SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 19/02/2004

Assinatura: *Ana Paula Jampaio Jreque*

Formas traço e elementos algébricos sobre corpos Hilbertianos¹

Fábio Alexandre de Matos

Orientadora: *Profa. Dra. Ires Dias*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Ires Dias

Prof. Dr. Antonio José Engler

Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira

“Aos meus pais e irmãos”

Agradecimentos

Acima de tudo a Deus, pelo dom de minha vida e por ter me dado forças suficientes a fim de superar os obstáculos e conquistar meu objetivo.

À Profa. Ires Dias, pela orientação e seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus pais, Maria do Carmo e Edson, pelo amor, compreensão, preocupação e apoio que sempre manifestaram e principalmente pelo esforço que fizeram para que eu tivesse oportunidade de estudo e conseguisse concluir mais esta etapa de minha vida.

Aos meus irmãos Júlio, Daniela, Fernanda e Denise, e a toda minha família pelo carinho, que de maneira indireta contribuíram sensivelmente para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas graduação, Alex, Aline, Flávia, Grazielle, Kelly, Luci, Mariana e Mário, e aos amigos que encontrei neste instituto, que sempre me incentivaram e me ajudaram de alguma forma a ultrapassar muitos obstáculos e tornaram esta caminhada mais agradável.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e sempre me incentivaram a prosseguir em meus estudos e a não desistir de meus objetivos.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigado!

Abstract

In this work we are present a study about trace forms, scaled trace forms and algebraic elements in the Witt ring of the bilinear spaces over Hilbertian fields.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre formas traço, formas traço escalar e elementos algébricos no anel de Witt dos espaços bilineares sobre corpos Hilbertinos.

Sumário

Introdução	1
1 Espaços Bilineares, Anel de Witt e Formas Traço	2
1.1 Espaços bilineares e o Anel de Witt	2
1.2 Formas Traço e Classes Algébricas	9
2 Ordens	13
3 Corpos Hilbertianos	21
3.1 Subconjuntos de Hilbert, corpos Hilbertianos e Reduções	21
3.2 Extensões separáveis de corpos Hilbertianos	26
3.3 Exemplos	29
4 Formas Traço Escalar sobre Corpos Hilbertianos	32
5 Formas Traço sobre Corpos de Números Algébricos	39
Referências Bibliográficas	48

Introdução

É difícil precisar quando apareceu pela primeira vez a noção de forma traço de uma extensão finita e separável de corpos. Já em 1853, Hermite e Sylvester usaram formas traço em conexão com seus estudos de raízes reais de um polinômio. Desde então a forma traço tem aparecido esporadicamente em vários contextos. Olga Taussky-Todd em [T] foi a primeira a estudar formas traço por sua própria importância e não como um ferramenta. Mais recentemente, Serre em [Se] estudou formas traço dando uma interpretação topológica para o símbolo de Hasse de formas traço. Em 1984, Conner e Perlis, em [C-P], apresentaram uma coletânea de resultados sobre formas traço de corpos de números algébricos e, neste texto, deixam algumas questões, que, a procura por suas respostas, levaram vários matemáticos a estudar formas traço e elementos algébricos em anéis de Witt.

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados sobre formas traço sobre corpos Hilbertianos que generalizam resultados apresentados em [C-P]. Tais resultados são partes dos artigos [S2], [W] e [K] e compõem os capítulos 4 e 5 deste trabalho.

Os 3 capítulos iniciais contêm resultados preliminares necessários para a compreensão do trabalho.

bilinear b a $W \times W$, então dizemos que $(W, b|_W)$ é um **subespaço não degenerado** de (V, b) se $\widehat{b}|_W$ é um isomorfismo.

Denotaremos por $\mathfrak{Bil}(K)$ o conjunto de todos os espaços bilineares não degenerados sobre o corpo K e, no que segue, salvo menção contrária, os espaços bilineares considerados serão sempre não degenerados.

Uma **isometria** entre dois espaços bilineares (V, b) , (V', b') é um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi : V \rightarrow V'$, que preserva a forma bilinear, ou seja, $b'(\varphi(x), \varphi(y)) = b(x, y)$ para todo $x, y \in V$. Quando existe uma isometria entre dois espaços bilineares (V, b) e (V', b') dizemos que os espaços bilineares são **isométricos** e denotaremos por $(V, b) \simeq (V', b')$, ou simplesmente $b \simeq b'$ ou ainda $V \simeq V'$.

Se (V, b) é um espaço bilinear e $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V sobre K , então a forma bilinear é unicamente determinada pela matriz quadrada $B = (b_{ij}) = (b(v_i, v_j))$, $1 \leq i, j \leq n$, pois para $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ e $y = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ em V temos que $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \alpha_i \beta_j$. Em termos matriciais temos que se

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

são os vetores coordenadas de x e y em relação à base $\{v_1, \dots, v_n\}$, então $b(x, y) = X^t B Y$. Reciprocamente, para cada matriz simétrica em $M_n(K)$, obtemos uma forma bilinear simétrica seguindo os passos descritos acima.

O **determinante** do espaço bilinear (V, b) , com relação à base $\{v_1, \dots, v_n\}$, é definido como sendo o determinante da matriz (b_{ij}) módulo K^2 , ou seja, é o determinante de (b_{ij}) a menos de quadrados, e será denotado por $\det b$. É fácil verificar que o determinante de um espaço bilinear independe da escolha da base.

É imediato que um espaço bilinear (V, b) é não degenerado se, e somente se $\det b \neq 0$. Também é fácil ver que um espaço bilinear (V, b) é não degenerado se, e somente se $\widehat{b}$ é injetora, isto é, se $b(x, y) = 0$, para todo $y \in V$, então $x = 0$. Resumimos estes fatos em:

Lema 1.1. Seja (V, b) um espaço bilinear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Se $b(x, y) = 0$ para todo $y \in V$, então $x = 0$;
- (ii) $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$;
- (iii) $\det b \neq 0$.

Dem.: Imediata. ■

Sejam $(V, b), (V', b') \in \mathfrak{Bil}(K)$. Definimos a **soma ortogonal** de (V, b) e (V', b') como sendo o espaço bilinear

$$(V, b) \perp (V', b') = (V \oplus V', b \perp b'),$$

onde $b \perp b'((x \oplus x'), (y \oplus y')) = b(x, y) + b'(x', y')$, para todo $x, y \in V$ e $x', y' \in V'$. É fácil ver que $(V \oplus V', b \perp b') \in \mathfrak{Bil}(K)$, o qual denotaremos por $V \perp V'$ ou ainda $b \perp b'$.

Definimos o **produto tensorial** dos espaços bilineares (V, b) e (V', b') como sendo o espaço bilinear

$$(V, b) \otimes (V', b') = (V \otimes V', b \otimes b'),$$

onde $b \otimes b'(x \otimes x', y \otimes y') = b(x, y)b'(x', y')$, para todo $x, y \in V$ e $x', y' \in V'$. Novamente, pode-se ver que $(V \otimes V', b \otimes b') \in \mathfrak{Bil}(K)$.

Mostra-se facilmente pelas propriedades de produto tensorial e soma direta que estas operações são comutativas, associativas e que o produto tensorial se distribui com relação à soma ortogonal. Além disso, estas operações são compatíveis com relação a isometrias, ou seja, $(V, b) \simeq (V', b')$ e $(V_1, b_1) \simeq (V'_1, b'_1)$, então

$$(V \oplus V_1, b \perp b_1) \simeq (V' \oplus V'_1, b' \perp b'_1) \text{ e } (V \otimes V_1, b \otimes b_1) \simeq (V' \otimes V'_1, b' \otimes b'_1).$$

Sejam (V, b) um espaço bilinear e (V_1, b_1) um subespaço de (V, b) . O conjunto $V_1^\perp = \{x \in V; b(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in V_1\}$ é chamado o **complemento ortogonal** de V_1 em V com relação à forma bilinear b . Note que $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ se, e somente se $V^\perp = \{0\}$.

Seja (V, b) um espaço bilinear. Um subespaço $U \subseteq V$ é dito ser **totalmente isotrópico** se $U \subseteq U^\perp$ e é dito ser um **subespaço isotrópico maximal** ou **metabolizador** se $U = U^\perp$. Um elemento $v \in V - \{0\}$ é dito ser **isotrópico** se o subespaço $U = Kv$ de V é totalmente isotrópico. Um elemento $v \in V$ é dito ser **anisotrópico** se o subespaço $U = Kv$ de V é não degenerado. Ainda, dizemos que (V, b) é um **espaço bilinear isotrópico** se V contém um vetor isotrópico. Se todos os elementos de V são anisotrópicos, dizemos que (V, b) é um **espaço bilinear anisotrópico**.

Lema 1.2. Se $(W, b|_W)$ é um subespaço não degenerado de um espaço bilinear (V, b) , então $V = W \perp W^\perp$.

Dem.: Da definição de complemento ortogonal, é suficiente mostrar que $V = W \oplus W^\perp$. Como W é não degenerado, temos que $\widehat{b}|_W : W \rightarrow W^*$ é um isomorfismo. Se $x \in W \cap W^\perp$, então $\widehat{b}|_W(x) \in W$ e $x \in W^\perp$. Logo, para todo $y \in W$, temos que $(\widehat{b}|_W x)(y) = b(x, y) = 0$, o que mostra que $x \in \text{Ker}(\widehat{b}|_W) = \{0\}$. Assim, $W \cap W^\perp = \{0\}$. Dado $x \in V$, temos que $b_{x|W} \in W^*$ e como $(W, b|_W)$ é não degenerado, existe $y \in W$ tal que $b_{x|W} = \widehat{b}|_W(y)$. Logo, para todo $z \in W$, temos

$$b(x, z) = b_x(z) = b_{x|W}(z) = (\widehat{b}|_W(y))(z) = b(y, z), \text{ ou seja, } x - y \in W^\perp.$$

Além disso, $x = y + (x - y)$, com $y \in W$ e $(x - y) \in W^\perp$, de onde segue que $V = W + W^\perp$. ■

Dizemos que um espaço bilinear (V, b) é **próprio** se existe $v \in V$ tal que $b(v, v) \neq 0$. Caso contrário, diremos que (V, b) é **impróprio**.

Lema 1.3. Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ próprio tal que $\dim V \geq 2$. Então (V, b) possui um subespaço próprio não degenerado de dimensão 2.

Dem.: Sejam $v \in V$ tal que $b(v, v) \neq 0$ e $W = Kv \subseteq V$. Então $(W, b|_W)$ é não degenerado e do **Lema 1.2** temos que $(V, b) = (W, b|_W) \perp (W_1, b|_{W_1})$, onde $W_1 = W^\perp$ também é não degenerado, pois $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$. Se $(W_1, b|_{W_1})$ é próprio, então usando novamente o argumento acima, temos que existe $y \in W_1$ tal que $b|_{W_1}(y, y) = b(y, y) \neq 0$. Logo, se W_2 é o subespaço gerado por y temos que $(V, b) = (W, b|_W) \perp (W_2, b|_{W_2}) \perp (W_3, b|_{W_3})$ e $(W, b|_W) \perp (W_2, b|_{W_2})$ é o subespaço próprio não degenerado de dimensão 2 procurado. Se $(W_1, b|_{W_1})$ é impróprio, desde $(W_1, b|_{W_1})$ que é não degenerado, existem $z, t \in W_1$ tais que $b(z, t) \neq 0$. Tomando $w_2 = v + z$ e $w_3 = v + \lambda t$, onde $\lambda = -\frac{b(v, v)}{b(z, t)}$, $W_2 = Kw_2$ e $W_3 = Kw_3$, temos que $(W_2 \oplus W_3, b|_{W_2 \oplus W_3})$ é um subespaço próprio não degenerado de (V, b) de dimensão 2, pois a matriz de $b|_{W_2 \oplus W_3}$ com relação à base $\{w_2, w_3\}$ é

$$(b_{ij}) = (b(w_i, w_j)) = \begin{pmatrix} b(v, v) + b(z, z) & 0 \\ 0 & b(v, v) + \lambda^2 b(t, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(v, v) & 0 \\ 0 & b(v, v) \end{pmatrix},$$

que é inversível, o que demonstra o lema. ■

Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$, dizemos que (V, b) é **diagonalizável**, se V possui uma base ortogonal com relação à forma bilinear b .

Observação 1.4. Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ próprio, com $\dim V \geq 2$. Então da demonstração do lema anterior, temos que o subespaço próprio não degenerado de dimensão 2 de V tem base ortogonal.

O próximo resultado garante que todo $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ próprio possui uma base ortogonal.

Teorema 1.5. Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ próprio. Então (V, b) é a soma ortogonal de subespaços de dimensão 1, ou seja, (V, b) é diagonalizável.

Dem.: A demonstração será feita por indução sobre a dimensão de V . Se $\dim V = 1$ nada temos a demonstrar. Assumiremos que $\dim V \geq 2$. Desde que (V, b) é próprio, do **Lema 1.2** e da **Observação 1.4** segue que

$$(V, b) = (W_1, b|_{W_1}) \perp (W_2, b|_{W_2}) \perp (W_3, b|_{W_3}), \text{ com } \dim W_1 = \dim W_2 = 1.$$

Considerando $(V_1, b_1) = (W_2, b|_{W_2}) \perp (W_3, b|_{W_3})$, temos que (V_1, b_1) é próprio, pois W_2 é gerado por um elemento w_2 tal que $b(w_2, w_2) \neq 0$. Por hipótese de indução, temos que (V_1, b_1) admite uma base ortogonal que, juntamente com w_1 , o gerador de W_1 , formam uma base ortogonal para (V, b) . ■

Sejam $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ próprio, $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de V e $\alpha_i = b(v_i, v_i)$, para $1 \leq i \leq n$. Neste caso, denotaremos (V, b) e/ou a forma bilinear b por $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$.

Observação 1.6. Se K tem característica distinta de 2, então todo espaço bilinear em $\mathfrak{Bil}(K)$ é próprio e, do teorema anterior, é diagonalizável. De fato, seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$. Desde que (V, b) é não degenerado, existem $x, y \in V$ tais que $b(x, y) \neq 0$. Mas,

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y)),$$

de onde segue que $b(x + y, x + y), b(x, x), b(y, y)$ não são nulos simultaneamente. Assim, $b(z, z) \neq 0$, para algum $z \in \{x + y, x, y\}$, ou seja, o espaço (V, b) é próprio.

Para espaços bilineares isotrópicos temos o seguinte resultado que nos será útil.

Proposição 1.7. Sejam K um corpo de característica distinta de 2 e $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ isotrópico. Então existe um subespaço não degenerado (W, b') de (V, b) tal que $b \simeq \langle 1, -1, \rangle \perp b'$.

Dem.: Como (V, b) é isotrópico e não degenerado, temos que existem $v, w \in V$ tais que $b(v, v) = 0$ e $b(v, w) \neq 0$. Multiplicando w por um escalar se necessário, podemos assumir que $b(v, w) = 1$. Se $b(w, w) \neq 0$, trocando w por $-\frac{b(w, w)}{2}v + w$, podemos assumir também que $b(w, w) = 0$. Tomando $W_1 = Kv \oplus Kw$, temos que em relação à base $\{v, w\}$ de W_1 , a matriz de $b_1 = b|_{W_1}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Logo (W_1, b_1) é um espaço não degenerado de (V, b) e, do **Lema 1.2**, temos que $W = W_1^\perp$ e $b' = b|_W$ satisfaz $b \simeq b_1 \perp b'$. Como $b_1\left(v + \frac{w}{2}, v + \frac{w}{2}\right) = 1$ e $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, de [Lam] pag. 20, segue que $b_1 \simeq \langle 1, -1 \rangle$. ■

Nosso próximo objetivo é demonstrar o teorema do cancelamento de Witt para espaços bilineares. Tal resultado não vale para espaços bilineares sobre corpos de característica distinta de 2, como pode ser visto no **Exemplo 1.10** à seguir.

Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$. Para todo elemento anisotrópico $y \in V$, definimos a aplicação $\tau_y : V \rightarrow V$, por

$$\tau_y(x) = x - \frac{2b(x, y)}{b(y, y)}y, \text{ para todo } x \in V.$$

É fácil ver que, de fato, τ_y é uma isometria de (V, b) , chamada de **reflexão**.

Lema 1.8. Sejam K um corpo com $\text{car}(K) \neq 2$, $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$ e $x, y \in V$ elementos anisotrópicos tais que $b(x, x) = b(y, y)$. Então existe um elemento anisotrópico z tal que $\tau_z(y) = x$.

Dem.: Desde que $b(x, x) = b(y, y) \neq 0$ e $\text{car}(K) \neq 2$, segue que $b(x + y, x + y) + b(x - y, x - y) = 2b(x, x) + 2b(y, y) = 4b(x, x) \neq 0$ em K . Sem perda da generalidade,

podemos assumir que $b(x - y, x - y) \neq 0$, pois caso contrário podemos trocar y por $-y$. Temos então que $z = x - y$ é um elemento anisotrópico de V e desde que

$$\begin{aligned} b(x - y, x - y) &= b(x, x) + b(y, y) - 2b(x, y) \\ &= 2[b(x, x) - b(x, y)] \\ &= 2b(x, x - y), \end{aligned}$$

temos que

$$\tau_z(x) = \tau_{x-y}(x) = x - \frac{2b(x, x - y)}{b(x - y, x - y)}(x - y) = x - (x - y) = y,$$

como queríamos. ■

Teorema 1.9 (Teorema do Cancelamento de Witt). Sejam K um corpo com $\text{car}(K) \neq 2$, (V_1, b_1) , (V_2, b_2) e $(V_3, b_3) \in \mathfrak{Bil}(K)$ tais que $b_1 \perp b_2 \simeq b_1 \perp b_3$. Então $b_2 \simeq b_3$.

Dem.: Usando indução sobre a dimensão de V_1 , é suficiente mostrarmos para o caso em que $\dim V_1 = 1$. Mais ainda, como $b_1 \perp b_2 \simeq b_1 \perp b_3$, comparando as dimensões, podemos supor que $b_1 = \langle \gamma \rangle$, $b_2 = \langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ e $b_3 = \langle \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$. Sejam $x \in V_1 \perp V_2$ tal que $b(x, x) = \gamma$ e $y \in V_1 \perp V_3$ tal que $b(y, y) = \gamma$. Do lema anterior, existe uma isometria τ entre $V_1 \perp V_2$ e $V_1 \perp V_3$ tal que $\tau(x) = y$ e, como $V_1 \cong Kx$ e $V_1 \cong Ky$, temos que $\tau|_{V_2}$ é uma isometria entre V_2 e V_3 , o que mostra o teorema. ■

Exemplo 1.10. Sejam K um corpo de característica 2, (V, b) um espaço bilinear sobre K , onde $b = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a base de V correspondente a esta decomposição. Tomando $x = v_1 + v_2$, $y = v_1 + v_3$, e $W = Kx \oplus Ky \subseteq V$, temos que a matriz de $b_1 = b|_W$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, (W, b_1) é um subespaço não degenerado (V, b) , e do **Lema 1.2** temos que $(V, b) \simeq (W, b_1) \perp (W, b_1)^\perp$. É fácil ver que $z = x_1 + x_2 + x_3$ e $t = x_4$ formam uma base para $W^\perp$. Ainda, com relação à esta base, $b_2 = b|_{W^\perp}$ tem a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\langle 1, 1, 1, 1 \rangle \simeq \langle 1, 1 \rangle \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponha, por um momento que podemos aplicar o teorema de cancelamento de Witt. Então existe uma isometria φ entre os espaços $(U, b_3) = \langle 1, 1 \rangle$ e (W, b_1) . Ainda, note que para $w \in W$, temos $w = \alpha x + \beta y \in W$, com $\alpha, \beta \in K$ e $b_1(w, w) = \alpha^2 b_1(x, x) + 2\alpha\beta b_1(x, y) + \beta^2 b_1(y, y) = 0$. Se $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$ é uma base para o espaço vetorial U , então $1 = b_3(u_1, u_1) = b_1(\varphi(u_1), \varphi(u_1)) = 0$, o que é um absurdo.

Portanto, o teorema de cancelamento de Witt não vale para espaços bilineares sobre corpos de característica 2.

Vamos agora construir o anel de Witt dos espaços bilineares sobre K .

Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$. Dizemos que (V, b) é **Witt trivial** ou **metabólico** se V admitir um subespaço totalmente isotrópico maximal U .

Sejam $(V, b), (V', b') \in \mathfrak{Bil}(K)$. Dizemos que (V, b) e (V', b') são **Witt equivalentes** e denotaremos por $(V, b) \sim (V', b')$ se, e somente se $(V \oplus V', b \perp (-b'))$ é Witt trivial.

A relação “Witt equivalente” é uma relação de equivalência em $\mathfrak{Bil}(K)$. De fato, se $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$, então é fácil ver que a diagonal $U = \{v + v; v \in V\} \subseteq V \oplus V$ é um metabolizador de $(V \oplus V, b \oplus (-b))$, ou seja, a relação é reflexiva.

Sejam $(V, b), (V', b') \in \mathfrak{Bil}(K)$ tais que $(V, b) \sim (V', b')$. Logo, existe um subespaço metabolizador $N = N \oplus N'$ de $V \oplus V'$. Claramente $W = N' \oplus N$ é um metabolizador de $V' \oplus V$, ou seja, $(V', b') \sim (V, b)$, e a relação é simétrica.

Sejam $(V_1, b_1), (V_2, b_2), (V_3, b_3) \in \mathfrak{Bil}(K)$ tais que $(V_1, b_1) \sim (V_2, b_2)$ e $(V_2, b_2) \sim (V_3, b_3)$. Logo existem subespaços metabolizadores $N = N_1 \oplus N_2$ e $W = W_2 \oplus W_3$ de $V_1 \oplus V_2$ e $V_2 \oplus V_3$ respectivamente. Então $N_1 \oplus W_3$ é um subespaço metabolizador de $V_1 \oplus V_3$, pois para todo $x_i, y_i \in V_i, i = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned} (b_1 \perp (-b_3))((x_1 \oplus x_3), (y_1 \oplus y_3)) &= b_1(x_1, y_1) - b_3(x_3, y_3) \\ &= b_1(x_1, y_1) - b_2(x_2, y_2) + b_2(x_2, y_2) - b_3(x_3, y_3) \\ &= (b_1 \perp (-b_2))((x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2) \\ &\quad + (b_2 \perp (-b_3))(x_2 \oplus x_3, y_2 \oplus y_3)) \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

logo a relação é transitiva.

Por abuso de notação, continuaremos a denotar por (V, b) a classe de equivalência representada pelo espaço bilinear (V, b) e por $W(K)$ o conjunto de todas as classes de equivalência.

As operações $\perp$ e $\otimes$ de $\mathfrak{Bil}(K)$ induzem de maneira natural duas operações bem definidas em $W(K)$, as quais continuaremos denotando por $\perp$ e $\otimes$.

É fácil ver que com estas operações $W(K)$ é um anel comutativo com elemento identidade $\langle 1 \rangle$, chamado o **anel de Witt dos espaços bilineares sobre K** .

Em $W(K)$, o elemento neutro da adição é a classe de qualquer espaço metabólico e o oposto aditivo de (V, b) é $(V, -b)$.

Observação 1.11. Note que o espaço bilinear $\langle 1, -1 \rangle$ é zero em $W(K)$, pois se $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortogonal de $(V, b) = \langle 1, -1 \rangle$, então $U = K(v_1 + v_2)$ é um metabolizador de (V, b) , ou seja, (V, b) é metabólico. Mais ainda, se $\text{car}(K) \neq 2$, e (V, b) é metabólico, usando indução sobre a dimensão de V e a **Proposição 1.7** obtemos que existe um inteiro positivo m , tal que $b \simeq m\langle 1, -1 \rangle$.

Com relação às classes de equivalência, temos:

Teorema 1.12. Seja K corpo de característica distinta de 2. Então (V, b) , (V_1, b_1) em $\text{Bil}(K)$ são isométricos se, e somente se $\dim V = \dim V_1$ e são Witt equivalentes.

Dem.: Se $(V, b) \simeq (V_1, b_1)$, então claramente $\dim V = \dim V_1$ e $(V, b) \sim (V_1, b_1)$.

Por outro lado, se $(V, b) \sim (V_1, b_1)$, então da observação acima, temos que existe um inteiro positivo m tal que $b \perp (-b_1) \simeq m\langle 1, -1 \rangle$. Somando b_1 em ambos os lados e usando que $(-b_1) \perp b_1$ é witt trivial, da observação acima, temos que $(-b_1) \perp b_1 \simeq \dim(b_1)\langle 1, -1 \rangle$ e, conseqüentemente, $b \perp \dim(b_1)\langle 1, -1 \rangle \simeq m\langle 1, -1 \rangle \perp b_1$. Como $\dim b = \dim b_1$, obtemos que $m = \dim b_1$ e, do teorema do cancelamento de Witt, segue que $b \simeq b_1$, como queríamos. ■

Encerramos esta seção mostrando que $W(K)$ é aditivamente gerado por espaços bilineares de dimensão 1, ou seja, todo elemento de $W(K)$ pode ser representado por um espaço bilinear que admite base ortogonal.

Teorema 1.13. O anel $W(K)$ é aditivamente gerado por espaços de dimensão 1.

Dem.: Seja $(V, b) \in W(K)$. Desde que $\langle 1, -1 \rangle = 0$ em $W(K)$, temos que $b_1 = b \perp \langle 1, -1 \rangle$ em $W(K)$. Como $b \perp \langle 1, -1 \rangle$ é um espaço bilinear próprio, o resultado segue do **Teorema 1.5**. ■

1.2 Formas Traço e Classes Algébricas

Apresentaremos, nesta seção o conceito de forma traço, de forma traço escalar e de classes algébricas do anel de Witt, bem como alguns resultados sobre os mesmos, os quais serão considerados nos capítulos seguintes. Alguns conceitos, notações e resultados de extensões de corpos serão usados sem referência podem ser encontrados em [St].

Sejam L/K uma extensão finita e separável de corpos, $\overline{K}$ o fecho algébrico de K e $n = [L : K]$, o grau da extensão L/K . Da teoria clássica de extensões de corpos, temos que existem exatamente n imersões

$$\sigma_i : L \rightarrow \overline{K},$$

que fixam o corpo K , ou seja, K é o corpo fixado por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Ainda, se $\sigma_i(x) = x$ para todo $i = 1, \dots, n$, então $x \in K$. Além disso, do fato de que L/K é separável, temos que tais imersões são todas distintas.

Vamos mostrar que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é de fato um conjunto linearmente independente sobre K . Se $n = 1$, então nada temos a fazer desde que $\sigma_1 \neq 0$. Suponhamos que exista uma relação

$$a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r = 0, \quad (1.1)$$

com $a_i \in K$, $1 \leq i \leq r$, não todos nulos. Escolhemos uma tal relação com r o menor possível. Então $r \geq 2$, pois se $r = 1$, temos $a_1 = 0$, pois $\sigma_1 \neq 0$. Como $\sigma_1 \neq \sigma_2$, temos que existe $y \in L$ tal que $\sigma_1(y) \neq \sigma_2(y)$. Desde que σ_1 é uma imersão, segue que se $\sigma_1(y) = 0$, então $y = 0$, e assim $\sigma_2(y) = 0$. Logo, $\sigma_i(y) \neq 0$, para $i = 1, 2$. Além disso, para todo $x \in L$, de (1.1) temos que

$$a_1\sigma_1(yx) + \dots + a_r\sigma_r(yx) = (a_1\sigma_1(y)\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r(y)\sigma_r)(x) = 0, \quad (1.2)$$

ou seja,

$$a_1\sigma_1(y)\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r(y)\sigma_r = 0. \quad (1.3)$$

Multiplicando (1.1) por $\sigma_1(y)$ e subtraindo de (1.3), obtemos

$$(a_2\sigma_1(y) - a_2\sigma_2(y))\sigma_2 + \dots + (a_r\sigma_1(y) - a_r\sigma_r(y))\sigma_r = 0,$$

onde $(a_2\sigma_1(y) - a_2\sigma_2(y)) \neq 0$, o que contradiz a minimalidade de r . Portanto o conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é linearmente independente.

Para cada $x \in L$, definimos o **traço** de x por $tr_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x)$. Temos que $tr_{L/K}(x) \in K$, pois $\sigma_j(tr_{L/K}(x)) = \sigma_j\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_j(\sigma_i(x)) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) = tr_{L/K}(x)$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Assim, $tr_{L/K}$ é uma aplicação K -linear de L em K , chamada de **traço da extensão** L/K . Mais ainda, desde que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ são linearmente independentes, temos que a aplicação $tr_{L/K}$ é não nula. Além disso, usando a teoria de extensões de corpos pode-se mostrar o seguinte resultado básico sobre o comportamento dos traços de extensões.

Lema 1.14. Sejam F/L e L/K extensões separáveis e finitas de corpos. Então

$$tr_{L/K} \circ tr_{F/L} = tr_{F/K}.$$

Considere, agora, a aplicação $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle : L \times L \rightarrow K$, definida por $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x, y) = tr_{L/K}(xy)$, para todo par $(x, y) \in L \times L$. Assim definida, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ é claramente uma forma bilinear simétrica chamada **a forma traço** da extensão L/K .

Desde que a aplicação $tr_{L/K}$ é não nula, temos que existe $z \in L$ tal que $tr_{L/K}(z) \neq 0$. Assim, se $0 \neq x \in L$, é tal que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x, y) = tr_{L/K}(xy) = 0$ para todo $y \in L$, então tomando $y = x^{-1}z \in L$ temos que $tr_{L/K}(xx^{-1}z) = tr_{L/K}(z) = 0$, que é um absurdo. Logo, se $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x, y) = 0$ para todo $y \in L$, então $x = 0$. Usando o Lema 1.1 segue que a forma bilinear $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ é não degenerada. Assim, temos:

Proposição 1.15. Seja L/K uma extensão finita e separável de corpos. Então a aplicação $tr_{L/K} \in \text{Hom}_K(L, K)$ é não nula. Além disso, a aplicação $T : L \rightarrow \text{Hom}_K(L, K)$, definida por $x \mapsto Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x, \cdot)$, para todo $x \in L$, é um isomorfismo.

Denotaremos o espaço bilinear $(L, Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)$ simplesmente por $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ e por $\mathfrak{Tt}(K)$ a família das classes de isometria de tais formas traço, ou seja, $(V, b) \in \mathfrak{Tt}(K)$ se, e somente se existe uma extensão finita e separável de corpos L/K tal que $(V, b) \simeq Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$.

Um elemento (V_1, b_1) de $W(K)$ é dito ser **algébrico** se existe uma extensão finita e separável de corpos L/K tal que $(V_1, b_1) = Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ em $W(K)$, ou seja, se (V, b) pode ser representado por uma forma traço de alguma extensão separável de corpos L/K .

Sejam L/K uma extensão finita e separável e $s \in \dot{L}$. Considere a aplicação

$$Tr_{L/K}\langle s \rangle : L \times L \rightarrow K,$$

definida por $Tr_{L/K}\langle s \rangle(x, y) = tr_{L/K}(sxy)$, para todo par $(x, y) \in L \times L$. Note que $Tr_{L/K}\langle s \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e, usando novamente o **Lema 1.1** obtemos que $Tr_{L/K}\langle s \rangle$ é não degenerada.

A forma bilinear $Tr_{L/K}\langle s \rangle$ é chamada **a forma traço escalar** da extensão L/K associada ao elemento $s \in L$.

O espaço bilinear $(L, Tr_{L/K}\langle s \rangle)$ será denotada simplesmente por $Tr_{L/K}\langle s \rangle$ e denotaremos por $\mathfrak{TtE}(K)$ a família das classes de isometria de tais forma traço, ou seja, $(V, b) \in \mathfrak{TtE}(K)$ se, e somente se existe uma extensão finita e separável de corpos L/K e $s \in \dot{L}$ tal que $(V, b) \simeq Tr_{L/K}\langle s \rangle$.

Note que se $s \in \dot{L}^2$, ou seja, $s = r^2$ onde $r \in \dot{L}$, temos que $Tr_{L/K}\langle s \rangle = Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$. De fato, tomando o isomorfismo linear $\sigma : L \rightarrow L$ dado por $\sigma(x) = rx$ para todo $x \in L$, temos que $(L, Tr_{L/K}\langle 1 \rangle) \simeq (L, Tr_{L/K}\langle s \rangle)$. Logo, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle \simeq Tr_{L/K}\langle s \rangle$, o que implica que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = Tr_{L/K}\langle s \rangle$ em $W(K)$, ou seja, $Tr_{L/K}\langle s \rangle$ é algébrico.

Vale observar que se $s \notin \dot{L}^2$ não podemos garantir que a igualdade acima não seja verdadeira. De qualquer modo, se $s \notin \dot{L}^2$, temos que $[L(\sqrt{s}) : L] = 2$ e a forma traço da extensão $L(\sqrt{s})$ de K é um elemento algébrico de $W(K)$.

O próximo resultado nos dá uma ligação entre $Tr_{L/K}\langle \sqrt{s} \rangle$, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ e $Tr_{L/K}\langle s \rangle$.

Teorema 1.16. Sejam K um corpo, L uma extensão finita e separável de K e $s \in \dot{L} - \dot{L}^2$. Em $W(K)$ temos

$$Tr_{L(\sqrt{s})/K}\langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle (Tr_{L/K}\langle 1 \rangle + Tr_{L/K}\langle s \rangle).$$

Dem.: Note primeiramente que $[L(\sqrt{s}) : L] = [K \otimes (L \oplus L) : L] = 2$. Considere o seguinte isomorfismo de K -espaços vetoriais $\phi : L(\sqrt{s}) \rightarrow K \otimes (L \oplus L)$ definido por $\phi(x + y(\sqrt{s})) = 1 \otimes (x \oplus y)$, para todo $x, y \in L$. Sejam $v = v_1 + v_2\sqrt{s}$, $w = w_1 + w_2\sqrt{s} \in L(\sqrt{s})$. Então, $vw = v_1w_1 + sv_2w_2 + (v_1w_2 + v_2w_1)\sqrt{s}$ e $tr_{L(\sqrt{s})/L}(vw) = 2(v_1w_1 + sv_2w_2)$. Aplicando $tr_{L/K}$, do **Lema 1.14** obtemos, $tr_{L(\sqrt{s})/K}(vw) = tr_{L/K}(tr_{L(\sqrt{s})/L}(vw)) = tr_{L/K}(2(v_1w_1 + sv_2w_2)) = 2tr_{L/K}(v_1w_1) + tr_{L/K}(sv_2w_2)$. Logo, os espaços $(L(\sqrt{s}), Tr_{L(\sqrt{s})/K}\langle 1 \rangle)$ e

$(K \otimes (L \oplus L), 2(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle + Tr_{L/K}\langle s \rangle))$ são isométricos e do Teorema 1.12, temos que $Tr_{L(\sqrt{s})/K}\langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle + Tr_{L/K}\langle s \rangle)$ em $W(K)$. ■

Capítulo 2

Ordens

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre corpos ordenados, que serão necessários no decorrer do trabalho. Como foge ao objetivo do trabalho, alguns resultados básicos serão apenas citados e deixamos como referência principal [S1].

Seja K um corpo. Um subconjunto P de K é dito ser uma **ordem** de K se:

$$P + P \subseteq P, \quad P \cdot P \subseteq P, \quad -1 \notin P, \quad \diamond K \subseteq P, \quad P \cup -P = K \quad \text{e} \quad P \cap -P = \{0\},$$

onde $\diamond K = \{x \in K; \ x \text{ é uma soma de quadrados em } K\}$.

Um **corpo ordenado** é um par (K, P) consistindo de um corpo K e uma ordem P de K . Além disso, se $x \in P - \{0\}$, então diremos que x é **positivo**. Se $x \in K$ é tal que x é positivo em todas as ordens P de K , então x é dito ser **totalmente positivo**. Dizemos que $(F, R)/(K, P)$ é uma **extensão de corpos ordenados** se F/K é uma extensão de corpos e $P \subseteq R$. Neste caso, R é dita ser **extensão de P para F** .

Note que todo corpo ordenado (K, P) tem característica zero. De fato, se $\text{car}(K) = p > 0$, então $-1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p-1 \text{ vezes}} \in P$.

Observação 2.1. Se $(L, R)/(K, P)$ é uma extensão finita de corpos ordenados, então L/K é separável, desde que K tem característica zero. Mais ainda, do Teorema do Elemento Primitivo, ver [L] pag. 243, temos que $L = K(\alpha)$, para algum $\alpha \in L$ e, se $p(X)$ é o polinômio minimal de α sobre K , então $L \cong \frac{K[X]}{(p(X))}$.

O próximo resultado nos diz quando dada uma extensão L/K , existe uma extensão de P para L .

Teorema 2.2. Seja (K, P) um corpo ordenado. Então:

- (i) Se $L = K(\sqrt{d})$, então existe uma extensão R de P para L se, e somente se $d \in P$.
- (ii) Se L/K é uma extensão finita de grau ímpar, então sempre existe uma extensão R de P para L .

Dem.: Seja $d \in P$. Considere o semi-anel R' de L gerado por P e por $\diamond L$, isto é, o conjunto formado pelos elementos da forma

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i^2, \quad x_i \in P, \quad y_i \in L, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $-1 \in R'$, então

$$\begin{aligned} -1 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i + \beta_i \sqrt{d})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i^2 + 2\alpha_i \beta_i \sqrt{d} + \beta_i^2 d) = \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 d) + \left(\sum_{i=1}^n 2x_i \alpha_i \beta_i \right) \sqrt{d}, \end{aligned}$$

ou seja, $-1 = \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 d) \in P$, o que é uma contradição. Então, $-1 \notin R'$. É fácil ver que $R' + R' \subseteq R'$, $R' \cdot R' \subseteq R'$, e $\diamond L \subseteq R'$. Logo, existe uma ordem R de L tal que $R' \subseteq R$. (Ver [Sch] pag 108.) Por outro lado, se existe alguma extensão R de P para L , então $\sqrt{d} \in R$ ou $-\sqrt{d} \in R$. Como $P = K \cap R$, temos que $d = (\pm\sqrt{d})^2 \in K \cap R = P$, o que mostra a afirmação (i).

Seja L/K uma extensão finita de grau ímpar. Pela **Observação 2.1**, $L = K(\alpha)$, para algum $\alpha \in L$. Seja $p(X) \in K[X]$, polinômio minimal de α sobre K . Vamos demonstrar a afirmação (ii) por indução sobre $n = [L : K]$. Note que se $n = 1$, $L = K$ e nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que a afirmação seja verdadeira para toda extensão F/K de grau ímpar $m < n$. Consideremos R' o semi-anel de L gerado por P e por $\diamond L$ e suponhamos que $-1 \in R'$. Então $-1 = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2 \pmod{p(X)}$, onde $\alpha_i \in P$, I é um conjunto finito de índices e $\text{gr}(f_i(X)) < n = \text{gr}(p(X))$. Logo, temos que $-1 = p(X)q(X) + \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2$, para algum $q(X) \in K[X]$. Note que os polinômios $f_i(X) \in K[X]$ não são constantes, pois caso contrário, como $p(\alpha) = 0$, teríamos $-1 = p(\alpha)q(\alpha) + \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\alpha)^2 = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i^2 \in P$, o que é uma contradição.

Note, ainda, que o termo de maior grau em $\sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2$ é de ordem par. Como $-1 = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2 + p(X)q(X)$ é constante, segue que $p(X)q(X)$ tem o mesmo grau que $\sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2$. E assim, $q(X)$ tem grau ímpar, pois $p(X)$ tem grau ímpar. Além disso, temos que $\text{gr}(q(X)) < n = \text{gr}(p(X))$, pois caso contrário teríamos $\text{gr}(\sum_{i \in I} \alpha_i f_i(X)^2) \geq n^2$, o que não é possível desde que $\text{gr}(f_i(X)) \leq n - 1$.

Seja $r_1(X) \cdots r_s(X) \in K[X]$ uma decomposição de $q(X)$ em fatores irredutíveis. Desde que $q(X)$ tem grau ímpar, temos que existe um fator $r_j(X)$ com grau $m < n$ ímpar, denotaremos tal $r_j(X)$ simplesmente por $r(X)$. Seja β uma raiz de $r(X)$ e considere $F = K(\beta)$. Temos que $[F : K] = m < n$ é ímpar. Por hipótese de indução, existe uma

extensão S de P para F . Temos então que $P \subseteq S$ e $\diamond F \subseteq S$. Mas,

$$-1 = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\beta)^2 + p(\beta)q(\beta) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\beta)^2 \in S,$$

o que é um absurdo.

Logo, concluímos que $-1 \notin R'$ e ainda temos que $R' + R' \subseteq R'$, $R' \cdot R' \subseteq R'$, e $\diamond L \subseteq R'$. Logo, existe uma ordem R de L tal que $R' \subseteq R$. (Ver [S1] pag. 108). ■

Um corpo K é dito ser **formalmente real** se -1 não é soma de quadrados em K . Um corpo **formalmente real** K é dito ser um **corpo real-fechado** se K não admite nenhuma extensão L/K algébrica própria e formalmente real. Uma extensão algébrica L/K é chamada o **fêcho real** de K se L é real-fechado. Analogamente, um corpo ordenado (K, P) é dito ser um **corpo ordenado real-fechado** se (K, P) não admite nenhuma extensão $(L, R)/(K, P)$ algébrica e própria. Uma extensão algébrica $(L, R)/(K, P)$ é chamada o **fêcho real ordenado** de (K, P) , se (L, R) é real-fechado.

De [S1] pag. 111, temos que todo corpo ordenado (K, P) admite um fêcho real ordenado (L, R) , e além disso, L possui uma única ordem R , a saber $R = \diamond L = L^2$.

Seja K um corpo. Dizemos que K é **euclidiano** se K^2 é uma ordem de K . Note que todo corpo real-fechado é euclidiano.

Vejamos agora como estes conceito estão relacionados.

Teorema 2.3. Seja K um corpo. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é real-fechado.
- (ii) K é euclidiano e todo polinômio de grau ímpar sobre K tem uma raiz em K .
- (iii) K não é algebricamente fechado, mas $K(\sqrt{-1})$ é algebricamente fechado.

Dem.: Se K é real fechado, então $P = K^2$ é a única ordem de K . Logo, K é euclidiano. Assuma, agora, que existe um polinômio $p(X) \in K[X]$ irredutível e de grau ímpar. Seja $L = \frac{K[X]}{(p(X))}$. Então $[L : K]$ tem grau ímpar e assim, usando o **Teorema 2.2** (ii), existe uma extensão de R de P para L . Logo L é formalmente real e L/K é uma extensão algébrica própria, o que contradiz o fato de K ser real-fechado. Logo, todo polinômio de grau ímpar sobre K tem uma raiz em K , o que mostra que (i) implica em (ii).

Agora, se K é euclidiano e não admite extensão algébrica de grau ímpar, então K não é algebricamente fechado, pois $[K(\sqrt{-1}) : K] = 2$. Tomando $L = K(\sqrt{-1})$, temos que todo elemento de L é um quadrado, ou seja, $L = L^2$, pois para $\alpha + \beta\sqrt{-1} \in L$, temos que $x + y\sqrt{-1} \in L$, onde $x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$ e $y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$ é tal que $(x + y\sqrt{-1})^2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, ou seja, L não possui extensão quadrática. Se existe F/L extensão algébrica tal que $[F : L] = 2^m > 1$, onde m é ímpar, considere N o fêcho normal de F sobre L , $G = \text{Gal}(N/K)$, o grupo de Galois de N/K , H o 2-Sylow subgrupo de G

e F_H o corpo fixo por H . Como $[G : H] = [F_H : K]$ temos que $[F_H : K]$ tem grau ímpar. Mas, K não admite extensões de grau ímpar. Logo $F_H = K$ e $m = 1$. Assim, G é um 2-grupo e portanto solúvel. Consequentemente existe uma cadeia de subgrupos de G

$$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_r = G,$$

com $[H_{i+1} : H_i] = 2$. Para cada $i = 0, \dots, r$, seja L_i o subcorpo de N fixo por H_i . Então $L_{r-1} = L$ desde que $[H_r : H_{r-1}] = 2$ e $[L : K] = 2$. Agora $[L_{r-2} : L_{r-1}] = 2$, mas $L_{r-1} = L$ e L não possui extensão quadrática. Logo, $L_{r-2} = L$. Seguindo este raciocínio concluímos que $N = L_r = L_{r-1} = \cdots = L$. Portanto L é algebricamente fechado, o que mostra que (ii) implica (iii).

Finalmente assuma (iii), ou seja, K não é algebricamente fechado, mas $K(\sqrt{-1})$ é algebricamente fechado. Temos então que K não possui extensão algébrica de grau maior que 2 e ainda $L = K(\sqrt{-1})$ é a única extensão algébrica de K de grau 2. Mais ainda, a extensão L/K , não pode ser ordenada, pois $-1 = (\sqrt{-1})^2 \in \dot{L}^2$. Resta então mostrar que K é formalmente real e assim K será real-fechado. Note, primeiramente, que $-1 \notin K^2$, pois caso contrário $L = K$. Para mostrar que -1 não é soma de quadrados em K é suficiente mostrar que para todo $\alpha, \beta \in K$, temos $\alpha^2 + \beta^2 \in K^2$ e, conseqüentemente toda soma finita de quadrados será um quadrado em K . Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, claramente temos que $\alpha^2 + \beta^2 \in K^2$. Assuma, então, que $\alpha, \beta \neq 0$ e considere $f(X) = (X^2 - \alpha)^2 + \beta^2 \in K[X]$. Note que em $L[X]$, $f(X)$ se decompõe como

$$f(X) = (X^2 - \alpha - \beta\sqrt{-1})(X^2 - \alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

Desde que L é algebricamente fechado, temos que existem $a, b \in L$ tais que $\alpha + \beta\sqrt{-1} = a^2$ e $\alpha - \beta\sqrt{-1} = b^2$. Assim,

$$f(X) = (X - a)(X + a)(X - b)(X + b) \in L[X].$$

Como $[L : K] = 2$ e $f(X)$ tem grau 4, segue que $f(X)$ é redutível em $K[X]$. Além disso, como $a, b, a^2, b^2 \notin K$, temos que ou $(X - a)(X + b)$ ou $(X - a)(X + b)$ é irredutível em $K[X]$. Desta forma, segue que $ab \in K$. Portanto,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = a^2b^2 \in K^2,$$

como queríamos. ■

Colorário 2.4. Seja K um corpo real-fechado. Então todo polinômio sobre K se decompõe como um produto de fatores lineares e quadráticos.

Dem.: Imediata. ■

Sejam (K, P) um corpo ordenado, $(V, b) \in W(K)$ e $n = \dim b$. Desde que K é ordenado, segue que K tem característica zero, então da **Observação 1.6**, temos que (V, b) é diagonalizável, ou seja, $b \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Se m é o número de α_i positivos com relação à

ordem P de K , então o número $s = m - (n - m) = 2m - n$ é chamado a **assinatura** do espaço (V, b) em relação à ordem P e será denotado por $ass((V, b))$, ou simplesmente de $ass(b)$.

Nosso próximo passo é calcular a assinatura da forma traço associada a uma extensão L/K . Para tanto, consideremos $(L, Q)/(K, P)$ uma extensão finita e separável, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ a forma traço associada à extensão L/K e (F, R) um fêcho real ordenado de (K, P) . Desde que L/K é finita e separável, da **Observação 2.1**, temos que $L = K(\alpha)$, para algum $\alpha \in L$. Seja $p(X) \in K[X]$ o polinômio minimal de α . Assim, $L \cong \frac{K[X]}{(p(X))}$. Considere a seguinte forma bilinear $(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)_F = \langle 1 \rangle_F \otimes Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$ definida sobre o F -espaço vetorial $F \otimes L \cong \frac{F[X]}{(p(X))}$. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de L sobre K , então $\{1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n\}$ é uma base do F -espaço vetorial $F \otimes L$.

Note que se $v_i \in L$ é tal que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(v_i, v_i)$ é positivo com relação a ordem P , então $\langle 1 \rangle_F \otimes Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(1 \otimes v_i, 1 \otimes v_i) = Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(v_i, v_i)$ é positivo com relação a R , pois R estende P para F . Assim, temos que $ass_P(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle) = ass((Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)_F)$. Vamos fazer uma observação sobre o corpo $\frac{F[X]}{(p(X))}$. Do corolário anterior, temos que $p(X)$ se decompõe como um produto de fatores lineares e quadráticos em $F[X]$ e é separável, desde que L/K é separável. Logo, em $F[X]$, temos que

$$p(X) = p_1(X) \cdots p_m(X),$$

onde $gr(p_i(X)) \leq 2$ e $p_i(X) \neq p_j(X)$ para $i \neq j$. Do Teorema Chinês do Resto, temos o seguinte isomorfismo

$$\frac{F[X]}{(p(X))} \cong \frac{F[X]}{(p_1(X))} \oplus \cdots \oplus \frac{F[X]}{(p_m(X))}.$$

Alguns dos polinômios $p_i(X)$ são lineares, digamos $p_1(X), \dots, p_r(X)$, enquanto os restantes $p_{r+1}(X), \dots, p_m(X)$ são quadráticos. Note que o número de fatores lineares é exatamente o número de raízes de $p(X)$ em F . Do **Teorema 2.3** temos que $E = F(\sqrt{-1})$ é algebricamente fechado e $[E : F] = 2$. Assim, $\frac{F[X]}{(p_i(X))} = F$, para $i = 1, \dots, r$ e $\frac{F[X]}{(p_i(X))} = E$, para $i = r + 1, \dots, m$. Logo, temos que

$$\frac{F[X]}{(p(X))} \cong \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{r \text{ vezes}} \oplus \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{(m-r) \text{ vezes}}.$$

Proposição 2.5. Seja (K, P) um corpo ordenado com fêcho real F . Sejam $p(X) \in K[X]$ um polinômio irreduzível e $L = \frac{K[X]}{(p(X))}$. Então:

$$ass_P(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle) = r$$

onde r é o número de raízes de $p(X)$ em F . Em particular, o número de raízes de $p(X)$ depende somente de P e não da escolha de F .

Dem.: Temos que $\text{ass}_P(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle) = \text{ass}((\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle)_F)$ e o F -espaço vetorial associado a $(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle)_F$ é

$$F \otimes_K L \cong \frac{F[X]}{(p(X))} \cong \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{r \text{ vezes}} \oplus \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{(m-r) \text{ vezes}},$$

onde $E = F(\sqrt{-1})$. Além disso, essa decomposição é ortogonal com relação à $(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle)_F$. Logo, $(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle)_F$ decompõe ortogonalmente como

$$(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle)_F = \phi_1 \perp \cdots \perp \phi_r \perp \phi_{r+1} \perp \cdots \perp \phi_m,$$

onde $\phi_1, \dots, \phi_r$ são formas bilineares de dimensão 1 e $\phi_{r+1}, \dots, \phi_m$ são formas bilineares de dimensão 2. Mais ainda,

$$\text{ass}(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle_F) = \sum_{i=1}^m \text{ass}(\phi_i).$$

Se $i = 1, \dots, r$, então $\phi_i = \text{Tr}_{F/F}\langle 1 \rangle$, que é a identidade e neste caso, temos que $\text{ass}(\phi_i) = \text{ass}((\text{Tr}_{F/F}\langle 1 \rangle)_F) = 1$. Se $i = r+1, \dots, m$, então $\phi_i = \text{Tr}_{E/F}\langle 1 \rangle$ e neste caso, temos que a matriz da forma traço $\text{Tr}_{E/F}\langle 1 \rangle$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente $\text{ass}((\text{Tr}_{F_i/F}\langle 1 \rangle)_{F_i}) = 0$. Portanto, $\text{ass}_P(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle) = \text{ass}(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle_F) = \sum_{i=1}^m \text{ass}(\phi_i) = r$, como queríamos. ■

Proposição 2.6. Sejam (K, P) um corpo ordenado com fêcho real F e $L = K(\alpha)$ uma extensão algébrica simples. Seja $\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle$ a forma bilinear definida acima. Assuma que $\text{ass}_P(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle) = r > 0$. Então existem, no máximo, r diferentes extensões R_i de P a L . Além disso, as extensões são dadas pelas diferentes imersões $\sigma_i : L \rightarrow F$, isto é, $R_i = \sigma_i^{-1}(F^2)$.

Dem.: Seja $p(X) \in K[X]$ o polinômio minimal de α sobre K . Assim, $L \cong \frac{K[X]}{(p(X))}$. Do lema anterior, temos que r é exatamente o número de raízes de $p(X)$ em F . Além disso, r é o número de K -imersões $\sigma_i : L \rightarrow F$. Considere o conjunto $S = \{R_i = \sigma_i^{-1}(F^2), \text{ para } i = 1, \dots, r\}$. Como F é real-fechado, temos que F^2 é a única ordem de F e, conseqüentemente $P \subseteq F^2$. Ainda, temos que $\sigma_i(K) = K$ para todo $i = 1, \dots, r$. Logo $P \subseteq R_i$ para todo $i = 1, \dots, r$. Assim, R_i são extensões de P para L .

Suponhamos que exista outra extensão Q de P para L . Da definição das extensões R_i , temos que existem $a_i \in Q$ tal que $\sigma_i(a_i) \notin F^2$, para cada $i = 1, \dots, r$. Desta maneira, temos que $a_i \notin L^2$, desde que $L^2 \subseteq R_i$, para todo $i = 1, \dots, r$. Logo, usando o **Teorema**

2.2, temos que Q se estende a uma ordem Q_1 de $L_1 = L(\sqrt{a_1})$. Ainda, como $Q \subseteq Q_1$, segue que $a_2 \in Q \subseteq Q_1$ e assim usando novamente o **Teorema 2.2** Q_1 se estende a uma ordem Q_2 de $L_2 = L_1(\sqrt{a_2})$. Seguindo esse processo, obtemos uma ordem R , extensão de Q , para $E = L(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_r})$. Desde que $\text{car}(K) = 0$, E/K é separável, temos da **Observação 2.1** que existe um elemento primitivo $\beta \in E$ tal que $E = K(\beta)$. Seja $q(X) \in K[X]$ o polinômio minimal de β sobre K . Como $\text{ass}(Tr_{L/K}(1)) > 0$, da proposição anterior temos que $q(X)$ possui pelo menos um zero em F . Logo, existe uma K -imersão

$$\sigma : E \rightarrow F.$$

Então, $\sigma|_L = \sigma_j$, para algum j . Temos, então que

$$\sigma_j(a_j) = \sigma(a_j) = \sigma(\sqrt{a_j}^2) = \sigma(\sqrt{a_j})^2 \in F^2,$$

o que é uma contradição. Portanto, não existe tal extensão Q de P , ou seja, o conjunto S é formado por todas as extensões de P para L . ■

Teorema 2.7. Seja (K, P) um corpo ordenado. Então

- (i) Se $(L, R)/(K, P)$ é uma extensão algébrica de corpos ordenados e F o fêcho real de (K, P) , então existe uma imersão $\sigma : L \rightarrow F$ que preserva ordem.
- (ii) Se E, F são fêchos reais de (K, P) , então existe exatamente um K -isomorfismo entre E e F que, necessariamente preserva ordem.
- (iii) Na situação da proposição anterior, temos que as extensões R_i , para $i = 1, \dots, r$ de P para L são distintas.

Dem.: Considere o conjunto S de todos os corpos K' tais que $K \subseteq K' \subseteq L$ e existe uma K -imersão

$$\sigma : (K', K' \cap R) \rightarrow (F, F^2)$$

que preserva ordem. Note que $S \neq \emptyset$, pois $K \in S$. Logo, do Lema de Zorn, existe um elemento maximal K'_0 de S . Do lema anterior, temos que $L \in S$ e, como $K'_0 \subseteq L$ segue que $K'_0 = L$. Portanto existe uma K -imersão $\sigma : L \rightarrow F$, o que prova (i).

Por (i) temos que existe um K -homomorfismo $\sigma : E \rightarrow F$. Seja $\tau : E \rightarrow F$ um outro homomorfismo. Desde que $\tau(E^2) \subseteq F^2$, e E e F são fêchos reais de K , temos que τ preserva ordem como σ . Seja $\alpha \in E$ com polinômio minimal $p(X)$ sobre K e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ seus conjugados em E . Podemos supor que $\alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_r$. Desde que σ e τ preservam a única ordem de E , temos que

$$\sigma(\alpha_1) < \dots < \sigma(\alpha_r) \quad \text{e} \quad \tau(\alpha_1) < \dots < \tau(\alpha_r).$$

Portanto, temos que $\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i)$ e em particular, $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$, de onde segue (ii).

Assuma, agora, que $R_i = R_j = R$ para algum $i \neq j$. Seja E o fêcho real de (L, R) . Por (i) as imersões $\sigma_i \neq \sigma_j$ se estendem a diferentes K -homomorfismos $\tau_i \neq \tau_j : E \rightarrow F$. Mas isto é impossível pelo ítem (ii). Logo vale (iii). ■

Teorema 2.8. Seja (K, P) um corpo ordenado e L/K uma extensão finita. Então para todo espaço bilinear $\langle \alpha \rangle$ sobre L , temos:

$$ass_P(Tr_{L/K}\langle \alpha \rangle) = \sum_{R \supseteq P} ass_R(\langle \alpha \rangle),$$

onde a soma é tomada sobre todas as extensões R de P para L .

Dem.: Como L/K é finita e $car(K) = 0$ temos que $L = K(\alpha)$, para algum $\alpha \in L$. Seja $p(X) \in K[X]$ o polinômio minimal de α sobre K . Assim, $L \cong \frac{K[X]}{(p(X))}$. Temos que $ass_P(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle) = ass((Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)_F)$ e o F -espaço vetorial associado a $(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)_F$ é $F \otimes_K L \cong \frac{F[X]}{(p(X))}$. Além disso,

$$\frac{F[X]}{(p(X))} \cong F \oplus \cdots \oplus F \oplus E \oplus \cdots \oplus E,$$

onde $E = F(\sqrt{-1})$.

Usando as **Proposições 2.5** e **2.6** temos que o número de extensões R de P para L é exatamente o número de fatores F na decomposição acima. Assim, se α é negativo na extensão R de P temos que $ass_R(\langle \alpha \rangle) = -1$ e se α é positivo na extensão R de P temos que $ass_R(\langle \alpha \rangle) = 1$. Logo $ass(\langle \alpha \rangle) = 0$ sobre E . Denote por n_+ o número de fatores F nos quais α é positivo e por n_- o número de fatores F nos quais α é negativo. Então,

$$ass_P(Tr_{L/K}\langle \alpha \rangle) = ass_P(Tr_{L/K}\langle \alpha \rangle)_F = n_+ - n_- = \sum_{R \supseteq P} ass_R(\langle \alpha \rangle),$$

como queríamos. ■

Capítulo 3

Corpos Hilbertianos

Os principais resultados que compõem este trabalho são sobre formas traço e formas traço escalares sobre corpos hilbertianos. Assim, neste capítulo, apresentaremos a definição e alguns resultados sobre tais corpos.

3.1 Subconjuntos de Hilbert, corpos Hilbertianos e Reduções

Sejam K um corpo, $T = \{T_1, \dots, T_r\}$ e $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ dois conjuntos de variáveis livres. Sejam $f_1(T, X), \dots, f_m(T, X)$ polinômios nas variáveis $X_1, \dots, X_n$ com coeficientes em $K(T)$, o corpo de frações do anel de polinômios $K[T]$. Assuma ainda que $f_1(T, X), \dots, f_m(T, X)$ são polinômios irredutíveis sobre o anel $K(T)[X]$. Para $0 \neq g(T)$ em $K[T]$, denote por $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ o conjunto das r -uplas $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in K^r$ tais que $g(\mathbf{a}) \neq 0$ e $f_1(\mathbf{a}, X), \dots, f_m(\mathbf{a}, X)$ são irredutíveis em $K[X]$. Chamamos tais conjuntos $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ de **subconjuntos de Hilbert** de K^r . Se $g = 1 \in K$, então denotaremos $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ simplesmente por $H_K(f_1, \dots, f_m)$.

Um corpo K é dito ser **Hilbertiano** se todos os seus subconjuntos de Hilbert são não vazios.

No que segue, T, X representam conjuntos de variáveis, enquanto T, X, Y, T_i, X_i são variáveis únicas. A primeira observação que temos é

Proposição 3.1. Todo corpo Hilbertiano é infinito.

Dem.: Sejam K um corpo Hilbertiano e $H_K(f; g)$, onde $f \in K(T)[X]$ é irredutível e $0 \neq g \in K[X]$, um subconjunto de Hilbert de K . Suponhamos que o subconjunto $H_K(f; g) \subseteq K$ é finito, ou seja, $H_K(f; g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Considere o polinômio $h(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \in K[X]$ e o subconjunto de hilbert $H_K(f; hg)$. Note que $hg \neq 0$ em $K[X]$. Seja $\alpha \in K$. Se $\alpha \in H_K(f; g)$, então $h(\alpha) = 0$ e assim $hg(\alpha) = 0$. Logo $\alpha \notin H_K(f; hg)$. Se $\alpha \notin H_K(f; g)$, então ou $f(\alpha, X)$ é redutível em $K[X]$ ou $g(\alpha) = 0$.

Mas em ambos os casos segue que $\alpha \notin H_K(f; hg)$. Logo, $H_K(f; hg) = \emptyset$, o que contradiz o fato de K ser hilbertiano. Portanto $H_K(f; g) \subseteq K$ é infinito, o que implica que o corpo K é infinito. ■

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar uma aplicação que é ferramenta útil na demonstração de alguns resultados no decorrer do capítulo.

Seja $S_K(n, d)$ o conjunto de todos os polinômios $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ com $gr_{X_j}(f) < d$, $j = 1, \dots, n$. Considere a aplicação:

$$S_d : S_K(n, d) \rightarrow S_K(1, d^n),$$

definida $S_d(X_j) = Y^{d^{j-1}}$, $j = 1, \dots, n$. A aplicação S_d é chamada de **substituição de Kronecker**.

Note que os coeficientes de f coincidem com os coeficientes de $S_d(f)$, ou seja, se $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_i a_i X_1^{i(1)} \dots X_n^{i(n)}$, onde $a_i \in K$, então,

$$S_d(f) = \sum_i a_i (Y^{d^{1-1}})^{i(1)} \dots (Y^{d^{n-1}})^{i(n)} = \sum_i a_i Y^{i(1) + i(2)d + \dots + i(n)d^{n-1}}.$$

Ainda, se tivermos $f, g \in S_K(n, d)$ tais que $fg \in S_K(n, d)$, então $S_d(fg) = S_d(f)S_d(g)$.

Sejam $A = \{0, 1, \dots, d-1\}$, $B = \{0, 1, \dots, d^n-1\} \subseteq \mathbb{Z}$ e considere a aplicação $\varphi : A^n \rightarrow B$, dada por $\varphi(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2d + \dots + a_nd^{n-1}$. Note que φ é claramente sobrejetora e usando que um número inteiro se escreve de maneira única em uma dada base, temos que φ é injetora. Note que para cada i , temos $i(1) + i(2)d + \dots + i(n)d^{n-1} = \varphi(i(1), \dots, i(n))$. Agora, usando igualdade de polinômios e o fato que φ é bijetora, obtemos que S_d é bijetora, ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre $S_K(n, d)$ e $S_K(1, d^n)$.

Não é uma tarefa fácil analisar se um dado corpo é Hilbertiano. Apresentaremos, então, alguns resultados de reduções que nos permitem analisar mais facilmente se um dado corpo é Hilbertiano.

Lema 3.2. Cada conjunto de Hilbert $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ de K contém um conjunto de Hilbert da forma $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g')$ onde cada f'_i é irredutível no anel $K[T, X]$, para $i = 1, \dots, m$.

Dem.: Para cada $i = 1, \dots, m$, temos que $f_i(T, X) \in K(T)[X]$, ou seja, $f_i(T, X) = \sum_j \frac{\alpha_{ij}(T)}{\beta_{ij}(T)} X_1^{j(1)} \dots X_n^{j(n)}$, onde $\alpha_{ij}(T), \beta_{ij}(T) \in K[T]$. Seja $g_i(T) = \text{mmc}_{1 \leq j \leq j(i)} \{\beta_{ij}(T)\}$. Então $g_i(T)f_i(T, X) \in K[T, X]$. Considere agora, $d_i(T)$ o máximo divisor comum dos coeficientes de $g_i(T)f_i(T, X)$ no anel $K(T)[X]$ e tome $f'_i = \frac{g_i(T)f_i(T, X)}{d_i(T)} \in K[T, X]$. É imediato que f'_i é um polinômio irredutível em $K[T, X]$.

Sejam $g' = g \cdot g_1 \cdot d_1 \dots g_m \cdot d_m$ e $a = (a_1, \dots, a_r) \in H_K(f'_1, \dots, f'_m; g')$. Então, $f'_i(a, X)$ é irredutível em $K[X]$, para cada $i = 1, \dots, m$ e $g'(a) \neq 0$. Note que $f_i(a, X)$ é um

polinômio irredutível em $K[X]$, pois $f'_i(a, X) = \frac{g_i(a)f_i(T, X)}{d_i(a)} = \alpha_i f_i(a, X)$, onde $\alpha_i \in K$. Além disso, como $g'(a) = g(a)g_1(a)d_1(a) \cdots g_m(a)d_m(a) \neq 0$, temos $g(a) \neq 0$. Portanto, $a \in H_K(f_1, \dots, f_m; g)$, ou seja, $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g') \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$. ■

Com isso, temos o primeiro resultado de redução.

Proposição 3.3. Se cada subconjunto de Hilbert de K da forma $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ onde cada f_i é irredutível em $K[T, X_1, \dots, X_n]$, para $i = 1, \dots, m$ é não vazio, então K é Hilbertiano.

Dem.: Sejam $f_1, \dots, f_m \in K(T)[X]$ polinômios irredutíveis e $0 \neq g$ em $K[T]$. Usando o Lema 3.2 temos que existem polinômios irredutíveis $f'_1, \dots, f'_m \in K[T, X]$ e $0 \neq g'$ em $K[T]$ tais que $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g') \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$. Vamos agora dividir as variáveis T e X em dois conjuntos: um contendo T_1 e o outro contendo $T_2, \dots, T_r, X_1, \dots, X_n$. Por hipótese, existe $a_1 \in K$ tal que para cada $i = 1, \dots, m$, $f'_i(a_1, T_2, \dots, T_r, X)$ é irredutível em $K[T_2, \dots, T_r, X_1, \dots, X_n]$ e $g'(a_1, T_2, \dots, T_r) \neq 0$. Repetindo esse processo r vezes, temos que existem elementos $a_1, \dots, a_r \in K$ tais que para cada $i = 1, \dots, m$, $f'_i(a_1, a_2, \dots, a_r, X)$ é irredutível em $K[X]$ e $g'(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq 0$. Logo, $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g') \neq \emptyset$ e consequentemente, $H_K(f_1, \dots, f_m; g) \neq \emptyset$, ou seja, K é hilbertiano. ■

O próximo passo é considerar a redução no número de variáveis.

Lema 3.4. Cada subconjunto de Hilbert de K contém um subconjunto de Hilbert de K da forma $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$, onde para cada $i = 1, \dots, m$, f_i é um polinômio em duas variáveis T, X irredutível, isto é, $f_i \in K[T, X]$ com $gr_X(f_i) \geq 1$ e $0 \neq g \in K[X]$.

Dem.: Note que se tomarmos um subconjunto de Hilbert $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ de K e considerarmos os subconjuntos $H_i = H_K(f_i; g)$ temos que $H_K(f_1, \dots, f_m; g) = \bigcap_{i=1}^m H_i$. Logo, basta demonstrar o lema para os subconjuntos de Hilbert de K da forma $H_K(f_i; g)$, ou seja, devemos encontrar polinômios f_{ij} irredutíveis em $K[T, X]$ com $gr_X(f_{ij}) \geq 1$, $j = 1, \dots, j(i)$ e $0 \neq g_j \in K[X]$ tais que $H_K(f_{ij}, \dots, f_{i, j(i)}; g_j) \subseteq H_K(f_i; g)$. De fato, se tomarmos $h = g_1 \cdots g_m$, e o conjunto $\{f_{ij}; 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq j(i)\} \subseteq K[T, X]$, teremos que $H_K(f_{ij}; h) = \bigcap_j H_K(f_{ij}; g_j) \subseteq \bigcap_i H_K(f_i; g) = H_K(f_1, \dots, f_m; g)$.

Seja $H_K(f; g)$ um subconjunto de Hilbert de K , onde $f \in K[T, X]$ e $g \in K[T]$. Note que em f , pelo menos uma variável X_i deve aparecer, pois caso contrário teríamos que $f(a, X)$ seria constante para todo $a \in K$, ou seja, o subconjunto de Hilbert $H_K(f; g)$ seria vazio.

Seja $d > \max_{1 \leq j \leq n} \{gr_{X_j}(f)\}$. Aplicando a substituição de Kronecker S_d a f nas variáveis X_i e considerando a fatoração de $S_d(f)$ em fatores irredutíveis sobre $K[T, Y]$, temos

$$S_d(f) = \prod_{i \in I} h_i(T, Y). \quad (3.1)$$

Tome $I = J \dot{\cup} J'$ uma partição não trivial do conjunto de índices I . Da definição de S_d , temos que $S_d(f)$ tem grau no máximo d^n na variável Y e desde que a partição de I é não trivial, temos que não pode ocorrer termos de ordem d^n simultaneamente nos polinômios $\prod_{i \in J} h_i(T, Y)$ e $\prod_{i \in J'} h_i(T, Y)$. Logo, o expoente de Y que aparece nos polinômios $\prod_{i \in J} h_i(T, Y)$ e $\prod_{i \in J'} h_i(T, Y)$ não excede $d^n - 1$. Como S_d é uma bijeção, existem polinômios $p_J, p_{J'} \in K[T, \mathbf{X}]$ tais que $gr_{X_j}(p_J), gr_{X_j}(p_{J'}) < d$, para $j = 1, \dots, n$ e

$$S_d(p_J) = \prod_{i \in J} h_i(T, Y) \text{ e } S_d(p_{J'}) = \prod_{i \in J'} h_i(T, Y). \quad (3.2)$$

O produto $p_J(T, \mathbf{X})p_{J'}(T, \mathbf{X})$ contém um monômio da forma $p'_J(T, \mathbf{X}) = g_J(T)X_1^{\nu(1)} \dots X_n^{\nu(n)}$ em que pelo menos um dos $\nu(j)$ é maior que $d-1$, pois caso contrário a relação $S_d(f) = S_d(p_J)S_d(p_{J'}) = S_d(p_J p_{J'})$ implicaria numa fatoração não trivial do polinômio $f(T, \mathbf{X})$ em $p_J(T, \mathbf{X})p_{J'}(T, \mathbf{X})$.

Seja $g_1(T)$ o polinômio obtido do seguinte produto $\prod_J g(T)g_J(T) \in K[T]$ onde J percorre todas as partições não triviais de I . Note que este produto é finito, pois I é um conjunto finito. Vamos mostrar que $H_K(h_i, i \in I; g_1) \subseteq H_K(f; g)$. Seja $a \in H_K(h_i, i \in I; g_1)$. Desde que $g_1(a) \neq 0$, resta mostrar que $f(a, \mathbf{X})$ é irredutível. Se $f(a, \mathbf{X}) = q(\mathbf{X})q'(\mathbf{X})$ é uma fatoração não trivial de $f(a, \mathbf{X})$ em $K[\mathbf{X}]$, então (3.1) implica que

$$\prod_{i \in I} h_i(a, Y) = S_d(f)(a, Y) = S_d(q)(Y)S_d(q')(Y).$$

Usando a equação (3.2), temos que existe uma partição não trivial $J \dot{\cup} J'$ de I tal que $S_d(q)(Y) = \prod_{i \in J} h_i(a, Y) = S_d(p_J)(a, Y)$ e $S_d(q')(Y) = \prod_{i \in J'} h_i(a, Y) = S_d(p_{J'})(a, Y)$. E desde que S_d é bijetora, temos que $q(\mathbf{X}) = p_J(\mathbf{X})$ e $q'(\mathbf{X}) = p_{J'}(\mathbf{X})$ e portanto $p_J(a, \mathbf{X})p_{J'}(a, \mathbf{X}) = f(a, \mathbf{X})$. Note que o primeiro membro possui um monômio $p'_J(X, T) = g_J(T)X_1^{\nu(1)} \dots X_n^{\nu(n)}$ em que pelo menos um dos $\nu(j)$ é maior que $d-1$, enquanto $f(a, \mathbf{X})$ não possui tal monômio, o que é uma contradição. Portanto, $f(a, \mathbf{X})$ é irredutível em $K[\mathbf{X}]$. ■

O próximo resultado garante que podemos considerar somente os conjuntos de Hilbert de K da forma $H_K(f_1, \dots, f_m)$.

Proposição 3.5. Cada subconjunto de Hilbert de K da forma $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g)$ com $f'_i \in K[T, X]$, para $i = 1, \dots, m$ irredutíveis e $g \neq 0 \in K[T]$ contém um conjunto de Hilbert da forma $H_K(f_1, \dots, f_m)$ em que cada f_i é um polinômio mônico e irredutível em $K[T, X]$ de grau positivo em X . Assim, se os conjuntos de Hilbert de K da forma $H_K(f_1, \dots, f_m)$ são não vazios, então K é hilbertiano. Mais ainda, se $f'_1, \dots, f'_m$ são polinômios separáveis, então $f_1, \dots, f_m$ também são separáveis.

Dem.: Seja $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g)$ um subconjunto de Hilbert de K . Então, do **Lema 3.4** podemos assumir que $f'_i \in K[T, X]$ são polinômios irredutível de grau positivo $n(i)$ em

X , para todo $i = 1, \dots, m$ e $0 \neq g \in K[T]$. Note que podemos assumir $n(m) \geq 2$. De fato, se $n(i) = 1$ para todo $1 \leq i \leq m$, então tomando $f'_{m+1} \in K[T, X]$ irredutível, temos que $H_K(f'_1, \dots, f'_{m+1}; g) \subseteq H_K(f'_1, \dots, f'_m; g)$, e assim, basta fazer a demonstração para $H_K(f'_1, \dots, f'_{m+1}; g)$.

Denote o coeficiente dominante de f'_i por c_i , para todo $i = 1, \dots, m$ e considere $g_1(T) = g(T)c_1 \cdots c_m$. Note que $f'_i(T, X) = c_i X^{n(i)} b_{i,n(i)}(T) + X^{n(i)-1} b_{i,n(i)-1}(T) + \cdots$. Tomando

$$f''_i(T, X) = f'_i(T, X) g_1(T)^{n(i)} c_i^{-1} = X^{n(i)} g_1(T)^{n(i)} b_{i,n(i)}(T) + c_i^{-1} X^{n(i)-1} g_1(T)^{n(i)} b_{i,n(i)-1}(T) + \cdots$$

e substituindo $g_1(T)X$ por Y temos o seguinte polinômio irredutível

$$f_i(T, Y) = Y^{n(i)} b_{i,n(i)} + c_i^{-1} g_1(T) \sum_{j=0}^{n(i)-1} b_{ij}(T) Y^j.$$

Vamos mostrar que $H_K(f_1, \dots, f_m) \subseteq H_K(f'_1, \dots, f'_m; g)$. Seja $a \in H_K(f_1, \dots, f_m)$, então $g_1(a) \neq 0$, pois caso contrário teríamos $f_m(a, Y) = Y^{n(m)} b_{m,n(m)}(a)$ que é redutível. Além disso, a é tal que $f'_i(a, X)$ é irredutível em $K[X]$. Portanto, $H_K(f_1, \dots, f_m) \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$ e vê-se facilmente que se $f'_1, \dots, f'_m$ são separáveis na variável X , então $f_1, \dots, f_m$ também são separáveis.

Finalmente, considere um subconjunto de Hilbert de K . Usando o **Lema 3.4** temos que este subconjunto contém um subconjunto da forma $H_K(f'_1, \dots, f'_m; g)$, com a notação acima. Assim, pela construção acima, concluímos que ele contém um subconjunto de Hilbert da forma $H_K(f_1, \dots, f_m)$. Mas se os subconjuntos $H_K(f_1, \dots, f_m)$ são não vazios, então o subconjunto de Hilbert original é também não vazio e assim, segue que K é hilbertiano. ■

Finalmente, como um último resultado de redução, vamos mostrar que podemos reduzir o número de polinômios nos subconjuntos de Hilbert de K .

Teorema 3.6. Sejam $f_1, \dots, f_m \in K[T, X]$ polinômios irredutíveis e separáveis na variável X e seja $0 \neq g \in K[X]$. Então existe um polinômio $f \in K[T, X]$, separável e mônico na variável X tal que $H_K(f) \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$.

Dem.: Para cada $i = 1, \dots, m$, considere x_i uma raiz de $f_i(T, X)$ em $K(T)_s$, o fecho separável de $K(T)$. Logo $K(T, x_1, \dots, x_m)$ é uma extensão separável de $K(T)$. Então pelo teorema do elemento primitivo, temos que $K(T, x_1, \dots, x_m)$ está contido em uma extensão separável $K(T, y)$ de $K(T)$ de grau $n \geq 1$. Note que y pode ser tomado inteiro sobre $K[T]$. Seja $f'(T, X) = \text{irr}(y, K(T)) \in K(T)X$.

Como $g'(a) \neq 0$, temos que $u_i(a, x_i) \neq 0$ e, conseqüentemente, $gr(\text{irr}(y, K(T, x_i))) = gr(\text{irr}(y, K(a, x_i)))$. Assim $[K(T, y) : K(T, x_i)] = [K(a, y) : K(a, x_i)]$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Usando novamente que $g'(a) \neq 0$, temos também que $r_i(a) \neq 0$, o que implica que $gr_X(f_i(T, X)) = gr_X(f_i(a, X))$. Como $f_i(T, X)$ é irredutível e x_i é uma raiz de $f_i(T, X)$, segue que $[K(T, x_i) : K(T)] = gr_X(f_i(a, X))$.

Agora, do fato que y é inteiro sobre $K[T]$ e $f'(T, X) = \text{irr}(y, K(T))$, temos que f' é mônico na variável X , o que implica que $\text{gr}_X(f'(a, X)) = \text{gr}_X(f'(T, X))$ e, conseqüentemente, temos $[K(T, y) : K(T)] = [K(a, y) : K(a)]$.

Desde que

$$[K(T, y) : K(T)] = [K(T, y) : K(T, x_i)][K(T, x_i) : K(T)]$$

e

$$[K(a, y) : K(a)] = [K(a, y) : K(a, x_i)][K(a, x_i) : K(a)],$$

das igualdades obtidas acima, temos que $[K(T, x_i) : K(T)] = [K(a, x_i) : K(a)]$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Se $f_i(a, X)$ é redutível para algum $i = 1, \dots, m$, então $\text{gr}(\text{irr}(x_i, K(a))) = [K(a, x_i) : K(a)] < \text{gr}_X(f_i(a, X)) = [K(T, x_i) : K(T)]$, o que é uma contradição.

Portanto, os polinômios $f_1(a, X), \dots, f_m(a, X)$ são irredutíveis em $K[X]$ o que mostrar que $H_K(f', g') \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$. Da **Proposição 3.5**, temos que existe um polinômio $f \in K[T, X]$, separável e mônico na variável X tal que $H_K(f) \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$, como queríamos. ■

O subconjunto $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$, onde os polinômios $f_i \in K[T, X]$ são separáveis e mônicos para todo $i = 1, \dots, m$ é chamado de **subconjunto separável de Hilbert de K** . Dizemos que um corpo K é um de **corpo Hilbertiano separável**, se todos os seus subconjuntos separáveis de Hilbert da forma $H_K(f)$ são não vazios. Como consequência do **Teorema 3.6**, temos

Teorema 3.7. Um corpo de característica zero é Hilbertiano se, e somente se é um corpo Hilbertiano separável.

Dem.: Seja K um corpo Hilbertiano separável. Da **Proposição 3.3**, para verificar se K é Hilbertiano, é suficiente considerar os subconjuntos de Hilbert de K da forma $H_K(f_1, \dots, f_m; g)$, com $f_1, \dots, f_m \in K[T, X]$ e $0 \neq g \in K[T]$. Da **Proposição 3.6** temos que dado um tal subconjunto de Hilbert, existe um polinômio $f \in K[T, X]$ irredutível, separável e mônico na variável X tal que $H_K(f) \subseteq H_K(f_1, \dots, f_m; g)$. Desde que K é Hilbertiano separável, temos que $H_K(f)$ é não vazio. Logo, K é Hilbertiano.

A recíproca é imediata. ■

3.2 Extensões separáveis de corpos Hilbertianos

Nesta seção, mostraremos que extensões separáveis finitas de corpos Hilbertianos também são corpos Hilbertianos.

Antes de prosseguirmos vamos fazer uma observação a respeito da teoria de Galois. Se K é um corpo, denotaremos por $\overline{K}$, o **fêcho algébrico** de K . Seja K_s o **fêcho separável** de K em $\overline{K}$, ou seja, $K_s = \{\alpha \in \overline{K}; \alpha \text{ é separável sobre } K\}$. Ainda, denotaremos por

$G(K) = \text{Gal}(K_s/K)$ o grupo de galois da extensão K_s/K , que é chamado de **grupo de galois absoluto** de K . Se L/K é uma extensão finita e separável de grau n , então da teoria de Galois, sabemos que $[G(K) : \text{Gal}(L/K)] = [L : K] = n$. Assim, existem n classes laterias distintas no quociente $\frac{G(K)}{\text{Gal}(L/K)}$ que são os representantes de $\text{Gal}(L/K)$ em $G(K)$.

Lema 3.8. Seja L uma extensão separável de um corpo infinito K tal que $[L : K] = d < \infty$ e sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ os representantes de $\text{Gal}(L/K)$ em $G(K)$. Se $f \in L[X_1, \dots, X_n]$ é um polinômio não constante, então existem $c_1, \dots, c_n \in L$ tais que os d polinômios $\sigma_i(f(X_1 + c_1, \dots, X_n + c_n))$, para $i = 1, \dots, d$, são relativamente primos em $\overline{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Dem.: Sejam α um elemento primitivo da extensão L/K e $t_{ik}, i = 1, \dots, d$ e $k = 1, \dots, n$, elementos algebricamente independentes sobre K . Denote por α_i o elemento $\sigma_i(\alpha)$ e para cada $i = 1' \dots, d$ e $k = 1, \dots, n$ considere

$$u_{ik} = t_{ik} + \alpha_i t_{ik} + \dots (\alpha_i)^{d-1} t_{ik}.$$

A aplicação $t \mapsto u$ é representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{d-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \dots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Esta é uma matriz de Vandermonde e seu determinante é $\prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha)) \neq 0$, ou seja, A é inversível. Assim, o fato que t_{ik} são algebricamente independentes implica que u_{ik} são também algebricamente independentes. Considere $f = f_1 \dots f_m$ uma fatoração de f como um produto de fatores irredutíveis em $\overline{K}[X_1, \dots, X_n]$. Como os elementos u_{ik} são algebricamente independentes, temos que $(\sigma_i f_r)(u_i) \neq (\sigma_j f_s)(u_i)$, para $i \neq j$ e $1 \leq r, s \leq m$, onde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$. Portanto

$$h(t) = \prod_{i < j} \prod_{r,s} ((\sigma_i f_r)(u_i) - (\sigma_j f_s)(u_i)) \neq 0.$$

Assim, existem $\mathbf{a} = (a_{ik}) \in M_{d \times n}(K)$ tal que $h(\mathbf{a}) \neq 0$. Para cada $k = 1, \dots, n$, seja

$$c_k = a_{1k} + \alpha a_{2k} + \dots + \alpha^{d-1} a_{dk}.$$

Note que a aplicação $t \rightarrow u$ leva $\mathbf{a}$ em $\mathbf{v} = (v_{ij})$, onde $v_{ij} = \sigma_i(c_k)$. Logo, para $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, $\sigma_i(f_r(\mathbf{c})) \neq \sigma_j(f_s(\mathbf{c}))$ e portanto, $\sigma_i(f_r(\mathbf{X} + \mathbf{c})) \neq \sigma_j(f_s(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ para todos $1 \leq i < j \leq d$ e $1 \leq r, s \leq m$, pois $\sigma_i(f_1(\mathbf{X} + \mathbf{c})), \dots, \sigma_i(f_m(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ são as imagens dos fatores irredutíveis de $\sigma_i(f(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ em $\overline{K}[X_1, \dots, X_n]$. Além disso, como $f_1, \dots, f_m$ são irredutíveis em $\overline{K}[X_1, \dots, X_n]$, temos que $\sigma_i(f_1(\mathbf{X} + \mathbf{c})), \dots, \sigma_i(f_m(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ são irredutíveis

para todo $i = 1, \dots, d$. Portanto, se existe $g \in \overline{K}[X_1, \dots, X_n]$ tal que g divide $\sigma_j(f(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ e g divide $\sigma_i(f(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ para $i \neq j$, então $g = \sigma_i(f_r(\mathbf{X} + \mathbf{c})) = \sigma_j(f_s(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ para algum r, s . Mas isso não é possível, desde que $\sigma_i \neq \sigma_j$. Assim, temos que $\sigma_i(f(\mathbf{X} + \mathbf{c}))$ são relativamente primos. ■

Proposição 3.9. Sejam L/K uma extensão finita e separável e f um polinômio irredutível em $L(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$. Então existe um polinômio irredutível $p \in K(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$ tal que $H_K(p) \subseteq H_L(f)$.

Dem.: Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ os representantes de $\text{Gal}(L/K)$ em $G(K)$. Vamos mostrar que $p = \prod_{i=1}^d \sigma_i(f)$ satisfaz o requerido. Note que podemos supor que polinômios $\sigma_i(f)$ são relativamente primos, pois usando o **Lema 3.8** temos que existem elementos $c_1, \dots, c_n \in L(\mathbf{T})$ tais que os polinômios $\sigma_i(f(\mathbf{T}, X_1 + c_1, \dots, X_n + c_n))$ são relativamente primos. Trocando f por $f_1(\mathbf{T}, \mathbf{X}) = f(\mathbf{T}, X_1 + c_1, \dots, X_n + c_n) \in L(\mathbf{T}, \mathbf{X})$, temos que se $f_1(\mathbf{T}, \mathbf{X})$ é irredutível, então $f(\mathbf{T}, X_1 + c_1, \dots, X_n + c_n)$ também será, desde que a aplicação $\phi : L(\mathbf{T})[\mathbf{X}] \rightarrow L(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$ dada por $\phi(f(\mathbf{T}, \mathbf{X})) = f(\mathbf{T}, \mathbf{X} + \mathbf{c})$ é um isomorfismo de anéis e $\phi(f) = f_1$.

Seja $\sigma \in G(K)$. Então $\sigma(p) = \sigma\left(\prod_{i=1}^d \sigma_i(f)\right) = \prod_{i=1}^d \sigma(\sigma_i(f)) = \prod_{i=1}^d \sigma_i(f) = p$, ou seja, os coeficientes de p são fixados por σ . Logo, $p \in K(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$.

Mostremos agora que p é irredutível. Seja $q \in K(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$ um fator irredutível p . Então em $L(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$, temos que q é o produto de alguns $\sigma_i(f)$ e, como tais $\sigma_i(f)$ são irredutíveis em $L(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$, temos que existe i_0 tal que $\sigma_{i_0}(f)$ divide q em $L(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$. Assim, para todo $j = 1, \dots, d$, temos que $\sigma_j(\sigma_{i_0}(f))$ divide $\sigma_j(q) = q$, o que implica que p divide q . Logo $p = q$ é irredutível em $K(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$.

Finalmente, mostremos que $H_K(p) \subseteq H_L(f)$. Seja, $\mathbf{a} \in H_K(p)$. Então $p(\mathbf{a})(\mathbf{X})$ é não nulo e irredutível em $K[\mathbf{X}]$. Se existe uma decomposição não trivial de $f(\mathbf{a})(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) h(\mathbf{X})$ em $L[\mathbf{X}]$, então $p(\mathbf{a})(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^d \sigma_i(f(\mathbf{a}, \mathbf{X})) = \prod_{i=1}^d \sigma_i(g(\mathbf{X})) \prod_{i=1}^d \sigma_i(h(\mathbf{X}))$ é uma decomposição não trivial de $p(\mathbf{a})(\mathbf{X})$ em $K[\mathbf{X}]$, o que é uma contradição. Logo, temos que $f(\mathbf{a})(\mathbf{X})$ é irredutível em $L[\mathbf{X}]$, ou seja, $H_K(p) \subseteq H_L(f)$. ■

Colorário 3.10. Seja L/K uma extensão finita e separável. Se K é Hilbertiano, então L também é hilbertiano.

Dem.: Usando a **Proposição 3.3**, podemos considerar somente os subconjuntos de Hilbert de L da forma $H_L(f'_1, \dots, f'_m; g)$, com $f'_1, \dots, f'_m \in K[T, \mathbf{X}]$ e $0 \neq g \in K[T]$. Do **Lema 3.4** e da **Proposição 3.5** temos que existe um subconjunto de Hilbert de L da forma $H_L(f_1, \dots, f_m)$ tal que $H_L(f_1, \dots, f_m) \subseteq H_L(f'_1, \dots, f'_m; g)$. Da proposição anterior, temos que existem polinômios p_i , para cada $i = 1, \dots, m$, tais que $H_K(p_i) \subseteq H_L(f_i)$. Logo, como K é Hilbertiano, temos que $H_K(p_1, \dots, p_m) = \bigcap_i H_K(p_i)$ é não vazio. Assim, como

$\cap_i H_K(p_i) \subseteq \cap_i H_L(f_i)$, segue que $H_L(f_1, \dots, f_m)$ é não vazio. Portanto, $H_L(f'_1, \dots, f'_m; g)$ é não vazio, como queríamos. ■

3.3 Exemplos

No restante deste capítulo, estaremos interessados em apresentar alguns exemplos de corpos Hilbertianos. Mostraremos que o corpo dos números racionais é Hilbertiano e, também que todo corpo de números algébricos são Hilbertianos. Inicialmente apresentaremos um lema cuja demonstração será omitida por ser bastante técnica e pode ser encontrada em [V].

Lema 3.11. Sejam $0 < \rho \in \mathbb{Z}$ e $\varphi(T) = \sum_{\nu=k}^{-\infty} a_\nu T^{\frac{\nu}{n}}$, $a_\nu \in \mathbb{R}$ uma série de Laurent convergente para todo $t \geq \rho$. Suponha que $\varphi(T) \notin \mathbb{R}[T]$. Sejam $S_\varphi = \{t \in \mathbb{Z}; t \geq \rho \text{ e } \varphi(t) \in \mathbb{Z}\}$ e $s_\varphi(N) = \#(S_\varphi \cap [1, N])$, onde $\#$ denota a cardinalidade do conjunto. Então existe $\delta \in \mathbb{R}$ com $0 < \delta < 1$ tal que $s_\varphi(N) = N^\delta$.

Como consequência do próximo resultado teremos que o corpo dos números racionais é Hilbertiano.

Teorema 3.12. Seja $f(T, X) \in \mathbb{Z}[T, X]$ um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[T, X]$. Então existem infinitos valores de $t \in \mathbb{Z}$ tais que $f(t, X) \in \mathbb{Z}[X]$ e é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.

Dem.: Primeiramente, note que podemos supor que $f(T, X)$ é mônico na variável X . De fato, se $f(T, X) = a_0(T)X^n + a_1(T)X^{n-1} + \dots + a_n(T)$, então fazendo a mudança de variáveis $X \mapsto Y/a_0(T)$ temos que a imagem de $f(T, X)$ é da forma $\frac{g(T, Y)}{(a_0(T))^{n-1}}$, onde $g(T, Y) \in \mathbb{Z}[T, Y]$ é mônico na variável Y . Note que para todo $t \in \mathbb{Z}$ tal que $a_0(t) \neq 0$, temos que $g(t, Y)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[Y]$ se, e somente se $f(t, X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.

Seja $f(T, X) = X^n + a_1(T)X^{n-1} + \dots + a_n(T) \in \mathbb{Z}[T, X]$ irredutível em $\mathbb{Q}[T, X]$. Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ todas as raízes de $f(T, X)$ no fecho algébrico $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ do corpo das funções racionais $\mathbb{Q}(T)$. Ainda, para cada $t \in \mathbb{Z}$, sejam $\theta_{1t}, \dots, \theta_{nt}$ todas as raízes do polinômio $f(t, X)$ no fecho algébrico $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. Como θ_{it} , para $i = 1, \dots, n$ são raízes de $f(t, X)$ e $f(T, X) \in \mathbb{Z}[T, X]$, temos que são inteiras sobre $\mathbb{Z}$, ou seja, são raízes de um polinômio mônico com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Considere a seguinte aplicação $s_t : \mathbb{Q}[T] \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $s_t(p(T)) = p(t)$. Esta aplicação se estende a um homomorfismo de anéis, que denotaremos ainda por $s_t : \mathbb{Q}[T, \theta_1, \dots, \theta_n] \rightarrow \mathbb{Q}[T, \theta_{1t}, \dots, \theta_{nt}]$. Desde que $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ são todas as raízes de $f(T, X)$ em $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ e, para cada $t \in \mathbb{Z}$, $\{\theta_{1t}, \dots, \theta_{nt}\}$ são todas as raízes de $f(t, X)$ em $\mathbb{Q}$, temos que $s_t(\theta_i) = \theta_{it}$, a menos de alguma permutação.

Por outro lado, se $h(T, X) \in \overline{\mathbb{Q}(T)}[X]$ é um fator de $f(T, X)$ então

$$h(T, X) = \prod_{j=1}^r (X - \theta_{ij}) = X^r + b_{r-1}X^{r-1} + \dots + b_0,$$

onde cada b_i é uma função simétrica elementar em $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_r}$. Além disso, como $f(T, X)$ é irreduzível, segue que cada fator não trivial de f em $\overline{\mathbb{Q}(T)}[X]$ terá pelo menos um coeficiente $b \in \overline{\mathbb{Q}(T)}$ tal que $b \notin \mathbb{Q}(T)$. Para cada fatoração não trivial de $f(T, X)$ em $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ considere um coeficiente $b \in \overline{\mathbb{Q}(T)}$ tal que $b \notin \mathbb{Q}(T)$ e denote por B o conjunto de todos elementos b . Note que B é um conjunto finito, pois f admite um número finito de fatorações.

Seja $t \in \mathbb{Z}$. Se $f(t, X)$ é redutível em $\mathbb{Q}[X]$, então existe $b \in B$ tal que $s_t(b) \in \mathbb{Q}$, pois caso contrário, em cada fator não trivial de $f(t, X)$ em $\overline{\mathbb{Q}(T)}[X]$ sempre existe um coeficiente $b(t) \in \overline{\mathbb{Q}(T)}$ tal que $b(t) \notin \mathbb{Q}(T)$, o que contradiz o fato de $f(t, X)$ ser redutível em $\mathbb{Q}(T)$. Além disso, como $s_t(b) \in \mathbb{Q}[\theta_{1t}, \dots, \theta_{nt}]$ e os elementos $\theta_{it} = s_t(\theta_i)$ são inteiros sobre $\mathbb{Z}$, segue que $s_t(b)$ é inteiro sobre $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é integralmente fechado, temos que $s_t(b) \in \mathbb{Z}$. Logo, se para todo $b \in B$ tivermos $s_t(b) \notin \mathbb{Z}$, então o polinômio $f(t, X)$ é irreduzível em $\mathbb{Q}[X]$.

Dados $b \in B$, $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho$ e $N \in \mathbb{Z}$, consideremos $S_b = \{t \in \mathbb{Z}; t > \rho \text{ e } s_t(b) \in \mathbb{Z}\}$ e $s(N) = \max_{b \in B} \left(\#(S_b \cap [1, N]) \right)$, onde $[1, N]$ é o intervalo dos inteiros entre 1 e N .

Usando a caracterização do fecho algébrico de $\mathbb{Q}(T)$ como séries de Laurent em $1/T$ e resultados de geometria algébrica e análise, pode-se mostrar que $b = b(T) = \sum_{\nu=k}^{-\infty} a_\nu T^{\frac{\nu}{n}}$, com $a_\nu \in \mathbb{R}$ e satisfaz as hipóteses do Lema 3.11. Assim, existe $\delta \in \mathbb{R}$, com $0 < \delta < 1$ tal que $s(N) = N^\delta$.

Denote por I o conjunto $\{t \in \mathbb{Z}; \rho < t \text{ e } f(t, X) \text{ é irreduzível sobre } \mathbb{Q}[X]\}$. Note que se $t \in \mathbb{Z}$, $t > \rho$ e $t \notin S_b$ para todo $b \in B$, então $f(t, X)$ é irreduzível em $\mathbb{Q}[X]$, ou seja,

$$\left(\bigcup_{b \in B} S_b \right)^c \subseteq I, \text{ onde o complementar é tomado em } \{t \in \mathbb{Z}; \rho < t\}. \text{ Conseqüentemente,}$$

$$\left(\bigcup_{b \in B} S_b \right)^c \cap [1, N] \subseteq I \cap [1, N].$$

Mas $\left(\bigcup_{b \in B} S_b \right)^c \cap [1, N] = [1, N] - \left(\bigcup_{b \in B} S_b \right) \cap [1, N] = [1, N] - \bigcup_{b \in B} (S_b \cap [1, N])$. Como

$$\#(S_b \cap [1, N]) \leq s(N) \leq c_0 N^\delta \text{ para cada } b \in B, \text{ temos que } \# \left(\bigcup_{b \in B} (S_b \cap [1, N]) \right) \leq$$

$$\#(B) c_0 N^\delta. \text{ Agora, } \#(B) c_0 = c > 0, \text{ o que implica que } i(N) = \#(I \cap [1, N]) \geq \#([1, N] -$$

$$\bigcup_{b \in B} (S_b \cap [1, N])) \geq N - c N^\delta = N(1 - c N^{\delta-1}). \text{ Fazendo } N \rightarrow \infty, \text{ segue que } c N^{\delta-1} \rightarrow 0,$$

pois $\delta - 1 < 0$. Conseqüentemente $i(N) \rightarrow \infty$, ou seja, $i(N)$ não é limitado. Portanto, I é um conjunto infinito, isto é, existem infinitos $t \in \mathbb{Z}$ tais que $f(t, X)$ é irreduzível sobre $\mathbb{Q}[X]$. ■

Colorário 3.13. O corpo dos números racionais é Hilbertiano.

Dem.: Desde que $\mathbb{Q}$ tem característica zero, da **Proposição 3.7** basta mostrar que $\mathbb{Q}$ é Hilbertiano separável. Seja $f \in \mathbb{Q}[T, X]$ um polinômio irreduzível. Sem perda da

generalidade podemos supor que $f \in \mathbb{Z}[T, X]$. Logo, pelo teorema anterior, temos que $H_{\mathbb{Q}}(f) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, ou seja, $\mathbb{Q}$ é Hilbertiano separável, como queríamos. ■

Corolário 3.14. Se K é um corpo de números algébricos, então K é Hilbertiano.

Dem.: Segue diretamente do corolário acima e do **Corolário 3.10**. ■

Capítulo 4

Formas Traço Escalar sobre Corpos Hilbertianos

O nosso objetivo neste capítulo é mostrar que toda forma bilinear não degenerada sobre um corpo de números algébricos é isométrica a uma forma traço escalar.

Este resultado vale para uma família maior de corpos, a família dos corpos Hilbertianos de característica distinta de 2 e, do **Corolário 3.14** temos que esta família contém a dos corpos de números algébricos. Assim, no que segue, neste e no próximo capítulo, todo corpo considerado será de característica distinta de 2. Apresentaremos então resultados sobre formas traço escalares sobre corpos Hilbertianos. Para tanto, iniciaremos com resultados sobre polinômios e matrizes sobre um corpo K .

Proposição 4.1. Sejam K um corpo, $A \in M_n(K)$ uma matriz com polinômio característico irredutível e separável $f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in K[X]$ e $L = K(x) = \frac{K[X]}{(f(X))}$, onde $x = X + (f(X))$. Se $T : L \rightarrow L$ é a aplicação K -linear definida por $T(z) = xz$, para todo $z \in L$, então A é a matriz de T em relação a alguma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de L sobre K .

Dem.: Considere a aplicação L -linear $T_A : L^n \rightarrow L^n$, definida por $T_A(z) = Az$, onde $z = (z_1, \dots, z_n)^t \in L^n$. Como $f(x) = 0$ e f é o polinômio característico de A , então x é um autovalor de T_A . Logo existe $v = (v_1, \dots, v_n)^t \in L^n$, não nulo, tal que $Av = xv$, ou seja, $Av_i = xv_i$, onde $v_i = (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)^t$ e $xv_i = (0, \dots, 0, xv_i, 0, \dots, 0)^t$.

Agora, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de L sobre K , então escrevendo $z \in L$ como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, temos $z = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$, com $\alpha_i \in K$. Então, $Az = A(\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n) = \alpha_1Av_1 + \cdots + \alpha_nAv_n = \alpha_1xv_1 + \cdots + \alpha_nxv_n = x(\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n) = xz$, para todo $z \in L$ e, conseqüentemente $\mathcal{B}$ é a base de L procurada.

Resta então mostrarmos que $\mathcal{B}$ é uma base de L sobre K . Desde que $[L : K] = \text{gr}(f) = n$, então é suficiente mostrarmos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para tanto,

consideremos N o corpo de raízes de $f(X)$ sobre L . Como $f(X) \in K[X]$ temos que N é também o corpo de raízes de f sobre K . Logo, $N = K(\beta_1, \dots, \beta_n)$, onde $\beta_1, \dots, \beta_n$ são todas as raízes de $f(X)$. Desde que N é uma extensão normal finita e separável de K , temos que N é uma extensão galoisiana de K . Seja $G = \text{Gal}(N/K)$ o grupo de galois de N sobre K . Como $L \subseteq N$, temos que existe um subgrupo H de G , tal que $L = N^H$, ou seja, H é o subgrupo dos automorfismos de N que fixam os elementos de L . Além disso, $[G : H] = \dim_K L = n$. Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in G$ representantes das classes laterais de H em G , ou seja, $G = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \sigma_i H$, onde $\sigma_1 = \text{id}$.

Consideremos a matriz $M = (\sigma_i(v_j)) = \begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) & \cdots & \sigma_1(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(v_1) & \cdots & \sigma_n(v_n) \end{pmatrix} \in M_n(N)$.

Desde que $L = K(x)$ é separável, segue que $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in G$ são distintos. Além disso, $\sigma_i(x) \neq \sigma_j(x)$ para todo $i \neq j$, pois se existem índices $i \neq j$ tais que $\sigma_i(x) = \sigma_j(x)$, então para $y \in L$ temos que $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^{n-1}$, pois $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ é base de L sobre K . Logo, $\sigma_i(y) = \sigma_i(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^{n-1}) = a_0 + a_1\sigma_i(x) + \cdots + a_n\sigma_i(x^{n-1}) = a_0 + a_1\sigma_j(x) + \cdots + a_n\sigma_j(x^{n-1}) = \sigma_j(y)$, ou seja, $\sigma_i(y) = \sigma_j(y)$, para todo $y \in L$, o que contradiz o fato das classes laterais serem distintas.

Ainda, as raízes de $f(X)$ são os conjugados de x , ou seja, são os elementos $\sigma_i(x)$ para $i = 1, \dots, n$. Desde que $A \in M_n(K)$, e $(v_1, \dots, v_n)^t = (\sigma_1(v_1), \dots, \sigma_1(v_n))^t$ é um autovetor de T_A associado ao autovalor x , temos que $(\sigma_i(v_1), \dots, \sigma_i(v_n))^t$ é autovetor de T_A associado ao autovalor $\sigma_i(x)$, para cada $i = 1, \dots, n$, ou seja, as colunas de M são autovetores de T_A . Como $f(X)$ é um polinômio separável, temos que os autovalores são distintos e, conseqüentemente, as colunas de M são linearmente independentes, ou seja, M é inversível. Desta maneira, M define um isomorfismo $T_M : N^n \rightarrow N^n$, onde $T_M(y) = My$, para todo $y = (y_1, \dots, y_n)^t \in N^n$.

Se $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$, com $\lambda_j \in K$, então $\sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_i(v_j) = 0$, para todo $i = 1 \cdots n$. Logo $M(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = (0, \dots, 0)^t$. Multiplicando M^{-1} à esquerda em ambos os lados obtemos $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = (0, \dots, 0)^t$, isto é, $\lambda_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, o que mostra que $\mathcal{B}$ é linearmente independente sobre K , como queríamos. ■

Colorário 4.2. Sejam $A \in M_n(K)$, $f(X) \in K[X]$ e $L = K(x)$ como na proposição anterior. Sejam $\varphi : L \rightarrow K$ uma aplicação K -linear qualquer e b_φ a forma bilinear associada a φ , ou seja, $b_\varphi : L \times L \rightarrow K$ é definida por $b_\varphi(x, y) = \varphi(xy)$, para todo $x, y \in L$. Se S é a matriz de b_φ na base $\mathcal{B}$ encontrada na proposição anterior, então $SA = A^t S$.

Dem.: Da Proposição 4.1, temos que A é a matriz da aplicação K -linear $T : L \rightarrow L$, definida por $T(z) = xz$, para todo $z \in L$, em relação à base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Logo, a

j -ésima coluna de $A = (a_{ij})$ corresponde ao vetor das coordenadas de $T(v_j)$ com relação à base $\mathcal{B}$, ou seja, $T(v_j) = xv_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$. Por hipótese, se $S = (s_{ij})$, então $s_{ij} = b_\varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_i v_j)$ e, usando o fato que φ é K -linear obtemos que a ij -ésima entrada da matriz SA , denotada por $(SA)_{ij}$ é

$$(SA)_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \varphi(v_i v_k) a_{kj} = \varphi \left(v_i \sum_{k=1}^n v_k a_{kj} \right) = \varphi(v_i x v_j).$$

Por outro lado, usando novamente que φ é K -linear, temos:

$$(A^t S)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \varphi(v_k v_j) = \varphi \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} v_k v_j \right) = \varphi(x v_i v_j), \text{ para todo } i, j, \text{ o que mostra}$$

que $SA = A^t S$, como queríamos. ■

Lema 4.3. Seja $S \in M_n(K)$ simétrica e inversível. Então $C \in M_n(K)$ é simétrica se, e somente se $A = CS$ satisfaz $A^t S = SA$.

Dem.: Se $C = C^t$, então $A^t S = (CS)^t S = S^t C^t S = SCS = SA$. Por outro lado, como $SCS = SA = A^t S = (CS)^t S = S^t C^t S = SC^t S$ e S é inversível, obtemos que $C^t = C$. ■

O próximo resultado caracteriza quando uma matriz simétrica é a matriz de uma forma traço escalar.

Proposição 4.4. Seja $S \in M_n(K)$ uma matriz simétrica. Então existe $(L, b) \in \mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{E}(K)$ tal que S é a matriz de b em relação a alguma base de L sobre K se, e somente se existe uma matriz simétrica C tal que a matriz CS tem polinômio característico irredutível e separável.

Dem.: Suponhamos que S é a matriz de uma forma traço escalar não degenerada $(L, b) \in \mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{E}(K)$. Como a forma traço é não degenerada, a extensão L/K é finita e separável (ver [L] pag. 284) e S é inversível. Assim L é uma extensão simples de K , ou seja $L = K(x)$. Seja $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ o polinômio irredutível e separável tal que $L = K(x) \cong \frac{K[X]}{(f(X))}$. Considerando a base $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ de L sobre K e $T \in \text{Hom}_K(L, L)$ definida por $T(z) = xz$, para todo $z \in L$. Temos que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

é a matriz de T com relação à base $\mathcal{B}$. Mais ainda, o polinômio característico de A é $f(X)$. Do **Corolário 4.2** temos que $SA = A^t S$. Tomando $C = AS^{-1}$, do **Lema 4.3** temos que C é simétrica e $CS = A$ tem polinômio característico irredutível e separável.

Reciprocamente, sejam $A = CS \in M_n(K)$ com polinômio característico irreduzível e separável $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ e $L = K(x) \cong \frac{K[X]}{(f(X))}$, onde $x = X + (f(X))$. Do Lema 4.3, temos que C é simétrica se, e somente se $A^t S = SA$. Vamos, então encontrar as soluções de $A^t S = SA$. Da Proposição 4.1 temos que A é a matriz da aplicação $T \in \text{Hom}_K(L, L)$ definida por $T(z) = xz$, para todo $z \in L$, em relação a alguma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de L sobre K .

Seja $\varphi \in \text{Hom}_K(L, L)$. Considere a forma bilinear $b_\varphi : L \times L \rightarrow K$ associada a φ , ou seja, $b_\varphi(x, y) = \varphi(xy)$, para todo $x, y \in L$. Se S é a matriz de b_φ com relação à base $\mathcal{B}$, então do Corolário 4.2 temos que $A^t S = SA$. Logo, cada elemento de $\text{Hom}_K(L, K)$ dá origem a uma solução de $A^t S = SA$. Vamos mostrar que essas são as únicas soluções, ou seja, as únicas soluções de $A^t S = SA$ são as matrizes associadas às formas K -lineares $\varphi \in \text{Hom}_K(L, K)$.

Se $S_0 \in M_n(K)$ é tal que $A^t S_0 = S_0 A$, então afirmamos que a matriz S_0 é determinada pela matriz A e pela primeira coluna de S_0 . De fato, tomando v_1 o primeiro elemento da base $\mathcal{B}$ e considerando que $\mathcal{B}' = \{v_1, xv_1, x^2v_1, \dots, x^{n-1}v_1\}$ é também uma base de L sobre K , temos que para cada $r = 0, \dots, n-1$, o vetor $x^r v_1$ pode ser identificado com o vetor das suas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}'$, que é $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, onde o elemento 1 aparece na $(r+1)$ -ésima coordenada.

Vejam agora como obter cada uma das colunas de S_0 , a partir de A e da primeira coluna de S_0 . Usando a identificação acima, temos que a $(r+1)$ -ésima coluna de S_0 é $S_0(x^r v_1)$. Desde que A é a matriz da multiplicação por x e $S_0 A = A^t S_0$, para cada $r = 1, \dots, n-1$, temos

$$S_0(x^r v_1) = S_0(A^r v_1) = (S_0 A^r) v_1 = ((A^t)^r S_0) v_1.$$

Portanto mostramos que o conjunto das soluções $S_0 \in M_n(K)$ de $S_0 A = A^t S_0$ está em correspondência biunívoca com um subconjunto de $M_{n \times 1}(K)$. Por outro lado, tínhamos que cada elemento de $\varphi \in \text{Hom}_K(L, K)$ gerava uma solução. Como os espaços $\text{Hom}_K(L, K)$ e $M_{n \times 1}(K)$ têm a mesma dimensão e portanto são isomorfos, do Corolário 4.2 concluímos que se S é solução de $A^t S = SA$, então S é a matriz de uma forma bilinear simétrica $b_\varphi : L \times L \rightarrow K$, associada a um elemento $\varphi \in \text{Hom}_K(L, K)$. Mas do Lema 1.15, temos que cada elemento $\varphi \in \text{Hom}_K(L, K)$ é do tipo $\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle(s, _)$, para algum $s \in L$. Logo, a forma bilinear associada a φ é do tipo $b_\varphi(x, y) = \text{Tr}_{L/K}\langle s \rangle(xy)$, para todo $x, y \in L$, ou seja, é uma forma traço escalar.

Finalmente, resta mostrar que esta forma traço escalar é não degenerada, ou seja, S é inversível. Desde que $A = CS$ tem polinômio característico irreduzível, $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, temos que A é inversível e como $\det(A) = \det(CS) = \det(C)\det(S)$, temos que S é também inversível, como queríamos. ■

Lema 4.5. Se $A = (X_{ij})$ é uma matriz simétrica $n \times n$ onde X_{ij} são indeterminadas, então $p(\{X_{ij}\}) = \det(A)$ é um polinômio irreduzível em $K[\{X_{ij}\}]$. Além disso, $p(\{X_{ij}\}, X) =$

$\det(A - S^{-1}(XI_n))$ é um polinômio irredutível em $K[\{X_{ij}\}, X]$, onde $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ é uma matriz diagonal inversível e I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Dem.: Mostremos a primeira afirmação por indução sobre n . Se $n = 1$, então $\det(A) = X_{11}$ que é um polinômio irredutível em $K[X_{11}]$. Agora suponhamos que o resultado é verdadeiro para todas as matrizes simétricas de indeterminadas $k \times k$, com $k \leq n - 1$.

Escrevendo

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} X_{11} & \dots & X_{1,n-1} & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{1,n-1} & \dots & X_{n-1,n-1} & \vdots \\ \hline X_{1n} & \dots & \dots & X_{nn} \end{array} \right),$$

$G = \{\sigma \in S_n; \sigma(n) = n\}$, onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, \dots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \dots X_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in G} \text{sign}(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \dots X_{n-1,\sigma(n-1)} X_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus G} \text{sign}(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \dots X_{n,\sigma(n)} \\ &= X_{nn} \det(A') + \sum_{\sigma \in S_n \setminus G} \text{sign}(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \dots X_{n,\sigma(n)}, \end{aligned}$$

onde A' é a matriz (X_{ij}) com $1 \leq i, j \leq n - 1$ e $\text{sign}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ , que é ± 1 , de acordo com σ ser par ou ímpar. Suponhamos que $\det(A)$ é redutível, ou seja, $\det(A) = X_{nn} \det(A') + \sum_{\sigma(n) \neq n} \text{sign}(\sigma) X_{1,\sigma(1)} \dots X_{n,\sigma(n)} = fg$, onde $f, g \in K[\{X_{ij}\}]$ são polinômios não constantes.

Tomando $X'_{ij} = X_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n - 1$, $X'_{ij} = 0$, para $j = n$ e $1 \leq i \leq n - 1$, e $X'_{nn} = 1$, temos que $f(\{X'_{ij}\})g(\{X'_{ij}\}) = \det(A')$. Se $f(\{X'_{ij}\})$ e $g(\{X'_{ij}\})$ não são constantes, teremos um absurdo, pois $\det(A')$ é irredutível por hipótese de indução. Suponhamos então, sem perda da generalidade que $f(\{X'_{ij}\}) = \lambda$, com $\lambda \in K$. Assim, temos que

$g(\{X'_{ij}\}) = \lambda^{-1} \det(A')$. Podemos então escrever $f = \lambda X_{nn} + \sum_{k=1}^n X_{kn} f_k$ e $g = \lambda^{-1} \det(A') + \sum_{k=1}^n X_{kn} g_k$.

Consequentemente, $fg = X_{nn} \det(A') + \sum_{k=1}^n X_{kn} h_k = \det(A)$. Daí $gr(fg) \geq n + 1$ e $gr(\det(A)) = n$, o que é um absurdo. Portanto, $\det(A)$ é irredutível.

Além disso, temos que $p(\{X_{ij}\}) = \det(A)$ continua irredutível em $K_1 = K[\{X_{ij}, X\}]$, onde X é uma nova indeterminada. Desde que $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ é inversível a aplicação K -linear $\phi : K_1 \rightarrow K_1$, definida por:

$$\begin{aligned} \phi(X) &= X \\ \phi(X_{ij}) &= X_{ij}, \text{ para } i \neq j \\ \phi(X_{ii}) &= X_{ii} - s_i^{-1} X, \end{aligned}$$

é um K -automorfismo de K_1 , pois os elementos $\{X_{ij}, i \neq j\} \cup \{X_{ii} - s_i^{-1}X\} \cup \{X\}$ geram K_1 , como K -álgebra. Portanto,

$$p(X_{ij}, X) = \det \begin{pmatrix} X_{11} - s_1^{-1}X & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} - s_2^{-1}X & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{nn} - s_n^{-1}X \end{pmatrix} = \det(\phi(A))$$

é um polinômio irredutível em K_1 , pois é a imagem de um polinômio irredutível por um K -automorfismo. ■

Agora estamos aptos a apresentar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.6. Seja K um corpo hilbertiano com $\text{car}(K) \neq 2$. Então $\mathfrak{Bil}(K) = \mathfrak{TrE}(K)$, ou seja, toda forma bilinear não degenerada sobre K é isométrica a uma forma traço escalar.

Dem.: Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$. Desde que K tem $\text{car}(K) \neq 2$, segue do **Lema 1.5** que (V, b) admite uma base ortogonal, ou seja, existe uma base de V sobre K tal que a matriz de b em relação à esta base é uma matriz diagonal $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Seja $A = (X_{ij})$ uma matriz simétrica, onde X_{ij} são indeterminadas.

Do **Lema 4.5** temos que $p(\{X_{ij}\}, X) = \det(A - S^{-1}(XI_n))$ é um polinômio irredutível em $K[\{X_{ij}\}, X]$. Seja $h(\{X_{ij}\}, X) = \prod_{i=1}^n (X_{ii} - s_i^{-1}X) \in K[\{X_{ij}\}, X]$ o produto da diagonal principal de $(A - S^{-1}(XI_n))$. Considerando $h(\{X_{ij}\}, X)$ como um polinômio em $K(\{X_{ij}\})[X]$ temos que as raízes de $h(\{X_{ij}\}, X)$ são $s_i X_{ii}$, para $i = 1, \dots, n$ que são todas distintas, ou seja, $h(\{X_{ij}\}, X)$ é um polinômio separável na variável X . Assim, $\frac{\partial h}{\partial X}(\{X_{ij}\}, x) \neq 0$, onde $x = X + (h(\{X_{ij}\}, X))$ em $\frac{K(\{X_{ij}\})[X]}{(h(\{X_{ij}\}, X))}$, pois x é uma raiz de $h(\{X_{ij}\}, X)$. Logo, temos que $\frac{\partial h}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X)$ é um polinômio não nulo em $K(\{X_{ij}\})[X]$.

Escrevendo $p(\{X_{ij}\}, X) = h(\{X_{ij}\}, X) + \sum_{l=0}^{n-1} f_l(\{X_{ij}\})X^l \in K[\{X_{ij}\}, X]$, temos que

$$\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) = \frac{\partial h}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) + \sum_{l=1}^{n-1} l f_l(\{X_{ij}\})X^{l-1}.$$

Por outro lado, usando o fato que $p(\{X_{ij}\}, X) = \det(A - S^{-1}(XI_n))$ temos que para cada $l = 0, \dots, n-1$ existem $r, s \in \{1, \dots, n\}$ distintos tais que $f_l(\{X_{ij}\})$ é um múltiplo de X_{rs} , pois cada $f_l(\{X_{ij}\})$ contém uma indeterminada que não está na diagonal principal. Concluímos assim que $\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) \neq 0$, pois caso contrário, tomando $X_{ij} = 0$, para

$i \neq j$, obtemos $\frac{\partial h}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) = 0$, o que é uma contradição. Note que $\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) \neq 0$ em $K(\{X_{ij}\})[X]$ e como $K(\{X_{ij}\})$ é um corpo, temos que $\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X)$, como um elemento de $K(\{X_{ij}\})[X]$, possui no máximo $n - 1$ raízes. Mas, como K é um corpo Hilbertiano, temos da **Proposição 3.1** que K é infinito. Logo existe $\alpha \in K$ tal que $\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, \alpha) \neq 0$.

Considere o seguinte subconjunto de Hilbert de K ,

$$H_K \left(p, \frac{\partial p}{\partial X} \right) = \left\{ (\lambda_{ij}) \in M_n(K); p(\{\lambda_{ij}\}, X) \text{ é irredutível em } K[X] \text{ e } \frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, \alpha) \neq 0 \right\}$$

Como K é Hilbertiano, temos que $H_K \left(p, \frac{\partial p}{\partial X} \right) \neq \emptyset$, ou seja, existe uma matriz simétrica $C = (\lambda_{ij}) \in M_n(K)$ tal que $p(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é irredutível e $\frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, \alpha) \neq 0$, ou seja, $\frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é um polinômio não nulo em $K[X]$. Agora, desde que $p(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é irredutível e tem grau maior que o grau de $\frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, X)$, temos que $\text{mdc} \left(p(\{\lambda_{ij}\}, X), \frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, X) \right) = 1$, ou seja, $p(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é um polinômio separável em X .

Note que

$$\det(XI - (\lambda_{ij})S)(\det(S^{-1})) = \det(XS^{-1} - (\lambda_{ij})) = \pm(\det(S))p(\{X_{ij}\}, X).$$

Assim, obtemos uma matriz simétrica $C = (\lambda_{ij}) \in M_n(K)$ para a qual CS tem polinômio irredutível e separável sobre K . Portanto, o teorema segue da **Proposição 4.4**. ■

Colorário 4.7. Seja K um corpo de números algébricos. Toda forma bilinear simétrica não degenerada sobre K é isométrica a uma forma traço escalar.

Dem.: Segue diretamente do **Teorema 4.6** e do **Corolário 3.14**. ■

Capítulo 5

Formas Traço sobre Corpos de Números Algébricos

O Teorema 4.6 nos diz que formas bilineares não degeneradas sobre corpos Hilbertianos de característica distinta de 2 são isométricas a formas traço escalares. Em se tratando de corpos Hilbertianos ordenados, este resultado pode ser refinado, podemos mostrar que formas bilineares positivas, ou seja, que têm assinatura positiva para todas as ordens de K , são algébricas.

Antes de trabalharmos diretamente com os corpos hilbertianos, vamos apresentar alguns resultados envolvendo forma traço.

Lema 5.1. Sejam K um corpo, $f(X) = X^5 + \alpha X + \lambda \in K[X]$ um polinômio irredutível e $L = \frac{K[X]}{(f(X))}$. Seja $x \in L$ uma raiz de $f(X)$. Então:

- (i) $tr_{L/K}(1) = 5$;
- (ii) $tr_{L/K}(x) = tr_{L/K}(x^2) = tr_{L/K}(x^3) = tr_{L/K}(x^6) = tr_{L/K}(x^7) = 0$;
- (iii) $tr_{L/K}(x^4) = -4\alpha$;
- (iv) $tr_{L/K}(x^5) = -5\lambda$;
- (v) $tr_{L/K}(x^8) = 4\alpha^2$.

Dem.: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ todas as raízes de $f(X)$ no fecho algébrico $\overline{K}$ de K . Seja $tr_{L/K} = \sigma_1 + \dots + \sigma_5$, onde σ_i são as imersões de L em $\overline{K}$. Assim, como x é uma raiz de $f(X)$, então $\lambda_i = \sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, 5$ são todas as raízes de $f(X)$. Logo, temos que $tr_{L/K}(x^i) = \sigma_1(x^i) + \dots + \sigma_5(x^i) = \sigma_1(x)^i + \dots + \sigma_5(x)^i = \lambda_1^i + \dots + \lambda_5^i$ são funções simétricas nas raízes de $f(X)$, para cada $i = 1, \dots, 5$. Além disso, em $\overline{K}[X]$ temos a seguinte fatoração de $f(X)$:

$f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_5) = X^5 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_5)X^4 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \cdots + \lambda_4\lambda_5)X^3 - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \cdots + \lambda_3\lambda_4\lambda_5)X^2 + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \cdots + \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5$.

Portanto, podemos escrever $tr_{L/K}$ em função dos coeficientes de $f(X)$, que são as funções simétricas elementares das raízes de $f(X)$, ou seja, usando a igualdade acima obtemos $tr_{L/K}(1) = \sigma_1(1) + \cdots + \sigma_5(1) = 1 + \cdots + 1 = 5$, $tr_{L/K}(x) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_5 = 0$ e $tr_{L/K}(x^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_5^2$ é simétrico de grau 2 e, portanto, pode ser escrito como combinação das funções simétricas elementares de graus 1 e 2, a saber, os coeficientes de X^4 e X^3 de $f(X)$. Desde que estes coeficientes são nulos, temos que $tr_{L/K}(x^2) = 0$.

Para x^3 temos $tr_{L/K}(x^3) = \lambda_1^3 + \cdots + \lambda_5^3$ que pode ser escrito em função dos coeficientes de X^4 , X^3 e X^2 de $f(X)$, que são todos nulos. Logo $tr_{L/K}(x^3) = 0$.

Agora, desde que $f(X)$ é irredutível, temos que $\lambda \in K$ é não nulo. Logo, temos que $g(X) = X^5 + \alpha\lambda^{-1}X^4 + \lambda^{-1}$ é irredutível em $K[X]$. Note que $g(x^{-1}) = x^{-5} + \alpha\lambda^{-1}x^{-4} + \lambda^{-1} = \lambda^{-1}x^{-5}f(x) = 0$. Portanto, considerando os coeficientes de $g(X)$, temos que $tr_{L/K}(x^{-1}) = -\alpha\lambda^{-1}$. Mas, $x^5 + \alpha x + \lambda = 0$ e assim $x^4 + \alpha + \lambda x^{-1} = 0$, o que implica que $tr_{L/K}(x^4) = -\alpha tr_{L/K}(1) - \lambda tr_{L/K}(x^{-1}) = -5\alpha + \alpha = -4\alpha$. Para $i = 5$, temos $tr_{L/K}(x^5) = -tr_{L/K}(\lambda) - \alpha tr_{L/K}(x) = -5\lambda$.

Note ainda que para $i \geq 5$, $x^i = x^{5+(i-5)}$, ou melhor, $x^i = x^{i-5}x^5 = t^{i-5}(-\lambda - \alpha x) = -\alpha x^{i-5+1} - \lambda x^{i-5}$. Portanto, $tr_{L/K}(x^6) = -\alpha tr_{L/K}(x^2) - \lambda tr_{L/K}(x) = 0$, $tr_{L/K}(x^7) = -\alpha tr_{L/K}(x^3) - \lambda tr_{L/K}(x^2) = 0$ e finalmente, $tr_{L/K}(x^8) = -\alpha tr_{L/K}(x^4) - \lambda tr_{L/K}(x^3) = -\alpha(-4\alpha) = 4\alpha^2$, como queríamos. ■

Lema 5.2. Sejam K um corpo com $car(K) \neq 5$, $f(X) = X^5 + \alpha X + \alpha\beta$ um polinômio irredutível sobre K e $L = \frac{K[X]}{(f(X))}$. Então $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = \langle 1, 1, -\delta \rangle$ em $W(K)$, onde $\delta = \alpha^4(4^4\alpha + 5^5\beta^4)$ é o determinante de $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$.

Dem.: Seja $\lambda = \alpha\beta$. Então $f(X) = X^5 + \alpha X + \lambda$. Sejam x uma raiz de $f(X)$ em L e $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ uma base de L sobre K . Usando o lema anterior temos que a matriz da forma traço de L sobre K , $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle$, com relação à base $\mathcal{B}$ é:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha & -5\lambda \\ 0 & 0 & -4\alpha & -5\lambda & 0 \\ 0 & -4\alpha & -5\lambda & 0 & 0 \\ -4\alpha & -5\lambda & 0 & 0 & 4\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Considerando o subespaço U de L gerado por $\{1, x^2\}$ temos que a forma traço restrita à U , com relação à base $\{1, x^2\}$ é $\langle 5, -4\alpha \rangle \simeq \langle 5, -\alpha \rangle$. Como $car(K) \neq 2$ e 5 , temos que $(U, Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)$ é um subespaço não degenerado de $(L, Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)$. Então de **Lema 1.2** temos que $L = U \perp U^\perp$.

Desde que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(1, x) = tr_{L/K}(x) = 0$, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x, x) = tr_{L/K}(x^2) = 0$ e $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle(x^2, x) = tr_{L/K}(x^3) = 0$, temos que $x \in U^\perp$ e é um vetor isotrópico. Da **Proposição 1.7**, temos que $(Tr_{L/K}\langle 1 \rangle)|_{U^\perp} = \langle 1, -1, \beta \rangle$, para algum $\beta \in \dot{K}$. Portanto, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle \simeq \langle 5, -\alpha, 1, -1, \beta \rangle$ e, desde que $\det(M) = \delta = (4^4\alpha^5 + 5^5\lambda^4)$ módulo $\dot{K}^2$, temos que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle \simeq \langle 5, -\alpha, 1, -1, 5\alpha\delta \rangle$, ou seja $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = \langle 5, -\alpha, 5\alpha\delta \rangle$ em $W(K)$. Note que $\delta = (4^4\alpha^4)\alpha + (5^4\lambda^4)5$, isto é, a forma bilinear $\langle 5, \alpha \rangle$ representa δ . Assim, de [Lam] pag.20, temos que $\langle 5, \alpha \rangle \simeq \langle \delta, 5\alpha\delta \rangle$.

Então, em $W(K)$ temos que $\langle 5, -\alpha, 5\alpha\delta \rangle = \langle 5, -\alpha, 5, \alpha, -\delta \rangle$ pois $\langle 5, -\alpha, 5\alpha\delta, \delta \rangle \simeq \langle 5, -\alpha, 5, \alpha \rangle$. Consequentemente $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = \langle 5, 5, -\delta \rangle$ em $W(K)$. Note ainda que $\langle 5, 5 \rangle \simeq \langle 1, 1 \rangle$, pois $5 = 1^2 + 2^2$, ou seja, a forma $\langle 1, 1 \rangle$ representa 5. Portanto, $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = \langle 5, 5, -\delta \rangle = \langle 1, 1, -\delta \rangle$ em $W(K)$, como queríamos mostrar. ■

Como consequência deste último resultado, podemos mostrar que certos elementos em $W(K)$ são algébricos.

Colorário 5.3. Seja K um corpo Hilbertiano com $car(K) \neq 5$. Então os elementos de $W(K)$ representados por espaços bilineares do tipo $\langle 1, 1, -\delta \rangle$, com $\delta \in \dot{K}$ são algébricos.

Dem.: Dado $\delta \in \dot{K}$, desde que $car(K) \neq 2$, tomando $\alpha(Y) = 4^{-4}(\delta - 5^5Y^4)$, onde Y é uma indeterminada, temos que $f(X, Y) = X^5 + \alpha(Y)X + \alpha(Y)Y$ tem discriminante δ . Note que $\alpha'(Y) = -4^{-3}5^5Y^3$, que tem todas as raízes iguais a zero. Desde que $\alpha(0) \neq 0$, segue que $\alpha(Y)$ é um polinômio separável de $K[Y]$. Seja $p(Y)$ um fator irredutível de $\alpha(Y)$, então $p(Y) \mid \alpha(Y)$ e $p^2(Y) \nmid \alpha(Y)$. Logo $f(X, Y)$ é irredutível em $K(Y)[X]$ pelo critério de irredutibilidade de Eisenstein. Como K é Hilbertiano, podemos escolher $\beta \in K$ tal que $f(\beta, X)$ continua irredutível em $K[X]$. Agora, $f(\beta, X) = X^5 + \alpha X + \alpha\beta$ é como no **Lema 5.2** e o resultado segue. ■

O nosso próximo passo é mostrar que sobre um corpo Hilbertiano ordenado, todos os elementos do anel de Witt representados por um espaço bilinear de dimensão 1, $\langle \alpha \rangle$, com α totalmente positivo, são algébricos. Para tanto necessitamos de resultados auxiliares.

Lema 5.4. Sejam K um corpo e L uma extensão separável de K de grau ímpar m . Para cada $\delta \in \dot{K}$, existe $\lambda \in L$ tal que $Tr_{L/K}\langle \lambda \rangle = \langle \delta \rangle$ em $W(K)$.

Dem.: Sejam x um elemento primitivo da extensão L/K e $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ uma base de L sobre K . Definamos a aplicação $s : L \rightarrow K$, por $s(1) = s(x) = \dots = s(x^{m-2}) = 0$ e $s(x^{m-1}) = \delta$. Seja $s\langle 1 \rangle : L \times L \rightarrow K$ a forma bilinear associada a s dada por $s\langle 1 \rangle(x, y) = s(xy)$, para todos $x, y \in L$. Assim, a matriz associada a $s\langle 1 \rangle$, com relação à base $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \delta \\ \vdots & \delta & \\ \delta & & * \end{pmatrix}$$

que tem determinante δ módulo $\dot{K}^2$, pois m é ímpar. Note que a base $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ contém os vetores $\{1, x, \dots, x^{\frac{m-3}{2}}\}$ que são isotrópicos e dois a dois ortogonais em relação

à forma bilinear $s\langle 1 \rangle$. Como um plano hiperbólico não pode conter dois vetores isotrópicos ortogonais, temos que $s\langle 1 \rangle$ contém uma soma ortogonal de $\frac{m-1}{2}$ planos hiperbólicos. Da **Observação 1.11** temos que $\langle 1, -1 \rangle = 0 \in (K)$, e assim $s\langle 1 \rangle = \langle \delta \rangle$. Como L/K é separável, de **Lema 1.15**, temos que $L \cong L^*$. Logo existe $\lambda \in L$ tal que $s = tr_\lambda$, ou seja, $s\langle 1 \rangle = Tr_{L/K}\langle \lambda \rangle$ em $W(K)$. Conseqüentemente $Tr_{L/K}\langle \lambda \rangle = \langle \delta \rangle$ em $W(K)$, como queríamos. ■

Lema 5.5. Sejam K um corpo Hilbertiano ordenado e $\delta \in \dot{K}$ totalmente positivo. Então para todo inteiro positivo n , existe uma extensão L_n/K tal que

$$Tr_{L_n/K}\langle 1 \rangle = 2^n\langle 1 \rangle \perp (2^n - 1)\langle -\delta \rangle$$

em $W(K)$, ou seja, $2^n\langle 1 \rangle \perp (2^n - 1)\langle -\delta \rangle$ é algébrico.

Dem.: Como K é ordenado, temos que $car(K) = 0$. Provaremos o lema por indução sobre n . Do **Corolário 5.3**, temos que existe uma extensão separável L/K tal que $Tr_{L/K}\langle 1 \rangle = \langle 1, 1, -\delta \rangle$ em $W(K)$, que é exatamente o caso $n = 1$. Suponhamos que $n > 1$ e que o resultado seja verdadeiro para $n - 1$, ou seja, existe uma extensão L_{n-1}/K tal que $Tr_{L_{n-1}/K}\langle 1 \rangle = 2^{n-1}\langle 1 \rangle \perp (2^{n-1} - 1)\langle -\delta \rangle$ em $W(K)$. Como $[L_{n-1} : K] = \dim(Tr_{L_{n-1}/K}\langle 1 \rangle)$ que tem a mesma paridade que $\dim(2^{n-1}\langle 1 \rangle \perp (2^{n-1} - 1)\langle -\delta \rangle)$, temos que L_{n-1}/K é uma extensão de grau ímpar. Usando o **Lema 5.4** para $-\delta \in \dot{K}$, temos que existe $\lambda \in L_{n-1}$ tal que $Tr_{L_{n-1}/K}\langle \lambda \rangle = \langle -\delta \rangle$ em $W(K)$. Do **Corolário 5.3**, existe uma extensão L_n/L_{n-1} tal que $Tr_{L_n/L_{n-1}}\langle 1 \rangle = \langle 1, 1, \lambda \rangle = 2\langle 1 \rangle \perp \langle \lambda \rangle$ em $W(K)$. Aplicando $tr_{L_{n-1}/K}$ em ambos os lados e usando o **Lema 1.14** obtemos as seguintes igualdades em $W(K)$

$$\begin{aligned} Tr_{L_n/K}\langle 1 \rangle &= 2(Tr_{L_{n-1}/K}\langle 1 \rangle) \perp Tr_{L_{n-1}/K}\langle \lambda \rangle \\ &= 2(2^{n-1}\langle 1 \rangle \perp (2^{n-1} - 1)\langle -\delta \rangle) \perp \langle -\delta \rangle \\ &= 2^n\langle 1 \rangle \perp (2^n - 1)\langle -\delta \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Teorema 5.6. Seja K um corpo Hilbertiano ordenado. Todo elemento em $W(K)$ representado por um elemento da forma $\langle \delta \rangle$, com $\delta \in \dot{K}$ totalmente positivo, é algébrico.

Dem.: Seja $\delta \in K$ totalmente positivo. De [S1] pag. 108, temos que δ pode ser escrito como uma soma de quadrados, ou seja, existe um inteiro positivo n tal que a forma bilinear $2^n\langle 1 \rangle$ representa δ . Mas a forma $2^n\langle 1 \rangle$ é uma forma de Pfister e como representa δ , de [S1] pag. 143, temos que $2^n\langle 1 \rangle \simeq 2^n\langle \delta \rangle$. Usando o **Lema 5.5** temos que existe uma extensão separável L_n/K tal que $Tr_{L_n/K}\langle 1 \rangle = 2^n\langle 1 \rangle \perp (2^n - 1)\langle -\delta \rangle$ em $W(K)$. Portanto, em $W(K)$ temos

$$Tr_{L_n/K}\langle 1 \rangle = 2^n\langle 1 \rangle \perp (2^n - 1)\langle -\delta \rangle = 2^n\langle \delta \rangle \perp 2^n\langle -\delta \rangle \perp \langle -\delta \rangle = \langle \delta \rangle$$

como queríamos. ■

Sejam K um corpo de números algébricos e L uma extensão finita e separável de K . Se P é uma ordem de K , de **Lema 2.5** temos que $\text{ass}_P(\text{Tr}_{L/K}\langle 1 \rangle) \geq 0$. Mais precisamente, essa assinatura é o número de extensões da ordem P para uma ordem P' de L . Além disso, do **Teorema 3.12** e do **Corolário 3.10** segue que os corpos de números algébricos são corpos Hilbertianos ordenados de característica zero. No próximo resultado mostraremos que sobre um corpo de números algébricos, sob algumas restrições, se um elemento do anel $W(K)$ pode ser representado por uma forma traço escalar, então ele é algébrico.

Teorema 5.7. Sejam K um corpo de números algébricos e $b \in W(K)$. Sejam L/K uma extensão finita e separável e $\lambda \in L$ tais que $b = \text{Tr}_{L/K}\langle \lambda \rangle$ em $W(K)$. Se cada ordem P de K se estende a exatamente $s_P = \text{ass}_P(b)$ ordens de L , então b é algébrico.

Dem.: Do **Lema 2.8** temos que $\text{ass}_P(b) = \text{ass}_P(\text{Tr}_{L/K}\langle \lambda \rangle) = \sum_{P' \supseteq P} \text{ass}_{P'}(\langle \lambda \rangle)$, onde a soma é tomada sobre todas as extensões P' de P para L . Por outro lado, $\text{ass}_P(b) = s_P$, o que implica que $\text{ass}_{P'}(\langle \lambda \rangle) = 1$ para toda ordem P' de L que seja extensão de alguma ordem P de K . Mas toda ordem P' de L é extensão de alguma ordem P de K . Logo λ é também totalmente positivo em L . Agora, do **Teorema 5.6**, existe uma extensão F/K tal que $\langle \lambda \rangle = \text{Tr}_{F/L}\langle 1 \rangle$ em $W(L)$. Aplicando $\text{tr}_{L/K}$ em ambos os lados e usando o **Lema 1.14** obtemos $\text{Tr}_{L/K}\langle \lambda \rangle = \text{Tr}_{F/K}\langle 1 \rangle$ em $W(K)$ e assim, $b = \text{Tr}_{F/K}\langle 1 \rangle$ em $W(K)$, ou seja, b é algébrico. ■

Agora, estamos interessados em mostrar que sobre um corpo de números algébricos K , todo elemento de $W(K)$ que é representado por um espaço bilinear que tem assinatura positiva, para toda ordem de K , é algébrico. Para tanto, introduziremos alguns conceitos e resultados.

Seja K um corpo. Um **operador hermitiano** sobre K é uma tripla (V, b, σ) , onde (V, b) é um espaço bilinear simétrico e $\sigma : V \rightarrow V$ é um operador auto-adjunto com respeito à forma bilinear b , isto é, $b(\sigma(x), y) = b(x, \sigma(y))$, para todo $x, y \in V$.

Lema 5.8. Sejam $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$, $\sigma : V \rightarrow V$ um operador linear e $\mathfrak{C}$ uma base de V . Se A a matriz de σ na base $\mathfrak{C}$ e B a matriz de b em relação à mesma base $\mathfrak{C}$ de V e $A^t B = B A$, então σ é auto-adjunto, ou seja, (V, b, σ) é um operador hermitiano sobre K .

Dem.: Sejam $x, y \in V$. Se X e Y são os vetores coluna das coordenadas de x, y em relação à base $\mathfrak{C}$. Então, na forma matricial, temos que

$$b(\sigma(x), y) = (AX)^t BY = X^t A^t BY = X^t BAY = b(x, \sigma(y)).$$

Logo σ é auto-adjunto, como queríamos. ■

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão n , e $\sigma : V \rightarrow V$, um operador linear com polinômio característico $p(X)$ irredutível sobre K . Seja $L = \frac{K[X]}{(p(X))} \cong K(x)$, com base $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, onde $x = X + (p(X))$. Observe que $\dim_K L = n =$

$\dim_K V$. Note ainda que os elementos de L são da forma $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$ com $a_i \in K$, para $0 \leq i \leq n-1$. Logo $f(\sigma) = a_0 \text{id}_V + a_1\sigma + \cdots a_{n-1}\sigma^{n-1}$ é um operador linear de V .

Com produto escalar $\bullet$ sobre V , definido por

$$\begin{aligned} \bullet : L \times V &\rightarrow V \\ (f(x), v) &\mapsto f(x) \bullet v = f(\sigma)(v), \end{aligned}$$

para todo $v \in V$, segue facilmente que V é um L -espaço vetorial. Além disso, como $\dim_K V = \dim_L V \dim_K L$, temos que $\dim_L V = 1$. Resumimos este parágrafo em:

Lema 5.9. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K , $\sigma : V \rightarrow V$ um operador linear com polinômio característico irredutível $p(X) \in K[X]$ e $L = \frac{K[X]}{(p(X))}$. Então V é um L -espaço vetorial de dimensão 1.

O próximo resultado nos diz que todo operador hermitiano cujo operador auto-adjunto tem polinômio característico irredutível e separável pode ser representado no anel de Witt por uma forma traço escalar.

Proposição 5.10. Seja (V, b, σ) um operador hermitiano sobre um corpo K . Se o polinômio característico $p(X)$ de σ sobre K é irredutível e separável, então existe uma extensão L/K e $\lambda \in L$ tal que $(V, b) = \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)$ em $W(K)$.

Dem.: Desde que $p(X)$ é irredutível, do Lema 5.9, temos que V é um L -espaço vetorial de dimensão 1, onde $L = \frac{K[X]}{(p(X))}$.

Começaremos mostrando que podemos definir uma forma L -bilinear e simétrica

$$B : V \times V \rightarrow L,$$

satisfazendo $\text{tr}_{L/K}(B(v, w)) = b(v, w)$, para todos $v, w \in V$. Desde que L/K é separável, temos do Lema 1.15, que a adjunta de $\text{Tr}_{L/K}(1)$ é um isomorfismo, ou seja, $L \cong L^*$. Dado $(v, w) \in V \times V$ a aplicação $f_{(v, w)} : L \rightarrow K$, definida por $f_{(v, w)}(a) = b(ax, y)$ é K -linear, ou seja, $f_{(v, w)} \in L^*$. Logo, existe $\lambda_{(v, w)} \in L$ tal que $f_{(v, w)}$ é a imagem de $\lambda_{(v, w)}$ pela adjunta de $\text{Tr}_{L/K}(1)$ e, conseqüentemente, $\text{tr}_{L/K}(\lambda_{(v, w)}a) = f_{(v, w)}(a) = b(ax, y)$, para todo $a \in L$.

Definimos, então $B : V \times V \rightarrow L$, por $B(v, w) = \lambda_{(v, w)}$, para cada $(v, w) \in V \times V$.

Agora, mostraremos que B é simétrica. Para tanto, sejam $v, w \in V$, $B(v, w) = z$ e $B(w, v) = t$. Então $\text{tr}_{L/K}(az) = \text{tr}_{L/K}(aB(v, w)) = b(av, w)$ e $\text{tr}_{L/K}(at) = \text{tr}_{L/K}(aB(w, v)) = b(aw, v)$, para todo $a \in L$.

Como $a \in L = \frac{K[X]}{(p(X))}$, temos que $a = a_0 + a_1x + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$, onde $x = X + (p(X))$ e $n = \text{gr}(p(X))$. Da estrutura de L -espaço vetorial de V temos que $av = a \bullet v = a_0v + \cdots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(v)$, para todo $v \in V$ e $a \in L$. Logo, usando que σ é auto-adjunto e que b é K -bilinear, obtemos

$$\begin{aligned} b(av, w) &= b(a_0v + \cdots + a_{n-1}\sigma^{n-1}(v), w) = a_0b(v, w) + \cdots + a_{n-1}b(v, \sigma^{n-1}(w)) \\ &= b(v, a_0w) + \cdots + b(v, a_{n-1}\sigma^{n-1}(w)) = b(v, aw) = b(aw, v). \end{aligned}$$

Assim, $\text{tr}_{L/K}(az) = b(av, w) = b(aw, v) = \text{tr}_{L/K}(at)$, ou seja, $0 = \text{tr}_{L/K}(a(z - t)) = \text{Tr}_{L/K}(a, z - t)$, para todo $a \in L$. Do Lema 1.15 temos que $z = t$, e B é simétrica.

Agora, desde que B é simétrica, para mostrarmos que B é L -bilinear, é suficiente mostrar que B é L -linear em uma das variáveis. Para tanto, considere $v, w \in V$ e $a \in L$. Para todo $c \in L$, temos $\text{tr}_{L/K}(caB(v, w)) = b((ca)v, w) = b(c(av), w) = \text{tr}_{L/K}(cB(av, w))$, ou seja, $\text{tr}_{L/K}(c(aB(v, w) - B(av, w))) = 0$ e novamente do Lema 1.15 temos que $aB(v, w) = B(av, w)$, para todo $a \in L$ e $v, w \in V$.

Para todo $v, w, u \in V$, sejam $B(v + u, w) = z$, $B(v, w) = t$ e $B(u, w) = s$. Então $\text{tr}_{L/K}(az) = b(a(v + u), w) = b(av + au, w) = b(av, w) + b(au, w) = \text{tr}_{L/K}(at) + \text{tr}_{L/K}(as) = \text{tr}_{L/K}(a(t + s))$, ou seja, $\text{tr}_{L/K}(a(z - (t + s))) = 0$, para todo $a \in L$. Usando novamente o Lema 1.15, obtemos que B é L -linear na primeira variável.

Assim, $\text{tr}_{L/K}(B(v, w)) = b(v, w)$, para todo $v, w \in V$. Como V é um L -espaço vetorial de dimensão 1, existe $v_0 \in V$ tal que $\theta : L \rightarrow V$, definida por $\theta(s) = sv_0$ é um L -isomorfismo. Tomando $\lambda = B(v_0, v_0)$, temos que $\lambda \neq 0$, pois caso contrário, para todo $v, w \in V$, existem s, s' tais que $v = sv_0$, $w = s'v_0$. Logo $b(v, w) = \text{tr}_{L/K}(B(v, w)) = \text{tr}_{L/K}(ss'0) = 0$, o que contradiz o fato que (V, b) é não degenerado. Portanto, para $v, w \in V$, com $v = sv_0$ e $w = s'v_0$, temos $b(v, w) = \text{tr}_{L/K}(B(v, w)) = \text{tr}_{L/K}(\lambda ss') = \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)(s, s')$, ou seja, $\theta : L \rightarrow V$ é uma isometria de L -espaços bilineares e, como queríamos, $(V, b) \simeq \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)$. ■

Lema 5.11. Sejam S uma matriz diagonal de ordem n sobre um corpo de números algébricos K e P uma ordem de K . Seja m o número de elementos negativos na diagonal de S . Então existe uma matriz simétrica C de ordem n sobre K tal que SC tem polinômio característico $p(X)$ irredutível sobre K . Além disso, $p(X)$ tem exatamente $s_p = n - 2m$ raízes em K .

Dem.: Consideremos inicialmente a matriz simétrica $n \times n$ de indeterminadas $C = (X_{ij})$. Então do Lema 4.5 temos que $p(\{X_{ij}\}, X) = \det(CS - XI_n)$ é irredutível em $K[\{X_{ij}\}, X]$. Denote os elementos da diagonal de S por $s_1, \dots, s_n$. Por hipótese, m desses elementos são negativos, digamos $s_2, s_4, \dots, s_{2m}$. Tome

$$(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} B_1 & 0_2 & 0_2 & \cdots & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & \ddots & 0_2 & \cdots & \cdots & 0_2 \\ \vdots & \cdots & B_m & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2m+1} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix} \in M_n(K),$$

onde $B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tal que os elementos $c_i s_i$ sejam distintos, que existe porque K é um corpo infinito, temos $p(\{\lambda_{ij}, X\}) = (-1)^{2m}(c_{2m+1}d_{2m+1} - X) \cdots (c_n d_n - X)$, e é um polinômio separável de $K[X]$, com $s_P = n - 2m$ raízes em K .

Uma ordem P de K induz uma topologia em K e, conseqüentemente em K^{n^2} . Como $p(\{\lambda_{ij}, X\})$ tem s_P raízes distintas em K , temos que existem vizinhanças dessas raízes que não contém outras raízes de $p(\{\lambda_{ij}, X\})$. Logo existem matrizes (λ'_{ij}) suficientemente próximas de (λ_{ij}) tais que $p(\{\lambda'_{ij}, X\})$ também tem s_P raízes distintas em K . O conjunto de tais matrizes formam um aberto em U_P na topologia de K^{n^2} por P . Desde que K é Hilbertiano, por um resultado de Dries contido em [D], temos que $U \cap H_K(p(\{\lambda'_{ij}, X\})) \neq \emptyset$. Logo existe $(\alpha_{ij}) \in M_n(K)$ tal que $p(\{\alpha_{ij}, X\})$ é irredutível e separável em $K[X]$ com exatamente s_P raízes. ■

Teorema 5.12. Seja K um corpo de números algébricos. Todo elemento $(V, b) \in W(K)$ com

$$s_P = \text{ass}_P(b) \geq 0,$$

para todas as ordens P de K , é algébrico.

Dem.: Seja $(V, b) \in W(K)$. Como $\text{car}(K) = 0$, do Teorema 1.5 podemos supor que b é diagonalizável, ou seja, $b = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$. Seja $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ a matriz diagonal correspondente. Do Lema 5.11 temos que existe uma matriz simétrica C tal que $A = CS$ tem polinômio característico p irredutível com exatamente $s_P = \text{ass}_P(b)$ raízes reais. Além disso, temos que $A^t S = S^t C^t S = SCS = SA$. Do Lema 5.8, temos que A representa um operador auto-adjunto. Logo, do Lema 4.3 e da Proposição 4.4 temos que existe $\lambda \in L = \frac{K[X]}{(p(X))}$, tal que $b = \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)$ em $W(K)$. Como p tem exatamente s_P raízes reais, temos do Teorema 2.2 que qualquer ordem P de K se estende a exatamente s_P ordens de L . Agora, o resultado segue do Lema 5.7. ■

Encerraremos este trabalho mostrando como obter o Teorema 4.6, usando operadores hermitianos sobre K . Para tanto, precisamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 5.13. Seja K um corpo hilbertiano. Sejam $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V sobre K e S a matriz de b em relação à base $\mathcal{B}$. Então existe uma matriz simétrica C , tal que $A = CS$ tem polinômio característico irredutível e separável sobre K . Além disso, A representa um operador auto-adjunto de V , com respeito a forma bilinear b .

Dem.: Como característica de K é distinta de 2, podemos supor que S é diagonal, ou seja, $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Seja $A' = (X_{ij})$ uma matriz simétrica $n \times n$ de indeterminadas.

Do Lema 4.5 temos que $p(\{X_{ij}\}, X) = \det(A - S^{-1}(XI_n))$ é um polinômio irredutível em $K[\{X_{ij}\}, X]$.

Além disso, escrevendo $X_{ij} = \delta_{ij}Y_i$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, temos que $h(Y_1, \dots, Y_n, X) = \prod_{i=1}^n (Y_i - s_i^{-1}X)$ é o produto da diagonal principal de $(A - S^{-1}(XI_n))$. Mais ainda, h é um polinômio separável na variável X , pois as raízes de h são $Y_i s_i$, para $i = 1, \dots, n$, que são todas distintas. Logo $\frac{\partial h}{\partial X}$ é não nula e tem grau $n - 1$. Escrevendo $p(\{X_{ij}\}, X) = h(\{X_{ij}\}, X) + \sum_{l=0}^{n-1} f_l(\{X_{ij}\})X^l \in K[\{X_{ij}\}, X]$, temos que

$$\frac{\partial p}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) = \frac{\partial h}{\partial X}(\{X_{ij}\}, X) + \sum_{l=1}^{n-1} l f_l(\{X_{ij}\})X^{l-1}.$$

Desde que $gr\left(\frac{\partial X^l f_l}{\partial X}\right) \leq n - 2$ para $l = 0, \dots, n - 1$ e $gr\left(\frac{\partial h}{\partial X}\right) = n - 1$, podemos concluir que $\frac{\partial p}{\partial X}$ é não nula.

Considere o seguinte subconjunto de Hilbert de K ,

$$H_K\left(p; \frac{\partial p}{\partial X}\right) = \left\{ (\lambda_{ij}) \in M_n(K); p(\{\lambda_{ij}\}, X) \text{ é irredutível em } K[X] \text{ e } \frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, \alpha) \neq 0 \right\}.$$

Como K é Hilbertiano, temos que $H_K\left(p; \frac{\partial p}{\partial X}\right) \neq \emptyset$, ou seja, existe uma matriz simétrica $C = (\lambda_{ij}) \in M_n(K)$ tal que $p(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é irredutível e $\frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, \alpha) \neq 0$, ou seja, $\frac{\partial p}{\partial X}(\{\lambda_{ij}\}, X)$ é um polinômio não nulo em $K[X]$.

Note que para $A = CS$ temos que $A^t S = (CS)^t S = S^t(C)^t S = S(C)S = SA$. Do Lema 5.8, temos que A representa um operador auto-adjunto de V com respeito à forma bilinear b . ■

Finalmente, o Teorema 4.6 obtido usando operadores hermitianos.

Teorema 5.14. Seja K um corpo hilbertiano. Então qualquer forma bilinear não degenerada sobre K é isométrica a uma forma traço escalar.

Dem.: Seja $(V, b) \in \mathfrak{Bil}(K)$, com $\dim V = n$. Do lema anterior, existe uma matriz simétrica $C \in M_n(K)$ tal que $A = CS$ tem polinômio característico irredutível e separável sobre K e A representa um operador auto-adjunto de V com relação à b , onde S é a matriz de b em relação a alguma base ortogonal de V . Assim, (V, b, σ_A) é um operador hermitiano sobre K , onde σ_A é o operador auto-adjunto representado por A . Agora, da Proposição 5.10, temos que $b = \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)$, onde $L = \frac{K[X]}{(p(X))}$, com $p(X)$ é o polinômio característico de A e $\lambda \in L$. Como $\dim b = n$ e $\dim \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle) = \dim_K L = n$, do Teorema 1.12, temos que $b \simeq \text{Tr}_{L/K}(\langle \lambda \rangle)$, como queríamos. ■

Referências Bibliográficas

- [C-P] Conner, P. E. and Perlis, R.; *A survey of trace forms of algebraic number fields*; Series in Pure Math, V.2, World Scientific, 1984.
- [D] Dries. L.v.d.; *Model theory of fields*; Thesis, Utrecht, 1978.
- [F] Fried, M. D. and Jarden, M.; *Field Arithmetic*; Springer-Verlag, 1986.
- [H] Hefez, A.; *Singularidades de Curvas Irredutíveis Planas*; The Sixth Workshop on Real and Complex Singularities, USP-São Carlos, 2000.
- [K] Krüskemper, M. and Scharlau, W.; *On trace forms of hilbertian fields*; Comment. Math. Helvetici, **63**, 296-304, 1988.
- [L] Lang, S.; *Algebra*; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 3rd ed., 1993.
- [Lam] Lam, T. Y.; *The algebraic theory of quadratic forms*; University of California, 1973.
- [S1] Scharlau, W.; *Quadratic and Hermitian Forms*; Springer-Verlag, 1985.
- [S2] Scharlau, W.; *On trace forms of algebraic number fields* ; Math. Z. **196**, 125-127, 1987.
- [Se] Serre, J.-P.; *The Witt invariant of the form $\text{Tr}(x^2)$* ; Comment. Math. Helv. **59**, 651-676, 1984.
- [St] Stewart, I.; *Galois Theory*; Chapman and Hall, London, 1973.
- [T] Taussky-Todd, O.; *The discriminant matrices of an algebraic number field*; J. London Math. Soc. **43**, 1968.
- [V] Vila, N.; *Sobre el Teorema D'irreductibilitat de Hilbert*; Pub. Mat. UAB. Vol **30** nº 2-3, 83-87, 1986.
- [W] Waterhouse, W. C.; *Scaled trace forms over number fields* ; Arch. Math. **47**, 229-231, 1986.