1 = \phi_X(v_1^+, g_{s_0})$, $\dots$, $s_k = \phi_X(v_k^+, g_{s_0+\dots+s_{k-1}})$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Lema 5.15. [15, Lema 3.3] *Seja $\xi(t) = \varphi(t, v_n^+, f_{t_{n-1}})$ a solução do sistema*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f_{t_{n-1}}(t, u) \\ u(0) = v_n^+, \end{cases} \quad (5.21)$$

definida para todo $t \geq 0$. Então a solução, $\tilde{\varphi}(t, v, f)$, do sistema impulsivo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ u(0) = v \\ I : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.22)$$

é dada por $\tilde{\varphi}(t, v, f) = \varphi(t - t_{n-1}, v_n^+, f_{t_{n-1}})$, para $t_{n-1} \leq t < t_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Note que

$$\xi(t) = v_n^+ + \int_0^t f_{t_{n-1}}(s, \xi(s)) ds = v_n^+ + \int_0^t f(s + t_{n-1}, \xi(s)) ds, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Defina $\eta(t) = \psi(t; t_{n-1}, v_n^+, f)$ como sendo a solução de $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ tal que $u(t_{n-1}) = v_n^+$. Assim

$$\eta(t) = v_n^+ + \int_{t_{n-1}}^t f(s, \eta(s)) ds = v_n^+ + \int_0^{t-t_{n-1}} f(s + t_{n-1}, \eta(s + t_{n-1})) ds,$$

para todo $t \geq t_{n-1}$. Consequentemente,

$$\eta(r + t_{n-1}) = v_n^+ + \int_0^r f(s + t_{n-1}, \eta(s + t_{n-1})) ds,$$

para todo $r \geq 0$.

Portanto, $\xi(t)$ e $\eta(t + t_{n-1})$ são soluções do PVI (5.21). Então $\eta(t + t_{n-1}) = \xi(t)$ para todo $t \geq 0$. Logo, para $t \geq t_{n-1}$, obtemos

$$\xi(t - t_{n-1}) = \eta(t)$$

$$\varphi(t - t_{n-1}, v_n^+, f_{t_{n-1}}) = v_n^+ + \int_{t_{n-1}}^t f(s, \psi(s; t_{n-1}, v_n^+, f)) ds.$$

Por outro lado, considere a solução $\tilde{\varphi}(t, v, f)$ do sistema impulsivo (5.22). Se $t_{n-1} \leq t < t_n$, então segue pela unicidade de soluções que $\tilde{\varphi}(t, v, f) = \psi(t; t_{n-1}, v_n^+, f)$, onde $\psi(t; t_{n-1}, v_n^+, f)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ u(t_{n-1}) = v_n^+. \end{cases}$$

Isto significa que

$$\tilde{\varphi}(t, v, f) = v_n^+ + \int_{t_{n-1}}^t f(s, \psi(s; t_{n-1}, v_n^+, f)) ds = \varphi(t - t_{n-1}, v_n^+, f_{t_{n-1}}),$$

para todo $t \geq t_{n-1}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 5.16. [15, Teorema 3.6] *Suponha que $H(f)$ seja compacto e que $I(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Considere o conjunto $A = \{(v, g) \in X : v \in M, \|v\| > 0\}$. Suponha que exista um funcional $\mathcal{V} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínuo em $X \setminus A$, no qual sua restrição em $M \times H(f)$ é contínua, e satisfaz as seguintes condições:*

- i) $\mathcal{V}(0, g) = 0$ para todo $g \in H(f)$;
- ii) $\mathcal{V}(v, g) \geq a(\|v\|)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e $g \in H(f)$, onde $\text{Im}(a) = \text{Im}(\mathcal{V})$ e $a \in \mathcal{U}$;
- iii) $\mathcal{V}(\varphi(t, v, g), \sigma(g, t)) \leq \mathcal{V}(v, g)$ para todo $(v, g) \in X$ e $t \in [0, \phi_X(v, g)]$ e $\mathcal{V}(I(v), g) \leq \mathcal{V}(v, g)$ para todo $v \in M$;
- iv) para cada $g \in H(f)$, as curvas de nível $\mathcal{V}^{-1}(c)$, $c \neq 0$, não contém órbitas impulsivas de (5.19).

Então a solução nula do sistema (5.18) é globalmente assintoticamente estável. Além disso, se $\|v\| \neq 0$ para todo $v \in M$, então a recíproca é verdadeira.

Demonstração. Seja (5.20) o sistema não autônomo impulsivo associado ao sistema (5.18). Como a seção nula Θ do fibrado $(X, h, H(f))$ coincide com $\{0\} \times H(f)$, segue que $|(v, g)| = \|v\|$ para cada $(v, g) \in X$. Sabemos que $M_X = M \times H(f)$, consequentemente, $X \setminus A = X \setminus (M_X \setminus \Theta)$.

Finalmente, como $I_X(v, g) = (I(v), g)$ para $(v, g) \in M_X$, então segue que a condição $I_X(M_X \setminus \Theta) \cap \Theta = \emptyset$ é equivalente à condição $I(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Usando a Proposição 4.9 e o Teorema 5.10, concluímos que Θ é globalmente uniformemente assintoticamente $\tilde{\pi}$ -estável. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $g \in H(f)$ e $v \in \mathbb{R}^n$ $((v, g) \in h^{-1}(\{g\}))$ com $|(v, g)| < \delta$ então $|\tilde{\pi}((v, g), t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Isto significa que para $t_{m-1} \leq t < t_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$v \in \mathbb{R}^n, \|v\| < \delta \implies \|\varphi(t - t_{m-1}, v_m^+, g_{t_{m-1}})\| < \epsilon, \quad \text{para todo } g \in H(f). \quad (5.23)$$

Seja $\tilde{\varphi}(t, v, f)$ a solução do sistema (5.18). Pelo Lema 5.15, podemos escrever $\tilde{\varphi}(t, v, f) = \varphi(t - t_{m-1}, v_m^+, f_{t_{m-1}})$, para $t_{m-1} \leq t < t_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, para cada $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| < \delta$ e para $t_{m-1} \leq t < t_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, usando (5.23), obtemos

$$\|\tilde{\varphi}(t, v, f)\| = \|\varphi(t - t_{m-1}, v_m^+, f_{t_{m-1}})\| < \epsilon.$$

Portanto a solução nula é uniformemente estável.

Por outro lado, como $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}((v, g), t)| = 0$ para $(v, g) \in X$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}(t, v, f)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t - t_{m-1}, v_m^+, f_{t_{m-1}})\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\pi}((v, f), t)| = 0,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Pelo Teorema 5.11, obtemos condições necessárias e suficientes para estabelecer a estabilidade uniforme assintótica da solução nula da equação impulsiva (5.18), veja o próximo resultado. Denote $B[0, r] = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leq r\}$, $r > 0$.

Teorema 5.17. [15, Teorema 3.7] *Sejam $H(f)$ compacto, $|I_X(v, g)| \leq \|v\|$ para todo $(v, g) \in M_X$ e assumamos que $I(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Suponha que existam um número positivo $r > 0$ e um funcional $\mathcal{V} : B[0, r] \times H(f) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{V}$ é contínuo no conjunto $\{(v, g) \in X : v \in M, 0 < \|v\| \leq r\}$, sua restrição no conjunto $(M \cap B[0, r]) \times H(f)$ é contínua e satisfaz:*

- i) $\mathcal{V}(0, g) = 0$ para todo $g \in H(f)$;
- ii) $\mathcal{V}(v, g) \geq a(\|v\|)$ para todo $v \in B[0, r]$ e $g \in H(f)$, onde $\text{Im}(a) = \text{Im}(\mathcal{V})$ e $a \in \mathcal{U}$;
- iii) $\mathcal{V}(\tilde{\varphi}(t, v, g), \sigma(g, t)) \leq \mathcal{V}(v, g)$ quando $\tilde{\varphi}(\tau, v, g) \in B[0, r]$ para todo $\tau \in [0, t]$;
- iv) para todo $g \in H(f)$, as curvas de nível $\mathcal{V}^{-1}(c)$, $c \neq 0$, não contém órbitas impulsivas de (5.19).

Então a solução nula do sistema (5.18) é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, se $\|v\| \neq 0$ para todo $v \in M$, então a recíproca é verdadeira.

5.3 O modelo presa-predador impulsivo

Um sistema presa-predador que consiste em duas presas e um predador pode ser descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dT} = r_1 x (1 - k_1^{-1} x - k_1^{-1} c_2 y) - \Phi_1(x, y) z \\ \frac{dy}{dT} = r_2 y (1 - k_2^{-1} c_1 x - k_2^{-1} y) - \Phi_2(x, y) z \\ \frac{dz}{dT} = e_1 \Phi_1(x, y) z + e_2 \Phi_2(x, y) z - \alpha z, \end{cases} \quad (5.24)$$

onde α , k_1 , k_2 , r_1 , r_2 , c_1 , c_2 , e_1 e e_2 são constantes positivas. Os parâmetros e_1 e e_2 representam a *eficiência de conversão* de presas em predadores, isto é, os incrementos na própria população de predadores decorrentes de cada presa consumida. As funções Φ_1 e Φ_2 representam a relação que estima a saturação do consumo de presas pelo predador, denominada *resposta funcional* do predador, dadas por

$$\Phi_1(x, y) = \frac{a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 y} \quad \text{e} \quad \Phi_2(x, y) = \frac{a_2 y}{1 + b_1 x + b_2 y},$$

onde a_1 e a_2 são as taxas de interação entre as presas x e y e o predador, respectivamente, $b_1 = h_1 a_1$ e $b_2 = h_2 a_2$ onde h_1 e h_2 representam o tempo estimado de consumo das presas x , y , respectivamente, pelo predador. O leitor pode consultar o artigo [30] para obter mais detalhes que fogem de nossa abordagem.

Usando as seguintes mudanças

$$x_1 = k_1^{-1}x, \quad x_2 = k_2^{-1}y, \quad x_3 = k_2^{-1}z \quad \text{e} \quad t = r_1T,$$

podemos reescrever o sistema (5.24) na forma adimensional:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - \alpha_2 x_2) - \frac{\alpha_1 x_1 x_3}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} = \gamma_2 x_2(1 - x_2 - \gamma_1 x_1) - \frac{\nu_2 x_2 x_3}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{\nu_1 x_1 x_3 + \mu_2 x_2 x_3}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} - \mu_1 x_3, \end{cases} \quad (5.25)$$

onde $\alpha_1 = a_1 k_1 r_1^{-1}$, $\alpha_2 = c_1 k_2 k_1^{-1}$, $\beta_1 = b_1 k_1$, $\beta_2 = b_2 k_2$, $\gamma_1 = c_2 k_1 k_2^{-1}$, $\gamma_2 = r_2 r_1^{-1}$, $\nu_1 = \alpha_1 e_1$, $\nu_2 = \alpha_2 k_1 r_1^{-1}$, $\mu_1 = \alpha r_1^{-1}$ e $\mu_2 = e_2 k_2 \nu_2^{-1} k_1^{-1}$.

Em [24], os autores estudam o problema de controle para o modelo presa-predador usando um controle feedback não linear, ou seja, considerando o sistema (5.25) com controle de entrada:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1(1 - x_1 - \alpha_2 x_2)(1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - \alpha_1 x_1 x_3 + u_1}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma_2 x_2(1 - \gamma_1 x_1 - x_2)(1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - \nu_2 x_2 x_3 + u_2}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_3(\nu_1 x_1 + \mu_2 x_2) - \mu_1 x_3(1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) + u_3}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}, \end{cases} \quad (5.26)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são os controles de entrada. Usando o controle feedback não linear

$$\begin{cases} u_1 = x_1[(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)(\alpha_2 x_2 + x_1 - 1) + \alpha_2 x_2 - 1] \\ u_2 = \gamma_2 x_2[(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)(x_2 + \gamma_1 x_1 - 1) + \gamma_1 x_1 - 1] \\ u_3 = \mu_1(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)x_3 - (\nu_1 x_1 + \mu_2 x_2)x_3, \end{cases} \quad (5.27)$$

o sistema (5.26) se transforma no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-(x_1 + \alpha_1 x_3)x_1}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-(\gamma_2 x_2 + \nu_2 x_3)x_2}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{-\mu_1 x_3}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}. \end{cases} \quad (5.28)$$

Além disso, em [24], os autores mostram que o ponto de equilíbrio de (5.28) é assintoticamente estável. Por outro lado, em [11], os autores consideram o sistema (5.28) sobre condições de impulsos onde a quantidade de predadores sofre uma variação brusca. Esta

mudança de estado é devido a uma função impulso. Ainda em [11], os autores mostram que, sob certas condições, o sistema (5.28) permanece assintoticamente estável mesmo sob as condições de impulsos.

Neste momento, consideramos o sistema (5.24) controlado pelo controle feedback não linear (5.27), onde as variáveis $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \nu_2$ e μ_1 são em função do tempo t , ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-(x_1 + \alpha_1(t)x_3)x_1}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-(\gamma_2(t)x_2 + \nu_2(t)x_3)x_2}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2} \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{-\mu_1(t)x_3}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2}, \end{cases} \quad (5.29)$$

o qual está sujeito a uma função impulsiva

$$I : M \rightarrow X, \quad (5.30)$$

onde $M = \bigcup_{i=1}^p \{(x_1, x_2, x_3) \in X : x_1 + x_2 + x_3 = \eta_i\}$, $p \in \mathbb{N}$ e $\eta_1, \dots, \eta_p$ são constantes positivas, e

$$I(x_1, x_2, x_3) = (I_1(x_1, x_2, x_3), I_2(x_1, x_2, x_3), I_3(x_1, x_2, x_3)), \quad (x_1, x_2, x_3) \in M.$$

Como as densidades $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ são não negativas, consideramos o espaço de fase $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ o qual é invariante.

Com a finalidade de estudar a estabilidade do sistema (5.29)-(5.30), usaremos a teoria de sistemas não autônomos impulsivos abstratos, desenvolvida ao longo desse trabalho. Precisamente, provaremos que no sistema presa-predador controlado impulsivo (5.29)-(5.30), o ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Assumiremos as seguintes condições gerais:

C1. $I(M) \cap M = \emptyset$;

C2. $0 < I_j(x_1, x_2, x_3) \leq x_j$ para $j = 1, 2, 3$ e $(x_1, x_2, x_3) \in M$;

C3. Os conjuntos $\{(\alpha_1)_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, $\{(\nu_2)_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, $\{(\mu_1)_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, $\{(\beta_1)_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ e $\{(\beta_2)_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ são relativamente compactos, em que $h_\tau(t) = h(t + \tau)$ para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$ e $h \in \{\alpha_1, \nu_2, \mu_1, \beta_1, \beta_2\}$.

Podemos reescrever o sistema (5.29)-(5.30) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ I : M \longrightarrow X, \end{cases} \quad (5.31)$$

onde $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $f(t, u) = (f_1(t, u), f_2(t, u), f_3(t, u))$ com

$$f_1(t, u) = \frac{-(x_1 + \alpha_1(t)x_3)x_1}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2}, \quad f_2(t, u) = \frac{-(\gamma_2(t)x_2 + \nu_2(t)x_3)x_2}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2} \quad \text{e}$$

$$f_3(t, u) = \frac{-\mu_1(t)x_3}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2}.$$

Observe que pela condição C3), o espaço $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ é compacto.

Agora, consideremos o funcional de Lyapunov $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in X.$$

Se $w = (x_1, x_2, x_3) \in X \setminus \{(0, 0, 0)\}$, então para todo $t \geq 0$, obtemos

$$\langle \nabla \psi(w), f(t, w) \rangle = \frac{-(x_1 + \alpha_1(t)x_3)x_1^2 - (\gamma_2(t)x_2 + \nu_2(t)x_3)x_2^2 - \mu_1(t)x_3^2}{1 + \beta_1(t)x_1 + \beta_2(t)x_2} < 0. \quad (5.32)$$

Isto mostra que $\psi(\varphi(t, (x_1, x_2, x_3), f)) \leq \psi(x_1, x_2, x_3)$ para todo $t \geq 0$, onde $\varphi(t, (x_1, x_2, x_3), f)$ é a solução do sistema sem impulso (5.29). Ademais, se $(x_1, x_2, x_3) \in M$ então utilizando a condição C2), temos

$$\begin{aligned} \psi(I(x_1, x_2, x_3)) &= \frac{I_1^2(x_1, x_2, x_3) + I_2^2(x_1, x_2, x_3) + I_3^2(x_1, x_2, x_3)}{2} \leq \\ &\leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} = \psi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Usando o funcional ψ , definimos $\mathcal{V} : X \times H(f) \rightarrow \mathbb{R}_+$ da seguinte forma

$$\mathcal{V}((x_1, x_2, x_3), g) = \psi(x_1, x_2, x_3).$$

A aplicação $\mathcal{V}$ satisfaz:

- i) $\mathcal{V}((0, 0, 0), g) = \psi(0, 0, 0) = 0$ para todo $g \in H(f)$;
- ii) $\mathcal{V}((x_1, x_2, x_3), g) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} = a(\|(x_1, x_2, x_3)\|)$, onde $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dado por $a(t) = \frac{t^2}{2}$ pertence a classe $\mathcal{U}$ e $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$;
- iii) $\mathcal{V}(\varphi(t, (x_1, x_2, x_3), g), \sigma(g, t)) = \psi(\varphi(t, (x_1, x_2, x_3), g)) \leq \psi(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{V}((x_1, x_2, x_3), g)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in X$ e para todo $g \in H(f)$, e $\mathcal{V}(I(x_1, x_2, x_3), g) \leq \mathcal{V}((x_1, x_2, x_3), g)$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in M$ e para todo $g \in H(f)$;
- iv) Para cada $g \in H(f)$, a curva de nível $\mathcal{V}^{-1}(c)$ com $c \neq 0$ não contém órbitas impulsivas.

Segue pelo Teorema 5.16 que o ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Podemos notar que, mesmo com a mudança da densidade do predador, a saber sua diminuição, em alguns instantes, a população de presas e predadores tende a extinção.

Observação 5.18. O resultado obtido anteriormente generaliza os resultados exibidos em [11] e [24].

APÊNDICE A

Topologia

A fim de contribuir com a leitura independente deste trabalho e aos menos familiarizados inserimos esse capítulo sobre alguns conceitos topológicos que utilizamos ao longo do texto. A composição desta parte é desenvolvida com base nos livros [16, 25]. Apresentamos duas seções, a primeira sobre topologia no espaço de funções e a segunda sobre fibrados.

A.1 Topologia em espaço de funções

Sejam X e Y dois espaços topológicos não vazios. Denotemos por $C(X, Y)$ a família de todas as funções $f : X \longrightarrow Y$ contínuas.

Definição A.1. Dados K um subconjunto compacto de X e U um subconjunto aberto de Y , definimos

$$S(K, U) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}.$$

A família $\{S(K, U) : K \text{ é um subconjunto compacto em } X \text{ e } U \text{ é um subconjunto aberto de } Y\}$ forma uma sub-base para a topologia em $C(X, Y)$ chamada *topologia compacto-aberta*. A família de interseções finitas de conjuntos da forma $S(K, U)$ é uma base para a topologia compacto-aberta, isto é, cada membro da base é da forma $\bigcap \{S(K_i, U_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ onde cada K_i é um subconjunto compacto de X e U_i um subconjunto aberto de Y .

Sabemos que uma *métrica* em X é uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$;
- (b) $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$. E, se $d(x, y) = 0$, $x, y \in X$, então $x = y$;
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$;
- (d) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Se a aplicação d não satisfaz a segunda parte do item (b), dizemos que d é uma *pseudo métrica* e que (X, d) é um *espaço pseudo métrico*.

Assuma que Y seja um espaço pseudo métrico completo e que $\mathcal{P}$ seja a família de pseudo métricas em Y . Denote por $\mathcal{C}(X, Y)$ a família de todas as funções contínuas $f : X \longrightarrow Y$ com a topologia compacto-aberta. Esta topologia é dada pela família de pseudo métricas $\{d_K^p\}$, onde $p \in \mathcal{P}$ e K é um subconjunto compacto de X tais que

$$d_K^p(f, g) = \sup_{x \in K} p(f(x), g(x)), \quad f, g \in \mathcal{C}(X, Y).$$

Descrevemos a seguir um método geral para a construção de um sistema dinâmico no espaço das funções contínuas.

Sejam $(X, \pi, \mathbb{R})$ um sistema dinâmico em X e Y um espaço pseudo métrico completo. Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, definimos a aplicação $\sigma_\tau : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ pela lei

$$(\sigma_\tau f)(x) = f(\pi(\tau, x)), \quad x \in X.$$

Note que a família de aplicações $\{\sigma_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ possui as seguintes propriedades:

1. $\sigma_0 = id_{\mathcal{C}(X, Y)}$;
2. $\sigma_{\tau_1} \circ \sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1 + \tau_2}$, para todos $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$;
3. σ_τ é contínua para cada $\tau \in \mathbb{R}$.

O Lema A.2 nos leva a concluir que $(\mathcal{C}(X, Y), \sigma, \mathbb{R})$ é um sistema dinâmico em $\mathcal{C}(X, Y)$.

Lema A.2. [17, Lema 1.1] A aplicação $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, definida por $\sigma(\tau, f) = \sigma_\tau f$, é contínua.

Para fins de aplicações, ao longo desse trabalho, consideramos os seguintes exemplos.

Exemplo A.3. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $(X, \pi, \mathbb{R})$ um sistema dinâmico em X , onde $\pi(x, t) = x + t$, $x, t \in \mathbb{R}$. O sistema dinâmico $(\mathcal{C}(X, Y), \sigma, \mathbb{R})$, $(\sigma_\tau f)(x) = f(\pi(\tau, x)) = f(x + \tau)$, é chamado de sistema dinâmico de Bebutov (das translações ou shift).

Exemplo A.4. Seja $X = \mathbb{R} \times W$, onde W é um espaço métrico. Denotamos $(X, \pi, \mathbb{R})$ pelo sistema dinâmico em X definido por $\pi((s, w), t) = (s + t, w)$, $s, t \in \mathbb{R}$ e $w \in W$. Usando o método acima, podemos definir em $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y)$ um sistema dinâmico de translações na primeira coordenada dado por $(\sigma_\tau f)(s, w) = f(\pi(\tau, x)) = f(s + \tau, w)$.

A órbita positiva de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y)$ é dada por $\sigma^+(f) = \{\sigma_\tau f : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ e o conjunto limite de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y)$ por $L^+(f) = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y) : \text{existe uma sequência } \{\tau_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que } \tau_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e } \sigma_{\tau_n} f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g\}$.

Note que para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y)$, o conjunto $H^+(f) = \overline{\{\sigma_\tau f = f_\tau : \tau \in \mathbb{R}^+\}}$ (o fecho é tomado em $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y)$) é positivamente invariante. Portanto $(H(f), \sigma, \mathbb{R})$ é um sistema dinâmico em $H(f)$ induzido pelo sistema dinâmico das translações $(\mathcal{C}(\mathbb{R} \times W, Y), \sigma, \mathbb{R})$.

A.2 Fibrados

Um *fibrado* pode ser entendido geometricamente como uma coleção de estruturas, espaços vetoriais euclidianos por exemplo, associados a cada ponto de um espaço topológico.

Definição A.5. Um *fibrado vetorial* k -dimensional, representado por (E, p, B) , consiste de um par de espaços topológicos E (*espaço total*) e B (*base*) e uma aplicação $p : E \rightarrow B$ (*projeção*) satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) p é sobrejetiva;
- (b) para cada $x \in B$, a fibra $p^{-1}(\{x\})$ é um espaço vetorial;
- (c) para cada $x \in B$, existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U), \quad (\text{A.1})$$

o qual é um isomorfismo linear de $\{y\} \times \mathbb{R}^k$ em $p^{-1}(\{y\})$, para todo $y \in U$ (*condição de trivialidade local*).

Quando $\mathbb{R}^k$ é substituído por um espaço vetorial F qualquer de dimensão k (fibra), chamamos (E, p, B) de *fibrado vetorial*. Isto é, para cada $x \in B$ existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo

$$\Phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U).$$

Se a fibra F é um espaço de Banach, dizemos que (E, p, B) é um *fibrado vetorial de Banach*.

A aplicação Φ definida em (A.1) é chamada de *trivialização local*. Isto expressa o fato que, localmente, o espaço E é um produto de uma vizinhança de B por um espaço vetorial (veja a Figura A.1). Se todo o espaço topológico E é um produto de B por algum espaço vetorial, ou, equivalentemente, se a aplicação Φ está globalmente definida, então o fibrado vetorial correspondente é dito *trivial*. Os exemplos mais simples de fibrados vetoriais são os triviais, da forma $B \times \mathbb{R}^k$, onde $p : B \times \mathbb{R}^k \rightarrow B$ é a projeção na primeira coordenada.

Figura A.1: Trivialização [16, Figura 6.2.1].

Um *fibrado* (localmente trivial) é a noção mais geral de fibrado vetorial. Esta estrutura, denotada pela quádrupla (E, p, B, F) , consiste em três espaços topológicos E (*espaço total*), B (*espaço base*), F (*fibra*), e uma sobrejeção contínua $p : E \rightarrow B$ (*projeção*), com as seguintes propriedades:

1. cada fibra $p^{-1}(\{x\})$, $x \in B$, é um subespaço topológico de E homeomorfo a fibra F ;
2. para todo $x \in B$ existe uma vizinhança U de x e um homeomorfismo

$$\Phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U),$$

o qual é um homeomorfismo de $\{x\} \times F$ em $p^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in U$.

A noção de *seção* é o análogo de campo de vetores, em variedades, para fibrado.

Definição A.6. Uma *seção* de um fibrado (E, p, B, F) ($p : E \rightarrow B$) é uma aplicação contínua $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $p \circ \sigma = id_B$, isto é, $\sigma(y) \in p^{-1}(\{y\})$ para todo $y \in B$.

Nem sempre é possível definir uma seção em um fibrado qualquer. No entanto, em fibrados vetoriais sempre existe a *seção nula*, a qual denotaremos por θ , onde $\theta_y = \theta(y)$ representa o vetor nulo do espaço vetorial $p^{-1}(\{y\})$ para cada $y \in B$. Ademais, denotaremos por $\Theta = \{\theta_y : y \in B\}$ o conjunto imagem de $\theta : B \rightarrow E$, no qual vamos chamar indistintamente de *seção nula*.

O Lema A.7 trata sobre a compacidade de Θ .

Lema A.7. [18, Lema 3.7] *Sejam (E, p, B) um fibrado vetorial e Θ a seção nula do fibrado (E, p, B) . Suponha que as seguintes condições são verificadas:*

- i) B é compacto;*
- ii) o fibrado vetorial (E, p, B) é localmente trivial.*

Então Θ é compacto.

Demonstração. Seja $\{\theta_{y_k}\}_{k \geq 1}$ uma sequência arbitrária de Θ . Vamos provar que é possível extrair de $\{\theta_{y_k}\}_{k \geq 1}$ uma subsequência convergente. Ora, podemos considerar sem perda de generalidade, que a sequência $\{y_k\}_{k \geq 1}$ converge para algum $y \in B$, pois B é compacto. Uma vez que (E, p, B) é localmente trivial, então existe uma vizinhança U_y do ponto y tal que $p^{-1}(U_y)$ e $U_y \times F$ são difeomorfos. Como consequência, existe um natural $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in U_y$ para todo $k \geq k_0$. Denote por α o difeomorfismo (trivialização) entre $p^{-1}(U_y)$ e $U_y \times F$. Desta forma, $\theta_{y_k} = \alpha^{-1}(y_k, 0)$ (0 é o elemento neutro de F) para todo $k \geq k_0$ e portanto $\theta_{y_k} \rightarrow \theta_y$ quando $k \rightarrow \infty$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] D. Bainov e P. Simeonov, Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 66. *Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley Sons, Inc., New York*, 1993. x+228 pp. ISBN: 0-582-09639-1.
- [2] N. P. Bhatia e O. Hajek, Local Semi-Dynamical Systems. *Springer-Verlag Berlin, Heidelberg*. 1969.
- [3] N. P. Bhatia e G. P. Szegö, Stability theory of dynamical systems, *Grundlehren Math. Wiss., Band 161, Springer-Verlag, New York, 1970*; reprint of the 1970 original in: *Classics Math., Springer-Verlag, Berlin*, 2002.
- [4] E. M. Bonotto e M. Federson, Topological conjugation and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 326, (2007), 869-881.
- [5] E. M. Bonotto, Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 332 (1), (2007), 81-96.
- [6] E. M. Bonotto e M. Federson, Poisson stability for impulsive semidynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71 (12), (2009), 6148-6156.
- [7] E. M. Bonotto e N. G. Grulha JR, Lyapunov stability of closed sets in impulsive semidynamical systems, *Electronic Journal of Differential Equations*, (2010), 1-18.
- [8] E. M. Bonotto e D. P. Demuner, Autonomous dissipative semidynamical systems with impulses, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, v. 41 (2013), 1-38.
- [9] E. M. Bonotto e D. P. Demuner, Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, v. 137 (2013), 617-642.
- [10] E. M. Bonotto e D.P. Demuner, Non-autonomous dissipative semidynamical systems with impulses, *Cadernos de Matemática*, v.16 (2) (2015), 67-85.

- [11] E. M. Bonotto e K. A. G. Azevedo, On asymptotic stability in impulsive semidynamical systems, *J. Dyn. Control of Syst.*, 19 (2013), no. 3, 359-380.
- [12] E. M. Bonotto e M. Z. Jimenes, On impulsive semidynamical systems: minimal, recurrent and almost periodic motions. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. v. 44 (2014), 121-141.
- [13] E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho e R. Czaja, Global attractors for impulsive systems - a precompact approach, *J. Diff. Eq.*, (2015), 2602-2625.
- [14] E. M. Bonotto e J. Costa Ferreira, Dissipativity in impulsive systems via Lyapunov functions, *Math. Nachr.*, v. 289 (2016), 213-231.
- [15] E. M. Bonotto, J. Costa Ferreira e M. Federson, Uniform asymptotic stability of a discontinuous prey-predator model under control via non-autonomous systems theory. Submetido.
- [16] K. Burns e M. Gidea, Differential geometry and topology. With a view to dynamical systems. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. x+389 pp.
- [17] D. N. Cheban, Global attractors of non-autonomous dissipative dynamical systems, Interdiscip. Math. Sci., vol. 1, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltda., Hackensack, NJ, 2004.
- [18] D. N. Cheban, Sell's Conjecture for Non-autonomous Dynamical Systems. *Nonlinear analysis: TMA*, 75, 7, 3393-3406, 2012.
- [19] K. Ciesielski, Sections in semidynamical systems, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 40 (1992), 297-307.
- [20] K. Ciesielski, On semicontinuity in impulsive dynamical systems, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 52 (2004), 71-80.
- [21] K. Ciesielski, On stability in impulsive dynamical systems, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 52 (2004), 81-91.
- [22] K. Ciesielski, On time reparametrizations and isomorphisms of impulsive dynamical systems, *Ann. Polon. Math.*, 84, (2004), 1-25.
- [23] E. R. A. da Costa, Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação, *Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação* (2012).
- [24] A. El-Gohary e A. S. Al-Ruzaiza, Chaos and adaptive control in two prey, one predator system with nonlinear feedback, *Chaos Solitons and Fractals*, 34 (2007), 443-453.
- [25] D. Hunsemoller, Fibre bundles. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [26] S. K. Kaul, On impulsive semidynamical systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 150 (1), (1990), 120-128.

- [27] S. K. Kaul, On impulsive semidynamical systems II, Recursive properties. *Nonlinear Anal.*, 16, (1991), 635-645.
- [28] S. K. Kaul, Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems, *J. Applied Math. and Stochastic Analysis*, 7(4), (1994), 509-523.
- [29] S. K. Kaul, *On impulsive semidynamical systems III, Lyapunov stability*. Recent Trends in Differential Equations, 335-345, World Sci. Ser. Appl. Anal., 1. Publishing, River Edge, NJ, (1992).
- [30] Y. Kuang, Basic properties of mathematical population models, *Biomathematics*, 17 (2002), 129-142.
- [31] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov e P. S. Simeonov, Theory of impulsive differential equations. Series in Modern Applied Mathematics, 6. *World Scientific Publishing Co.*, Inc., Teaneck, NJ, 1989. xii+273 pp. ISBN: 9971-50-970-9
- [32] V. Rozko, A class of almost periodic motions in pulsed system, *Diff. Uravn.*, (8), (1972), 2012-2022.
- [33] V. Rozko, Stability in terms of Lyapunov discontinuous dynamic systems, *Diff. Uravn.*, (11), (1975), 1005-1012.
- [34] G. R. Sell e Y. You, Dynamics of Evolutionary Equations, Appl. Math. Sci., vol. 143, *Springer-Verlag*, New York, 2002.