
Equações de quarta ordem na modelagem de
oscilações de pontes

Vanderley Alves Ferreira Junior

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vanderley Alves Ferreira Junior

Equações de quarta ordem na modelagem de oscilações de pontes

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos

USP – São Carlos
Fevereiro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383e Ferreira Junior, Vanderley Alves
 Equações de quarta ordem na modelagem
de oscilações de pontes / Vanderley
Alves Ferreira Junior; orientador
Ederson Moreira dos Santos. - São Carlos - SP, 2016.
96 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Equação de Swift-Hohenberg. 2. Equação da
viga. 3. Ondas viajantes. 4. Blow up em espaço
finito. 5. Equação da placa com termo não local.
6. Comportamento assintótico. 7. Estabilidade e
Instabilidade de modos simples de oscilação. I.
Moreira dos Santos, Ederson, orient. II. Título.

Vanderley Alves Ferreira Junior

Fourth order equations modeling oscillations on bridges

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos

USP – São Carlos
February 2016

À minha Marine.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me sustentou e guiou neste trabalho. Em cada passo do caminho Ele se fez presente.

À minha esposa Marine, por estar ao meu lado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis. Obrigado por seu amor, carinho e paciência, e também por toda a ajuda na revisão e formatação do texto.

Aos meus pais Vanderley e Luci e aos meus sogros Valdir e Elenice pelo suporte durante todos estes anos, por suas orações e palavras de encorajamento, bem como pelo exemplo de vida. Ao meu irmão Júlio pelas opiniões e comentários.

Ao professor Ederson por me orientar no mestrado e no doutorado. Obrigado pelas longas horas de discussão e contas no quadro, pelas correções e por sempre visar o melhor para mim.

Ao professor Filippo Gazzola, por ter sugerido o problema não local e pelas contribuições essenciais no estudo do problema.

Ao professor Ma To Fu por sempre se disponibilizar a ajudar, por ter supervisionado o projeto entre junho de 2013 e maio de 2014 e também pelas discussões motivadoras.

À professora Ires Dias, supervisora durante o estágio do PAE, com quem aprendi muito sobre ser professor.

A todos os professores do ICMC com quem tive aula nestes anos que me mostraram como a matemática é bela.

À CAPES pelo apoio financeiro durante os meses de abril e maio de 2013.

Agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro à realização deste trabalho.

Expresso minha gratidão a todos que tornaram possível concluir este trabalho e que me ensinaram tanto através de seu exemplo.

“Although to penetrate into the intimate mysteries of nature and thence to learn the true causes of phenomena is not allowed to us, nevertheless it can happen that a certain fictive hypothesis may suffice for explaining many phenomena.”

Leonhard Euler, 1748

RESUMO

FERREIRA JR, V.. **Equações de quarta ordem na modelagem de oscilações de pontes**. 2016. 96 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Equações diferenciais de quarta ordem aparecem naturalmente na modelagem de oscilações de estruturas elásticas, como aquelas observadas em pontes pênséis.

São considerados dois modelos que descrevem as oscilações no tabuleiro de uma ponte. No modelo unidimensional estudamos *blow up* em espaço finito de soluções de uma classe de equações diferenciais de quarta ordem. Os resultados apresentados solucionam uma conjectura apresentada em [F. Gazzola and R. Pavan. Wide oscillation finite time blow up for solutions to nonlinear fourth order differential equations. Arch. Ration. Mech. Anal., 207(2):717–752, 2013] e implicam a não existência de ondas viajantes com baixa velocidade de propagação em uma viga.

No modelo bidimensional analisamos uma equação não local para uma placa longa e fina, suportada nas extremidades menores, livre nas demais e sujeita a protensão. Provamos existência e unicidade de solução fraca e estudamos o seu comportamento assintótico sob amortecimento viscoso. Estudamos ainda a estabilidade de modos simples de oscilação, os quais são classificados como longitudinais ou torcionais.

Palavras-chave: Equação de Swift-Hohenberg, Equação da viga, Ondas viajantes, Blow up em espaço finito, Equação da placa com termo não local, Comportamento assintótico, Estabilidade e Instabilidade de modos simples de oscilação.

ABSTRACT

FERREIRA JR, V.. **Equações de quarta ordem na modelagem de oscilações de pontes**. 2016. 96 f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Fourth order differential equations appear naturally when modeling oscillations in elastic structures such as those observed in suspension bridges. Two models describing oscillations in the roadway of a bridge are considered. In the one-dimensional model we study finite space blow up of solutions for a class of fourth order differential equations. The results answer a conjecture presented in [F. Gazzola and R. Pavani. Wide oscillation finite time blow up for solutions to nonlinear fourth order differential equations. Arch. Ration. Mech. Anal., 207(2):717–752, 2013] and imply the nonexistence of beam oscillation given by traveling wave profile with low speed propagation.

In the two-dimensional model we analyze a nonlocal equation for a thin narrow prestressed rectangular plate where the two short edges are hinged and the two long edges are free. We prove existence and uniqueness of weak solution and we study its asymptotic behavior under viscous damping. We also study the stability of simple modes of oscillations which are classified as longitudinal or torsional.

Key-words: Swift-Hohenberg equation, Beam equation, Travelling waves, Finite space blow up, Nonlocal plate equation, Asymptotic behaviour, Stability and instability of simple modes of oscillation.

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 2

u — deformação da viga;

L — comprimento da ponte;

p — força externa;

$W_p(u)$ — trabalho realizado por p ;

τ — tensão atuando na viga;

\mathbb{E}_s — energia devida à distensão;

\mathbb{E}_b — energia devida à variação da curvatura;

E — módulo de elasticidade;

I — momento de inércia da seção transversal de uma viga;

\mathbb{E}_p — energia mecânica sob efeito da força p ;

$\mathcal{C}^k(A, X)$ — classe das funções definidas de $A \subseteq \mathbb{R}$ em X com k derivadas contínuas;

$\mathcal{C}^k(A)$ — classe das funções reais definidas em $A \subseteq \mathbb{R}$ com k derivadas contínuas, $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$;

$f(u)$ — força elástica não linear;

$F(u)$ — potencial de f , $F' = f$;

κ — constante de Hooke;

ϕ^+ — parte positiva da função ϕ ;

\mathbb{K} — energia cinética.

CAPÍTULO 3

k — parâmetro da equação de Swift-Hohenberg;

R^-, R^+ — extremos do intervalo maximal de existência de uma solução de SH;

k_f — valor crítico de k ;

\mathcal{E} — energia conservada da equação de Swift-Hohenberg;

Φ — função auxiliar;

G — função auxiliar;

H — função auxiliar, $H = G'$;

(z_j) — sequência de zeros de uma solução de SH;

(m_j) — sequência de pontos críticos de uma solução de SH;

(r_j) — sequência de zeros da segunda derivada de uma solução de SH;

(τ_j) — sequência de zeros da terceira derivada de uma solução de SH.

CAPÍTULO 4

Ω — domínio retangular $(0, \pi) \times (-l, l)$;

l — largura da placa retangular, $l \ll L$;

U — deformação da placa;

F — força externa atuando na placa;

σ — razão de Poisson $\sigma \in (0, 0.5)$;

ϕ — termo não local;

P — constante de protensão, $P > 0$;

δ — fator de amortecimento;

S — parâmetro positivo;

$H_*^1(\Omega)$ — espaço das funções em $L^2(\Omega)$ com uma derivada fraca em $L^2(\Omega)$, com traço nulo em $\{0, \pi\} \times [-l, l]$;

$H_*^2(\Omega)$ — espaço das funções com derivadas fracas de segunda ordem em $L^2(\Omega)$ que se anulam em $\{0, \pi\} \times [-l, l]$;

\mathcal{H} — espaço dual de $H_*^2(\Omega)$;

\mathbb{P} — energia potencial da viga sob protensão;

Λ_1 — primeiro autovalor do problema (4.9);

w_1 — autofunção correspondente a Λ_1 ;

$[A] \subset X$ — subespaço linear de X gerado pelos elementos de A ;

$[A]^\perp$ — subespaço linear ortogonal a $[A]$ no espaço com produto interno X ;

γ, μ, ν — parâmetros do sistema (4.83);

I_j — intervalo onde ocorre estabilidade;

K_j — intervalo onde ocorre instabilidade;

E, E_0 — níveis de energia.

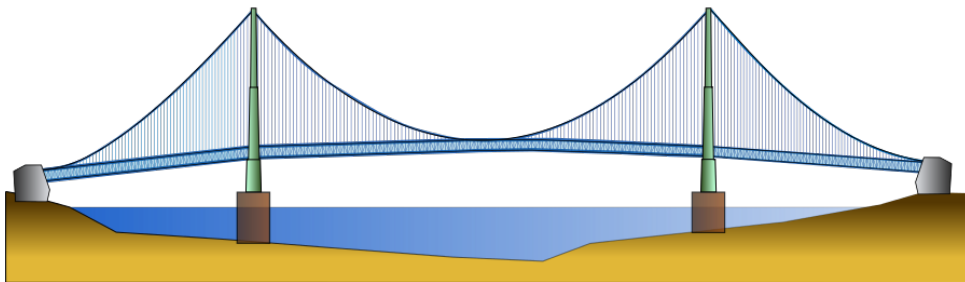
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	A PONTE PÊNSIL COMO UMA VIGA	25
2.1	Modelos estacionários para uma viga	26
2.2	Modelo dinâmico para uma viga	31
3	A EQUAÇÃO DE SWIFT-HOHENBERG	35
3.1	Histórico do problema e resultados preliminares	38
3.2	Explosão em espaço finito	40
3.3	Ondas viajantes periódicas	54
4	EQUAÇÃO NÃO LOCAL PARA A PLACA	61
4.1	Existência, unicidade e comportamento assintótico	63
4.2	Estabilidade dos modos simples	66
4.3	Prova dos resultados de existência e unicidade	69
4.4	Prova dos resultados sobre comportamento assintótico	78
4.5	Prova dos resultados de estabilidade	85
	Referências	91

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais de quarta ordem aparecem naturalmente na modelagem de oscilações de estruturas elásticas e grandes desafios matemáticos surgem no estudo destes modelos. Enquanto o problema básico em elasticidade é bastante simples - determinar a deformação produzida em um corpo ou estrutura sujeito a determinado esforço [15, p. 3] - em muitos casos estes problemas produzem equações complexas que só podem ser solucionadas em situações particulares.

Figura 1 – Ponte pênsil



Fonte: [67, Wikimedia Commons. Por Glabb - Trabalho próprio pelo carregador, CC BY-SA 3.0, <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9737836>>]

Pontes pênséis são estruturas de grande porte caracterizadas por sua flexibilidade. Conforme a Figura 1, uma ponte pênsil tem seu *tabuleiro* sustentado por dois *cabos de suspensão principais*, paralelos ao comprimento da ponte. Estes cabos de suspensão são ancorados em cada extremidade da ponte e apoiados pelas *torres*. A ligação entre os cabos de suspensão e o tabuleiro é feita por uma série de *cabos de suspensão verticais* que se unem à *treliça* construída sob o tabuleiro para adicionar rigidez à estrutura. As torres usualmente estão ancoradas ao leito da porção de água sobre a qual a ponte se projeta. Chama-se *vão principal* a porção do tabuleiro limitada pelas torres, que é a parte mais flexível da ponte.

O desenvolvimento de pontes deste tipo só foi possível recentemente, a partir do desenvolvimento da metalurgia no século XIX, uma vez que os cabos de suspensão, as treliças que formam a estrutura do tabuleiro e por vezes as torres são compostos de aço [56, p. 93].

Em 1801 foi construída a primeira ponte pênsil, a *Jacob Creek Bridge* entre Uniontown e Greensburg, na Pensilvânia (EUA), a qual media 21m de comprimento e era sustentada por correntes de aço; veja [27, p. 2], [39]. As técnicas de construção evoluíram muito nestes dois séculos e em 1998 foi inaugurada a *Akashi Kaikyo Bridge*, em Kobe (Japão), com um comprimento total de 3911m. Até hoje seu vão principal de 1991m é o mais longo do mundo [2].

A ponte pênsil mais famosa é sem dúvida a *Golden Gate*, localizada em San Francisco (EUA) e construída entre 1933 e 1937. Conectando as duas extremidades da baía Golden Gate sobre o oceano Pacífico, ela mede 2737m ao todo, com um vão principal medindo 1280m [34].

Figura 2 – Ponte Golden Gate em San Francisco



Fonte: [66, Wikimedia Commons. CC BY-SA 2.0, <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=469370>>]

Figura 3 – Ponte Hercílio Luz em Florianópolis



Fonte: [68, Wikimedia Commons. Por Adrianoflorianopolis - Trabalho próprio pelo carregador, CC BY-SA 4.0, <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=34612850>>]

A maior ponte deste tipo no Brasil é a Ponte Hercílio Luz representada na Figura 3, ligando a ilha de Florianópolis ao continente, sobre o oceano Atlântico. Ela tem $819m$ de comprimento com um vão principal de $340m$, sua construção foi iniciada em 1922 e concluída em 1926, de acordo com [37]. O tráfego sobre a ponte foi interrompido em 1982, sendo reaberto em 1988 apenas para tráfego de pessoas, bicicletas e veículos de tração animal. Em 1991 a ponte foi fechada novamente, permanecendo assim até hoje. Um projeto para reforma e reabertura da ponte encontra-se em execução desde 2005; veja [20].

Como acontece em todas as áreas do conhecimento humano, para atingir o nível atual de tecnologia foi preciso aprender com os erros ao longo do caminho. Foram muitas as pontes que colapsaram ao longo da história, para uma revisão detalhada veja [26] e referências lá indicadas. Os colapsos foram provocados pelos mais variados fatores: enchentes, terremotos, tempestades e até o simples excesso de carga.

A queda da Tacoma Narrows Bridge (TNB) em 1940, seis meses após o final de sua construção, é o mais afamado entre os colapsos de pontes pênséis. Este episódio histórico foi e ainda é amplamente estudado. Para algumas referências veja o relatório oficial [4] produzido após o incidente, os artigos [47, 26, 27] e as respectivas referências. A ponte media $1810m$ e seu vão principal tinha $853m$, o terceiro mais longo do mundo à época [56, p. 97]. Em seu lugar, em 1950, foi construída uma nova ponte que ainda está em uso e compõe o Tacoma Twin Bridges Complex, como podemos ver na Figura 4.

Figura 4 – Pontes gêmeas em Tacoma Narrows

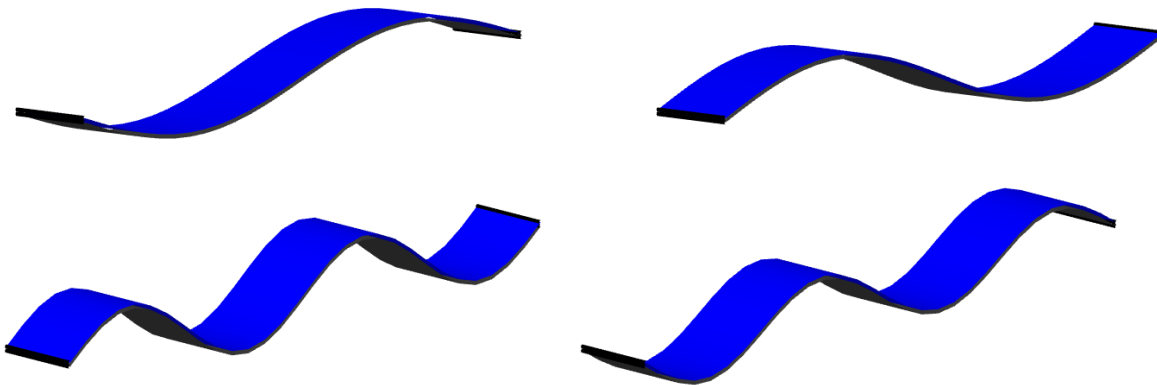


Fonte: [69, Wikimedia Commons. Por Lderendi - Trabalho próprio pelo carregador, Domínio público, <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9282157>>]

O colapso da TNB destaca-se dos outros pelo fato de ter sido registrado em vídeo e amplamente divulgado; veja [44]. Os principais fenômenos observados em pontes suspensas foram vistos na ponte de Tacoma, as oscilações verticais de grande amplitude (chegando a $1,5m$, conforme [4]) e o aparecimento de oscilações torcionais. O primeiro tipo de oscilação aparece

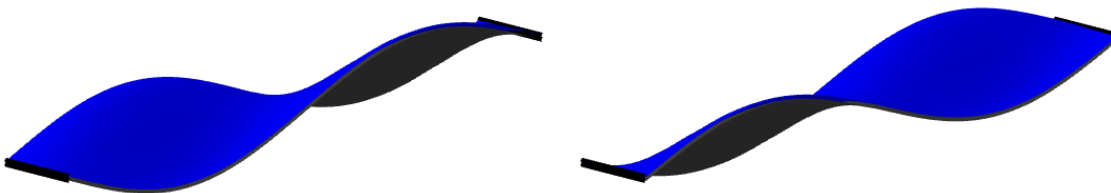
com frequência: foi observado na ponte Golden Gate em 1938 durante uma tempestade (veja [49]) e ocorreu em diversas ocasiões durante os meses em que TNB ficou aberta ao tráfego. A Figura 5 mostra uma placa retangular representando o tabuleiro de uma ponte e exibe dois modos deste tipo de oscilação. O segundo tipo de oscilação é o torcional, observado na TNB logo antes de seu colapso; veja a Figura 6. Diferentes relatos atribuem a própria falha da ponte à rápida transição do modo longitudinal para o torcional; veja [4, p. 58] e [43].

Figura 5 – Dois modos de oscilação longitudinais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6 – Segundo modo de oscilação torcional - com um nó central



Fonte: Elaborada pelo autor.

Organização do trabalho

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo de dois modelos matemáticos para pontes pênsis e, em particular, descrever os principais fenômenos oscilatórios mencionados anteriormente.

O Capítulo 2 traz uma apresentação de diferentes modelos unidimensionais propostos para uma viga elástica, que representa o tabuleiro de uma ponte pênsil, comparando as hipóteses nas quais eles se aplicam e as equações obtidas. A partir de considerações sobre as formas de energia envolvidas na deformação introduzimos as equações diferenciais e condições de contorno adequadas ao problema.

No Capítulo 3 estudamos *blow up* em espaço finito de soluções de uma classe de equações diferenciais de quarta ordem relacionada a ondas viajantes em uma viga. Nossa principal contribuição neste problema é o Teorema 3.1, que soluciona uma conjectura apresentada em [F.

Gazzola and R. Pavani. Wide oscillation finite time blow up for solutions to nonlinear fourth order differential equations. Arch. Ration. Mech. Anal., 207(2):717–752, 2013] sobre a equação

$$w'''' + kw'' + f(w) = 0. \quad (1.1)$$

Aqui k é um parâmetro positivo e f é uma função localmente Lipschitziana satisfazendo certas hipóteses de monotonicidade e superlinearidade.

Provamos que existe um valor crítico denominado k_f , dependendo apenas da função f , que caracteriza as soluções de (1.1): quando $0 < k \leq k_f$, todas as soluções explodem em espaço finito, enquanto para k acima de k_f existem soluções periódicas. Uma consequência é a não existência de ondas viajantes com baixa velocidade de propagação no modelo. A análise de (1.1) está dividida em duas partes. Primeiramente provamos o *blow up* em espaço finito de soluções quando o parâmetro está abaixo do valor crítico, principal resultado da Seção 3.2. Na Seção 3.3 mostramos a existência de uma solução periódica no caso complementar.

No Capítulo 4 estudamos um modelo bidimensional proposto por Berger [7] para uma placa sob protensão. Analisamos uma equação não local para uma placa longa e fina, suportada nas extremidades menores e livre nas demais. No domínio plano $\Omega = (0, \pi) \times (-l, l)$, consideramos o problema de valores iniciais e de contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_{tt} + \delta U_t + \Delta^2 U - \phi(U)U_{xx} = F & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ U = U_{xx} = 0 & \text{em } \{0, \pi\} \times [-l, l], \\ U_{yy} + \sigma U_{xx} = U_{yyy} + (2 - \sigma)U_{xyy} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad U_t(x, y, 0) = V_0(x, y) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

onde o efeito não local vem do termo ϕ definido por

$$\phi(U) = -P + S \int_{\Omega} U_x^2.$$

Para uma interpretação dos parâmetros e condições de contorno presentes no problema (1.2) veja a introdução do Capítulo 4.

Provamos existência e unicidade de soluções fracas e estudamos o seu comportamento assintótico sob amortecimento. Estudamos ainda a existência e estabilidade de modos simples de oscilação sob equilíbrio dinâmico, os quais são classificados em duas famílias e representam os movimentos longitudinais e torcionais descritos acima. Estabelecemos no Teorema 4.11 um critério para determinar se há estabilidade ou instabilidade dos modos simples com energia alta. Como consequência, todos os modos simples com energia suficientemente grande são instáveis no sentido da Definição 4.10.

A Seção 4.1 traz a formulação fraca do problema (1.2) e os espaços de funções considerados, além dos resultados de existência, unicidade e comportamento assintótico de tais soluções. Na Seção 4.2 definimos os modos simples, apresentamos o conceito de estabilidade e provamos um resultado de estabilidade, a saber o Teorema 4.11. A Seção 4.3 traz a prova da existência

e unicidade, enquanto a Seção 4.4 contém a prova dos resultados relativos ao comportamento quando $t \rightarrow \infty$. Na Seção 4.5 apresentamos a caracterização dos modos simples como funções periódicas do tempo e a análise da sua estabilidade.

A PONTE PÊNSEL COMO UMA VIGA APOIADA

Pontes pênséis são caracterizadas pela flexibilidade de sua estrutura. As oscilações de grande amplitude observadas neste tipo de ponte, como as de até 1,5m observadas na Tacoma Narrows, por vezes se organizam na forma de ondas estacionárias [48, 43, 59] e ondas viajantes [49, 13, 30, 40].

O objetivo deste capítulo é trazer uma revisão de diferentes modelos propostos para a viga elástica, que representa o tabuleiro de uma ponte pênsil, visando por em contexto a equação da viga semilinear

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0, \quad (2.1)$$

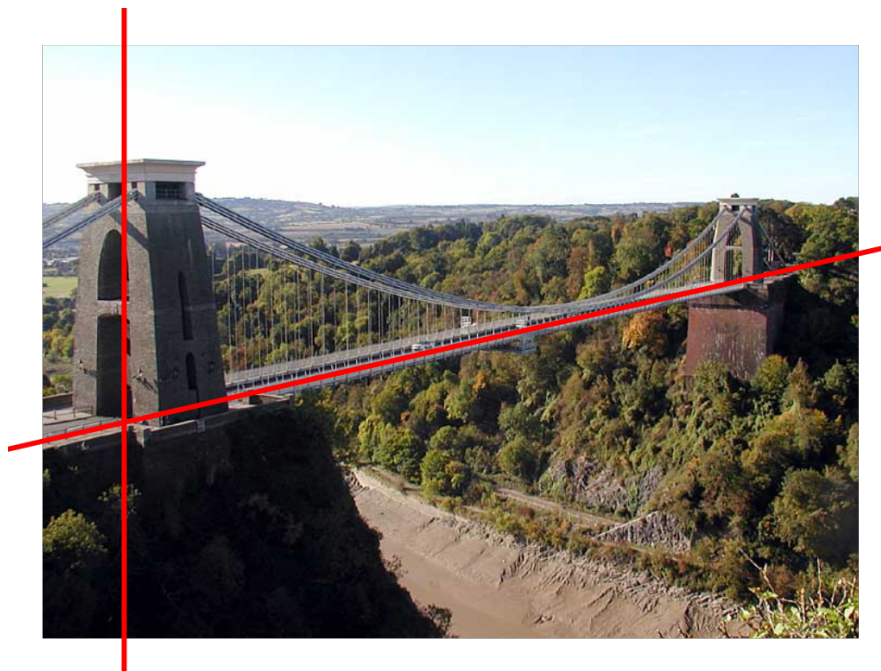
que será o ponto de partida para o capítulo seguinte.

A viga é o modelo físico idealizado para um corpo ou estrutura elástica de uma dimensão capaz de resistir a forças transversais [17, p. 416]. Uma das dimensões de uma ponte - o comprimento - é consideravelmente maior que as outras. Desta forma, no estudo de oscilações de grande amplitude vertical, consideramos o tabuleiro como uma viga de comprimento L constituída de material elástico. Como todos os movimentos significativos ocorrem em apenas um plano, todas as informações importantes são mantidas assumindo também que o movimento está confinado a duas dimensões, negligenciando assim movimentos torcionais.

Descreveremos a deflexão observada no tabuleiro da ponte sob a ação de forças externas, que podem representar a atuação dos cabos, do peso do tabuleiro e da treliça, bem como da carga movendo-se sobre a ponte. Denote por $u(s)$ a deflexão vertical de um ponto na ponte a uma distância s de uma extremidade fixada como origem do sistema de coordenadas, conforme ilustra a Figura 7. Chamamos u de *deformação* da viga.

Consideraremos inicialmente o problema sob equilíbrio, isto é, a deformação observada após um longo tempo sujeita a uma carga estática. Na primeira seção descrevemos a energia

Figura 7 – Sistema de coordenadas para a viga



Fonte: Adaptada de: [65, Picture taken by Adrian Pingstone in October 2003 and placed in the public domain. Public Domain, <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1159540>>]

elástica acumulada em uma deformação. São discutidas também aproximações para esta energia sugeridas por diferentes autores e as respectivas equações para a deformação da viga. Na sequência, discutimos deformações dinâmicas, isto é, que evoluem no tempo. Para este fim, na Seção 2.2 adicionamos a energia cinética ao modelo, obtendo um problema de valores iniciais e de contorno para a viga.

2.1 Modelos estacionários para uma viga

Considere, conforme citado acima, uma viga de comprimento L posicionada horizontalmente, que encontra-se apoiada em cada extremidade, sobre a qual atua uma certa força apenas na direção vertical. A correspondente condição de contorno é equivalente a uma articulação, e é conhecida como condição de Navier.

A força que atua sobre a viga e a deformação da mesma dependem da posição e serão representadas, respectivamente, por p e u . Para relacionar força aplicada e deformação, vamos introduzir o conceito de energia apropriado. A força externa p realiza trabalho ao deformar a viga, podendo variar a energia do sistema. Uma vez que o deslocamento e a força têm mesma direção (vertical), este trabalho pode ser representado por

$$W_p(u) = - \int_0^L p u.$$

Inicialmente supomos que a carga é independente da deformação.

A viga também acumula energia elástica quando sujeita à deformação u . Esta energia provém de duas fontes: da resistência que o material oferece a envergar-se e a distender-se. A energia elástica acumulada em uma viga pelo aumento de comprimento é proporcional a este aumento e também à tensão longitudinal τ na viga; veja [3, 27]. Desta forma

$$\mathbb{E}_s(u) = \tau \int_0^L (1 + u'^2)^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.2)$$

Já a outra parcela da energia elástica é expressa em termos da rigidez flexural EI e da curvatura através de

$$\mathbb{E}_b(u) = \int_0^L \frac{1}{2} EI \frac{u''^2}{(1 + u'^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.3)$$

Aqui E é o módulo de elasticidade específico do material e I é o momento de inércia da seção transversal da viga, que vamos considerar constante; veja [17, p. 515].

Assumindo que a viga tem velocidade nula (portanto não possui energia cinética) sua energia mecânica total será

$$\mathbb{E}_p(u) = \int_0^L \frac{1}{2} EI u''^2 (1 + u'^2)^{-\frac{5}{2}} + \tau ((1 + u'^2)^{\frac{1}{2}} - 1) - pu. \quad (2.4)$$

A energia mecânica definida acima pode ser vista como um funcional sobre um espaço de funções apropriado. Nosso objetivo a seguir será deduzir equações relacionando deformação e força a partir de pontos críticos da energia mecânica, sob hipóteses particulares, através da equação de Euler-Lagrange deste funcional.

Equação de Euler-Lagrange para a energia mecânica

Considere uma função $p : [0, L] \rightarrow R$ e duas funções suficientemente regulares u e v . Para encontrar a equação de Euler-Lagrange do funcional (2.4) vamos calcular sua derivada de Gâteaux. Denotando o funcional $J(u) = \mathbb{E}_p(u)$, obtemos

$$J'(u)v = \int_0^L \left[EI(1 + u'^2)^{-\frac{5}{2}} u'' v'' + \tau(1 + u'^2)^{-\frac{1}{2}} u' v' - EI \frac{5}{2} (1 + u'^2)^{-\frac{7}{2}} u''^2 u' v' - pv \right].$$

Integrando por partes duas vezes a expressão acima, assumindo que v tem suporte compacto em $[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI(1 + u'^2)^{-\frac{5}{2}} u'' v'' + \tau(1 + u'^2)^{-\frac{1}{2}} u' v' - EI \frac{5}{2} (1 + u'^2)^{-\frac{7}{2}} u''^2 u' v' - pv \\ &= \int_0^L \left[EI((1 + u'^2)^{-\frac{5}{2}} u'')'' - \tau((1 + u'^2)^{-\frac{1}{2}} u')' + EI \frac{5}{2} ((1 + u'^2)^{-\frac{7}{2}} u''^2 u')' - p \right] v. \end{aligned}$$

Assim uma solução u da equação acima com regularidade suficiente satisfará a equação

$$EI((1+u'^2)^{-\frac{5}{2}}u'')'' - \tau((1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}u')' + EI\frac{5}{2}((1+u'^2)^{-\frac{7}{2}}u''^2u')' = p.$$

Expandindo as derivadas e multiplicando pelo termo $(1+u'^2)^{-\frac{9}{2}}$, obtemos uma equação semi-linear. No entanto, como afirmado em [27], não é possível obter muitas informações sobre a solução da equação acima; para alguns resultados veja [19]. Uma alternativa é simplificar o modelo, linearizando partes da energia mecânica conforme a discussão na seção a seguir.

Equação linear da viga

Simplificações no modelo de energia elástica permitem obter equações mais familiares. A abordagem clássica é linearizar os termos \mathbb{E}_b e \mathbb{E}_s , assumindo que a amplitude das deformações é pequena; veja por exemplo [28, 3].

Utilizando a seguinte aproximação de segunda ordem, válida para s próximo de 0,

$$(1+s^2)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}s^2 + o(s^2),$$

podemos substituir a primeira parcela da energia em (2.2) por

$$\mathbb{E}_s(u) = \int_0^L \frac{1}{2}\tau u'^2.$$

Aproximando de maneira similar, para r e s próximos de 0, a função que define a energia acumulada ao curvar a viga,

$$r^2(1+s^2)^{-\frac{5}{2}} = r^2 + o(r^2 + s^2),$$

obtemos

$$\mathbb{E}_b(u) = \int_0^L EI\frac{1}{2}u''^2$$

em lugar de (2.3).

Finalmente, combinando as expressões acima, a energia mecânica se torna

$$\mathbb{E}_p(u) = \int_0^L \frac{1}{2}(EIu''^2 + \tau u'^2) - pu. \quad (2.5)$$

Observe que o funcional (2.5) é consideravelmente mais simples que (2.4). Ele é aceitável para deformações com gradiente pequeno e dá origem a condições de contorno naturais para este problema. De fato, suponha que $u \in \mathcal{C}^4([0, L])$, $p \in \mathcal{C}^0([0, L])$ e defina, como antes, $J(u) = \mathbb{E}_p(u)$. Argumentando como na seção anterior, para toda função teste $v \in \mathcal{C}^2([0, L])$, a derivada do funcional J é dada por

$$J'(u)v = \int_0^L (EIu''v'' + \tau u'v' - pv).$$

Empregando integração por partes novamente, obtemos

$$J'(u)v = \int_0^L (EIu'''' - \tau u'' - p)v + EIu''v' \Big|_0^L - (EIu''' - \tau u')v \Big|_0^L. \quad (2.6)$$

Assim, já que a igualdade acima deve ser válida para toda função v , impondo condições de fronteira apropriadas (qualquer uma daquelas apresentadas na Tabela 1 a seguir) obtemos a equação de Euler-Lagrange para este funcional,

$$EIu'''' - \tau u'' = p. \quad (2.7)$$

Esta equação é conhecida como equação da viga [56, 28].

Se por razões físicas for razoável ignorar o termo \mathbb{E}_s , por exemplo quando a viga é livre para deslizar na direção horizontal (e portanto não está sob tensão longitudinal), a equação (2.7) assume a forma

$$EIu'''' = p. \quad (2.8)$$

Esta é a equação mais simples para a deformação de uma viga, conhecida como a equação de Euler-Bernoulli. O erro ao assumir esta linearização é pequeno quando a deformação observada tem pequena amplitude, com um ângulo de deflexão inferior a 4° , conforme [17, p. 514].

Os diferentes tipos de apoio que podem ocorrer na extremidade de uma viga e as condições de fronteira correspondentes estão esquematizados na Tabela 1; veja também a discussão em [28, p. 3]. Qualquer destas condições torna nulos os termos de bordo em (2.6). Chamamos a condição de contorno correspondente ao apoio engastado, a qual aparece em diversos outros contextos no estudo de equações diferenciais, de condição de Dirichlet. A condição correspondente ao apoio simples recebe o nome de Navier. Estas são as duas condições mais comuns no estudo de problemas envolvendo o operador biarmônico; veja [28]. A última condição corresponde a uma viga presa a um dispositivo que permite movimento vertical, mantendo travada a inclinação horizontal.

Tabela 1 – Condições de contorno para a viga

Tipo de apoio	u	u'	u''	u'''
Engastada	0	0	livre	livre
Apoiada	0	livre	0	livre
Livre	livre	livre	0	0
<i>Roller support</i>	livre	0	livre	0

Fonte: Adaptada de [28, p. 3-4].

Estas condições podem aparecer combinadas. Por exemplo, um modelo para uma viga que está engastada em uma extremidade e livre na outra seria

$$\begin{cases} EIu'''' = p & \text{em } (0, L), \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u''(L) = u'''(L) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Este problema modela a conhecida viga em balanço ou cantiléver. Observe que neste caso não há alongamento da viga e o modelo (2.9) traz a equação (2.8).

No caso em que a viga é parcialmente sustentada por uma força elástica, isto é, a resultante das forças externas também depende da própria deformação, a equação (2.8) precisa ser adaptada. Assuma que além da carga estática p uma força elástica $f(u)$, que depende apenas da deformação produzida, também atua sobre a viga. Ela representa a ação dos cabos em uma ponte pênsil. Neste caso, a força tem sentido oposto ao da deformação, de modo que

$$W_p(u) = - \int_0^L p u - F(u), \quad (2.10)$$

onde a função F é chamada de potencial. Ela é uma primitiva de f , isto é, $F' = f$ e as hipóteses assumidas acerca da força aplicada pelos cabos com frequência são expressas como condições sobre o potencial.

Obtemos neste caso, argumentando como na seção anterior, a equação

$$u'''' + f(u) = p. \quad (2.11)$$

Se a força dos cabos obedece a lei de Hooke linear, então

$$F(u) = \frac{\kappa}{2} u^2,$$

onde κ é a constante de Hooke. Neste último caso temos a equação linear

$$u'''' + \kappa u = p, \quad (2.12)$$

com termo não homogêneo p , válida para deformações com pequena amplitude, a qual fornece um primeiro modelo para uma ponte suspensa.

Equação semilinear da viga

O modelo linear (2.12) não descreve apropriadamente o comportamento de uma estrutura quando não temos a hipótese de deformação com gradiente pequeno. Este é o caso, por exemplo, quando queremos analisar um comportamento mais complexo, como grandes oscilações. Faz-se necessário então levar em consideração de algum modo os termos não lineares [27]. Conforme [26], a lei de Hooke linear aplica-se apenas a deformações pequenas e, portanto, para modelar com mais precisão os fenômenos de interesse ela deve ser substituída por uma relação superlinear mais geral. Equações semilineares oferecem uma aproximação melhor que o modelo puramente linear e ao mesmo tempo é possível obter bons resultados teóricos [26].

Lazer e Mckenna [42, 48] consideraram o potencial

$$F(u) = \frac{\kappa}{2} (u^+)^2,$$

onde u^+ denota a parte positiva de u . Neste modelo cabos esticados agem com força restauradora linear dada pelo produto de κ pela deformação, enquanto não exercem nenhuma reação quando sujeitos a compressão.

Gazzola sugere considerar uma força restaurativa superlinear $f(u)$ em (2.10) tal que

$$f(s)s > 0, \quad s \neq 0; \quad \frac{f(s)}{s} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty; \quad (2.13)$$

veja [26]. Este tipo de potencial foi considerado em [30, 31, 32, 55, 24] entre outros. Neste caso a energia mecânica toma a forma

$$\mathbb{E}_p(u) = \int_0^L \frac{1}{2} u''^2 + F(u) - pu, \quad (2.14)$$

e a equação de Euler-Lagrange deste funcional é exatamente (2.11), chamada equação semilinear da viga.

2.2 Modelo dinâmico para uma viga

Em problemas de equilíbrio a energia elástica é suficiente para obter as equações que regem o modelo. Quando levamos em conta deformações dinâmicas, precisamos considerar também a energia cinética. A caracterização do modelo não depende mais apenas da equação diferencial e dos dados de bordo, como na seção anterior, mas também de informações sobre o estado inicial do sistema - no nosso caso, posição e velocidade iniciais.

Para levar em conta a dependência no tempo, a deformação em um intervalo $[0, T]$ passa a ser uma função de duas variáveis $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos suas derivadas parciais em relação ao tempo com o subíndice t , de modo que $u_t(x, t)$ representa a velocidade no ponto x e instante t e $u_{tt}(x, t)$ representa a aceleração. As derivadas espaciais serão denotadas pelo subíndice x , por exemplo $u_x(x, t)$ representará a inclinação. Neste contexto, a equação (2.11) é escrita como

$$u_{xxxx} + f(u) = p.$$

A dependência da deformação em relação ao tempo aparece ao considerar a energia cinética. Assuma que a viga de comprimento L possui massa total M disposta uniformemente ao longo do comprimento e tome $m = \frac{M}{L}$. A energia cinética é expressa em termos da densidade linear m e da velocidade u_t por

$$\mathbb{K}(u_t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(u_t(x, t))^2 dx. \quad (2.15)$$

A energia mecânica da viga será então

$$\mathbb{E}_p(u, u_t) = \mathbb{E}_p(u) + \mathbb{K}(u_t),$$

com $\mathbb{E}_p(u)$ definida em (2.14). Obtemos por fim a expressão completa da energia mecânica

$$\mathbb{E}(u, u_t) = \int_0^L \frac{1}{2} m u_t^2 + \frac{1}{2} E I u_{xx}^2 + F(u) - p u dx.$$

Embora a viga esteja fixada nas extremidades, podemos considerar uma deformação que ocorre ao longo do intervalo de tempo $[0, T]$ como uma trajetória. A ação de cada possível trajetória é definida a partir da diferença entre energia cinética e potencial,

$$\mathbb{A}(u, u_t) = \int_0^T \mathbb{K}(u_t) - \mathbb{E}_p(u) dt, \quad (2.16)$$

veja por exemplo [25]. A expressão em (2.16) define um funcional sobre um espaço de funções conveniente. Podemos então obter sua derivada de Gâteaux, a qual tem a forma

$$\mathbb{A}'(u, u_t)(v, v_t) = \int_0^T \int_0^L m u_t v_t - E I u_{xx} v_{xx} - f(u) v + p v. \quad (2.17)$$

O princípio da ação estacionária, também conhecido como princípio de Hamilton, diz que a trajetória a ser seguida durante a deformação é um ponto estacionário da ação, isto é, onde sua derivada se anula,

$$\mathbb{A}'(u, u_t)(v, v_t) = 0, \quad (2.18)$$

para qualquer função v em um espaço funcional apropriado [35, Section 2-3, p.43]. Substituindo (2.17) em (2.18) e integrando por partes, obtemos a equação

$$\begin{aligned} \left[\int_0^L m u_t v \right]_0^T + \left[E I \int_0^T u_{xx} v_x - u_{xxx} v \right]_0^L \\ - \int_0^T \int_0^L m u_{tt} v + E I u_{xxxx} v + f(u) v - p v = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Restringindo nossa atenção a funções v com suporte compacto, os termos de bordo se anulam. Obtemos, portanto, de (2.18) e (2.19) a equação diferencial (2.1) para a deformação.

O modelo semilinear para a deformação dinâmica é, portanto,

$$\begin{cases} m u_{tt} + E I u_{xxxx} + f(u) = p & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u = u_{xx} = 0 & \text{em } \{0, L\} \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{em } [0, L], \end{cases} \quad (2.20)$$

um problema de valores iniciais e de contorno. A *posição* e a *velocidade iniciais*, denotadas u_0 e v_0 , são funções conhecidas.

Uma classe importante de soluções de (2.20) é aquela denominada *ondas viajantes*. Considere uma viga ideal de comprimento infinito na qual se propaga uma onda com perfil w [49, p. 704]. Se a velocidade de propagação da onda for constante e dada por c , então

$$u(x, t) = w(x - ct)$$

será chamada de onda viajante de (2.20). Quando u é solução da equação normalizada (2.1), a função w satisfaz a equação de Swift-Hohenberg

$$w'''' + c^2 w'' + f(w) = 0, \quad (2.21)$$

como pode ser prontamente verificado. Ela será discutida no próximo capítulo.

A EQUAÇÃO DE SWIFT-HOHENBERG

Neste capítulo, cujos resultados foram publicados no artigo [24], estudamos a equação

$$w'''' + kw'' + f(w) = 0, \quad (3.1)$$

onde $k > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitziana. No caso em que k é positivo (3.1) é conhecida como equação de Swift-Hohenberg unidimensional estacionária (SH) enquanto para k negativo ela recebe o nome de equação de Fisher-Kolmogorov estendida (eFK).

Existe uma grande literatura acerca desta equação e mencionamos aqui os livros de Collet e Eckmann [16], Peletier e Troy [54], o *survey* de Cross e Hohenberg [18] e também os artigos [60, 48, 49, 43, 13, 51, 62, 30, 31, 32, 27] que tratam de não linearidades f satisfazendo hipóteses similares às consideradas a seguir e apresentam também diferentes aplicações de (3.1).

Conforme mencionado na Seção 2.2, soluções de (3.1) determinam ondas viajantes para a equação da viga (2.1) e o parâmetro $k = c^2$ representa o quadrado da velocidade de propagação da onda; veja (2.21). Em [38] as soluções de (3.1) representam a deformação de uma estrutura apoiada sobre uma fundação elástica. Já [31] considera uma viga elástica presa a molas não lineares em cima e embaixo. Em ambos os casos o parâmetro k representa uma distribuição de carga no sentido axial (horizontal).

A equação eFK é bem compreendida quanto a existência e propriedades qualitativas de diferentes tipos de soluções, como homoclínicas e periódicas. Já para a equação de Swift-Hohenberg não há tantos resultados e nesta direção mencionamos o que foi escrito em [59, p. 79]:

“In some sense, the Fisher–Kolmogorov situation is simpler to deal with(...) Concerning the eFK equation, the situation is rather deeply understood(...) Much less rigorous results exist for the Swift–Hohenberg case.”

Esta opinião também é compartilhada por Gazzola e Pavani em [32, p. 721 e 728] e os resultados deste capítulo trazem novas contribuições acerca da equação SH.

Ao longo do capítulo assumimos que f satisfaz a hipótese geral

$$f(s)s > 0, \quad \forall s \neq 0. \quad (3.2)$$

Desta forma, o sentido da força é sempre oposto ao deslocamento observado. Gazzola e Pavani estudaram a explosão em espaço finito de soluções da equação eFK [32]. Eles consideraram as seguintes hipóteses sobre f :

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad f''(s)s > 0, \quad \forall s > 0, \quad \liminf_{s \rightarrow \pm\infty} |f''(s)| > 0, \quad (3.3)$$

e a condição de crescimento polinomial

$$\begin{aligned} \exists p > q \geq 1, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < \rho \leq \beta, \quad \text{tais que} \\ \rho|s|^{p+1} \leq f(s)s \leq \alpha|s|^{q+1} + \beta|s|^{p+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A hipótese (3.4) garante o crescimento superlinear de f e também implica na hipótese (3.2).

Assumiremos em lugar de (3.3) que

$$f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f'(s) > f'(0) \geq 0, \quad \forall s \neq 0, \quad (3.5)$$

o que garante que f é crescente. Em alguns resultados vamos supor ainda que

$$f'(0) > 0. \quad (3.6)$$

Observe que se (3.2) e (3.3) são satisfeitas e $f'(0)$ existe, então f também satisfaz a hipótese (3.5). Em particular, todos os resultados deste capítulo se aplicam à equação modelo

$$\begin{cases} w''''(s) + kw''(s) + \alpha|w(s)|^{q-1}w(s) + |w(s)|^{p-1}w(s) = 0, & s \in \mathbb{R}, \\ p > q \geq 1, \quad \alpha \geq 0, \quad k > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Em razão da regularidade de f , temos existência e unicidade de solução local do problema de Cauchy para (3.1), isto é, dados quaisquer valores iniciais

$$w(0) = a, \quad w'(0) = b, \quad w''(0) = c, \quad w'''(0) = d \in \mathbb{R},$$

existe uma única solução w que assume estes valores em 0. Esta solução pode ser estendida a um intervalo maximal de existência (R^-, R^+) ; veja [36].

Ao nos referirmos a uma *solução* de (3.1) temos em mente que o valor inicial em 0 está fixado e que a solução está definida sobre o seu intervalo maximal de existência. Assim uma *solução à direita* (resp. *à esquerda*) de 0 de (3.1) é a restrição da solução ao intervalo $[0, R^+)$ (resp. $(R^-, 0]$). Dizemos que a solução *explode em espaço finito* se o intervalo maximal é

limitado à esquerda ou à direita. Dizemos que a solução *explode em espaço finito à direita* (resp. *à esquerda*) quando $R^+ < \infty$ (resp. $R^- > -\infty$).

Defina

$$k_f = 2 \inf_{s \in \mathbb{R}} \sqrt{f'(s)} = 2\sqrt{f'(0)}. \quad (3.8)$$

Para o problema modelo (3.7), no caso particular em que $f(s) = |s|^{p-1}s + s$, temos $k_f = 2$. No caso mais geral de (3.7), temos $k_f = 0$ se $q > 1$ e $k_f = 2\sqrt{\alpha}$ para $q = 1$.

O resultado a seguir descreve o comportamento das soluções de (3.1) quanto à explosão em espaço finito.

Teorema 3.1 (Ferreira, dos Santos [24]). *Assuma (3.4) e (3.5) e defina k_f como em (3.8).*

1. *Se f satisfaz (3.6) e $0 < k \leq k_f$, então toda solução não trivial de (3.1) explode em espaço finito.*
2. *Se $k > k_f$, f é ímpar e existe B positivo tal que*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^p} = B, \quad (3.9)$$

então existe uma solução periódica não trivial de (3.1).

Observação 3.2. O Teorema 3.1 soluciona uma conjectura apresentada em [F. Gazzola and R. Pavan. Wide oscillation finite time blow up for solutions to nonlinear fourth order differential equations. Arch. Ration. Mech. Anal., 207(2):717–752, 2013]; veja a Conjectura 3.8 a seguir.

Observação 3.3. A condição (3.6) só é necessária para assegurar que o intervalo $0 < k < k_f$ não é vazio.

Observação 3.4. A equação estacionária unidimensional de Swift-Hohenberg é usualmente escrita como

$$(1 + \partial_s^2)^2 U + U^3 - \mu U = 0 \quad s \in \mathbb{R}, \text{ onde } \mu \in \mathbb{R} \text{ é um parâmetro,} \quad (3.10)$$

veja [18, eq. (3.27)], [62, eq. (1.2)], [54, eq. (9.0.1)], [52, p. 95], [8, eq. (3)].

1. Se $\mu < 1$, a mudança de variável

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} U \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1-\mu}} s \right)$$

permite inferir que w resolve a equação

$$w'''' + \frac{2}{\sqrt{1-\mu}} w'' + w^3 + w = 0, \quad (3.11)$$

que é um caso particular de (3.1) com $k = \frac{2}{\sqrt{1-\mu}}$ e $f(s) = s^3 + s$. Desta forma, nossos resultados se aplicam à equação (3.10) com $\mu < 1$ e, em particular, qualquer solução não trivial de (3.10) explode em espaço finito quando $\mu \leq 0$.

2. Quando $0 < \mu < 1$, temos a existência de solução periódica [54], enquanto no caso $\mu = 1$ a existência de solução periódica segue do Teorema 3.18 sem a necessidade de mudança de variável.
3. No caso em que $\mu > 1$ a equação pode ser transformada pela mudança de variável

$$\mathcal{W}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu-1}} U\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\mu-1}} s\right)$$

na nova equação

$$\mathcal{W}'''' + \frac{2}{\sqrt{\mu-1}} \mathcal{W}'' + \mathcal{W}^3 - \mathcal{W} = 0. \quad (3.12)$$

Esta equação apresenta diferenças qualitativas em relação a (3.11), pois possui três pontos de equilíbrio. Em [59, 8, 57] temos a existência de homoclínicas e heteroclínicas de (3.12), enquanto [21] traz a existência de homoclínicas generalizadas de (3.12) para todo $\mu > 1$.

A demonstração do Teorema 3.1 é o principal objetivo do capítulo e está dividida ao longo das seções seguintes. A primeira seção é constituída de um histórico do problema da explosão em tempo finito para a equação (3.1), bem como de resultados parciais já conhecidos. Na segunda seção provamos o resultado principal, a explosão em espaço finito de ondas viajantes com velocidade inferior a k_f ; veja o Teorema 3.9. Na seção seguinte provamos a existência de ondas viajantes periódicas com velocidade maior que k_f ; veja o Teorema 3.18.

3.1 Histórico do problema e resultados preliminares

Conforme citado anteriormente, a equação (3.1) é bastante estudada. No entanto a maioria dos resultados trata o caso $k \leq 0$, isto é, a equação eFK. Ela (3.1) admite uma função energia que é conservada ao longo de suas soluções, definida pela expressão

$$\mathcal{E}(s) = w'(s)w''''(s) - \frac{1}{2}(w''(s))^2 + \frac{k}{2}(w'(s))^2 + F(w(s)).$$

De fato, quando w satisfaz (3.1), temos que $\mathcal{E}' \equiv 0$. Denotamos por E o valor constante de $\mathcal{E}(s)$.

Associada a uma solução w de (3.1), introduzimos também as funções auxiliares Φ , G e H , definidas respectivamente por

$$\Phi(s) = \frac{(w''(s))^2}{2} + F(w(s)), \quad (3.13)$$

$$G(s) = \frac{1}{2}(w''(s))^2 + \frac{k}{2}(w'(s))^2 + F(w(s)),$$

$$H(s) = G'(s) = w''(s)w''''(s) + k w'(s)w''(s) + f(w(s))w'(s).$$

Comentaremos mais a respeito da função Φ na demonstração do Teorema 3.9. Observe que, uma vez que w é solução de (3.1),

$$H'(s) = G''(s) = (w''''(s))^2 + k w'(s)w''''(s) + f'(w(s))(w'(s))^2.$$

O primeiro passo para estabelecer a importância do valor k_f para o comportamento da equação é o seguinte lema, o qual dá informações cruciais sobre as propriedades de G e H .

Lema 3.5. *Assuma que $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função não decrescente. Então H é não decrescente e G é convexa, desde que $|k| \leq k_f$.*

Demonstração. De fato, observe que H' é um polinômio de grau 2 em w''' . Portanto, para que H' seja não negativa, é suficiente que

$$D(s) = k^2(w'(s))^2 - 4f'(w(s))(w'(s))^2 = (k^2 - 4f'(w(s)))(w'(s))^2 \leq 0, \quad (3.14)$$

o que se verifica para todo s se $f' \geq 0$ em toda parte e $|k| \leq k_f$. \square

Observação 3.6. De (3.14), se $|k| < k_f$, então

$$w'(s) \neq 0 \Rightarrow D(s) < 0.$$

Por outro lado, se (3.5) vale e $|k| = k_f$, então

$$w(s)w'(s) \neq 0 \Rightarrow D(s) < 0.$$

Este resultado simples aparece em [54] no caso em que $f(s) = s + s^3$ e sua demonstração é a mesma apresentada aqui. Lá ele é usado para provar que não existem soluções periódicas ou homoclínicas de (3.1) no caso em que $0 < k \leq k_f$, o primeiro resultado de não existência que aqui enunciamos. x

Proposição 3.7 ([54, Theorem 9.1.1]). *If $\mu \leq 0$, then there exist no nontrivial periodic solutions or pulses of equation (3.10).*

Demonstração. De acordo com a Observação 3.4 é suficiente mostrar o resultado para soluções da equação (3.1) com $0 < k \leq 2$. Argumentaremos no caso geral em que f satisfaz (3.5) e $0 < k \leq k_f$.

Seja w uma solução periódica de (3.1) nas hipóteses acima, com período $T > 0$, de modo que

$$H(0) = H(T).$$

Segue do Lema 3.5 que H é constante em $[0, T]$, e da observação seguindo o lema, w é constante, e portanto nula, uma contradição.

Suponha agora que w é uma homoclínica, $(w, w', w'', w''')(\pm s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$ e portanto

$$H(\pm s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Do Lema 3.5 segue que H é constante igual a 0, e conseqüentemente w também é nula, contradição. \square

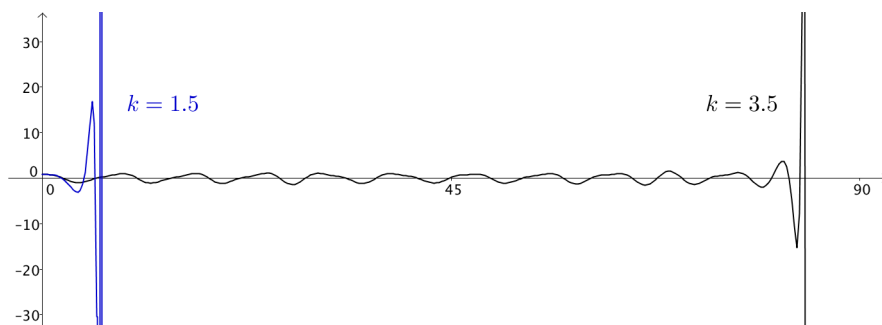
Outros resultados indicam o papel de k_f no comportamento de soluções de (3.1). Em [6] encontramos explicações sobre como o comportamento das soluções muda quando k passa de k_f . No caso de $f(s) = s + s^3$, temos em [54, Theorem 9.2.1] um resultado complementar, que diz que para $k > k_f = 2$, existe uma solução periódica não trivial de (3.1). Karageorgis e Stalker [40, Corollary 2] provaram que quando $0 < k < k_f$, se f é localmente Lipschitziana e satisfaz (3.2), (3.5) e (3.6), não existem soluções homoclínicas de (3.1), estendendo assim o resultado [54, Theorem 9.1.1].

Gazzola e Pavani provaram um resultado sobre *blow up* em espaço finito de soluções de (3.1) para $k \leq 0$, conforme citamos anteriormente. Posteriormente Gazzola e Karageorgis apresentaram uma versão aperfeiçoada do resultado em [29]. Eles conjecturaram que um resultado similar deveria ser válido para k positivo:

Conjectura 3.8 ([32, Conjecture 4]). *Assume (3.3) and (3.4). Travelling wave solutions of (2.1) blow up at some finite time R .*

De acordo com comentários em [32], uma série de dificuldades aparece ao tentar resolver a conjectura. Precisamos substituir as funções auxiliares usadas lá e fazer adaptações em diversos pontos. Ainda em [32, Figure 3], vemos como o comportamento da solução fica imprevisível para certos valores positivos de k . No entanto, na Figura 8 vemos que para k abaixo de k_f , o comportamento da função é o mesmo de quando k é negativo.

Figura 8 – Soluções de (3.1) com $f(s) = s + s^3$, diferentes valores de k e dados iniciais $(0.8, 0, 0, 0)$



Fonte: Adaptada de [32, p. 729].

Após a conclusão do artigo [24] fomos informados que Radu, Toundykov e Trageser [55] também trataram a Conjectura 3.8. Nossa abordagem difere muito daquela utilizada em [55] e, além disso, apresentamos um resultado ótimo. Para mais detalhes compare o Teorema 3.1 e [55, Theorem 1].

3.2 Explosão em espaço finito

Nossa meta é provar o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Assuma que f satisfaz (3.4), (3.5), (3.6) e que $0 < k \leq k_f$. Seja w uma solução não trivial de (3.1) definida em uma vizinhança de $s = 0$. Considere (R^-, R^+) o intervalo maximal de existência w .*

1. *Se os dados iniciais satisfazem $H(0) \geq 0$, então $R^+ < +\infty$,*

$$\limsup_{s \rightarrow R^+} w(s) = +\infty \quad e \quad \liminf_{s \rightarrow R^+} w(s) = -\infty.$$

2. *Se os dados iniciais satisfazem $H(0) \leq 0$, então $R^- > -\infty$,*

$$\limsup_{s \rightarrow R^-} w(s) = +\infty \quad e \quad \liminf_{s \rightarrow R^-} w(s) = -\infty.$$

Observação 3.10. Se $0 < k \leq k_f$, então qualquer solução não trivial de (3.1) explode em espaço finito, para a direita ou para a esquerda. Ainda no caso em que $0 < k \leq k_f$, se w é uma solução não trivial de (3.1) e $H(s_0) = 0$ em qualquer ponto s_0 em que w está definida, então do Teorema 3.1, w explode em espaço finito, tanto para a direita quanto para a esquerda.

Esboço da prova do Teorema 3.9.

Para mostrar que o intervalo maximal de existência é limitado, vamos considerar a sequência de pontos críticos m_j da solução w , isto é, tais que $w'(m_j) = 0$. Da Proposição 3.12, como $H(0) \geq 0$, $m_j \rightarrow R^+$ e podemos escrever

$$R^+ = m_{2j_0-1} + \sum_{j=j_0}^{\infty} (m_{2j+1} - m_{2j-1}).$$

Vamos provar que esta série converge para um certo j_0 .

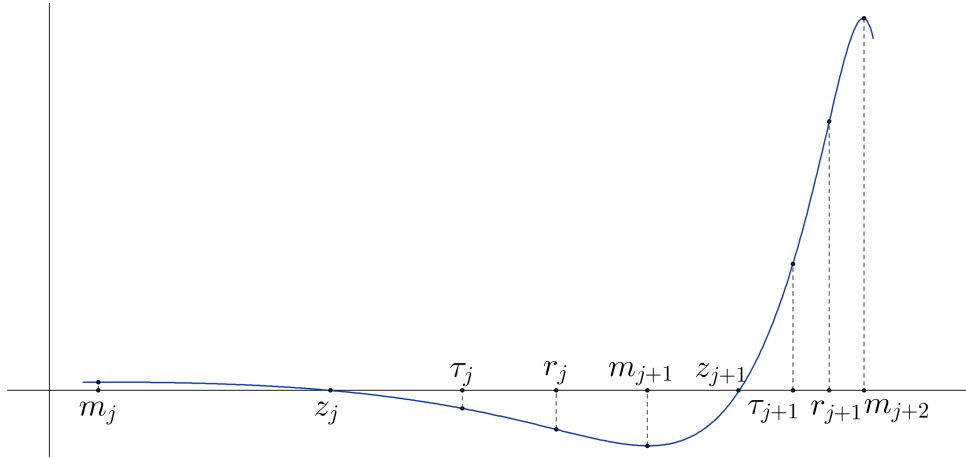
Para isto, dividiremos cada intervalo (m_j, m_{j+1}) em três intervalos (m_j, z_j) , (z_j, r_j) e (r_j, m_{j+1}) nos quais sabemos, pelo Lema 3.14, que a solução possui comportamento bem definido em termos de crescimento e concavidade, conforme descrito no Quadro 1, veja também a Figura 9. Estimaremos o comprimento destes intervalos a partir das hipóteses sobre o crescimento de f e a monotonicidade das funções auxiliares introduzidas.

Quadro 1 – Propriedades da solução w entre dois máximos locais m_j e m_{j+2}

Intervalo	Sinal	Crescimento	Concavidade
(m_j, z_j)	positiva	decrecente	côncava
(z_j, r_j)	negativa	decrecente	côncava
(r_j, m_{j+1})	negativa	decrecente	convexa
(m_{j+1}, z_{j+1})	negativa	crecente	convexa
(z_{j+1}, r_{j+1})	positiva	crecente	convexa
(r_{j+1}, m_{j+2})	positiva	crecente	côncava

Fonte: Elaborada pelo autor.

□

Figura 9 – Comportamento qualitativo da solução w entre dois máximos locais consecutivos m_j e m_{j+2} 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nossos argumentos serão baseados nas propriedades das funções auxiliares \mathcal{E} , G , H e Φ definidas na seção anterior. Comparando com [32], usamos a mesma função energia \mathcal{E} , mas funções auxiliares G e H diferentes. Além disso, a função Φ é a mesma, mas não possui mais monotonicidade ao longo de toda a solução, apenas em intervalos particulares, como veremos a seguir.

A prova do Teorema acima depende de uma série de resultados preliminares enunciados a seguir. Começamos com uma observação simples. Dada uma função w vamos denotar por \bar{w} a função

$$\bar{w}(s) = w(-s).$$

Observe que se w é uma solução de (3.1) numa vizinhança de 0, então, uma vez que apenas derivadas de ordem par aparecem na equação, \bar{w} também será uma solução em uma vizinhança de 0.

Combinando as propriedades das diferentes funções auxiliares, provamos um resultado preliminar, a Proposição 3.12, necessária para a prova do Teorema 3.9. Inicialmente, lembramos o seguinte resultado elementar.

Lema 3.11. *Seja w uma função diferenciável em $(0, \infty)$ tal que*

$$a^- = \liminf_{s \rightarrow +\infty} w(s) < \limsup_{s \rightarrow +\infty} w(s) = a^+.$$

Então existem sequências (x_j) e (y_j) tais que

$$x_j \rightarrow +\infty, y_j \rightarrow +\infty, w(x_j) \rightarrow a^-, w(y_j) \rightarrow a^+,$$

e em adição

$$w'(x_j) = w'(y_j) = 0, w(x_j) < w(y_j), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Aqui os limites a^- e a^+ podem ser números reais ou assumir os valores $-\infty$ ou ∞ .

Demonstração. Sejam a^- e a^+ os limites superior e inferior de w quando $s \rightarrow \infty$, suponha que $a^- < a^+$. Desta forma existem sequências (r_j) e (s_j) tais que $r_j \rightarrow \infty$, $w(r_j) \rightarrow a^-$, $w(s_j) \rightarrow a^+$, $w(r_j) < w(s_j)$ e $r_j < s_j < r_{j+1}$ para todo número natural j .

Defina as sequências (x_j) e (y_j) , tais que para cada $j \in \mathbb{N}$

$$w(x_j) = \sup_{[r_j, r_{j+1}]} w \quad \text{e} \quad w(y_j) = \inf_{[s_j, s_{j+1}]} w.$$

Claramente $r_j < x_j < r_{j+1}$, $s_j < y_j < s_{j+1}$ e

$$w(x_j) \geq w(s_j) > w(r_j) \geq w(y_j)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela definição de limite superior temos

$$a^+ \geq \lim_{j \rightarrow \infty} w(x_j) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} w(s_j) = a^+,$$

e $w(x_j) \rightarrow a^+$. Analogamente $w(y_j) \rightarrow a^-$.

Pela escolha de x_j e y_j , eles são pontos extremos de w no interior de um intervalo, portanto $w'(x_j) = w'(y_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, concluindo a prova. \square

Proposição 3.12. *Seja w uma solução não trivial de (3.1) definido numa vizinhança de $s = 0$ com intervalo maximal de existência (R^-, R^+) e defina*

$$a^+ = \limsup_{s \rightarrow R^+} w(s), \quad a^- = \liminf_{s \rightarrow R^+} w(s),$$

$$a_+ = \limsup_{s \rightarrow R^-} w(s), \quad a_- = \liminf_{s \rightarrow R^-} w(s).$$

Se $0 \leq k \leq k_f$ e f satisfaz (3.2), (3.4) e (3.5), então $a^- \leq 0 \leq a^+$, $a_- \leq 0 \leq a_+$ e w é ilimitada. Além disso:

1. Se $H(s_0) \geq 0$ para algum $s_0 \in (R^-, R^+)$, então

$$a^+ = -a^- = +\infty. \quad (3.15)$$

2. Se $H(r_0) \leq 0$ para algum $r_0 \in (R^-, R^+)$, então

$$a_+ = -a_- = +\infty.$$

Observação 3.13. Seja $0 \leq k \leq k_f$ e assuma que f satisfaz (3.2), (3.4) e (3.5). Seja w uma solução não trivial de (3.1) e assuma que $H(s_0) \geq 0$ para algum s_0 . Então $H(s) > 0$ para cada $s > s_0$. Em particular, se $H(0) \geq 0$ então existe $m > 0$ tal que m é um máximo local de w , $w(m) > 0$ e $H(m) > 0$.

Prova da Proposição 3.12.

PASSO 1: $a^- \leq 0 \leq a^+$ e $a_- \leq 0 \leq a_+$.

Se $R^+ < +\infty$, então por [6, Lemma 23] temos $a^+ = -a^- = +\infty$. Se $R^- > -\infty$, então usando \bar{w} obtemos novamente de [6, Lemma 23] que $a_+ = -a_- = +\infty$. Por outro lado, se $R^+ = +\infty$ então de [6, Lemma 24] temos $a^- \leq 0 \leq a^+$. Usando novamente [6, Lemma 24] aplicado a \bar{w} temos $a_- \leq 0 \leq a_+$ no caso de $R^- = -\infty$.

PASSO 2: w é ilimitada.

No caso em que $R^+ < +\infty$ ou $R^- > -\infty$, sabemos por [6, Lemma 23] que w é ilimitada. Logo, assumamos que $(R^-, R^+) = \mathbb{R}$. Por contradição suponhamos que w é limitada, ou seja,

$$-\infty < a^-, a_- \quad \text{e} \quad a^+, a_+ < +\infty. \quad (3.16)$$

AFIRMAÇÃO: Se vale (3.16), então $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada.

Isto leva a uma contradição. De fato, como G é limitada e convexa, deve ser constante. Portanto $H(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Uma vez que $|k| \leq k_f$ e (3.5) é satisfeita, segue de (3.14) que o produto $w(s)w'(s)$ é nulo, para todo $s \in \mathbb{R}$ e assim w é constante. Então, de (3.1) e (3.2) obtemos que $w \equiv 0$ em \mathbb{R} , que é uma contradição.

Agora vamos provar a afirmação acima.

CASO 1: Se $a^- < a^+$, então G é limitada em $[0, +\infty)$.

Uma vez que $a^- < a^+$, então do Lema 3.11 existem duas seqüências (x_n) e (y_n) , tais que $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$ e

$$\begin{aligned} w(x_n) &\rightarrow a^-, w(y_n) \rightarrow a^+, n \rightarrow +\infty, \\ w'(x_n) &= w'(y_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Avaliando G e \mathcal{E} em um ponto ξ_0 onde $w'(\xi_0) = 0$, obtemos

$$G(\xi_0) = \frac{(w''(\xi_0))^2}{2} + F(w(\xi_0)), \quad \mathcal{E}(\xi_0) = -\frac{(w''(\xi_0))^2}{2} + F(w(\xi_0)) = E.$$

Portanto

$$G(\xi_0) = 2F(w(\xi_0)) - E, \quad (3.17)$$

para todo ξ_0 tal que $w'(\xi_0) = 0$. Então concluímos que

$$G(x_n) \rightarrow 2F(a^-) - E \quad \text{e} \quad G(y_n) \rightarrow 2F(a^+) - E.$$

Por (3.16), ambos os limites acima são finitos.

Se $F(a^-) \neq F(a^+)$, então as duas seqüências (x_j) e (y_j) são tais que $x_j \rightarrow +\infty, y_j \rightarrow +\infty$ e $(G(x_j)), (G(y_j))$ convergem para diferentes limites, o que não pode ocorrer uma vez que G é convexa. Logo devemos ter $F(a^-) = F(a^+)$. Assim, G é limitada em $[0, +\infty)$.

CASO 2: Se $a^- = a^+$, então G é limitada em $[0, +\infty)$.

Uma vez que $a^- = a^+$, então do Passo 1 segue que $a^- = a^+ = 0$. Observe que [6, Lema 24] garante a existência de duas sequências (x_n) e (y_n) tais que $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow +\infty$ e

$$w'(x_n) = w'(y_n) = 0, \quad w(x_n) < 0, \quad w(y_n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, de (3.17) obtemos que

$$G(x_n) \rightarrow -E.$$

Assim, uma vez que G é convexa, concluímos novamente que G é limitada em $[0, +\infty)$.

Dos Casos 1 e 2, concluímos que G é limitada em $[0, +\infty)$. Agora aplicando o mesmo argumento para \bar{w} concluímos que G também é limitada em $(-\infty, 0]$. Portanto, a afirmação acima está provada. Assim, neste ponto provamos que w não é limitada, isto é

$$a^+ + a_+ - a^- - a_- = +\infty.$$

PASSO 3: Prova de 1.

Se $R^+ < +\infty$, então (3.15) segue de [6, Lemma 23]. Agora, suponha que $R^+ = +\infty$ e $H(s_0) \geq 0$ para algum $s_0 \in (R^-, R^+)$. Então existe $s_1 \in [s_0, +\infty)$ tal que $H(s_1) > 0$. Caso contrário, como argumentamos acima, teríamos $H(s) = 0$ para cada $s \geq s_0$, o que implica $w(s)w'(s) = 0$ para todo $s \geq s_0$, então $w \equiv 0$ em $[s_0, +\infty)$ e, portanto, em (R^-, R^+) , que é uma contradição. Assim, uma vez que G é convexa obtemos

$$G(s) \geq G(s_1) + (s - s_1)H(s_1), \quad s \geq s_1.$$

Logo $G(s) \rightarrow +\infty$ com $s \rightarrow +\infty$. Como argumentamos nos Casos 1 e 2 acima, w não pode ser limitada em $[0, +\infty)$, nem por cima nem por baixo, uma vez que de outra maneira G deve ser limitada.

PASSO 4: Prova de 2.

Se $R^- > -\infty$, então (3.15) segue de [6, Lemma 23]. No caso em que $H(r_0) \leq 0$ para algum $r_0 \in (R^-, R^+)$ então considere G a função associada a \bar{w} . Neste caso, a função H associada com \bar{w} será não negativa em algum ponto e, portanto, podemos usar o argumento do último parágrafo. \square

A seguir damos informações detalhadas sobre as oscilações de uma solução w de (3.1). Estas se mostraram vitais na prova do *blow up* em espaço finito.

Lema 3.14. *Seja $0 \leq k \leq k_f$ e assuma que f satisfaz (3.4) e (3.5). Seja $w = w(s)$ uma solução local de (3.1) em uma vizinhança de $s = 0$ e definida no intervalo maximal à direita $[0, R^+)$. Se $m \geq 0$ é um máximo local de w tal que $w(m) > 0$ e $H(m) > 0$ e $m' > m$ é o próximo ponto crítico de w , então:*

1. Existe $r \in (m, m')$ tal que $w'' < 0$ em $[m, r)$ e $w'' > 0$ em $(r, m']$. Além disso, $w(r) < 0$ e $w' < 0$ em (m, m') . Em particular $w(m') < 0$ e m' é mínimo local de w .
2. Existe um único $z \in (m, m')$ tal que $w(z) = 0$.
3. Existe $\tau \in (m, m')$ tal que $w''' < 0$ em $[m, \tau)$ e $w''' > 0$ em $(\tau, m']$. Além disso, $z < \tau < r$.

Observação 3.15. Propriedades similares são válidas em qualquer intervalo à direita de um mínimo local m de w tal que $w(m) < 0$ e $H(m) > 0$. Neste caso, as funções w, w', w'' e w''' terão o sinal inverso nos itens acima. Do Lema 3.14, obtém-se a Figura 9 acima que descreve o comportamento qualitativo de uma solução w de (3.1) entre dois máximos locais consecutivos.

Prova do Lema 3.14. ITENS 1. E 2.

Uma vez que w é uma solução não trivial de (3.1), sabemos que os pontos críticos de w são isolados. Por outro lado, (3.15) garante que w tem um número infinito de pontos críticos à direita de m . Segue destes fatos que m' , o próximo ponto crítico de w à direita de m , é bem definido. Uma vez que m é um máximo local de w , temos $w' < 0$ em (m, m') e $w'(m') = 0$. Por hipótese $H(m) = w''(m)w'''(m) > 0$, e m é um máximo local, conclui-se que $w''(m) < 0$ e $w'''(m) < 0$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que $w'' < 0$ em $[m, m + \varepsilon)$.

Defina $r = \sup\{s > m; w'' < 0 \text{ em } [m, s)\}$. Observe que a Proposição 3.12, isto é (3.15), garante que w tem um mínimo local em algum ponto $\xi > m$ e neste ponto $w''(\xi) > 0$. Portanto $r < \xi$ e por construção $w'' < 0$ em $[m, r)$, enquanto $w''(r) = 0$.

Uma vez que $m' > m$ é o próximo ponto crítico de w após m , segue que $m < r < m'$.

Para provar que $w(r) < 0$, note que $H(r) = f(w(r))w'(r) > 0$ e $w'(r) < 0$, o que implica $f(w(r)) < 0$, e assim $w(r) < 0$ por (3.2). Consequentemente temos também $w(m') < 0$ e existe $m < z < r$ tal que $w(s) > 0$ em $[m, z)$ e $w(s) < 0$ em $(z, m']$, e o item 2. está demonstrado.

Agora vamos provar que $w'' > 0$ em $(r, m']$. Já estabelecemos que $w' < 0$ em (m, m') , $w'(m') = 0$ e $H(m') = w''(m')w'''(m') > 0$. Consequentemente $w''(m') > 0$ e $w'''(m') > 0$. Portanto, m' é um mínimo local de w .

Observe que se existe $\xi \in (m, m')$ tal que $w'''(\xi) = 0$, então

$$0 < H(\xi) = -w'(\xi)w''''(\xi),$$

e $w''''(\xi) > 0$. Isto implica que todos os pontos críticos de w'' em (m, m') são mínimos locais estritos. Portanto

$$w'' \text{ possui no máximo um zero em } (m, m'). \quad (3.18)$$

Relembre que, por definição, $w''(r) = 0$ e $w'' < 0$ em $[m, r)$. Então $w''(r) \geq 0$. Uma vez que $w''(m) < 0$ e $w''(m') > 0$, sabemos que existe $\tau \in (m, r]$ tal que $w''(\tau) = 0$. Além disso, da equação (3.1),

$$w''''(r) = -f(w(r)) > 0,$$

o que implica $w''' > 0$ e $w'' > 0$ em $(r, r + \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Defina

$$r_* = \sup\{s > r; w'' > 0 \text{ em } (r, s)\}.$$

Argumentando do mesmo modo que na definição de r , por (3.15) sabemos que $r < r_* < +\infty$, $w''(r_*) = 0$ e $w'' > 0$ em (r, r_*) . Assim, $w'''(r_*) \leq 0$. Por contradição suponha que $r_* < m'$, então $w'(r_*) < 0$ e do Lema 3.5

$$0 < H(m) \leq H(r_*) = f(w(r_*)w'(r_*) = -w''''(r_*)w'(r_*)$$

concluimos que $w''''(r_*) > 0$. Logo $w''' < 0$ em $(r_* - \varepsilon_*, r_*)$ para algum $\varepsilon_* > 0$. Portanto, $w''(r) = w''(r_*) = 0$ e existe $\tau_* \in (r, r_*)$ tal que

$$0 < \max_{s \in [r, r_*]} w''(s) = w''(\tau_*).$$

Assim $w'''(\tau_*) = 0$. Portanto, construímos $\tau \in (m, r]$ e $\tau_* \in (r, m')$ tais que $w'''(\tau) = w'''(\tau_*) = 0$, o que contradiz (3.18).

Prova de 3. Mostramos que existe $\tau \in (m, r]$ tal que $w'''(\tau) = 0$. Sabemos que $w' < 0$ em (m, m') . Logo de (3.18) concluimos que

$$w''' < 0 \text{ em } [m, \tau] \text{ e } w''' > 0 \text{ em } (\tau, m'].$$

Resta provar que $z < \tau < r$. De fato, sabemos que $w''(z) < 0$, $w''(r) = 0$ e $w'''(z) < 0$. Daí o mínimo de w'' em $[z, r]$ é atingido em algum ponto em (z, r) , que é necessariamente τ . \square

Para nossos propósitos também precisaremos de informações sobre a quarta e quinta derivadas de w .

Lema 3.16. *Seja $0 < k \leq k_f$ e assumamos que f satisfaz (3.4), (3.5) e (3.6). Defina $w = w(s)$ uma solução local de (3.1) em uma vizinhança de $s = 0$ e definida no intervalo maximal à direita $[0, R^+)$. Seja $m \geq 0$ um máximo local de w com $w(m) > 0$ e $H(m) > 0$. Defina z , τ , r e m' como no Lema 3.14. Se $w(m)$ for suficientemente grande, então*

1. $w^{(v)} > 0$ em $[m, \tau]$.
2. Existe $m < \theta < z$ tal que $w'''' < 0$ em $[m, \theta]$ e $w'''' > 0$ em $(\theta, r]$.

Demonstração. Se derivarmos a equação (3.1) obtemos

$$w^{(v)}(s) = -kw''''(s) - f'(w(s))w'(s). \quad (3.19)$$

Do Lema 3.14 sabemos que os dois termos do lado direito de (3.19) são positivos em (m, τ) e segue que $w^{(v)}(s) > 0$ em $[m, \tau]$. Portanto w'''' tem no máximo um zero em $[m, \tau]$. Uma vez que $w''''(z) = -kw''(z) > 0$ concluimos que $w'''' > 0$ em $[z, \tau]$.

Observe que, de (3.15), já sabemos que $a^+ = +\infty$. Assim, sem perda de generalidade podemos supor que $w(m)$ é grande, comparado a 1. Então da função energia \mathcal{E} e de (3.4) obtemos

$$\frac{\rho}{p+1}(w(m))^{p+1} - E \leq \frac{(w''(m))^2}{2} = F(w(m)) - E \leq \left(\frac{\alpha}{q+1} + \frac{\beta}{p+1} \right) (w(m))^{p+1} - E,$$

e assim existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$C_1(w(m))^{\frac{p+1}{2}} \leq |w''(m)| \leq C_2(w(m))^{\frac{p+1}{2}}.$$

Agora, estimamos $w''''(m)$. A partir de (3.1) e (3.4) obtemos

$$w''''(m) = -f(w(m)) - kw''(m) \leq -\rho(w(m))^p + kC_2(w(m))^{\frac{p+1}{2}}.$$

Assim, uma vez que $w(m) > 1$ e $p > 1$, temos que $w''''(m) < 0$. Concluimos que existe um único $\theta \in (m, z)$ tal que $w'''' < 0$ em $[m, \theta]$ e $w'''' > 0$ em $(\theta, \tau]$.

Já de (3.1) obtemos que w'''' não pode se anular em $[\tau, r]$ porque $w''(s)$ e $f(w(s))$ são ambos negativos sobre este intervalo. Portanto, podemos inferir que $w'''' > 0$ em $[m, r]$. \square

Observação 3.17. Nas hipóteses do Lema 3.16 considere $m < \theta < z < \tau < r < m'$ como nos Lemas 3.16 e 3.14. Do Lema (3.16) item 2 sabemos que $w'''' > 0$ em $[\tau, r]$, desta forma

$$w''''(r) > -\frac{w''(\tau)}{r-\tau} > 0$$

e assim

$$(w''''(r))^2 > \frac{(w''(\tau))^2}{(r-\tau)^2} = \frac{G(\tau) - E}{(r-\tau)^2}. \quad (3.20)$$

Por outro lado, de (3.1),

$$w''''(s) + kw''(s) = -f(w(s)) > 0 \quad \text{em } [z, m']$$

e assim

$$w''''(s)w''''(s) + kw''(s)w''''(s) = -f(w(s))w''''(s) > 0 \quad \text{em } (\tau, m').$$

Deste modo a função

$$s \mapsto (w''''(s))^2 + k(w''(s))^2 \quad \text{é estritamente crescente em } [\tau, m']$$

e, em particular,

$$(w''''(m'))^2 + k(w''(m'))^2 > (w''''(r))^2. \quad (3.21)$$

Portanto, de (3.20) e (3.21) obtemos

$$(w''''(m'))^2 + k(w''(m'))^2 > \frac{G(\tau) - E}{(r-\tau)^2}. \quad (3.22)$$

Daí, uma vez que $G(s) \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow R^+$, temos que $G(\tau) - E > 0$.

Podemos agora demonstrar o Teorema (3.9).

Prova do Teorema 3.9.

Dada w uma solução de (3.1), denotamos como mencionado acima $\bar{w}(s) = w(-s)$. Neste caso $H_w(0) = -H_{\bar{w}}(0)$. Portanto, no Teorema 3.9, o caso 2. decorre do caso 1.

Seja $w = w(s)$ uma solução local de (3.1) em uma vizinhança de $s = 0$ e definida no intervalo maximal à direita $[0, R^+)$. Assuma também que $H(0) \geq 0$. Uma vez que $0 < k \leq k_f$, sabemos que $H'(s) \geq 0$ para cada s . Como w não é a solução trivial, concluímos que $H > 0$ em $(0, R^+)$.

Precisamos estabelecer algumas estimativas técnicas. A prova de algumas delas é semelhante a outras em [32, Section 7], quando este for o caso vamos indicar a referência precisa para mais detalhes. Vamos ter o cuidado de mencionar as semelhanças entre os cálculos abaixo e aqueles em [32], bem como ressaltar as diferenças cruciais.

PASSO 1: Construção das sequências (m_j) , (z_j) , (τ_j) e (r_j) .

A partir da Proposição 3.12, do Lema 3.14 e da Observação 3.15 obtemos a sequência (m_j) de todos os pontos críticos de w a partir de um determinado $s_0 \geq 0$, de tal forma que

$$\begin{aligned} w(m_{2k-1}) < 0, \quad w(m_{2k}) > 0, \quad w''(m_{2k-1}) > 0, \quad w''(m_{2k}) < 0, \\ m_j \rightarrow R^+, \quad w(m_{2k-1}) \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad w(m_{2k}) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Além disso existem sequências (z_j) , (τ_j) e (r_j) tais que

$$m_j < z_j < \tau_j < r_j < m_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

de tal forma que (z_j) , (m_j) , (r_j) e (τ_j) são, respectivamente, as sequências de todos os zeros de w , w' , w'' e w''' . Lembramos ainda que

$$w''(m_j)w'''(m_j) = H(m_j) > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Definimos $M_j = |w(m_j)|$ para $j \in \mathbb{N}$.

PASSO 2: Existe $C > 0$ tal que

$$z_j - m_j \leq CM_j^{\frac{1-p}{4}}.$$

Esta estimativa é consequência da concavidade/convexidade de w em $[m_j, z_j]$, que foi provada no Lema 3.14. Então os argumentos de [32, Step 4, p. 743] se aplicam. Observe que, embora k seja negativo em [32], as estimativas nesta parte envolvem apenas $|k|$.

PASSO 3: Quando $j \rightarrow \infty$, temos $r_j - z_j \rightarrow 0$.

Aqui os nossos argumentos são ligeiramente diferentes daqueles em [32, Step 2, p. 740]. São necessárias adaptações devido à substituição da função auxiliar G .

Consideramos o caso em que w tem um máximo local em m_j , que de acordo com a nossa notação corresponde a qualquer j par. O mesmo é válido para o caso de w que tem mínimo local em m_j (j ímpar).

Suponha por contradição que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (r_j - z_j) > 0.$$

Logo, existem $a > 0$ e uma subsequência (denotada com o mesmo índice) tal que $r_j - z_j \geq a$, para todo $j > j_0$. Defina a função $h(s) = (s - z_j)^3(z_j + a - s)^4$. Multiplique (3.1) por h . Em seguida, integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{z_j}^{z_j+a} h(s)(w''''(s) + kw''(s) + f(w(s)))ds \\ &= \int_{z_j}^{z_j+a} h(s)f(w(s)) + (kh''(s) + h''''(s))w(s)ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que w é estritamente côncava em $[z_j, r_j]$, w' é decrescente, e

$$w(z_j + s) = \int_0^s w'(z_j + t)dt \geq w'(z_j)s, \quad \forall s \in (z_j, r_j).$$

Usando uma vez mais que w é côncava em (m_j, z_j) , segue que

$$w'(z_j) \geq \frac{M_j}{z_j - m_j}.$$

Logo obtemos do Passo 2

$$w'(z_j) \geq CM_j^{1+\frac{p-1}{4}} = CM_j^{\frac{p+3}{4}},$$

e além disso

$$w(z_j + s) \geq CM_j^{\frac{p+3}{4}} s, \quad \forall s \in (z_j, r_j).$$

Por outro lado, observa-se que

$$h(s)f(w(s)) + (kh''(s) + h''''(s))w \geq h(s)f(w(s)) - Cw(s),$$

com $C = \sup_{[z_j, z_j+a]} |kh''(s) + h''''(s)|$, observe que C não depende de j . Então, para todo $0 < \varepsilon < a$, temos

$$\begin{aligned} \int_{z_j+\varepsilon}^{z_j+a} h(s)f(w(s))ds &\geq h(z_j + \varepsilon) \int_{z_j+\varepsilon}^{z_j+a} w(z_j + s)^p ds \\ &\geq (a - \varepsilon)h(z_j + \varepsilon)C\varepsilon^p M_j^{\frac{p(p+3)}{4}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Logo, de (3.23),

$$\begin{aligned} \int_{z_j}^{z_j+a} h(s)f(w(s)) + (kh''(s) + h''''(s))w(s)ds &\geq \int_{z_j}^{z_j+a} h(s)f(w(s)) - Cw(s)ds \\ &\geq \int_{z_j+\varepsilon}^{z_j+a} h(s)f(w(s)) - C \int_{z_j}^{z_j+a} w(s)ds \geq (a - \varepsilon)\varepsilon^p Ch(z_j + \varepsilon)M_j^{\frac{p(p+3)}{4}} - CaM_j. \end{aligned}$$

Por fim, para j suficientemente grande, a integral torna-se positiva, o que produz uma contradição.

PASSO 4: Existe $C > 0$ tal que

$$r_j - z_j \leq CM_j^{\frac{1-p}{4}}.$$

Uma vez que a convergência do Passo 3 é estabelecida, o argumento em [32, Step 3, p. 741] se aplica.

PASSO 5: Existe $C > 0$ tal que

$$m_{j+1} - r_j \leq CM_j^{\frac{1-p}{4}}.$$

A prova deste passo resulta como em [32, Step 5, p. 745]. Ressaltamos que as informações sobre w'' dadas pelo Lema 3.14 são importantes neste caso.

PASSO 6: Mostramos que $R^+ < \infty$.

O plano para provar este passo é o mesmo que em [32]. No entanto, a parte principal dos argumentos nesta etapa é muito diferente daquela em [32, Passo 6 p. 747]. A razão é que, no caso de $k > 0$ não é possível garantir que a função ϕ definida em (3.13) é convexa.¹

Uma vez que G é crescente, $(G(m_j))$ é uma sequência crescente. Então

$$F(w(m_j)) = \frac{G(m_j) - E}{2} < \frac{G(m_{j+1}) - E}{2} = F(w(m_{j+1})),$$

o que demonstra que $(F(w(m_j)))$ é também crescente.

Para finalizar a prova, como veremos a seguir, é suficiente mostrar que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(w(m_{i+1})) > 2F(w(m_{i-1})), \quad \forall i \geq i_0. \quad (3.24)$$

Observamos que não foi possível provar a desigualdade mais natural

$$F(w(m_i)) > 2F(w(m_{i-1})), \quad \forall i \geq i_0,$$

para algum i_0 suficientemente grande. A razão é que não se pode provar que $|w'''(m_i)| > |w''(m_i)|$ para todo i suficientemente grande. No entanto, veremos que (3.24) é suficiente para provar que $R < +\infty$.

¹ No caso de $k \leq 0$ é fácil verificar que Φ é uma função convexa.

CASO 1: Se $(w'''(m_i))^2 \leq (w''(m_i))^2$, então (3.24) vale.

A partir de (3.22), concluímos que

$$(1+k)(w''(m_i))^2 \geq \frac{G(\tau_{i-1}) - E}{(r_{i-1} - \tau_{i-1})^2} > \frac{G(m_{i-1}) - E}{(r_{i-1} - \tau_{i-1})^2} = \frac{(w''(m_{i-1}))^2}{(r_{i-1} - \tau_{i-1})^2}$$

e assim

$$(1+k)2(F(w(m_i)) - E) > \frac{2(F(w(m_{i-1})) - E)}{(r_{i-1} - \tau_{i-1})^2},$$

que produz

$$F(w(m_i)) > 2F(w(m_{i-1}))$$

para cada i suficientemente grande, porque $|r_{i-1} - \tau_{i-1}| \rightarrow 0$ e $F(w(m_j)) \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$.

Logo, uma vez que $F(w(m_j))$ é crescente, temos que

$$F(w(m_{i+1})) > 2F(w(m_{i-1})),$$

que é exatamente (3.24).

CASO 2: Se $(w'''(m_i))^2 > (w''(m_i))^2$, então (3.24) vale.

Definimos os conjuntos

$$N_0 = \{j \in \mathbb{N}; 2F(w(m_j)) \leq F(w(m_{j+1})) \text{ e } (w'''(m_j))^2 > (w''(m_j))^2\},$$

$$N_1 = \{j \in \mathbb{N}; 2F(w(m_j)) > F(w(m_{j+1})) \text{ e } (w'''(m_j))^2 > (w''(m_j))^2\}.$$

Observe que se $i \in N_0$ então temos nosso resultado, pois $F(w(m_j))$ é crescente. Assim provaremos que N_1 é limitado.

Primeiramente observe que se $\Phi(m_j) < \Phi(z_j)$ é satisfeita então $j \in N_0^2$. De fato,

$$\begin{aligned} 2F(w(m_j)) &= \Phi(m_j) + E < \Phi(z_j) + E = \frac{(w''(z_j))^2}{2} + E \\ &< \frac{(w''(\tau_j))^2}{2} + E = \frac{G(\tau_j)}{2} + \frac{E}{2} < \frac{G(m_{j+1})}{2} + \frac{E}{2} = F(w(m_{j+1})). \end{aligned}$$

Agora, seja $j \in N_1$, então

$$F(w(m_{j+1})) < 2F(w(m_j)).$$

Uma vez que G é convexa, concluímos que

$$G(z_j) > G(m_j) + H(m_j)(z_j - m_j).$$

Reescrevendo a desigualdade acima como

$$\begin{aligned} \Phi(z_j) + \frac{k(w'(z_j))^2}{2} &> \Phi(m_j) + w''(m_j)w'''(m_j)(z_j - m_j) \\ &\geq \Phi(m_j) + w''^2(m_j)(z_j - m_j), \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde na última linha usamos a hipótese $(w'''(m_j))^2 > (w''(m_j))^2$.

² No caso em que $k \leq 0$, a desigualdade $\Phi(m_j) < \Phi(z_j)$ é sempre satisfeita. Como consequência $N_1 = \emptyset$.

AFIRMAÇÃO: Para cada j suficientemente grande

$$\frac{k(w(z_j))^2}{2} < (w''(m_j))^2(z_j - m_j). \quad (3.26)$$

Consideremos o caso em que w tem um máximo local em m_j , que de acordo com nossa notação corresponde a qualquer j par. O mesmo argumento é válido para o caso em que w tem mínimo local em m_j .

Pela concavidade de w' , temos

$$w''(z_j) < \frac{w'(z_j)}{z_j - m_j},$$

que produz

$$\frac{k}{2}(w''(z_j))^2(z_j - m_j)^2 > \frac{k}{2}(w'(z_j))^2. \quad (3.27)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}(z_j - m_j)(w''(z_j))^2 &< \frac{k}{2}(z_j - m_j)(w''(\tau_j))^2 = \frac{k}{2}(z_j - m_j)(G(\tau_j) - E) \\ &< \frac{k}{2}(z_j - m_j)(G(m_{j+1}) - E) = k(z_j - m_j)(F(w(m_{j+1})) - E) \\ &< k(z_j - m_j)(2F(w(m_j)) - E) = k(z_j - m_j) \frac{(w''(m_j))^2 + E}{(w''(m_j))^2} (w''(m_j))^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo observa-se que

$$k(z_j - m_j) \frac{(w''(m_j))^2 + E}{(w''(m_j))^2} \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow +\infty.$$

De (3.28) e (3.27), existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k(w'(z_j))^2}{2} < \frac{k}{2}(w''(z_j))^2(z_j - m_j)^2 < (w''(m_j))^2(z_j - m_j), \quad \forall j \geq j_0,$$

o que prova (3.26).

Assim, se $j \geq j_0$ então de (3.25) e (3.26) obtemos $\Phi(z_j) > \Phi(m_j)$, que como observado acima implica que $j \in N_0$, o que leva a uma contradição. Portanto N_1 é limitado. Está concluída a prova de (3.24).

Usando a notação $M_j = |w(m_j)|$, obtemos de (3.24) que

$$F(M_{2j+j_0}) > 2^j F(M_{j_0}), \quad \forall j \geq 1.$$

Por outro lado, por (3.4),

$$F(M_j) \leq \frac{\alpha}{q+1} M_j^{q+1} + \frac{\beta}{p+1} M_j^{p+1} = \frac{\beta}{p+1} M_j^{p+1} (\alpha \beta^{-1} \frac{p+1}{q+1} M_j^{q-p} + 1).$$

Então, uma vez que $q - p < 0$, existe uma constante positiva C tal que

$$(F(M_j))^{-1} \geq CM_j^{-(p+1)}, \quad \forall j \geq j_0. \quad (3.29)$$

Agora basta usar as desigualdades dos Passos 2, 4 e 5 em conjunto com (3.29). De fato, lembrando que $(F(w(m_j)))$ é uma sequência crescente, podemos concluir que

$$\begin{aligned} m_{2j+j_0+1} - m_{j_0+1} &= \sum_{l=1}^j m_{j_0+2l+1} - m_{j_0+2l-1} \leq C \sum_{l=1}^j (M_{j_0+2l}^{\frac{1-p}{4}} + M_{j_0+2l-1}^{\frac{1-p}{4}}) \\ &\leq C \sum_{l=1}^j (F(M_{j_0+2l})^{\frac{1}{4} \frac{1-p}{p+1}} + F(M_{j_0+2l-1})^{\frac{1}{4} \frac{1-p}{p+1}}) \leq 2C \sum_{l=1}^j F(M_{j_0+2l-2})^{\frac{1}{4} \frac{1-p}{p+1}} \\ &\leq 2C \sum_{l=1}^j (F(M_{j_0}) 2^{l-1})^{\frac{1}{4} \frac{1-p}{p+1}} = \bar{C} \sum_{l=1}^j (2^{\frac{1}{4} \frac{1-p}{p+1}})^{l-1}. \end{aligned}$$

Enfim, tomando o limite quando $j \rightarrow \infty$ obtemos que

$$m_{2l+j_0+1} - m_{j_0+1} \rightarrow R - m_{j_0+1}.$$

Como a série do lado direito converge para $p > 1$, concluímos que $R^+ < +\infty$. Portanto w explode em espaço finito à direita. \square

3.3 Ondas viajantes periódicas

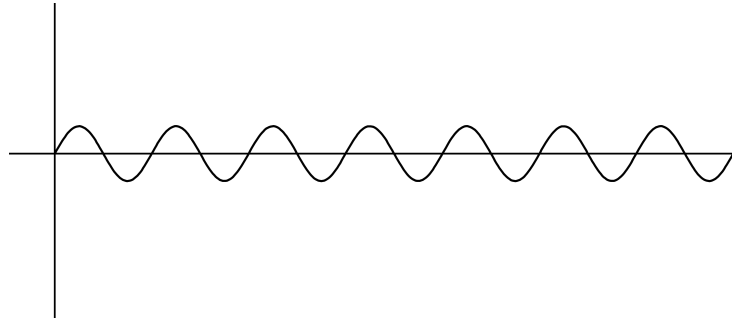
Nesta seção é tratada a existência de soluções periódicas de (3.1) para $k > k_f$. Neste caso, assumimos que f é ímpar. Além disso, adicionamos a hipótese (3.9), isto é, existe B positivo tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s^p} = B.$$

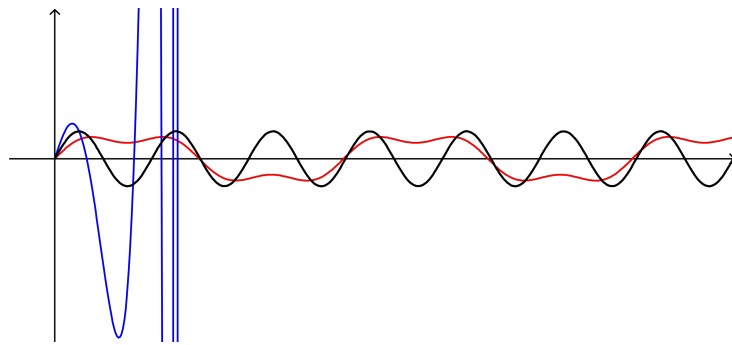
Teorema 3.18. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar que satisfaz (3.4), (3.5) e (3.9). Se $k > k_f$, então existem $a > 0$ e uma solução periódica de (3.1) tais que $w(0) = w''(0) = 0$, $w'(0) = a$ e $w'''(0) = -\frac{k}{2}a$.*

Para provar a existência de soluções periódicas para (3.1) usaremos a técnica de *shooting* topológico, o comportamento qualitativo da solução é mostrado na Figura 10. Aqui usamos algumas idéias desenvolvidas em [53], a intuição é variar a inclinação inicial para provar a existência de dados iniciais que levam a uma solução periódica, conforme ilustrado na Figura 11. Resultados semelhantes foram provados em [54, Chapter 9] para o caso particular de $f(s) = s + s^3$, contudo alguns argumentos diferentes são necessários, em particular, para incluir o caso de $f'(0) = 0$.

Figura 10 – Comportamento qualitativo da solução periódica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Soluções de (3.1) para diferentes inclinações α 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'''' + kw'' + f(w) = 0, \\ (w, w', w'', w''')(0) = (0, b, 0, d). \end{cases} \quad (3.30)$$

Se, para dados $b, d \in \mathbb{R}$, existirem dois pontos críticos $m > 0 > m^*$ da solução w tais que

$$w'(m) = w'(m^*) = 0, \quad w'''(m) = w'''(m^*) = 0, \quad (3.31)$$

então a extensão de w para $[2m^*, 2m]$ definida por

$$w(s) = \begin{cases} w(2m - s), & m \leq s < 2m, \\ w(s), & m^* \leq s < m, \\ w(2m^* - s), & 2m^* \leq s \leq m^*, \end{cases}$$

resolve (3.30) em $[2m^*, 2m]$. Pela própria definição, w e suas derivadas até terceira ordem coincidem em $2m$ e $2m^*$. Segue da unicidade de solução de (3.30) que w é uma solução periódica, conforme queríamos, com período $2m - 2m^*$.

Observe agora que se f é ímpar e existe $m > 0$ tal que $w'(m) = w'''(m) = 0$, então a extensão ímpar a $[-m, m]$ resolve (3.30), e podemos tomar $m^* = -m$ para obter (3.31), conseguindo assim uma solução periódica de (3.30). Tal ponto m é chamado um *ponto de simetria* de w e nosso problema se resume a encontrar pontos de simetria.

Note que b e d estão relacionados por meio da função de energia, ou seja,

$$E = bd + \frac{k}{2}b^2.$$

Se $b = 0$, então necessariamente $E = 0$ e d é um parâmetro livre. Por outro lado, se $b \neq 0$, podemos escrever

$$d = d(b) = \frac{E}{b} - \frac{k}{2}b$$

e tomar b como parâmetro (fixado um valor de energia E). A seguir consideraremos o último caso.

Observação 3.19.

1. A solução que construímos na prova do Teorema 3.18 tem exatamente dois pontos críticos em cada período. Essa solução é chamada de *solução de uma volta* devido à forma de sua órbita.
2. Devido à escolha do valor inicial, a solução w de (3.1) satisfaz $H(0) = 0$ e $H'(0) > 0$. Assim esta solução periódica fornece um contra-exemplo para a conjectura no caso $k > k_f$. Lembre-se que a função H não precisa ser monótona neste caso.

Prova do Teorema 3.18.

Dado $b > 0$ tome $d = -\frac{k}{2}b$. Denote $w(s, b)$ o valor da solução de (3.30) no ponto $s \geq 0$. Considere

$$m(b) = \sup\{t > 0; w'(s, b) > 0, \forall s \in [0, t)\}.$$

De [6, Theorem 4] ou [6, Lemma 24], conforme, ou não, a solução é definida globalmente, sabemos que w muda de sinal infinitas vezes, e assim $0 < m(b) < +\infty$ e $w'(m(b), b) = 0$.

Uma vez que f é ímpar, resta apenas verificar que a função

$$\phi(b) = w'''(m(b), b)$$

tem uma raiz em $(0, +\infty)$. Observe que ϕ é contínua, uma vez que a solução depende continuamente dos dados iniciais. Do Lema 3.20, $\phi(b) < 0$ para valores grandes de b , enquanto do Lema 3.22, $\phi(b) > 0$ se b é suficientemente pequeno. Concluimos, portanto, a prova do Teorema 3.18. \square

Lema 3.20. *Assuma que f satisfaz (3.2), (3.4) e que existem números reais positivos B_1 e B_2 tais que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}s} = B_1 \quad e \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}s} = B_2. \quad (3.32)$$

Então existe $b_1 > 0$, tal que $b > b_1$ implica $w'''(m(b), b) < 0$.

Demonstração. Dados $\sigma, r \in \mathbb{R}$, considere a mudança de variáveis

$$t = b^\sigma s, \quad v(t) = b^r w(s).$$

De (3.30) obtemos

$$\begin{cases} v'''' + kb^{-2\sigma}v'' + b^{r-4\sigma}f(b^{-r}v) = 0, \\ (v, v', v'', v''')(0) = (0, b^{r-\sigma+1}, 0, b^{r-3\sigma}d(b)). \end{cases}$$

Escolhendo r, σ tais que

$$r(1-p) - 4\sigma = 0, \quad r - \sigma + 1 = 0,$$

a saber

$$\sigma = \frac{p-1}{p+3}, \quad r = -\frac{4}{p+3},$$

obtemos $v'(0, b) = 1$ para cada $b > 0$ e (com E fixado)

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} v''''(0, b) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{r-3\sigma}d(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} Eb^{r-3\sigma-1} - \frac{k}{2}b^{r-3\sigma+1} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} Eb^{-2-2\sigma} - \frac{k}{2}b^{-2\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Agora considere

$$g(t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} g_b(t), \quad \text{para } g_b(t) = b^{r-4\sigma}f(b^{-r}t).$$

Então, de (3.32), deduzimos que

$$g(t) = \begin{cases} B_1|t|^{p-1}t, & \text{se } t \leq 0, \\ B_2|t|^{p-1}t, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Portanto $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (3.2) e $g_b \rightarrow g$ uniformemente em intervalos limitados quando $b \rightarrow +\infty$. Além disso, para cada $M > 0$, existem $C_M > 0$ e $b_0(M) > 0$ tais que para todo $b \geq b_0$,

$$|g(t) - g(s)| \leq C_M|t - s|, \quad |g_b(t) - g_b(s)| \leq C_M|t - s|, \quad \forall t, s \in [-M, M].$$

Desta forma, como $b \rightarrow +\infty$, vemos que o problema

$$\begin{cases} v'''' + kb^{-2\sigma}v'' + b^{r-4\sigma}f(b^{-r}v) = 0, \\ (v, v', v'', v''')(0) = (0, 1, 0, b^{r-3\sigma}d(b)). \end{cases}$$

é uma perturbação regular de

$$\begin{cases} V'''' + g(V) = 0, \\ (V, V', V'', V''')(0) = (0, 1, 0, 0), \end{cases} \quad (3.33)$$

de modo que $(v, v', v'', v''')(s, b) \rightarrow (V, V', V'', V''')(s)$ quando $b \rightarrow +\infty$, e a convergência é uniforme em intervalos limitados; veja [61, Theorem 7.2].

Note que, à direita de $t = 0$, a solução V de (3.33) satisfaz

$$\begin{aligned} &\text{enquanto } V \text{ permanecer positiva,} \\ &V''''(t), V'''(t), \text{ e } V''(t) \text{ serão negativas.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Defina $T = \sup\{t > 0; V' > 0 \text{ em } (0, t)\}$. Então de [32, Theorems 2 and 4], sabemos que $0 < T < +\infty$ e desta forma $V'(T) = 0$. Além disso, de (3.34) sabemos que $V''(T) < 0$ e $V'''(T) < 0$.

Como $b \rightarrow +\infty$, obtemos $m(b) \sim b^{-\sigma}T$ e

$$w(m(b), b) \sim b^{-r}V(T), \quad \phi(b) = w'''(m(b), b) \sim b^{2\sigma-r}V'''(T).$$

Observando que $r < 0$ e $2\sigma - r = \sigma + 1 > 0$, chegamos a

$$w(m(b), b) \rightarrow +\infty, \quad \phi(b) < 0,$$

para b suficientemente grande. □

Observação 3.21. O lema acima vale para qualquer $E \in \mathbb{R}$. Além disso, quando f é ímpar e satisfaz (3.9), então (3.32) é satisfeita com $B_1 = B_2$.

Lema 3.22. Assuma que f satisfaz (3.5), $E = 0$ e $b > 0$ é suficientemente pequeno, então $w'''(m(b), b) > 0$.

Demonstração. Para estudar o comportamento do problema quando $b \rightarrow 0$, vamos reescalar como fizemos acima, com $\sigma = 0$ e $r = -1$, neste caso chegamos a

$$\begin{cases} v^{iv} + kv'' + b^{-1}f(bv) = 0, \\ (v, v', v'', v''')(0) = (0, 1, 0, b^{-1}d(b)). \end{cases}$$

Ao tomar o limite $b \rightarrow 0$ obtemos pelo cálculo acima

$$\lim_{b \rightarrow 0} b^{-1}d(b) = \lim_{b \rightarrow 0} \left(Eb^{-2} - \frac{k}{2} \right) = -\frac{k}{2}, \quad \text{se } E = 0,$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} b^{-1}f(bv) = f'(0)v.$$

Então obtemos o problema limite

$$\begin{cases} V'''' + kV'' + f'(0)V = 0, \\ (V, V', V'', V''')(0) = (0, 1, 0, -\frac{k}{2}). \end{cases} \quad (3.35)$$

CASO $f'(0) > 0$: Sob a hipótese (3.6), a solução do problema (3.35) é dada explicitamente por

$$V(t) = C_1 \text{sen}(\lambda_1 t) + C_2 \text{sen}(\lambda_2 t),$$

onde λ_1 e λ_2 são a parte imaginária das raízes da equação característica,

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 - 4f'(0)}}{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 - 4f'(0)}}{2}},$$

ambas as quais são positivas. A partir da condição inicial, obtemos

$$C_1 = \frac{1}{2\lambda_1}, \quad C_2 = \frac{1}{2\lambda_2}.$$

Seja T o primeiro ponto crítico de V em $(0, +\infty)$, de modo que $V(T) > 0$ e $V'(T) = 0$, isso é,

$$\cos(\lambda_2 T) = -\cos(\lambda_1 T).$$

Avaliando $V'''(T)$, obtemos

$$\begin{aligned} V'''(T) &= -C_1 \lambda_1^3 \cos(\lambda_1 T) - C_2 \lambda_2^3 \cos(\lambda_2 T) = -\frac{1}{2} \lambda_1^2 \cos(\lambda_1 T) - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 T) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_1^2 \cos(\lambda_2 T) - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 T) = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - 4f'(0)} \cos(\lambda_2 T) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, para b suficientemente pequeno,

$$w'''(m(b), b) \sim bV'''(T) > 0.$$

CASO $f'(0) = 0$: Neste caso, o problema limite é

$$\begin{cases} V'''' + kV'' = 0, \\ (V, V', V'', V''')(0) = (0, 1, 0, -\frac{k}{2}). \end{cases}$$

A solução é dada por

$$V(t) = C_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{k}) + C_2 t,$$

e a condição inicial nos dá

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Para qualquer $T > 0$ tal que $\cos(T\sqrt{k}) = -1$, um cálculo direto mostra que $V'(T) = 0$ e

$$V'''(T) = -\frac{k}{2} \cos(T\sqrt{k}) = \frac{k}{2} > 0.$$

Tomando T como o primeiro destes valores, a conclusão segue como no caso anterior. \square

EQUAÇÃO NÃO LOCAL PARA A PLACA SOB PROTENSÃO

Consideramos uma placa retangular fina e estreita, apoiada em suas duas extremidades mais curtas, ao passo que as duas outras estão livres. Ela representa o tabuleiro de uma ponte que pode ser uma passarela ou uma ponte pênsil. Na ausência de forças a placa é plana e será representada pelo domínio $\Omega = (0, \pi) \times (-l, l)$ com $0 < l \ll \pi$. Forças estáticas e dinâmicas atuam sobre a placa, perpendicularmente a Ω : estas cargas podem ser tanto pedestres, veículos ou a reação induzida pela interação da estrutura com o vento. A placa também está sujeita a forças horizontais ao longo das bordas, chamadas de cargas de flambagem. Estas forças de compressão representam a protensão à qual a placa é submetida.

Seguimos o modelo de placa sugerido por Berger [7]; veja também o modelo da viga correspondente sugerido por Woinowsky-Krieger [64] e, de forma independente, por Burgreen [10]. A equação não local de evolução modelando a deformação da placa será

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_{tt} + \delta U_t + \Delta^2 U - \phi(U)U_{xx} = F & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ U = U_{xx} = 0 & \text{em } \{0, \pi\} \times [-l, l], \\ U_{yy} + \sigma U_{xx} = U_{yyy} + (2 - \sigma)U_{xyy} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad U_t(x, y, 0) = V_0(x, y) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde ϕ é definido por

$$\phi(U) = -P + S \int_{\Omega} U_x^2$$

e carrega o efeito não local do modelo. Aqui $S > 0$ depende da elasticidade do material que compõe o tabuleiro, $S \int_{\Omega} U_x^2$ é uma medida da não linearidade geométrica da placa quando sujeita a um alongamento e P é a *constante de protensão*: $P > 0$ se a placa está comprimida e $P < 0$ se a placa está esticada. A constante σ é a razão de Poisson: para metais tem valor em torno de 0,3; já para concreto é entre 0,1 e 0,2 [27]. Assumimos neste capítulo que

$$0 < \sigma < \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

A função $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ representa a carga vertical sobre a placa e pode depender do tempo, enquanto δ é um *parâmetro de amortecimento*. Finalmente U_0 e V_0 são, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da placa.

As condições de contorno nas bordas curtas recebem o nome de Navier [50] e modelam o fato de que a placa está apoiada no solo; note que $U_{xx} = \Delta U$ em $\{0, \pi\} \times (-l, l)$. As condições de contorno no restante da fronteira modelam o fato de que a borda está livre; elas podem ser derivadas usando integração por partes; veja [46, 63]. Para uma placa parcialmente apoiada como a que estamos estudando, a carga de flambagem age apenas na direção x e portanto obtemos o termo $\int_{\Omega} U_x^2$; veja [41]. Mais detalhes sobre como derivar (4.1) podem ser encontrados em [3, 25, 33]; veja também [27] para a história completa do problema.

O primeiro objetivo deste capítulo é provar a existência, unicidade e analisar o comportamento assintótico de soluções de (4.1) para dados iniciais em espaços funcionais adequados. Usando separação de variáveis, mostramos que (4.1) admite soluções com um número finito de componentes não triviais de Fourier. Isto permite definir os modos simples (não lineares) de (4.1): em contraste com equações lineares, o período de um modo não linear depende da amplitude da oscilação. Os modos simples de (4.1) são encontrados resolvendo problemas de autovalores adequados para a equação estacionária. Exploramos os resultados anteriores em [25, 33, 5], onde foram estudadas as principais propriedades dessas autofunções. Em particular, as autofunções podem ser classificadas em duas famílias distintas: uma contém as chamadas autofunções longitudinais, que aproximadamente tem a forma de $c_m \sin(mx)$, e a outra família contém as ditas autofunções torcionais, que aproximadamente têm a forma de $c_m y \sin(mx)$.

A estabilidade dos modos não lineares para uma equação local semelhante a (4.1) é analisada em [5]. No entanto, problemas locais não permitem separação de variáveis e assim não é possível obter uma caracterização precisa dos modos não lineares. Os resultados em [5] mostram que há uma interação muito complexa entre estes modos, de modo que a versão local da equação (4.1) precisa ser investigada mais a fundo. Uma dificuldade semelhante aparece no estudo da equação não linear da corda: por esta razão, Cazenave e Weissler [11, 12] sugerem lidar primeiro com a estabilidade dos modos de oscilação na versão não local.

Nosso segundo objetivo é analisar a estabilidade dos modos simples de (4.1). Este estudo é motivado pelos fenômenos observados em pontes reais. De acordo com o relatório oficial feito à época [4] (ver também [58]), a principal razão para o colapso da ponte Tacoma Narrows, foi a transição súbita de oscilações longitudinais para torcionais. Várias outras pontes caíram pela mesma razão, veja e.g. [33, Chapter 1] ou a introdução em [5]. Como a origem dessa instabilidade é de natureza estrutural, analisamos em detalhes como uma solução de (4.1) que inicialmente oscila de uma maneira quase puramente longitudinal pode mudar subitamente para um modo de torção, mesmo sem a atuação de forças externas, isto é, quando $F \equiv 0$.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na Seção 4.1 introduzimos a noção de solução que vamos considerar e apresentamos os resultados sobre existência, unicidade e

comportamento das soluções em longo tempo. Na Seção 4.2 são definidos os modos simples de oscilação e a noção de estabilidade de um modo simples em relação a outro. Um critério para determinar se há ou não estabilidade de modos simples com energia grande conclui a seção. A Seção 4.3 traz a prova do Teorema 4.2 (resultado de existência e unicidade), enquanto os resultados sobre o comportamento assintótico estão provados na Seção 4.4. A última seção traz a prova do Teorema 4.11 sobre a estabilidade dos modos simples.

Os resultados apresentados neste capítulo estão organizados no artigo [23].

4.1 Existência, unicidade e comportamento assintótico

Considere os espaços de Hilbert $L^2(\Omega)$

$$H_*^1(\Omega) = \{U \in H^1(\Omega); U = 0 \text{ em } \{0, \pi\} \times [-l, l]\},$$

e

$$H_*^2(\Omega) = \{U \in H^2(\Omega); U = 0 \text{ em } \{0, \pi\} \times [-l, l]\}.$$

Em $L^2(\Omega)$ e $H_*^1(\Omega)$ usamos os produtos internos usuais $(\cdot, \cdot)_0$ e $(U, V)_1 = \int_{\Omega} \nabla U \nabla V$ respectivamente. No espaço $H_*^2(\Omega)$ definimos o operador de Monge-Ampère

$$[\phi, \psi] := \phi_{xx} \psi_{yy} + \phi_{yy} \psi_{xx} - 2\phi_{xy} \psi_{xy}, \quad \forall \phi, \psi \in H_*^2(\Omega). \quad (4.3)$$

Com esta notação, definimos o produto interno em $H_*^2(\Omega)$ como

$$(U, V)_2 = \int_{\Omega} (\Delta U \Delta V - (1 - \sigma)[U, V]), \quad U, V \in H_*^2(\Omega).$$

Esta escolha de produto interno incorpora a condição de contorno correspondente à parte da fronteira que está livre, enquanto a condição correspondente à borda fixada é atendida pela construção do espaço $H_*^2(\Omega)$. Ele é equivalente ao produto interno usual graças à condição (4.2); veja [25, Lemma 4.1].

Por fim, denotaremos por \mathcal{H} o espaço dual de $H_*^2(\Omega)$ com a topologia usual e por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade em $\mathcal{H} \times H_*^2(\Omega)$.

Podemos agora introduzir a noção de solução considerada.

Definição 4.1. Sejam $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$, $F \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$ para $T > 0$. Uma solução fraca de (4.1) é uma função

$$U \in \mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0, T], \mathcal{H}),$$

tal que $U(0) = U_0$, $U'(0) = V_0$ e

$$\langle U'', V \rangle + \delta(U', V)_0 + (U, V)_2 + \phi(U)(U_x, V_x)_0 = (F, V)_0, \quad (4.4)$$

para todo $t \in [0, T]$ e toda $V \in H_*^2(\Omega)$.

Nosso primeiro resultado garante que o problema (4.1) tem uma única solução fraca.

Teorema 4.2. *Sejam $\delta \in \mathbb{R}$, $S > 0$, $P \geq 0$ e $T > 0$. Se $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$ e $F \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$, então existe uma única solução fraca de (4.1). Além disso, ela satisfaz, para todo $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U'\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U\|_2^2 - \frac{P}{2}\|U_x\|_0^2 + \frac{S}{4}\|U_x\|_0^4 + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ &= \int_0^t (F, U')_0 + \frac{1}{2}\|V_0\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_0\|_2^2 - \frac{P}{2}\|(U_0)_x\|_0^2 + \frac{S}{4}\|(U_0)_x\|_0^4. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Observação 4.3. O Teorema 4.2 também pode ser provado para P negativo sem mudanças nos argumentos. Esta situação corresponde, em elasticidade geral, a uma placa que foi esticada ao invés de comprimida.

A equação (4.5) mostra como varia a energia mecânica do problema (4.1). Relembrando as definições do Capítulo 2, temos a energia cinética \mathbb{K} , definida em (2.15),

$$\mathbb{K}(V) = \frac{1}{2}\|V\|_0^2,$$

para uma distribuição de velocidade $V \in L^2(\Omega)$, e a energia potencial elástica acumulada pela deformação U neste caso tem a forma

$$\mathbb{P}(U) = \frac{1}{2}\|U\|_2^2 - \frac{P}{2}\|U_x\|_0^2 + \frac{S}{4}\|U_x\|_0^4, \quad U \in H_*^2(\Omega).$$

Escrevemos a energia mecânica como

$$\mathbb{E}(U, V) = \mathbb{K}(V) + \mathbb{P}(U),$$

de modo análogo a (2.14). Com esta notação, (4.5) é traduzida como

$$\mathbb{E}(U(t), U'(t)) + \delta \int_0^t \mathbb{K}(U') = \int_0^t (F, U')_0 + \mathbb{E}(U_0, V_0), \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.6)$$

isto é, a força externa F e o amortecimento δ são os únicos fatores que podem variar a energia do sistema. Em particular, no caso sem amortecimento e sem carga, isto é, com $\delta = 0$ e $F \equiv 0$, a energia mecânica é conservada - ela não depende do tempo.

Em seguida, analisamos o comportamento assintótico da solução, quando $t \rightarrow +\infty$, sob a influência de amortecimento positivo, para cargas F estáticas. Neste caso, podemos escrever (4.6) como

$$\mathbb{E}_F(U(t), U'(t)) + \delta \int_0^t \mathbb{K}(U') = \mathbb{E}_F(U_0, V_0), \quad (4.7)$$

onde

$$\mathbb{P}_F(U) = \mathbb{P}(U) - (F, U)_0, \quad \mathbb{E}_F(U, V) = \mathbb{K}(V) + \mathbb{P}_F(U),$$

donde segue que a energia $\mathbb{E}_F(U, U')$ da solução é dissipada com o tempo.

Como veremos, o comportamento da solução é influenciado pelas propriedades do problema de equilíbrio associado a (4.1), ou seja,

$$\begin{cases} \Delta^2 U - \phi(U)U_{xx} = F & \text{em } \Omega, \\ U = U_{xx} = 0 & \text{em } \{0, \pi\} \times [-l, l], \\ U_{yy} + \sigma U_{xx} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \\ U_{yyy} + (2 - \sigma)U_{xxy} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \end{cases} \quad (4.8)$$

bem como pelo problema de autovalor

$$\begin{cases} \Delta^2 w + \Lambda w_{xx} = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = w_{xx} = 0 & \text{em } \{0, \pi\} \times [-l, l], \\ w_{yy} + \sigma w_{xx} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \\ w_{yyy} + (2 - \sigma)w_{xxy} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Denotamos por Λ_1 o menor autovalor deste problema linear e w_1 a autofunção (positiva) associada, normalizada em $L^2(\Omega)$; veja [25].

Quando a protensão P não é maior que Λ_1 , o problema (4.8) tem uma única solução; veja [25]. Neste caso, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Sejam $\delta > 0$, $S > 0$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$ e $F \in L^2(\Omega)$. Se $0 < P < \Lambda_1$, e U é a solução de (4.1), então $U(t) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$ e $U'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $\bar{U} \in H_*^2(\Omega)$ é a única solução de (4.8).*

Vamos considerar agora o caso em que P é maior que Λ_1 , sob a hipótese adicional $F \equiv 0$. Nesta situação, segue de (4.6) que a solução busca níveis de energia mais baixos. O Teorema 4.5 mostra que a solução se comporta de maneira diferente quando P cruza Λ_1 , a saber para $\Lambda_1 < P < \Lambda_2$, onde Λ_2 é o segundo autovalor de (4.9). Quando o parâmetro P está neste intervalo, (4.1) ganha mais duas soluções de equilíbrio, as duas soluções estacionárias não triviais de (4.1) determinadas pela primeira autofunção do problema (4.9). Mais precisamente, $U = 0$ e $U = \pm \lambda_+ w_1$ são todas as soluções estacionárias de (4.1); veja [25, Theorem 5], aqui $\lambda_+ = \sqrt{\frac{P - \Lambda_1}{S}}$.

Teorema 4.5. *Sejam $\delta > 0$, $S > 0$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$, $\Lambda_1 < P < \Lambda_2$ e U a solução de (4.1) com $F \equiv 0$. Se*

$$\mathbb{E}(U_0, V_0) < 0,$$

então $U(t) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$ e $U'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$, onde

$$\bar{U} = \lambda_+ w_1 \quad \text{se } (U_0, w_1)_2 > 0,$$

e

$$\bar{U} = -\lambda_+ w_1 \quad \text{se } (U_0, w_1)_2 < 0.$$

Observação 4.6. O conjunto aberto $\mathcal{N} := \{U_0 \in H_*^2(\Omega); \mathbb{E}(U_0, 0) < 0\}$, como subconjunto de $H_*^2(\Omega)$, consiste de duas componentes conexas por caminhos. Uma contém $\lambda_+ w_1$, enquanto a outra contém $-\lambda_+ w_1$. Além disso, $\mathcal{N} \cap \{w_1\}^\perp = \emptyset$ e a origem é o único ponto na intersecção do bordo destas componentes.

O resultado seguinte descreve a invariância da solução, de acordo com os dados iniciais, com respeito à decomposição de $H_*^2(\Omega)$ induzida pelas autofunções de (4.9).

Teorema 4.7. *Seja w uma autofunção de (4.9). Se $F \in [w]^\perp \subset L^2(\Omega)$, $U_0 \in [w]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in [w]^\perp \subset L^2(\Omega)$ e U é a solução fraca de (4.1), então $U(t) \in [w]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$ para todo t positivo.*

O teorema acima diz que se os dados iniciais e a força F tem coordenadas nulas em algumas entradas de sua série de Fourier, então a solução também terá a coordenada correspondente nula. Como primeira consequência, temos um resultado de convergência para os dados iniciais em $[w_1]^\perp$, com energia positiva, com os demais parâmetros nas mesmas condições do Teorema 4.5.

Corolário 4.8. *Sejam $\delta > 0$, $S > 0$, $U_0 \in [w_1]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in [w_1]^\perp \subset L^2(\Omega)$, $\Lambda_1 < P < \Lambda_2$ e U uma solução de (4.1) com $F \equiv 0$. Então $U(t) \in [w_1]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$ para todo $t \geq 0$, $U(t) \rightarrow 0$ em $H_*^2(\Omega)$ e $U'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$.*

O Teorema 4.7 é a base para decompor o problema (4.1) e caracterizar os modos simples, como veremos a seguir.

4.2 Estabilidade dos modos simples

De acordo com [25, Theorem 7.6], o problema de autovalores (4.9) possui um sistema ortogonal completo de autofunções da forma

$$w_{m,i}(x, y) = \text{sen}(mx)\phi_{m,i}(y), \quad m, i \in \mathbb{N},$$

denotamos o autovalor correspondente por $\Lambda_{m,i}$. O primeiro autovalor $\Lambda_{1,1}$ será denotado simplesmente Λ_1 . A função $\phi_{m,i}$ é necessariamente par ou ímpar. No primeiro caso dizemos que a autofunção $w_{m,i}$ é longitudinal, enquanto no segundo caso ela é denominada torcional. Observe que a autofunção $w_{m,i}$ tem m conjuntos nodais na direção x . O índice i indica que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(w_{m,i})_i$ de autofunções de (4.9), i não está relacionado ao número de conjuntos nodais na direção y .

Considere dados iniciais U_0, V_0 com apenas um componente não trivial nas suas expansões de Fourier, isto é,

$$U_0 = u_{0,m,i} w_{m,i}, \quad V_0 = v_{0,m,i} w_{m,i},$$

para certos m e i naturais. Do Teorema 4.7, a solução U tem a mesma propriedade e pode ser escrita como

$$U(x, y, t) = \varphi(t)w_{m,i}(x, y), \quad (4.10)$$

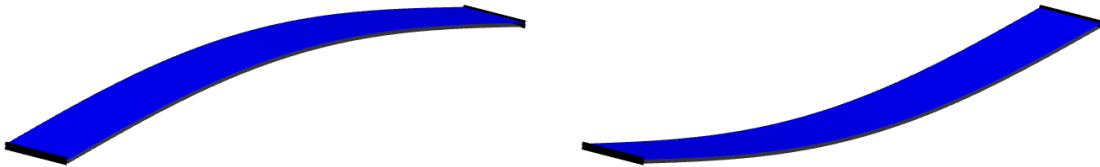
para alguma $\varphi \in C^2([0, \infty), \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\varphi'' + m^2(\lambda_{m,i} - P)\varphi + Sm^4\varphi^3 = 0, \quad (4.11)$$

$\varphi(0) = u_{0,m,i}$ e $\varphi'(0) = v_{0,m,i}$. Chamamos (4.10) um *modo* (m, i) -simples de oscilação de (4.1) e a função φ é chamada de *coordenada* do modo (m, i) -simples.

A Figura (12) ilustra um modo $(1, 1)$ -simples de oscilação.

Figura 12 – Primeiro modo de oscilação torcional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, se os dados iniciais U_0, V_0 tem duas componentes não triviais em suas expansões de Fourier, então temos o seguinte resultado.

Proposição 4.9. *Assuma que*

$$U_0 = u_{0,m,i}w_{m,i} + u_{0,n,k}w_{n,k}, \quad V_0 = v_{0,m,i}w_{m,i} + v_{0,n,k}w_{n,k},$$

para certos $m, n, i, k \in \mathbb{N}$ com $(m, i) \neq (n, k)$ e $u_{0,m,i}, u_{0,n,k}, v_{0,m,i}, v_{0,n,k} \in \mathbb{R}$. Então a solução U de (4.1) pode ser escrita como

$$U(x, y, t) = \varphi(t)w_{m,i}(x, y) + \psi(t)w_{n,k}(x, y), \quad (4.12)$$

onde φ e ψ são de classe $C^2([0, \infty), \mathbb{R})$ e satisfazem o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} \varphi''(t) + m^2(\Lambda_{m,i} - P)\varphi(t) + Sm^2[m^2\varphi(t)^2 + n^2\psi(t)^2]\varphi(t) = 0, \\ \psi''(t) + n^2(\Lambda_{n,k} - P)\psi(t) + Sn^2[m^2\varphi(t)^2 + n^2\psi(t)^2]\psi(t) = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

com dados iniciais

$$\varphi(0) = u_{0,m,i}, \quad \psi(0) = u_{0,n,k}, \quad \varphi'(0) = v_{0,m,i}, \quad \psi'(0) = v_{0,n,k}.$$

Para provar a Proposição 4.9 basta substituir (4.12) em (4.1), multiplicar a equação que assim obtida por $w_{m,i}$ e $w_{n,k}$ e integrar sobre Ω . A questão que estudaremos é se a seguinte implicação se verifica:

$$|u_{0,n,k}| + |v_{0,n,k}| \ll |u_{0,m,i}| + |v_{0,m,i}| \implies \|\psi\|_\infty \ll \|\varphi\|_\infty.$$

Se isso acontecer, diremos que φ é estável em relação a ψ , caso contrário, diremos que ela é instável. Assim, estudaremos a estabilidade do sistema (4.13). Mais precisamente, o sistema (4.13) é isolado, a sua energia $\mathbb{E} = \mathbb{E}(u_{0,m,i}, u_{0,n,k}, v_{0,m,i}, v_{0,n,k})$ é constante e é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{\varphi'^2}{2} + \frac{\psi'^2}{2} + m^2(\Lambda_{m,i} - P)\frac{\varphi^2}{2} + n^2(\Lambda_{n,k} - P)\frac{\psi^2}{2} + S\frac{(m^2\varphi^2 + n^2\psi^2)^2}{4} \\ &= \frac{v_{0,m,i}^2}{2} + \frac{v_{0,n,k}^2}{2} + m^2(\Lambda_{m,i} - P)\frac{u_{0,m,i}^2}{2} + n^2(\Lambda_{n,k} - P)\frac{u_{0,n,k}^2}{2} + S\frac{(m^2u_{0,m,i}^2 + n^2u_{0,n,k}^2)^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esta energia é constituída por três termos: a energia total \mathbb{E}_φ de φ , a energia total \mathbb{E}_ψ de ψ , e a energia de acoplamento $\mathbb{E}_{\varphi\psi}$. Embora sua soma seja constante, estas três energias dependem do tempo e elas são explicitamente dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varphi(t) &= \frac{1}{2}\varphi'^2 + \frac{m^2(\Lambda_{m,i} - P)}{2}\varphi^2 + S\frac{m^4}{4}\varphi^4, \\ \mathbb{E}_\psi(t) &= \frac{1}{2}\psi'^2 + \frac{n^2(\Lambda_{n,k} - P)}{2}\psi^2 + S\frac{n^4}{4}\psi^4, \\ \mathbb{E}_{\varphi\psi}(t) &= \frac{m^2n^2}{2}S\varphi^2\psi^2. \end{aligned}$$

Definição 4.10. Um modo (m, i) -simples $\varphi(t)w_{m,i}(x, y)$ é dito (n, k) -linearmente estável se $\xi \equiv 0$ é uma solução estável da equação linear

$$\xi'' + a(t)\xi = 0, \quad a(t) = n^2(\Lambda_{n,k} - P) + Sm^2n^2\varphi(t)^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

A equação (4.15) é chamada equação de Hill [45, p.11]. Como trata-se de uma equação linear, a estabilidade no sentido definido acima é equivalente a afirmar que todas as soluções de (4.15) são limitadas. No entanto, (4.13) é não linear, assim a estabilidade de $\varphi w_{m,i}$ depende das condições iniciais e, por conseguinte, da energia correspondente (4.14). A instabilidade linear de $\varphi w_{m,i}$ ocorre quando a solução trivial de (4.15) é instável. Neste caso, ainda que a energia inicial esteja quase toda concentrada no termo $\mathbb{E}_\varphi(0)$, com o passar do tempo a componente φ transmite parte de sua energia para ψ .

Dado j inteiro e não negativo, defina os intervalos

$$I_j = (j(2j+1), (j+1)(2j+1)), \quad K_j = ((j+1)(2j+1), (j+1)(2j+3)).$$

Note que as sequências I_j e K_j cobrem o intervalo $[0, \infty)$, exceto pelos extremos dos intervalos.

Teorema 4.11. *Sejam $F \equiv 0$, $\delta = 0$, $S > 0$, $P < \Lambda_1$, $m, n, i, k \in \mathbb{N}$ e defina $\gamma = \frac{n^2}{m^2}$.*

1. *Se $\gamma \in I_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então qualquer modo (m, i) -simples com energia suficientemente grande E_0 é (n, k) -linearmente estável.*
2. *Se $\gamma \in K_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então qualquer modo (m, i) -simples com energia suficientemente grande E_0 é (n, k) -linearmente instável.*

Como consequência, qualquer modo (m, i) -simples com energia suficientemente grande é (n, k) -linearmente instável para algum $n, k \in \mathbb{N}$. Com efeito, dados $m, i \in \mathbb{N}$ podemos escolher $n = 3m$, de modo que $\gamma \in K_1$.

4.3 Prova dos resultados de existência e unicidade

Aqui provamos o Teorema 4.2. Para o resultado de existência usamos o método de Galerkin, a prova é dividida em várias etapas. Alguns argumentos são necessários a fim de controlar as interações entre os problemas de autovalores (4.9) e (4.16). Para a unicidade, argumentamos como em [22, Section 7.2], no entanto, incluímos a prova para manter o texto autocontido.

Prova do Teorema 4.2.

PARTE I – EXISTÊNCIA

Sejam $S > 0$ e $P \geq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$ e $F \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$ e fixe $T > 0$.

PASSO 1: Construindo soluções aproximadas.

Consideramos uma decomposição de $H_*^2(\Omega)$ induzida pelo problema de autovalor (4.9). Em primeiro lugar, precisamos de mais informações sobre as autofunções.

Considere o segundo problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 w = \lambda w & \text{em } \Omega, \\ w = w_{xx} = 0 & \text{em } \{0, \pi\} \times [-l, l], \\ w_{yy} + \sigma w_{xx} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \\ w_{yyy} + (2 - \sigma)w_{xxy} = 0 & \text{em } [0, \pi] \times \{-l, l\}, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

que pode ser reescrito como

$$(w, z)_2 = \lambda (w, z)_0, \quad \forall z \in H_*^2(\Omega). \quad (4.17)$$

É simples mostrar que cada autofunção $w_{m,i}$ de (4.9) é também uma autofunção de (4.16) associada ao autovalor

$$\lambda_{m,i} = m^2 \Lambda_{m,i}. \quad (4.18)$$

Portanto, $(w_{m,i})$ é um sistema ortogonal completo de autofunções associado ao problema de autovalor (4.16).

A fim de simplificar a notação, nesta seção vamos deixar a dupla indexação. Os autovalores $(\lambda_{m,i})$ serão reorganizados em uma sequência não decrescente (λ_k) , em que cada

termo é repetido de acordo com a sua multiplicidade, e as respectivas autofunções, denotadas simplesmente (w_k) , formam uma base ortogonal em $H_*^2(\Omega)$ e de $L^2(\Omega)$. Como mencionado antes, normalizamos as autofunções de modo que $\|w_k\|_0 = 1$. Observa-se então que $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}w_k\right)$ é uma base ortonormal em $H_*^2(\Omega)$.

Defina os espaços $E_k = [w_1, \dots, w_k]$ e as projeções $Q_k : H_*^2(\Omega) \rightarrow E_k$,

$$\begin{aligned} Q_k U &= \sum_{i=1}^k (w_i, U)_0 w_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{-1} (w_i, U)_2 w_i \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (w_i, U)_2 \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad U \in H_*^2(\Omega). \end{aligned}$$

Também denotamos por Q_k a projeção correspondente definida sobre $L^2(\Omega)$. Assim observe que

$$\begin{aligned} Q_k U &\rightarrow U \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad \forall U \in H_*^2(\Omega), \\ Q_k U &\rightarrow U \text{ em } L^2(\Omega), \quad \forall U \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Para cada $k \geq 1$ olhamos para a formulação fraca (4.4) restrita às funções V em E_k , ou seja, procuramos $U_k \in \mathcal{C}^2([0, T], E_k)$ que satisfaça

$$\begin{cases} (U_k'', V)_0 + \delta (U_k', V)_0 + (U_k, V)_2 \\ \quad + \phi(U_k)((U_k)_x, V_x)_0 = (F, V)_0, \quad \forall V \in E_k, \\ U_k(0) = Q_k U_0, \quad U_k'(0) = Q_k V_0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Podemos escrever as coordenadas de U_k na base (w_i) , dadas por $u_i^k = (w_i, U_k)_0$, como funções e derivar de (4.19) o sistema de equações ordinárias, para $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{cases} u_i^{k''}(t) + \delta u_i^{k'}(t) + \lambda_i u_i^k(t) + \Phi_i^k(g_1^k, \dots, g_k^k) = (f(t), w_i)_0, \\ u_i^k(0) = (w_i, U_0)_0, \quad u_i^{k'}(0) = (w_i, V_0)_0, \end{cases} \quad (4.20)$$

onde o termo de acoplamento Φ_i^k é definido por

$$y^k = (y_1^k, \dots, y_k^k), \quad \Phi_i^k(y^k) = \Phi^k(y^k) \frac{\lambda_i}{\Lambda_i} y_i^k, \quad \Phi^k(y^k) = -P + S \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\Lambda_j} y_j^2.$$

Uma vez que Φ_i^k é suave em \mathbb{R}^k , da teoria clássica de EDOs, sabemos que (4.20) tem uma única solução, que pode ser estendida para seu intervalo maximal de existência $[0, T_k)$. Portanto (4.19) tem uma única solução U_k , dada por

$$u_k = \sum_{i=0}^k u_i^k w_i.$$

PASSO 2: Estimativas uniformes para (U_k) .

A solução U_k , como no parágrafo anterior, é $\mathcal{C}^2([0, T_k], E_k)$. Portanto, podemos tomar, para cada $t \in [0, T_k]$, a função $U'_k(t) \in E_k$ como função teste em (4.19) obtendo

$$(U''_k, U'_k)_0 + \delta(U'_k, U'_k)_0 + (U_k, U'_k)_2 + \phi(U_k) \left((U_k)_x, (U'_k)_x \right)_0 = (F, U'_k)_0. \quad (4.21)$$

Integrando (4.21) sobre $[0, t]$ vemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\|U'_k(t)\|_0^2}{2} + \frac{\|U_k(t)\|_2^2}{2} - \frac{P\|(U_k)_x(t)\|_0^2}{2} + \frac{S\|(U_k)_x(t)\|_0^4}{4} \\ & + \delta \int_0^t \|U'_k\|_0^2 = \int_0^t (F, U'_k)_0 + \frac{\|U'_k(0)\|_0^2}{2} + \frac{\|U_k(0)\|_2^2}{2} \\ & - \frac{P\|(U_k)_x(0)\|_0^2}{2} + \frac{S\|(U_k)_x(0)\|_0^4}{4}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De (4.22) e desigualdade de Hölder, inferimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|U'_k(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k(t)\|_2^2 - \frac{P}{2}\|(U_k)_x(t)\|_0^2 + \frac{S}{4}\|(U_k)_x(t)\|_0^4 \\ & \leq \frac{1}{2}\|U'_k(0)\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k(0)\|_2^2 - \frac{P}{2}\|(U_k)_x(0)\|_0^2 + \frac{S}{4}\|(U_k)_x(0)\|_0^4 \\ & \quad + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} + |\delta|\right) \int_0^t \|U'_k\|_0^2 \\ & \leq \frac{1}{2}\|Q_k U_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|Q_k V_0\|_0^2 + \frac{C}{4}\|Q_k U_0\|_2^4 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|_0^2 \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} + |\delta|\right) \int_0^t \|U'_k\|_0^2 \\ & \leq \frac{1}{2}\|U_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|V_0\|_0^2 + \frac{C}{4}\|U_0\|_2^4 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|_0^2 \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} + |\delta|\right) \int_0^t \|U'_k\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde a segunda desigualdade é consequência da imersão contínua $H_*^2(\Omega) \hookrightarrow H_*^1(\Omega)$. Então, usando que o máximo de $\tau \mapsto \frac{P}{2}\tau^2 - \frac{S}{4}\tau^4$ é $\frac{P^2}{4S}$ em conjunto com (4.23), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U'_k(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k(t)\|_2^2 & \leq \frac{P^2}{4S} + \frac{1}{2}\|U_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|V_0\|_0^2 + \frac{C}{4}\|U_0\|_2^4 \\ & \quad + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|_0^2 + \left(\frac{1}{2} + |\delta|\right) \int_0^t \|U'_k\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora, pela desigualdade de Gronwall, segue de (4.24) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U'_k(t)\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k(t)\|_2^2 & \leq \exp((1 + 2|\delta|)T) \left(\frac{P^2}{4S} + \frac{1}{2}\|U_0\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\|V_0\|_0^2 + \frac{C}{4}\|U_0\|_2^4 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como o lado direito é uniformemente limitado em relação a k e $t \in [0, T_k]$, concluímos que as soluções (U_k) e suas derivadas (U'_k) são limitadas com respeito a t , e portanto as soluções locais U_k estão de fato definidas em $[0, T]$.

Também inferimos de (4.25) que (U_k) é limitada em $\mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega))$. Além disso, resulta de (4.25) através da imersão compacta $H_*^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ que (U_k) é uma sequência equicontínua de funções de $[0, T]$ para $L^2(\Omega)$ e que $(U_k(t))$ é pré-compacto em $L^2(\Omega)$ para cada $t \in [0, T]$. Assim, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, existe uma subsequência convergente $U_k \rightarrow U$ em $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$.

PASSO 3. Em $\mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega))$ a sequência (U_k) é de Cauchy.

Defina para inteiros $n > m > 0$,

$$U_{m,n} = U_n - U_m, \quad Q_{m,n} = Q_n - Q_m.$$

Testando (4.19) usando $V = (Q_m U_n - U_m)'$ para m e $V = U_{m,n}'$ para n , e então subtraindo estas equações, obtemos

$$\begin{aligned} (U_{m,n}'', U_{m,n}')_0 + \delta (U_{m,n}', U_{m,n}')_0 + (U_{m,n}, U_{m,n}')_2 - P((U_{m,n})_x, (U_{m,n}')_x)_0 \\ + S \|(U_n)_x\|_0^2 ((U_n)_x, (U_{m,n}')_x)_0 - S \|(U_m)_x\|_0^2 ((U_m)_x, (U_{m,n}')_x)_0 \\ = (Q_{m,n} f, U_n')_0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Então integramos (4.26) sobre $[0, t]$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U_{m,n}'\|_0^2 + \frac{1}{2} \|U_{m,n}\|_2^2 + \delta \int_0^t \|U_{m,n}'\|_0^2 = \frac{P}{2} \|(U_{m,n})_x\|_0^2 \\ + \mathbb{E}(Q_{m,n} U_0, Q_{m,n} V_0) - \frac{S}{4} \|(U_{m,n})_x\|_0^4 - \frac{S}{2} \int_0^t \|(U_n)_x\|_0^2 (\|(U_{m,n})_x\|_0^2)' \\ - S \int_0^t ((U_{m,n})_x, (U_n + U_m)_x)_0 ((U_m)_x, (U_{m,n}')_x)_0 + \int_0^t (Q_{m,n} f, U_n')_0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De (4.25), sabemos que (U_n') é limitada em $C([0, T], L^2(\Omega))$ e, uma vez que $F \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$ concluímos que

$$\left| \int_0^t (Q_{m,n} f, U_n')_0 \right| \leq C \int_0^T \|Q_{m,n} f\|_0 = o(1), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.28)$$

Logo

$$\mathbb{E}(Q_{m,n} U_0, Q_{m,n} V_0) = o(1) \quad \text{uniformemente para } t \in [0, T]. \quad (4.29)$$

Agora vamos recordar a seguinte desigualdade de interpolação: existe uma constante positiva C tal que

$$\|U_x\|_0^2 \leq C \|U\|_0 \|U\|_2, \quad \forall U \in H_*^2(\Omega). \quad (4.30)$$

Então, pela desigualdade (4.30) e usando o Passo 2,

$$\|(U_{m,n})_x\|_0^2 = o(1), \quad \|(U_{m,n})_x\|_0^4 = o(1) \quad \text{uniformemente para } t \in [0, T]. \quad (4.31)$$

Mais uma vez, combinando (4.30) e o Passo 2 obtemos

$$\begin{aligned} |((U_{m,n})_x, (U_n + U_m)_x)_0| &\leq \| (U_{m,n})_x \|_0 \| (U_n + U_m)_x \|_0 \\ &\leq C \| U_{m,n} \|_0 \| U_{m,n} \|_2 \| U_n + U_m \|_0 \| U_n + U_m \|_2 = o(1), \end{aligned} \quad (4.32)$$

uniformemente para $t \in [0, T]$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^t |((U_m)_x, (U_{m,n})'_x)_0| &\leq \int_0^T \left| \int_{-l}^l \int_0^\pi (U_m)_x (U'_{m,n})_x \right| \\ &= \int_0^T \left| \int_{-l}^l \int_0^\pi (U_m)_{xx} U'_{m,n} \right| \leq \int_0^T \| U_m \|_2 \| U'_m - u'_n \|_0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

e este termo é uniformemente limitado em m, n por (4.25). Daí, unindo (4.32) e (4.33) concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^t ((U_{m,n})_x, (U_n + U_m)_x)_0 ((U_m)_x, (U_{m,n})'_x)_0 &= o(1) \\ &\text{uniformemente para } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Agora observe que a interpolação (4.30) e o Passo 2 garantem que $(\| (U_n)_x \|_0)$ é uniformemente limitada com relação a $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$. Por isso, de (4.25), (4.30), (4.31) temos a estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \| (U_n)_x \|_0^2 (\| (U_{m,n})_x \|_0^2)' \right| &= 2 \left| \int_0^t \| (U_n)_x \|_0^2 ((U_{m,n})_x, (U_{m,n})'_x)_0 \right| \\ &= 2 \left| \int_0^t \| (U_n)_x \|_0^2 ((U_{m,n})_{xx}, (U_{m,n})')_0 \right| \leq C \int_0^t \| (U_{m,n})_{xx} \|_0 \| U'_{m,n} \|_0 \\ &\leq C \int_0^t \| U_{m,n} \|_2^2 + \| U'_{m,n} \|_0^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Então, de (4.27), (4.28), (4.29), (4.31), (4.34) e (4.35), concluímos que

$$\begin{aligned} \| U'_{m,n} \|_0^2 + \| U_{m,n} \|_2^2 &\leq C \left(\int_0^t \| U'_{m,n} \|_0^2 + \| U_{m,n} \|_2^2 \right) + o(1) \\ &\text{uniformemente para } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Assim, de (4.36) e da desigualdade de Gronwall, inferimos que (U_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega))$ e em $\mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega))$. Além disso, no *Passo 2*, provamos que, a menos de uma subsequência, $U_k \rightarrow U$ em $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$. Portanto, a menos de uma subsequência, $U \in \mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega))$ e $U \in \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega))$

$$U_k \rightarrow U \text{ em } \mathcal{C}^0([0, T], H_*^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega)) \text{ quando } k \rightarrow \infty, \quad (4.37)$$

e, de (4.22), obtemos a identidade de energia (4.5) para U_k .

PASSO 4. O limite U é uma solução de (4.1) no intervalo $[0, T]$.

Agora tome $V \in H_*^2(\Omega)$ e considere a sequência de projeções $(Q_k V)$. Tomando $Q_k V$ como função de teste em (4.19) obtemos

$$(U_k'', Q_k V)_0 + \delta(U_k', Q_k V)_0 + (U_k, Q_k V)_2 + \phi(U_k)((U_k)_x, Q_k V_x)_0 - (F, Q_k V)_0 = 0. \quad (4.38)$$

Multiplicando essa identidade por $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T))$ e integrando sobre $[0, T]$ obtemos

$$\int_0^T \varphi \left((U_k'', Q_k V)_0 + \delta(U_k', Q_k V)_0 + (U_k, Q_k V)_2 + \phi(U_k)((U_k)_x, Q_k V_x)_0 - (F, Q_k V)_0 \right) = 0. \quad (4.39)$$

Integrando por partes os primeiros termos nos dá

$$\int_0^T \varphi(U_k'', Q_k V)_0 = - \int_0^T \varphi'(U_k', Q_k V)_0. \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39), obtemos

$$\int_0^T \varphi'(U_k', Q_k V)_0 = \int_0^T \varphi \left(\delta(U_k', Q_k V)_0 + (U_k, Q_k V)_2 + \phi(U_k)((U_k)_x, Q_k V_x)_0 - (F, Q_k V)_0 \right). \quad (4.41)$$

Agora podemos tomar limite em (4.41) quando $k \rightarrow \infty$,

$$\int_0^T \varphi'(U', V)_0 = \int_0^T \varphi \left((U, V)_2 + \delta(U', V)_0 + \phi(U)(U_x, V_x)_0 - (F, V)_0 \right). \quad (4.42)$$

Vemos, então, a partir de (4.42) que $U'' \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{H})$ e U resolve a equação $U'' = -LU - \delta U' - \phi(U)U_{xx} + f$, onde $L : H_*^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}$ representa o isomorfismo isométrico canônico de Riesz $\langle Lw, z \rangle := (w, z)_2$ para quaisquer $w, z \in H_*^2(\Omega)$. Portanto U é de fato uma solução de (4.4).

PARTE II – UNICIDADE.

PASSO 5. Unicidade do problema linear ($S = 0$).

Considere o problema linear obtido tomando $S = 0$ em (4.1). Neste caso, para provar a unicidade da solução precisamos apenas considerar o caso $U_0 = 0, V_0 = 0, F = 0$ e provar que a solução trivial é a única solução de

$$\begin{cases} \langle U'', V \rangle + \delta(U', V)_0 + (U, V)_2 - P(U_x, v_x)_0 = 0, & \forall V \in H_*^2(\Omega), \\ U(0) = 0, \quad U'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Dado $0 \leq s \leq T$, defina $V_s(t) = \int_t^s U(\tau) d\tau$ para $0 \leq t \leq s$ e $V_s(t) = 0$ caso contrário. Então $V_s(t) \in H_*^2(\Omega)$ para t positivo e podemos tomá-la como função teste em (4.43). Integrando sobre $[0, T]$ obtemos

$$\int_0^s \langle U''(t), V_s(t) \rangle + \delta(U'(t), V_s(t))_0 + (U(t), V_s(t))_2 - P((U(t))_x, (V_s(t))_x)_0 dt = 0. \quad (4.44)$$

Agora integrando por partes o primeiro termo na integral acima, tendo em conta que $U(0) = U'(0) = V_s(s) = 0$ e $V_s' = -U$ em $[0, s]$, reescrevemos

$$\int_0^s \langle U'', V_s \rangle = \langle U', V_s \rangle_0^s - \int_0^s \langle U', V_s' \rangle = \int_0^s (U, U')_0 = \frac{1}{2} \|U(s)\|_0^2.$$

Para o segundo termo,

$$\delta \int_0^s (U', V_s)_0 = \delta(U, V_s)|_0^s - \delta \int_0^s (U, V_s')_0 = \delta \int_0^s (U, U)_0 = \delta \int_0^s \|U\|_0^2.$$

O último termo, por sua vez, se torna

$$\int_0^s (U, V_s)_2 - P(U_x, (V_s)_x)_0 = \int_0^s -(V_s, V_s')_2 + P((V_s)_x, (V_s')_x)_0 = \|V_s(0)\|_2^2 - P\|(V_s(0))_x\|_0^2.$$

De (4.44) obtemos

$$\|U(s)\|_0^2 + \|V_s(0)\|_2^2 - P\|(V_s(0))_x\|_0^2 = -2\delta \int_0^s \|U\|_0^2 \leq 0. \quad (4.45)$$

Seja $w(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau = V_t(0)$, podemos estimar a norma $H_*^1(\Omega)$ de $w(s)$ usando interpolação [1]. De fato, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|(w(s))_x\|_0^2 &\leq \|w(s)\|_1^2 \leq C\|w(s)\|_0\|w(s)\|_2 \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{2} \|w(s)\|_2^2 + \frac{C}{2\varepsilon} \|w(s)\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Agora usando (4.46) em (4.45) e escolhendo ε suficientemente pequeno, podemos escrever

$$\|U(s)\|_0^2 + (1 - C'\varepsilon)\|w(s)\|_2^2 \leq \frac{C'}{\varepsilon} \|w(s)\|_0^2 \leq C'' \int_0^s \|U\|_0^2.$$

Por fim, a desigualdade de Gronwall implica $U \equiv 0$.

PASSO 6. A identidade de energia (4.5).

Considere primeiro $S = 0$. Então, de (4.4) e da unicidade no passo anterior, obtém-se que U é o limite da sequência (U_k) construída no Passo 1. Podemos, então, tomar limite em (4.22) para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\|U'(t)\|_0^2}{2} + \frac{\|U(t)\|_2^2}{2} - \frac{P\|(U(t))_x\|_0^2}{2} + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ = \int_0^t (f, U)_0 + \frac{\|U'(0)\|_0^2}{2} + \frac{\|U(0)\|_2^2}{2} - \frac{P\|(U(0))_x\|_0^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Assim fica estabelecida a identidade de energia (4.5) neste caso.

Agora considere $S > 0$ e seja U uma solução fraca de (4.1). Assim para cada $V \in H_*^2(\Omega)$, podemos integrar por partes

$$\begin{aligned} (U_x, V_x)_0 &= \int_{-l}^l \int_0^\pi U_x V_x dx dy \\ &= \int_{-l}^l \left(- \int_0^\pi U_{xx} V dx + [U_x V]_0^\pi \right) dy = -(U_{xx}, V)_0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Usando (4.48) vemos que U satisfaz

$$\begin{aligned} \langle U'', V \rangle + \delta (U', V)_0 + (U, V)_2 - P(U_x, v_x)_0 &= (G, V)_0, \\ \forall V \in H_*^2(\Omega), \quad \forall t \in (0, T), \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$G = F + S \|U_x\|_0^2 U_{xx} \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega)).$$

Então concluímos usando (4.47) que

$$\begin{aligned} \frac{\|U'(t)\|_0^2}{2} + \frac{\|U(t)\|_2^2}{2} - \frac{P\|U(t)\|_1^2}{2} + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ = \int_0^t (F, U')_0 + \int_0^t (S\|U_x\|_0^2 U_{xx}, U')_0 + \frac{\|U'(0)\|_0^2}{2} + \frac{\|U(0)\|_2^2}{2} - \frac{P\|U(0)\|_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Para estabelecer (4.5) resta verificar que

$$\int_0^t (S\|U_x\|_0^2 U_{xx}, U')_0 = -\frac{S}{4} \|U_x(t)\|_0^4 + \frac{S}{4} \|(U_0)_x\|_0^4. \quad (4.50)$$

Para este fim, considere a sequência $(Q_k U)$. Lembre-se que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $Q_k U \in \mathcal{C}^2([0, T], E_k)$ e que $Q_k U(t) \rightarrow U(t)$ em $H_*^2(\Omega)$ para cada $t \in [0, T]$. Usando (4.48) na integral à esquerda de (4.50), inferimos que

$$\int_0^t (S\|(Q_k U)_x\|_0^2 (Q_k U)_{xx}, (Q_k U)')_0 = -\frac{S}{4} \left(\|(Q_k U)_x(t)\|_0^4 + -\|(Q_k U(0))_x\|_0^4 \right). \quad (4.51)$$

Observe que a imersão $H_*^2(\Omega) \rightarrow H_*^1(\Omega)$ assegura que

$$-\frac{S}{4} \|(Q_k U)_x(t)\|_0^4 + \frac{S}{4} \|(Q_k U(0))_x\|_0^4 \rightarrow -\frac{S}{4} \|U_x(t)\|_0^4 + \frac{S}{4} \|(U_0)_x\|_1^4.$$

Então o Teorema da Convergência Dominada [9, Theorem 4.2] produz o resultado. De fato, para cada $t \geq 0$ pode-se estimar

$$\begin{aligned} \left| \|(Q_k U)_x\|_0^2 ((Q_k U)_{xx}, (Q_k U)')_0 \right| &\leq \|Q_k U\|_1^2 \|Q_k U_{xx}\|_0 \|Q_k U'\|_0 \\ &\leq C \|Q_k U\|_2^3 \|(Q_k U)'\|_0 \leq C(1 + \|U(t)\|_2^3 \|U'(t)\|_0), \quad \forall k, \forall t, \end{aligned}$$

pela identidade de Parseval, onde C é uma constante positiva independente de k ou t . Agora por hipótese $U \in \mathcal{C}^1([0, t], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, t], H_*^2(\Omega))$, logo a função

$$H(s) = \|U(s)\|_2^3 \|U'(s)\|_0$$

está na classe $L^1([0, T])$, e concluímos que

$$\int_0^t S \|Q_k U_x\|_0^2 (Q_k U_{xx}, Q_k U')_0 \rightarrow \int_0^t S (\|U_x\|_0^2 U_{xx}, U')_0.$$

PASSO 7. Unicidade no caso $S > 0$.

Sejam U e w soluções fracas de (4.1), isto é, U e w satisfazem (4.4), $U(0) = w(0) = U_0$ e $U'(0) = w'(0) = V_0$. Seja $z = U - w$, assim $z(0) = z'(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \langle z'', V \rangle + \delta \langle z', V \rangle_0 + (z, V)_2 + \phi(U)(z_x, V_x)_0 \\ + (\phi(U) - \phi(w))(w_x, V_x)_0 = 0, \quad \forall V \in H_*^2(\Omega). \end{aligned}$$

Temos de provar que $z = 0$, para isso vamos reescrever o termo não linear para aplicar a nossa identidade de energia. Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \phi(z)(z_x, V_x)_0 &= -P(z_x, V_x)_0 + S \|z_x\|_0^2 (z_x, V_x)_0 \\ &= -P(z_x, V_x)_0 + S (\|U_x\|_0^2 + \|w_x\|_0^2 - 2(U_x, w_x)_0) (z_x, V_x)_0 \\ &= \phi(U)(z_x, V_x)_0 + S (\|w_x\|_0^2 - 2(U_x, w_x)_0) (z_x, V_x)_0, \end{aligned}$$

vemos que z satisfaz a equação

$$\langle z'', V \rangle + \delta \langle z', V \rangle_0 + (z, V)_2 + \phi(z)(z_x, V_x)_0 = (h, V)_0, \quad \forall V \in H_*^2(\Omega),$$

onde $h \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$ é definida por

$$h = -S (\|w_x\|_0^2 - 2(U_x, w_x)_0) z_{xx} + (\phi(U) - \phi(w)) w_{xx},$$

aqui mais uma vez usamos integração por partes (4.48).

Da identidade de energia (4.5) do passo anterior, utilizando os dados iniciais, temos para cada $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \|z'\|_0^2 + \frac{1}{2} \|z\|_2^2 + \frac{1}{4} S \|z_x\|_0^4 = \frac{1}{2} P \|z_x\|_0^2 + \int_0^t (h, z')_0 - \delta \int_0^t \|z'\|_0^2. \quad (4.52)$$

Estimamos a primeira norma no lado direito usando interpolação

$$\begin{aligned} \|z_x\|_0^2 &\leq \|z\|_1^2 \leq C \|z\|_2 \|z\|_0 \leq C \varepsilon \|z\|_2^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|z\|_0^2 \\ &= C \varepsilon \|z\|_2^2 + \frac{C}{2\varepsilon} \int_0^t (z, z')_0 \\ &\leq C \varepsilon \|z\|_2^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \int_0^t (\|z\|_0^2 + \|z'\|_0^2) \\ &\leq C \varepsilon \|z\|_2^2 + \frac{\bar{C}}{4\varepsilon} \int_0^t (\|z\|_2^2 + \|z'\|_0^2). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \|h\|_0^2 &\leq 2S^2 \| \|w_x\|_0^2 - 2(U_x, w_x)_0 \|^2 \|z_{xx}\|_0^2 + 2|\phi(U) - \phi(w)|^2 \|w_{xx}\|_0^2 \\ &\leq C (\|z\|_2^2 + (\|U_x\|_0^2 - \|w_x\|_0^2)^2) \leq C (\|z\|_2^2 + \|U_x + w_x\|_0^2 \|z_x\|_0^2) \\ &\leq C \|z\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Agora vemos que (4.54) implica

$$\left| \int_0^t (h, z')_0 \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|h\|_0^2 + \|z'\|_0^2 \leq C \int_0^t \|z\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'\|_0^2. \quad (4.55)$$

Combinando (4.52), (4.53) e (4.55) e escolhendo um valor apropriado para ε , concluímos

$$\|z'\|_0^2 + \|z\|_2^2 \leq C \left(\int_0^t \|z'\|_0^2 + \int_0^t \|z\|_2^2 \right).$$

Por fim a desigualdade de Gronwall garante que $z \equiv 0$. \square

4.4 Prova dos resultados sobre comportamento assintótico

Ao longo desta seção restringimos nosso estudo a cargas estacionárias, mais precisamente, assumimos que $F \in L^2(\Omega)$ não depende do tempo.

Lema 4.12. *Sejam $\delta > 0$, $P > 0$, $S > 0$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$ e $F \in L^2(\Omega)$, e denote por U a solução de (4.1). Então:*

1. $(U, U') \in L^\infty([0, \infty), H_*^2(\Omega)) \times L^\infty([0, \infty), L^2(\Omega))$.
2. $U' \in L^2(\Omega \times (0, \infty))$.

Demonstração. Lembre que, por (4.7),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U'\|_0^2 + \frac{1}{2} \|U\|_2^2 - \frac{P}{2} \|U_x\|_0^2 + \frac{S}{4} \|U_x\|_0^4 + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ = \int_0^t (F, U')_0 + \mathbb{E}(U_0, V_0). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Uma vez que F não depende do tempo, podemos estimar

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (F, U')_0 \right| &= |(F, U(t))_0 - (F, U_0)_0| \\ &\leq \frac{\lambda_1}{4} \|U\|_0^2 + \frac{1}{\lambda_1} \|F\|_0^2 + |(F, U_0)_0|. \end{aligned} \quad (4.57)$$

De (4.56), (4.57) e da caracterização de λ_1 concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U'\|_0^2 + \frac{1}{4} \|U\|_2^2 - \frac{P}{2} \|U_x\|_0^2 + \frac{S}{4} \|U_x\|_0^4 + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_0^2 + |(F, U_0)_0| + \mathbb{E}(U_0, V_0). \end{aligned}$$

Então, usando que o máximo de $\tau \mapsto \frac{P}{2} \tau^2 - \frac{S}{4} \tau^4$ é $\frac{P^2}{4S}$, mais uma vez inferimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U'\|_0^2 + \frac{1}{4} \|U\|_2^2 + \delta \int_0^t \|U'\|_0^2 \\ \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_0^2 + |(F, U_0)_0| + \mathbb{E}(U_0, V_0) + \frac{P^2}{4S}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Observando que o lado direito de (4.58) é independente de t , tomando limite quando $t \rightarrow \infty$ concluímos a prova. \square

No próximo lema estabelecemos a convergência da solução.

Lema 4.13. *Sejam $\delta > 0$, $S > 0$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$, $F \in L^2(\Omega)$, e denote por U a solução de (4.1).*

1. *Então existe $\bar{U} \in H_*^2(\Omega)$ uma solução de (4.8) e uma sequência crescente (t_n) tal que*

$$U(t_n) \rightarrow \bar{U} \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad U'(t_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.59)$$

2. *Se $\bar{U} \in H_*^2(\Omega)$ também satisfaz*

$$\mathbb{P}_F(\bar{U}) \leq \inf_{t \in [0, \infty)} \mathbb{P}_F(U(t)), \quad (4.60)$$

então uma convergência mais forte vale:

$$U(t) \rightarrow \bar{U} \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad U'(t) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.61)$$

Prova de 1. Seja (s_n) uma sequência de números positivos tais que $s_n \rightarrow \infty$ e

$$3 \geq s_{n+1} - s_n \geq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.62)$$

Então, pelo Lema 4.12,

$$\sum_n \int_{s_n}^{1+s_n} \|U'\|_0^2 \leq \int_0^\infty \|U'\|_0^2 < \infty, \quad (4.63)$$

o que implica que

$$\int_{s_n}^{1+s_n} \|U'\|_0^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.64)$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in (s_n, 1 + s_n)$ tal que

$$\|U'(t_n)\|_0^2 = \int_{s_n}^{1+s_n} \|U'\|_0^2 \rightarrow 0. \quad (4.65)$$

De (4.62), (t_n) é crescente e $1 \leq t_{n+1} - t_n \leq 4$. Isto permite-nos argumentar como em (4.63) e concluir que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 \rightarrow 0. \quad (4.66)$$

Então, para cada $V \in H_*^2(\Omega)$, de (4.66),

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta(U', V)_0 \right| &\leq \delta \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0 \|V\|_0 \leq \delta \|V\|_0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0 \\ &\leq 2\delta \|V\|_0 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Além disso, de (4.65),

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle U'', V \rangle \right| &= |(U'(t_{n+1}), V)_0 - (U'(t_n), V)_0| \\ &\leq \|V\|_0 (\|U'(t_n)\|_0 + \|U'(t_{n+1})\|_0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

As duas últimas desigualdades dão

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle U'', V \rangle + \delta(U', V)_0 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.67)$$

Assim, dada $V \in H_*^2(\Omega)$, para cada n existe $t_n^v \in (t_n, t_{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned} \langle U''(t_n^v), V \rangle + \delta(U'(t_n^v), V)_0 \\ = (t_{n+1} - t_n)^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle U'', V \rangle + \delta(U', V)_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Uma vez que $(U(t_n^v))$ é uma sequência limitada em $H_*^2(\Omega)$, existe uma subsequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$, quando $t_{n_k}^v \in (t_{n_k}, t_{n_k+1})$, tal que $U(t_{n_k}^v) \rightharpoonup \bar{U}_v$ em $H_*^2(\Omega)$. Vamos provar que \bar{U}_v não depende de v . Seja $v, w \in H_*^2(\Omega)$. Visto que $(U(t_n^v))$ e $(U(t_n^w))$ são sequências limitadas em $H_*^2(\Omega)$, existe uma subsequência comum (n_k) tal que $U(t_{n_k}^v) \rightharpoonup \bar{U}_v$ e $U(t_{n_k}^w) \rightharpoonup \bar{U}_w$ em $H_*^2(\Omega)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \|U(t_{n_k}^v) - U(t_{n_k}^w)\|_0^2 &= \int_{\Omega} (U(t_{n_k}^v) - U(t_{n_k}^w))^2 = \int_{\Omega} \left(\int_{t_{n_k}^v}^{t_{n_k}^w} U' \right)^2 \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \int_{t_{n_k}^v}^{t_{n_k}^w} U'^2 \right| \left| \int_{t_{n_k}^v}^{t_{n_k}^w} 1 \right| \leq 4 \int_{\Omega} \left| \int_{t_{n_k}^v}^{t_{n_k}^w} U'^2 \right| \leq 4 \int_{t_{n_k}}^{t_{n_k+1}} \|U'\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

e de (4.64), tomando limite em k , obtemos $\bar{U}_v = \bar{U}_w$. Portanto, descartamos o índice v e denotamos o limite comum como \bar{U} .

Agora mostremos que \bar{U} é uma solução do problema estacionário (4.8). Tome $V \in H_*^2(\Omega)$. Uma vez que, a menos de uma subsequência, $U(t_n^v) \rightharpoonup \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$,

$$(U(t_n^v), V)_2 \rightarrow (\bar{U}, V)_2.$$

Da imersão compacta $H_*^2(\Omega) \hookrightarrow H_*^1(\Omega)$,

$$\|(U(t_n^v))_x\|_0^2 \rightarrow \|(\bar{U})_x\|_0^2 \quad \text{e} \quad ((U(t_n^v))_x, V_x)_0 \rightarrow ((\bar{U})_x, V_x)_0.$$

Agora de (4.68), (4.67) e das convergências acima, tomando limite em (4.4), segue que \bar{U} é uma solução fraca de (4.8), isto é,

$$(\bar{U}, V)_2 + \phi(\bar{U})(\bar{U}_x, V_x)_0 = (F, V)_0. \quad (4.70)$$

Subtraindo (4.70) de (4.4) e escrevendo $w(t) = U(t) - \bar{U}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle w'', V \rangle + \delta(w', V)_0 + (w, V)_2 - P(w_x, V_x)_0 + S\|U_x\|_0^2 (U_x, V_x)_0 \\ - S\|\bar{U}_x\|_0^2 (\bar{U}_x, V_x)_0 = 0, \quad \forall V \in H_*^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Tome w como função teste e integrando (4.71) sobre (t_n, t_{n+1})

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle w'', w \rangle + \delta(w', w)_0 + \|w\|_2^2 - P\|w_x\|_0^2 \\ + S\|U_x\|_0^2(U_x, w_x)_0 - S\|\bar{U}_x\|_0^2(\bar{U}_x, w_x)_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Integrando por parte,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle w'', w \rangle + \delta(w', w)_0 = (w'(t_{n+1}), w(t_{n+1}))_0 - (w'(t_n), w(t_n))_0 \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} -\|w'\|_0^2 + \delta \langle w', w \rangle, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle w'', w \rangle + \delta(w', w)_0 \right| \\ \leq |(w'(t_{n+1}), w(t_{n+1}))_0| + |(w'(t_n), w(t_n))_0| \\ + \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} -\|w'\|_0^2 + \delta \langle w', w \rangle \right| \\ \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|w(t_k)\|_0 (\|U'(t_n)\|_0 + \|U'(t_{n+1})\|_0) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 + \delta |\langle w', w \rangle| \\ \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|w(t_k)\|_0 (\|U'(t_n)\|_0 + \|U'(t_{n+1})\|_0) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 \\ + 2\delta \sup_{t \in [0, \infty)} \|w\|_0 \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Então, usando (4.65), (4.66), (4.73), inferimos de (4.72) que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|w\|_2^2 - P\|w_x\|_0^2 + S\|U_x\|_0^2(U_x, w_x)_0 - S\|\bar{U}_x\|_0^2(\bar{U}_x, w_x)_0 \rightarrow 0. \quad (4.74)$$

Assim, adicionando (4.66) e (4.74), existe $\bar{t}_n \in (t_n, t_{n+1})$, tal que

$$\begin{aligned} \|U'(\bar{t}_n)\|_0^2 + \|w(\bar{t}_n)\|_2^2 - P\|w(\bar{t}_n)_x\|_0^2 + S\|U(\bar{t}_n)_x\|_0^2(U(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 \\ - S\|\bar{U}(\bar{t}_n)_x\|_0^2(\bar{U}(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Vamos provar que $U(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, considere qualquer subsequência (\bar{t}_{n_k}) . Como U é limitada em $H_*^2(\Omega)$, uma subsequência de $(U(\bar{t}_{n_k}))$, denotado $(U(\tau_j))$, converge fracamente em $H_*^2(\Omega)$ e fortemente em $H_*^1(\Omega)$ para algum \bar{U} . Argumentando como em (4.69), mostramos que $\bar{U} = \bar{\bar{U}}$. Então $U(\tau_j) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^1(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$. Portanto, $U(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pela convergência (4.75) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|U'(\bar{t}_n)\|_0^2 + \|w(\bar{t}_n)\|_2^2 &= \left(\|U'(\bar{t}_n)\|_0^2 + \|w(\bar{t}_n)\|_2^2 - P\|w(\bar{t}_n)_x\|_0^2 \right. \\
&\quad \left. + S\|U(\bar{t}_n)_x\|_0^2 (U(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 - S\|\bar{U}(\bar{t}_n)_x\|_0^2 (\bar{U}(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 \right) \\
&\quad + \left(P\|w(\bar{t}_n)_x\|_0^2 - S\|U(\bar{t}_n)_x\|_0^2 (U(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 \right. \\
&\quad \left. + S\|\bar{U}(\bar{t}_n)_x\|_0^2 (\bar{U}(\bar{t}_n)_x, w(\bar{t}_n)_x)_0 \right) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Assim $U(\bar{t}_n) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$ e $U'(\bar{t}_n) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, o que estabelece o item 1.

Segue de (4.59) que

$$\mathbb{E}_F(U(\bar{t}_n), U'(\bar{t}_n)) \rightarrow \mathbb{E}_F(\bar{U}, 0) = \mathbb{P}_F(\bar{U}). \quad (4.76)$$

Uma vez que, de acordo com (4.7), a energia \mathbb{E}_F é monótona, (4.76) mostra que a convergência da energia ocorre em todo o fluxo, isto é,

$$\mathbb{E}_F(U(t), U'(t)) \rightarrow \mathbb{E}_F(\bar{U}, 0) = \mathbb{P}_F(\bar{U}). \quad (4.77)$$

Prova de 2. Em seguida, assumamos (4.60). Então, de (4.77) e Lema 4.12,

$$\mathbb{P}_F(\bar{U}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_F(U(t)) + \mathbb{K}(U'(t))) \geq \mathbb{P}_F(\bar{U}) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{K}(U'(t)).$$

Portanto, $U'(t) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Além disso,

$$\mathbb{P}_F(U(t)) - \mathbb{P}_F(\bar{U}) = \mathbb{E}_F(U(t), U'(t)) - \mathbb{K}(U'(t)) - \mathbb{P}_F(\bar{U}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.78)$$

Argumentando como em (4.69), inferimos que $U(t) \rightarrow \bar{U}$ em $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$. De fato, seja (t_n) uma sequência crescente dada por (4.59), tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $U(t_n) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$. Lembre-se que $0 < t_{n+1} - t_n \leq 8$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $t > 0$ grande, devemos ter $t \in [t_n, t_{n+1}]$ para algum $n \in \mathbb{N}$, desta forma podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|U(t) - \bar{U}\|_0^2 &\leq 2(\|U(t) - U(t_n)\|_0^2 + \|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2) \\
&= 2 \int_{\Omega} (U(t) - U(t_n))^2 + 2\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2 \\
&= 2 \int_{\Omega} \left(\int_{t_n}^t U' \right)^2 + 2\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2 \\
&\leq 2 \int_{\Omega} \left| \int_{t_n}^t U'^2 \right| \left| \int_{t_n}^t 1 \right| + 2\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2 \\
&\leq 16 \int_{\Omega} \left| \int_{t_n}^t U'^2 \right| + 2\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2 \\
&\leq 16 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 + 2\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n_0 > 0$ tal que

$$\|U(t_n) - \bar{U}\|_0^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U'\|_0^2 \leq \frac{\varepsilon}{32}, \quad \forall n \geq n_0,$$

e a convergência resulta de (4.79).

Uma vez que $U(t) \rightarrow \bar{U}$ em $L^2(\Omega)$ e U é limitada em $H_*^2(\Omega)$, por interpolação temos que $U(t) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^1(\Omega)$ quando $t \rightarrow \infty$. Usando (4.78) e esta convergência forte em $H_*^1(\Omega)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\bar{U}\|_2^2 &= \mathbb{P}_F(U) - \mathbb{P}_F(\bar{U}) \\ &+ \frac{P}{2}(\|U_x\|_0^2 - \|\bar{U}_x\|_0^2) - \frac{S}{4}(\|U_x\|_0^4 - \|\bar{U}_x\|_0^4) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|U(t)\|_2 \rightarrow \|\bar{U}\|_2, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Seja (r_n) qualquer sequência de números positivos tais que $r_n \rightarrow \infty$. Dada qualquer subsequência $(r_{n_k}) = (s_k)$, uma vez que, $(U(s_k))$ é limitada em $H_*^2(\Omega)$, e $U(s_k) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^1(\Omega)$, temos para mais uma subsequência, denotado $s_{k_j} = \tau_j$,

$$U(\tau_j) \rightarrow \bar{U}, \quad \|U(\tau_j)\|_2 \rightarrow \|\bar{U}\|_2,$$

que por sua vez implica uma convergência forte $U(\tau_j) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$. Isto mostra que, de fato $U(r_n) \rightarrow \bar{U}$ em $H_*^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ e, uma vez que a sequência (r_n) é arbitrária, provamos que

$$U(t) \rightarrow \bar{U} \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Prova do Teorema 4.4. Uma vez que $0 < P < \Lambda_1$, a solução de (4.8) é única e se caracteriza como o ponto mínimo de \mathbb{P}_F sobre $H_*^2(\Omega)$. Logo (4.60) se verifica e a prova segue do Lema 4.13. \square

Prova do Teorema 4.5. Sejam $\delta > 0$, $S > 0$, $U_0 \in H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in L^2(\Omega)$, $\Lambda_1 < P < \Lambda_2$ e U a solução de (4.1) com $F \equiv 0$, assumamos que $\mathbb{E}(U_0, V_0) < 0$. O Lema 4.13 garante a existência de $\bar{U} \in H_*^2(\Omega)$, uma solução de (4.8), e de uma sequência crescente (t_n) , com $t_n \rightarrow \infty$, tais que

$$u(t_n) \rightarrow \bar{U} \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad U'(t_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

Então, de (4.7) com $F \equiv 0$, obtemos que $\mathbb{E}(\bar{U}) \leq \mathbb{E}(U(0), V(0)) = \mathbb{E}(U_0, V_0) < 0$. Consequentemente, \bar{U} é não trivial. De [3, Theorem 5] sabemos que as soluções não triviais de (4.8) quando o parâmetro P está restrito a (Λ_1, Λ_2) são $\pm \lambda_+ w_1$ e inferimos que

$$\mathbb{P}_F(\bar{U}) = \inf_{w \in H_*^2(\Omega)} \mathbb{P}_F(w),$$

portanto, (4.60) é satisfeita. Então, de (4.61),

$$u(t) \rightarrow \bar{U} \text{ em } H_*^2(\Omega), \quad U'(t) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad t \rightarrow \infty.$$

Assim, a solução U induz uma órbita $(U(t), U'(t))$ em $H_*^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que começa em (U_0, V_0) , tende para o ponto de equilíbrio $(\bar{U}, 0)$ e a energia \mathbb{E} é negativa ao longo desta órbita. Por outro lado, $\mathbb{E} \geq 0$ em $[w_1]^\perp \times L^2(\Omega)$, o que implica que $\|U(t) - \lambda_+ w_1\|_2 \neq \|U(t) + \lambda_+ w_1\|_2$ para todo $t \geq 0$. Por isso:

- se $\|U_0 - \lambda_+ w_1\|_2^2 < \|U_0 + \lambda_+ w_1\|_2^2$, então essa desigualdade continua verdadeira com $U(t)$ em lugar de U_0 para todo t positivo e $\bar{U} = \lambda_+ w_1$.
- se $\|U_0 - \lambda_+ w_1\|_2^2 > \|U_0 + \lambda_+ w_1\|_2^2$, então essa desigualdade continua verdadeira com $U(t)$ em lugar de U_0 para todo t positivo e $\bar{U} = -\lambda_+ w_1$. \square

Prova do Teorema 4.7. Sejam U uma solução fraca de (4.1), $V \in H_*^2(\Omega)$ e defina

$$\psi_V(t) = \langle U(t), V \rangle.$$

Então, pela regularidade de U , ψ_V' e ψ_V'' são bem definidas, e

$$\psi_V' = \langle U', V \rangle, \quad \psi_V'' = \langle U'', V \rangle.$$

Pretendemos derivar uma equação de segunda ordem para ψ_V no caso em que V é uma autofunção de (4.9). Pelo teorema de representação de Riesz, a ação de $U(t)$ como um elemento de \mathcal{H} é

$$\langle U, w \rangle = (U, w)_2, \quad \forall w \in H_*^2(\Omega).$$

Se $V = w_k$ é uma autofunção associada a Λ_k , então denotando $\psi_k = \psi_{V_k}$ vemos que

$$\begin{aligned} \langle U'', V \rangle + \delta \langle U', V \rangle_0 + (U, V)_2 + \phi(U)(U_x, V_x)_0 \\ = \psi_k'' + \delta \langle U', V_k \rangle_0 + (U, V_k)_2 \left(1 + \frac{\phi(U)}{\Lambda_k} \right) \\ = \psi_k'' + \frac{\delta}{\lambda_k} \psi_k' + \left(1 + \frac{\phi(U)}{\Lambda_k} \right) \psi_k. \end{aligned}$$

De fato, usando (4.17) e (4.18),

$$\begin{aligned} \delta \langle U', V_k \rangle_0 &= \delta \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(U(t+h), V_k)_0 - (U(t), V_k)_0}{h} \\ &= \frac{\delta}{\lambda_k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(U(t+h), V_k)_2 - (U(t), V_k)_2}{h} \\ &= \frac{\delta}{\lambda_k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle U(t+h), V_k \rangle - \langle U(t), V_k \rangle}{h} = \frac{\delta}{\lambda_k} \psi_k'. \end{aligned}$$

Assim, quando $F \in [V_k]^\perp$ a equação diferencial ordinária de ψ_k é

$$\psi_k'' + \frac{\delta}{\lambda_k} \psi_k' + \left(1 + \frac{\phi(U)}{\Lambda_k} \right) \psi_k = 0.$$

Observe que o peso $1 + \frac{\phi(U(t))}{\Lambda_k}$ é uma função contínua, logo o problema de valor inicial

$$\psi'' + \frac{\delta}{\lambda_k} \psi' + \left(1 + \frac{\phi(U)}{\Lambda_k}\right) \psi = 0, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0,$$

tem uma única solução, que é a solução trivial. Portanto, sempre que $F \in [V_k]^\perp \subset L^2(\Omega)$, $U_0 \in [V_k]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$, $V_0 \in [V_k]^\perp \subset L^2(\Omega)$, temos também $U(t) \in [V_k]^\perp \subset H_*^2(\Omega)$ para todo t positivo. \square

Prova do Corolário 4.8. Pelo Teorema 4.7, $U(t) \in [w_1]^\perp$ para todo t positivo, de modo que

$$\mathbb{P}_F(U(t)) \geq 0 = \mathbb{P}_F(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Logo do Lema 4.13 2. Uma vez que $\Lambda_1 < P < \Lambda_2$, $\bar{U} = 0$ é a única solução de (4.8) em $[w_1]^\perp$. \square

4.5 Prova dos resultados de estabilidade

Ao longo desta seção consideramos o problema (4.1) sob equilíbrio dinâmico, ou seja, $F \equiv 0$ e $\delta = 0$. Primeiro vamos mostrar que, fixando m e i , a energia define um único modo simples, a menos de translação no tempo.

Proposição 4.14. *Sejam $\delta = 0$ e $P \leq \Lambda_{m,i}$. A família de modos (m, i) -simples é parametrizada, a menos de translação no tempo, pela energia e os modos simples são funções periódicas do tempo.*

Na verdade, a Proposição 4.14 vale num caso mais geral. Considere o problema de Cauchy para a seguinte equação diferencial ordinária,

$$\begin{cases} w'' + h(w) = 0, \\ w(0) = a, \quad w'(0) = b, \end{cases} \quad (4.80)$$

onde h e sua primitiva $H(s) = \int_0^s h$ satisfazem

$$h(s)s > 0, \quad s \neq 0, \quad (4.81)$$

$$H(s) \rightarrow \infty, \quad |s| \rightarrow \infty. \quad (4.82)$$

Proposição 4.15. *Se h é uma função localmente Lipschitziana satisfazendo (4.81), então para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, a solução w de (4.80) é periódica e muda de sinal. Além disso, se duas soluções têm a mesma energia*

$$\mathcal{E}(w, w') = \frac{1}{2}w'^2 + H(w),$$

então elas coincidem a menos de translação em relação à variável t . Se h é ímpar, então as soluções de (4.80) também são, em relação aos seus zeros.

Demonstração. Seja w uma solução de (4.80) com dado inicial $(a, b) \neq (0, 0)$. Uma vez que (4.80) é uma equação conservativa, (4.81) garante que todas as soluções são limitadas, e, portanto, globalmente definidas. Vamos inicialmente provar que w não é eventualmente de um sinal ($w \geq 0$ ou $w \leq 0$ para todo $t \geq t_0$). Suponha por contradição que existe $t_0 > 0$ tal que $w \geq 0$ em $[t_0, \infty)$. Então, uma vez que $w \neq 0$, $w(t_0) > 0$ ou $w'(t_0) > 0$. Em qualquer caso, inferimos que w é positiva em uma vizinhança à direita de t_0 . Além disso, da equação (4.80) e de (4.81), w é côncava e w' é não crescente neste mesmo intervalo. Se $w'(t_1) < 0$ para algum $t_1 > t_0$, então temos

$$w(t) \leq w(t_1) + w'(t_1)(t - t_1), \quad t > t_1,$$

e w muda de sinal em $[t_0, \infty)$, uma contradição. Suponha então $w' \geq 0$ em (t_0, ∞) . Como w permanece limitada e côncava,

$$w(t) \rightarrow L > 0, \quad w'(t) \rightarrow 0, \quad w''(t) \rightarrow -h(L) < 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.83)$$

Assim, do teorema do valor médio, como $w' \rightarrow 0$, podemos construir uma sequência (t_n) tal que

$$t_n \rightarrow \infty, \quad w''(t_n) \rightarrow 0,$$

o que contradiz (4.83). Da mesma forma, podemos provar que w não é eventualmente não positiva.

Podemos agora provar que w é periódica. Seja (τ_n) a sequência de zeros de w em $[0, \infty)$. Então w tem sinais opostos em (τ_1, τ_2) e (τ_2, τ_3) , além disso $w(\tau_1) = w(\tau_3) = 0$. Pela conservação de energia,

$$(w'(\tau_1))^2 = 2\mathcal{E}(0, w'(\tau_1)) = 2\mathcal{E}(0, w'(\tau_3)) = (w'(\tau_3))^2.$$

Portanto $w'(\tau_3) = w'(\tau_1)$ e por isso w é T -periódica, com $T = \tau_3 - \tau_1$.

Para mostrar que a energia determina uma solução única, a menos de translação, considere dados iniciais $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\frac{b^2}{2} + H(a) = \mathcal{E}(a, b) = \mathcal{E}(c, d) = \frac{d^2}{2} + H(b).$$

Denote por $w(a, b, \cdot)$ e $w(c, d, \cdot)$ as soluções correspondentes. Sejam $\tau(a, b), \tau(c, d) \in \mathbb{R}$ tais que

$$w(a, b, \tau(a, b)) = 0, \quad w'(a, b, \tau(a, b)) > 0, \quad w(c, d, \tau(c, d)) = 0, \quad w'(c, d, \tau(c, d)) > 0.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} w'(a, b, \tau(a, b))^2 &= 2\mathcal{E}(0, w'(a, b, \tau(a, b))) = 2\mathcal{E}(a, b) = 2\mathcal{E}(c, d) = 2\mathcal{E}(0, w'(c, d, \tau(c, d))) \\ &= w'(c, d, \tau(c, d))^2, \end{aligned}$$

inferimos que $w'(a, b, \tau(a, b)) = w'(c, d, \tau(c, d))$ e, portanto $w(a, b, t) = w(c, d, R + t)$ para todo t , onde $R = \tau(c, d) - \tau(a, b)$.

Considere afinal o caso em que h é ímpar. Seja τ um zero de w e defina $w_1(t) = w(t + \tau)$, $w_2(t) = -w(\tau - t)$. Assim definidas, w_1 e w_2 resolvem o problema

$$z'' + h(z) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = w'(\tau).$$

Por unicidade, inferimos que $w_1 = w_2$ e, portanto, que w é ímpar com respeito a τ . \square

Prova da Proposição 4.14. É uma consequência da Proposição 4.15 com

$$h_{m,i,P,S}(s) = m^2[(\Lambda_{m,i} - P)s + Sm^2s^3].$$

Observe que $S > 0$ é suficiente para (4.82), enquanto a condição $P \leq \Lambda_{m,i}$ garante (4.81). \square

Prova do Teorema 4.11. Aqui seguiremos as idéias de [12, Theorem 2.3], adaptando os argumentos porque o sistema (4.85) tem três parâmetros μ, γ, ν , enquanto o correspondente sistema em [12] tem apenas dois.

Com a mudança de variáveis $\varphi \mapsto m\varphi$, $\psi \mapsto n\psi$ o sistema (4.13) se torna

$$\begin{cases} \varphi''(t) + m^2(\Lambda_{m,i} - P)\varphi(t) + Sm^2(\varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\varphi(t) = 0, \\ \psi''(t) + n^2(\Lambda_{n,k} - P)\psi(t) + Sn^2(\varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\psi(t) = 0. \end{cases}$$

Em seguida, a substituição $\varphi(t) \mapsto \varphi(\frac{t}{m\sqrt{S}})$, $\psi(t) \mapsto \psi(\frac{t}{m\sqrt{S}})$ leva a

$$\begin{cases} \varphi''(t) + \frac{\Lambda_{m,i} - P}{S}\varphi(t) + (\varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\varphi(t) = 0, \\ \psi''(t) + \frac{n^2}{m^2} \frac{\Lambda_{n,k} - P}{S}\psi(t) + \frac{n^2}{m^2}(\varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\psi(t) = 0. \end{cases}$$

Escolhendo os parâmetros

$$\mu = \frac{\Lambda_{m,i} - P}{S}, \quad \nu = \frac{\Lambda_{n,k} - P}{S}, \quad \gamma = \frac{n^2}{m^2},$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \varphi''(t) + (\mu + \varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\varphi(t) = 0, \\ \psi''(t) + \gamma(\nu + \varphi(t)^2 + \psi(t)^2)\psi(t) = 0, \end{cases} \quad (4.84)$$

observe que este sistema é Hamiltoniano e se assemelha a [12, (1.4)].

Fixe um nível de energia $E_0 > 0$, índices $m, n, i, k \in \mathbb{N}$ e tome $b_* = \sqrt{2E_0}$. Considere o operador linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $L(c, d) = -(z(\theta), z'(\theta))$, onde $\theta > 0$ é o primeiro zero de w em

$$\begin{cases} w'' + \mu w + w^3 = 0, & (4.85) \\ z'' + \gamma(\nu + w^2)z = 0, & (4.86) \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = b_*, \\ z(0) = c, \quad z'(0) = d. \end{cases}$$

Observe que os sistemas (4.85)-(4.86) e (4.11)-(4.15) são equivalentes, w é a coordenada de um modo (m, i) -simples com energia E_0 . Por conseguinte, a prova se reduz ao estudo da estabilidade de $z = 0$ no sistema (4.85). Pela teoria de Floquet, isso é equivalente a estudar os autovalores do operador L ; veja [14, Theorem 2.89, p. 194].

O problema (4.85) pode ser visto como uma perturbação regular do sistema

$$\begin{cases} \vartheta'' + \vartheta^3 = 0, \\ \zeta'' + \gamma\vartheta^2\zeta = 0, \\ \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta'(0) = 1, \\ \zeta(0) = \bar{c}, \quad \zeta'(0) = \bar{d}, \end{cases} \quad (4.87)$$

para $\bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}$ adequados. De fato, considere o problema

$$\begin{cases} w_\varepsilon'' + \varepsilon w_\varepsilon + w_\varepsilon^3 = 0, \\ z_\varepsilon'' + \gamma\left(\frac{\nu}{\mu}\varepsilon + w_\varepsilon^2\right)z_\varepsilon = 0, \\ w_\varepsilon(0) = 0, \quad w_\varepsilon'(0) = 1, \\ z_\varepsilon(0) = \bar{c}, \quad z_\varepsilon'(0) = \bar{d}, \end{cases} \quad (4.88)$$

que é claramente uma perturbação regular de (4.87) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por outro lado, com

$$\varepsilon = \frac{\mu}{b_*} = \frac{\mu}{\sqrt{2E_0}}, \quad (4.89)$$

as funções

$$w(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} w_\varepsilon\left(t\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right), \quad z(t) = z_\varepsilon\left(t\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right),$$

são soluções do sistema (4.85), tomando $(\bar{c}, \bar{d}) = \left(c, d\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)$.

Em analogia ao operador L , considere o operador linear B_γ associado a (4.87) definido por $B_\gamma(\bar{c}, \bar{d}) = -(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))$, onde τ é o primeiro zero positivo de $\vartheta(c, d)$. Analogamente, defina o operador $B_{\gamma, \varepsilon}$ associado a (4.88).

Cazenave e Weissler [12] estudaram em detalhes as propriedades do operador B_γ mostrando que propriedades de estabilidade do sistema (4.87) dependem do valor de γ . De [12, Theorem 3.1 (iii)], se $\gamma \in I_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então os autovalores λ_1, λ_2 do operador B_γ são complexos e $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Esta propriedade é compartilhada pelos autovalores de $B_{\gamma, \varepsilon}$ para ε suficientemente pequeno, isto é,

$$|\lambda_{1, \varepsilon}| = |\lambda_{2, \varepsilon}| = 1; \quad (4.90)$$

veja [12, Lemma 3.3 (i)].

Por outro lado, de acordo com [12, Theorem 3.1 (i)-(ii)], se $\gamma \in K_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então os autovalores λ_1, λ_2 do operador B_γ tem a forma $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$, $0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| = |\lambda_1|^{-1}$.

Por perturbação regular, para $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, os autovalores $\lambda_{1,\varepsilon}, \lambda_{2,\varepsilon}$ de $B_{\gamma,\varepsilon}$ satisfazem

$$0 < |\lambda_{1,\varepsilon}| < 1 < |\lambda_{2,\varepsilon}|. \quad (4.91)$$

A prova é concluída observando que $B_{\gamma,\varepsilon} = L$ para ε como em (4.89). A condição de ε pequeno é traduzida por (4.89) como a exigência de energia E_0 grande no sistema (4.84). Uma vez que a energia do sistema (4.13) difere da energia de (4.84) pelo fator S , isto é equivalente a pedir energia grande para o primeiro.

Portanto, se $\gamma \in I_j$ e a condição de energia é cumprida, então por (4.90) o modo (m, i) -simplex é (n, k) -linearmente estável. Por outro lado, se $\gamma \in K_j$ e a energia é suficientemente grande, (4.91) implica que o modo (m, i) -simplex é (n, k) -linearmente instável. \square

REFERÊNCIAS

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] Akashi Kaikyo Bridge (Kobe/Awaji, 1998) | Structurae. *Structurae - International Database and Gallery of Structures*. Disponível em: <<http://structurae.net/structures/akashi-kaikyo-bridge>>. Acessado em: 30 de janeiro de 2016.
- [3] M. Al-Gwaiz, V. Benci and F. Gazzola. Bending and stretching energies in a rectangular plate modeling suspension bridges. *Nonlinear Anal.*, 106: 18–34, 2014.
- [4] O. H. Amman, T. von Kármán and G. B. Woodruff. The failure of the tacoma narrows bridge. Technical report, Federal Works Agency, 1941.
- [5] E. Berchio, A. Ferrero and F. Gazzola. Structural instability of nonlinear plates modelling suspension bridges: mathematical answers to some long-standing questions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 28: 91–125, 2016.
- [6] E. Berchio, A. Ferrero, F. Gazzola and P. Karageorgis. Qualitative behavior of global solutions to some nonlinear fourth order differential equations. *J. Differential Equations*, 251(10): 2696–2727, 2011.
- [7] H. M. Berger. A new approach to the analysis of large deflections of plates. *J. Appl. Mech.*, 22: 465–472, 1955.
- [8] D. Bonheure. Multitransition kinks and pulses for fourth order equations with a bistable nonlinearity. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(3): 319–340, 2004.
- [9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, 2010.
- [10] D. Burgreen. Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends. Technical report, DTIC Document, 1950.
- [11] T. Cazenave and F. B. Weissler. Asymptotically periodic solutions for a class of nonlinear coupled oscillators. *Portugal. Math.*, 52(1): 109–123, 1995.
- [12] T. Cazenave and F. B. Weissler. Unstable simple modes of the nonlinear string. *Quart. Appl. Math.*, 54(2): 287–305, 1996.

- [13] Y. Chen and P. J. McKenna. Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations. *J. Differential Equations*, 136(2): 325–355, 1997.
- [14] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [15] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.
- [16] P. Collet and J.-P. Eckmann. *Instabilities and fronts in extended systems*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [17] S. H. Crandall et al. *An introduction to the mechanics of solids*. McGraw-Hill, 2 ed. edition, 1978.
- [18] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3): 851–1112, 1993.
- [19] K. Deckelnick and H.-C. Grunau. Boundary value problems for the one-dimensional willmore equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 30(3): 293–314, 2007.
- [20] DEINFRA-SC. DEINFRA - Histórico da Ponte Hercílio Luz. *DEINFRA - Departamento Estadual de Infraestrutura*. Disponível em: <http://www.deinfra.sc.gov.br/jsp/informacoes_sociedade/ponte_HercilioLuz.jsp>. Acessado em: 30 de janeiro de 2016.
- [21] S. Deng and X. Li. Generalized homoclinic solutions for the swift–hohenberg equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 390(1): 15–26, 2012.
- [22] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [23] V. Ferreira, F. Gazzola and Moreira dos Santos, E. Instability of modes in a partially hinged rectangular plate. 2016, preprint.
- [24] V. Ferreira and E. Moreira dos Santos. On the finite space blow up of the solutions of the Swift–Hohenberg equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54(1): 1161–1182, 2015.
- [25] A. Ferrero and F. Gazzola. A partially hinged rectangular plate as a model for suspension bridges. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 35(12): 5879–5908, 2015.
- [26] F. Gazzola. Nonlinearity in oscillating bridges. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 211, 47, 2013.

- [27] F. Gazzola. *Mathematical models for suspension bridges*. Springer, 2015.
- [28] F. Gazzola, H. Grunau and G. Sweers. *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2010.
- [29] F. Gazzola and P. Karageorgis. Refined blow-up results for nonlinear fourth order differential equations. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12: 677–693, 2015.
- [30] F. Gazzola and R. Pavani. Blow up oscillating solutions to some nonlinear fourth order differential equations. *Nonlinear Anal.*, 74(17): 6696–6711, 2011.
- [31] F. Gazzola and R. Pavani. Blow-up oscillating solutions to some nonlinear fourth order differential equations describing oscillations of suspension bridges, iabmas12. In *6th International Conference on Bridge Maintenance, Safety, Management, Resilience and Sustainability*, pages 3089–3093, 2012.
- [32] F. Gazzola and R. Pavani. Wide oscillation finite time blow up for solutions to nonlinear fourth order differential equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 207(2): 717–752, 2013.
- [33] F. Gazzola and Y. Wang. Modeling suspension bridges through the von Kármán quasilinear plate equations. In *Contributions to Nonlinear Elliptic Equations and Systems - A tribute to Djairo Guedes de Figueiredo on occasion of his 80th Birthday*. Birkhäuser - Springer, 2015.
- [34] Golden Gate Bridge (San Francisco, 1937) | Structurae. *Structurae - International Database and Gallery of Structures*. Disponível em: <<http://structurae.net/structures/golden-gate-bridge>>. Acessado em: 31 de janeiro de 2016.
- [35] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed edition, 1980.
- [36] P. Hartman. *Ordinary differential equations*, volume 38 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [37] Hercílio Luz Bridge (Florianópolis, 1926) | Structurae. *Structurae - International Database and Gallery of Structures*. Disponível em: <<http://structurae.net/structures/hercilio-luz-bridge>>. Acessado em: 15 de janeiro de 2016.
- [38] G. W. Hunt, H. M. Bolt and J. M. T. Thompson. Structural localization phenomena and the dynamical phase-space analogy. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 425(1869): 245–267, 1989.
- [39] Jacob’s Creek Bridge (Uniontown/Greensburg, 1801) | Structurae. *Structurae - International Database and Gallery of Structures*. Disponível em: <<http://structurae.net/structures/jacob-s-creek-bridge>>. Acessado em: 30 de janeiro de 2016.

- [40] P. Karageorgis and J. Stalker. A lower bound for the amplitude of traveling waves of suspension bridges. *Nonlinear Anal.*, 75(13): 5212–5214, 2012.
- [41] G. H. Knightly and D. Sather. Nonlinear buckled states of rectangular plates. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 54: 356–372, 1974.
- [42] A. C. Lazer and P. McKenna. Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 4, pages 243–274, 1987.
- [43] A. C. Lazer and P. J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev.*, 32(4): 537–578, 1990.
- [44] G. Lenz. Tacoma narrows bridge collapse. *Youtube*, 2008. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1XyG68_caV4>. Acessado em: 28 de novembro de 2016.
- [45] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's equation*. Courier Corporation, 2013.
- [46] E. H. Mansfield. *The bending and stretching of plates*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989.
- [47] P. J. McKenna. Large-amplitude periodic oscillations in simple and complex mechanical systems: outgrowths from nonlinear analysis. *Milan J. Math.*, 74: 79–115, 2006.
- [48] P. J. McKenna and W. Walter. Nonlinear oscillations in a suspension bridge. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98(2): 167–177, 1987.
- [49] P. J. McKenna and W. Walter. Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(3): 703–715, June 1990.
- [50] C.-L. Navier. Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques. *Bull. Sci. Soc. Philomathique de Paris*, 5: 95–102, 1823.
- [51] L. Peletier and W. Troy. Pattern formation described by the swift-hohenberg equation. *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku*, 1178: 1–15, 2000.
- [52] L. A. Peletier and V. Rottschäfer. Pattern selection of solutions of the swift–hohenberg equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 194(1): 95–126, 2004.
- [53] L. A. Peletier and W. C. Troy. Multibump periodic travelling waves in suspension bridges. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 128(03): 631–659, 1998.
- [54] L. A. Peletier and W. C. Troy. *Spatial patterns*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 45. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. Higher order models in physics and mechanics.

- [55] P. Radu, D. Toundykov and J. Trageser. Finite time blow-up in nonlinear suspension bridge models. *Journal of Differential Equations*, 257(11): 4030–4063, 2014.
- [56] Y. Rocard. *Dynamic instability: automobiles, aircraft, suspension bridges*. F. Ungar Pub. Co., 1957.
- [57] S. Santra and J. Wei. Homoclinic solutions for fourth order traveling wave equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41(5): 2038–2056, 2009.
- [58] R. Scott. In the wake of tacoma. *Suspension Bridges and the Quest for Aerodynamic Stability*. ASCE, Reston, 2001.
- [59] D. Smets and J. B. van den Berg. Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations. *J. Differential Equations*, 184(1): 78–96, 2002.
- [60] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Physical Review A*, 15(1): 319, 1977.
- [61] A. Tikhonov, A. Vasil’eva and A. Sveshnikov. *Differential Equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, 1985.
- [62] G. J. B. van den Berg, L. A. Peletier and W. C. Troy. Global branches of multi-bump periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 158(2): 91–153, 2001.
- [63] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin plates and shells: theory: analysis and applications*. CRC press, 2001.
- [64] S. Woinowsky-Krieger. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. *J. Appl. Mech.*, 17: 35–36, 1950.
- [65] File: Clifton.bridge.arp.750pix.jpg - Wikimedia Commons. *Wikimedia Commons*. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1159540>>. Acessado em: 13 de dezembro de 2015.
- [66] File: Golden Gate Bridge Aerial.jpg - Wikimedia Commons. *Wikimedia Commons*. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=469370>>. Acessado em: 30 de janeiro de 2016.
- [67] File: Pont-suspendu-dalle-orthotrope.svg - Wikimedia Commons. *Wikimedia Commons*. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File: Pont-suspendu-dalle-orthotrope.svg>>. Acessado em: 24 de janeiro de 2016.
- [68] File: Ponte Hercílio Luz, Florianópolis SC. 03.JPG - Wikimedia Commons. *Wikimedia Commons*. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=34612850>>. Acessado em: 26 de janeiro de 2016.

- [69] File: Tacoma Narrows Bridge 2009.jpg - Wikimedia Commons. *Wikimedia Commons*. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9282157>>. Acessado em: 30 de janeiro de 2016.