SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 14/01/2003

Assinatura: _____

Interpolação e hiperinterpolação em esferas

ANA CARLA PIANTELLA¹

Orientador: PROF. DR. VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências: Matemática.

USP - São Carlos
Janeiro/2003

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

*Aos meus pais e
ao Márcio, com
imenso amor e
admiração...*

Agradecimentos

Acima de tudo a Deus, pela presença constante em minha vida, dando-me saúde e força em todos os momentos.

Ao Prof. Valdir Antonio Menegatto, pela dedicação, solicitude e paciência com que me orientou e pelo exemplo de seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus pais, José Antonio e Sonia, pelo amor, compreensão, preocupação e apoio que sempre manifestaram e principalmente pelo esforço que fizeram para que eu tivesse oportunidade de estudo e conseguisse concluir mais esta etapa da minha vida. Minha eterna gratidão!

Ao meu noivo e amigo Márcio, por sempre me incentivar a seguir em frente e sempre estar ao meu lado com toda sua paciência, compreensão e amor.

A toda minha família pelo carinho, que de maneira indireta, contribuiu sensivelmente para a realização deste trabalho.

Aos amigos que encontrei em minha caminhada, os quais tanto me incentivaram e me ajudaram a transpor todos os obstáculos até aqui. Em especial, aos amigos da pós-graduação, pela amizade, companheirismo e grande apoio nos momentos difíceis.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e sempre me incentivaram a prosseguir em meus estudos e não desistir de meus objetivos.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito obrigada!

Abstract

This work addresses two issues:

- i) To study two constructive methods to approximate a real continuous function on the unit sphere S^{r-1} of $\mathbb{R}^r$ by spherical polynomials of degree $\leq n$ (n fixed);
- ii) To estimate the norms of the interpolation and hyperinterpolation operators, comparing them with the norm of the orthogonal projection of $C(S^{r-1})$ over the polynomial space where the approximations live.

Resumo

Os objetivos deste trabalho são:

- i) Fixado um inteiro positivo n , estudar dois métodos “construtivos” para aproximar-se uma função real contínua definida na esfera unitária S^{r-1} de $\mathbb{R}^r$, por polinômios esféricos de grau $\leq n$;
- ii) Obter estimativas para as normas dos operadores de interpolação e hiperinterpolação, comparando-as com a norma da projeção ortogonal de $C(S^{r-1})$ sobre o espaço de polinômios onde as aproximações residem.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Harmônicos esféricos	3
1.2 Polinômios de Legendre e o teorema da adição	6
1.3 Núcleos de reprodução	9
1.4 Propriedades dos núcleos de reprodução	13
1.5 Projeções	17
2 Interpolação em S^{r-1}	19
2.1 Interpolação sobre conjuntos fundamentais	19
2.2 Interpolação de Lagrange	21
2.3 A norma do operador de interpolação	24
2.4 Sistema fundamental extremo	28
3 Hiperinterpolação em S^{r-1}	31
3.1 Quadratura esférica	31
3.2 Calotas esféricas e a condição de regularidade	34
3.3 Hiperinterpolação: propriedades básicas	35
3.4 Norma do operador de hiperinterpolação	41
3.5 Hiperinterpolação na norma uniforme	42
4 Hiperinterpolação em S^{r-1} na ordem da projeção mínima	45
4.1 Cobertura da esfera e das calotas esféricas	45
4.2 Hiperinterpolação e a projeção mínima	50
Notações	55
Referências Bibliográficas	57

Introdução

Seja S^{r-1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^r$. O objetivo deste trabalho é estudar métodos construtivos para aproximar-se uma função real contínua sobre a esfera S^{r-1} por polinômios esféricos de grau $\leq n$, onde n é um inteiro positivo fixado. Mais especificamente, o trabalho descreve dois métodos, um baseado em interpolação e outro em hiperinterpolação.

Interpolação refere-se à busca de polinômios nas condições especificadas que coincidem com a função em cada ponto de um subconjunto fundamental apropriado de S^{r-1} .

Hiperinterpolação refere-se à projeção ortogonal $L^2(S^{r-1})$ da função sobre o espaço dos polinômios esféricos de grau $\leq n$, substituindo-se os coeficientes de Fourier desta, por outros calculados por uma fórmula de quadratura com pesos positivos e que é exata para os polinômios esféricos de grau $\leq 2n$.

Os operadores lineares de interpolação e hiperinterpolação resultantes serão estudados com dois enfoques distintos: como transformações de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$ e como operadores de $C(S^{r-1})$ em $C(S^{r-1})$.

Uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo pode ser dada da seguinte forma: no Capítulo 1 discutiremos rapidamente algumas definições e resultados de caráter geral, principalmente aqueles referentes a análise em S^{r-1} . No Capítulo 2 introduziremos o operador de interpolação polinomial e obteremos estimativas para sua norma nos dois contextos citados acima. No Capítulo 3, detalharemos o conceito de hiperinterpolação dissecando algumas de suas propriedades básicas. A seguir, apresentaremos resultados sobre a norma do operador de hiperinterpolação. Finalmente, no Capítulo 4, provaremos que a ordem de crescimento da norma uniforme do operador de hiperinterpolação coincide com a da projeção ortogonal de $C(S^{r-1})$ sobre o espaço dos polinômios esféricos de grau $\leq n$, a qual é a melhor dentre todas as projeções.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns fatos básicos sobre a análise em S^{r-1} . Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em várias referências, dentre elas [1], [9], [10] e [15]. Optamos pela inclusão de algumas provas e pela não inclusão de outras mais elaboradas.

1.1 Harmônicos esféricos

Harmônicos esféricos em r dimensões fazem o papel desempenhado pelas funções seno e cosseno no estudo de funções periódicas no círculo S^1 . A formalização do conceito propriamente dito depende de duas definições que damos a seguir.

Uma função $f : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser *homogênea* de grau n quando

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^r.$$

Ela é dita ser *harmônica* quando $\Delta(f) = 0$, onde $\Delta = \sum_{j=1}^r \partial^2 / \partial x_j^2$.

Denotaremos por $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$, o espaço formado pelos polinômios em r variáveis que são homogêneos de grau n e por $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$ o espaço dos polinômios em r variáveis que são harmônicos e homogêneos de grau n .

Definição 1.1.1. *Um polinômio esférico de grau n em r variáveis é a restrição de um polinômio de grau n em r variáveis a S^{r-1} .*

Definição 1.1.2. *Um harmônico esférico de grau n em r variáveis é a restrição de um elemento de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$ a S^{r-1} .*

Denotaremos por $\mathcal{P}_n(S^{r-1})$ o espaço das restrições dos polinômios homogêneos de grau n a S^{r-1} e por $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$ o espaço dos harmônicos esféricos de grau n em r variáveis. O espaço dos polinômios esféricos de grau $\leq n$ em r variáveis será denotado por $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.

Usaremos a estrutura do espaço $L^2(S^{r-1})$ usual. A expressão

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^{r-1}} f(x)g(x)d\sigma_r(x), \quad f, g \in L^2(S^{r-1}), \quad (1.1)$$

define um produto interno neste espaço, onde $d\sigma_r$ representa a medida de superfície usual sobre S^{r-1} . A notação para o produto interno acima será utilizada para denotar outro produto interno que não este, em pelo menos mais uma circunstância no texto. Isto será enfatizado no momento oportuno, causando assim nenhum transtorno para o leitor. A menos de especificação em contrário, ortonormalidade sempre referir-se-á ao produto interno em (1.1).

Os resultados a seguir mostrarão que é possível construir uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ inteiramente composta de harmônicos esféricos.

Teorema 1.1.3. *Se $l \neq k$, então $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$ e $\mathcal{H}_k(S^{r-1})$ são subespaços ortogonais de $L^2(S^{r-1})$.*

Demonstração: Sejam $p \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^r)$ e $q \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^r)$. Pela Identidade de Green temos que

$$\int_{S^{r-1}} (pD_{\vec{n}}(q) - qD_{\vec{n}}(p))d\sigma_r = \int_{B_r} (p\Delta(q) - q\Delta(p))(x)dx = 0,$$

onde $D_{\vec{n}}(p)$ e $D_{\vec{n}}(q)$ são, respectivamente, as derivadas direcionais de p e q na direção do vetor normal $\vec{n}$ exterior a S^{r-1} e B_r é a bola aberta unitária com centro na origem de $\mathbb{R}^r$. Mas,

$$D_{\vec{n}}(p)(\xi) = \frac{d}{dr}p(r\xi)|_{r=1} = \frac{d}{dr}(r^l p(\xi))|_{r=1} = lp(\xi), \quad \xi \in S^{r-1},$$

e, da mesma forma, $D_{\vec{n}}(q)(\xi) = kq(\xi)$, $\xi \in S^{r-1}$. Logo,

$$0 = \int_{S^{r-1}} (pD_{\vec{n}}(q) - qD_{\vec{n}}(p))d\sigma_r = \int_{S^{r-1}} (kpq - lpq)d\sigma_r = (k-l) \int_{S^{r-1}} pq d\sigma_r.$$

Como $l \neq k$, segue que p e q são ortogonais. $\square$

A seguir, utilizaremos a notação usual para multi-índices. Um polinômio $p(x)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_r),$$

onde $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ e $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. O operador diferencial associado a p é o operador $p(D)$ dado por

$$p(D) := \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Podemos definir o seguinte produto interno em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$:

$$\langle p, q \rangle_n := p(D)(q), \quad p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r).$$

Se p tem a representação acima e $q(x) = \sum_{|\beta|=n} b_\beta x^\beta$, podemos usar a fórmula

$$D^\alpha(x^\beta) := \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \text{ e } |\alpha| = |\beta| \\ \alpha! & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$$

para concluir que

$$\langle p, q \rangle_n := p(D)(q) = \sum_{|\alpha|=n} \sum_{|\beta|=n} a_\alpha b_\beta D^\alpha(x^\beta) = \sum_{|\alpha|=n} \alpha! a_\alpha b_\alpha.$$

Teorema 1.1.4. *Se p é um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$ então*

$$p(x) = p_n(x) + |x|^2 p_{n-2}(x) + \cdots + |x|^{2k} p_{n-2k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^r$$

onde $k = [n/2]$ e $p_{n-2j} \in \mathcal{H}_{n-2j}(\mathbb{R}^r)$, $j = 0, 1, \dots, k$. A representação acima é única.

Demonstração: Se $n = 0$ ou $n = 1$ então $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$ e o teorema é válido trivialmente. Nos casos restantes mostraremos que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r) \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)$$

onde $|x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r) = \{|x|^2 q(x) : q \in \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)\}$ e a soma direta é ortogonal em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$. Para tanto, vamos mostrar que o complemento ortogonal de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$ é $|x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)$. Se $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$ é ortogonal a $|x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)$ então

$$0 = \langle |x|^2 q, p \rangle_n = \Delta(q)(D)(p) = q(D)(\Delta(p)) = \langle q, \Delta(p) \rangle_{n-2}, \quad q \in \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r),$$

onde a última igualdade segue do fato de que $\Delta(p) \in \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)$. Segue que $\Delta(p)$ é ortogonal a todo $q \in \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r)$, ou seja, $\Delta(p) = 0$. Portanto, $p \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$. Consequentemente, $(|x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r))^\perp \subset \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$. O procedimento acima é reversível, isto é, $(|x|^2 \mathcal{P}_{n-2}(\mathbb{R}^r))^\perp \supset \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$. A conclusão do teorema segue por indução. $\square$

Corolário 1.1.5. *Se p é um polinômio de grau n em r variáveis então a restrição de p a S^{r-1} é soma de harmônicos esféricos de grau no máximo n .*

Demonstração: Segue imediatamente do teorema acima e do fato de que todo polinômio é soma de polinômios homogêneos. $\square$

Na verdade, os argumentos acima revelam que

$$\mathbb{P}_n(S^{r-1}) = \mathcal{H}_0(S^{r-1}) \oplus \mathcal{H}_1(S^{r-1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n(S^{r-1}). \quad (1.2)$$

O espaço $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$ tem dimensão $N(r, n)$ ([1, p. 82]) onde $N(r, 0) = 1$ e

$$N(r, n) = \binom{r+n-1}{r-1} - \binom{r+n-3}{r-1} = \frac{2n+r-2}{n} \binom{n+r-3}{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (1.3)$$

Segue de (1.2) que a dimensão d_n do espaço $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é dada por

$$d_n = \sum_{l=0}^n N(r, l). \quad (1.4)$$

Usando propriedades do fatorial não é difícil ver que

$$d_n = \binom{r+n-1}{r-1} + \binom{r+n-2}{r-1}. \quad (1.5)$$

Note que

$$d_n \geq \frac{2n^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (1.6)$$

Combinando-se os resultados acima, vemos que é possível construir uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ da forma

$$\{p_{lk} : k = 1, 2, \dots, N(r, l), l = 0, 1, \dots, n\}, \quad (1.7)$$

onde $\{p_{lk} : k = 1, 2, \dots, N(r, l)\}$ é uma base de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$, $l = 0, 1, \dots, n$.

1.2 Polinômios de Legendre e o teorema da adição

O Teorema da Adição é de fundamental importância na análise de vários problemas de natureza esférica. Ele surge quando se tenta determinar os elementos de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ que são zonais, isto é, são invariantes por transformações ortogonais que fixam um determinado ponto de S^{r-1} . Sendo o Teorema da Adição um resultado clássico, sua prova será omitida. Entretanto, ela pode ser encontrada em [10, p. 27].

Teorema 1.2.1. *Seja $\{p_k : k = 1, 2, \dots, N(r, n)\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$. Então*

$$\sum_{k=1}^{N(r, n)} p_k(x)p_k(y) = \frac{N(r, n)}{|S^{r-1}|} P_n^r(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in S^{r-1},$$

onde P_n^r é o polinômio de Legendre de grau n associado à dimensão r , $|S^{r-1}|$ é a área da superfície de S^{r-1} e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^r$

Cabe observar neste momento que ([11, p. 7])

$$|S^{r-1}| = \int_{S^{r-1}} d\sigma_r = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)},$$

onde Γ denota a função gama usual.

Concluiremos esta seção detalhando algumas propriedades dos polinômios de Legendre que serão utilizadas à frente. Apenas para situar o leitor, começamos observando que a normalização dos polinômios de Legendre é $P_n^r(1) = 1$. Ainda, P_n^2 é o polinômio de Chebyshev de grau n enquanto que P_n^3 é o polinômio de Legendre clássico de grau n . Em geral, para $r \geq 3$ temos,

$$P_n^r = \frac{(r-3)! n!}{(n+r-3)!} C_n^{(r-2)/2} = \frac{2n+r-2}{N(r,n)(r-2)} C_n^{(r-2)/2} \quad (1.8)$$

onde $C_n^{(r-2)/2}$ é o polinômio de Gegenbauer de grau n associado ao número real $(r-2)/2$. Em particular,

$$C_0^{r/2}(t) = 1 \quad \text{e} \quad C_1^{r/2}(t) = rt. \quad (1.9)$$

Geralmente, os polinômios de Gegenbauer C_n^λ , $\lambda > -1/2$, são gerados pela série

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l^\lambda(t) z^l = \frac{1}{(1-2tz+z^2)^\lambda}, \quad t \in [-1, 1]. \quad (1.10)$$

Os polinômios de Gegenbauer são, por sua vez, casos particulares dos polinômios de Jacobi. Precisamente,

$$C_n^\lambda = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}, \quad \lambda > -1/2, \quad (1.11)$$

onde

$$(\lambda)_n = \prod_{j=1}^n (\lambda+j-1) = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1), \quad n \geq 1,$$

$$(\lambda)_0 = 1, \quad \lambda \neq 0,$$

e $P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}$ é o polinômio de Jacobi de grau n associado aos índices $\lambda-1/2$ e $\lambda-1/2$.

Em geral, os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$, $\alpha, \beta > -1$ são gerados pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(t) z^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2tz+z^2)^{1/2} [1-z+(1-2tz+z^2)^{1/2}]^\alpha [1+z+(1-2tz+z^2)^{1/2}]^\beta}$$

onde $t \in [-1, 1]$. A normalização para estes polinômios é dada pela relação

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}. \quad (1.12)$$

As referências [13, 23] trazem informações detalhadas sobre os polinômios de Legendre, Gegenbauer e Jacobi, incluindo todas as fórmulas citadas ou usadas neste trabalho. A seguir, enunciaremos alguns resultados mais específicos sobre tais polinômios que serão necessários neste trabalho.

Lema 1.2.2. *Sejam $\alpha, \beta > -1$. Se $k = \max\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$, então*

$$\max_{t \in [-1, 1]} |P_n^{(\alpha, \beta)}(t)| = \binom{n+k}{n}.$$

Demonstração: Ver [23, p. 163] □

Lema 1.2.3. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e c uma constante positiva. Então,*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2} O(n^{-1/2}) & \text{se } cn^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \\ O(n^\alpha) & \text{se } 0 \leq \theta \leq cn^{-1} \end{cases}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Ver [23, p. 164] □

Os resultados abaixo contêm informações gerais sobre os zeros dos polinômios de Jacobi ([23, p. 117, 118]).

Lema 1.2.4. *Seja $t_n(\alpha, \beta) < t_{n-1}(\alpha, \beta) < \dots < t_1(\alpha, \beta)$ a ordenação dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Então*

$$\frac{\partial t_k(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial t_k(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.14)$$

e

$$\frac{\partial t_k(\alpha, \alpha)}{\partial \alpha} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, [n/2]. \quad (1.15)$$

Lema 1.2.5. *Sejam α e β satisfazendo $2\alpha, 2\beta \in (-1, 1)$ e $t_n(\alpha, \beta) < t_{n-1}(\alpha, \beta) < \dots < t_1(\alpha, \beta)$ a ordenação dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Escreva $t_k(\alpha, \beta) := \cos \theta_k(\alpha, \beta)$, $\theta_k(\alpha, \beta) \in (0, \pi)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Então $(2k-1)\pi \leq (2n+1)\theta_k(\alpha, \beta) \leq 2k\pi$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

Nos resultados abaixo $j_k(\alpha)$ denota o k -ésimo zero positivo de J_α , a função de Bessel de índice α :

$$J_\alpha(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k+\alpha}, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

O próximo lema nos dá uma propriedade de enlaçamento dos zeros dessas funções ([24, p. 479]).

Lema 1.2.6. *Seja $\alpha > -1$. Valem as desigualdades $0 < j_1(\alpha) < j_1(\alpha + 1) < j_2(\alpha) < j_2(\alpha + 1) < j_3(\alpha) < \dots$.*

A propriedade assintótica dos zeros dos polinômios de Jacobi é dada no próximo lema ([23, p. 186]).

Lema 1.2.7. *Seja $t_{1n}(\alpha, \beta) > t_{2n}(\alpha, \beta) > \dots$ a ordenação dos zeros do polinômio $P_n^{(\alpha, \beta)}$ em $[-1, 1]$. Escreva $t_{kn}(\alpha, \beta) := \cos \theta_{kn}(\alpha, \beta)$, $\theta_{kn}(\alpha, \beta) \in (0, \pi)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Então, fixado k , vale o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_{kn}(\alpha, \beta) = j_k(\alpha)$.*

As fórmulas de recorrência

$$P_{n-1}^{(\lambda, \lambda)} = P_n^{(\lambda, \lambda-1)} - P_n^{(\lambda-1, \lambda)}, \quad (1.17)$$

$$(2\lambda + n)P_n^{(\lambda, \lambda)} = (\lambda + n)P_n^{(\lambda, \lambda-1)} + (\lambda + n)P_n^{(\lambda-1, \lambda)}, \quad (1.18)$$

serão utilizadas na próxima seção.

1.3 Núcleos de reprodução

O termo núcleo de reprodução refere-se geralmente a espaços de Hilbert construídos a partir de funções positivas definidas ou afins. Os artigos tipo survey [17] e [18] são referências modernas sobre a teoria e uso de núcleos de reprodução em Teoria da Aproximação. A formalização que necessitaremos é a seguinte.

Definição 1.3.1. *Seja V um espaço de Hilbert de funções com domínio D . Uma função $G : D \times D \mapsto \mathbb{R}$ é um núcleo de reprodução de V se*

- i) Para cada y , a função $x \in D \mapsto G(x, y)$ é um elemento de V .*
- ii) (Propriedade de reprodução) Fixado $y \in D$, $f(y) = \langle f, G(\cdot, y) \rangle$, $f \in V$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de V .*

Como $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é um espaço de Hilbert, podemos definir um núcleo de reprodução para tal espaço.

Proposição 1.3.2. *Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Então*

$$G_n(x, y) := \sum_{j=1}^{d_n} p_j(x)p_j(y), \quad x, y \in S^{r-1}$$

é um núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.

Demonstração: Está claro que se $y \in S^{r-1}$ então a função $x \in S^{r-1} \mapsto G_n(x, y)$ é um elemento de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Para mostrar a validade da propriedade de reprodução, seja $p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Então

$$\langle p, G_n(\cdot, y) \rangle = \left\langle p, \sum_{j=1}^{d_n} p_j(\cdot) p_j(y) \right\rangle = \sum_{j=1}^{d_n} \langle p, p_j \rangle p_j(y) = p(y)$$

como queríamos. $\square$

Proposição 1.3.3. *A definição do núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ apresentada na proposição anterior independe da base utilizada.*

Demonstração: Sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ e $\{q_1, q_2, \dots, q_{d_n}\}$ bases ortonormais de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Podemos escrever

$$q_j = \sum_{k=1}^{d_n} \langle q_j, p_k \rangle p_k, \quad j = 1, \dots, d_n.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d_n} q_j(x) q_j(y) &= \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \langle q_j, p_k \rangle p_k(x) \sum_{i=1}^{d_n} \langle q_j, p_i \rangle p_i(y) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} \langle q_j, p_k \rangle \langle q_j, p_i \rangle p_k(x) p_i(y) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \langle p_k, p_i \rangle p_k(x) p_i(y) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} p_k(x) p_k(y). \end{aligned}$$

Isto demonstra a independência da base. $\square$

A seguir, mostraremos que o núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é invariante por transformações ortogonais de $\mathbb{R}^r$. Necessitaremos do lema abaixo.

Lema 1.3.4. *Sejam A uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^r$ e $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Então $\{p_1 \circ A, p_2 \circ A, \dots, p_{d_n} \circ A\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.*

Demonstração: A relação $\{A(x) : x \in S^{r-1}\} = S^{r-1}$ revela que as igualdades

$$\sum_{j=1}^{d_n} c_j (p_j \circ A) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{d_n} c_j p_j = 0$$

são equivalentes. Logo, a independência linear de $\{p_1 \circ A, p_2 \circ A, \dots, p_{d_n} \circ A\}$ segue. Como o conjunto $\{p_1 \circ A, p_2 \circ A, \dots, p_{d_n} \circ A\}$ possui d_n elementos distintos, concluímos que ele é

uma base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. O fato da medida $d\sigma_r$ ser invariante por transformações ortogonais de $\mathbb{R}^r$, implica que a igualdade $\langle p_i \circ A, p_j \circ A \rangle = \langle p_i, p_j \rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, d_n$, vale. Portanto, a ortonormalidade de $\{p_1 \circ A, p_2 \circ A, \dots, p_{d_n} \circ A\}$ segue. $\square$

Teorema 1.3.5. *Se A é uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^r$ então $G_n(A(x), A(y)) = G_n(x, y)$, $x, y \in S^{r-1}$.*

Demonstração: Tome uma base ortonormal $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. O lema anterior garante que $\{p_1 \circ A, p_2 \circ A, \dots, p_{d_n} \circ A\}$ é outra base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Logo, pela Proposição 1.3.3

$$\begin{aligned} G_n(A(x), A(y)) &= \sum_{j=1}^{d_n} p_j(A(x)) p_j(A(y)) \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} (p_j \circ A)(x) (p_j \circ A)(y) \\ &= G_n(x, y), \quad x, y \in S^{r-1}, \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Utilizando-se uma base como em (1.7) e o Teorema da Adição vemos que

$$G_n(x, y) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=1}^{N(r,l)} p_{lk}(x) p_{lk}(y) = \sum_{l=0}^n \frac{N(r,l)}{|S^{r-1}|} P_l^r(\langle x, y \rangle) = \tilde{G}_n(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in S^{r-1},$$

onde

$$\tilde{G}_n(t) := \sum_{l=0}^n \frac{N(r,l)}{|S^{r-1}|} P_l^r(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (1.19)$$

Para referência futura calculamos $\tilde{G}_n(1)$:

$$\tilde{G}_n(1) = G_n(x, x) = \frac{1}{|S^{r-1}|} \sum_{l=0}^n N(r,l) P_l^r(1) = \frac{d_n}{|S^{r-1}|}, \quad x \in S^{r-1}. \quad (1.20)$$

No restante desta seção apresentaremos algumas representações alternativas para o núcleo de reprodução G_n de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Tais representações serão usadas à frente. Inicialmente, apresentamos o núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$.

Proposição 1.3.6. *Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_{N(r,l)}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$. Então*

$$G^l(x, y) := \sum_{k=1}^{N(r,l)} p_k(x) p_k(y), \quad x, y \in S^{r-1}$$

é um núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$.

Demonstração: É uma cópia da prova da Proposição 1.3.2. $\square$

É óbvio que o núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$ também independe da base ortonormal utilizada, além de ser bizonal, ou seja, $G^l(A(x), A(y)) = G^l(x, y)$, onde A é uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^r$. Nas notações do Teorema 1.2.1, temos, então, que

$$G^l(x, y) = \frac{N(r, l)}{|S^{r-1}|} P_l^r(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in S^{r-1}. \quad (1.21)$$

Se $r \geq 3$, segue de (1.8) que

$$G^l(x, y) = \frac{2l + r - 2}{(r - 2)|S^{r-1}|} C_l^{(r-2)/2}(\langle x, y \rangle). \quad (1.22)$$

Lembrando (1.2), concluímos que o núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ tem a seguinte forma:

$$G_n(x, y) = \sum_{l=0}^n G^l(x, y), \quad x, y \in S^{r-1}. \quad (1.23)$$

Teorema 1.3.7. *Se $r \geq 3$, então*

$$\tilde{G}_n(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{|S^{r-1}|} \left(C_n^{r/2}(\langle x, y \rangle) + C_{n-1}^{r/2}(\langle x, y \rangle) \right), \quad x, y \in S^{r-1}.$$

Demonstração: Basta somar as equações ([23, p. 84])

$$l C_l^{(r-2)/2}(t) = t \frac{d}{dt} C_l^{(r-2)/2}(t) - \frac{d}{dt} C_{l-1}^{(r-2)/2}(t) \quad (1.24)$$

e

$$(l + r - 2) C_l^{(r-2)/2}(t) = \frac{d}{dt} C_{l+1}^{(r-2)/2}(t) - t \frac{d}{dt} C_l^{(r-2)/2}(t), \quad (1.25)$$

usar a fórmula ([23, p. 81])

$$\frac{d}{dt} C_l^{(r-2)/2}(t) = (r - 2) C_{l-1}^{r/2}(t) \quad (1.26)$$

definindo-se $C_{-1}^{r/2}(t) := C_{-2}^{r/2}(t) := 0$, e combinar com (1.22) e (1.23). □

Concluimos esta seção com uma representação do núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ em termos dos polinômios de Jacobi.

Teorema 1.3.8. *Se $r \geq 3$, vale a seguinte representação:*

$$\tilde{G}_n(\langle x, y \rangle) = \frac{2(r)_{n-1}}{|S^{r-1}|((r+1)/2)_{n-1}} P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in S^{r-1}. \quad (1.27)$$

Demonstração: Usando as relações (1.11), (1.17) e (1.18) obtemos

$$\begin{aligned}
C_n^{r/2} + C_{n-1}^{r/2} &= \frac{(r)_n}{((r+1)/2)_n} P_n^{((r-1)/2, (r-1)/2)} + \frac{(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}} P_{n-1}^{((r-1)/2, (r-1)/2)} \\
&= \frac{(r)_n((r+2n-1)/2)}{((r+1)/2)_n(r-1+n)} [P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)} + P_n^{((r-3)/2, (r-1)/2)}] \\
&\quad + \frac{(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}} [P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)} - P_n^{((r-3)/2, (r-1)/2)}] \\
&= \left[\frac{(r)_n((r+2n-1)/2)}{((r+1)/2)_n(r-1+n)} + \frac{(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}} \right] P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)} \\
&\quad + \left[\frac{(r)_n((r+2n-1)/2)}{((r+1)/2)_n(r-1+n)} - \frac{(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}} \right] P_n^{((r-3)/2, (r-1)/2)}.
\end{aligned}$$

Mas, cálculo direto revela que

$$\frac{(r)_n((r+2n-1)/2)}{((r+1)/2)_n(r-1+n)} = \frac{(r)_{n-1}(r+n-1)((r+2n-1)/2)}{((r+1)/2)_{n-1}((r+2n-1)/2)(r+n-1)} = \frac{(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}},$$

ou seja,

$$C_n^{r/2} + C_{n-1}^{r/2} = \frac{2(r)_{n-1}}{((r+1)/2)_{n-1}} P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}.$$

O resultado segue pelo Teorema 1.3.7. $\square$

Para referência futura, observamos que

$$\alpha_n := \frac{2(r)_{n-1}}{|S^{r-1}|((r+1)/2)_{n-1}} = O(n^{(r-1)/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.28)$$

1.4 Propriedades dos núcleos de reprodução

Nesta seção consideraremos $r \geq 3$. Apresentaremos aqui alguns resultados técnicos sobre a localização dos zeros da função $\tilde{G}_n$ bem como outros resultados auxiliares.

O Teorema 1.4.2 abaixo mostrará que $\tilde{G}_n/\tilde{G}_n(1)$ é assintoticamente $Z_{(r-1)/2}$, onde

$$Z_{(r-1)/2}(\phi) := \Gamma((r+1)/2) \left(\frac{2}{\phi} \right)^{(r-1)/2} J_{(r-1)/2}(\phi). \quad (1.29)$$

Esta informação decorre da seguinte fórmula do tipo Mehler-Heine ([23, p. 186]):

Lema 1.4.1. *Se $\alpha, \beta > -1$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos(z/n)) = (z/2)^{-\alpha} J_{\alpha}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

A convergência é uniforme nos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.4.2. *Se $\tilde{G} := \tilde{G}_n/\tilde{G}_n(1)$ e $\phi \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}(\cos(\phi/n)) = Z_{(r-1)/2}(\phi)$. A convergência é uniforme nos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.*

Demonstração: A fórmula (1.27) implica que

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\cos(\phi/n)) &= \frac{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(\cos(\phi/n))}{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(1)} \\ &= \frac{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(\cos(\phi/n))}{n^{(r-1)/2}} \frac{n^{(r-1)/2}}{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(1)}, \quad \phi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{n^{(r-1)/2}}{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(1)} = \frac{n^{(r-1)/2} \Gamma(n+1) \Gamma((r+1)/2)}{\Gamma(n + (r+1)/2)} = \frac{n^{(r+1)/2} (n-1)!}{((r+1)/2)_n},$$

uma das definições da função gamma usual ([13], p. 11) revela que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(r-1)/2}}{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(r+1)/2} (n-1)!}{((r+1)/2)_n} = \Gamma((r+1)/2).$$

Por outro lado, o Lema 1.4.1 nos dá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(\cos \phi/n)}{n^{(r-1)/2}} = (\phi/2)^{-(r-1)/2} J_{(r-1)/2}(\phi).$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}(\cos(\phi/n)) = \Gamma((r+1)/2) (\phi/2)^{-(r-1)/2} J_{(r-1)/2}(\phi) = Z_{(r-1)/2}(\phi).$$

O teorema segue. □

Observação 1.4.3. O teorema acima garante que $Z_{(r-1)/2}(0) = \tilde{G}(1) = 1$.

Podemos agora extrair algumas informações sobre os zeros de $\tilde{G}_n$.

Lema 1.4.4. *Seja $\tilde{G}$ como no teorema anterior. Denote por s_n o maior zero de P_n^r e por t_n o maior zero de $\tilde{G}$. Então $t_n < s_n$.*

Demonstração: A fórmula (1.27) revela que o maior zero de $\tilde{G}_n$ é o maior zero de $P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}$. Denotemos por $t_n^{(\alpha, \beta)}$ o maior zero de $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Usando os Teoremas 1.3.7 e 1.3.8, vemos que $P_1^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(t) = (1+rt)/2$. Logo, $t_1 = -r^{-1} < 0 = s_1$. Se $n \geq 2$, a segunda desigualdade no Lema 1.2.4, nos dá $t_n = t_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)} < t_n^{((r-1)/2, (r-1)/2)}$, enquanto que a última fornece $t_n^{((r-1)/2, (r-1)/2)} < t_n^{(0,0)} = s_n$. □

Lema 1.4.5. *Seja t_n como no lema anterior. Escreva $t_n := \cos \theta_n$, $\theta_n \in (0, \pi)$. Então $\theta_n > (2n+1)^{-1}$.*

Demonstração: Aplicando o Lema 1.2.5 com $\alpha = \beta = 0$ obtemos

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1} \pi \leq \theta_n^{(0,0)} := \arccos t_n^{(0,0)}, \quad (1.30)$$

o que implica a desigualdade $\cos(2n+1)^{-1} > t_n^{(0,0)}$. Logo, lembrando a prova do lema anterior,

$$\cos \theta_n = t_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)} < t_n^{(0,0)} < \cos \frac{1}{2n+1}.$$

Segue que $\theta_n > (2n+1)^{-1}$. □

Observação 1.4.6. Nas notações acima, $n\theta_n > n/(2n+1) \geq 1/3$. De (1.30) temos que $\pi(2n+1)^{-1} \leq \arccos t_n^{(0,0)}$. Segue que $\cos \theta_n < t_n^{(0,0)} < \cos \pi(2n+1)^{-1}$, ou seja, $\theta_n > \pi(2n+1)^{-1}$. Portanto,

$$\frac{\theta_n}{2} > \frac{\pi}{4n+2} \geq \frac{\pi}{20n}. \quad (1.31)$$

Lema 1.4.7. *Nas notações do Lema 1.2.6, vale a desigualdade*

$$j_1((r-1)/2) > \frac{\pi}{20}.$$

Demonstração: Se $r-1$ é par e $r \geq 3$, o Lema 1.2.6 garante que $j_1((r-1)/2) \geq j_1(1)$, já que $(r-1)/2 \geq 1$. Se $r-1$ é ímpar, então o mesmo lema garante que $j_1((r-1)/2) \geq j_1(3/2) \geq j_1(1/2)$, uma vez que $(r-1)/2 \geq 3/2$. Logo,

$$j_1((r-1)/2) \geq \min\{j_1(1/2), j_1(1)\}.$$

Como ([24, p. 54])

$$J_{1/2}(\phi) = \left(\frac{2}{\pi\phi}\right)^{1/2} \sin \phi,$$

$j_1(1/2) = \pi > \pi/2$. Além disso, a Tabela VII em [24, p. 748] revela que $j_1(1) > 38/10$. Assim,

$$j_1((r-1)/2) \geq \min\{j_1(1/2), j_1(1)\} > \min\{\pi/2, 38/10\} = \frac{\pi}{2}.$$

O resultado segue. □

Lema 1.4.8. *A função $Z_{(r-1)/2}$ é decrescente no intervalo $[0, j_1((r-1)/2)]$.*

Demonstração: Segue de (1.16) que

$$Z_{(r-1)/2}(\phi) = \Gamma((r+1)/2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k + (r+1)/2)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k}.$$

Derivando em relação a ϕ , obtemos

$$\begin{aligned}
Z'_{(r-1)/2}(\phi) &= \Gamma((r+1)/2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2k! \Gamma(k + (r+1)/2)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k-1} \\
&= \frac{-\phi}{(r+1)/2} \Gamma((r+3)/2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2(k-1)! \Gamma(k + (r+1)/2)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k-2} \\
&= \frac{-\phi}{(r+1)} \Gamma((r+3)/2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k+1 + (r+1)/2)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k} \\
&= \frac{-\phi}{(r+1)} Z_{(r+1)/2}(\phi).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2.6, $j_1((r-1)/2) < j_1((r+1)/2)$. Como $J_{(r+1)/2}(\phi) > 0$, $\phi \in (0, (r+1)/2)$ ([24, p. 486]) e $j_1((r+1)/2) > (r+1)/2$ ([24, p. 485]), segue que $J_{(r+1)/2}(\phi) > 0$, $\phi \in (0, j_1((r+1)/2))$. Logo, $Z_{(r+1)/2}(\phi) > 0$, $\phi \in (0, j_1((r+1)/2))$. Concluimos que $Z'_{(r-1)/2}(\phi) < 0$, $\phi \in (0, j_1((r-1)/2))$. $\square$

Proposição 1.4.9. *Sejam t_n e θ_n como no Lema 1.4.5 e $\tilde{G}$ como no Teorema 1.4.2. Então existe uma constante $c_1 > 0$, dependendo de r , tal que*

$$\tilde{G}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20n}\right)\right) \geq \sqrt{\frac{|S^{r-1}|}{c_1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Utilizando convenientemente o resultado do Teorema 1.4.2 concluimos que existe um inteiro n_0 tal que

$$\tilde{G}(\cos(\pi/(20n))) \geq \frac{1}{2} Z_{(r-1)/2}(\pi/20), \quad n > n_0.$$

Lembrando os Lemas 1.4.7 e 1.4.8, vemos então que

$$\frac{1}{2} Z_{(r-1)/2}(\pi/20) > \frac{1}{2} Z_{(r-1)/2}(j_1((r-1)/2)) = 0, \quad n > n_0.$$

Como $\tilde{G}$ é crescente no intervalo $[\cos \theta_n, 1]$ e a Observação 1.4.6 garante que $\pi/(20n) \leq \theta_n/2 < \theta_n$, $n = 1, 2, \dots, n_0$, então

$$\tilde{G}(\cos(\pi/(20n))) \geq \tilde{G}(\cos(\theta_n/2)) > \tilde{G}(\cos \theta_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, n_0.$$

Assim, existe uma constante $c > 0$, que depende de r , tal que

$$\tilde{G}(\cos(\pi/(20n))) \geq c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para concluir, basta definirmos $\sqrt{c_1} = c^{-1}|S^{r-1}|^{1/2}$. $\square$

1.5 Projeções

Nesta seção discutiremos alguns resultados referentes à projeção ortogonal de $C(S^{r-1})$ sobre $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Eles serão necessários para avaliar a qualidade da norma dos operadores de interpolação e hiperinterpolação. Fixada uma base ortonormal $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, tal projeção é a aplicação $Q_n : C(S^{r-1}) \mapsto \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ dada por

$$Q_n(f) = \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle p_j, \quad f \in C(S^{r-1}). \quad (1.32)$$

Pelos resultados da Seção 1.3, concluímos que

$$Q_n(f)(x) = \int_{S^{r-1}} f(y) \sum_{j=1}^{d_n} p_j(x) p_j(y) d\sigma_r(y) = \int_{S^{r-1}} f(y) G_n(x, y) d\sigma_r(y), \quad x \in S^{r-1}.$$

Que Q_n é, de fato, uma projeção ortogonal segue da igualdade

$$\langle f - Q_n(f), p \rangle = 0, \quad f \in C(S^{r-1}), \quad p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}).$$

Precisaremos da definição abaixo. A norma utilizada refere-se à norma usual de operadores.

Definição 1.5.1. *Sejam V um espaço vetorial normado e W um subespaço de V . Dizemos que uma projeção $T : V \mapsto W$ é mínima se para toda projeção $P : V \mapsto W$ tem-se $\|T\| \leq \|P\|$.*

Considerando $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ como subespaço de $C(S^{r-1})$, a norma uniforme da projeção ortogonal $Q_n : C(S^{r-1}) \mapsto C(S^{r-1})$ é dada por

$$\|Q_n\|_\infty = \sup\{\|Q_n(f)\|_\infty : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\},$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma uniforme de $C(S^{r-1})$. O resultado abaixo, devido a Daugavet é folclórico. Ele mostra que Q_n tem norma uniforme mínima dentre todas as projeções de $C(S^{r-1})$ sobre $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. A prova pode ser encontrada em [4] e [14].

Teorema 1.5.2. *Se $r \geq 2$, então a projeção ortogonal $Q_n : C(S^{r-1}) \mapsto \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é mínima na norma uniforme.*

Teorema 1.5.3. *O operador Q_n possui as seguintes propriedades assintóticas:*

- i) *Se $r = 2$ então $\|Q_n\|_\infty = O(\log n)$;*
- ii) *Se $r \geq 3$ então $\|Q_n\|_\infty = O(n^{(r-2)/2})$ e $n^{(r-2)/2} = O(\|Q_n\|_\infty)$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: O primeiro limite é o Teorema 14.4.14 em [5]. Os demais podem ser encontrados em [7] e [14, p. 115]. $\square$

Como $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é subespaço de $L^2(S^{r-1})$, também podemos considerar Q_n como uma aplicação de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$. Nesse caso, a norma de Q_n é dada por

$$\|Q_n\| = \sup\{\|Q_n(f)\|_2 : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\}, \quad (1.33)$$

onde

$$\|Q_n(f)\|_2^2 = \int_{S^{r-1}} |Q_n(f)(x)|^2 d\sigma_r(x). \quad (1.34)$$

Nesse contexto, a próxima proposição nos fornece um limite inferior para a norma de qualquer projeção de $C(S^{r-1})$ em $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.

Proposição 1.5.4. *Seja $T : C(S^{r-1}) \mapsto \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ uma projeção. Então*

$$\|T\| \geq |S^{r-1}|^{1/2}. \quad (1.35)$$

Demonstração: Considere a função constante $f \equiv 1$. Como T é projeção segue que

$$\|T(f)\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_{S^{r-1}} d\sigma_r \right)^{1/2} = |S^{r-1}|^{1/2}.$$

Logo,

$$\|T\| = \sup\{\|T(f)\|_2 : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\} \geq |S^{r-1}|^{1/2},$$

como queríamos. $\square$

Teorema 1.5.5. *Seja $Q_n : C(S^{r-1}) \mapsto L^2(S^{r-1})$ a projeção ortogonal dada no início desta seção. Então $\|Q_n\| = |S^{r-1}|^{1/2}$.*

Demonstração: Da definição de projeção ortogonal segue que

$$\langle f - Q_n(f), Q_n(f) \rangle = 0, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\|Q_n(f)\|_2^2 = \langle Q_n(f), Q_n(f) \rangle = \langle f, Q_n(f) \rangle \leq \|f\|_2 \|Q_n(f)\|_2, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Isso implica que

$$\|Q_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2 = \left(\int_{S^{r-1}} |f(x)|^2 d\sigma_r(x) \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty |S^{r-1}|^{1/2}, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Logo, $\|Q_n\| \leq |S^{r-1}|^{1/2}$. Por outro lado, como a projeção ortogonal é uma projeção, a proposição anterior implica que $\|Q_n\| \geq |S^{r-1}|^{1/2}$. O resultado segue. $\square$

Observação 1.5.6. Os resultados acima garantem que a projeção ortogonal Q_n é mínima com relação às duas normas fixadas nesta seção.

A menos de especificação em contrário, o termo projeção ortogonal sempre referir-se-á à projeção Q_n desta seção.

Capítulo 2

Interpolação em S^{r-1}

Neste capítulo estudaremos interpolação sobre S^{r-1} por polinômios esféricos. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [14], [21] e [22]. Na primeira seção apresentaremos o conceito de sistemas fundamentais. Na Seção 2 introduziremos a interpolação de Lagrange e provaremos alguns resultados que relacionam as bases de Lagrange com o núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Na Seção 3 analisaremos o operador de interpolação como uma transformação linear de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$ e de $C(S^{r-1})$ em $C(S^{r-1})$, apresentando estimativas para a norma da transformação nos dois contextos. Finalmente, na última seção discutiremos sobre sistemas fundamentais extremos.

2.1 Interpolação sobre conjuntos fundamentais

Interpolação por polinômios esféricos nem sempre é possível. Quando é possível, a solução pode não ser única. Conjuntos fundamentais são aqueles onde a interpolação é sempre possível e de maneira única.

Definição 2.1.1. *Seja S um espaço s -dimensional de polinômios esféricos. Um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ de S^{r-1} é dito ser um sistema fundamental para S quando as funcionais*

$$p \in S \longmapsto p(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

formam um conjunto linearmente independente.

Proposição 2.1.2. *Sejam S um espaço de polinômios esféricos e $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ uma base de S . Um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ de S^{r-1} é um sistema fundamental para S se, e somente se, a matriz $(p_i(x_j))$ é invertível.*

Demonstração: Se a matriz $(p_i(x_j))$ não é invertível existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_s$, não todos nulos, tais que $\sum_{j=1}^s c_j p_i(x_j) = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. Logo, $\sum_{j=1}^s c_j p(x_j) = 0$, $p \in S$, e, conseqüentemente, os funcionais da definição acima formam um conjunto linearmente dependente. Reciprocamente, suponha que a matriz seja invertível. Se $\sum_{j=1}^s c_j p(x_j) = 0$, $p \in S$, então, em particular, $\sum_{j=1}^s c_j p_i(x_j) = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. Como a matriz desse sistema é invertível, $c_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$. $\square$

Sistemas fundamentais podem ser construídos indutivamente. O teorema abaixo nos mostra como construir tais sistemas.

Teorema 2.1.3. *Seja S um espaço s -dimensional de polinômios esféricos. Então é possível encontrar um subconjunto fundamental para S .*

Demonstração: Fixe uma base $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ de S . Escolha x_1 satisfazendo $p_1(x_1) \neq 0$. Se

$$D_2(x) := \det \begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_1(x) \\ p_2(x_1) & p_2(x) \end{pmatrix} = 0, \quad x \in S^{r-1},$$

concluimos que $\{p_1, p_2\}$ é linearmente dependente, um absurdo. Logo, existe $x_2 \in S^{r-1}$ tal que $D_2(x_2) \neq 0$. Indutivamente, encontramos $x_s \in S^{r-1}$ tal que $D_s(x_s) \neq 0$, onde

$$D_s(x) := \det \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{s-1}) & p_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_s(x_1) & \dots & p_s(x_{s-1}) & p_s(x) \end{pmatrix}$$

Obviamente $(p_i(x_j))$ é invertível. Se $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ é outra base de S , então $(q_i(x_j)) = M_s(p_i(x_j))$, onde M_s é uma matriz de mudança de base. A invertibilidade de $(q_i(x_j))$ segue. Logo, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ é fundamental pela proposição anterior. $\square$

Fixados uma base $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ e um sistema fundamental $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, a matriz $(p_i(x_j))$ será denotada por $P(x_1, x_2, \dots, x_{d_n})$. Dada uma função $f \in C(S^{r-1})$, é sempre possível, então, encontrar um único polinômio $p_f \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ tal que

$$p_f(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, d_n.$$

Com esta notação, o operador linear de interpolação $\Lambda_n : C(S^{r-1}) \mapsto C(S^{r-1})$ dado por $\Lambda_n(f) = p_f$ é uma projeção já que

$$\Lambda_n^2(f) = \Lambda_n(\Lambda_n(f)) = \Lambda_n(p_f) = p_f, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

2.2 Interpolação de Lagrange

O objetivo aqui é exprimir o operador de interpolação Λ_n definido acima utilizando-se bases de Lagrange. Estas bases viabilizam estimativas da norma de Λ_n .

Definição 2.2.1. *Sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ uma base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. A base de Lagrange de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ associada a X é o conjunto $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$, onde*

$$l_i(x) := \frac{\det P(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_{d_n})}{\det P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{d_n})}.$$

Como $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, d_n$, segue que $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$ é, de fato, um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e, por conseguinte, uma base.

Definição 2.2.2. *Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$ uma base de Lagrange associada a X e $f \in C(S^{r-1})$. A representação de Lagrange para $\Lambda_n(f)$ é dada por*

$$\Lambda_n(f) = \sum_{i=1}^{d_n} f(x_i) l_i.$$

A seguir, extrairemos algumas propriedades das matrizes de Gram associadas a bases especiais de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. As propriedades envolvendo estimativas com autovalores serão utilizadas à frente.

Teorema 2.2.3. *Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um subconjunto de S^{r-1} . Para cada x_j de X , considere o polinômio $g_j \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ dado por $g_j := G_n(x_j, \cdot)$. Então $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d_n\}$ é uma base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ se, e somente se, X é um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.*

Demonstração: Fixe uma base $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d_n\}$ é base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, a matriz G com entradas $\langle g_i, g_j \rangle$ é invertível devido ao seguinte resultado clássico de Álgebra Linear: a matriz de Gram associada a um conjunto linearmente independente de vetores é positiva definida ([8, p. 407]). Como

$$G = (\langle G_n(x_i, \cdot), G_n(x_j, \cdot) \rangle) = (G_n(x_i, x_j)) = \left(\sum_{k=1}^{d_n} p_k(x_i) p_k(x_j) \right),$$

vemos que $G = P^t P$ onde $P := P(x_1, x_2, \dots, x_{d_n})$. Segue que P é invertível. A Proposição 2.1.2 revela que X é, então, um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.

Reciprocamente, assuma que P é invertível e que $\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j g_j = 0$. Então

$$0 = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j g_j(x) = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \sum_{i=1}^{d_n} p_i(x_j) p_i(x) = \sum_{i=1}^{d_n} \left(\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j p_i(x_j) \right) p_i(x), \quad x \in S^{r-1}.$$

Como $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ é base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ concluímos que $\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j p_i(x_j) = 0$, $i = 1, 2, \dots, d_n$. Segue que $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, d_n$, pois $(p_i(x_j))$ é invertível. Assim, $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d_n\}$ é linearmente independente e, portanto, uma base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$ a base de Lagrange de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ associada a X . Então a matriz $L := (\langle l_i, l_j \rangle)$ é invertível e $L^{-1} = G$, onde $G = (G_n(x_i, x_j))$.*

Demonstração: A invertibilidade de L segue do fato da mesma ser uma matriz de Gram associada a um conjunto linearmente independente de vetores. Mostremos, então, a outra parte. A propriedade de reprodução do núcleo $G_n(x, y)$ implica que

$$\langle l_i, g_j \rangle = \langle l_i, G_n(x_j, \cdot) \rangle = l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, d_n.$$

Como cada l_i é um elemento de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d_n\}$ é base do espaço $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, podemos escrever

$$l_i = \sum_{k=1}^{d_n} \alpha_{i,k} g_k, \quad \alpha_{i,k} \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\langle l_i, l_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{d_n} \alpha_{i,k} g_k, l_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{d_n} \alpha_{i,k} \langle g_k, l_j \rangle = \alpha_{i,j}.$$

Logo,

$$l_i = \sum_{k=1}^{d_n} \langle l_i, l_k \rangle g_k, \quad i = 1, 2, \dots, d_n.$$

De maneira análoga concluímos que $g_j = \sum_{m=1}^{d_n} \langle g_j, g_m \rangle l_m$, $j = 1, 2, \dots, d_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \langle l_i, g_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{d_n} \langle l_i, l_k \rangle g_k, \sum_{m=1}^{d_n} \langle g_j, g_m \rangle l_m \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \sum_{m=1}^{d_n} \langle l_i, l_k \rangle \langle g_j, g_m \rangle \langle g_k, l_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle l_i, l_k \rangle \langle g_j, g_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle l_i, l_k \rangle \langle g_k, g_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, d_n. \end{aligned}$$

A última soma acima é a entrada ij da matriz LG . Segue que $G = L^{-1}$. $\square$

A matriz $G = (G_n(x_i, x_j))$ possui d_n autovalores positivos. Temos, então, o seguinte teorema:

Teorema 2.2.5. *Assuma as hipóteses do teorema anterior. Seja $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{d_n}$ uma ordenação dos autovalores de $G = (G_n(x_i, x_j))$. Então*

$$\frac{G_n(x, x)}{\lambda_{d_n}} \leq \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) \leq \frac{G_n(x, x)}{\lambda_1}, \quad x \in S^{r-1}.$$

Demonstração: A definição de G_n mostra que a matriz G é simétrica. Logo, existe uma matriz ortogonal A tal que $AGA^t = M = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_n})$. Como $G_n(\cdot, y) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ a Definição 2.2.2 permite-nos escrever

$$G_n(\cdot, y) = \Lambda_n(G_n(\cdot, y)) = \sum_{j=1}^{d_n} G_n(x_j, y) l_j, \quad y \in S^{r-1}.$$

Aplicando novamente a Definição 2.2.2 a $G_n(x_j, \cdot)$, $j = 1, 2, \dots, d_n$, obtemos

$$G_n(x, y) = \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} l_j(x) G_n(x_j, x_k) l_k(y), \quad x, y \in S^{r-1}.$$

Definindo-se $L(x) := (l_1(x), l_2(x), \dots, l_{d_n}(x))^t$ e $AL(x) := (q_1(x), q_2(x), \dots, q_{d_n}(x))^t$, $x \in S^{r-1}$, podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} G_n(x, y) &= L(x)^t G L(y) \\ &= L(x)^t A^t M A L(y) \\ &= (AL(x))^t M (AL(y)) \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} \lambda_j q_j(x) q_j(y), \quad x, y \in S^{r-1}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^{d_n} q_j^2(x) = (AL(x))^t AL(x) = L(x)^t A^t AL(x) = L(x)^t L(x) = \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x), \quad x \in S^{r-1}.$$

Então,

$$G_n(x, x) \leq \lambda_{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} q_j^2(x) = \lambda_{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x), \quad x \in S^{r-1}$$

e

$$G_n(x, x) \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^{d_n} q_j^2(x) = \lambda_1 \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x), \quad x \in S^{r-1}.$$

Segue que

$$\frac{G_n(x, x)}{\lambda_{d_n}} \leq \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) \leq \frac{G_n(x, x)}{\lambda_1}, \quad x \in S^{r-1}.$$

Assim, a prova do teorema está completa. $\square$

2.3 A norma do operador de interpolação

Como $C(S^{r-1})$ é um subespaço de $L^2(S^{r-1})$, podemos considerar o operador de interpolação Λ_n como uma transformação linear de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$. Neste contexto, a norma da transformação é calculada por

$$\|\Lambda_n\| := \sup\{\|\Lambda_n(f)\|_2 : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\}. \quad (2.1)$$

A primeira estimativa para a norma de Λ_n é dada no Teorema 2.3.7 abaixo. Alguns resultados técnicos utilizados em sua prova serão coletados nos lemas a seguir.

Lema 2.3.1. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números positivos. Então*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Precisaremos de duas definições referentes ao conceito de design esférico. A noção de design esférico foi introduzida por Delsarte, Goethals e Seidel em [6].

Definição 2.3.2. *Dizemos que um subconjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ de S^{r-1} é um $2n$ -design esférico quando*

$$|S^{r-1}|^{-1} \int_{S^{r-1}} p(x) d\sigma_r(x) = m^{-1} \sum_{j=1}^m p(x_j), \quad p \in \mathbb{P}_{2n}(S^{r-1}).$$

Definição 2.3.3. *Um $2n$ -design esférico $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ é chamado mínimo quando $m = d_n$.*

Esta terminologia deve-se ao resultado abaixo ([6]):

Lema 2.3.4. *Se X é um subconjunto de S^{r-1} de cardinalidade α satisfazendo*

$$|S^{r-1}|^{-1} \int_{S^{r-1}} p(x) d\sigma_r(x) = \alpha^{-1} \sum_{x \in X} p(x), \quad p \in \mathbb{P}_{2n}(S^{r-1})$$

então $\alpha \geq d_n$.

Os dois lemas abaixo desempenham um papel fundamental na prova do Teorema 2.3.7. Como os argumentos que justificam tais resultados são longos e não envolvem diretamente o assunto da dissertação, suas provas serão omitidas. Detalhes do próximo lema podem ser encontrados em [3].

Lema 2.3.5. *Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$ a base de Lagrange de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ associada a X . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\max\{\sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) : x \in S^{r-1}\} = 1$;
- ii) X é um $2n$ -design esférico mínimo.

Existem t -designs esféricos para todo valor de t ([19]). A existência ou não de designs esféricos mínimos foi estudada em [2], onde o seguinte lema pode ser encontrado.

Lema 2.3.6. *Não existem $2n$ -designs esféricos mínimos quando $r \geq 3$ e $n \geq 3$.*

Com a ajuda dos resultados acima, podemos, agora, estimar a norma do operador de interpolação.

Teorema 2.3.7. *Se $r \geq 3$ e $n \geq 3$, então $\|\Lambda_n\| > |S^{r-1}|^{1/2}$.*

Demonstração: Fixemos um sistema fundamental $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e consideremos a base de Lagrange de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ associada a X . A representação de Lagrange para Λ_n é então

$$\Lambda_n(f) = \sum_{j=1}^{d_n} f(x_j) l_j, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Segue que

$$\|\Lambda_n(f)\|_2^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{d_n} f(x_j) l_j, \sum_{k=1}^{d_n} f(x_k) l_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} f(x_j) L_{jk} f(x_k), \quad f \in C(S^{r-1}),$$

onde $L_{jk} = \langle l_j, l_k \rangle$. Para provarmos o teorema, vamos comprovar a existência de uma função $f_i \in C(S^{r-1})$ tal que $\|f_i\|_\infty = 1$ e $\|\Lambda_n(f_i)\|_2 > |S^{r-1}|^{1/2}$. Para tanto, vamos começar concluindo a existência de uma função $f_i \in C(S^{r-1})$ tal que $\|f_i\|_\infty = 1$ e $\|\Lambda_n f_i\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^{d_n} L_{jj}$. A prova de tal fato baseia-se em uma família de funções de $C(S^{r-1})$ indexada pelo conjunto

$$I = \{i = (i_1, i_2, \dots, i_{d_n}) : i_j = \pm 1; j = 1, 2, \dots, d_n\}.$$

Note, então, que tal família possui 2^{d_n} funções. Cada função f_i dessa família tem as seguintes características: $f_i(x_j) = i_j$ e $\|f_i\|_\infty = 1$, $j = 1, 2, \dots, d_n$, $i \in I$. Calculando a média aritmética $M(I)$ dos valores $\|\Lambda_n(f_i)\|_2^2$, $i \in I$, obtemos

$$\begin{aligned} M(I) &= 2^{-d_n} \sum_{i \in I} \|\Lambda_n(f_i)\|_2^2 \\ &= 2^{-d_n} \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} f_i(x_j) L_{jk} f_i(x_k) \\ &= 2^{-d_n} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{k=1}^{d_n} \sum_{i \in I} i_j L_{jk} i_k \end{aligned}$$

Fixados j e k com $j \neq k$, cada soma $\sum_{i \in I} i_j L_{jk} i_k$ é nula. Logo,

$$M(I) = 2^{-d_n} \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{d_n} L_{jj} = \sum_{j=1}^{d_n} L_{jj}.$$

Pelo menos uma das funções f_i necessariamente satisfaz $\|\Lambda_n(f_i)\|_2^2 \geq M(I)$. Logo $\|\Lambda_n\|^2 \geq M(I)$. O resto da prova mostrará que $M(I) > |S^{r-1}|$, quando $r \geq 3$ e $n \geq 3$. Denotemos por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_n}$ os autovalores de $L^{-1} = G$ (confira Teorema 2.2.4). O Lema 2.3.1 implica que

$$M(I) = \text{Tr } L = \sum_{j=1}^{d_n} (\lambda_j)^{-1} \geq \frac{d_n^2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d_n}}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, usando (1.20) obtemos

$$\sum_{j=1}^{d_n} \lambda_j = \sum_{k=1}^{d_n} G_n(x_k, x_k) = d_n \tilde{G}_n(1) = \frac{d_n^2}{|S^{r-1}|}, \quad x \in S^{r-1}.$$

Em outras palavras,

$$\sum_{j=1}^{d_n} L_{jj} \geq |S^{r-1}|.$$

Resta mostrar que a desigualdade acima é estrita no contexto atual. Para tanto, notamos inicialmente que o mesmo Lema 2.3.1 garante que vale a igualdade em (2.2), e portanto na desigualdade acima se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{d_n}$. Portanto, basta mostrarmos que a igualdade de todos os autovalores não ocorre. Se todos os autovalores coincidem, então

$$G_n(x, x) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d_n}}{d_n} = \lambda_1, \quad x \in S^{r-1}.$$

Logo, pelo Teorema 2.2.5, concluímos que $\sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) = 1$, $x \in S^{r-1}$. Pelo Lema 2.3.5, concluímos que X é um $2n$ -design esférico mínimo. Finalmente, o Lema 2.3.6 garante que isto é um absurdo quando $r \geq 3$ e $n \geq 3$. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

É natural questionarmos a respeito da qualidade da aproximação obtida pela interpolação. A norma de Λ_n desempenha um papel importante na estimativa do erro de aproximação. De fato, seja $q \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Então

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n(f) - f\|_2 &= \|\Lambda_n(f - q) - (f - q)\|_2 \\ &\leq \|\Lambda_n(f - q)\|_2 + \|f - q\|_2 \\ &\leq \|\Lambda_n\| \|f - q\|_\infty + \|f - q\|_\infty |S^{r-1}|^{1/2} \\ &= (\|\Lambda_n\| + |S^{r-1}|^{1/2}) \|f - q\|_\infty \end{aligned}$$

Segue que

$$\|\Lambda_n(f) - f\|_2 \leq (\|\Lambda_n\| + |S^{r-1}|^{1/2}) E_n(f),$$

onde

$$E_n(f) := \inf\{\|f - q\|_\infty : q \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\}$$

é o erro da melhor aproximação uniforme de f por um elemento de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$. Assim, para analisarmos a qualidade da aproximação precisamos estudar o comportamento de $\|\Lambda_n\|$.

A seguir, consideraremos Λ_n como um operador de $C(S^{r-1})$ em $C(S^{r-1})$. Neste caso, a norma do operador é dada por

$$\|\Lambda_n\|_\infty := \sup\{\|\Lambda_n(f)\|_\infty : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\} \quad (2.3)$$

e o seguinte teorema vale:

Teorema 2.3.8. *Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ um sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $\{l_1, l_2, \dots, l_{d_n}\}$ uma base de Lagrange associada a X . Então $\|\Lambda_n\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)| : x \in S^{r-1}\}$.*

Demonstração: Se $f \in C(S^{r-1})$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, então

$$|\Lambda_n(f)(x)| = \left| \sum_{j=1}^{d_n} f(x_j) l_j(x) \right| \leq \sum_{j=1}^{d_n} |f(x_j)| |l_j(x)| \leq \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)|, \quad x \in S^{r-1}.$$

Como S^{r-1} é compacto e a função $\lambda : S^{r-1} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\lambda(x) = \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)|$ é contínua, segue que λ assume seu valor máximo em algum ponto $\xi \in S^{r-1}$ e, portanto,

$$|\Lambda_n(f)(x)| \leq \lambda(\xi), \quad x \in S^{r-1}, \quad \|f\|_\infty \leq 1.$$

Logo, se $f \in C(S^{r-1})$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, então $\|\Lambda_n(f)\|_\infty = \sup\{|\Lambda_n(f)(x)| : x \in S^{r-1}\} \leq \lambda(\xi)$. Isso implica que

$$\|\Lambda_n\|_\infty \leq \lambda(\xi).$$

Para concluir a demonstração, escolha um número real positivo R tal que

$$2R \leq \min\{|x_i - x_j| : i, j = 1, 2, \dots, d_n, i \neq j\}$$

e defina uma função $f^*(x)$ da seguinte forma:

$$f^*(x) := \begin{cases} \text{sign}(l_j(\xi)) (1 - R^{-1}|x - x_j|) & \text{se } |x - x_j| < R \text{ para algum } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obviamente, $\|f^*\|_\infty = 1$. Além disso,

$$|\Lambda_n(f^*)(\xi)| = \left| \sum_{j=1}^{d_n} f^*(x_j) l_j(\xi) \right| = \left| \sum_{j=1}^{d_n} \text{sign}(l_j(\xi)) l_j(\xi) \right| = \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(\xi)| = \lambda(\xi)$$

completando a prova. $\square$

Nesse contexto, também podemos estimar o erro da aproximação obtida pela interpolação. De fato,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n(f) - f\|_\infty &= \|\Lambda_n(f - q) - (f - q)\|_\infty \\ &\leq \|\Lambda_n(f - q)\|_\infty + \|f - q\|_\infty \\ &\leq \|\Lambda_n\|_\infty \|f - q\|_\infty + \|f - q\|_\infty \\ &= (\|\Lambda_n\|_\infty + 1) \|f - q\|_\infty, \quad q \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Lambda_n(f) - f\|_\infty \leq (\|\Lambda_n\|_\infty + 1) E_n(f).$$

2.4 Sistema fundamental extremo

Analisando o Teorema 2.3.8 notamos que o valor de $\|\Lambda_n\|_\infty$ depende do sistema fundamental para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ utilizado. Na verdade, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n\|_\infty = \infty$. De fato, como Λ_n é projeção e a projeção ortogonal Q_n é mínima na norma uniforme, segue que $\|\Lambda_n\|_\infty \geq \|Q_n\|_\infty$. A segunda estimativa do Teorema 1.5.3-ii) justifica, então, o limite. Uma questão interessante é determinar como varia $\|\Lambda_n\|_\infty$ em função da escolha do sistema fundamental e possivelmente determinar como escolher o sistema para obter-se o menor valor possível para $\|\Lambda_n\|_\infty$. Aparentemente, quase nada é conhecido sobre esta questão. Esta seção revela a existência de um sistema fundamental para o qual $\|\Lambda_n\|_\infty \leq d_n$.

Definição 2.4.1. *Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ uma base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Um sistema fundamental $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{d_n}\}$ para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ é extremo quando a função*

$$(x_1, x_2, \dots, x_{d_n}) \in (S^{r-1})^{d_n} \mapsto |\det P(x_1, x_2, \dots, x_{d_n})|$$

atinge seu valor máximo em $(y_1, y_2, \dots, y_{d_n})$.

Pela definição acima, segue que se Y é um sistema fundamental extremo para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, então para qualquer conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{d_n}\}$ tem-se que

$$|\det P(x_1, x_2, \dots, x_{d_n})| \leq |\det P(y_1, y_2, \dots, y_{d_n})|.$$

Logo, os elementos da base de Lagrange associada a Y satisfazem

$$|l_j(x)| \leq 1, \quad x \in S^{r-1}, \quad j = 1, 2, \dots, d_n.$$

Como $l_j(y_j) = 1$, $j = 1, 2, \dots, d_n$, segue que $\|l_j\|_\infty = 1$, $j = 1, 2, \dots, d_n$. Logo, usando o Teorema 2.3.8, temos

$$\|\Lambda_n\|_\infty = \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)| \leq \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{j=1}^{d_n} \|l_j\|_\infty = d_n. \quad (2.4)$$

Outra maneira de se estimar $\|\Lambda_n\|_\infty$ consiste na aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|\Lambda_n\|_\infty = \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)| \leq d_n^{1/2} \max_{x \in S^{r-1}} \left(\sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) \right)^{1/2}.$$

Ordenando-se uma vez mais os autovalores da matriz $G = (G_n(x_i, x_j))$ na forma $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{d_n}$, definindo-se $\lambda_m := d_n^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{d_n})$ e usando o Teorema 2.2.5 obtemos

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{d_n}} \leq \sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) \leq \frac{\lambda_m}{\lambda_1}.$$

Logo,

$$\|\Lambda_n\|_\infty \leq d_n^{1/2} \max_{x \in S^{r-1}} \left(\sum_{j=1}^{d_n} l_j^2(x) \right)^{1/2} \leq d_n^{1/2} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Em particular, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{d_n}$, então $\|\Lambda_n\|_\infty \leq d_n^{1/2}$. Note que essa última limitação não é válida para $r \geq 3$ e $n \geq 3$, pois nesse caso, os autovalores não podem ser iguais.

Capítulo 3

Hiperinterpolação em S^{r-1}

Neste capítulo introduziremos um outro método construtivo para aproximar funções contínuas em S^{r-1} por polinômios do espaço $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$: a hiperinterpolação polinomial em S^{r-1} . A hiperinterpolação foi introduzida por Sloan em [20]. Nas duas primeiras seções discutiremos algumas propriedades da fórmula de quadratura usada na construção do operador de hiperinterpolação. Na Seção 3 definiremos tal operador e estudaremos suas propriedades. Nas duas últimas seções, em analogia com o capítulo anterior, analisaremos a norma do operador de hiperinterpolação considerando-o como uma aplicação de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$ e de $C(S^{r-1})$ em $C(S^{r-1})$, obtendo estimativas para sua norma nesses dois contextos.

3.1 Quadratura esférica

O processo de hiperinterpolação é baseado em um semi-produto interno construído a partir de uma fórmula de quadratura esférica fixada. Nesta seção introduziremos rapidamente o tipo de fórmula de quadratura a ser utilizado e definiremos o semi-produto interno associado, apresentando formalmente o conceito de hiperinterpolação na próxima seção.

Fixado um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ de S^{r-1} , estaremos interessados em fórmulas de quadratura da forma

$$Q(g) := \sum_{k=1}^m w_k g(x_k) \approx \int_{S^{r-1}} g(x) d\sigma_r(x), \quad x_k \in S^{r-1}, \quad (3.1)$$

com pesos positivos e que é exata para os elementos de $\mathbb{P}_{2n}(S^{r-1})$. Isto significa que

$$w_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

e que

$$\sum_{k=1}^m w_k g(x_k) = \int_{S^{r-1}} g(x) d\sigma_r(x), \quad g \in \mathbb{P}_{2n}(S^{r-1}). \quad (3.3)$$

Teorema 3.1.1. *Fórmulas de quadratura do tipo acima existem em abundância.*

Demonstração: Este é o teorema principal em [19]. $\square$

Fixada uma fórmula de quadratura como acima, definimos

$$\langle f, g \rangle_m := \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) g(x_k), \quad f, g \in C(S^{r-1}). \quad (3.4)$$

Os cálculos abaixo mostrarão que tal expressão define um semi-produto interno em $C(S^{r-1})$.

Como $w_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, segue que

$$\langle f, f \rangle_m = \sum_{k=1}^m w_k f(x_k)^2 \geq 0, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Por outro lado,

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) g(x_k) = \sum_{k=1}^m w_k g(x_k) f(x_k) = \langle g, f \rangle_m, \quad f, g \in C(S^{r-1})$$

e

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha g + h \rangle_m &= \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) (\alpha g(x_k) + h(x_k)) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) g(x_k) + \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) h(x_k) \\ &= \alpha \langle f, g \rangle_m + \langle f, h \rangle_m, \quad f, g, h \in C(S^{r-1}), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\langle 0, 0 \rangle_m = 0$, concluímos que a Equação (3.4) define um semi-produto interno em $C(S^{r-1})$. Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ é uma versão discreta do produto interno usual (1.1).

A exatidão da fórmula de quadratura para polinômios esféricos de grau $\leq 2n$ justifica o resultado abaixo.

Proposição 3.1.2. *Valem as seguintes propriedades:*

- i) Se $f, g \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$, então $\langle f, g \rangle_m = \langle f, g \rangle$;
- ii) Se $f \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e $\langle f, f \rangle_m = 0$ então $f = 0$.

Corolário 3.1.3. *O semi-produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ define um produto interno em $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$.*

O número mínimo de pontos necessário em uma fórmula de quadratura como acima é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 3.1.4. *Seja Q uma fórmula de quadratura como descrita no início desta seção. Então $m \geq d_n$.*

Demonstração: Fixe uma base ortonormal $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ e considere a matriz A com entradas $A_{ij} = w_j^{1/2} p_i(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, d_n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Aplicando (3.3) com $g = p_i p_j$ obtemos $\sum_{k=1}^m w_k p_i(x_k) p_j(x_k) = 0$, $i \neq j$. Segue que as linhas de A são ortogonais em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^m$ e, portanto formam um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^m$. Logo, $d_n \leq m$. $\square$

O teorema acima justifica a próxima definição.

Definição 3.1.5. *Seja Q uma fórmula de quadratura como no início do capítulo. Q é mínima quando $m = d_n$.*

Registramos a seguir, algumas propriedades de fórmulas de quadratura mínimas.

Teorema 3.1.6. *Se Q é uma fórmula de quadratura mínima então $w_1 = w_2 = \dots = w_m = |S^{r-1}| d_n^{-1}$.*

Demonstração: Se a fórmula de quadratura é mínima então a matriz A da proposição anterior é quadrada de ordem $m = d_n$. Como $AA^t = I_m$, segue que A é invertível e que $A^{-1} = A^t$. A igualdade $A^t A = I_m$ nos dá a relação

$$\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) = w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Segue de (3.5) e (1.20) que

$$w_k = \left(\sum_{j=1}^{d_n} (p_j(x_k))^2 \right)^{-1} = G_n(x_k, x_k)^{-1} = \tilde{G}_n(1)^{-1} = \frac{|S^{r-1}|}{d_n}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

concluindo a prova. $\square$

Proposição 3.1.7. *Seja Q como no início desta seção. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *O conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ é um $2n$ -design esférico mínimo;*
- ii) *Q é mínima.*

Demonstração: Se $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ é um $2n$ -design esférico mínimo, então $m = d_n$. Logo, a fórmula de quadratura é mínima. A recíproca segue do teorema anterior e de (3.3). $\square$

3.2 Calotas esféricas e a condição de regularidade

Nesta seção Q é uma fórmula de quadratura baseada em m pontos como descrito em (3.1), (3.2) e (3.3). O resultado dessa seção implica que Q possui uma propriedade especial, aqui chamada de “condição de regularidade por calotas”. Sejam $\phi \in [0, \pi]$ e $x_0 \in S^{r-1}$. A *calota esférica* com pólo x_0 e raio geodésico ϕ é o conjunto

$$K(x_0, \phi) := \{x \in S^{r-1} : d_r(x, x_0) \leq \phi\}.$$

Aqui, d_r corresponde à distância geodésica usual em S^{r-1} dada por

$$d_r(x, y) := \arccos \langle x, y \rangle, \quad x, y \in S^{r-1}.$$

Teorema 3.2.1. *Seja $r \geq 3$. Dado $x_0 \in S^{r-1}$, os pontos $x_1, x_2, \dots, x_m$ e os pesos $w_1, w_2, \dots, w_m$ da fórmula de quadratura satisfazem a desigualdade*

$$\sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j \leq c_1 d_n^{-1},$$

onde c_1 é a constante descrita na Proposição 1.4.9.

Demonstração: Usando a exatidão da fórmula de quadratura e a propriedade de reprodução de G_n temos que

$$\sum_{j=1}^m w_j \tilde{G}_n^2(\langle x_j, x_0 \rangle) = \int_{S^{r-1}} \tilde{G}_n^2(\langle x, x_0 \rangle) d\sigma_r(x) = \tilde{G}_n(\langle x_0, x_0 \rangle) = \tilde{G}_n(1).$$

Se $t_n = \cos \theta_n$ é o maior zero de $P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}$ em $[-1, 1]$, sabemos que $\tilde{G}_n$ é crescente em $[\cos \theta_n, 1]$. Logo, $\tilde{G}_n^2(\cos \phi)$ é decrescente em $[0, \pi/(20n)]$. Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n^2(\cos(\pi/(20n))) \sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j &\leq \sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j \tilde{G}_n^2(\langle x_j, x_0 \rangle) \\ &\leq \sum_{j=1}^m w_j \tilde{G}_n^2(\langle x_j, x_0 \rangle) = \tilde{G}_n(1). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j \leq \frac{\tilde{G}_n(1)}{\tilde{G}_n^2(\cos(\pi/(20n)))} = \frac{1}{\tilde{G}_n(1) \tilde{G}_n^2(\cos(\pi/(20n)))}.$$

Pela Proposição 1.4.9, chegamos a

$$\sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j \leq \frac{c_1}{\tilde{G}_n(1) |S^{r-1}|}$$

Finalmente, lembrando (1.20), obtemos

$$\sum_{x_j \in K(x_0, \pi/(20n))} w_j \leq c_1 d_n^{-1},$$

como desejado. □

3.3 Hiperinterpolação: propriedades básicas

Nesta seção introduzimos o operador de hiperinterpolação associado a uma fórmula de quadratura bem como algumas de suas propriedades.

Definição 3.3.1. *Sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, Q uma fórmula de quadratura como no início da Seção 3.1 e $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ seu semi-produto interno associado. A aplicação $L_n : C(S^{r-1}) \mapsto C(S^{r-1})$ dada por*

$$L_n(f) := \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m p_j, \quad f \in C(S^{r-1}),$$

é denominada de operador de hiperinterpolação para $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ associado a Q .

Exemplo 3.3.2. Fixada Q , se considerarmos a base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ como sendo o conjunto dos harmônicos esféricos descrito no final da Seção 1.1, o operador de hiperinterpolação correspondente é dado por

$$L_n(f) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=1}^{N(r,l)} \langle f, p_{lk} \rangle_m p_{lk} = \sum_{l=0}^n \sum_{k=1}^{N(r,l)} \sum_{j=1}^m w_j f(x_j) p_{lk}(x_j) p_{lk}.$$

Exemplo 3.3.3. Neste exemplo $r = 2$. Usando coordenadas polares podemos representar funções $f(x, y)$, $x, y \in S^1$ na forma $f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Neste contexto, consideremos a fórmula de quadratura Q dada por

$$\frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \approx \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad g \in C(S^1).$$

Esta fórmula é exata para polinômios trigonométricos de grau $\leq m - 1$, isto é,

$$\frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2\pi k}{m}\right) = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad g \in \mathbb{P}_{m-1}(S^1).$$

Para ver isto, considere a base ortonormal

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

de $\mathbb{P}_n(S^1)$. Vamos mostrar que a fórmula é, então, exata para o conjunto de funções

$$\theta \in [0, 2\pi) \mapsto e^{in\theta} : n = 0, \pm 1, \dots, \pm m - 1,$$

uma vez que os elementos da base são combinações lineares de funções deste conjunto. Se $n = 0$, então

$$\frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} e^{in\theta} = 2\pi = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta.$$

Se $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m - 1$, então

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{in} (e^{in2\pi} - 1) = 0$$

enquanto que

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{i2n\pi k/m} = \sum_{k=1}^m e^{i2n\pi(k-1)/m} = \frac{e^{i2n\pi} - 1}{e^{i2n\pi/m} - 1} = 0.$$

Podemos, então, considerar o operador de hiperinterpolação L_n , contanto que $2n \leq m - 1$.

O semi-produto interno toma a forma

$$\langle f, g \rangle_m = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) g\left(\frac{2\pi k}{m}\right).$$

Logo, o operador L_n pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} L_n(f)(\theta) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^n \left(\left\langle f, \frac{\cos j\theta}{\sqrt{\pi}} \right\rangle_m \frac{\cos j\theta}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{\sin j\theta}{\sqrt{\pi}} \right\rangle_m \frac{\sin j\theta}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) + \sum_{j=1}^n \left[\frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \cos\left(\frac{2\pi k j}{m}\right) \cos j\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \sin\left(\frac{2\pi k j}{m}\right) \sin j\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta), \end{aligned}$$

onde

$$a_j = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \cos\left(\frac{2\pi k j}{m}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

e

$$b_j = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \sin\left(\frac{2\pi k j}{m}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

A seguir, listamos algumas propriedades básicas de L_n . Utilizaremos as notações da Definição 3.3.1.

Proposição 3.3.4. *O operador de hiperinterpolação L_n é uma projeção, isto é, $L_n^2 = L_n$.*

Demonstração: A linearidade segue diretamente da definição de L_n e da bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$. Para mostrar que L_n é projeção, note inicialmente que $L_n(p) = p$, $p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$. De fato, se $p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ podemos escrever $p = \sum_{i=1}^{d_n} c_i p_i$, $c_i \in \mathbb{R}$. Usando a Proposição 3.1.2-i) segue que

$$L_n(p) = \sum_{j=1}^{d_n} \langle p, p_j \rangle_m p_j = \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} c_i \langle p_i, p_j \rangle_m p_j = \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} c_i \langle p_i, p_j \rangle p_j = \sum_{j=1}^{d_n} c_j p_j = p.$$

Como $L_n(f) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$, $f \in C(S^{r-1})$, então $L_n^2(f) = L_n(L_n(f)) = L_n(f)$. $\square$

Proposição 3.3.5. *A definição do operador de hiperinterpolação não depende da base ortonormal utilizada.*

Demonstração: Seja $\{q_1, q_2, \dots, q_{d_n}\}$ outra base ortonormal de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Podemos representar q_j por

$$q_j = \sum_{k=1}^{d_n} \alpha_{jk} p_k, \quad \alpha_{jk} = \langle q_j, p_k \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, d_n.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, q_j \rangle_m q_j &= \sum_{j=1}^{d_n} \left\langle f, \sum_{k=1}^{d_n} \alpha_{jk} p_k \right\rangle_m \sum_{l=1}^{d_n} \alpha_{jl} p_l \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle f, p_k \rangle_m \sum_{l=1}^{d_n} \left(\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_{jk} \alpha_{jl} \right) p_l \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle f, p_k \rangle_m \sum_{l=1}^{d_n} \left(\sum_{j=1}^{d_n} \langle q_j, p_k \rangle \langle q_j, p_l \rangle \right) p_l \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle f, p_k \rangle_m \sum_{l=1}^{d_n} \langle p_k, p_l \rangle p_l \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \langle f, p_k \rangle_m p_k, \end{aligned}$$

demonstrando a independência da base. □

O próximo teorema nos dá uma condição necessária e suficiente para que o operador L_n seja um operador de interpolação.

Teorema 3.3.6. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $L_n(f)(x_k) = f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, $f \in C(S^{r-1})$;
- ii) A fórmula de quadratura Q é mínima.

Demonstração: Seja A a matriz com entradas $A_{ij} = w_j^{1/2} p_i(x_j)$, $i = 1, 2, \dots, d_n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Como já notado na prova do Teorema 3.1.4, a relação (3.3) revela que $AA^t = I_{d_n}$. Se i) vale, por um lado temos que

$$\begin{aligned} L_n(f)(x_l) &= \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m p_j(x_l) \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} \left(\sum_{k=1}^m w_k f(x_k) p_j(x_k) \right) p_j(x_l) \\ &= \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) \left(\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) \right), \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad f \in C(S^{r-1}), \end{aligned}$$

enquanto que por outro lado,

$$L_n(f)(x_l) = f(x_l) = \sum_{k=1}^m w_k f(x_k) w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl}, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^m w_k f(x_k) \left[\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) - w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl} \right] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Como para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ os conjuntos $\{x_i\}$ e $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m\}$ são fechados disjuntos em S^{r-1} , o Lema de Urysohn garante a existência de funções $g_i : S^{r-1} \mapsto [0, 1]$ contínuas tais que $g_i(x_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, \dots, m$. Em particular,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{d_n} w_k g_i(x_k) \left[\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) - w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl} \right] \\ &= w_i \left[\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_i) p_j(x_l) - w_i^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{il} \right]. \end{aligned}$$

Como $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, segue que

$$\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_i) p_j(x_l) - w_i^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{il} = 0, \quad i, l = 1, 2, \dots, m.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{d_n} w_i^{1/2} w_l^{1/2} p_j(x_i) p_j(x_l) = \delta_{il}, \quad i, l = 1, 2, \dots, m,$$

isto é $A^t A = I_m$. Segue que $m = d_n$, ou seja, a fórmula de quadratura é mínima. Reciprocamente, se ii) vale, os argumentos usados na prova do Teorema 3.1.6 revelam que A é quadrada de ordem $m = d_n$ e que

$$\sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) = w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

Então,

$$\begin{aligned} L_n(f)(x_l) &= \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m p_j(x_l) \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} \left(\sum_{k=1}^{d_n} w_k f(x_k) p_j(x_k) \right) p_j(x_l) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} w_k f(x_k) \sum_{j=1}^{d_n} p_j(x_k) p_j(x_l) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} w_k f(x_k) w_k^{-1/2} w_l^{-1/2} \delta_{kl} \\ &= f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad f \in C(S^{r-1}). \end{aligned}$$

Isso completa a prova do teorema. $\square$

O teorema abaixo descreve uma situação na qual o operador de hiperinterpolação não é um operador de interpolação.

Teorema 3.3.7. *Sejam Q e L_n como na Definição 3.3.1 e assumamos que $r \geq 3$ e $n \geq 3$. Valem as seguintes afirmações:*

- i) $m > d_n$;
- ii) Se $f \in C(S^{r-1})$ existe um índice k tal que $L_n(f)(x_k) \neq f(x_k)$.

Demonstração: Se Q é mínima, a Proposição 3.1.7 revela que $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ é um $2n$ -design esférico mínimo, contradizendo o Lema 2.3.6. Podemos assumir, então, que Q não é mínima. Neste caso, o Teorema 3.1.4 implica que $m > d_n$, enquanto que o Teorema 3.3.6 garante a validade do item ii). $\square$

A seguir, listamos as propriedades dos operadores de hiperinterpolação que estão diretamente ligadas ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ gerado pela fórmula de quadratura.

Lema 3.3.8. *Sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$, Q e L_n como na Definição 3.3.1. Então*

$$\langle L_n(f), p \rangle_m = \langle f, p \rangle_m, \quad p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}), \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Demonstração: É suficiente provar o lema no caso em que p é um elemento da base de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Assim sendo, fixado i ,

$$\begin{aligned} \langle L_n(f), p_i \rangle_m &= \left\langle \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m p_j, p_i \right\rangle_m \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m \langle p_j, p_i \rangle_m \\ &= \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m \langle p_j, p_i \rangle = \langle f, p_i \rangle_m, \quad f \in C(S^{r-1}), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Lema 3.3.9. *Sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_n}\}$ e Q como na Definição 3.3.1. Se uma transformação linear $L : C(S^{r-1}) \mapsto \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ satisfaz*

$$\langle L(f), p \rangle_m = \langle f, p \rangle_m, \quad p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}), \quad f \in C(S^{r-1})$$

então $L = L_n$.

Demonstração: Fixe $f \in C(S^{r-1})$. Como $L(f) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$, podemos escrever

$$L(f) = \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_i p_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\langle f, p_j \rangle_m = \langle L(f), p_j \rangle_m = \left\langle \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_i p_i, p_j \right\rangle_m = \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_i \langle p_i, p_j \rangle_m = \alpha_j.$$

Logo, $L(f) = \sum_{j=1}^{d_n} \langle f, p_j \rangle_m p_j = L_n(f)$. □

Proposição 3.3.10. *Sejam Q e L_n como antes. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $\langle f - L_n(f), p \rangle_m = 0$, $p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$, $f \in C(S^{r-1})$;
- ii) $\langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m + \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m = \langle f, f \rangle_m$, $f \in C(S^{r-1})$;
- iii) $\langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m \leq \langle f, f \rangle_m$, $f \in C(S^{r-1})$;
- iv) $\langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m = \min\{\langle f - p, f - p \rangle_m : p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\}$, $f \in C(S^{r-1})$.

Demonstração: A afirmação i) segue do Lema 3.3.8. Para provarmos os demais itens fixe $f \in C(S^{r-1})$. Como $L_n(f) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$, o item i) implica que $\langle f - L_n(f), L_n(f) \rangle_m = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m + \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m &= \langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m + \langle f, f \rangle_m - \langle L_n(f), f \rangle_m \\ &= \langle L_n(f), L_n(f) - f \rangle_m + \langle f, f \rangle_m \\ &= \langle f, f \rangle_m - \langle f - L_n(f), L_n(f) \rangle_m \\ &= \langle f, f \rangle_m. \end{aligned}$$

Isto prova ii). Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ é um semi produto interno, podemos usar ii) para concluir que

$$\langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m = \langle f, f \rangle_m - \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m \leq \langle f, f \rangle_m.$$

Isto prova iii). Usando o item ii) com $f - p$ no lugar de f obtemos

$$\begin{aligned} \langle f - p, f - p \rangle_m &= \langle L_n(f - p), L_n(f - p) \rangle_m \\ &\quad + \langle f - p - L_n(f - p), f - p - L_n(f - p) \rangle_m \\ &= \langle L_n(f) - p, L_n(f) - p \rangle_m + \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m, \quad p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}). \end{aligned}$$

Como $L_n(f) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ segue que

$$\min\{\langle L_n(f) - p, L_n(f) - p \rangle_m : p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\} = 0.$$

Então,

$$\min\{\langle f - p, f - p \rangle_m : p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\} \geq \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m.$$

Por outro lado,

$$\langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m \geq \min\{\langle f - p, f - p \rangle_m : p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\}$$

pois $L_n(f) \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Logo,

$$\min\{\langle f - p, f - p \rangle_m : p \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})\} = \langle f - L_n(f), f - L_n(f) \rangle_m.$$

Isto conclui a prova. $\square$

3.4 Norma do operador de hiperinterpolação

Nesta seção estudaremos a norma do operador de hiperinterpolação considerando-o como uma transformação linear de $C(S^{r-1})$ em $L^2(S^{r-1})$. O primeiro teorema apresenta o valor exato de $\|L_n\|$.

Teorema 3.4.1. *Sejam Q e L_n como na Definição 3.3.1. Então $\|L_n\| = |S^{r-1}|^{1/2}$.*

Demonstração: Seja $f \in C(S^{r-1})$. Da Proposição 3.1.2-i) temos que

$$\|L_n(f)\|_2^2 = \langle L_n(f), L_n(f) \rangle = \langle L_n(f), L_n(f) \rangle_m,$$

enquanto que da Proposição 3.3.10-iii) e de (3.3) concluímos que

$$\begin{aligned} \|L_n(f)\|_2^2 &\leq \langle f, f \rangle_m = \sum_{k=1}^m w_k f(x_k)^2 \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^m w_k = \|f\|_\infty^2 \int_{S^{r-1}} d\sigma_r = |S^{r-1}| \|f\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Segue que

$$\|L_n\| = \sup\{\|L_n(f)\|_2 : f \in C(S^{r-1}), \|f\|_\infty \leq 1\} \leq |S^{r-1}|^{1/2}.$$

Por outro lado, se $g \equiv 1$, temos que

$$\|L_n(g)\|_2 = \|g\|_2 = \left(\int_{S^{r-1}} d\sigma_r \right)^{1/2} = |S^{r-1}|^{1/2}.$$

Segue que $\|L_n\| = |S^{r-1}|^{1/2}$. $\square$

Observação 3.4.2. Comparando o resultado acima com (1.35) e com o Teorema 2.3.7 vemos um forte indicativo de que hiperinterpolação é mais vantajosa do que interpolação.

O erro no processo de hiperinterpolação pode ser estimado como a seguir.

Teorema 3.4.3. *Assuma as hipóteses do teorema anterior. Então*

$$\|L_n(f) - f\|_2 \leq 2|S^{r-1}|^{1/2} E_n(f), \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Demonstração: Usando (3.7) temos

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\|_2 &= \|L_n(f - q) - (f - q)\|_2 \\ &\leq \|L_n(f - q)\|_2 + \|f - q\|_2 \\ &\leq \|f - q\|_\infty |S^{r-1}|^{1/2} + \|f - q\|_\infty |S^{r-1}|^{1/2} \\ &= 2|S^{r-1}|^{1/2} \|f - q\|_\infty, \quad q \in \mathbb{P}_n(S^{r-1}). \end{aligned}$$

Segue que $\|L_n(f) - f\|_2 \leq 2|S^{r-1}|^{1/2} E_n(f)$. □

3.5 Hiperinterpolação na norma uniforme

Nesta seção consideraremos o operador de hiperinterpolação como uma aplicação de $C(S^{r-1})$ em $C(S^{r-1})$. É conveniente utilizarmos uma representação alternativa para L_n , cuja descrição é dada a seguir.

Lema 3.5.1. *Sejam Q e L_n como antes e G_n o núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$ como descrito na Proposição 1.3.2. Considere g_j , $j = 1, 2, \dots, m$, como descrito no Teorema 2.2.3. Então*

$$L_n(f) = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j) g_j, \quad f \in C(S^{r-1}). \quad (3.8)$$

Demonstração: Usando a propriedade de reprodução, a Proposição 3.1.2-i) e o Lema 3.3.8 temos que

$$L_n(f)(x) = \langle L_n(f), G_n(\cdot, x) \rangle = \langle L_n(f), G_n(\cdot, x) \rangle_m = \langle f, G_n(\cdot, x) \rangle_m, \quad f \in C(S^{r-1}).$$

Segue que

$$L_n(f)(x) = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j) G_n(x_j, x) = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j) g_j(x), \quad f \in C(S^{r-1}),$$

como queríamos. □

Teorema 3.5.2. *Nas notações e condições acima*

$$\|L_n\|_\infty = \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{j=1}^m w_j |g_j(x)|.$$

Demonstração: É análoga à prova do Teorema 2.3.8. Se $f \in C(S^{r-1})$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, então (3.8) nos dá

$$|L_n(f)(x)| \leq \sum_{j=1}^m w_j |f(x_j)| |g_j(x)| \leq \sum_{j=1}^m w_j |g_j(x)|, \quad x \in S^{r-1}.$$

A função $\gamma : S^{r-1} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $\gamma(x) = \sum_{j=1}^m w_j |g_j(x)|$ é contínua e assume seu valor máximo em algum ponto $\xi \in S^{r-1}$. Consequentemente,

$$|L_n(f)(x)| \leq \gamma(\xi), \quad x \in S^{r-1}, \quad f \in C(S^{r-1}), \quad \|f\|_\infty \leq 1.$$

Em particular, $\|L_n\|_\infty \leq \gamma(\xi)$. Para concluir a demonstração, definimos uma função f^* da seguinte forma:

$$f^*(x) := \begin{cases} \text{sign}(g_j(\xi)) (1 - R^{-1}|x - x_j|) & \text{se } |x - x_j| < R \text{ para algum } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde R é um número real tal que $0 < 2R < \min\{|x_i - x_j|; i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j\}$. A função f^* assim construída satisfaz $\|f^*\|_\infty = 1$. Além disso, usando novamente a expressão (3.8), vemos que

$$|L_n(f^*)(\xi)| = \left| \sum_{j=1}^m w_j f^*(x_j) g_j(\xi) \right| = \left| \sum_{j=1}^m w_j \text{sign}(g_j(\xi)) g_j(\xi) \right| = \sum_{j=1}^m w_j |g_j(\xi)| = \gamma(\xi).$$

Assim,

$$\|L_n\|_\infty \geq \|L_n(f^*)\|_\infty \geq |L_n(f^*)(\xi)| = \gamma(\xi).$$

Isto conclui a prova do teorema. □

Teorema 3.5.3. *Nas condições acima, $\|L_n\|_\infty \leq d_n^{1/2}$.*

Demonstração: Considere $x_0 \in S^{r-1}$ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^m w_j |g_j(x_0)| = \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{j=1}^m w_j |g_j(x)|.$$

Usando o Teorema 3.5.2, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \|L_n\|_\infty &= \sum_{j=1}^m w_j |G_n(x_0, x_j)| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m w_j \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m w_j |G_n(x_0, x_j)|^2 \right)^{1/2} \\ &= |S^{r-1}|^{1/2} \left(\int_{S^{r-1}} G_n(x_0, x)^2 d\sigma_r(x) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Entretanto, pela propriedade de reprodução,

$$\int_{S^{r-1}} G_n(x_0, x)^2 d\sigma_r(x) = \langle G_n(x_0, \cdot), G_n(x_0, \cdot) \rangle = G_n(x_0, x_0) = \tilde{G}_n(1) = \frac{d_n}{|S^{r-1}|}.$$

Portanto, $\|L_n\|_\infty \leq d_n^{1/2}$. □

A próxima proposição estima o erro da aproximação de f por $L_n(f)$. A qualidade da aproximação depende, como no caso da interpolação, do comportamento de $\|L_n\|_\infty$.

Proposição 3.5.4. *Mantendo-se as condições acima, vale a desigualdade $\|L_n(f) - f\|_\infty \leq (1 + \|L_n\|_\infty) E_n(f)$.*

Demonstração: Seja $q \in \mathbb{P}_n(S^{r-1})$. Como anteriormente,

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\|_\infty &= \|L_n(f - q) - (f - q)\|_\infty \\ &\leq \|L_n(f - q)\|_\infty + \|f - q\|_\infty \\ &\leq \|L_n\|_\infty \|f - q\|_\infty + \|f - q\|_\infty \\ &= (\|L_n\|_\infty + 1) \|f - q\|_\infty. \end{aligned}$$

A desigualdade desejada segue. □

Capítulo 4

Hiperinterpolação em S^{r-1} na ordem da projeção mínima

Os resultados deste capítulo são válidos apenas no caso em que $r \geq 3$. Provaremos que a norma uniforme do operador de hiperinterpolação tem ordem de crescimento igual à ordem da norma da projeção mínima. Denotando-se estas normas por $\|L_n\|_\infty$ e $\|Q_n\|_\infty$ concluiremos, então, que $\|Q_n\|_\infty = O(\|L_n\|_\infty)$ e que $\|L_n\|_\infty = O(\|Q_n\|_\infty)$ quando $n \rightarrow \infty$.

4.1 Cobertura da esfera e das calotas esféricas

Esta seção trata do problema de cobrir-se S^{r-1} e calotas esféricas do tipo $K(x, \phi)$, $x \in S^{r-1}$, $\phi \in (\pi/(20n), \pi/2]$, com um número finito de calotas esféricas. Tais coberturas são etapas técnicas importantes na prova do teorema principal deste capítulo. Começamos enunciando a seguinte consequência do Lema 1.2.7.

Lema 4.1.1. *Seja G^n como na Proposição 1.3.6. Denote por z_n o maior zero de G^n e escreva $z_n := \cos \theta_n^r$, $\theta_n^r \in (0, \pi)$. Então existe uma constante $\delta_r > 0$ tal que $\theta_n^r \leq n^{-1} \delta_r$.*

Demonstração: As fórmulas (1.22) e (1.11) revelam que o maior zero de G^n é o maior zero de $P_n^{((r-3)/2, (r-3)/2)}$. Em outras palavras, $z_n = t_n^{((r-3)/2, (r-3)/2)}$, onde $t_n^{(\alpha, \beta)}$ é o maior zero de $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Do Lema 1.2.7 sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n^r = j_1((r-3)/2)$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|n\theta_n^r - j_1((r-3)/2)| < 1, \quad n \geq n_0.$$

Então

$$\begin{aligned}\theta_n^r &\leq \frac{|n\theta_n^r - j_1((r-3)/2)| + j_1((r-3)/2)}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} (1 + j_1((r-3)/2)), \quad n \geq n_0.\end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil ver que existe uma constante positiva ϵ tal que $\theta_n^r \leq n^{-1}\epsilon$, $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$. Tomando $\delta_r = \max\{\epsilon, 1 + j_1((r-3)/2)\}$ segue que

$$\theta_n^r \leq \frac{1}{n} \delta_r, \quad n \in \mathbb{N},$$

como queríamos. $\square$

O lema abaixo nos mostra que a esfera S^{r-1} pode ser coberta por um número finito de calotas esféricas de raio geodésico θ_n^r , cujos pólos são os pontos x_j da fórmula de quadratura considerada.

Lema 4.1.2. *Seja Q uma fórmula de quadratura como no início da Seção 3.1. Então*

$$S^{r-1} \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \theta_n^r),$$

onde θ_n^r é o número descrito na lema anterior.

Demonstração: Seja $z_n = \cos \theta_n^r$ como no lema anterior. Para cada $x \in S^{r-1}$, $G^n(\langle \cdot, x \rangle)$ é um elemento de $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$ enquanto que $G^n(\langle \cdot, x \rangle)(\langle \cdot, x \rangle - z_n)^{-1}$ é um elemento de $\mathcal{H}_{n-1}(S^{r-1})$. Logo, usando o Teorema 1.1.3 e a exatidão da fórmula de quadratura temos que

$$0 = \int_{S^{r-1}} G^n(\langle y, x \rangle) \frac{G^n(\langle y, x \rangle)}{\langle y, x \rangle - z_n} d\sigma_r(y) = \sum_{j=1}^m w_j \frac{G^n(\langle x_j, x \rangle)^2}{\langle x_j, x \rangle - z_n}, \quad x \in S^{r-1}. \quad (4.1)$$

Para completar a prova, fixe x e assuma, por absurdo, que $\langle x_j, x \rangle < z_n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Então, por continuidade, $\langle x_j, y \rangle < z_n$, $j = 1, 2, \dots, m$, para y próximo de x . Portanto, pela equação (4.1), $G^n(\langle x_j, y \rangle) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, para y próximo de x . Pela continuidade do produto interno, segue que $\langle x_j, y \rangle$, $j = 1, 2, \dots, m$, é zero de G^n para y próximo de x . Isto é uma contradição, uma vez que um polinômio não nulo possui apenas um número finito de raízes. $\square$

Observação 4.1.3. O lema anterior ainda é válido quando $r = 2$.

No próximo lema trabalharemos com esferas de dimensões diferentes simultaneamente. Para evitar confusão, acrescentaremos alguns índices r em algumas constantes para enfatizar qual é a dimensão do espaço onde a esfera que estamos trabalhando naquele momento reside.

Lema 4.1.4. *Sejam $x_0 \in S^{r-1}$ e $\theta \in (\pi/(20n), \pi/2]$. Então existem constantes $q > 0$ e $R = R(n, \theta) \in (0, qn^{r-1}\sin^{r-1}\theta]$, R independente de x_0 , tal que $K(x_0, \theta)$ pode ser coberta por no máximo $R(n, \theta)$ calotas de raio geodésico $\pi/(20n)$.*

Demonstração: Iniciamos a prova com algumas construções preparatórias. Seja $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{10n} = \pi/2$ uma partição de $[0, \pi/2]$, onde

$$\theta_j = \frac{\pi}{20n}j, \quad j = 1, 2, \dots, 10n.$$

e defina

$$B_j := \{x \in S^{r-1} : \cos \theta_{j+1} \leq \langle x, x_0 \rangle \leq \cos \theta_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, 10n - 1.$$

Cada B_j é uma faixa equatorial de S^{r-1} . Escreveremos $S_{x_0}^{r-2}$ para denotar o equador de S^{r-1} que é ortogonal a x_0 , isto é, $S_{x_0}^{r-2} := \{u \in S^{r-1} : \langle u, x_0 \rangle = 0\}$. Escolhamos $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k(\sqrt{2} - 1) \geq 2\pi\delta_{r-1}$, onde δ_{r-1} é como descrito no Lema 4.1.1. Note, então, que estamos aplicando tal lema no caso da esfera S^{r-2} , aqui representada por sua cópia $S_{x_0}^{r-2}$ mergulhada em S^{r-1} . Lembrando o Teorema 3.1.1, podemos usar o lema anterior $10n - 1$ vezes e garantir que

$$S_{x_0}^{r-2} \subset \bigcup_{l=1}^{m_{kj}^{r-1}} K(u_{jl}, \theta_{kj}^{r-1}), \quad j = 1, 2, \dots, 10n - 1, \quad (4.2)$$

onde $u_{jl} \in S_{x_0}^{r-2}$. Em vista do Teorema 3.1.4, podemos assumir que existe uma constante $k_{r-1} > 1$ tal que

$$m_{kj}^{r-1} \leq k_{r-1}d_{kj}^{r-1}. \quad (4.3)$$

Defina agora $\bar{\theta}_j := (\theta_j + \theta_{j+1})/2$ e considere os pontos

$$x_{jl} := (\cos \bar{\theta}_j)x_0 + (\sin \bar{\theta}_j)u_{jl}, \quad l = 1, 2, \dots, m_{kj}^{r-1}. \quad (4.4)$$

Como

$$\langle x_{jl}, x_0 \rangle = \langle (\cos \bar{\theta}_j)x_0 + (\sin \bar{\theta}_j)u_{jl}, x_0 \rangle = \cos \bar{\theta}_j$$

e $\cos \theta_{j+1} < \cos \bar{\theta}_j < \cos \theta_j$, segue que $x_{jl} \in B_j$, $l = 1, 2, \dots, m_{kj}^{r-1}$. Agora, vamos para o primeiro passo da prova, qual seja, cobrir B_j por calotas esféricas apropriadas. Fixemos j e $x \in B_j$. Podemos escrever

$$x = (\cos \xi)x_0 + (\sin \xi)u, \quad (4.5)$$

onde $\xi \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$ e $u \in S_{x_0}^{r-2}$. Geometricamente, u é a projeção esférica de x a partir de x_0 sobre $S_{x_0}^{r-2}$. Por (4.2), existe $u_{jl} \in S_{x_0}^{r-2}$ tal que $u \in K(u_{jl}, \theta_{kj}^{r-1})$. Pelo Lema 4.1.1 e nossa escolha de k vemos que

$$\theta_{kj}^{r-1} \leq \frac{\delta_{r-1}}{kj} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2\pi j} < \frac{\pi}{2}.$$

Como a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi/2]$,

$$\langle u, u_{jl} \rangle \geq \cos \theta_{kj}^{r-1} \geq \cos(\delta_{r-1}/kj). \quad (4.6)$$

Utilizando o ponto auxiliar

$$\bar{x}_j := (\cos \bar{\theta}_j)x_0 + (\sin \bar{\theta}_j)u \quad (4.7)$$

de B_j e a fórmulas (4.5) temos que

$$\begin{aligned} |x - \bar{x}_j|^2 &= (\cos \xi - \cos \bar{\theta}_j)^2 + (\sin \xi - \sin \bar{\theta}_j)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \xi \cos \bar{\theta}_j + \sin \xi \sin \bar{\theta}_j) \\ &= 2(1 - \cos(\xi - \bar{\theta}_j)) \\ &= 4 \sin^2((\xi - \bar{\theta}_j)/2). \end{aligned}$$

Como $\xi \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$ temos que

$$\frac{\xi - \bar{\theta}_j}{2} \leq \frac{1}{2}(\theta_{j+1} - \bar{\theta}_j) = \frac{\pi}{80n}.$$

Logo, $\sin((\xi - \bar{\theta}_j)/2) \leq \sin(\pi/80n)$ e, conseqüentemente,

$$|x - \bar{x}_j| \leq 2 \sin \frac{\pi}{80n}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, de (4.4), (4.6) e (4.7) temos que

$$\begin{aligned} |\bar{x}_j - x_{jl}|^2 &= \sin^2 \bar{\theta}_j |u - u_{jl}|^2 \\ &= \sin^2 \bar{\theta}_j (2 - 2 \langle u, u_{jl} \rangle) \\ &\leq 2 \sin^2 \bar{\theta}_j (1 - \cos(\delta_{r-1}/kj)) \\ &= 4 \sin^2 \bar{\theta}_j \sin^2(\delta_{r-1}/2kj). \end{aligned}$$

Então,

$$|\bar{x}_j - x_{jl}| \leq 2 \sin \bar{\theta}_j \sin(\delta_{r-1}/2kj) \leq \bar{\theta}_j \frac{\delta_{r-1}}{kj} = \frac{2j+1}{2j} \frac{\pi}{20n} \frac{1}{k} \delta_{r-1},$$

e, por conseguinte,

$$|\bar{x}_j - x_{jl}| \leq \frac{\pi}{10n} \frac{\delta_{r-1}}{k} = 2 \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{80n} \frac{2\pi}{k} \delta_{r-1} \leq 2(\sqrt{2} - 1) \sin \frac{\pi}{80n}. \quad (4.9)$$

Juntando as estimativas (4.8) e (4.9), concluímos que

$$|x - x_{jl}| \leq 2 \sin \frac{\pi}{80n} + 2(\sqrt{2} - 1) \sin \frac{\pi}{80n} = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{80n}.$$

Portanto,

$$1 - \langle x, x_{jl} \rangle = \frac{1}{2} |x - x_{jl}|^2 \leq 4 \sin^2 \frac{\pi}{80n} = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{40n} \right).$$

Isso implica que

$$\langle x, x_{jl} \rangle \geq -1 + 2 \cos \frac{\pi}{40n} \geq -1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{40n} = \cos \frac{\pi}{20n}.$$

Logo, $x \in K(x_{jl}, \pi/(20n))$. Assim, concluímos que as m_{kj}^{r-1} calotas $K(x_{jl}, \pi/(20n))$, $l = 1, 2, \dots, m_{kj}^{r-1}$ cobrem B_j . Vamos agora ao segundo passo da prova, qual seja, cobrir $K(x_0, \theta)$, onde $\theta \in (\pi/(20n), \pi/2]$. Neste caso,

$$K(x_0, \theta) \subset K(x_0, \pi/(20n)) \cup B_1 \cup \dots \cup B_i, \quad (4.10)$$

onde $i := \lceil 20n\theta/\pi \rceil - 1$, com $\lceil 20n\theta/\pi \rceil$ denotando o menor inteiro maior ou igual que $20n\theta/\pi$. Segue que $K(x_0, \theta)$ pode ser coberta por $R(n, \theta)$ calotas de raio geodésico $\pi/(20n)$, onde

$$R(n, \theta) = 1 + \sum_{j=1}^i m_{kj}^{r-1}.$$

Usando (4.3) vemos agora que

$$\begin{aligned} R(n, \theta) &\leq 1 + k_{r-1} \sum_{j=1}^i d_{kj}^{r-1} \\ &= 1 + k_{r-1} \left[\sum_{j=1}^i \binom{kj + r - 2}{r - 2} + \sum_{j=1}^i \binom{kj + r - 3}{r - 2} \right] \\ &= 1 + k_{r-1} \left[\binom{ki + r - 1}{r - 1} - \underbrace{\binom{k + r - 2}{r - 1}} + \binom{ki + r - 2}{r - 1} - \underbrace{\binom{k + r - 3}{r - 1}} \right] \\ &= 1 + k_{r-1} \left[\frac{(ki + r - 1)!}{(r - 1)!(ki)!} + \frac{(ki + r - 2)!}{(r - 1)!(ki - 1)!} + \text{termos independentes de } i \right] \\ &= 1 + k_{r-1} \left[\frac{(ki + r - 1) \dots (ki + 1)}{(r - 1)!} + \frac{(ki + r - 2) \dots (ki)}{(r - 1)!} + \text{t. ind. de } i \right] \\ &= 1 + k_{r-1} \left[\frac{k^{r-1} i^{r-1} + \dots}{(r - 1)!} + \frac{k^{r-1} i^{r-1} + \dots}{(r - 1)!} + \text{termos independentes de } i \right]. \end{aligned}$$

O termo entre colchetes é um polinômio de grau $r - 1$ em relação a i . Logo, existe uma constante q' , independente de i e θ tal que $R(n, \theta) \leq q' i^{r-1}$. Finalmente, usando a definição de i segue que

$$\begin{aligned} R(n, \theta) &\leq q' i^{r-1} \leq q' \left(\frac{20n\theta}{\pi} \right)^{r-1} = q' (n\theta)^{r-1} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{1-r} \\ &= q' \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-1} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{1-r} \left(\frac{2n\theta}{\pi} \right)^{r-1} \leq q(n \sin \theta)^{r-1}, \end{aligned}$$

onde $q = q' (\pi/2)^{r-1} (\pi/20)^{1-r}$. Isso completa a demonstração. $\square$

4.2 Hiperinterpolação e a projeção mínima

Seja Q uma fórmula de quadratura como descrito em (3.1), (3.2) e (3.3) e $L_n : C(S^{r-1}) \mapsto \mathbb{P}_n(S^{r-1})$ o operador de hiperinterpolação correspondente. Nesta seção mostraremos que a norma uniforme do operador de hiperinterpolação cresce na ordem da norma da projeção ortogonal, a qual sabemos ser mínima pelo Teorema 1.5.2. Este resultado é dado no teorema abaixo.

Teorema 4.2.1. *Nas condições acima, existem constantes positivas a_r e b_r tais que*

$$a_r n^{(r-2)/2} \leq \|L_n\|_\infty \leq b_r n^{(r-2)/2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Como L_n é uma projeção e a projeção ortogonal Q_n é mínima, segue que

$$\|L_n\|_\infty \geq \|Q_n\|_\infty.$$

Pelo Teorema 1.5.3 concluímos imediatamente que existe uma constante a_r , que depende de r , tal que

$$a_r n^{(r-2)/2} \leq \|L_n\|_\infty, \quad (n \rightarrow \infty).$$

A seguir, lembrando o Teorema 3.5.2, vemos que $\|L_n\|_\infty \leq S_n^+ + S_n^-$, onde

$$S_n^+ := \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)|,$$

$$S_n^- := \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{-\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)|.$$

Vamos estimar as quantidades S_n^- e S_n^+ . Começamos estimando a expressão

$$\sum_{\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)|$$

com $x \in S^{r-1}$ fixo. Ela decompõe-se na forma

$$\sum_{\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)| = \sum_{x_j \in K(x, \pi/(20n))} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)| + \sum_{\substack{x_j \notin K(x, \pi/(20n)) \\ \langle x_j, x \rangle \geq 0}} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)|. \quad (4.11)$$

Logo, estimaremos cada uma das expressões acima separadamente. Lembrando o Lema 1.2.2 temos que

$$\sum_{x_j \in K(x, \pi/(20n))} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)| \leq \tilde{G}_n(1) \sum_{x_j \in K(x, \pi/(20n))} w_j$$

Portanto, pelo Teorema 3.2.1 e por (1.20) obtemos

$$\sum_{x_j \in K(x, \pi/(20n))} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)| \leq \tilde{G}_n(1) c_1 d_n^{-1} = \frac{c_1}{|S^{r-1}|} \leq \frac{c_1}{|S^{r-1}|} n^{(r-2)/2}. \quad (4.12)$$

Para estimar a outra parcela consideremos a função auxiliar $A : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$A(\theta) := \sum_{\langle x_j, x \rangle \geq \cos \theta} w_j, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ela é certamente não negativa e não decrescente. Ainda, se $x_j \notin K(x, \pi/(20n))$, $\langle x_j, x \rangle \geq 0$ e θ_j é o ângulo entre x_j e x , então $\theta_j \in [\pi/(20n), \pi/2]$. Segue que tal parcela é uma soma de Riemann-Stieltjes da seguinte integral de Riemann-Stieltjes:

$$I := \int_{\pi/(20n)}^{\pi/2} |\tilde{G}_n(\cos \theta)| dA(\theta).$$

Em particular, o valor da integral é um limitante superior para a segunda parcela em (4.11). Vamos, então, estimar esta integral. O Lema 1.2.3 garante a existência de uma constante k_1 tal que

$$|\tilde{G}_n(\cos \theta)| = \alpha_n |P_n^{((r-1)/2, (r-3)/2)}(\cos \theta)| \leq k_1 \alpha_n n^{-1/2} \theta^{-r/2}, \quad \frac{\pi}{20n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

onde α_n é como em (1.28). O comportamento de α_n para $n \rightarrow \infty$ nos garante a existência de uma constante k_2 tal que

$$\text{sen } r/2 \theta |\tilde{G}_n(\cos \theta)| \leq \theta^{r/2} k_1 \alpha_n n^{-1/2} \theta^{-r/2} \leq k_1 k_2 n^{(r-2)/2}, \quad \frac{\pi}{20n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Definindo $c_2 := k_1 k_2$ temos que

$$|\tilde{G}_n(\cos \theta)| \leq c_2 n^{(r-2)/2} \text{sen }^{-r/2} \theta, \quad \frac{\pi}{20n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Segue que

$$I \leq c_2 n^{(r-2)/2} \int_{\pi/(20n)}^{\pi/2} \text{sen }^{-r/2} \theta dA(\theta)$$

Integração por partes na integral acima nos dá

$$\begin{aligned} I &\leq c_2 n^{(r-2)/2} \left(A(\pi/2) - A(\pi/(20n)) \text{sen }^{-r/2} \frac{\pi}{20n} + \frac{r}{2} \int_{\pi/(20n)}^{\pi/2} A(\theta) \text{sen }^{-(r+2)/2} \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &\leq c_2 n^{(r-2)/2} \left(A(\pi/2) + \frac{r}{2} \int_0^{\pi/2} A(\theta) \text{sen }^{-(r+2)/2} \theta \cos \theta d\theta \right) \end{aligned}$$

Para refinarmos um pouco mais a estimativa acima, vamos precisar de duas propriedades da função auxiliar. Como a fórmula de quadratura é exata para polinômios constantes,

$$A(\pi) = \sum_{\langle x_j, x \rangle \geq -1} w_j = \sum_{j=1}^m w_j = \int_{S^{r-1}} d\sigma_r = |S^{r-1}|. \quad (4.13)$$

Pelo Lema 4.1.4 sabemos que podemos cobrir a calota $K(x, \theta)$ com $R(n, \theta)$ calotas de raio geodésico $\pi/(20n)$. Sejam $y_1, y_2, \dots, y_{R(n, \theta)}$ os pólos dessas calotas. Então

$$A(\theta) = \sum_{\langle x_j, x \rangle \geq \cos \theta} w_j \leq \sum_{\langle x_j, y_1 \rangle \geq \cos \pi/(20n)} w_j + \sum_{\langle x_j, y_2 \rangle \geq \cos \pi/(20n)} w_j + \dots + \sum_{\langle x_j, y_{R(n, \theta)} \rangle \geq \cos \pi/(20n)} w_j.$$

A estimativa para $R(n, \theta)$ dada pelo Lema 4.1.4 e o Teorema 3.2.1 implicam que

$$A(\theta) \leq R(n, \theta) c_1 d_n^{-1} \leq q(n \sin \theta)^{r-1} c_1 d_n^{-1}, \quad \frac{\pi}{20n} < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lembrando (1.6) obtemos

$$A(\theta) \leq q n^{r-1} c_1 d_n^{-1} \sin^{r-1} \theta \leq \frac{1}{2} q c_1 k_3 (r-1)! \sin^{r-1} \theta, \quad \frac{\pi}{20n} < \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

onde k_3 é uma constante positiva. Definindo $c_3 := q c_1 k_3 (r-1)!/2$, podemos finalmente concluir que

$$A(\theta) \leq c_3 \sin^{r-1} \theta, \quad \frac{\pi}{20n} \leq \theta \leq \pi/2. \quad (4.14)$$

Usando (4.13) e (4.14) na última estimativa de I acima, obtemos

$$\begin{aligned} I &\leq c_2 n^{(r-2)/2} \left[A(\pi) + c_3 \frac{r}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{r-1} \theta \sin^{-(r+2)/2} \theta \cos \theta d\theta \right] \\ &= c_2 n^{(r-2)/2} \left[|S^{r-1}| + c_3 \frac{r}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{(r-4)/2} \theta \cos \theta d\theta \right] \\ &= c_2 n^{(r-2)/2} \left[|S^{r-1}| + c_3 \frac{r}{r-2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$b_r := 2 \left(\frac{c_1}{|S^{r-1}|} + c_2 |S^{r-1}| + c_2 c_3 \frac{r}{r-2} \right)$$

obtemos

$$\sum_{\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle x_j, x \rangle)| \leq \frac{1}{2} b_r n^{(r-2)/2}$$

e, portanto,

$$S_n^+ \leq \frac{1}{2} b_r n^{(r-2)/2}.$$

Como

$$S_n^- = \max_{x \in S^{r-1}} \sum_{\langle x_j, x \rangle \geq 0} w_j |\tilde{G}_n(\langle -x_j, x \rangle)|$$

e a validade de (3.3) implica que

$$\sum_{k=1}^m w_k g(-x_k) = \int_{S^{r-1}} g(-x) d\sigma_r(x) = \int_{S^{r-1}} g(x) d\sigma_r(x), \quad g \in \mathbb{P}_{2n}(S^{r-1}),$$

a estimativa de S_n^- pode ser feita de maneira análoga. Na estimativa (4.12) para S_n^- usamos uma fórmula de quadratura baseada nos pontos antipodais $-x_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ possuindo as mesmas propriedades da original. Dessa forma, temos que

$$S_n^+ + S_n^- \leq b_r n^{(r-2)/2},$$

concluindo o teorema. □

Notações

S^{r-1}	esfera unitária em $\mathbb{R}^r$
$ S^{r-1} $	área da superfície de S^{r-1}
$C(S^{r-1})$	espaço das funções contínuas em S^{r-1}
$L^2(S^{r-1})$	espaço das funções de quadrado integrável em S^{r-1}
$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^r)$	espaço dos polinômios homogêneos de grau n em r variáveis
$\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^r)$	espaço dos polinômios harmônicos e homogêneos de grau n em r variáveis
$\mathcal{P}_n(S^{r-1})$	espaço dos polinômios esféricos homogêneos de grau n
$\mathcal{H}_n(S^{r-1})$	espaço dos harmônicos esféricos de grau n
$\mathbb{P}_n(S^{r-1})$	espaço dos polinômios esféricos de grau $\leq n$
$N(r, n)$	dimensão de $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$
d_n	dimensão de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$
Λ_n	operador de interpolação
L_n	operador de hiperinterpolação
Q_n	projeção ortogonal
Q	fórmula de quadratura
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	polinômio de Jacobi de grau n e parâmetros α e β
P_n^r	polinômio de Legendre de grau n associado à dimensão r
C_n^λ	polinômio de Gegenbauer de grau n e parâmetro λ
l_j	polinômio de Lagrange
$G_n(x, y)$	núcleo de reprodução de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$
$G^n(x, y)$	núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_n(S^{r-1})$
J_α	função de Bessel de índice α
$j_k(\alpha)$	k -ésimo zero positivo de J_α

Referências Bibliográficas

- [1] Axler, S.; Bourdon, P.; Ramey, W. - Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] Bannai, E.; Damerell, R. M. - Tight spherical designs, I. *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), no. 1, 199-207.
- [3] Bos, L. - Some remarks on the Fejér problem for Lagrange interpolation in several variables. *J. Approx. Theory* **60** (1990), no. 2, 133-140.
- [4] Daugavet, I. K. - Some applications of the generalized Marcinkiewicz-Berman identity. (Russian) *Vestnik Leningrad. Univ.* **23** (1968), no. 19, 59-64.
- [5] Davis, P. J. - Interpolation and approximation, Dover Publications, New York, 1975.
- [6] Delsarte, P.; Goethals, J. M.; Seidel, J. J. - Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata* **6** (1977), no. 3, 363-388.
- [7] Gronwall, T. H. - Über die Laplacesche Reihe, *Math. Ann.* **74** (1913), 213-270.
- [8] Horn, R. A.; Johnson, C. R. - Matrix analysis, Cambridge University Press, New York, 1990.
- [9] Le Gia, T.; Sloan, I. H. - The uniform norm of hyperinterpolation on the unit sphere in an arbitrary number of dimensions. *Constr. Approx.* **17** (2001), no. 2, 249-265.
- [10] Morimoto, M. - Analytic functionals on the sphere, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.
- [11] Müller, C. - Analysis of spherical symmetries in euclidean spaces, Applied Mathematical Sciences, Vol. 29, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] Prudnikov, A. P.; Brychkov, Y. A.; Marichev, O. I. - Integrals and series. Vol. 2. Special functions. Translated from the Russian by N. M. Queen. Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986.

- [13] Rainville, E. D. - Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, New York, 1971.
- [14] Reimer, M. - Constructive theory of multivariate functions, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.
- [15] Reimer, M. - Hyperinterpolation on the sphere at the minimal projection order. *J. Approx. Theory* **104** (2000), no. 2, 272-286.
- [16] Reimer, M. - Spherical polynomial approximations: a survey. *Advances in Multivariate Approximation (Witten-Bommerholz, 1998)*, 231-252, Math. Res., 107, Wiley-VCH, Berlin, 1999.
- [17] Schaback, R. - Native Hilbert spaces for radial basis functions I. New developments in approximation theory (Dortmund, 1998), 255-282, *Internat. Ser. Numer. Math.*, 132, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [18] Schaback, R. - A Unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II. Numerical analysis in the 20th century, Vol. I, Approximation theory. *J. Comput. Appl. Math.* **121** (2000), no. 1-2, 165-177.
- [19] Seymour, P. D.; Zaslavsky, T. - Averaging sets: A generalization of mean values and spherical designs. *Adv. in Math.* **52** (1984), 213-240.
- [20] Sloan, I. H. - Polynomial interpolation and hyperinterpolation over general regions. *J. Approx. Theory* **83** (1995), no. 2, 238-254.
- [21] Sloan, I. H. - Interpolation and hyperinterpolation on the sphere. *Multivariate approximation (Witten-Bommerholz, 1996)*, 255-268, Math. Res., 101, Akademie Verlag, Berlin, 1997.
- [22] Sloan, I. H.; Womersley, R. S. - Constructive polynomial approximation on the sphere. *J. Approx. Theory* **103** (2000), no. 1, 91-118.
- [23] Szegő, G. - Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., Providence, 1939.
- [24] Watson, G. - A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

Índice Remissivo

- Calota esférica, 34
- Condição de regularidade por calotas, 34
- Design esférico, 24
 - mínimo, 24, 33
- Fórmula de quadratura, 31
 - mínima, 33
- Função
 - de Bessel, 8
 - harmônica, 3
 - homogênea, 3
- Harmônicos esféricos, 3
- Hiperinterpolação, 35
- Interpolação, 20
- Núcleo de reprodução, 9
 - de $\mathbb{P}_n(S^{r-1})$, 9
 - de $\mathcal{H}_l(S^{r-1})$, 11
- Norma
 - da projeção ortogonal, 17, 18
 - do operador de hiperinterpolação, 41, 50
 - do operador de interpolação, 24, 25, 27
- Polinômios
 - de Gegenbauer, 7
 - de Jacobi, 7
 - de Lagrange, 21
 - de Legendre, 7
 - homogêneos, 3
- Projeção mínima, 17
- Projeção ortogonal, 17
- Propriedade
 - de enlaçamento dos zeros de J_α , 8
 - de reprodução, 9
- Representação de Lagrange, 21
- Sistema fundamental, 19
 - extremo, 28
- Teorema da Adição, 6