Atratores para equações da onda amortecida em domínios arbitrários

Ariadne Nogueira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_________________________

Atratores para equações da onda amortecida em domínios arbitrários

Ariadne Nogueira

Orientadora: **Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Maio de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nogueira, Ariadne
N778 / Ariadne Nogueira; orientadora Maria do Carmo Carbinatto. -- São Carlos, 2013.
117 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. atratores globais. 2. equações da onda amortecida. 3. equações de evolução. 4. estimativas de truncamento. I. Carbinatto, Maria do Carmo, orient. II. Título.

“Todo abismo é navegável
a barquinhos de papel.”
(Guimarães Rosa)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela oportunidade e pela força para passar por mais esse estágio na minha vida. Agradeço muito também a minha família, pela base que me foi dada desde sempre e pelo local de refúgio que me proporciona sempre que necessário, sendo exemplo de amor, união e me inspirando a continuar lutando pelos meus objetivos na vida. Principalmente a minha mãe, por ser meu esteio e meu modelo, com toda sua determinação, força de vontade, humildade, carinho e confiança nas minhas escolhas (muitas vezes confiando mais em mim do que eu mesma poderia).

Agradeço também aos meus amigos, os próximos e os distantes. Sejam aqueles que estiveram aqui comigo e fizeram minha estadia muito mais animada, transformando São Carlos na minha casa por tanto tempo; os de minha cidade natal que faziam meus retornos sempre esperados e proveitosos, mostrando que a vida segue para todos, mas que as raízes, quando bem cuidadas, nunca são deixadas pra trás; assim como os mais distantes, os quais eu sempre agradeço à tecnologia por proporcionar o que muitas vezes a grande distância não nos deixa, que é a presença daqueles que amamos quando precisamos compartilhar algo, sejam notícias, curiosidades ou simplesmente a falta que essa pessoa nos faz. Falo com toda certeza que, sem meus amigos, eu não conseguiria.

Agradeço a minha orientadora, professora Maria do Carmo Carbinatto, pelo cuidado, paciência e profissionalismo com o qual sempre me tratou, me ajudando e me acompanhando nessa tortuosa estrada que foi o meu mestrado. Muito obrigada pelas conversas esclarecedoras, pela troca de experiências e pela confiança. Além de uma grande orientadora neste projeto, fico feliz em dizer que tive um modelo de pessoa e de profissional trabalhando comigo durante todo esse tempo.

Agradeço, por fim, à USP, ao CNPq e à FAPESP pela confiança e pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho apresentamos o estudo do artigo [25] que analisa a existência de atratores globais para uma classe de equações da onda amortecida da forma

$$\varepsilon u_{tt} + \alpha(x)u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = f(x,u), \qquad x \in \Omega,\ t \in [0,\infty),$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty)$$

definidas em um domínio arbitrário Ω.

Palavras-chave: Atratores globais, equações da onda amortecida, equações de evolução, estimativas de truncamento.

Abstract

In this work we describe the results of the paper [25]. In [25] the authors prove existence of global attractors for the following semilinear damped wave equation

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \alpha(x)u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) &= f(x,u), && x \in \Omega,\ t \in [0,\infty), \\ u(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

on an arbitrary domain Ω.

Key words: Global attractors, damped wave equations, evolution equations, tail-estimates.

Sumário

Introdução

Nesse trabalho estudaremos a existência de atrator global para uma classe de equações de evolução. Nas últimas décadas muito se tem estudado acerca do comportamento assintótico de equações de evolução não-lineares provenientes de equações diferenciais parciais. Uma das ferramentas mais utilizadas para obter informações dessas equações é o conceito de atrator global [18, 22, 9, 28], um conjunto invariante que contêm informações sobre a dinâmica assintótica de uma dada equação de evolução. A existência de um atrator global nos garante que o fenômeno se aproxima de um padrão no futuro. O sucesso desse tipo de abordagem se deu principalmente pela existência de vários modelos, importantes por suas aplicações, onde foi provada a existência de atratores globais e foram feitas análises sobre sua estrutura, comportamento e propriedades [18, 2, 9, 20, 28].

Podemos notar na literatura que há um grande número de trabalhos sobre a existência de atratores globais para equações definidas em domínios limitados. Porém, o estudo da existência de atratores em domínios não limitados traz novas dificuldades. Uma das dificuldades é a ausência de imersão compacta entre vários espaços de funções e tal compacidade é importante para uma solução ter um bom comportamento assintótico. Várias técnicas têm sido desenvolvidas para contornar a perda de compacidade em problemas envolvendo domínios não limitados. Para equações de reação-difusão semilineares podemos citar [1, 3, 24, 29] e para caso de equações da onda amortecida semilineares temos os trabalhos [13, 14, 15, 25].

Nesse trabalho, seguindo o que foi feito no artigo de Prizzi e Rybakowski [25], analisamos a existência de atratores globais para a seguinte classe de equações da onda amortecida

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt}+\alpha(x)u_t+\beta(x)u-\sum_{ij}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)=f(x,u), & x\in\Omega,\ t\in[0,\infty), \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\in[0,\infty). \end{cases} \tag{E}$$

Aqui, $N\in\mathbb{N}$, Ω é um subconjunto aberto arbitrário de $\mathbb{R}^N$ (limitado ou não), $\varepsilon>0$ é um parâmetro constante, $\alpha,\beta\colon\Omega\to\mathbb{R}$ e $f\colon\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções dadas e $Lu\colon=\sum_{ij}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)$ é um operador diferencial de segunda ordem na forma divergente. Observamos que os autores não assumem hipóteses de regularidade em $\partial\Omega$, β, a_{ij} e $f(\cdot,u)$ e consideram

$f(x,\cdot)$ com crescimento crítico ou subcrítico.

Em [25] os autores assumem que $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ sendo limitada inferiormente por uma constante positiva e que L seja uniformemente elíptico com coeficientes em $L^{\infty}(\Omega)$. Além disso, assumem também que $\beta \in L^p_u(\mathbb{R}^N)$ (o espaço $L^p_u(\mathbb{R}^N)$ é definido na Seção 2.2). Com relação à não linearidade $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, há uma restrição no seu crescimento e uma condição de dissipatividade.

As condições impostas pelos autores em Hipótese 2.5, Hipótese 2.16 e Hipótese 4.3 implicam que as soluções da equação (E) quando considerada como um sistema (u,v), onde $v = u_t$, gera um semifluxo global π_f em $Z = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (ver Teorema 4.12). Além disso, as condições impostas na Hipótese 4.14 (para o caso subcrítico) e na Hipótese 4.15 (para o caso crítico) garantem a existência de um atrator global associado ao semifluxo π_f (ver Teoremas 4.17 e 4.21).

Para mostrar os Teoremas 4.12, 4.17 e 4.21, os autores utilizaram estimativas de truncamento. Este método foi introduzido por Wang em [29] para equações parabólicas definidas em domínios não limitados e foi usado por Fall e You em [13] para estabelecer a existência de atrator global para equações do tipo (E) com hipóteses mais restritas do que as utilizadas por Prizzi e Rybakowski. Observamos que os argumentos utilizados por Feireisl em [14, 15] exigem hipóteses adicionais de regularidade em $f(x,u)$ com relação a todas as variáveis (x,u) e hipóteses de crescimento de $|\partial_u f(x,0)|$ e $|\partial_x f(x,0)|$. Mais ainda, em [14, 15] é tratado o caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ e $L = \Delta$.

Para descrever os resultados obtidos por Prizzi e Rybakowski em [25], este trabalho será organizado como o que segue. No Capítulo 1 introduziremos conceitos e propriedades preliminares importantes que serão utilizados no decorrer do texto, inclusive a proposição que proverá a existência do atrator global ao final do trabalho, ver Proposição1.60. Alguns resultados das Seções 1.5 e 1.6 são demonstrados no Apêndice A.

No Capítulo 2 há o estudo do C_0-semigrupo associado à solução da equação da onda amortecida (E). Nesse capítulo apresentamos a Hipótese 2.5 e a Hipótese 2.16 que permitirão definir o C_0-semigrupo em $Z = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Já no Capítulo 3 apresentamos as condições sobre a não linearidade f necessárias (ver Proposição 3.10) para a existência do semifluxo local π_f gerado pelas soluções de (E).

Finalmente, no Capítulo 4 mostramos como Hipótese 2.5, Hipótese 2.16 e Hipótese 4.3 implicam que π_f é semifluxo global em $Z = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Concluímos o capítulo apresentando a Hipótese 4.14 (para o caso subcrítico) e a Hipótese 4.15 (para o caso crítico) e mostramos que em ambos os casos, π_f possui um atrator global.

Capítulo

1

Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos e resultados básicos estudados para a compreensão do texto.

1.1 Os espaços de Sobolev

Nesta seção vamos apresentar a definição e algumas propriedades dos espaços de Sobolev para subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^N$, com $n \in \mathbb{N}$. As referências para esta seção são os livros [5] e [8].

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Iniciaremos com a definição dos espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e, para tanto, recordemos que $C_c^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tais que possuem suporte, denotado por $\operatorname{supp}\varphi$, compacto.

Definição 1.1. *O* espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ *é o conjunto das funções* $u \in L^p(\Omega)$ *tais que existem funções* $g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega)$ *com a propriedade*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \text{ para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } i \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

Em particular para o caso $p = 2$, definimos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, denotamos $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, para $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, e escrevemos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$|u|_{W^{1,p}(\Omega)} = |u|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}, \ u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Para $1 \leq p < \infty$, a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ é equivalente à norma

$$n(u) = \left(|u|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \ u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, o espaço $H^1(\Omega)$ é equipado com o produto interno

$$\langle u,v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u,v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

onde u, $v \in H^1(\Omega)$. As propriedades mais elementares dos espaços definidos estão no resultado abaixo:

Proposição 1.2. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Se $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo; e $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$. Além disso, $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e se $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, para todo $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, então $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Desse modo, as derivadas parciais usuais coincidem com as derivadas parciais em $W^{1,p}(\Omega)$, o que torna a notação consistente.

A seguir apresentamos uma caracterização simples das funções em $W^{1,p}(\Omega)$. Antes recordamos a seguinte definição:

Definição 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Dizemos que um conjunto aberto ω está* fortemente incluído *em Ω, e denotamos por $\omega \subset\subset \Omega$, se o fecho $\overline{\omega}$ de ω é um subconjunto de Ω e $\overline{\omega}$ é um conjunto compacto.*

Proposição 1.4. *Seja $u \in L^p(\Omega)$, com $1 < p \leq \infty$. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) *existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C |\varphi|_{L^{p'}(\Omega)}, \text{ para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e todo } i \in \{1,2,\ldots,N\},$$

onde $p' := p/(p-1)$.

(iii) *existe uma constante $C \geq 0$ tal que para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e para todo $h \in \mathbb{R}^N$, com $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$, temos que*

$$|\tau_h u - u|_{L^p(\Omega)} \leq C|h|,$$

onde $\tau_h u(x) = u(x+h)$, $x \in \mathbb{R}$.

Observação 1.5. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a constante positiva $C \geq 0$ em (ii) e (iii) na Proposição 1.4 pode ser $C = |\nabla u|_{L^p(\Omega)}$.*

O próximo resultado generaliza a propriedade do produto para derivação em $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposição 1.6 (Diferenciação de produto)**.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e considere funções $u,\ v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \textit{ para todo } i \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. Então $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Definimos também $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ equipado com a norma de $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável. Além disso, é reflexivo se $1 < p < \infty$. O espaço $H_0^1(\Omega)$, equipado com o produto escalar de $H^1(\Omega)$, é um espaço de Hilbert.

Observação 1.7. *Como $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Porém, em geral, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.*

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que $C_c^\infty(\Omega)$ pode ser usado na definição de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Passamos agora à definição dos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, onde $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 2$.

Seja $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, e seja p um número real com $1 \leq p \leq \infty$. Definimos indutivamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ para todo } i \in \{1,2,\ldots,N\} \right\}.$$

Alternativamente, $W^{m,p}(\Omega)$ pode ser caracterizado da seguinte forma: $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u \in L^p(\Omega)$ e para todo α com $|\alpha| \leq m$ existe um $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \text{ para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observação 1.8. *Acima usamos a notação padrão de multi-índice, isto é,* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$*, onde* $\alpha_i \in \mathbb{N}$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *e* $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$*. Além disso,*

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, \text{ para } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a notação de $D^\alpha u = g_\alpha$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, quando equipado com a norma

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}, \ u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Temos que $(W^{m,p}(\Omega), |\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. O espaço $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}, \ u, v \in H^m(\Omega).$$

Observação 1.9. *Impondo condições de regularidade em* Ω *e supondo que* $\Gamma = \partial\Omega$ *seja um conjunto limitado, pode ser mostrado que a norma* $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ *de* $W^{m,p}(\Omega)$ *é equivalente à*

$$n(u) = |u|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}, \ u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Concluimos essa seção apresentando algumas desigualdades importantes envolvendo os espaços de Sobolev.

No que segue dado $1 \le p < N$, definimos $p^* := Np/(N-p)$. O resultado a seguir foi retirado de [8] (ver também [8, Teorema 1.3.1] e [8, Observação 1.3.3]).

Teorema 1.10 (Teorema de Imersão de Sobolev)**.** *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$.

(i) *Suponha que* $1 \le p < N$*. Para todo* $q \in [p, p^*]$*, temos que* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *e existe uma constante* $K_q \in (0, \infty)$ *tal que*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \le K_q |u|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(ii) *Se* $p = N$*, então* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [p, \infty)$ *e existe uma constante* $K_q \in (0, \infty)$ *tal que*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \le K_q |u|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(iii) *Se* $p > N$*, então* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$*, onde* $\alpha = (p-N)/p$*. Além disso, existe* *uma constante $K \in (0,\infty)$ tal que*

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq K|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O resultado a seguir de imersão compacta pode ser encontrado em [5, Teorema 9.16] juntamente com [5, Observação 20].

Teorema 1.11 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja Ω aberto limitado arbitrário de $\mathbb{R}^N$.*

(i) *Se $1 \leq p < N$, para todo $q \in [1,p^*)$, então a inclusão $\iota\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é uma aplicação compacta.*

(ii) *Se $p = N$, então para todo $q \in [p,\infty)$, a inclusão $\iota\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é uma aplicação compacta.*

(iii) *Se $p > N$, então a inclusão $\iota\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ é uma aplicação compacta.*

Concluimos a seção com algumas definições auxiliares. Dados um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ e uma função $v\colon S \to \mathbb{R}$, denotaremos por $\widetilde{v}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a extensão de v definida por

$$\widetilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in S, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus S \end{cases}$$

Além disso, no desenvolvimento do texto usaremos a seguinte notação. Dado $N \in \mathbb{N}$,

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3; \\ \text{um arbitrário } \widetilde{p} \in (0,\infty), & \text{se } N = 2; \\ \infty, & \text{se } N = 1. \end{cases}$$

1.2 Teoria das distribuições

Apresentamos agora uma breve introdução às distribuições. O texto a seguir se baseia em [10].

Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. É claro que $C_c^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido das operações algébricas de funções usuais. Vamos apresentar um conceito de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que a sequência $(\varphi_n)_n$ *converge em $C_c^\infty(\Omega)$ para $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$* se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) existe um conjunto compacto K em Ω tal que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, a sequência $(D^\alpha \varphi_n)_n$ converge uniformemente em K para $D^\alpha \varphi$.

Se $(\varphi_n)_n$ converge para φ no sentido acima, escrevemos $\varphi_n \overset{d}{\to} \varphi$.

O espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência que acabamos de apresentar é representado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Observação 1.12. *Os elementos de $\mathscr{D}(\Omega)$ são chamados* funções teste.

O espaço dual $\mathscr{D}'(\Omega)$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ é chamado de *espaço das distribuições* de Ω. Cada elemento de $\mathscr{D}'(\Omega)$ é uma *distribuição* em Ω. Logo, se $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, temos que $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo com relação à topologia de $\mathscr{D}(\Omega)$, ou seja, para toda sequência $(\varphi_n)_n$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \overset{d}{\to} \varphi$ temos que $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, quando $n \to \infty$, em $\mathbb{R}$.

Apresentamos um exemplo de distribuição. Denote por $C_c^0(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas com suporte compacto. Como no espaço $\mathscr{D}(\Omega)$, temos a seguinte noção de convergência em $C_c^0(\Omega)$. Uma sequência $(\varphi_n)_n$ de funções de $C_c^0(\Omega)$ *converge* para uma função $\varphi \in C_c^0(\Omega)$ se (e somente se):

(i) existe um compacto K em Ω tal que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) φ_n converge uniformemente para φ em K.

O espaço dos funcionais lineares contínuos de $C_c^0(\Omega)$ é denotado por $C'(\Omega)$.

Observação 1.13. *Um elemento de $C'(\Omega)$ é também chamado uma* medida em Ω.

Recordemos que $L^1_{loc}(\Omega)$ é o espaço de funções integráveis em todo subconjunto compacto de Ω. Para cada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ podemos definir uma medida correspondente μ_f em Ω por

$$\mu_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_0^0(\Omega). \tag{1.1}$$

Temos que $\mu_f \in C'(\Omega)$. A correspondência $f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto \mu_f \in C'(\Omega)$ é injetora.

A imagem de $L^1_{loc}(\Omega)$ em $C'(\Omega)$ por meio da correspondência acima é chamada o conjunto das *medidas absolutamente contínuas em* Ω. A função f é chamada a *densidade de* μ_f com relação à medida de Lebesgue.

É usual identificarmos a medida μ_f e sua densidade f. Ou seja, é comum escrever $\mu_f = f$ e usar $\mu_f(\varphi) = f(\varphi)$ para interpretar (1.1). Com essa notação podemos dizer que a medida μ_f é de fato uma função. Além disso, μ_f definindo uma distribuição, dizemos que esta distribuição é a função f.

Exemplo 1.14. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Como temos que $L^p(\Omega)$ está contido em $L^1_{loc}(\Omega)$ por um função injetora contínua, temos que todo elemento de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição em Ω.*

Seja $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$. A *i-ésima derivada de T no sentido de distribuições*, é a distribuição $\partial_i T$ em Ω dada por

$$\partial_i T(\varphi) = -T(\partial_i \varphi), \text{ para } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

onde $\partial_i \varphi = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\varphi$. Mais geralmente, se $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\partial_\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \text{ para } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

1.3 A medida de não-compacidade de Kuratowski

Vamos agora apresentar um conceito muito útil para a caracterização de conjuntos compactos em espaços de Banach. Os conceitos e resultados descritos são como em [11].

Seja X um espaço de Banach e denote por $\mathbb{B}$ a família de todos os subconjuntos limitados de X. Se $B \in \mathbb{B}$ não é relativamente compacto, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que B não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε e, portanto, não é possível cobrir B por um número finito de conjuntos com diâmetro menor do que ε. Com isso é natural apresentar o seguinte conceito:

Definição 1.15. *A função $m \colon \mathbb{B} \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$m(B) = \inf\{\, d > 0 \mid B \textit{ admite uma cobertura finita de abertos com diâmetro menor ou igual a } d\},$$

onde $B \in \mathbb{B}$, é chamada a medida de não-compacidade de Kuratowski.

Observação 1.16. *Em [11] também é apresentado a definição da medida de não-compacidade por bolas. Neste caso, trocamos a cobertura de abertos por uma cobertura de bolas abertas com raio d.*

A Definição 1.15 não é apenas natural, mas possui propriedades importantes. Algumas são listadas a seguir.

Proposição 1.17. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, seja $\mathbb{B}$ a família de todos os subconjuntos limitados de X e seja m a medida de não-compacidade de Kuratowski. Então*

(i) $m(B) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{B}$ *é compacto;*

(ii) $m(\lambda B) = |\lambda| m(B)$ *e* $m(B_1 + B_2) \leq m(B_1) + m(B_2)$*, para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* B_1*,* $B_2 \in \mathbb{B}$*;*

(iii) *se* B_1*,* $B_2 \in \mathbb{B}$ *com* $B_1 \subset B_2$ *então* $m(B_1) \leq m(B_2)$*;*

(iv) $m(B_1 \cup B_2) = \max\{m(B_1), m(B_2)\}$*, para todo* B_1*,* $B_2 \in \mathbb{B}$*;*

(v) $m(\operatorname{co}(B)) = m(B)$*, onde* $\operatorname{co}(B)$ *é a envoltória convexa de* B*.*

Uma demonstração da Proposição 1.17 pode ser encontrada em [11]. Seja agora um exemplo simples e útil cuja demonstração também está em [11].

Exemplo 1.18. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e seja $B(x_0, r)$ a bola aberta de centro em $x_0 \in X$ com raio $r > 0$. Segue que $m(B(x_0, r)) = rm(\overline{B(0, 1)})$. Além disso, $m(B(x_0, r)) = 2r$.*

Concluimos essa seção com o seguinte resultado de compacidade.

Teorema 1.19 (Teorema de Mazur)**.** *Seja X um espaço de Banach e $A \subset X$ um subconjunto compacto. Então $\overline{\operatorname{co}(A)}$ é um subconjunto compacto de X.*

1.4 Teoria de C_0-semigrupos

Nesta seção apresentaremos resultados sobre a teoria geral de C_0-semigrupos. Sugerimos [6] e [17] para os detalhes e demonstrações dos resultados descritos. No que segue X denota um espaço de Banach.

Definição 1.20. *Um* semigrupo *de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ tal que para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é um operador linear limitado, isto é $T(t) \in \mathscr{L}(X)$, tal que*

1. $T(0) = I$*;*
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$*, para todo* s*,* $t \geq 0$*.*

Se $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um semigrupo com $\|T(t) - I_X\|_{\mathscr{L}(X)} \to 0$ quando $t \to 0^+$, dizemos que $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um *semigrupo uniformemente contínuo*. Se $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um semigrupo com $\|Tx - x\|_X \to 0$ quando $t \to 0^+$, para cada $x \in X$, dizemos que $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um C_0-*semigrupo.*

Um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um C_0-*semigrupo de contrações* se para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é uma contração, isto é, $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1$.

O estudo de semigrupos de operadores lineares está diretamente associado ao estudo de problemas de Cauchy lineares da forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

onde $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador linear (em geral não limitado) e $x_0 \in X$. Se para cada $x_0 \in X$ o problema de Cauchy (1.2) possui uma única solução, então as soluções de (1.2) geram um o semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$. O próximo exemplo ilustra o caso em que $A \in \mathscr{L}(X)$.

Exemplo 1.21. *Seja A um operador linear contínuo em X e considere o problema de Cauchy* (1.2). *Neste caso, para cada $x_0 \in X$, existe uma única solução de* (1.2) *e é dada por*

$$t \in [0, \infty) \mapsto e^{tA}x_0 \in X.$$

onde $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

O próximo resultado mostra que todo C_0-semigrupo possui uma limitação exponencial.

Teorema 1.22. *Suponha que $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ seja um C_0-semigrupo. Então existem constantes $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \textit{ para todo } t \geq 0.$$

Estamos interessados em generalizar as ideias contidas no Exemplo 1.21 para o caso em que o operador A não seja limitado. Antes porém, dado um semigrupo de operadores lineares vamos associá-lo a um problema de Cauchy.

Seja $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares. Defina o seguinte conjunto

$$D = \left\{ x \in X \mid \text{ o limite } \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e considere a aplicação definida por $A\colon D \subset X \to X$,

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para } x \in D.$$

Segue que A é um operador linear e seu domínio é D. No que segue denotamos D por $D(A)$. O operador A é chamado *gerador infinitesimal* do C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$.

O próximo resultado traz uma caracterização dos semigrupos uniformemente contínuos por meio de seus geradores infinitesimais.

Teorema 1.23. *Seja $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) *$\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo.*

(ii) *O gerador infinitesimal está definido em todo X.*

(iii) *Existe um $B \in \mathscr{L}(X)$ tal que $T(t) = e^{tB}$ para todo $t \geq 0$.*

Tendo em vista o Teorema 1.23, notamos a importância de estudarmos C_0-semigrupos, seus geradores e suas propriedades. Assim, segue o importante resultado.

Teorema 1.24. *Suponha que $\{T(t) \mid \; t \geq 0\}$ seja um C_0-semigrupo. Então as seguintes propriedades são válidas:*

(i) *para todo $x \in X$, a aplicação $t \in [0,\infty) \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0,\infty)$.*

(ii) *a aplicação $t \in [0,\infty) \mapsto \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$ é semicontínua inferiormente.*

(iii) *Seja A o gerador infinitesimal de $\{T(t) \mid \; t \geq 0\}$. Então o conjunto $D(A)$ é denso em X e A é um operador fechado.*

(iv) *O conjunto $\cap_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em X.*

(v) *Seja $\beta \geq 0$ como no Teorema 1.22 e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) > \beta$. Então λ está no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A e*

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \text{ para todo } x \in X.$$

Observação 1.25. *Nas condições do Teorema 1.24 temos que a aplicação $t \in [0,\infty) \mapsto \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$ é mensurável.*

A seguir apresentamos como a teoria de C_0-semigrupos está relacionada com o problema de Cauchy (1.2):

Proposição 1.26. *Seja X um espaço de Banach e seja $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em X com gerador $A\colon D(A) \subset X \to X$. Então, para todo $z \in D(A)$, existe uma única função $u\colon [0,\infty) \to D(A)$ que é continuamente diferenciável, $u(0) = z$ e*

$$u'(t) = Au(t), \text{ para todo } t \in [0,\infty),$$

onde u é dado por $u(t) = T(t)z$, para todo $t \in [0,\infty)$.

Apresentamos também um resultado de unicidade e outro de perturbação de C_0-semigrupos.

Teorema 1.27. *Sejam $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ e $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ C_0-semigrupos com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Teorema 1.28. *Seja X um espaço de Banach e seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Suponha que $B\colon X \to X$ seja um operador linear limitado de X. Então $A + B\colon D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.*

O próximo resultado caracteriza os operadores lineares que são geradores infinitesimais de um C_0-semigrupo.

Teorema 1.29 (Hille-Yosida)**.** *Suponha que $A\colon D(A) \subset X \to X$ seja um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ tal que, para algum $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que seu conjunto resolvente contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \text{ para todo } \lambda > \omega.$$

Note que as condições (i) e (ii) do Teorema de Hille-Yosida dependem da escolha da norma em X. Veremos agora condições para uma generalização do Teorema 1.29. Antes de enunciar a generalização, apresentamos um resultado auxiliar em sua demonstração.

Lema 1.30. *Suponha $A\colon D(A) \subset X \to X$ seja um operador linear cujo conjunto resolvente contém o intervalo $(0, \infty)$ e que exista uma constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|(\lambda - A)^{-n})\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M\lambda^{-n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } \lambda > 0.$$

Então existe uma norma $|\cdot|_X$ em X tal que

$$\|x\|_X \leq |x|_X \leq M\|x\|_X, \text{ para todo } x \in X$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}x|_X \leq \lambda^{-1}|x|_X, \text{ para todo } x \in X \text{ e todo } \lambda > 0.$$

Teorema 1.31 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida)**.** *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) *A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{\beta t},\ t \geq 0,$$

onde $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) *A é um operador fechado, densamente definido, existe um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto resolvente de A contém o intervalo (β, ∞) e*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M(\lambda - \beta)^{-n},\ \text{para todo } \lambda > \beta \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Dado um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$, seu gráfico é denotado por $\mathscr{G}(A)$.

Definição 1.32. *Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é um operador* fechável *se $\overline{\mathscr{G}(A)}$ é gráfico de um operador linear. Um operador linear $\overline{A}\colon D(\overline{A}) \subset X \to Y$ é chamado* fecho *do operador A se $\overline{\mathscr{G}(A)} = \mathscr{G}(\overline{A})$.*

Pode ser facilmente mostrado que um operador linear A é um fechável se, e somente se, $(0,y) \in \overline{\mathscr{G}(A)}$ implicar que $y = 0$.

Vamos apresentar agora alguns resultados sobre operadores dissipativos. Estes operadores serão importantes mais adiante para o estudo do problema proposto nesse trabalho. Começaremos recordando a definição de operadores dissipativos.

No que segue, o espaço dual de X é denotado por $X^{'}$. Se $x \in X$ e $\phi \in X^{'}$ no que segue utilizaremos a seguinte notação:

$$\langle \phi, x\rangle := \phi(x).$$

Para cada $x \in X$, defina

$$\mathscr{J}(x) = \{\phi \in X' \mid \|\phi\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, \phi\rangle\}.$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que $\mathscr{J}(x) \neq \emptyset$, para todo $f \in X$. Temos que $\mathscr{J}$ é uma função (multívoca) chamada de *aplicação dualidade de X*.

Uma aplicação $J\colon X \to X'$ tal que $J(x) \in \mathscr{J}(x)$ para cada $x \in X$ é chamada uma *seção (dual)* de $\mathscr{J}$.

Definição 1.33. *Um operador linear* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *é chamado* dissipativo com respeito a seção dual J *se*

$$\mathrm{Re}\langle Ax, J(x)\rangle \leq 0, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é chamado *dissipativo* se A for dissipativo em relação a alguma seção dual.

Teorema 1.34 (Lumer-Phillips)**.** *Suponha que* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *seja um operador linear. As seguintes afirmativas são verdadeiras.*

(i) *Se A é o gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações, então A é um operador linear fechado, densamente definido, dissipativo e $R(\lambda I - A) = X$ para algum $\lambda > 0$.*

(ii) *Se A é um operador dissipativo, $D(A)$ é um conjunto denso em X e $R(\lambda_0 I - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações.*

Uma consequência do Teorema de Lumer-Phillips é o seguinte fato que pode ser útil em aplicações. Temos que dado um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$, denotaremos por $A'\colon D(A') \subset X' \to X'$ seu operador adjunto. Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 1.35. *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido. Se os operadores A e A' são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações de X.*

Teorema 1.36. *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo em X. As seguintes afirmativas são válidas.*

(i) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

(ii) *Se A é um operador fechável, então seu fecho é um operador dissipativo.*

(iii) *Se $\overline{D(A)} = X$, então A é um operador fechável.*

Teorema 1.37. *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ dissipativo com $R(I - A) = X$. Suponha que X seja um espaço reflexivo. Então $D(A)$ é denso em X.*

Para o caso em que X é um espaço de Hilbert temos a seguinte caracterização de operadores dissipativos.

Proposição 1.38. *Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Um operador linear $A\colon D(A) \subset X \to X$ é dissipativo em X se, e somente se, $\langle Ax, x\rangle \leq 0$ para todo $x \in D(A)$.*

1.5 Semifluxos globais e atratores globais

Nesta seção introduzimos o conceito de atratores globais para semifluxos globais e apresentamos o resultado da existência. Para detalhes, sugerimos [9], [18] e [7]. Iniciamos com o conceito de semifluxo local.

Nesta seção X é um espaço métrico e sua métrica é denotada por d.

Definição 1.39. *Seja D um subconjunto aberto em $[0,\infty)\times X$. Uma aplicação contínua $\pi\colon D\to X$ é um* semifluxo local em X *se para todo $x\in X$ existe um $\omega_x=\omega_{\pi,x}\in[0,\infty)$ com a seguinte propriedade:*

(i) *$(t,x)\in D$ se, e somente se, $t\in[0,\omega_x)$;*

(ii) *$x\pi 0=x$ para todo $x\in X$;*

(iii) *Para qualquer que seja $(t,x)\in D$ e $(s,x\pi t)\in D$, então $(t+s,x)\in D$ e*

$$x\pi(t+s)=(x\pi t)\pi s,$$

onde escrevemos $x\pi t:=\pi(t,x)$ para $(t,x)\in D$.

Um *semifluxo global* é um semifluxo local com $\omega_x=\infty$ para todo $x\in X$.

Dado um intervalo I em $\mathbb{R}$, uma aplicação $\sigma\colon I\to X$ é chamada uma *solução* (de π) se para quaisquer que sejam $t\in I$ e $s\in[0,\infty)$ tais que $t+s\in I$, então $\sigma(t)\pi s$ está bem definido e

$$\sigma(t)\pi s=\sigma(t+s).$$

Se $I=\mathbb{R}$, então σ é uma *solução global* de π por $x:=\sigma(0)$. Um subconjunto S de X é um conjunto *π-invariante* se, para todo $x\in S$, existe uma solução global σ de π por x com $\sigma(\mathbb{R})\subset S$.

Um subconjunto S de X é um conjunto *positivamente π-invariante* se, para todo $x\in S$, $x\pi t\in S$ para todo $t\in[0,\omega_x)$.

Uma solução global constante é chamada uma solução *estacionária* e o seu valor é um *ponto de equilíbrio de π*.

Definição 1.40. *Seja π um semifluxo local em X e seja N um subconjunto de X. Dizemos que* π não explode em N *se, para qualquer que seja $x\in X$ com $x\pi[0,\omega_x)\subset N$, então $\omega_x=\infty$.*

No que segue vamos assumir que π seja um semifluxo global em X. Para cada $t \geq 0$, denote por $\pi_{(t)}$ a aplicação

$$x \in X \mapsto x\pi t.$$

Seja $x \in X$ e B um subconjunto de X. Definimos os seguintes conjuntos:

(i) Para cada $t \in [0, \infty)$, a *imagem de B sob π*,

$$\pi_{(t)}(B) = \{x\pi t \mid x \in B\}.$$

(ii) A *órbita positiva* de B

$$\gamma^{+}(B) = \bigcup_{t \in [0,\infty)} \pi_{(t)}(B).$$

(iii) Sejam $t, t' \in [0, \infty)$, com $t < t'$. A *órbita parcial* entre t e t' é

$$\gamma^{+}_{[t,t']}(B) = \bigcup_{t \leq s \leq t'} \pi_{(s)}(B).$$

(iv) A *órbita* de $\pi_{(t)}(B)$,

$$\gamma^{+}_{t}(B) = \bigcup_{s \in [0,\infty)} \pi_{(t+s)}(B).$$

Proposição 1.41. *Seja S um subconjunto de X.*

(a) *S é um conjunto π-invariante se, e somente se, $S = \pi_{(t)}(S)$ para todo $t \in [0, \infty)$.*

(b) *S é um conjunto positivamente π-invariante se, e somente se, $\pi_{(t)}(S) \subset S$ para todo $t \in [0, \infty)$.*

Seja $x \in X$ e seja $\sigma \colon \mathbb{R} \to X$ uma solução global de π por x. Definimos *órbita global relativa à solução global σ* por $\gamma_{\sigma}(x) = \{\sigma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, escrevemos $(\gamma_{\sigma})^{-}_{t}(x) = \{\sigma(s) \mid s \leq t\}$.

Seja B um subconjunto de X. O *conjunto ω-limite de B* é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in [0,\infty)} \overline{\gamma^{+}_{t}(B)}.$$

Seja $x \in X$. Se existe uma solução global $\sigma \colon \mathbb{R} \to X$ por x, definimos o *conjunto α-limite de x relativo a σ* por

$$\alpha_{\phi}(x) = \bigcap_{t \in (-\infty,0]} \overline{(\gamma_{\phi})^{-}_{t}(x)}.$$

A proposição a seguir apresenta uma caracterização alternativa e útil dos conjunto ω-limites e α-limites.

Proposição 1.42. *Sejam B um subconjunto de X e $x \in X$. Suponha que exista uma solução global $\sigma\colon \mathbb{R} \to X$ de π por x. As seguintes afirmativas são verdadeiras:*

(i) $\omega(B)$ *e* $\alpha_\phi(x)$ *são subconjuntos fechados de X.*

(ii) $y \in \omega(B)$ *se, e somente se, existem sequências* $(t_n)_n$ *em* $[0,\infty)$ *e* $(x_n)_n$ *em B tais que* $t_n \to \infty$ *e* $d(x_n\pi t_n, y) \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

(iii) $y \in \alpha_\phi(x)$ *se, e somente se, existe uma sequência* $(t_n)_n$ *em* $[0,\infty)$ *tal que* $t_n \to \infty$ *e* $d(\sigma(-t_n), y) \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Definição 1.43. *Dizemos que π é* eventualmente limitado *se para cada subconjunto limitado B de X existe um $t_B \in [0,\infty)$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Dizemos que π é* limitado *se $\gamma^+(B)$ é limitado para qualquer que seja o subconjunto limitado B de X.*

Definição 1.44. *Um subconjunto A de X é um* atrator global *relativo ao semifluxo π se A é um subconjunto compacto, invariante e se para todo conjunto limitado B em X e toda vizinhança aberta U de A, existe um $t_{B,U} \in [0,\infty)$ tal que $x\pi t \in U$ para todo $x \in B$ e todo $t \in [t_{B,U}, \infty)$.*

Observação 1.45. *Observamos que dado um um semifluxo global π, se existe um atrator global relativo ao semifluxo π, então é único.*

Apresentaremos agora uma caracterização importante de atratores globais.

Proposição 1.46. *Suponha que π possua um atrator global $\mathscr{A}$. Então*

$$\mathscr{A} = \{x \in X \mid \textit{existe uma solução global limitada } \sigma_x\colon \mathbb{R} \to X \textit{ tal que } \sigma_x(0) = x\}.$$

Definição 1.47. *Um subconjunto B de X é chamado* u-limitado *se existe um $t_B \in [0,\infty)$ tal que o conjunto $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado.*

É fácil ver que se π é eventualmente limitado, então todo subconjunto limitado de X é u-limitado.

A seguir apresentamos um conceito de compacidade para semifluxos locais. Esta definição é encontrada em [9].

Definição 1.48. *Um π um semifluxo global em X é* assintoticamente compacto *se para qualquer que seja B um subconjunto u-limitado de X, $(x_n)_n$ um sequência em B e (t_n) uma sequência em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, então a sequência $(x_n\pi t_n)_n$ possui uma subsequência convergente.*

Sejam A e B subconjuntos de X. A *semidistância de Hausdorff*, denotada por $\operatorname{dist}_H(A,B)$, é definida por

$$\operatorname{dist}_H(A,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y).$$

Denotaremos por $\operatorname{dist}(A,B)$ a distância usual dos conjuntos, ou seja,

$$d(A,B) = \inf_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y).$$

Dizemos que o conjunto A *atrai o conjunto* B *sob a ação do semifluxo* π se

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_H(\pi_{(t)}(B),A) = 0.$$

Se existir $t_0 \in [0,\infty)$ tal que $\pi_{(t)}(B) \subset A$, para todo $t \geq t_0$, dizemos que o conjunto A *absorve o conjunto* B. Em particular, se A absorve B, então A atrai B. A recíproca não é verdadeira. Porém o seguinte fato é válido:

Proposição 1.49. *Um conjunto A atrai um conjunto B sob a ação do semifluxo π se, e somente se, cada vizinhança aberta de A em X absorve o conjunto B.*

Demonstração. A demonstração é imediata recordando que uma vizinhança aberta de A é um conjunto da forma $\{x \in X \mid d(x,A) < \varepsilon\}$, para algum $\varepsilon > 0$. □

A seguir apresentamos o conceito de suavidade assintotica em semifluxos globais e demonstramos uma equivalência importante (ver Proposição 1.51).

Definição 1.50. *Um semifluxo global π em X* assintoticamente suave *se para cada subconjunto não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante W de X contém um subconjunto compacto não-vazio C que atrai W.*

A seguir mostramos a equivalência entre a compacidade assintótica e a suavidade assintótica. A demonstração é apresentada como em [9, Proposição 1.1.3].

Proposição 1.51. *Um semifluxo π é assintoticamente suave se, e somente se, π é assintoticamente compacto.*

Uma demonstração da Proposição 1.51 é dada no Apêndice A.

Concluimos essa seção enunciando e demonstrando um resultado de existência de atratores globais para semifluxos. Porém ainda precisamos de algumas definições auxiliares.

Definição 1.52. *Um semifluxo π é ponto dissipativo (respectivamente,* limitado dissipativo*, respectivamente* compacto dissipativo*) se existe um subconjunto limitado B de X que atrai pontos (respectivamente subconjuntos limitados, respectivamente subconjuntos compactos) de X.*

Observação 1.53. *Na definição acima podemos trocar* atrai *por* absorve *sem mudar os significados dos conceitos.*

Temos o seguinte resultado de existência de atrator global.

Teorema 1.54. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X. Então π possui um atrator global em X se, e somente se, π é ponto dissipativo, assintoticamente suave e eventualmente limitado.*

A demonstração do Teorema 1.54 pode ser encontra em [8, Teorema 1.1.2]. O Teorema 1.54 é uma consequência dos seguintes lemas cuja demonstrações encontram-se no Apêndice A.

Lema 1.55. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X e suponha que π possua um atrator global $\mathscr{A}$ em X. Então $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos limitados de X.*

Lema 1.56. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X e suponha que π possua um atrator global em X. Então π é ponto dissipativo, assintoticamente suave e eventualmente limitado.*

Lema 1.57. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X e suponha que π seja ponto dissipativo, assintoticamente suave e eventualmente limitado. Então existe um conjunto limitado $\mathscr{O} \subset X$ e para cada conjunto compacto $C \subset X$ existe uma vizinhança aberta $\mathscr{N}_C$ de C tal que $\mathscr{O}$ absorve $\mathscr{N}_C$.*

Lema 1.58. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X e suponha que π seja ponto dissipativo, assintoticamente suave e eventualmente limitado. Então existe um conjunto compacto e invariante $\mathscr{A}$ que atrai conjuntos limitados de X. Além disso, $\mathscr{A}$ é um atrator global do semifluxo π.*

Demonstração do Teorema 1.54. Segue dos Lemas 1.56–1.58. □

Note que, na demonstração do Teorema 1.54 a hipótese de ser ponto dissipativo pode ser substituída por uma condição mais fraca, que para cada $u_0 \in X$ existe um $t_{u_0} \geq 0$ tal que $u_0 \pi t_{u_0} \in B$, sem mudanças no processo de prova do teorema. Logo, temos o seguinte resultado de [9, Corolário 1.1.4] (ver também [25, Proposição 2.2]).

Corolário 1.59. *Seja π um semifluxo global definido num espaço métrico X. Então π possui um atrator global em X se, e somente se, π é assintoticamente suave, eventualmente limitado e para cada subconjunto B de X limitado e para cada $u_0 \in X$, existe um $t_{u_0} \geq 0$ tal que $u_0 \pi t_{u_0} \in B$.*

Apresentamos ainda outro resultado de existência de atratores, o qual será utilizado no final deste trabalho para provar o resultado principal deste trabalho:

Proposição 1.60. *Um semifluxo global π em um espaço métrico X possui um atrator global se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *π é assintoticamente compacto,*

(b) *todo subconjunto limitado de X é u-limitado e*

(c) *existe um conjunto limitado B_0 em X com a propriedade que para todo $x \in X$ existe um $t_x \in [0,\infty)$ tal que $x\pi t_x \in B_0$.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.51 que π é assintoticamente compacto se, e somente se, assintoticamente suave. Notemos que a condição (b) é equivalente a π ser eventualmente limitado. Uma aplicação do Corolário 1.59 completa a demonstração. □

1.6 Problemas semilineares

Os conceitos apresentados a seguir são baseados no livro [8]. Os enunciados dos resultados abaixo são como em [8], porém não assumimos a hipótese de contração dos C_0-semigrupos.

Seja X um espaço de Banach. Uma função $F\colon X \to X$ é *Lipschitziana em subconjuntos limitados de* X se, para cada constante $M > 0$, existe uma constante $L_M \geq 0$ tal que

$$\|F(y) - F(x)\| \leq L_M \|y - x\|, \text{ para todo } x, y \in X \text{ com } \|x\| \leq M \text{ e } \|y\| \leq M.$$

Nesta seção F é sempre uma função Lipschitziana em subconjuntos limitados de X.

Seja $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo e seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ seu gerador infinitesimal. Dado $x \in X$, suponha que exista um $\omega > 0$ e uma função $z \in C([0,\omega], D(A)) \cap C^1([0,\omega], X)$ tal que

$$z'(t) = Az(t) + F(z(t)), \text{ para todo } t \in [0,\omega],$$

e $z(0) = x$. Ou seja, a função z é uma solução do sistema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + F(u(t)), \ t \in [0, \omega] \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.3}$$

Notemos que a função z também é solução da seguinte equação integral

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds, \text{ para } t \in [0, \omega]. \tag{1.4}$$

A equação (1.4) é uma versão *fraca* do problema (1.3). Nesta seção mostraremos um resultado de existência e unicidade de soluções de equações da forma (1.4).

No que segue vamos utilizar o Lema de Gronwall. Recordamos o seu enunciado:

Lema 1.61. [8, Lema de Gronwall] *Sejam $T > 0$, $\psi \in L^1(0,T)$, com $\psi \geq 0$ quase sempre em $(0,T)$. Considere constantes positivas C_1, $C_2 \geq 0$. Seja $\varphi \in L^1(0,T)$, com $\varphi \geq 0$ quase sempre em $(0,T)$, tal que $\psi\varphi \in L^1(0,\omega)$ e*

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \psi(s)\varphi(s)ds, \text{ para quase todo } t \in (0,T).$$

Então

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \psi(s)ds\right), \text{ para quase todo } t \in (0,T).$$

Temos o primeiro resultado de existência de solução para a equação integral (1.4). A demonstração é apresentada no Apêndice A.

Proposição 1.62. *Seja $M > 0$ e seja $x \in X$ tal que $\|x\| \leq M$. Então existe um $\omega_M > 0$ e existe uma única solução $u \in C([0, \omega_M], X)$ de (1.4) em $[0, \omega_M]$.*

Temos ainda um resultado de existência de solução maximal para a equação integral (1.4).

Teorema 1.63. *Com as condições apresentadas nesta seção, existe uma função $\omega\colon X \to (0,\infty]$ com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$ existe uma função $u \in C([0,\omega(x)),X)$ tal que para todo $0 < \omega < \omega(x)$, u é a única solução de (1.4) em $C([0,\omega],X)$. Além disso, temos as seguintes alternativas:*

(i) $\omega(x) = \infty$ *ou*

(ii) $\omega(x) < \infty$ *e* $\lim_{t \to \omega(x)^-} \|u(t)\| = \infty$.

Concluimos com um resultado de continuidade com relação às condições iniciais.

Proposição 1.64. *Com a mesma notação do Teorema 1.63 temos*

(i) $\omega \colon X \to (0,\infty]$ *é semicontínua inferiormente.*

(ii) *Seja* $(x_n)_n$ *uma sequência em* X *e* $x \in X$ *tais que* $x_n \to x$ *quando* $n \to \infty$ *e seja* $\omega < \omega(x)$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sejam* u_n *e* u *as soluções da equação* (1.4) *correspondentes aos valores iniciais* x_n *e* x. *Então* $u_n \to u$ *quando* $n \to \infty$ *em* $C([0,\omega],X)$.

Uma demonstração do Teorema 1.63 e Proposição 1.64 é dada no Apêndice A.

Capítulo

2

A definição do C_0-semigrupo associado à solução da equação da onda amortecida

Nesse capítulo apresentaremos o C_0-semigrupo associado à solução da equação da onda amortecida. Teremos que impor condições (ver Hipótese 2.5 e Hipótese 2.16) ao problema para que o C_0-semigrupo seja definido. Na seção 2.2 descrevemos sua definição e demonstramos diversas propriedades.

Iniciamos com alguns resultados básicos que serão usados no capítulo.

2.1 Resultados preliminares

Iniciamos a seção enunciando um resultado sobre existência de solução de um problema de Cauchy abstrato definido a partir de um C_0-semigrupo.

Teorema 2.1. *Seja Z um espaço de Banach e seja $A\colon D(A) \subset Z \to Z$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \in [0,\infty)\}$. Suponha que uma das afirmativas abaixo esteja satisfeita:*

(i) *$f \in \mathscr{C}([0,\infty),Z)$ tomando valores em $D(A)$ e $Af \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+,X)$ ou*

(ii) *$f \in \mathscr{C}^1([0,\infty),Z)$.*

Seja $u_0 \in D(A)$ e considere o problema de Cauchy abstrato, para $t \in [0,\infty)$:

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{2.1}$$

O problema (2.1) *possui uma única solução $u\colon [0,\infty) \to D(A)$ com $u \in \mathscr{C}^1([0,\infty),Z)$. Além disso*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Uma demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [17, Teorema II.1.3].

Demonstraremos agora o seguinte resultado de análise em espaços de Banach, que será usado na próxima proposição.

Lema 2.2. *Seja X um espaço de Banach. Considere $S\colon [a,b] \to X$ operador linear diferenciável em (a,b) e $\nu\colon X \to Y$ uma aplicação linear limitada. Então $\nu S\colon [a,b] \to Y$ é uma aplicação diferenciável em (a,b) e vale*

$$\frac{d}{dt}(\nu S(t)) = \nu\left(\frac{d}{dt}S(t)\right), \text{ para todo } t \in (a,b).$$

Demonstração. Seja $t_0 \in (a,b)$ fixado arbitrariamente. Temos que

$$S'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}.$$

A linearidade de ν implica que

$$\frac{\nu(S(t_0+h)) - \nu(S(t_0))}{h} = \nu\left(\frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}\right).$$

Como ν é uma aplicação linear limitada e $\frac{d}{dt}S(t)\mid_{t=t_0}$ existe, temos

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\nu(S(t_0+h)) - \nu(S(t_0))}{h}\right) = \nu\left(\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}\right).$$

Portanto, a aplicação $t \in [a,b] \mapsto \nu(S(t)) \in Y$ é diferenciável em (a,b) e $\frac{d}{dt}\nu(S(t))\mid_{t=t_0} = \nu(S'(t_0))$. A demonstração está completa. □

Demonstremos agora um resultado sobre C_0-semigrupos a ser usado no estudo da versão abstrata das equações da onda amortecida.

Proposição 2.3. *Sejam Z e Y espaços de Banach e sejam $\{S_Z(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ e $\{S_Y(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ C_0-semigrupos definidos em Z e Y, respectivamente, com geradores infinitesimais $C_Z\colon D(C_Z) \to Z$ e $C_Y\colon D(C_Y) \to Y$, respectivamente. Seja $\nu\colon Z \to Y$ uma aplicação linear limitada com $\nu(D(C_Z)) \subset D(C_Y)$. Se $\nu(C_Z z) = C_Y(\nu(z))$, para todo $z \in D(C_Z)$, então*

$$\nu(S_Z(t)z) = S_Y(t)(\nu(z)), \text{ para todo } z \in Z \text{ e para todo } t \in [0,\infty). \tag{2.2}$$

Demonstração. Suponha que $z \in D(C_Z)$ e considere o problema de Cauchy linear:

$$w'(t) = C_Y w(t), \quad w(0) = \nu(z). \tag{2.3}$$

A Proposição 1.26 implica que o problema (2.3) possui uma única solução $w(t) = S_Y(t)\nu(z)$ para $t \geq 0$. Defina agora

$$u(t) = \nu(S_Z(t)z) \text{ para } t \geq 0. \tag{2.4}$$

Notemos que, novamente uma aplicação da Proposição 1.26 implica que $t \in [0,\infty) \mapsto S_Z(t)z$ é a única solução do problema de Cauchy linear

$$f'(t) = C_Z f(t), \quad f(0) = z. \tag{2.5}$$

Utilizando o Lema 2.2 para derivar a aplicação u definida em (2.4), obtemos:

$$u'(t) = \nu\left(\frac{d}{dt}S_Z(t)z\right) = \nu(C_Z S_Z(t)z) = C_Y(\nu(S_Z(t)z)) = C_Y u(t), \text{ para } t \geq 0.$$

Além disso, $u(0) = \nu(S_Z(0)z) = \nu z$. Portanto, a unicidade de soluções implica que $u(t) = w(t)$ para todo $t \geq 0$. Ou seja,

$$S_Y(t)\nu z = \nu(S_Z(t)z), \text{ para } t \geq 0.$$

Agora seja $z \in Z$. Segue da densidade de $D(C_Z)$ em Z existe uma sequência $(z_n)_n$ em $D(C_Z)$ tal que $z_n \to z$ quando $n \to \infty$. Temos que a relação (2.2) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Seja $t \geq 0$, a continuidade da aplicação $z \in Z \mapsto S_Y(t)\nu z$ implica que

$$S_Y(t)\nu(z_n) \to S_Y(t)\nu(z), \text{ quando } n \to \infty.$$

Como ν é uma aplicação linear contínua temos que

$$S_Y(t)\nu(z_n) = \nu(S_Y(t)z_n) \to \nu(S_Y(t)z), \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo, $S_Y(t)\nu(z) = \nu(S_Y(t)z)$, concluindo a demonstração do resultado. □

A seguir demonstramos o seguinte resultado sobre perturbação de C_0-semigrupos.

Teorema 2.4. *Seja Z um espaço de Banach e seja $\{S_Z(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em Z com gerador infinitesimal $C_Z\colon D(C_Z) \to Z$. Seja $Q\colon Z \to Z$ um operador linear e limitado em Z. Então o operador linear $C_Z + Q\colon D(C_Z) \to Z$ é gerador infinitesimal de* *um C_0-semigrupo $\{T_Z(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ de operadores lineares em Z. Além disso,*

$$T_Z(t)z = S_Z(t)z + \int_0^t S_Z(t-s)QT_Z(s)z\,ds, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } z \in Z. \tag{2.6}$$

Demonstração. A primeira afirmação é uma consequência imediata do Teorema 1.28. Denote por $\{T_Z(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ o C_0-semigrupo gerado por $C_Z + Q$. Sejam $z \in D(C_Z + Q)$ e $t \in [0,\infty)$. Considere o seguinte problema de Cauchy linear

$$v'(t) = (C_Z + Q)v(t), \quad v(0) = z. \tag{2.7}$$

Segue da Proposição 1.26 que existe uma única solução para (2.7) e esta solução é dada por

$$v(t) = T_Z(t)z, \; t \geq 0.$$

Considere agora o seguinte problema de Cauchy abstrato:

$$u'(t) = C_Z u(t) + QT_Z(t)z, \quad u(0) = z. \tag{2.8}$$

Como $QT_Z(t)z \in \mathscr{C}^1([0,\infty), Z)$, o Teorema 2.1 implica que o problema (2.8) possui uma única solução u em $[0,\infty)$ e é dada por

$$u(t) = S_Z(T)z + \int_0^t S_Z(t-s)QT_Z(s)z\,ds, \quad t \geq 0.$$

Por outro lado, note que $v(0) = z$ e

$$v'(t) = \frac{d}{dt}T_Z(t)z = (C_Z + Q)T_Z(t)z = C_Z T_Z(t)z + QT_Z(t)z = C_Z v(t) + QT_Z(t)z.$$

A unicidade de soluções do problema (2.8), implica que $u(t) = v(t)$ para $t \geq 0$. Ou seja,

$$T_Z(t)z = S_Z(T)z + \int_0^t S_Z(t-s)QT_Z(s)z\,ds, \; t \geq 0$$

o que completa a demonstração. $\square$

2.2 A definição do C_0-semigrupo associado à equação da onda amortecida

Para o resto desse texto, consideramos N um número natural com $N \geq 1$ e Ω denotará um subconjunto aberto arbitrário (limitado ou não) de $\mathbb{R}^N$. Além disso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará o produto interno usual em $L^2(\Omega)$. Vamos assumir as seguintes hipóteses:

Hipótese 2.5. (a) *a_0, $a_1 \in (0,\infty)$ são constantes e $a_{ij}\colon \Omega \to \mathbb{R}$, i, $j \in \{1,\ldots,N\}$, são funções em $L^\infty(\Omega)$ tais que $a_{ij} = a_{ji}$, para i, $j \in \{1,...N\}$ e*

$$a_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ e quase todo } x \in \Omega.$$

Defina $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^N$, $x \in \Omega$.

(b) *$\beta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável com a propriedade*

(i) *para todo $\overline{\varepsilon} \in (0,\infty)$, existe um $C_{\overline{\varepsilon}} \in [0,\infty)$, com*

$$||\beta|^{1/2}u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\varepsilon}|u|^2_{H^1(\Omega)} + C_{\overline{\varepsilon}}|u|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H^1_0(\Omega).$$

$$(ii)\ \ \lambda_1 := \inf\left\{\langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \langle \beta u, u\rangle \mid u \in H^1_0(\Omega), |u|_{L^2(\Omega)} = 1\right\} > 0.$$

Note que segue das condições da Hipótese 2.5(a) que $\langle A\nabla u, \nabla u\rangle$ está definido para $u \in H^1_0(\Omega)$ e que as condições da Hipótese 2.5(i) implicam que $\langle \beta u, u\rangle$ está definido para $u \in H^1_0(\Omega)$. Logo, $\langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \langle \beta u, u\rangle$ está bem definido para $u \in H^1_0(\Omega)$.

Lema 2.6. *Suponha que as condições da Hipótese 2.5 estejam verificadas. Então*

$$a_0 \leq a_{ij} \leq a_1, \text{ para todo } i,\ j \in \{1,\ldots,N\}.$$

Demonstração. Para ver isto, basta tomar $\xi_{i,j} \in \mathbb{R}^N$, i, $j \in \{1,...,N\}$, tal que, dados i, $j \in \{1,...,N\}$, a i-ésima e a j-ésima coordenadas de $\xi_{i,j}$ são 1, enquanto é 0 nas outras entradas e usar Hipótese 2.5(a). □

Antes de prosseguir é interessante saber se existem funções que satisfaçam a condição de Hipótese 2.5(a). Para apresentar uma classe de funções que verificam essas condições, recordemos a definição do espaço das funções localmente uniformes. A definição dada a seguir é como em [1] e também é encontrada em [27].

Seja $1 < p < \infty$. Definimos *o espaço das funções localmente uniforme* $L^p_u(\Omega)$ como o conjunto das funções mensuráveis $\omega\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{y\in\Omega} \int_{B(y)\cap\Omega} |\omega(x)|^p dx < \infty,$$

onde, para $y \in \Omega$, $B(y)$ representa o cubo aberto unitário de $\mathbb{R}^N$ centrado em y. Temos que $L^p_u(\Omega)$ é um espaço normado munido com a norma

$$|\omega|_{L^p_u(\Omega)} := \sup_{y\in\Omega} |\omega|_{L^p(B(y)\cap\Omega)}.$$

Notemos que $L^p_u(\Omega)$ contém $L^\infty(\Omega)$, $L^r(\Omega)$ e $L^r_u(\Omega)$ para todo $r \geq p$.

Observamos ainda que a escolha de cubos unitários para a definição dos espaços $L^p_u(\Omega)$ é técnica. Outras escolhas para os raios fornecem normas equivalentes em $L^p_u(\Omega)$.

O próximo lema mostra condições que garantem que uma dada função β satisfaça a Hipótese 2.5(a).

Proposição 2.7. *Seja $p \in (1,\infty)$ e seja $\beta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\beta} \in L^p_u(\mathbb{R}^N)$.*

(a) *Se $p \geq N/2$, então existe uma constante $C \in (0,\infty)$ tal que*

$$||\beta|^{1/2}u|_{L^2(\Omega)} \leq C|u|_{H^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H^1_0(\Omega).$$

(b) *Se $p > N/2$, então para todo $\overline{\varepsilon} \in (0,\infty)$, existe uma constante $C_{\overline{\varepsilon}} \in (0,\infty)$, tal que*

$$||\beta|^{1/2}u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\varepsilon}|u|^2_{H^1(\Omega)} + C_{\overline{\varepsilon}}|u|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H^1_0(\Omega).$$

Para a demonstração desse lema, usaremos dois resultados clássicos enunciados a seguir.

Lema 2.8 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam p e q são números reais positivos tais que $1/p + 1/q = 1$. Para todo par de números reais $a > 0$ e $b > 0$ vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 2.9 (Desigualdade de Interpolação em L^p)**.** *Seja $B \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e seja $f \in L^p(B) \cap L^q(B)$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então para todo r com $p \leq r \leq q$, temos que $f \in L^r(B)$*

e vale a seguinte desigualdade de interpolação: dado $\theta \in [0,1]$, temos que

$$|f|_{L^r(B)} \leq |f|^{\theta}_{L^p(B)} |f|^{1-\theta}_{L^q(B)}, \ \ \textit{onde} \ \ \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Com isso, voltamos à demonstração.

Demonstração da Proposição 2.7. Seja $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a família enumerável de cubos centrados nos pontos de coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^N$ e com lados de comprimento 1 paralelos aos eixos coordenados. Notemos que $\mathbb{R}^N = \cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{B_j}$ e que $\overline{B_i}\cap\overline{B_j}$ é um conjunto de medida nula para quaisquer que sejam i, $j \in \mathbb{N}$ com $i \neq j$.

Dado $p \in (1,\infty)$, defina $p' = p/(p-1)$. Seja B o cubo de centro na origem de $\mathbb{R}^N$ e lado 1.

Suponha que $p \geq N/2$. Afirmamos que existe uma constante $M = M(p,N) > 0$ tal que

$$|u|_{L^{2p'}(B)} \leq M|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Se $N \geq 3$, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ temos que

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{2}{N} = \frac{N-2}{N}$$

e, assim, $p' \leq N/(N-2)$. Sendo $2^* = 2N/(N-2)$, segue que $2p' \leq 2^*$. O Teorema 1.10 implica que existe uma constante $\widetilde{M} \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^{2^*}(B)} \leq \widetilde{M}|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Como B é um conjunto de medida finita, então $L^{2^*}(B) \subset L^{2p'}(B)$ e segue que existe uma constante $M = M(p,3) \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^{2p'}(B)} \leq M|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Se $N = 2$ podemos tomar $p^* = 2p'$ no Teorema 1.10 e, portanto, existe uma constante $M = M(p,2) \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^{2p'}(B)} \leq M|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Finalmente, se $N = 1$, segue do Teorema 1.10 que existe uma constante $\overline{M} \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^{\infty}(B)} \leq \overline{M}|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Como B é um conjunto de medida finita, $L^\infty(B) \subset L^{2p'}(B)$. Segue que existe uma constante $M = M(p,1) \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^{2p'}(B)} \leq M|u|_{H^1(B)}, \text{ para todo } u \in H^1(B).$$

Logo, a afirmativa está demonstrada.

Seja $B(y)$ o cubo de lado 1 centrado em $y \in \mathbb{R}^N$. Como $B(y)$ é a imagem de B pela translação, segue que

$$|u|_{L^{2p'}(B(y))} \leq M|u|_{H^1(B(y))}, \text{ para todo } u \in H^1(B) \text{ e para todo } y \in \mathbb{R}^N.$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\beta(x)u^2(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{\beta}(x)\widetilde{u}^2(x)|dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_j} |\widetilde{\beta}(x)\widetilde{u}^2(x)|dx \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |\widetilde{\beta}(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2p'} dx \right)^{1/p'} \\
&\leq |\widetilde{\beta}|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2p'} dx \right)^{1/p'} \\
&\leq |\widetilde{\beta}|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)} M^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} |\widetilde{u}|_{B_j}|^2_{H^1(B_j)} = |\widetilde{\beta}|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)} M^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_j} (|\nabla\widetilde{u}(x)|^2 + |\widetilde{u}(x)|^2)dx \\
&= M^2 |\widetilde{\beta}|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)} |\widetilde{u}|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = M^2 |\widetilde{\beta}|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)} |u|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Defina $C := M|\widetilde{\beta}|^{1/2}_{L^p_u(\mathbb{R}^N)}$. A parte (a) do lema está demonstrada.

Suponha agora que $p > N/2$. Temos que existe um $q = q(p,N) \in (0,\infty)$ tal que $2p' < q < 2^*$. De fato, se $N \geq 3$, temos que $2p' < 2^*$ e então existe um $q \in (0,\infty)$ tal que $2p' < q < 2^*$. Se $N = 2$, seja $r > 0$ com $2p' < r$ e defina $2^* = r$. Novamente, então existe um $q \in (0,\infty)$ tal que $2p' < q < 2^*$. Finalmente, se $N = 1$ temos que $2^* = \infty$. Logo, basta tomar um $q \in (0,\infty)$ tal que $2p' < q < \infty$.

Procedendo como anteriormente, temos que existe uma constante $M' = M'(p,N) \geq 0$ tal que

$$|u|_{L^q(B_j)} \leq M'|u|_{H^1(B_j)}, \text{ para todo } u \in H^1(B_j).$$

Notemos que a constante M' independe de $j \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que para todo $\widetilde{\varepsilon} \in (0,\infty)$, existe uma constante $C_{\widetilde{\varepsilon}} \in [0,\infty)$ tal que, para todo

$j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2p'} dx\right)^{1/2p'} &\leq \overline{\varepsilon}\left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{q} dx\right)^{1/q} + C_{\overline{\varepsilon}}\left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2} dx\right)^{1/2} \\ &\leq \overline{\varepsilon}M'|\widetilde{u}|_{B_j}|^2_{H^1(B_j)} + C_{\overline{\varepsilon}}|\widetilde{u}|_{B_j}|^2_{L^2(B_j)}, \text{ para todo } u \in H^1_0(\Omega).\end{aligned}$$

De fato, seja $u \in H^1_0(\Omega)$. Sendo $p > 1$, então $p' > 1$. Assim temos que $2 < 2p' < q$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Defina

$$\theta = \frac{q-2p'}{p'(q-2)}.$$

Segue que $\theta \in [0,1]$ e

$$\frac{1}{2p'} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Aplicando o Lema 2.9 com $f := \widetilde{u}|_{B_j}$ obtemos

$$|f|_{L^{2p'}(B_j)} \leq |f|^{1-\theta}_{L^q(B_j)}|f|^{\theta}_{L^2(B_j)}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Seja $\widetilde{\varepsilon} > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}|f|_{L^{2p'}(B_j)} \leq |f|^{1-\theta}_{L^q(B_j)}|f|^{\theta}_{L^2(B_j)} &= \frac{(\widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)})^{1-\theta}}{\widetilde{\varepsilon}^{1-\theta}}|f|^{\theta}_{L^2(B_j)} \\ &= (\widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)})^{1-\theta}(\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}|f|_{L^2(B_j)})^{\theta}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como

$$\frac{1}{1/\theta} + \frac{1}{1/(1-\theta)} = 1,$$

podemos usar a Desigualdade de Young (ver Lema 2.8) em (2.9) com $a = (\widetilde{\varepsilon}|f|_q)^{1-\theta}$ e $b = (\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}|f|_2)^{\theta}$ e segue que

$$\begin{aligned}|f|_{L^2p'(B_j)} &\leq \frac{[(\widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)})^{1-\theta}]^{1/1-\theta}}{1/1-\theta} + \frac{[(\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}|f|_{L^2(B_j)})^{\theta}]^{1/\theta}}{1/\theta} \\ &\leq (1-\theta)\widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)} + \theta\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}|f|_{L^2(B_j)} \leq \widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)} + \theta\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}|f|_{L^2(B_j)} \\ &\leq \widetilde{\varepsilon}|f|_{L^q(B_j)} + C_{\widetilde{\varepsilon}}|f|_{L^2(B_j)} \leq \widetilde{\varepsilon}M'|f|_{H^1(B_j)} + C_{\widetilde{\varepsilon}}|f|_{L^2(B_j)},\end{aligned}$$

onde $C_{\widetilde{\varepsilon}} = \theta\widetilde{\varepsilon}^{\theta-1/\theta}$. Portanto, a afirmativa está demonstrada.

Dado $\overline{\varepsilon} \in (0,\infty)$, defina $\widetilde{\varepsilon} = (M')^{-1}(\overline{\varepsilon}/(2|\beta|_{L^p_u(\mathbb{R}^N)}))^{1/2}$. Logo, para todo $u \in H^1_0(\Omega)$ e para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2p'} dx\right)^{1/p'} \leq 2(\widetilde{\varepsilon}M')^2 \int_{B_j} (|\nabla \widetilde{u}(x)|^2 + |\widetilde{u}(x)|^2) dx + 2C_{\widetilde{\varepsilon}}^2 \int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^2 dx$$

e finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\beta(x)u^2(x)| dx &\leq |\widetilde{\beta}|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^{2p'} dx\right)^{1/p'} \\
&\leq |\widetilde{\beta}|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(2(\widetilde{\varepsilon}M')^2 \int_{B_j} (|\nabla \widetilde{u}(x)|^2 + |\widetilde{u}(x)|^2) dx + 2C_{\widetilde{\varepsilon}}^2 \int_{B_j} |\widetilde{u}(x)|^2 dx\right) \\
&= |\beta|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} 2(\widetilde{\varepsilon}M')^2 |u|_{H^1(\Omega)}^2 + |\beta|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} 2C_{\widetilde{\varepsilon}}^2 |u|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \overline{\varepsilon}|u|_{H^1(\Omega)}^2 + |\beta|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} 2C_{\widetilde{\varepsilon}}^2 |u|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Notemos que a demonstração está completa ao definirmos $C_{\overline{\varepsilon}} := |\beta|_{L_u^p(\mathbb{R}^N)} 2C_{\widetilde{\varepsilon}}^2$. □

Iniciamos agora a definição do C_0-semigrupo associado à solução da equação da onda amortecida. As condições da Hipótese 2.5(a) implicam que

$$\sum_{i,j=1}^N \partial_j(a_{ij}\partial_i u) \in \mathscr{D}'(\Omega), \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo temos bem definido operador $L\colon H_0^1(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N \partial_j(a_{ij}\partial_i u), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

A definição de derivada no sentido de distribuições implica que

$$(Lu - \beta u)(v) = -\langle A\nabla u, \nabla v\rangle - \langle \beta u, v\rangle, \ u \in H_0^1(\Omega), v \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{2.10}$$

A densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e a densidade de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ implicam que

$$\langle (Lu - \beta u), v\rangle = -\langle A\nabla u, \nabla v\rangle - \langle \beta u, v\rangle \tag{2.11}$$

para todo u, $v \in H_0^1(\Omega)$ com $Lu - \beta u \in L^2(\Omega)$.

Vamos introduzir em $H_0^1(\Omega)$ um novo produto interno. O próximo lema nos auxiliará em sua definição.

Lema 2.10. *Assuma as condições da Hipótese 2.5 e seja $\kappa \in [0, \lambda_1)$ arbitrário. Sejam $\overline{\varepsilon} \in$*

$(0,a_0)$ *e* $\rho\in(0,1)$ *tais que* $c:=\min\{\rho(a_0-\overline{\varepsilon}),(1-\rho)(\lambda_1-\kappa)-\rho(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa)\}>0$ *e defina* $C:=\max\{a_1+\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}\}$. *Para todo* $u\in H_0^1(\Omega)$,

$$c(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}+|u|^2_{L^2(\Omega)})\leq\langle A\nabla u,\nabla u\rangle+\langle\beta u,u\rangle-\kappa\langle u,u\rangle\leq C(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}+|u|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Antes de demonstrar o lema acima, mostremos que existe uma constante c nas condições deste lema. De fato, seja $\kappa\in[0,\lambda_1)$ e seja $\overline{\varepsilon}\in(0,a_0)$. Como $\lambda_1-\kappa>0$ e $\kappa\geq 0$, temos

$$0<\frac{\lambda_1-\kappa}{(\lambda_1-\kappa)+(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa)}<1.$$

Seja $\rho\in\mathbb{R}$ tal que

$$0<\rho<\frac{\lambda_1-\kappa}{(\lambda_1-\kappa)+(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa)}<1.$$

Segue que $\rho\in(0,1)$ e

$$\left(\frac{1}{\rho}-1\right)(\lambda_1-\kappa)>(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa).$$

Como $a_0-\overline{\varepsilon}>0$ e $(1-\rho)(\lambda_1-\kappa)-\rho(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa)>0$ temos que $c>0$.

Demonstração do Lema 2.10. A definição de λ_1 implica que para todo $u\in H_0^1$ temos

$$\lambda_1|u|^2_{L^2(\Omega)}\leq\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_i u\partial_j u+\beta|u|^2\right]dx$$

e obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_i u\partial_j u+(\beta-\kappa)|u|^2)dx&=\rho\int_\Omega(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_i u\partial_j u+(\beta-\kappa)|u|^2)dx\\&+(1-\rho)\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_i u\partial_j u+(\beta-\kappa)|u|^2\right]dx\\&\geq\rho a_0|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}+\rho\int_\Omega(\beta-\kappa)|u|^2dx+(1-\rho)\lambda_1|u|^2_{L^2(\Omega)}-(1-\rho)\int_\Omega\kappa|u|^2dx\\&=\rho a_0|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}+(1-\rho)(\lambda_1-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)}+\rho\int_\Omega(\beta-\kappa)|u|^2dx\\&=\rho a_0|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}+(1-\rho)(\lambda_1-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)}+\rho\int_\Omega\beta|u|^2-\rho\int_\Omega\kappa|u|^2dx\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.7(b) na desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_i u \partial_j u + (\beta-\kappa)|u|^2)dx &\geq \rho a_0 |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\rho)(\lambda_1-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- \rho(\overline{\varepsilon}|u|^2_{H^1(\Omega)} + C_{\overline{\varepsilon}}|u|^2_{L^2(\Omega)}) - \rho\kappa|u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \rho a_0 |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\rho)(\lambda_1-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)} - \rho[\overline{\varepsilon}(|u|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+ C_{\overline{\varepsilon}}|u|^2_{L^2(\Omega)}) - \rho\kappa|u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \rho(a_0-\overline{\varepsilon})|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\rho)(\lambda_1-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)} - \rho(\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}+\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq c(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_i u \partial_j u + (\beta-\kappa)|u|^2)dx &\leq \int_\Omega a_1|\nabla u|^2 dx + \overline{\varepsilon}|u|^2_{H^1(\Omega)} + C_{\overline{\varepsilon}}|u|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \kappa|u|^2 dx \\
&= (a_1+\overline{\varepsilon})|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + (\overline{\varepsilon}+C_{\overline{\varepsilon}}-\kappa)|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. □

No que segue vamos assumir as condições da Hipótese 2.5. Seja $\varepsilon \in (0,\infty)$ arbitrário e defina

$$\langle u,v\rangle_1 = \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u, v\rangle, \text{ para } u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 2.11. *Para todos $u,v \in H_0^1(\Omega)$, $\langle u,v\rangle_1$ define um número real. Além disso, a aplicação $(u,v) \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \mapsto \langle u,v\rangle_1 \in \mathbb{R}$ define um produto escalar em $H_0^1(\Omega)$ e a norma definida por esse produto escalar é equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Mostremos que para todo u, $v \in H_0^1(\Omega)$, a expressão $1/\varepsilon\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + 1/\varepsilon\langle \beta u, v\rangle$ está bem definida. As condições da Hipótese 2.5 implicam que

$$\langle \beta u, u\rangle = \int_\Omega \beta(x)u^2(x)dx < \infty, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, para u, $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \beta u, v\rangle \leq |\langle \beta u, v\rangle| = \left|\int_\Omega \beta(x)u(x)v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega ||\beta(x)|^{1/2}u(x)|||\beta(x)|^{1/2}v(x)|dx \\
&\leq \left[\int_\Omega \beta(x)u^2(x)dx\right]^{1/2}\left[\int_\Omega \beta(x)v^2(x)dx\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

e, portanto $\langle \beta u, v\rangle$ está bem definido. Por outro lado, seguem das condições da Hipótese 2.5 que

$$\langle A\nabla u, \nabla u\rangle \leq \int_\Omega a_1 |\nabla u(x)|^2 dx \leq a_1 |u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)..$$

Logo, para u, $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle A\nabla u, \nabla v\rangle &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x) dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{a_{ij}(x)}{4}(\partial_i u(x) + \partial_j v(x))^2 dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{a_{ij}(x)}{4}(\partial_i u(x) - \partial_j v(x))^2 dx \\
&= \frac{1}{4}(\langle A\nabla(u+v), \nabla(u+v)\rangle - \langle A\nabla(u-v), \nabla(u-v)\rangle)
\end{aligned}$$

e, novamente, temos que $\langle A\nabla u, \nabla v\rangle$ está bem definido. Afirmamos que a aplicação

$$\langle u, v\rangle_1 = \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u, v\rangle, \text{ para } u, v \in H_0^1(\Omega),$$

é um produto interno em $H_0^1(\Omega)$. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, segue do Lema 2.10, com $\kappa = 0$, que

$$c|u|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \langle u, u\rangle_1 = \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u, u\rangle \leq C|u|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Portanto, $\langle u, u\rangle_1 \geq 0$ e $\langle u, u\rangle_1 = 0$ se, e somente, se $u = 0$.

É simples mostrar que $\langle \lambda u + v, w\rangle_1 = \lambda\langle u, v\rangle_1 + \langle u, w\rangle_1$ e que $\langle u, v\rangle_1 = \langle v, u\rangle_1$ para todo u, $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, o que conclui a demonstração da afirmação. Notemos que a desigualdade (2.12) implica que a norma definida por $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega)$. □

A norma em $H_0^1(\Omega)$ proveniente do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ será denotada por $|\cdot|_1$.

Observação 2.12. *$\mathscr{D}(\Omega)$ é um conjunto denso em $H_0^1(\Omega)$ munido da norma $|\cdot|_1$.*

O lema a seguir relaciona os funcionais lineares de $H_0^1(\Omega)$ obtidos pelas normas equivalentes $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ e $|\cdot|_1$ de $H_0^1(\Omega)$.

Lema 2.13. *Suponha a notação introduzida no Lema 2.11. Temos que $f \in H^{-1}(\Omega)$ se, e somente se, $f \in (H_0^1(\Omega), |\cdot|_1)'$. Além disso,*

$$\frac{1}{c}|f|_1 \leq |f| \leq \frac{C}{c}|f|_1, \textit{ para todo } f \in H^{-1}(\Omega),$$

onde $|f| = \sup\{|f(x)| \mid u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } |u| \leq 1\}$ e $|f|_1 = \sup\{|f(x)| \mid u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } |u|_1 \leq 1\}$.

Demonstração. A demonstração é uma consequência imediata da equivalência entre as normas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Lema 2.14. *Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, a distribuição*

$$-(1/\varepsilon)Lu + (1/\varepsilon)\beta u \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

pode ser unicamente estendida a um funcional linear contínuo $f_u\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. O operador $\Lambda\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ dado por

$$\Lambda(u) = f_u, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e considere a distribuição $(1/\varepsilon)Lu + (1/\varepsilon)\beta u =: T_u$. Temos que

$$T_u(v) = \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u, v\rangle = \langle u, v\rangle_1, \text{ para } v \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{2.13}$$

Logo,

$$|T_u(v)| \leq |u|_1|v|_1 \leq C^2|u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} \text{ para } u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Segue que $T_u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado. Como $\mathscr{D}(\Omega)$ é um subespaço vetorial de $H_0^1(\Omega)$ o Teorema de Hahn-Banach implica que existe um funcional linear limitado f_u em $H^{-1}(\Omega)$ tal que f_u estende T_u. Defina $\Lambda\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ por $\Lambda(u) = f_u$ para $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, dado $u \in H_0^1(\Omega)$, segue do Lema 2.13 que $f_u \in (H_0^1(\Omega), |\cdot|_1)'$. Uma aplicação do Teorema da Representação de Riesz e equação (2.13) implicam que

$$f_u(v) = \langle u, v\rangle_1, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.14}$$

e $|f_u| = |u|_1$. Disso segue que Λ é linear e injetora. Seja $f \in H^{-1}(\Omega)$, segue do Lema 2.13 que $f \in (H_0^1(\Omega), |\cdot|_1)'$. Portanto, existe um $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$f(v) = \langle \widetilde{u}, v\rangle_1, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $f_{\widetilde{u}} = f$. $\square$

Com a notação introduzida no Lema 2.14 temos que $\sup\{|\Lambda(u)| \mid u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } |u|_1 \leq 1\} = |u|_1$.

Lema 2.15. *A aplicação*

$$(f,g) \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \mapsto \langle f,g\rangle_{-1} := \langle \Lambda^{-1}(f), \Lambda^{-1}(g)\rangle_1$$

define um produto interno em $H^{-1}(\Omega)$. A norma definida por esse produto interno é equivalente à norma usual em $H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração. Seja Λ como no Lema 2.14. Como Λ é um isomorfismo, dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, sabemos que existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Lambda^{-1}(f) = u$. Assim, as propriedades de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}$ são herdadas de $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e isso implica que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}$ define um produto interno em $H^{-1}(\Omega)$.

Seja $f \in H^{-1}(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Lambda^{-1}(f) = u$. Temos que

$$|f|_{-1}^2 = \langle f,f\rangle_{-1} = \langle u,u\rangle_1 = |u|_1^2. \tag{2.15}$$

Por outro lado, segue do Lema 2.13 que

$$\frac{1}{c}|f|_1 \leq |f| \leq \frac{C}{c}|f|_1 \tag{2.16}$$

Como $f(v) = \langle u,v\rangle_1$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$|f|_1 = |u|_1 \tag{2.17}$$

Logo, (2.15), (2.16) e (2.17) implicam que

$$\frac{1}{c}|f|_1 \leq |f| \leq \frac{C}{c}|f|_1,$$

e o lema está demonstrado. □

No que segue, considere também as seguintes hipóteses adicionais:

Hipótese 2.16. (a) $\alpha_0, \alpha_1 \in [0,\infty)$.

(b) $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável com* $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1$ *para quase todo* x *em* Ω.

(c) $Z := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *munido da norma* $|\cdot|_Z$ *dada por*

$$|z|_Z^2 = |\nabla z_1|_{L^2(\Omega)}^2 + |z_1|_{L^2(\Omega)}^2 + |z_2|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ para } z = (z_1,z_2) \in Z.$$

(d) $\varepsilon \in (0,\infty)$.

(e) *$D(B) = D(B_{\alpha,\beta,\varepsilon})$ é o conjunto de pontos $z = (z_1, z_2) \in Z$ tais que $z_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $Lz_1 - \beta z_1$ (no sentido de distribuições) está em $L^2(\Omega)$.*

(f) *$B = B_{\alpha,\beta,\varepsilon} \colon D(B) \to Z$ é o operador linear dado por*

$$B(z_1, z_2) = (z_2, -(1/\varepsilon)\alpha z_2 + (1/\varepsilon)(Lz_1 - \beta z_1), \text{ para } (z_1, z_2) \in D(B).$$

Proposição 2.17. *Assuma as condições da Hipótese 2.5 e da Hipótese 2.16. O operador B é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t) = T_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t)$, $t \in [0, \infty)$, em Z. Se $\alpha_0 > 0$, então existem constantes $M = M(\alpha_0, \alpha_1, \varepsilon, \lambda_1) > 0$ e $\mu = \mu(\alpha_0, \alpha_1, \varepsilon, \lambda_1) > 0$ tais que*

$$|T(t)|_Z \leq Me^{-\mu t}|z|_Z, \; z \in Z \text{ e } t \in [0, \infty). \tag{2.18}$$

Demonstração. Considere em Z o produto interno dado por

$$\langle\langle (u_1, u_2), (w_1, w_2) \rangle\rangle = \langle u_1, w_1 \rangle_1 + \langle u_2, w_2 \rangle_{L^2(\Omega)}, \; (u_1, u_2), (w_1, w_2) \in Z. \tag{2.19}$$

e denote por $\|\cdot\|$ a norma em Z proveniente desse produto interno. Note que a norma $\|\cdot\|$ é equivalente à norma $|\cdot|_Z$. De fato, defina $k_1 = \min\{1, c/\varepsilon\}$ e $k_2 = \max\{1, C/\varepsilon\}$, onde as constantes c e C são como no Lema 2.10. Segue do Lema 2.10 com $\kappa = 0$ que

$$\begin{aligned}
k_1|(u_1, u_2)|_Z^2 &= k_1(|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_2|^2_{L^2(\Omega)}) \leq (c/\varepsilon)|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_2|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \langle u_1, u_1 \rangle_1 + \langle u_2, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = \|(u_1, u_2)\|^2 \leq (C/\varepsilon)|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_2|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq k_2(|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u_2|^2_{L^2(\Omega)}) = k_2|(u_1, u_2)|_Z^2.
\end{aligned}$$

Logo, as normas são equivalentes. Portanto, $(Z, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ é um espaço de Hilbert.

Afirmamos que B é um operador dissipativo. Seja $(z_1, z_2) \in D(B)$. Usando a expressão (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle B(z_1, z_2), (z_1, z_2) \rangle\rangle &= \langle z_2, z_1 \rangle_1 + \langle -(1/\varepsilon)\alpha z_2 + (1/\varepsilon)(Lz_1 - \beta z_1), z_2 \rangle \\
&= (1/\varepsilon)\langle A\nabla z_2, \nabla z_1 \rangle + (1/\varepsilon)\langle \beta z_2, z_1 \rangle - (1/\varepsilon)\langle \alpha z_2, z_2 \rangle \\
&- \; (1/\varepsilon)\langle A\nabla z_1, \nabla z_2 \rangle - (1/\varepsilon)\langle \beta z_1, z_2 \rangle \\
&= -(1/\varepsilon)\langle \alpha z_2, z_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, Proposição 1.38 implica a afirmativa.

Mostremos agora que para todo $\lambda > 0$ e para todo $(f,g) \in Z$, existe um $(z_1,z_2) \in D(B)$ com

$$(z_1,z_2) - \lambda B(z_1,z_2) = (f,g). \tag{2.20}$$

Ou seja, devemos mostrar que para todo $\lambda > 0$ vale $R(I-\lambda B) = Z$. Notemos que a igualdade (2.20) é equivalente a mostrar que para todo $\lambda > 0$ e para todo $(f,g) \in Z$ existe um $(z_1,z_2) \in D(B)$ tal que

$$z_2 = \frac{1}{\lambda}(z_1 - f) \tag{2.21}$$

e

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon}\alpha\right) z_1 - \frac{\lambda}{\varepsilon}(Lz_1 + \beta z_1) = g + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon}\alpha\right) f \tag{2.22}$$

Mostremos que existe um $z_1 \in H_0^1$ tal que a igualdade (2.22) é verificada. Considere a forma bilinear definida por

$$b(u,v) = \frac{\lambda}{\varepsilon}(\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \langle \beta u, v\rangle) + \frac{1}{\lambda}\langle u,v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \alpha u, v\rangle, \text{ para } u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Mostremos que a forma bilinear b é contínua e coersiva. De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
|b(u,v)| &\leq \frac{\lambda}{\varepsilon}\,|\langle A\nabla u, \nabla v\rangle + \langle \beta u, v\rangle| + \frac{1}{\lambda}\,|\langle u,v\rangle| + \frac{1}{\varepsilon}\,|\langle \alpha u, v\rangle| \\
&\leq \lambda |\langle u,v\rangle_1| + \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\right) |\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq \lambda |u|_{H_0^1(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\right) |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \lambda |u|_{H_0^1(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\right) |u|_{H_0^1(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq K |u|_{H_0^1(\Omega)} |v|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $K := \max\left[\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\right), \lambda\right]$. Logo, b é contínua. Para mostrar a coersividade de b, notemos que

$$\begin{aligned}
|b(u,u)| &= \left|\frac{\lambda}{\varepsilon}(\langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \langle \beta u, u\rangle) + \frac{1}{\lambda}\langle u,u\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \alpha u, u\rangle\right| \\
&\geq \frac{\lambda\lambda_1}{\varepsilon} |u|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda}\right) |u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \delta |u|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}\lambda_1\lambda$. Segue do Teorema de Lax-Milgram [8, Teorema 1.1.4] que para todo $h \in$

$L^2(\Omega)$ existe um $z \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$b(z,v) = \int_\Omega h(x)v(x)dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.23}$$

Portanto, $-(1/\varepsilon)\lambda Lz + (1/\varepsilon)\lambda\beta z + (1/\lambda)z + (1/\varepsilon)\alpha z = h$ no sentido de distribuições. Assim,

$$h - \frac{1}{\lambda}z - \frac{1}{\varepsilon}\alpha z \in L^2(\Omega)$$

e, portanto, temos que $-(1/\varepsilon)\lambda Lz + (1/\varepsilon)\lambda\beta z \in L^2(\Omega)$ no sentido de distribuições. Agora considere

$$h = g + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon}\alpha\right) f.$$

Utilizando igualdade (2.23) encontramos um $z_1 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo (2.22) tal que $Lz_1 - \beta z_1 \in L^2(\Omega)$ no sentido de distribuições.

Uma vez obtido z_1, é fácil ver que existe um $z_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que equação (2.21) é satisfeita. Em particular, $R(I-B) = X$ e segue do Teorema 1.37 que $D(B)$ é denso em Z. Portanto, pelo Teorema 1.34, temos que B gera um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ em Z.

Suponha agora que $\alpha_0 > 0$ e escolha $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < 2\mu \leq \min\left(1, \frac{\alpha_0}{2\varepsilon}, \frac{\lambda_1}{(\varepsilon + \alpha_1)}\right). \tag{2.24}$$

Afirmamos que

$$\|T(t)(u_1,u_2)\| \leq 2e^{-\mu t}\|(u_1,u_2)\|, \text{ para todo } t \in [0,\infty) \text{ e } (u_1,u_2) \in Z. \tag{2.25}$$

De fato, consideremos o caso em que $(u_1,u_2) \in D(B)$ e defina

$$(z_1(t), z_2(t)) := T(t)(u_1,u_2), \ t \in [0,\infty).$$

A Proposição 1.26 implica que a aplicação $t \in [0,\infty) \mapsto z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \in Z$ é diferenciável, $z(t) \in D(B)$ e $z'(t) = Bz(t)$, para todo $t \in [0,\infty)$. Para $t \in [0,\infty)$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} w(t) = {} & 4\mu\langle z_1(t), z_2(t)\rangle + \langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2\frac{1}{\varepsilon}\mu\langle \alpha z_1(t), z_1(t)\rangle \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Temos que w é diferenciável e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}w'(t) = \langle (2\mu - (1/\varepsilon)\alpha)z_2(t), z_2(t)\rangle - 2\mu(1/\varepsilon)\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle \\ - 2(1/\varepsilon)\mu\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle.\end{aligned}$$

A Hipótese 2.16(b) implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}w'(t) \leq \langle (2\mu - (1/\varepsilon)\alpha_0)z_2(t), z_2(t)\rangle - 2\mu(1/\varepsilon)\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle \\ - 2(1/\varepsilon)\mu\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Como $2\langle z_1(t), z_2(t)\rangle \leq \langle z_1(t), z_1(t)\rangle + \langle z_2(t), z_2(t)\rangle$ para todo $t \geq 0$, segue de (2.26) que

$$\begin{aligned}w(t) \leq & 4\mu\left(\frac{1}{2}\langle z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle z_2(t), z_2(t)\rangle\right) + \langle z_2(t), z_2(t)\rangle \\ & + 2\frac{1}{\varepsilon}\mu\langle \alpha z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \\ \leq & (2\mu+1)\langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2\mu\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\alpha_1\right)\langle z_1(t), z_1(t)\rangle \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle.\end{aligned}$$

Notemos que

$$2\|z(t)\|^2 = 2\langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2(1/\varepsilon)\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + 2(1/\varepsilon)\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle.$$

A condição imposta à escolha da constante μ em (2.24) implica que, para todo $t \geq 0$,

$$2\langle z_2(t), z_2(t)\rangle \geq (2\mu+1)\langle z_2(t), z_2(t)\rangle$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \geq & \frac{1}{\varepsilon}\lambda_1\langle z_1(t), z_1(t)\rangle \\ \geq & 2\mu\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\alpha_1\right)\langle z_1(t), z_1(t)\rangle.\end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$w(t) \leq 2\|z(t)\|^2, \text{ para todo } t \in [0, \infty). \tag{2.28}$$

Por outro lado, utilizando novamente a condição descrita em (2.24) obtemos

$$\begin{aligned}
w(t) \geq & -4\mu\left(\frac{1}{2}4\mu\langle z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{2}\frac{1}{4\mu}\langle z_2(t), z_2(t)\rangle\right) + \langle z_2(t), z_2(t)\rangle \\
& + 2\frac{1}{\varepsilon}\mu\langle \alpha z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \\
& \geq \frac{1}{2}\langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2\mu\left(\frac{1}{\varepsilon}\alpha_0 - 4\mu\right)\langle z_1(t), z_1(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \geq \frac{1}{2}\|z(t)\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$w(t) \geq \frac{1}{2}\|z(t)\|^2, \text{ para todo } t \in [0, \infty). \tag{2.29}$$

As desigualdades (2.28), (2.27) e (2.24) implicam que

$$\begin{aligned}
\mu w(t) \leq 2\mu\|z(t)\|^2 &= 2\mu\langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2\mu\frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle + 2\mu\frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \\
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\alpha_0 - 2\mu\right)\langle z_2(t), z_2(t)\rangle + 2\mu\frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1(t), z_1(t)\rangle \\
&+ 2\mu\frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1(t), \nabla z_1(t)\rangle \leq -\frac{1}{2}w'(t).
\end{aligned}$$

Aqui usamos que $2\mu \leq (1/\varepsilon)\alpha_0 - 2\mu$. Portanto

$$w'(t) \leq -2\mu w(t), \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Assim, $\frac{d}{dt}(w(t)e^{2\mu t}) \leq 0$ para todo $t \in [0, \infty)$ e obtemos que

$$w(t)e^{2\mu t} - w(0) \leq 0, \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Logo,

$$w(t) \leq w(0)e^{-2\mu t}, \text{ para todo } t \in [0, \infty). \tag{2.30}$$

A desigualdade (2.28) implica que $w(0) \leq 2\|z(0)\|^2$. Finalmente, utilizando as informações obtidas juntamente com a desigualdade (2.29) concluimos que

$$\|z(t)\|^2 \leq 2w(t) \leq 2w(0)e^{-2\mu t} \leq 4e^{-2\mu t}\|z(0)\|^2, \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Portanto, a relação em (2.25) é satisfeita para $(u_1, u_2) \in D(B)$. A densidade do conjunto $D(B)$ em Z implica que a desigualdade (2.25) também é válida para $(u_1, u_2) \in Z$. Para concluir a demonstração, notemos que para todo $t \in [0,\infty)$ e $(u_1,u_2) \in Z$ temos

$$k_1|T(t)(u_1,u_2)|_Z^2 \leq \|T(t)(u_1,u_2)\|^2 \leq 4e^{-2\mu t}\|(u_1,u_2)\|^2 \leq 4e^{-2\mu t}k_2|(u_1,u_2)|_Z^2.$$

Defina $M = 2\sqrt{k_2/k_1}$. Finalmente obtemos

$$|T(t)(u_1,u_2)|_Z \leq Me^{-\mu t}|(u_1,u_2)|_Z,\ (u_1,u_2) \in Z \text{ e } t \in [0,\infty).$$

A demonstração está completa. □

Concluímos este capítulo com dois resultados que serão utilizados para mostrar a existência de atrator global para o caso crítico.

Defina $Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e seja $\nu\colon Z \to Y$ a aplicação inclusão dada por $\nu(u,w) = (u,\varphi_w)$, $(u,w) \in Z$, onde, para $w \in L^2(\Omega)$, $\varphi_w\colon H^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é definida por $\varphi_w(z) = \langle z,w\rangle_{L^2(\Omega)}$, $z \in H_0^1(\Omega)$. Observamos que ν é uma aplicação injetiva.

Proposição 2.18. *Assuma as condições da Hipótese 2.5 e da Hipótese 2.16. Defina $C_Z := B_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ e $S_Z(t) = T_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t)$, para $t \in [0,\infty)$ e com $\alpha \equiv 0$. Além disso, defina $D(C_Y) = \nu(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ e considere o operador linear $C_Y : D(C_Y) \to Y$ por*

$$C_Y(y_1,y_2) = (z_2, -\Lambda(y_1)),\ \textit{para}\ (y_1,y_2) \in D(C_Y),$$

onde $z_2 \in L^2(\Omega)$ é tal que $\nu(y_1,z_2) = (y_1,y_2)$ e Λ é como definido no Lema 2.14. Então C_Y é gerador de um C_0-semigrupo $\{S_Y(t) \mid t \geq 0\}$, e

$$\nu(S_Z(t)z) = S_Y(t)(\nu(z)),\ \textit{para todo}\ z \in Z\ \textit{e}\ t \in [0,\infty),$$

Demonstração. Considere em Y o produto interno dado por

$$\langle\langle (u_1,u_2),(w_1,w_2)\rangle\rangle = \langle u_1,w_1\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u_2,w_2\rangle_{-1},\ \text{para}\ (u_1,u_2),\ (w_1,w_2) \in Y.$$

Segue do Lema 2.15 que a norma definida por esse produto escalar é equivalente à norma usual em Y. Afirmamos que

$$\langle\langle C_Y(y_1,y_2),(y_1,y_2)\rangle\rangle = 0,\ \text{para todo}\ (y_1,y_2) \in D(C_Y). \tag{2.31}$$

Seja $(y_1,y_2) \in D(C_Y)$. Logo, existe um único $z_2 \in L^2(\Omega)$ tal que $\varphi_{z_2} = y_2 \in H^{-1}(\Omega) =$

$(H_0^1(\Omega))'$. O Teorema de Representação de Riesz implica que existe um $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi_{z_2}(w) = \langle u, w\rangle_1$, para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, $f_u = \varphi_{z_2}$, onde f_u é como no Lema 2.14. Com isso temos

$$\langle\langle C_Y(y_1,y_2),(y_1,y_2)\rangle\rangle = \langle z_2, y_1\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle -\Lambda(y_1), y_2\rangle_{-1}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\langle -\Lambda(y_1), y_2\rangle_{-1} &= -\langle \Lambda^{-1}(\Lambda(y_1)), \Lambda^{-1}(\varphi_{z_2})\rangle_1 = -\langle y_1, u\rangle_1 = -\langle u, y_1\rangle_1 \\ &= -f_u(y_1) = -\varphi_{z_2}(y_1) = -\langle y_1, z_2\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, a igualdade em (2.31) é válida e isso implica que C_Y é dissipativo. Usando os mesmos argumentos da prova da Proposição 2.17 com $\alpha \equiv 0$, mostramos que para qualquer $\lambda \in (0,\infty)$ e $(f,g) \in Y$, existe um $(y_1,y_2) \in D(C_Y)$ com $(y_1,y_2) - \lambda C_Y(y_1,y_2) = (f,g)$. E, como na demonstração da Proposição 2.17 temos que C_Y é gerador de um C_0-semigrupo de contração $\{S_Y(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ em Y.

Segue das definições de C_Y e C_Z que $\nu(D(C_Z)) \subset D(C_Y)$. Afirmamos que

$$\nu(C_Z(z_1,z_2)) = C_Y \nu(z_1,z_2), \text{ para todo } (z_1,z_2) \in D(C_Z). \tag{2.32}$$

De fato, seja $(z_1,z_2) \in D(C_Z)$. Logo, $z_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $Lz_1 - \beta z_1$ (no sentido de distribuições) está em $L^2(\Omega)$. Além disso,

$$\nu(C_Z(z_1,z_2)) = \nu(z_2, (1/\varepsilon)Lz_1 - (1/\varepsilon)\beta z_1) = (z_2, \varphi_{(1/\varepsilon)Lz_1-(1/\varepsilon)\beta z_1}).$$

Por outro lado,

$$C_Y(\nu(z_1,z_2)) = C_Y(z_1,\varphi_{z_2}) = (z_2, -\Lambda(z_1)).$$

Logo, para concluir a demonstração da igualdade (2.32) basta mostrar que $-\Lambda(z_1) = \varphi_{(1/\varepsilon)Lz_1-(1/\varepsilon)\beta z_1}$. Para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\varphi_{(1/\varepsilon)Lz_1-(1/\varepsilon)\beta z_1}(v) = -\frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1, \nabla v\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1, v\rangle$$

e

$$-\Lambda(z_1)(v) = -f_{z_1}(v) = -\langle z_1, v\rangle_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\langle A\nabla z_1, \nabla v\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta z_1, v\rangle.$$

Agora, uma aplicação Proposição 2.3 finaliza a demonstração do resultado. □

Em vista da Proposição 2.18, dado um $z \in Z$ temos unicamente determinado o elemento $\nu(z) \in Y$. No restante deste capítulo e no Capítulo 4 iremos usar essa identificação e denotaremos $\nu(z)$ por z.

Proposição 2.19. *Assuma as condições da Hipótese 2.5 e da Hipótese 2.16. Seja $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ como na Proposição 2.17. Suponha que exista uma constante $C_1 \in [0,\infty)$ tal que*

$$|\alpha z|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_1 |z|_{H^{-1}(\Omega)}, \text{ para todo } z \in L^2(\Omega). \tag{2.33}$$

Então existem constantes C_2, $C_3 \in [0,\infty)$ tais que

$$|T(t)z|_Y \leq C_2 e^{C_3 t} |z|_Y, \; t \in [0,\infty), \text{ para todo } z \in Z.$$

Demonstração. Defina o operador linear limitado $Q\colon Z \to Z$ por $Q(z_1,z_2) = (0,-\alpha z_2)$, $(z_1,z_2) \in Z$. A Proposição 2.3 e o Teorema 2.6 implicam que para todo $z \in Z$ e para todo $t \in [0,\infty)$,

$$T(t)z = S_Z(t)z + \int_0^t S_Z(t-s)QT(s)z ds = S_Y(t)z + \int_0^t S_Y(t-s)QT(s)z ds.$$

Além disso, como $\{S_Y(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ é C_0-semigrupo, existem constantes C_4, $C_5 \in [0,\infty)$ tais que

$$|S_Y(t)y|_Y \leq C_4 e^{C_5 t} |y|_Y, \text{ para todo } t \in [0,\infty) \text{ e para todo } y \in Y.$$

Usando a condição (2.33) obtemos, para $z \in Z$ e $t \in [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} |T(t)z|_Y &\leq |S_Y(t)z|_Y + \int_0^t |S_Y(t-s)QT(s)z|_Y ds \\ &\leq C_4 e^{C_5 t} |z|_Y + \int_0^t C_4 e^{C_5(t-s)} C_1 |T(s)z|_Y ds \end{aligned}$$

e, portanto, para $z \in Z$ temos

$$e^{-C_5 t} |T(t)z|_Y \leq C_4 |z|_Y + \int_0^t C_4 e^{-C_5 s} C_1 |T(t)z|_Y ds, \text{ para todo } t \in [0,\infty).$$

Uma aplicação do Lema de Gronwall (ver Lema 1.61) completa a prova. □

O resultado a seguir apresenta uma condição suficiente para que a desigualdade na condição (2.33) seja válida.

Lema 2.20. *Sejam $a \in C^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então $au \in H_0^1(\Omega)$ e $\partial_i(au) = (\partial_i a)u +$*

$a\partial_i u$, $i \in \{1,\ldots,N\}$. Além disso,

$$|au|_{H_0^1(\Omega)} \leq (2N+1)^{1/2}|a|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|u|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Mais ainda,

$$|az|_{H^{-1}(\Omega)} \leq (2N+1)^{1/2}|a|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|z|_{H^{-1}(\Omega)}, \text{ para todo } z \in L^2(\Omega), \tag{2.35}$$

Se U é um subconjunto aberto de Ω e $a|_U \in C_0^1(U)$, então $(au)|_U \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$, defina $u_{(i)} = (\partial_i a)u + a\partial_i u$. A definição do espaço $H_0^1(\Omega)$ implica que existe uma sequência $(v_n)_n$ em $C_0^1(\Omega)$ convergindo para u em $H^1(\Omega)$. Segue que $av_n \in C_0^1(\Omega)$ e $\partial_i(av_n) = (\partial_i a)v_n + a\partial_i v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Seja $i \in \{1,\ldots,N\}$. Como $a \in C^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |a(x)v_n(x) - a(x)u(x)|^2 dx\right]^{1/2} &\leq |a|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left[\int_\Omega |v_n(x) - u(x)|^2 dx\right]^{1/2} \\ &\leq |a|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|v_n - u|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $|v_n - u|_{H^1(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\left[\int_\Omega |a(x)v_n(x) - a(x)u(x)|^2 dx\right]^{1/2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.36}$$

Também

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |\partial_i(av_n)(x) - u_{(i)}(x)|^2\right]^{1/2} &= \left[\int_\Omega |(\partial_i a(x))(v_n(x) - u(x)) + a(x)(\partial_i(v_n(x) - u(x)))|^2 dx\right]^{1/2} \\ &\leq |a|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left[\int_\Omega |[v_n(x) - u(x)] + [\partial_i(v_n(x) - u(x))]|^2 dx\right]^{1/2} \\ &= |a|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|v_n - u|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left[\int_\Omega |\partial_i(av_n)(x) - u_{(i)}(x)|^2\right]^{1/2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.37}$$

Fórmulas (2.36) e (2.37) implicam que $(av_n)_n$ converge para au em $L^2(\Omega)$ e que $(\partial_i(av_n))_n$ converge para $u_{(i)}$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, se $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |\varphi(x)\partial_i(av_n)(x) - \varphi(x)u_{(i)}(x)|dx = \int_\Omega |\varphi(x)((av_n)(x) - u_i(x))|$$
$$\leq \left[\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega |\partial_i(av_n)(x) - u_i(x)|^2 dx\right]^{1/2} = |\varphi|_{L^2(\Omega)} |\partial_i(av_n) - u_i|_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\int_\Omega |(\partial_i\varphi(x))(av_n)(x) - (\partial_i\varphi(x))(au)(x)|dx = \int_\Omega |(\partial_i\varphi(x))((av_n)(x) - (au)(x))|dx$$
$$\leq \left[\int_\Omega |\partial_i\varphi(x)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega |(av_n)(x) - (au)(x)|^2 dx\right]^{1/2} = |\partial_i\varphi|_{L^2(\Omega)} |av_n - au|_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, $(\varphi\partial_i(av_n))_n$ converge para $\varphi u_{(i)}$ em $L^1(\Omega)$ e $(\partial_i\varphi(av_n))_n$ converge para $\partial_i\varphi(au)$ em $L^1(\Omega)$. Como

$$\langle \varphi, \partial_i(av_n)\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \partial_i\varphi, av_n\rangle_{L^2(\Omega)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que $au \in H^1(\Omega)$, $\partial_i(au) = u_{(i)}$ e

$$|av_n - au|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.38}$$

Portanto, $au \in H_0^1(\Omega)$, o que prova a primeira parte do lema. Para mostrar a desigualdade (2.34) notemos que

$$\begin{aligned}
|au|^2_{H_0^1(\Omega)} &= |au|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |\partial_i(au)|^2_{L^2(\Omega)} = |au|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |(\partial_i a)u + a\partial_i u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} |u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} (|u|_{L^2(\Omega)} + |\partial_i u|)^2_{L^2(\Omega)} \\
&= |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (|u|_{L^2(\Omega)} + |\partial_i u|_{L^2(\Omega)})^2 \right) \\
&\leq |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (2|u|^2_{L^2(\Omega)} + 2|\partial_i u|^2_{L^2(\Omega)}) \right) \\
&= |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} ((2N-1)|u|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |\partial_i u|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} ((2N-1)|u|^2_{L^2(\Omega)} + 2|u|^2_{H_0^1(\Omega)}) \\
&\leq |a|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)} (2N+1)|u|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, mostremos a desigualdade (2.35). Seja $z \in L^2(\Omega)$. Segue que

$az \in L^2(\Omega)$. Além disso para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ com $|v|_{H^1} \leq 1$, temos que $av \in H_0^1(\Omega)$ e

$$|\langle az, v\rangle_{L^2(\Omega)}| = |\langle z, av\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq |z|_{H^{-1}(\Omega)}|av|_{H^1(\Omega)} \leq (2N+1)^{1/2}|a|_{W^{1,\infty}(\Omega)}|z|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Finalmente, se $a|_U \in C_0^1(U)$, então $(av_n)|_U \in C_0^1(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, segue de (2.38), que a sequência $((av_n)|_U)_n$ converge para $(au)|_U$ em $H^1(U)$, de onde segue que $(au)|_U \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Capítulo

3

A definição do semifluxo gerado pelas soluções da equação da onda amortecida

Neste capítulo apresentaremos condições (ver Hipótese 3.9 e Proposição 3.10) para que as soluções da equação da onda amortecida,

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \alpha(x)u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) &= f(x,u), & x \in \Omega,\ t \in [0,\infty), \\ u(x,t) &= 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty) \end{aligned}$$

gerem um semifluxo local.

Iniciamos o capítulo com um resultado auxiliar sobre a existência de um semifluxo local para uma equação integral.

3.1 Um resultado preliminar

Nssa seção demonstramos um resultado sobre equações semilineares definidas por um C_0-semigrupo.

Proposição 3.1. *Seja Z um espaço de Banach e $\{T(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em Z, com gerador infinitesimal $B\colon D(B) \subset Z \to Z$. Suponha $\Phi\colon Z \to Z$ seja uma aplicação Lipschitziana em conjuntos limitados de Z. Então, para cada $\zeta \in Z$, existe um $\omega_\zeta = \omega_{B,\Phi,\zeta} \in (0,\infty]$ e uma aplicação contínua $z = z_\zeta\colon [0,\omega_\zeta) \to Z$ unicamente determinada tal que*

$$z(t) = T(t)\zeta + \int_0^t T(t-s)\Phi(z(s))ds,\ t \in [0,\omega_\zeta).$$

Escrevendo $\zeta\pi t := z_\zeta(t)$, $t \in [0,\omega_\zeta)$, obtemos um semifluxo local $\pi = \pi_{B,\Phi}$ em Z que não explode em subconjuntos limitados de Z.

Demonstração. Uma aplicação do Teorema 1.63 implica que existe uma função $\omega\colon Z \to (0,\infty]$ tal que para cada $x \in Z$ existe uma única função $z = z_x \in C([0,\omega(x)),Z)$ com a propriedade: para todo T com $0 < T < \omega(x)$, temos

$$z(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\Phi(z(s))ds,\ t \in [0,T].$$

Mostremos agora que $x\pi t := z_x(t)$, para $t \in [0,\omega(x))$ e $x \in Z$, determina um semifluxo local. Para tanto, primeiro note que $x\pi 0 = z_x(0) = x$. Além disso, note que a Proposição 1.64 implica que π assim definida é contínua. No que segue para cada $x \in Z$, ω_x denota $\omega(x)$. Resta verificar a condição (iii) da Definição 1.39. Sejam $x \in Z$, $t \in [0,\omega_x)$ e $s \in [0,\omega_{x\pi t})$. Devemos mostrar que $t+s \in [0,\omega_x)$ e $x\pi(t+s) = (x\pi t)\pi s$.

Afirmamos que $t+s \in [0,\omega_x)$. Se $\omega_x = \infty$, isto está provado. Caso contrário, suponha, por absurdo, que $t < \omega_x \le t+s < \omega_{x\pi t}$. Logo, existe um $\tau \ge 0$ tal que $\omega_x \le \tau \le t+s$. Disso segue que $0 < \omega_x - t \le \tau - t \le s < \omega_{x\pi t} - t < \omega_{x\pi t}$. Defina $\varphi \in C([0,t+s],Z)$ por

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & \text{se } \tau \in [0,t] \\ v(\tau - t) & \text{se } \tau \in [t,t+s], \end{cases}$$

onde $u \in C([0,\omega_x),Z)$ é dado por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\Phi(u(s))ds,\ t \in [0,\omega_x)$$

e $v \in C([0,\omega_{x\pi t}),Z)$ é a solução dada pela Proposição 1.62 da equação integral

$$v(s) = T(s)u(t) + \int_0^s T(s-\sigma)\Phi(v(\sigma))d\sigma,\ s \in [0,\omega_{x\pi t}).$$

Vemos que, de modo análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.63, temos que

$$\varphi(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)\phi(\varphi(s))ds, \quad t \in [0,\omega],$$

com $\omega = t+s$, o que contradiz a definição de ω_x, pois $t+s > \omega_x$. Logo, $t+s < \omega_x$. Finalmente, defina $\psi \in C([0,t+s],Z)$ por

$$\psi(\tau) = \begin{cases} x\pi\tau & \text{se } \tau \in [0,t] \\ (x\pi t)\pi(\tau - t) & \text{se } \tau \in [t,t+s]. \end{cases}$$

A unicidade de soluções da equação integral (1.4) com $\psi(0) = x$ e $\omega = t+s$ implica que $x\pi(t+s) = (x\pi t)\pi s$. Portanto, π é um semifluxo local. A propriedade de não explosão em subconjuntos limitados de Z segue do Teorema 1.63 parte (ii). $\square$

3.2 O semifluxo gerado pelas soluções da equação da onda amortecida

Denote por $\mathscr{M}$ o conjunto das funções $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mensuráveis.

Definição 3.2. *Uma função $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto f(x,u)$ satisfaz a* condição C^0 (respectivamente C^1) de Carathéodory *se:*

(i) *para todo $u \in \mathbb{R}$, a aplicação $x \mapsto f(x,u)$ é Lebesgue-mensurável;*

(ii) *para quase todo $x \in \Omega$, a aplicação $u \mapsto f(x,u)$ é contínua (respectivamente continuamente diferenciável).*

Seja $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto f(x,u)$, uma função que satisfaz a condição C^0 de Carathéodory. Defina a função $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds,$$

onde $s \mapsto f(x,s)$ é contínua e $F(x,u) = 0$ caso contrário. A função F é chamada a *primitiva canônica de f*.

Definição 3.3. *Sejam $\overline{C}$, $\overline{\rho} \in [0,\infty)$, $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $M \subset \Omega$ um conjunto de medida nula. Dizemos que uma função $g\colon (\Omega \setminus M) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,u) \mapsto g(x,u)$, satisfaz a uma* condição $(\overline{C}, \overline{\rho}, a)$ de crescimento *se*

$$|g(x,u)| \leq \overline{C}(|a(x)| + |u|^{\overline{\rho}}), \text{ para todo } x \in \Omega \setminus M \text{ e para todo } u \in \mathbb{R}.$$

O número $\overline{\rho}$ na Definição 3.3 é chamado *subcrítico* se $N \leq 2$ ou ($N \geq 3$ e $\overline{\rho} < (2^*/2) - 1$). É chamado *crítico* se $N \geq 3$ e $\overline{\rho} = (2^*/2) - 1$.

Observação 3.4. *Dada uma função Lebesgue-mensurável $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ as funções $x \in \Omega \mapsto f(x,v(x)) \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega \mapsto F(x,v(x)) \in \mathbb{R}$ são Lebesgue-mensuráveis.*

Definição 3.5. *Seja $f\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função que satisfaz a condição C_0 de Carathéodory. A aplicação $\widehat{f}\colon \mathscr{M}\to\mathscr{M}$ definida por $\widehat{f}(u)(x)=f(x,u(x))$, $u\in\mathscr{M}$, $x\in\Omega$, é chamada* operador de Nemytskii associado a f.

Proposição 3.6. *Seja $f\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função satisfazendo a condição C^1 de Carathéodory. Suponha que existam constantes $\overline{C}$, $\overline{\rho}\in[0,\infty)$, uma função mensurável $a\colon \Omega\to\mathbb{R}$ e um conjunto de medida nula $M\subset\Omega$ tais que a função $\partial_u f$ satisfaz a condição $(\overline{C},\overline{\rho},a)$ de crescimento. Seja F a primitiva canônica de f. Então, para quase todo $x\in\Omega$ e para todo u, $h\in\mathbb{R}$, temos*

$$|f(x,u)-f(x,0)|\le \overline{C}(|a(x)||u|+|u|^{\overline{\rho}+1}), \tag{3.1}$$

$$|f(x,u+h)-f(x,u)|\le \overline{C}|a(x)||h|+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}+|h|^{\overline{\rho}})|h|, \tag{3.2}$$

$$|F(x,u)|\le \overline{C}\left(|a(x)||u|^2/2+|u|^{\overline{\rho}+2}/(\overline{\rho}+2)\right)+|u||f(x,0)|, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&|F(x,u+h)-F(x,u)|\\ &\qquad\le (|f(x,0)|+\overline{C}|a(x)|(|u|+|h|)+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|u|^{\overline{\rho}+1}+|h|^{\overline{\rho}+1}))|h|\end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$|F(x,u+h)-F(x,u)-f(x,u)h|\le (\overline{C}|a(x)|+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}+|h|^{\overline{\rho}}))|h|^2. \tag{3.5}$$

Demonstração. Para quase todo $x\in\Omega$ e para todo u, $h\in\mathbb{R}$ temos

$$f(x,u+h)-f(x,u)=\int_0^1 \partial_u f(x,u+\theta h)h\,d\theta. \tag{3.6}$$

Em particular se $h=-u$ temos

$$f(x,0)-f(x,u)=-\int_0^1 \partial_u f(x,\theta u)u\,d\theta.$$

e, assim,

$$|f(x,u)-f(x,0)|\le \int_0^1 |\partial_u f(x,\theta u)||u|\,d\theta.$$

Como $\partial_u f$ satisfaz a condição $(\overline{C},\overline{\rho},a)$ de crescimento, temos que

$$|\partial_u f(x,u)|\le \overline{C}(|a(x)|+|u|^{\overline{\rho}}),\ \text{para todo } x\in\Omega\setminus M \text{ e para todo } u\in\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Logo

$$|f(x,u)-f(x,0)| \leq \int_0^1 \overline{C}(|a(x)|+|u|^{\overline{\rho}})|u|d\theta \leq \overline{C}|a(x)||u|+\overline{C}|u|^{\overline{\rho}+1}$$

e a desigualdade (3.1) está demonstrada. Segue da igualdade (3.6) que

$$|f(x,u+h)-f(x,u)| \leq \int_0^1 |\partial_u f(x,u+\theta h)||h|d\theta,$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo u, $h \in \mathbb{R}$. A desigualdade (3.7) implica que

$$\begin{aligned}|f(x,u+h)-f(x,u)| &\leq \int_0^1 \overline{C}(|a(x)|+|u+\theta h|^{\overline{\rho}})|h|d\theta \\ &\leq \overline{C}|a(x)||h|+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}+|h|^{\overline{\rho}})|h|\end{aligned}$$

o que mostra a desigualdade (3.2). Para mostrar a desigualdade (3.3) notemos que para quase todo $x \in \Omega$ e para todo u, $h \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}|F(x,u)| &\leq \int_0^u |f(x,s)|ds = \int_0^u \left| \int_0^1 \partial f(x,\theta s)sd\theta + f(x,0)\right| ds \\ &\leq \int_0^u \int_0^1 |\partial f(x,\theta s)||s|d\theta + \int_0^u |f(x,0)|ds \leq \int_0^u \overline{C}\left(|a(x)|+|s|^{\overline{\rho}}\right)|s|ds + |f(x,0)||u| \\ &= \overline{C}|a(x)||u|^2/2+\overline{C}|u|^{\overline{\rho+2}}/(\overline{\rho}+2)+|f(x,0)||u|.\end{aligned}$$

Aqui novamente utilizamos a igualdade (3.6) com $h=-u$ e a desigualdade (3.7). Além disso, essas condições também implicam que

$$\begin{aligned}|F(x,u+h)-F(x,u)| &\leq \int_u^{u+h} |f(x,s)|ds = \int_u^{u+h} \left| \int_0^1 \partial_u f(x,\theta s)sd\theta + f(x,0)\right| ds \\ &\leq \int_u^{u+h} \int_0^1 |\partial_u f(x,\theta s)||s|d\theta + \int_u^{u+h} |f(x,0)|ds \\ &\leq \int_u^{u+h} \overline{C}\left(|a(x)|+|s|^{\overline{\rho}}\right)|s|ds + |f(x,0)||h| \\ &\leq |f(x,0)||h| + \overline{C}|a(x)|\left(\frac{|u+h|^2-|u|^2}{2}\right)|h| + \int_0^1 \overline{C}|u+\delta h|^{\overline{\rho}+1}|h|d\delta \\ &\leq |f(x,0)||h| + \overline{C}|a(x)|(|u|+|h|)|h| + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|u|^{\overline{\rho}+1}+|h|^{\overline{\rho}+1})|h|\end{aligned}$$

e desigualdade (3.4) está verificada. Finalmente para mostrar a desigualdade (3.5) notemos que para quase todo $x \in \Omega$ e para todo u, $h \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
F(x,u+h)-F(x,u)-f(x,u)h &= \int_0^1 [f(x,u+\theta h)-f(x,u)]hd\theta \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \partial_u f(x,u+r\theta h)\theta hdr\right] hd\theta.
\end{aligned}
$$

Uma aplicação da desigualdade (3.7) implica que

$$
\begin{aligned}
|F(x,u+h)-F(x,u)-f(x,u)h| &\leq \int_0^1 \int_0^1 |\partial_u f(x,u+r\theta h)||\theta h|dr|h|d\theta \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \overline{C}\left(|a(x)|+|u+r\theta h|^{\overline{\rho}}\right)|\theta||h|dr|h|d\theta \\
&\leq \int_0^1 \overline{C}|a(x)||\theta||h|^2 d\theta + \int_0^1 \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}+|\theta h|^{\overline{\rho}})|\theta||h|^2 d\theta \\
&\leq \overline{C}|a(x)||h|^2 + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}+|h|^{\overline{\rho}})|h|^2.
\end{aligned}
$$

Assim, a proposição está demonstrada. □

A partir da Proposição 3.6 obteremos estimativas para os operadores de Nemytskii associados às funções f e F.

Para demonstrar a próxima proposição, usaremos o seguinte lema clássico.

Lema 3.7 (Extensão da Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,k\}$ funções tais que para cada $i \in \{1,\dots,k\}$ existe um $1 \leq p_i < \infty$ tal que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Se $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$, então $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$
|f|_{L^p(\Omega)} \leq |f_1|_{L^{p_1}(\Omega)}|f_1|_{L^{p_2}(\Omega)}\cdots|f_1|_{L^{p_k}(\Omega)},
$$

onde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$.

Com isso, podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 3.8. *Assuma as hipóteses da Proposição 3.6. Seja $\widehat{f}$ o operador de Nemytskii associado a f e $\widehat{F}$ o operador de Nemytskii associado a F. Para todas as funções mensuráveis u, $h \in \mathscr{M}$ temos*

$$
|\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} \leq |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(|au|_{L^2(\Omega)} + |u|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}}), \tag{3.8}
$$

$$|\widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} \tag{3.9}$$
$$\leq \overline{C}|ah|_{L^2(\Omega)}+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)},$$

$$|\widehat{F}(u)|_{L^1(\Omega)} \leq \overline{C}\left(|a|u|^2|_{L^1(\Omega)}/2+|u|^{\overline{\rho}+2}_{L^{\overline{\rho}+2}(\Omega)}/(\overline{\rho}+2)\right)+|u|_{L^2(\Omega)}|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} \tag{3.10}$$

$$|\widehat{F}(u+h)-\widehat{F}(u)|_{L^1(\Omega)} \leq \left(|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)}+\overline{C}(|au|_{L^2(\Omega)}+|ah|_{L^2(\Omega)})\right)|h|_{L^2(\Omega)} \tag{3.11}$$
$$+\left(\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|u|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})\right)|h|_{L^2(\Omega)},$$

e

$$|\widehat{F}(u+h)-\widehat{F}(u)-\widehat{f}(u)h|_{L^1(\Omega)} \leq \overline{C}|ah|_{L^2(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)} \tag{3.12}$$
$$+\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, se $\overline{\rho}$ é crítico, então para cada $r \in [N,\infty)$ existe uma constante $C(r) \in [0,\infty)$ tal que para toda função a da forma $a = a_1 + a_2$, com $a_1 \in L^r(\Omega)$ e $a_2 \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$|\widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(r)(|a_1|_{L^r(\Omega)}+|a_2|_{L^\infty(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)} \tag{3.13}$$
$$+C(r)(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)},$$

para todo u, $h \in H^1_0(\Omega)$.

Demonstração. Recordemos que dada uma função mensurável $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, os operadores de Nemytskii $\widehat{f}$ e $\widehat{F}$ são dados por $\widehat{f}(u)(x) = f(x,u(x))$ e $\widehat{F}(u)(x) = F(x,u(x))$, $x \in \Omega$. Seja $u \in \mathscr{M}$. Notemos que

$$|\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x,u(x))|^2 dx\right]^{1/2} = \left[\int_\Omega \left|\int_0^1 \partial_u f(x,\theta u(x))u(x)d\theta + f(x,0)\right|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Portanto

$$|\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\int_\Omega \left|\int_0^1 \partial_u f(x,\theta u(x))u(x)d\theta\right|^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_\Omega |f(x,0)|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Como $\partial_u f$ satisfaz a condição $(\overline{C},\overline{\rho},a)$ de crescimento temos que

$$|\partial_u f(x,u)| \leq \overline{C}(|a(x)|+|u|^{\overline{\rho}}),\ \text{para todo } x \in \Omega\setminus M \text{ e para todo } u \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} &\le |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \left[\int_\Omega \left|\int_0^1 |\partial_u f(x,\theta u(x))||u(x)|d\theta\right|^2 dx\right]^{1/2} \\
&\le |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}\left[\int_\Omega \left||a(x)u(x)| + |u(x)|^{\overline{\rho}+1}\right|^2 dx\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} &\le |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}\left[\left(\int_\Omega |a(x)u(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |u(x)|^{2(\overline{\rho}+1)} dx\right)^{1/2}\right] \\
&= |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(|au|_{L^2(\Omega)} + |u|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

A desigualdade (3.8) está demonstrada. Para mostrar a desigualdade (3.9) notemos que para cada $h \in \mathscr{M}$ segue, da desigualdade (3.2), que

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(u+h) - \widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} &= \left[\int_\Omega |f(x,u(x)+h(x)) - f(x,u(x))|^2 dx\right]^{1/2} \\
&\le \left[\int_\Omega \left|\overline{C}|a(x)||h(x)| + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u(x)|^{\overline{\rho}} + |h(x)|^{\overline{\rho}})|h(x)|\right|^2 dx\right]^{1/2} \\
&\le \overline{C}\left[\int_\Omega |a(x)h(x)|^2 dx\right]^{1/2} + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})\left[\int_\Omega (|u(x)|^{\overline{\rho}} + |h(x)|^{\overline{\rho}})^2 |h(x)|^2 dx\right]^{1/2} \\
&\le (\overline{C}|ah|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)} + |h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Além disso, utilizando a desigualdade (3.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\widehat{F}(u)|dx &= \int_\Omega |F(x,u(x))|dx \\
&\le \int_\Omega (\overline{C}(|a(x)||u(x)|^2/2 + |u(x)|^{\overline{\rho}+2}/(\overline{\rho}+2)) + |u(x)||f(x,0)|)dx \\
&= \int_\Omega \overline{C}|a(x)||u(x)|^2/2dx + \int_\Omega \overline{C}|u(x)|^{\overline{\rho}+2}/(\overline{\rho}+2) + \int_\Omega |\widehat{f}(0)||u(x)|dx \\
&\le \overline{C}(|a|u|^2|_{L^1(\Omega)}/2 + |u|^{\overline{\rho}+2}_{L^{\overline{\rho}+2}(\Omega)}/(\overline{\rho}+2)) + |u|_{L^2(\Omega)}|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

e a prova da desigualdade (3.10) está concluída. Seja $h \in \mathscr{M}$. A desigualdade (3.4) implica que para quase todo $x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
|F(x,u(x)+h(x)) - F(x,u(x))| \le{}& |f(x,0)||h(x)| + \overline{C}|a(x)|(|u(x)| + |h(x)|)|h(x)| \\
&+ \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|u(x)|^{\overline{\rho}+1} + |h(x)|^{\overline{\rho}+1})|h(x)|.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\widehat{F}(u+h)-\widehat{F}(u)|dx &= \int_\Omega |F(x,u(x)+h(x))-F(x,u(x))|dx \\
&\le \int_\Omega |f(x,0)||h(x)|dx + \int_\Omega \overline{C}|a(x)|(|u(x)|+|h(x)|)|h(x)|dx \\
&+ \int_\Omega \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|u(x)|^{\overline{\rho}+1}+|h(x)|^{\overline{\rho}+1})|h|dx \\
&\le |\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(|au|_{L^2(\Omega)}+|ah|_{L^2(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}+1})(|u|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração da desigualdade (3.11). Finalmente, para demonstrar a desigualdade (3.12), notemos que a desigualdade (3.5) implica que para quase todo $x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
&|F(x,u(x)+h(x))-F(x,u(x))-f(x,u(x)h(x)| \\
&\qquad \le \overline{C}|a(x)||h(x)|^2 + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u(x)|^{\overline{\rho}}+|h(x)|^{\overline{\rho}})|h(x)|^2
\end{aligned}
$$

e concluimos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\widehat{F}(u+h)-\widehat{F}(u)-\widehat{f}(u)h|dx &= \int_\Omega |F(x,u(x)+h(x))-F(x,u(x))-f(x,u(x)h(x)|dx \\
&\le \int_\Omega \overline{C}|(ah)(x)||h(x)|dx + \int_\Omega \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u(x)|^{\overline{\rho}}+|h(x)|^{\overline{\rho}})|h(x)|^2dx
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{\overline{\rho}}{2(\overline{\rho}+1)} + \frac{1}{2(\overline{\rho}+1)} + \frac{1}{2} = 1
$$

segue do Lema 3.7 que

$$
\begin{aligned}
|\widehat{F}(u+h)-\widehat{F}(u)-\widehat{f}(u)h|_{L^1(\Omega)} &\le \overline{C}|ah|_{L^2(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Para completar a demonstração da proposição suponha que se $\overline{\rho}$ seja crítico (portanto $N \ge 3$) e sejam $r \in [N,\infty)$ e u, h, $v \in H^1_0(\Omega)$ arbitrários. A desigualdade (3.2) implica que

$$
\begin{aligned}
|\langle \widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u), v\rangle_{L^2(\Omega)}| &\le \int_\Omega |f(x,(u+h)(x))-f(x,u(x))|v(x)|dx \\
&\le \overline{C}\int_\Omega |(ah)(x)||v(x)|dx + \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})\int_\Omega (|u(x)|^{\overline{\rho}}+|h(x)|^{\overline{\rho}})|h(x)|||v(x)|dx.
\end{aligned}
$$

Como $a_1 \in L^r(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$, $v \in L^{2r/r-2}(\Omega)$ e $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{r-2}{2r}=1$, segue do Lema 3.7 que

$$\int_\Omega |a_1(x)h(x)v(x)|dx \le |a_1|_{L^r(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^{2r/r-2}(\Omega)}.$$

Além disso, como $a_2 \in L^\infty(\Omega)$ e h, $v \in L^2(\Omega)$, aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_\Omega |a_2(x)h(x)v(x)|dx \le |a_2|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |h(x)v(x)|dx \le |a_2|_{L^\infty(\Omega)}|h|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}.$$

A igualdade

$$\frac{1}{2^*}+\frac{1}{2}+\frac{1}{N}=1$$

e o fato que $N\overline{\rho}=2^*$ implicam que $|u|^{\overline{\rho}} \in L^N(\Omega)$ e

$$|u|^{\overline{\rho}}_{L^N(\Omega)} = \left[\int_\Omega (|u(x)|^{\overline{\rho}})^N\right]^{1/N} = \left[\int_\Omega |u(x)|^{\frac{2^*}{N}N}\right]^{\overline{\rho}/2^*} = |u|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Analogamente, mostramos que $|h|^{\overline{\rho}} \in L^N(\Omega)$ e $|h|^{\overline{\rho}}_{L^N(\Omega)} = |h|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)}$. Como $h \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^{2^*}(\Omega)$, aplicando novamente o Lema 3.7 obtemos

$$\int_\Omega (|u(x)|^{\overline{\rho}}+|h(x)|^{\overline{\rho}})|h(x)|||v(x)|dx \le (|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}.$$

Notemos agora que $r \le N$ e $2r/(r-2) \le 2^*$. Seja $K \ge 0$ uma constante tal que para todo $w \in H^1_0(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
|w|_{L^2(\Omega)} &\le K|w|_{H^1_0(\Omega)},\\
|w|_{L^{2^*}(\Omega)} &\le K|w|_{H^1_0(\Omega)},\\
|w|_{L^{2r/(r-2)}(\Omega)} &\le K|w|_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
|\langle \widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u),v\rangle_{L^2(\Omega)}| \le{}& \overline{C}K(|a_1|_{L^r(\Omega)}+|a_2|_{L^\infty(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega}|v|_{H^1(\Omega)}+\\
&\overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})K(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)}+|h|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como

$$|\widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u)|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{|\langle \widehat{f}(u+h)-\widehat{f}(u),v\rangle_{L^2(\Omega)}| \mid v \in H^1_0(\Omega), |v|_{H^1_0(\Omega)} \le 1\}$$

segue o resultado. □

No restante do desenvolvimento do texto vamos assumir a seguinte hipótese:

Hipótese 3.9. *Suponha válida a Hipótese 2.5 e a Hipótese 2.16, com um $\varepsilon \in (0,\infty)$ fixado. Além disso, seja $Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Proposição 3.10. *Seja $\overline{C}, \overline{\rho} \in [0,\infty)$ e $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que as aplicações*

$$u \mapsto |a|u \text{ e } a \mapsto |a|^{1/2}u$$

induzem operadores lineares limitados de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Suponha que a função $f\colon \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição C^1 Carathéodory e que $\partial_u f$ satisfaz a condição $(\overline{C}, \overline{\rho}, a)$ de crescimento. Além disso, suponha que $f(\cdot,0) \in L^2(\Omega)$. Se $N \geq 3$, assuma também que $\overline{\rho} \leq (2^*/2)-1$. Então

(i) f induz um operador de Nemytskii $\widehat{f}\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ que é Lipschitziano em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

(ii) A primitiva canônica F de f induz um operador de Nemytskii $\widehat{F}\colon H_0^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$. Além disso, $\widehat{F}$ é Frechet-diferenciável e

$$D\widehat{F}(u)[h] = \widehat{f}(u)\cdot h, \text{ para todo } u,\ h \in H_0^1(\Omega).$$

(iii) A aplicação $\Phi_f\colon Z \to Z$ dada por

$$\Phi_f(z) = (0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(z_1)),\ z = (z_1,z_2) \in Z, \tag{3.15}$$

é limitada e Lipschitziana em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Mostremos que $\widehat{f}(u) \in L^2(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. As hipóteses implicam que $|a|u \in L^2(\Omega)$ e $\widehat{f}(0) \in L^2(\Omega)$. Como $2 \leq 2(\overline{\rho}+1) \leq 2^*$, segue do Teorema 1.10 que $u \in L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)$. Uma aplicação da desigualdade (3.8) da Proposição 3.8 implica que $\widehat{f}(u) \in L^2(\Omega)$.

Afirmamos que $\widehat{f}\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é Lipschitziana em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$. De fato, sejam $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 \in (0,\infty)$ tais que

$$||a|u|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}_1 |u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$||a|^{1/2}u|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}_2 |u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Sejam $R \geq 0$ e $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$ com $|u|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ e $|v|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$. A desigualdade (3.9) da Proposição 3.8, com $h = v - u$, implica que

$$\begin{aligned}
&|\widehat{f}(v) - \widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \overline{C}|a(v-u)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)} + |v-u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|v-u|_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Como $2 \leq 2(\overline{\rho}+1) \leq 2^*$, segue do Teorema 1.10 que

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(v) - \widehat{f}(u)|_{L^2(\Omega)} &\leq \widetilde{C}_2|u-v|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(K^{\overline{\rho}+1}_{2(\overline{\rho}+1)}|u|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)} + K^{\overline{\rho}+1}_{2(\overline{\rho}+1)}|v-u|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)})K_{2(\overline{\rho}+1)}|v-u|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \widetilde{C}_2|u-v|_{H_0^1(\Omega)} + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(K^{\overline{\rho}+2}_{2(\overline{\rho}+1)}R^{\overline{\rho}} + K^{\overline{\rho}+2}_{2(\overline{\rho}+1)}(R^{\overline{\rho}} + R^{\overline{\rho}}))|v-u|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= (\widetilde{C}_2 + 3\overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(K^{\overline{\rho}+2}_{2(\overline{\rho}+1)}R^{\overline{\rho}})|v-u|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

e, portanto, a demonstração da afirmativa está concluída.

Passemos a demonstração de (ii). Notemos que para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $a|u|^2 \in L^1(\Omega)$. Como $\widehat{f}(0) \in L^2(\Omega)$ e $2 \leq 2(\overline{\rho}+1) \leq 2^*$, o Teorema 1.10 e a desigualdade (3.10) da Proposição 3.8 implicam que $\widehat{F}(u) \in L^1(\Omega)$.

Afirmamos que $\widehat{F}$ é Frechet diferenciável e $D\widehat{F}(u)[h] = \widehat{f}(u) \cdot h$. Sejam $u,\ h \in H_0^1(\Omega)$. Teorema 1.10 e a desigualdade (3.12) da Proposição 3.8 implicam que

$$\begin{aligned}
&|\widehat{F}(u+h) - \widehat{F}(u) - \widehat{f}(u)h|_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad \leq (\overline{C}|ah|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(|u|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)} + |h|^{\overline{\rho}}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})|h|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \overline{C}\widetilde{C}_1|h|_{H_0^1(\Omega)}K_2|h|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(K^{\overline{\rho}}_{2(\overline{\rho}+1)}|u|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)} + K^{\overline{\rho}}_{2(\overline{\rho}+1)}|h|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)})K_{2(\overline{\rho}+1)}|h|_{H_0^1(\Omega)}K_2|h|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad = \overline{C}\widetilde{C}_1K_2|h|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \overline{C}\max(1, 2^{\overline{\rho}-1})(K^{\overline{\rho}}_{2(\overline{\rho}+1)}|u|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)} + K^{\overline{\rho}}_{2(\overline{\rho}+1)}|h|^{\overline{\rho}}_{H_0^1(\Omega)})K_{2(\overline{\rho}+1)})K_2|h|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\widehat{F}(u+h) - \widehat{F}(u) - \widehat{f}(u)h|_{L^1(\Omega)}}{|h|_{H_0^1(\Omega)}} \to 0, \text{ quando } |h|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$$

e (ii) está demonstrada.

Finalmente para mostrar (iii), notemos que as propriedades de $\widehat{f}$ implicam que a aplicação $\Phi_f(z) = (0, (1/\varepsilon)\widehat{f}(z_1))$, para $(z_1, z_2) \in Z$, é limitada e Lipschitziana em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Observação 3.11. *Segue da Proposição 2.7 que as hipóteses impostas na função a na Proposição 3.10 são satisfeitas se, por exemplo,* $\widetilde{a} \in L_u^p(\mathbb{R}^N)$*, com* $p \geq N$*.*

Assuma a Hipótese 3.9 e as hipóteses do Proposição 3.10. A Proposição 2.17 implica que B gera um C_0-semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ em Z e a Proposição 3.1 implica que para cada $\zeta \in Z$, existe um $\omega_\zeta = \omega_{B,\Phi_f,\zeta} \in (0,\infty]$ e uma única aplicação contínua $z_\zeta \colon [0,\omega_\zeta) \to Z$ tal que

$$z_\zeta(t) = T(t)\zeta + \int_0^t T(t-s)\Phi_f(z_\zeta(s))ds,\ t \in [0,\omega_\zeta).$$

Escrevendo $\zeta\pi_f t := z_\zeta(t)$ para $t \in [0,\omega_\zeta)$, obtemos:

Teorema 3.12. *π_f é um semifluxo local em Z e π_f não explode em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. O resultado segue da Proposição 3.1. $\square$

O semifluxo local π_f é o *semifluxo gerado pelas soluções da equação da onda amortecida*

$$\begin{aligned}
\varepsilon u_{tt} + \alpha(x)u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j}\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) &= f(x,u), && x \in \Omega,\ t \in [0,\infty),\\
u(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty).
\end{aligned}$$

Capítulo

4

Existência de atrator global para o problema da onda amortecida definido em domínios não limitados

Ao final do Capítulo 3, definimos o semifluxo local π_f gerado pelas soluções da equação da onda amortecida

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{tt} + \alpha(x)u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) &= f(x,u), && x \in \Omega,\ t \in [0,\infty), \\ u(x,t) &= 0, && x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty). \end{aligned}$$

O objetivo deste capítulo é apresentar condições para que o semifluxo possua atrator global. As condições descritas na Hipótese 4.3 implicam que as condições da Proposição 3.10 estejam satisfeitas e fornecem estimativas de truncamento que nos auxiliam na verificação das hipóteses da Proposição 1.60.

Na Seção 4.2 apresentamos as estimativas de truncamento, mostramos que π_f é um semifluxo global e que as hipóteses (b) e (c) da Proposição 1.60 estão satisfeitas.

Já na Seção 4.3 novas condições serão necessárias para que o semifluxo π_f seja assintoticamente compacto. Aqui teremos que distinguir o caso subcrítico (Hipótese 4.14) e o caso crítico (Hipótese 4.15). A compacidade assintótica é demonstrada no Teorema 4.17 (caso subcrítico) e no Teorema 4.19 (caso crítico), concluindo com a existência do atrator global.

Iniciamos o capítulo demonstrando um resultado auxiliar.

4.1 Um resultado preliminar

O resultado a seguir será usado para justificar a diferenciação de funcionais definidos ao longo de soluções da equação de evolução semilinear apresentada no Capítulo 3.

Teorema 4.1. *Seja Z um espaço de Banach e $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em Z com gerador infinitesimal $B\colon D(B) \subset Z \to Z$. Sejam $U \subset Z$ aberto, Y espaço normado e $V: U \to Y$ uma função que, como aplicação de Z em Y, é contínua em cada ponto de U e Fréchet diferenciável em cada ponto de $U \cap D(B)$. Além disso, seja $W: U \times Z \to Y$ uma função contínua e tal que $DV(z)(Bz+w) = W(z,w)$, para $z \in U \cap D(B)$ e $w \in Z$. Seja $\tau \in (0,\infty)$ e $I = [0,\tau]$. Considere $\bar{z} \in U$, $g\colon I \to Z$ contínua e z uma aplicação de I em U tal que, para $t \in I$,*

$$z(t) = T(t)\bar{z} + \int_0^t T(t-s)g(s)ds.$$

Então, $V \circ z\colon I \to Y$ é diferenciável e

$$(V \circ z)'(t) = W(z(t), g(t)), \quad \textit{para todo } t \in I.$$

Demonstração. Defina $|z|_{D(B)} := |z|_Z + |Bz|_Z$, $z \in D(B)$. Afirmamos que $(D(B), |\cdot|_{D(B)})$ é um espaço de Banach. De fato, seja $(z_n)_n$ sequência de Cauchy em $(D(B), |\cdot|_{D(B)})$. Mostremos que esta sequência é convergente em $(D(B), |\cdot|_{D(B)})$. Para n, $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$|z_n - z_m|_Z \leq |z_n - z_m|_{D(B)} \text{ e } |Bz_n - Bz_m|_Z \leq |z_n - z_m|_{D(B)}.$$

Logo, $(z_n)_n$ e $(Bz_n)_n$ são sequências de Cauchy em $(Z, |\cdot|_Z)$. Como $(Z, |\cdot|_Z)$ é um espaço de Banach, existem $z, \widetilde{z} \in Z$ tais que $|z_n - z|_Z \to 0$ e $|Bz_n - \widetilde{z}|_Z \to 0$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, como B é um operador fechado, segue que $z \in D(B)$ e $Bz = \widetilde{z}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|z_n - z|_{D(B)} = |z_n - z|_Z + |Bz_n - Bz|_Z$$

segue que $|z_n - z|_{D(B)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, concluímos que $(z_n)_n$ é uma sequência convergente em $(D(B), |\cdot|_{D(B)})$.

Para $h \in (0,\infty)$ e $t \in I$, defina $M_h = \sup_{t \in [0,h]} \|T(t)\|_{\mathscr{L}(Z)}$ e

$$g_h(t) = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)g(t)ds.$$

Mostremos que $g_h(t) \in D(B)$ e $Bg_h(t) = \dfrac{1}{h}(T(h)g(t) - g(t))$ para todo $h \in (0,\infty)$ e $t \in I$. De fato, fixado $t \in I$, defina $x_h := g_h(t)$ e $x = g(t)$. Note que

$$\begin{aligned}|x_h - x|_Z &= \left|\frac{1}{h}\int_0^h T(\sigma)xd\sigma - x\right|_Z = \left|\frac{1}{h}\int_0^h (T(\sigma)x - x)d\sigma\right|_Z \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h |T(\sigma)x - x|_Z d\sigma \leq \sup_{\sigma\in[0,h]} |T(\sigma)x - x|_Z.\end{aligned}$$

Logo, $x_h \to x$ quando $h \to 0^+$. Sabendo disso, para cada $h \in (0,\infty)$ fixado e $s < h$, temos que

$$\begin{aligned}&\frac{T(s)x_h - x_h}{s} = \frac{1}{s}\frac{1}{h}T(s)\int_0^h T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{s}\frac{1}{h}\int_0^h T(\sigma)xd\sigma \\ &= \frac{1}{sh}\int_0^h T(s+\sigma)xd\sigma - \frac{1}{sh}\int_0^h T(\sigma)xd\sigma = \frac{1}{sh}\int_s^{s+h} T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{sh}\int_0^h T(\sigma)xd\sigma \\ &= \frac{1}{sh}\int_h^{s+h} T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{sh}\int_0^s T(\sigma)xd\sigma = \frac{1}{sh}\int_0^s T(h+\sigma)xd\sigma - \frac{1}{sh}\int_0^s T(\sigma)xd\sigma \\ &= \frac{1}{s}\frac{1}{h}T(h)\int_0^s T(\sigma)xd\sigma - \frac{1}{s}\frac{1}{h}\int_0^s T(\sigma)xd\sigma = \frac{1}{h}(T(h) - I)\frac{1}{s}\int_0^s T(\sigma)xd\sigma\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{T(s)x_h - x_h}{s} = \lim_{s\to 0^+}\left(\frac{1}{h}(T(h) - I)\frac{1}{s}\int_0^s T(\sigma)xd\sigma\right) = \frac{1}{h}(T(h) - I)x.$$

Logo, $g_h(t) \in D(B)$ e $Bg_h(t) = \dfrac{1}{h}(T(h)g(t) - g(t))$. Sendo assim temos a função $g_h \colon I \to D(B)$ está bem definida. Além disso, para todo $t,t' \in I$, a estimativa

$$\begin{aligned}|g_h(t) - g_h(t')|_{D(B)} &= \left|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)(g(t) - g(t'))ds\right|_Z + \left|\frac{1}{h}(T(h)(g(t) - g(t')) - (g(t) - g(t'))\right|_Z \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s)\|_{\mathscr{L}(Z)}|g(t) - g(t')|_Z ds + \frac{1}{h}(\|T(h)\|_{\mathscr{L}(Z)}|g(t) - g(t')|_Z + |g(t) - g(t')|_Z) \\ &\leq M_h|g(t) - g(t')|_Z + \frac{1}{h}(M_h + 1)|g(t) - g(t')|_Z\end{aligned}$$

e a continuidade da função g mostram que g_h é contínua em I. Mais ainda, afirmamos que $|g_h(t) - g(t)|_Z \to 0$ quando $h \to 0^+$, uniformemente em I. De fato, suponha que afirmativa não seja verdadeira. Logo existem $\varepsilon > 0$ e sequências $(h_m)_m$ em $(0,\infty)$ e $(t_m)_m$ em I tais que $h_m \to 0$, $t_m \to t \in I$ e

$$|g_{h_m}(t_m) - g(t_m)|_Z \geq \varepsilon, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Porém, $|g_{h_m}(t_m)-g(t_m)|_Z \leq |g_{h_m}(t_m)-g(t)|_Z+|g(t_m)-g(t)|_Z$ e

$$\begin{aligned} |g_{h_m}(t_m)-g(t)|_Z &= \left|\frac{1}{h_m}\int_0^{h_m}(T(s)g(t_m)-g(t))ds\right|_Z \\ &\leq \left|\frac{1}{h_m}\int_0^{h_m}T(s)(g(t_m)-g(t))ds\right|_Z+\left|\frac{1}{h_m}\int_0^{h_m}(T(s)g(t)-g(t))ds\right|_Z. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $h_m \to 0$ quando $m \to \infty$, podemos assumir, tomando uma subsequência se necessário, que $h_m \leq 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left|\frac{1}{h_m}\int_0^{h_m}T(s)(g(t_m)-g(t))ds\right|_Z \leq M_1|g(t_m)-g(t)|_Z \to 0, \text{ quando } m \to \infty. \tag{4.3}$$

Como $|T(s)g(t)-g(t)|_Z \to 0$ quando $s \to 0^+$, segue que

$$\left|\frac{1}{h_m}\int_0^{h_m}(T(s)g(t)-g(t))ds\right|_Z \to 0, \text{ quando } m \to \infty. \tag{4.4}$$

Assim, as fórmulas (4.2), (4.3) e (4.4) implicam que $|g_{h_m}(t_m)-g(t_m)|_Z \to 0$ quando $m \to \infty$, mas isso contradiz (4.1), o que prova a afirmação.

Seja $\bar{z} \in U$. Como o conjunto $D(B)$ é denso em Z, existe uma sequência $(\bar{z}_m)_m$ em $D(B)$ que converge para $\bar{z} \in Z$. Sendo $U \subset Z$ um conjunto aberto, podemos assumir, tomando uma subsequência se necessário, que $\bar{z}_m \in U \cap D(B)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $(h_m)_m$ uma sequência em $(0,\infty)$ tal que $h_m \to 0$ quando $m \to \infty$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $t \in I$, defina

$$z_m(t) = T(t)\bar{z}_m + \int_0^t T(t-s)g_{h_m}(s)ds.$$

Afirmamos que $z_m(t) \in D(B)$ para todo $t \in I$, $z_m\colon I \to D(B)$ é contínua e diferenciável. De fato, temos que g_{h_m} é contínua em I com $g_{h_m}(t) \in D(B)$ para todo $t \in I$. Mostremos que Bg_{h_m} também é contínua em I. De fato, dados $t, t' \in I$ temos

$$\begin{aligned} |Bg_{h_m}(t)-Bg_{h_m}(t')|_Z &= \left|\frac{1}{h_m}(T(h_m)g(t)-g(t))-\frac{1}{h_m}(T(h_m)g(t')-g(t'))\right|_Z \\ &= \frac{1}{h_m}|(T(h_m)g(t)-g(t))-(T(h_m)g(t')-g(t'))|_Z \\ &= \frac{1}{h_m}|T(h_m)(g(t)-g(t'))-(g(t)-g(t'))|_Z. \\ &\leq \frac{1}{h_m}\|T(h_m)\|_{\mathscr{L}(Z)}|g(t)-g(t')|_Z+\frac{1}{h_m}|g(t)-g(t')|_Z \\ &\leq \frac{1}{h_m}(M_{h_m}+1)|g(t)-g(t')|_Z. \end{aligned}$$

A continuidade da função g e a estimativa acima implicam a continuidade de Bg_{h_m}. Logo, uma aplicação do Teorema 2.1 implica que $z_m(t)$ é solução do problema de Cauchy

$$z_m'(t) = Bz_m + g_{h_m}(t), \text{ e } z_m(0) = \bar{z}_m$$

e a afirmativa é uma consequência do Teorema 2.1.

Para concluir a demonstração do resultado, notemos que pelo o que já foi provado até agora, temos que $|z_m(t) - z(t)|_Z \to 0$ quando $m \to \infty$, uniformemente em I. De fato, sejam $m \in \mathbb{N}$ e $t \in I$. Temos

$$\begin{aligned}
|z_m(t) - z(t)|_Z &= \left| T(t)(\bar{z}_m - \bar{z}) + \int_0^t T(t-s)(g_{h_m}(s) - g(s))ds \right|_Z \\
&\leq M_\tau |\bar{z}_m - \bar{z}|_Z + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathscr{L}(Z)} |g_{h_m}(s) - g(s)|_Z ds \\
&\leq M_\tau |\bar{z}_m - \bar{z}|_Z + M_\tau \tau \sup_{s \in [0,\tau]} |g_{h_m}(s) - g(s)|_Z
\end{aligned}$$

o que implica que $|z_m(t) - z(t)|_Z \to 0$ quando $m \to \infty$, uniformemente em I. Logo, existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_m(t) \in U \cap D(B)$ para todo $m \geq m_0$ e todo $t \in I$. Além disso, as hipóteses sobre a aplicação V e W e o que já provamos implicam que $|(V \circ z_m)(t) - (V \circ z)(t)|_Y \to 0$ quando $m \to \infty$, uniformemente em I. Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $t \in I$ temos

$$(V \circ z_m)'(t) = DV(z_m(t))(Bz_m(t) + g_{h_m}(t)) = W(z_m(t), g_{h_m}(t)).$$

Logo, $|W(z_m(t), g_{h_m}(t)) - W(z(t), g(t))|_Y \to 0$ quando $m \to \infty$, uniformemente em I. Portanto, $V \circ z$ é diferenciável em Y e $(V \circ z)'(t) = W(z(t), g(t))$, para $t \in I$. A demonstração está completa. □

4.2 Estimativas de truncamento

Nesta seção mostraremos que a Hipótese 4.3, juntamente como as estimativas de truncamento (ver Teorema 4.9), implicam que o semifluxo π_f é global. Também mostraremos que todo subconjunto limitado de X é u-limitado e que existe um conjunto limitado B_0 em X com a propriedade que para todo $x \in X$ existe um $t_x \in [0, \infty)$ tal que $x\pi t_x \in B_0$. Ou seja, provaremos que as hipóteses (b) e (c) da Proposição 1.60 são válidas.

Proposição 4.2. *Seja* $\overline{\gamma}\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ *uma função de classe* C^1 *tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} (|\overline{\gamma}(x)|^2 + |\nabla\overline{\gamma}(x)|^2) < \infty.$$

Defina $\gamma = \overline{\gamma}^2$*. Assuma as hipóteses e notações da Proposição 3.10. Fixe* $\delta \in (0,\infty)$ *e defina as funções* $V = V_\gamma\colon Z \to \mathbb{R}$ *e* $V^* = V^*_\gamma\colon Z \to \mathbb{R}$ *por*

$$V(z) = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(x)\Psi_z(x)dx \;\; e \;\; V^*(z) = \int_\Omega \gamma(x)F(x,z_1(x))dx$$

para $z = (z_1,z_2) \in Z$*, onde*

$$\Psi_z(x) = \varepsilon|\delta z_1(x) + z_2(x)|^2 + (A\nabla z_1)(x)\cdot\nabla z_1(x) + (\beta(x) - \delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)|z_1(x)|^2,$$

para $z = (z_1,z_2) \in Z$ *e* $x \in \Omega$*. Sejam* $\tau_0 \in (0,\infty)$*,* $I = [0,\tau_0]$ *e* $z\colon I \to Z$ *uma solução de* π_f*. Então as funções* $V\circ z$ *e* $V^*\circ z$ *são diferenciáveis e, para* $t \in I$*,*

$$\begin{aligned}(V\circ z)'(t) = &\int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon(\delta z_1 + z_2)(\delta z_2 - (1/\varepsilon)\alpha(x)z_2 + (1/\varepsilon)f(x,z_1(t)(x))))dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)((-\delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)z_1z_2 - \delta\beta(x)z_1z_2)dx \\ &- \delta\int_\Omega \gamma(x)(A\nabla(z_1))\cdot\nabla z_1 dx - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$(V^*\circ z)'(t) = \int_\Omega \gamma(x)f(x,z_1(t)(x))z_2(t)(x)dx \tag{4.6}$$

e

$$\begin{aligned}(V\circ z)'(t) + 2\delta(V\circ z)(t) = &\int_\Omega \gamma(x)(2\delta\varepsilon - \alpha(x))(\delta z_1 + z_2)^2 dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)f(x,z_1(t)(x))dx - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Demonstração. Notemos que as funções V e V^* estão bem definidas. Além disso, afirmamos que V e V^* são Fréchet-diferenciáveis em Z. De fato, considere as seguintes funções

$$\begin{aligned}A(z) &= (1/2)\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon|\delta z_1(x) + z_2(x)|^2 dx, \quad z = (z_1,z_2) \in Z,\\ B(z) &= (1/2)\int_\Omega \gamma(x)(A\nabla z_1)(x)\cdot\nabla z_1(x)dx, \quad z = (z_1,z_2) \in Z,\\ C(z) &= (1/2)\int_\Omega \gamma(x)(\beta(x) - \delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)|z_1(x)|^2 dx, \quad z = (z_1,z_2) \in Z.\end{aligned}$$

Logo, $V(z) = A(z) + B(z) + C(z)$, $z \in Z$. Notemos que as funções A, B e C são composições de funções Frechet-diferenciáveis em Z e, portanto, a aplicação V é Frechet-diferenciável em Z. Além disso,

$$\begin{aligned}
DA(z)[\xi] &= \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon 2(\delta z_1(x)+z_2(x))(\delta\xi_1(x)+\xi_2(x))dx\\
&= \int_\Omega \gamma(x)\varepsilon(\delta z_1(x)+z_2(x))(\delta\xi_1(x)+\xi_2(x))dx,\\
DB(z)[\xi] &= \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(x)2(A\nabla z_1)(x)\cdot\nabla\xi_1(x)dx = \int_\Omega \gamma(x)(A\nabla z_1)(x)\cdot\nabla\xi_1(x)dx,\\
DC(z)[\xi] &= \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(x)(\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)2(z_1(x))\xi_1(x)dx\\
&= \int_\Omega \gamma(x)(\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)(z_1(x))\xi_1(x)dx,
\end{aligned}$$

onde $z=(z_1,z_2)\in Z$ e $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in Z$. Obtemos que

$$\begin{aligned}
DV(z)[\xi] = &\int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon(\delta z_1(x)+z_2(x))(\delta\xi_1(x)+\xi_2(x))+(A(x)\nabla z_1(x))\cdot\nabla\xi_1(x))dx\\
&+\int_\Omega \gamma(x)((\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1(x)\xi_1(x))dx,\ z=(z_1,z_2)\in Z \text{ e } \xi=(\xi_1,\xi_2)\in Z.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que V^* é uma aplicação Frechet-diferenciável em Z e

$$DV^*(z)[\xi] = \int_\Omega \gamma(x)f(x,z_1(x))\xi_1(x)dx,\ z=(z_1,z_2)\in Z \text{ e } \xi=(\xi_1,\xi_2)\in Z.$$

Em particular, para $z=(z_1,z_2)\in D(B)$ e $w=(w_1,w_2)\in Z$, obtemos,

$$\begin{aligned}
DV(z)[Bz+w] = &\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon(\delta z_1+z_2)\delta(z_2+w_1)dx\\
&+\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon(\delta z_1+z_2)\left(-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2+(1/\varepsilon)(Lz_1-\beta(x)z_1)+w_2\right)dx\\
&+\int_\Omega \gamma(x)\big((A\nabla z_1)\cdot\nabla(z_2+w_1)+(\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1(z_2+w_1)\big)\,dx,
\end{aligned}$$

$$DV^*(z)[Bz+w] = \int_\Omega \gamma(x)f(x,z_1)(z_2+w_1)dx.$$

Observe que nas fórmulas acima omitimos o argumento x em algumas das expressões. Notemos que

$$\begin{aligned}
DV(z)[Bz+w] = &\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon(\delta z_1+z_2)(\delta(z_2+w_1)-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2+w_2)dx\\
&+\int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1+z_2)(Lz_1-\beta(x)z_1)dx\\
&+\int_\Omega \gamma(x)((A\nabla z_1)\cdot\nabla w_1+(\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1(z_2+w_1))dx+\int_\Omega \gamma(x)(A\nabla z_1)\cdot\nabla z_2)dx.
\end{aligned}$$

A igualdade (2.11) implica que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1+z_2)(Lz_1-\beta(x)z_1)dx &= -\int_\Omega A\nabla z_1\cdot\nabla(\gamma(x)(\delta z_1+z_2))dx\\ &\quad -\int_\Omega \beta(x)z_1\gamma(x)(\delta z_1+z_2)dx\\ &= -\int_\Omega \gamma(x)A\nabla(\delta z_1+z_2)\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx\\ &\quad -\int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1+z_2)\beta(x)z_1 dx.\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \gamma(x)A\nabla(\delta z_1+z_2)\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx+\int_\Omega\gamma(x)(A\nabla z_1)\cdot\nabla z_2)dx\\ = -\int_\Omega\gamma(x)(A\nabla(\delta z_1))\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}DV(z)[Bz+w] &= \int_\Omega \gamma(x)\varepsilon(\delta z_1+z_2)(\delta(z_2+w_1)-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2+w_2)dx\\ &\quad+\int_\Omega\gamma(x)\left((A\nabla z_1)\cdot\nabla w_1+(-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1(z_2+w_1)+\beta(x)(z_1w_1-\delta z_1z_1)\right)dx\\ &\quad-\int_\Omega\gamma(x)(A\nabla(\delta z_1))\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx.\end{aligned}$$

Defina agora as aplicações $W\colon Z\times Z\to\mathbb{R}$ e $W^*\colon Z\times Z\to\mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}W(z,w) &= \int_\Omega\gamma(x)(\varepsilon(\delta z_1+z_2)(\delta(z_2+w_1)+(-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2+w_2))dx\\ &\quad+\int_\Omega\gamma(x)((A\nabla z_1)\cdot\nabla w_1+(-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1(z_2+w_1))+\beta(x)(z_1w_1-\delta z_1z_1))dx\\ &\quad-\int_\Omega\gamma(x)(A\nabla(\delta z_1))\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx,\\ W^*(z,w) &= \int_\Omega\gamma(x)f(x,z_1)(z_2+w_1)dx\end{aligned}$$

para $(z,w)\in Z\times Z$ com $z=(z_1,z_2)$ e $w=(w_1,w_2)$. Em particular para $w_1=0$, obtemos

$$\begin{aligned}W(z,w) &= \int_\Omega\gamma(x)(\varepsilon(\delta z_1+z_2)(\delta z_2+(-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2+w_2)) \qquad (4.8)\\ &\quad+\int_\Omega\gamma(x)((-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)z_1z_2-\delta\beta(x)z_1z_1)dx\\ &\quad-\int_\Omega\gamma(x)(A\nabla(\delta z_1))\cdot\nabla z_1 dx-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx,\\ W^*(z,w) &= \int_\Omega\gamma(x)f(x,z_1)z_2 dx. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Afirmamos que as aplicações W e W^* são contínuas de $Z \times Z$. De fato, sejam (z,w), $(\widetilde{z},\widetilde{w}) \in Z \times Z$. Temos que

$$\begin{aligned} |W^*(z,w) - W^*(\widetilde{z},\widetilde{w})| &\leq \int_\Omega \gamma(x)|f(x,z_1(x))z_2 - f(x,\widetilde{z}_1(x))\widetilde{z}_2|dx \\ &\leq \int_\Omega \gamma(x)|f(x,z_1(x)) - f(x,\widetilde{z}_1(x))||z_2 + w_1|dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)|f(x,\widetilde{z}_1(x))||(z_2 - \widetilde{z}_2) + (w_1 - \widetilde{w_1}|dx, \end{aligned}$$

onde $z = (z_1,z_2)$, $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)$, $w = (w_1,w_2)$ e $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)$. A hipótese imposta na função γ e a Proposição 3.6 implicam a continuidade da aplicação W^*. Analogamente, utilizando a Hipótese 2.5 e a Proposição 3.8, mostramos a continuidade da aplicação W. A afirmativa está demonstrada.

Sejam $\tau_0 \in (0,\infty)$, $I = [0,\tau_0]$ e $z\colon I \to Z$ uma solução de π_f. O Teorema 4.1 e as fórmulas (4.8) e (4.9) implicam as igualdades (4.5) e (4.6). Para concluir a demonstração da proposição, verifiquemos que a igualdade em (4.7) é válida. De fato,

$$\begin{aligned} (V\circ z)'(t) + 2\delta(V\circ z)(t) &= \int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon(\delta z_1 + z_2)(\delta z_2 + (-(1/\varepsilon)\alpha(x)z_2 + (1/\varepsilon)f(x,z_1))dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)((-\delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)z_1z_2 - \delta\beta(x)z_1z_1))dx - \int_\Omega \gamma(x)\delta(A\nabla z_1)\cdot\nabla z_1 dx \\ &- \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx \\ &+ 2\delta\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon|\delta z_1 + z_2|^2 + (A\nabla z_1)\cdot\nabla z_1 + (\beta(x) - \delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)|z_1|^2 dx \\ &= \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)f(x,z_1(t)(x))dx - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)\delta(\varepsilon\delta - \alpha(x))z_1z_2 dx + \int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon\delta - \alpha(x))|z_2|^2 dx \\ &+ \delta\int_\Omega \gamma(x)(-\alpha(x) + \delta\varepsilon)z_1z_2 dx - \int_\Omega \gamma(x)\delta\beta(x)|z_1|^2 dx \\ &- \delta\int_\Omega \gamma(x)(A\nabla z_1)\cdot\nabla z_1 dx + \delta\int_\Omega \gamma(x)\varepsilon|\delta z_1 + z_2|^2 dx \\ &+ \delta\int_\Omega \gamma(x)(A\nabla z_1)\cdot\nabla z_1 dx + \delta\int_\Omega \gamma(x)\beta(x)|z_1|^2 dx + \delta^2\int_\Omega \gamma(x)(-\alpha(x) + \delta\varepsilon)|z_1|^2 dx \\ &= \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)f(x,z_1(t)(x))dx - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon\delta - \alpha(x))(|\delta z_1|^2 + 2\delta z_1z_2 + |z_2|^2)dx + \varepsilon\delta\int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)^2 dx \\ &= \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)f(x,z_1(t)(x))dx - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1 dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1 + z_2)^2(2\varepsilon\delta - \alpha(x))dx. \end{aligned}$$

A demonstração está completa. $\square$

Considere as seguintes hipóteses adicionais:

Hipótese 4.3. *(a)* $\alpha_0 > 0$*;*

(b) $\overline{C}, \overline{\rho}, \overline{\tau} \in [0,\infty)$ *e* $\overline{\mu} \in (0,\infty)$ *são constantes e* $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função com* $c \in L^1(\Omega)$*. Se* $N \geq 3$*, então* $\overline{\rho} \leq (2^*/2) - 1$*;*

(c) $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável tal que* $u \mapsto |a|u$ *e* $u \mapsto |a|^{1/2}u$ *induzem operadores lineares limitados de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^2(\Omega)$*;*

(d) $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaz a condição* C^1*-Carathéodory;*

(e) F *é a primitiva canônica de* f*;*

(f) $\partial_u f$ *satisfaz a condição de* $(\overline{C}, \overline{\rho}, a)$ *de crescimento;*

(g) $|f(\cdot,0)|_{L^2(\Omega)} \leq \overline{\tau}$*;*

(h) $f(x,u)u - \overline{\mu}F(x,u) \leq c(x)$ *e* $F(x,u) \leq c(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$ *e para todo* $u \in \mathbb{R}$*.*

A condição (h) na Hipótese 4.3 é uma condição de dissipatividade que implicará a existência de atratores globais para o problema estudado. O próximo lema apresenta uma condição suficiente para a hipótese de dissipatividade (h).

Na demonstração do lema a seguir utilizaremos o seguinte fato:

Observação 4.4. *Seja* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não crescente. Então*

$$h(u)u \leq \int_0^u h(s)ds, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.5. *Seja* $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo a condição* C^0 *Carathéodory e seja* F *a canônica primitiva de* f*. Sejam* ν*,* $\gamma \in (1,\infty)$ *constantes e* $D \in L^1(\Omega)$ *uma função com* $D(x) > 0$ *para todo* $x \in \Omega$ *e suponha que*

$$F(x,u) \leq D(x) \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e todo } u \in \mathbb{R}.$$

Assuma também que a função $u \mapsto (\gamma D(x) - F(x,u))^\nu$ *seja convexa para quase todo* $x \in \Omega$*. Defina*

$$\overline{\mu} = (1/\nu) \text{ e } c(x) = \max(1, \gamma^\nu(\gamma-1)^{1-\nu}\nu^{-1})D(x),\ x \in \Omega.$$

Então $f(x,u)u - \overline{\mu}F(x,u) \leq c(x)$ *e* $F(x,u) \leq c(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$ *e todo* $u \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Defina $G(x,u) = -(\gamma D(x) - F(x,u))^{\nu}$ para $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$. A convexidade da função $u \mapsto (\gamma D(x) - F(x,u))^{\nu}$ implica que $u \mapsto \partial_u G(x,u) = \nu f(x,u)(\gamma D(x) - F(x,u))^{\nu-1}$ é uma função não-crescente e contínua para quase todo $x \in \Omega$. A desigualdade da Observação 4.4 implica que para quase todo $x \in \Omega$ e todo $u \in \mathbb{R}$,

$$\nu f(x,u)(\gamma D(x) - F(x,u))^{\nu-1} u \leq G(x,u) - G(x,0) = -(\gamma D(x) - F(x,u))^{\nu} + (\gamma D(x))^{\nu}.$$

Como $F(x,u) \leq D(x)$, segue que

$$F(x,u) \leq \max(1, \gamma^{\nu}(\gamma-1)^{1-\nu}\nu^{-1})D(x) \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e todo } u \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para quase todo $x \in \Omega$ e todo $u \in \mathbb{R}$, temos $\gamma D(x) - F(x,u) \geq (\gamma-1)D(x) > 0$ e

$$\begin{aligned} \nu f(x,u)u &\leq -(\gamma D(x) - F(x,u)) + (\gamma D(x))^{\nu}((\gamma-1)D(x))^{1-\nu} \\ &\leq F(x,u) + \gamma^{\nu}(\gamma-1)^{1-\nu}D(x). \end{aligned}$$

Portanto, para quase todo $x \in \Omega$ e todo $u \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x,u)u - \nu^{-1}F(x,u) \leq \gamma^{\nu}(\gamma-1)^{1-\nu}\nu^{-1}D(x),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 4.6. *Uma função $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que sua canônica primitiva de F seja $F(x,u) = -D(x)e^{-u}$, $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$, onde $D \in L^1(\Omega)$ com $D(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, satisfaz as condições do Lema 4.5. Outro exemplo, é $F(x,u) = -|u|^{2r} + D(x)$, $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$, onde $0 \leq r \leq (\overline{\rho}+2)/2$ e $D \in L^1(\Omega)$ com $D(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.*

Fixe uma função $\overline{\vartheta}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^{∞} com $\overline{\vartheta}(s) = 0$ se $s \in (-\infty, 1]$ e $\overline{\vartheta}(s) = 1$ para $s \in [2,\infty)$. Defina $\vartheta := \overline{\vartheta}^2$. Para $k \in \mathbb{N}$, sejam $\overline{\vartheta}_k\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $\vartheta_k\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$\overline{\vartheta}_k(x) = \overline{\vartheta}(|x|^2/k^2) \text{ e } \vartheta_k(x) = \vartheta(|x|^2/k^2),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 4.7. *Segue que para cada $k \in \mathbb{N}$, as funções ϑ_k e $\overline{\vartheta}_k$ são nulas na bola fechada de centro na origem e raio k e constante igual a 1 fora da bola fechada de centro na origem e raio $\sqrt{2}k$.*

A propriedade da diferenciação do produto de funções em $H^1(\Omega)$ (ver Proposição 1.6) implica que

Lema 4.8. *Para todo $u \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $\overline{\gamma}u \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ e $\nabla(\overline{\gamma}u) = \overline{\gamma}(\nabla u) + (\nabla\overline{\gamma})u$.*

O próximo resultado apresenta as estimativas de truncamento que auxilirão na demonstração do Teorema 4.12.

Teorema 4.9. *Assuma a Hipótese 3.9 e a Hipótese 4.3. Escolha δ e ν em $(0,\infty)$ com*

$$\nu \leq \min(1, \overline{\mu}/2),\ \lambda_1 - \delta\alpha_1 > 0 \ \text{ e } \ \alpha_0 - 2\delta\varepsilon \geq 0. \tag{4.10}$$

Então existe uma constante $c' \in [0,\infty)$ e para todo $R \in [0,\infty)$, existe uma constante $M' = M'_R$ tal que para todo $\tau_0 \in [0,\infty)$ e toda solução $z(\cdot)$ de π_f em $I = [0,\tau_0]$ com $|z(0)|_Z \leq R$ temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2 + (A(x)\nabla z_1(t)(x)) \cdot \nabla z_1(t)(x) \\ + (\beta(x) - \delta\alpha(x))|z_1(t)(x)|^2)dx \leq c' + M' e^{-2\delta\nu t}, \text{ para } t \in I.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Se $|z(t)|_Z \leq R$, para todo $t \in I$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $c_k = c_{k,R} \in [0,\infty)$ tal que $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e

$$\begin{aligned}\int_\Omega \vartheta_k(x)((\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2 + (A(x)\nabla z_1(t)(x)) \cdot \nabla z_1(t)(x) \\ + (\beta(x) - \delta\alpha(x))|z_1(t)(x)|^2)dx \leq c_k + M' e^{-2\delta\nu t}, \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ e } t \in I.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para demonstrar o Teorema 4.9 necessitamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 4.10. *Assuma as hipóteses do Teorema 4.9. Sejam $\overline{\gamma}$, γ, $V = V_\gamma$ e $V^* = V^*_\gamma$ como na Proposição 4.2. Para todo $z \in Z$, defina $s(z) = s_{\overline{\gamma}}(z)$ por*

$$s(z)(x) = -2\overline{\gamma}(x)z_1(x)(A(x)\nabla\overline{\gamma}(x)) \cdot \nabla z_1(x) - |z_1(x)|^2(A(x)\nabla\overline{\gamma}(x)) \cdot \nabla\overline{\gamma}(x),\ x \in \Omega.$$

Dado $\tau_0 \in [0,\infty)$ e dada uma solução $z(\cdot)$ de π_f definida em $I = [0,\tau_0]$, considere

$$\eta(t) = \eta_\gamma(t) = V(z(t)) - V^*(z(t)),\ t \in I.$$

Então, para $t \in I$,

$$\begin{aligned}\eta'(t) + 2\delta\nu\eta(t) \leq \delta(\overline{\mu} - 2\nu + 1)\int_\Omega \gamma(x)c(x)dx \\ - \int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\gamma) \cdot \nabla z_1 dx - \delta(1-\nu)\int_\Omega s(z(t))(x)dx.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Demonstração. Segue Lema 4.8 que para todo $z = (z_1, z_2) \in Z$ e $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}(A(x)\nabla(\overline{\gamma}z_1)(x)) \cdot \nabla(\overline{\gamma}z_1)(x) &= |\overline{\gamma}(x)|^2(A(x)\nabla z_1(x)) \cdot \nabla z_1(x) \\ &+ 2\overline{\gamma}(x)z_1(x)(A(x)\nabla\overline{\gamma}(x)) \cdot \nabla z_1(x) + |z_1(x)|^2(A(x)\nabla\overline{\gamma}(x)) \cdot \nabla\overline{\gamma}(x) \\ &= |\overline{\gamma}(x)|^2(A(x)\nabla z_1(x)) \cdot \nabla z_1(x) - s(z)(x).\end{aligned}$$

Esta igualdade e a definição de V implicam para todo $z = (z_1, z_2) \in Z$ que

$$\begin{aligned}2V(z) &= \int_\Omega \gamma(x)(\varepsilon|\delta z_1(x) + z_2(x)|^2 + (A\nabla z_1)(x) \cdot \nabla z_1(x) + (\beta(x) - \delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)|z_1(x)|^2)dx \\ &\geq \int_\Omega \gamma(x)((A(x)\nabla z_1(x)) \cdot \nabla z_1(x) + (\beta(x) - \delta\alpha(x))|z_1(x)|^2)dx \\ &= \int_\Omega ((A(x)\nabla(\overline{\gamma}z_1)(x) \cdot \nabla(\overline{\gamma}z_1)(x) + \int_\Omega \beta(x)|(\overline{\gamma}z_1)(x)|^2dx - \int_\Omega \delta\alpha(x)|(\overline{\gamma}z_1)(x)|^2dx \\ &+ \int_\Omega s(z)(x)dx \geq (\lambda_1 - \delta\alpha_1)|\overline{\gamma}z_1|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega s(z)(x)dx.\end{aligned}$$

Como $(\lambda_1 - \delta\alpha_1) > 0$, temos que

$$2V(z) \geq \int_\Omega s(z)(x)dx, \quad \text{para todo } z \in Z. \tag{4.14}$$

Seja $\tau_0 \in [0, \infty)$ e seja $z(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot))$ uma solução de π_f definida em $I = [0, \tau_0]$. A desigualdade (4.14) implica que

$$\begin{aligned}(V \circ z)'(t) + 2\delta\nu(V \circ z)(t) &= (V \circ z)'(t) + 2\delta\nu(V \circ z)(t) + 2\delta(V \circ z)(t) - 2\delta(V \circ z)(t) \\ &= (V \circ z)'(t) + 2\delta(V \circ z)(t) - \delta(1 - \nu)2(V \circ z)(t) \\ &\leq (V \circ z)'(t) + 2\delta(V \circ z)(t) - \delta(1 - \nu)\int_\Omega s(z(t))(x)dx.\end{aligned}$$

Como $2\delta\varepsilon - \alpha_0 < 0$, segue que

$$\begin{aligned}(V \circ z)'(t) &+ 2\delta\nu(V \circ z)(t) + \delta(1 - \nu)\int_\Omega s(z(t))(x)dx \leq (V \circ z)'(t) + 2\delta(V \circ z)(t) \\ &\leq (2\delta\varepsilon - \alpha_0)\int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1(t) + z_2(t))^2dx \\ &+ \int_\Omega \gamma(x)(\delta z_1(t) + z_2(t))f(x, z_1(t)(x))dx - \int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma) \cdot \nabla z_1(t)dx \\ &\leq \delta\int_\Omega \gamma(x)z_1(t)f(x, z_1(t)(x))dx + \int_\Omega \gamma(x)z_2(t)f(x, z_1(t)(x))dx \\ &- \int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma) \cdot \nabla z_1 dx\end{aligned}$$

e temos

$$
\begin{aligned}
(V \circ z)'(t) + 2\delta\nu(V \circ z)(t) + \delta(1-\nu)\int_\Omega s(z(t))(x)dx& \\
\leq \delta\int_\Omega \gamma(x)(\overline{\mu}F(x,z_1(t)(x)) + c(x))dx - 2\delta\nu(V^* \circ z)(t)& \\
+2\delta\nu(V^* \circ z)(t) + (V^* \circ z)'(t) - \int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1(t)dx =: S^*.&
\end{aligned}
$$

Ou seja, obtemos que

$$
(V \circ z)'(t) + 2\delta\nu(V \circ z)(t) + \delta(1-\nu)\int_\Omega s(z(t))(x)dx \leq S^*, \text{ para todo } t \in I.
$$

Logo para concluir a demonstração da desigualdade (4.13), basta mostrar que

$$
\begin{aligned}
S^* \leq \delta(\overline{\mu} - 2\nu + 1)\int_\Omega \gamma(x)c(x)dx + 2\delta\nu(V^* \circ z)(t) + (V^* \circ z)'(t)& \\
-\int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1(t)dx.&
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

De fato, com $F(x,z_1(t)(x)) \leq c(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e todo $t \in I$, temos

$$
\begin{aligned}
S^* &= \delta(\overline{\mu} - 2\nu)\int_\Omega \gamma(x)F(x,z_1(t)(x))dx + \delta\int_\Omega \gamma(x)c(x)dx \\
&\quad +2\delta\nu(V^* \circ z)(t) + (V^* \circ z)'(t) - \int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1(t)dx \\
&\leq \delta(\overline{\mu} - 2\nu + 1)\int_\Omega \gamma(x)c(x)dx \\
&\quad +2\delta\nu(V^* \circ z)(t) + (V^* \circ z)'(t) - \int_\Omega (\delta z_1(t) + z_2(t))(A\nabla\gamma)\cdot\nabla z_1(t)dx,
\end{aligned}
$$

o que demonstra (4.15) e finaliza a prova do lema. □

Observação 4.11. *Recordemos que para $r,s \in \mathbb{R}$ temos que $|r|^2 = |(r+s)+(-s)|^2 \leq 2(|r+s|^2+|s|^2)$ e, portanto, $|r+s|^2 \geq (1/2)|r|^2 - |s|^2$. Este fato será utilizado na próxima demonstração.*

Demonstração do Teorema 4.9. Seja $\tau_0 \in [0,\infty)$ arbitrário e seja $z(\cdot) = (z_1(\cdot), z_2(\cdot))$ uma solução arbitrária de π_f em $I = [0,\tau_0]$, com $|z(0)|_Z \leq R$. Considere $\overline{\gamma} = \gamma \equiv 1$ da Proposição 4.2. Segue que $s_{\overline{\gamma}}(z(t)) \equiv 0$ para todo $t \in I$ (a definição da função $s_{\overline{\gamma}}$ é dada no Lema 4.10). Segue do Lema 4.10 que

$$
\eta'(t) + 2\delta\nu\eta(t) \leq \overline{c}, \text{ para todo } t \in I, \tag{4.16}
$$

onde $\overline{c} = \delta(\overline{\mu} - 2\nu + 1)\int_\Omega c(x)dx$. Derivando a função $t \mapsto \eta(t)e^{2\delta\nu t}$, $t \in I$, e usando a desigualdade (4.16) obtemos

$$\frac{d}{dt}\eta(t)e^{2\delta\nu t}dt = \eta'(t)e^{2\delta\nu t} + 2\delta\nu\eta(t)e^{2\delta\nu t} = (\eta'(t) + 2\delta\nu\eta(t))e^{2\delta\nu t} \leq \overline{c}e^{2\delta\nu t},\ t \in I.$$

Logo,

$$\eta(t)e^{2\delta\nu t} - \eta(0) \leq \frac{\overline{c}}{2\delta\nu}[e^{2\delta\nu t} - 1],\ t \in I,$$

ou seja,

$$\eta(t) \leq \frac{\overline{c}}{2\delta\nu}[1 - e^{-2\delta\nu t}] + \eta(0)e^{-2\delta\nu t},\ t \in I.$$

Seja $C_2 \in (0,\infty)$ uma constante tal que

$$|u|_{L^{\overline{\rho}+2}(\Omega)} \leq C_2|u|_{H_0^1(\Omega)},\ \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Como os operadores de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ induzidos por $u \mapsto |\beta|^{1/2}u$, respectivamente $u \mapsto |a|^{1/2}u$, são limitados, temos que existem constantes $L_\beta \in (0,\infty)$, respectivamente $L_a \in (0,\infty)$ tais que

$$||\beta|^{1/2}u|_{L^2(\Omega)} \leq L_\beta|u|_{H_0^1(\Omega)},\ \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$||a|^{1/2}u|_{L^2(\Omega)} \leq L_a|u|_{H_0^1(\Omega)},\ \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Como $|z(0)|_Z \leq R$, a Proposição 3.8 implica que

$$\begin{aligned} |\eta(0)| = |V(z(0)) - V^*(z(0))| &\leq |V(z(0))| + |V^*(z(0))| \\ &\leq \frac{1}{2}(2\delta^2\varepsilon R^2 + 2\varepsilon R^2 + a_1R^2 + (L_\beta^2 + \delta^2\varepsilon)R^2) \\ &\quad + \overline{C}(L_a^2R^2/2 + (C_2)^{\overline{\rho}+2}R^{\overline{\rho}+2}/(\overline{\rho}+2)) + R\overline{\tau} =: \overline{M}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

As definições das funções V e V^* e as hipóteses sobre a função F implicam que para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon|\delta z_1(t)(x) + z_2(t)(x)|^2 + (A(x)\nabla z_1(t)(x)) \cdot \nabla z_1(t)(x))dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega (\beta(x) - \delta\alpha(x) + \delta^2\varepsilon)|z_1(t)(x)|^2 dx \\ &\quad \leq \frac{\overline{c}}{2\delta\nu}[1 - e^{-2\delta\nu t}] + \overline{M}e^{-2\delta\nu t} + V^*(z(t)) \\ &\quad \leq \frac{\overline{c}}{2\delta\nu}[1 - e^{-2\delta\nu t}] + \overline{M}e^{-2\delta\nu t} + \int_\Omega c(x)dx, \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \in Z$ e $t \in I$. Utilizando em (4.18) a desiguldade da Observação 4.11

com $r=z_2(t)(x)$ e $s=\delta z_1(t)(x)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega((\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2+(A(x)\nabla z_1(t)(x))\cdot\nabla z_1(t)(x)+(\beta(x)-\delta\alpha(x))|z_1(t)(x)|^2)dx \\ \leq \frac{\overline{c}}{2\delta\nu}[1-e^{-2\delta\nu t}]+\overline{M}e^{-2\delta\nu t}+\int_\Omega c(x)dx.$$

Defina

$$c'=2\left[\frac{\overline{c}}{2\delta\nu}+\int_\Omega c(x)dx\right] \text{ e } M'=2\overline{M}. \tag{4.19}$$

Obtemos facilmente a desigualde (4.11).

Suponha agora $|z(t)|_Z\leq R$, para todo $t\in I$. Seja $k\in\mathbb{N}$ arbitrário e defina $V_k=V_{\gamma_k}$, $V_k^*=V_{\gamma_k}^*$, $s_k(z)(x)=s_{\overline{\gamma}_k}(z)(x)$ e $\eta_k(t)=\eta_{\gamma_k}(t)$, onde $\overline{\gamma}_k=\overline{\vartheta}_k$ e $\gamma_k=\vartheta_k$. Como

$$\nabla\vartheta_k(x)=\frac{2}{k^2}\vartheta'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)x \text{ e } \nabla\overline{\vartheta}_k(x)=\frac{2}{k^2}\overline{\vartheta}'\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)x,\ x\in\Omega,$$

temos que

$$\sup_{x\in\Omega}|\nabla\vartheta_k(x)|\leq C_\vartheta/k \text{ e } \sup_{x\in\Omega}|\nabla\overline{\vartheta}_k(x)|\leq C_{\overline{\vartheta}}/k, \tag{4.20}$$

onde $C_\vartheta=2\sqrt{2}\sup_{y\in\mathbb{R}}|\vartheta'(y)|$ e $C_{\overline{\vartheta}}=2\sqrt{2}\sup_{y\in\mathbb{R}}|\overline{\vartheta}'(y)|$. Afirmamos que

$$-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\vartheta_k)\cdot\nabla z_1dx\leq N^2a_1(C_\vartheta/k)(\delta R+R)R \tag{4.21}$$

e

$$-\delta(1-\nu)\int_\Omega s_k(z(t))(x)dx\leq a_1\delta(1-\nu)(2N^2C_{\overline{\vartheta}}/k+C_{\overline{\vartheta}}^2/k^2)R^2. \tag{4.22}$$

De fato, notemos que

$$-\int_\Omega(\delta z_1+z_2)(A\nabla\vartheta_k)\cdot\nabla z_1dx\leq\int_\Omega|(\delta z_1+z_2)(A\nabla\vartheta_k)\cdot\nabla z_1|dx.$$

Segue do Lema 2.6 e da primeira desigualdade em (4.20) que

$$|(\delta z_1+z_2)(A\nabla\vartheta_k)\cdot\nabla z_1|=\left|(\delta z_1+z_2)\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right| \\ \leq|\delta z_1+z_2|\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\left|\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_j}\right|\right)\left|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right|\leq a_1|\delta z_1+z_2|\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N\left|\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_j}\right|\right)\left|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right| \\ \leq Na_1\frac{C_{\overline{\vartheta}}}{k}|\delta z_1+z_2|\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right|.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega (\delta z_1 + z_2)(A\nabla\vartheta_k)\cdot\nabla z_1 dx &\le N a_1 \frac{C_{\overline{\vartheta}}}{k}\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\delta z_1 + z_2|\left|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right| dx \\
&\le N a_1 \frac{C_{\overline{\vartheta}}}{k} |\delta z_1 + z_2|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)} \le N^2 a_1 \frac{C_{\overline{\vartheta}}}{k}|\delta z_1 + z_2|_{L^2(\Omega)}|z_1|_{H^1(\Omega)} \\
&\le N^2 a_1 \frac{C_{\overline{\vartheta}}}{k}(\delta R + R)R,
\end{aligned}
$$

o que mostra a desigualdade (4.21). Para demonstrar a desigualdade (4.22) recordemos que

$$
s_k(z)(x) = -2\overline{\vartheta}_k(x) z_1(x)(A(x)\nabla\overline{\vartheta}_k(x))\cdot\nabla z_1(x) - |z_1(x)|^2(A(x)\nabla\overline{\vartheta}_k(x))\cdot\nabla\overline{\vartheta}_k(x),\ x\in\Omega.
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
-\delta(1-\nu)\int_\Omega s_k(z(t))(x)dx = &-2\delta(1-\nu)\int_\Omega \overline{\vartheta}_k(x) z_1(t)(x)(A(x)\nabla\overline{\vartheta}_k(x))\cdot\nabla z_1(t)(x)dx \\
&- \delta(1-\nu)\int_\Omega |z_1(t)(x)|^2(A(x)\nabla\overline{\vartheta}_k(x))\cdot\nabla\overline{\vartheta}_k(x)dx.
\end{aligned}
$$

Para obter a desigualdade (4.22), na primeira integral usamos um argumento similar ao utilizado para demonstrar a desigualdade (4.21) e na segunda integral utilizamos a desigualdade da Hipótese 2.5(a).

Defina agora

$$
\xi_k = \delta(\mu - 2\nu + 1)\int_{\Omega_k}|c(x)|dx + N^2 a_1 (C_\vartheta/k)(\delta R + R)R + a_1\delta(1-\nu)(2N^2 C_{\overline{\vartheta}}/k + C_{\overline{\vartheta}}^2/k^2)R^2,
$$

onde $\Omega_k = \{x\in\Omega \mid |x| \ge k\}$. Notemos que $\xi_k \to 0$ quando $k\to\infty$. Segue do Lema 4.10 que para cada $k\in\mathbb{N}$

$$
\eta_k' + 2\delta\nu\eta_k(t) \le \xi_k. \tag{4.23}
$$

Derivando a função $t\mapsto \eta_k(t)e^{2\delta\nu t}$ e utilizando um argumento similar ao usado anteriormente, segue da desigualdade (4.23) que

$$
\eta_k(t) \le \frac{1}{2\delta\nu}\xi_k[1 - e^{-2\delta\nu t}] + \eta_k(0)e^{-2\delta\nu t},\ \text{para } t\in I,\ k\in\mathbb{N}.
$$

Como em (4.17), mostramos que $|\eta_k(0)| \le \overline{M}$. É simples ver que as condições impostas sobre ϑ implicam que

$$
V_k^*(z(t)) \le \int_\Omega \vartheta_k(x)c(x)dx \le \int_{\Omega_k} c(x)dx =: \zeta_k,\ \text{para } t\in I,\ k\in\mathbb{N}.
$$

Além disso, $\zeta_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e para cada $t \in I$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \vartheta_k(x)(\varepsilon|\delta z_1(t)(x)+z_2(t)(x)|^2+(A(x)\nabla z_1(t)(x))\cdot\nabla z_1(t)(x)dx\\ +\frac{1}{2}\int_\Omega(\beta(x)-\delta\alpha(x)+\delta^2\varepsilon)|z_1(t)(x)|^2)dx\\ \le \frac{1}{2\delta\nu}\xi_k+\overline{M}e^{-2\delta\nu t}+\zeta_k.\end{aligned}$$

Utilizando novamente a Observação 4.11 com $r = z_2(t)(x)$ e $s = \delta z_1(t)(x)$, a desigualdade acima implica que, para $t \in I$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \vartheta_k(x)((\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2+(A(x)\nabla z_1(t)(x))\cdot\nabla z_1(t)(x)dx\\ +\frac{1}{2}\int_\Omega(\beta(x)-\delta\alpha(x))|z_1(t)(x)|^2)dx\\ \le \frac{1}{2\delta\nu}\xi_k+\overline{M}e^{-2\delta\nu t}+\zeta_k.\end{aligned}$$

Defina

$$M' = 2\overline{M} \text{ e } c_k = 2((1/(2\delta\nu))\xi_k+\zeta_k),\ k \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Segue que a desigualdade (4.12) é válida, com $c_k \to 0$ quando $k \to \infty$. A demonstração do teorema está concluída. □

Teorema 4.12. *Assuma a Hipótese 3.9 e Hipótese 4.3. O semifluxo π_f é um semifluxo global. Além disso, existe uma constante $C_{\pi_f} \in [0,\infty)$ com a propriedade: para todo z_0 existe um $t_{z_0} \in [0,\infty)$ tal que $|z_0\pi_f t|_Z \le C_{\pi_f}$ para todo $t \in [t_{z_0},\infty)$. Finalmente, todo subconjunto limitado de Z é u-limitado (relativamente a π_f).*

Demonstração. Afirmamos que para todo $z_0 \in Z$ existe uma constante $C_{z_0} \in [0,\infty)$ tal que $|z_0\pi_f t|_Z \le C_{z_0}$ para $t \in [0,\omega_{z_0})$. De fato, dado $z_0 \in Z$ temos que $|z_0|_Z \le R$ para algum $R \ge 0$. Seja $(z_1(t),z_2(t)) = z_0\pi_f t$ para $t \in [0,\omega_{z_0})$. Consideremos $\tau \in [0,\omega_{z_0})$ e seja $t \in [0,\tau]$. Segue da desigualdade (4.11) do Teorema 4.9 que

$$\begin{aligned}c'+M'e^{-2\delta\nu t} &\ge \int_\Omega((\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2+(A(x)\nabla z_1(t)(x))\cdot\nabla z_1(t))dx\\ &+\int_\Omega(\beta(x)-\delta\alpha(x))|z_1(t)(x)|^2dx\\ &=(\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2_{L^2(\Omega)}+\langle A(x)\nabla z_1(t)(x)),\nabla z_1(t)\rangle\\ &+\langle\beta(x)z_1(t)(x),z_1(t)(x)\rangle-\delta\langle\alpha(x)z_1(t)(x),z_1(t)(x)\rangle.\end{aligned}$$

Aqui c' e M' são como em (4.19). Notemos que estas constantes não dependem do ponto z_0 em

Z. Como $\alpha_0 \le \alpha(x) \le \alpha_1$, uma aplicação do Lema 2.10 com $\kappa = \delta\alpha_1$ implica que para $t \in [0,\tau]$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2_{L^2(\Omega)} &+ \langle A(x)\nabla z_1(t)(x)), \nabla z_1(t)\rangle + \langle \beta(x) z_1(t)(x), z_1(t)(x)\rangle \\
&- \delta\langle \alpha(x) z_1(t)(x), z_1(t)(x)\rangle \\
&\ge (\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2_{L^2(\Omega)} + \langle A(x)\nabla z_1(t)(x)), \nabla z_1(t)\rangle \\
&+ \langle \beta(x) z_1(t)(x), z_1(t)(x)\rangle - \delta\alpha_1\langle z_1(t)(x), z_1(t)(x)\rangle \\
&\ge (\varepsilon/2)|z_2(t)(x)|^2_{L^2(\Omega)} + c|z_1(t)(x)|^2_{H^1_0(\Omega)} \ge \min((\varepsilon/2), c, 1)|z_0\pi_f t|^2_Z,
\end{aligned}$$

onde a constante c é como no Lema 2.10. Portanto, para todo $t \in [0,\tau]$

$$|z_0\pi_f t|^2_Z \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M'e^{-2\delta\nu t}) \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M'). \tag{4.25}$$

Como $\tau \in [0, \omega_{z_0})$ é arbitrário temos que

$$|z_0\pi_f t|^2_Z \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M'), \text{ para todo } t \in [0, \omega_{z_0}). \tag{4.26}$$

Defina $C_{z_0} = [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M')$ e afirmativa está demonstrada. A Proposição 3.1 implica que π_f não explode em subconjuntos limitados. Logo, $\omega_{z_0} = \infty$ para todo $z_0 \in Z$, ou seja, π_f é um semifluxo global. Além disso, a relação (4.26) também implica que todo conjunto limitado de Z é u-limitado.

Para concluir a prova do teorema, seja $z_0 \in Z$. Segue da desigualdade (4.25) que

$$|z_0\pi_f t|^2_Z \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M'e^{-2\delta\nu t}), \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Defina $C_{\pi_f} := [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + (M'/2))$. Como $e^{-2\delta\nu t} \to 0$ quando $t \to \infty$, segue que existe um $T > 0$ tal que $e^{-2\delta\nu t} \le 1/2$ para todo $t \ge T$. Logo

$$|z_0\pi_f t|^2_Z \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + M'e^{-2\delta\nu t}) \le [\min((\varepsilon/2), c, 1)]^{-1}(c' + (M'/2)),$$

para todo $t > T$. Defina $t_{z_0} = T$. □

4.3 Compacidade assintótica e existência de atrator global

Nesta seção iremos demonstrar o resultado de existência de atrator global para o semifluxo π_f. Em vista da Proposição 1.60 e do Teorema 4.12 resta mostrar que o semifluxo π_f é assintoticamente compacto. Para demonstrar esta propriedade teremos que estudar as possibilidades para o valor de $\overline{\rho} \in [0,\infty)$. A primeira restrição foi imposta na Hipótese 4.3(b). Iremos considerar o caso em que $\overline{\rho}$ é subcrítico e o caso em que $\overline{\rho}$ é crítico.

Iniciaremos com o seguinte resultado.

Proposição 4.13. *Sejam $a \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ e $r \in [2,\infty)$ arbitrários. Se $N \geq 3$, assuma também que $r < 2^*$. Então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que $a|_\Omega \cdot u \in L^r(\Omega)$. Além disso, a aplicação $h\colon H_0^1(\Omega) \to L^r(\Omega)$, $u \mapsto a|_\Omega \cdot u$, $u \in H_0^1(\Omega)$, é linear e compacta.*

Demonstração. Como $a \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma bola aberta U em $\mathbb{R}^N$ tal que $\operatorname{supp} a \subset U$. Notemos que se $v \in H_0^1(\Omega)$, então $\widetilde{v} \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$. O Lema 2.20, com $\Omega = \mathbb{R}^N$, implica que $(av)|_U \in H_0^1(U)$ para todo $v \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto podemos definir as aplicações

$$h_1\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\mathbb{R}^N),\ v \mapsto \widetilde{v},\ v \in H_0^1(\Omega),$$
$$h_2\colon H_0^1(\mathbb{R}^N) \to H_0^1(U),\ v \mapsto (av)|_U,\ v \in H_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, a inclusão $H_0^1(U) \subset L^r(U)$ induz a aplicação

$$h_3\colon H_0^1(U) \to L^r(U),\ v \mapsto v, v \in H_0^1(U).$$

É fácil ver que se $v \in L^r(U)$, então $\widetilde{v} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e que $v|_\Omega \in L^r(\Omega)$ para todo $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Logo, também podemos definir as aplicações

$$h_4\colon L^r(U) \to L^r(\mathbb{R}^N),\ v \mapsto \widetilde{v},\ v \in L^r(U),$$
$$h_5\colon L^r(\mathbb{R}^N) \to L^r(\Omega),\ v \mapsto v|_\Omega,\ v \in L^r(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, se $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que $a|_\Omega \cdot u = (h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1)(u) \in L^r(\Omega)$. Logo

$$h = h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1. \tag{4.27}$$

É fácil ver que as aplicações h_i, $i \in [1,\ldots,5]$, são todas lineares. Portanto, h também é uma aplicação linear. Além disso, claramente, h_1, h_4 e h_5 são limitadas. Novamente uma aplicação do Lema 2.20 (com $\Omega = \mathbb{R}^N$) implica que h_2 é limitada. Segue do Teorema 1.11 que h_3 é uma aplicação compacta. A igualdade (4.27) implica que h é uma aplicação compacta. □

As seguintes hipóteses implicaram a compacidade assintótica do semifluxo π_f.

Hipótese 4.14. *$\overline{\rho}$ é subcrítico e $\widetilde{a} \in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ para algum $r \in \mathbb{R}$, com $r > \max(N,2)$.*

Hipótese 4.15. *$\overline{\rho}$ é crítico, $a \in L^r(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ para algum $r \in [N, \infty)$ e existe uma constante $C_1 \in [0, \infty)$ tal que*

$$|\alpha z|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_1 |z|_{H^{-1}(\Omega)}, \text{ para todo } z \in L^2(\Omega).$$

Lema 4.16. *Seja $\widetilde{N}$ um conjunto u-limitado em $Z = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ relativamente a π_f arbitrário, sejam $(z_n)_n$ uma sequência em $\widetilde{N}$ e $(t_n)_n$ uma sequência em $[0, \infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.*

(a) Suponha a Hipótese 4.14. A sequência $(z_n \pi_f t_n)_n$ possui uma subsequência que converge em Z;

(b) Suponha a Hipótese 4.15. A sequência $(z_n \pi_f t_n)_n$ possui uma subsequência que converge em $Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração. Como $\widetilde{N}$ é um conjunto u-limitado relativamente ao semifluxo π_f, existem um $t_{\widetilde{N}} \in [0, \infty)$ e um $R \in [0, \infty)$ tais que

$$|z \pi_f t|_Z \leq R, \text{ para todo } z \in \widetilde{N} \text{ e para todo } t \in [t_{\widetilde{N}}, \infty).$$

Como $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, podemos assumir que $t_n \geq t_{\widetilde{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$w_n = z_n \pi_f t_{\widetilde{N}} \text{ e } \tau_n = t_n - t_{\widetilde{N}}.$$

Notemos que se $t \in [0, \tau_n]$, $n \in \mathbb{N}$, então, $t_{\widetilde{N}} \leq t + t_{\widetilde{N}} \leq t_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$|w_n \pi_f t| = |(z_n \pi_f t_{\widetilde{N}}) \pi_f t| = |z_n \pi_f (t_{\widetilde{N}} + t)| \leq R, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, \tau_n]$, denote $w_n \pi_f t$ pelo par $(u_n(t), v_n(t))$. Fixe $\tau_0 \in (0, \infty)$. Como $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, existe um $n_0(\tau_0) \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_n \geq 2\tau_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0(\tau_0)$. Para k, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0(\tau_0)$ temos

$$\begin{aligned} w_n \pi_f \tau_n &= T(\tau_0) w_n \pi_f (\tau_n - \tau_0) \\ &\quad + \int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)(\widehat{f}(u_n(\tau_n - \tau_0 + s)) - \widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k) u_n(\tau_n - \tau_0 + s)))ds \\ &\quad + \int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)\widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k) u_n(\tau_n - \tau_0 + s)))ds \end{aligned}$$

Temos que

$$|T(\tau_0) w_n \pi_f (\tau_n - \tau_0)|_Z \leq M e^{-\mu \tau_0} R, \text{ para todo } n \geq n_0(\tau_0), \tag{4.28}$$

onde M e μ são as constantes positivas da Proposição 2.17. Como $\sup_{k\in\mathbb{N}}|\overline{\vartheta}_k|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} < \infty$, segue do Lema 2.20 que

$$\overline{M} = \sup_{k,n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,\tau_n]} (|u_n(t)|_{H_0^1(\Omega)} + |(1-\overline{\vartheta}_k)u_n(t)|_{H_0^1(\Omega)}) < \infty$$

As hipóteses assumidas e a Proposição 3.10 implicam que existe uma constante $L_{\overline{M}} \in (0,\infty)$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,\tau_n]$, temos

$$|\widehat{f}(u_n(t)) - \widehat{f}((1-\overline{\vartheta}_k)u_n(t))|_{L^2(\Omega)} \leq L_{\overline{M}}|\overline{\vartheta}_k u_n(t)|_{H_0^1(\Omega)}$$

e isso implica que, para $n \geq n_0(\tau_0)$,

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{\tau_0} T(\tau_0-s)\,(0,(1/\varepsilon)(\widehat{f}(u_n(\tau_n-\tau_0+s)) - \widehat{f}((1-\overline{\vartheta}_k)u_n(\tau_n-\tau_0+s))))ds\right|_Z \\ &\qquad \leq \sup_{s\in[0,\tau_0]} |\overline{\vartheta}_k u_n(\tau_n-\tau_0+s)|_{H_0^1(\Omega)}(1/\varepsilon)L_{\overline{M}}M\int_0^{\tau_0} e^{-\mu(\tau_0-s)}ds \\ &\qquad \leq \frac{ML_{\overline{M}}}{\mu\varepsilon} \sup_{s\in[0,\tau_0]} |\overline{\vartheta}_k u_n(\tau_n-\tau_0+s)|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora seja $\kappa = \delta\alpha_1$ no Lema 2.10 e defina $c > 0$ como nesse lema. Logo, para k, $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,\tau_n]$, temos

$$\begin{aligned} c|\overline{\vartheta}_k u_n(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \langle A\nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t)), \nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t))\rangle + \langle\beta\overline{\vartheta}_k u_n(t), \overline{\vartheta}_k u_n(t)\rangle - \delta\alpha_1\langle\overline{\vartheta}_k u_n(t), \overline{\vartheta}_k u_n(t)\rangle \\ &\leq \langle A\nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t)), \nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t))\rangle + \langle\beta\overline{\vartheta}_k u_n(t), \overline{\vartheta}_k u_n(t)\rangle \\ &\quad - \delta\langle\alpha\overline{\vartheta}_k u_n(t), \overline{\vartheta}_k u_n(t)\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle A\nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t)), \nabla(\overline{\vartheta}_k u_n(t))\rangle &= \overline{\vartheta}_k^2\langle A\nabla u_n(t), \nabla u_n(t)\rangle \\ &\quad + 2\langle\overline{\vartheta}_k A\nabla u_n(t), (\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t)\rangle + \langle(A\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t), (\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t)\rangle, \end{aligned}$$

o Teorema 4.9 e a desigualdade (4.22) implicam que

$$\begin{aligned} c|\overline{\vartheta}_k u_n(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega \vartheta_k(A\nabla u_n(t))\cdot\nabla u_n(t) + (\beta-\delta\alpha)|u_n(t)|^2_{L^2(\Omega)}dx \\ &\quad + 2\langle\overline{\vartheta}_k A\nabla u_n(t), (\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t)\rangle + \langle(A\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t), (\nabla\overline{\vartheta}_k)u_n(t)\rangle \\ &\leq c_k + M'e^{-2\delta\nu t} + a_1(2N^2C_{\overline{\vartheta}}/k + C^2_{\overline{\vartheta}}/k^2)R^2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Para $n \geq n_0(\tau_0)$ e $s \in [0,\tau_0]$, temos que $t = \tau_n - \tau_0 + s \geq \tau_0$ e, portanto, (4.30) implica que

$$\sup_{n \geq n_0(\tau_0)} \sup_{s \in [0,\tau_0]} |\overline{\vartheta}_k u_n(\tau_n - \tau_0 + s)|_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty \text{ e } \tau_0 \to \infty. \tag{4.31}$$

Seja m a medida de não-compacidade de Kuratowski definida na Seção 1.3. Dado $\delta > 0$, seja $\tau_0 \geq 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$e^{-\mu\tau_0} < \frac{\delta}{4MR} \tag{4.32}$$

e

$$\sup_{n \geq n_0(\tau_0)} \sup_{s \in [0,\tau_0]} |\overline{\vartheta}_{k_0} u_n(\tau_n - \tau_0 + s)|_{H_0^1(\Omega)} < \frac{\mu\varepsilon\delta}{4ML_{\overline{M}}}. \tag{4.33}$$

Temos que $\{w_n\pi_f\tau_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A + B + C$, onde

$$\begin{aligned}
A &= \{T(\tau_0)w_n\pi_f(\tau_n - \tau_0) \mid n \in \mathbb{N}\},\\
B &= \left\{\int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0,(1/\varepsilon)(\widehat{f}(u_n(\tau_n - \tau_0 + s)) - \widehat{f}((1-\overline{\vartheta}_{k_0})u_n(\tau_n - \tau_0 + s)))ds \mid n \in \mathbb{N}\right\},\\
C &= \left\{\int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}((1-\overline{\vartheta}_{k_0})u_n(\tau_n - \tau_0 + s)))ds \mid n \in \mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, a Proposição 1.17(ii) implica que

$$m(\{w_n\pi_f\tau_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \leq m(A) + m(B) + m(C). \tag{4.34}$$

Notemos que $A = A_1 \cup A_2$, onde

$$A_1 = \{T(\tau_0)w_n\pi_f(\tau_n - \tau_0) \mid 1 \leq n \leq n_0(\tau_0)\} \text{ e } A_2 = \{T(\tau_0)w_n\pi_f(\tau_n - \tau_0) \mid n \geq n_0(\tau_0)\}.$$

Como A_1 é um conjunto finito, segue que é compacto e, portanto, $m(A_1) = 0$. Logo, $m(A) = \max\{m(A_1), m(A_2)\} = m(A_2)$. As desigualdades (4.28) e (4.32) implicam que

$$|T(\tau_0)w_n\pi_f(\tau_n - \tau_0)|_Z \leq Me^{-\mu\tau_0}R \leq MR\frac{\delta}{4MR} = \frac{\delta}{4}, \text{ para todo } n \geq n_0(\tau_0),$$

ou seja, mostramos que $A_2 \subset B(0,\delta/4)$. Logo, $m(A_2) \leq m(B(0,\delta/4)) = \delta/2$ e obtemos

$$m(A) \leq \delta/2. \tag{4.35}$$

Além disso, $B = B_1 \cup B_2$, onde

$$B_1 = \left\{ \int_0^{\tau_0} \Psi_n(s)ds \mid 1 \leq n \leq n_0(\tau_0) \right\} \text{ e } B_2 = \left\{ \int_0^{\tau_0} \Psi_n(s)ds \mid n \geq n_0(\tau_0) \right\}.$$

Aqui, $\Psi_n(s) := T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)(\widehat{f}(u_n(\tau_n - \tau_0 + s)) - \widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_{k_0})u_n(\tau_n - \tau_0 + s))))$, para $n \in \mathbb{N}$. Novamente temos que B_1 é um conjunto finito e, portanto, $m(B_1) = 0$. Assim, $m(B) = \max\{m(B_1), m(B_2)\} = m(B_2)$. As desigualdades (4.29) e (4.33) implicam que

$$\begin{aligned} |\Psi_n(s)| &\leq \frac{ML_{\overline{M}}}{\mu\varepsilon} \sup_{n \geq n_0(\tau_0)} \sup_{s \in [0,\tau_0]} |\overline{\vartheta}_{k_0} u_n(\tau_n - \tau_0 + s)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &< \left(\frac{ML_{\overline{M}}}{\mu\varepsilon}\right)\left(\frac{\mu\varepsilon\delta}{4ML_{\overline{M}}}\right) = \frac{\delta}{4}, \text{ para todo } n \geq n_0(\tau_0). \end{aligned}$$

Segue que

$$m(B) = m(B_2) \leq m(B(0, \delta/4)) = \delta/2. \tag{4.36}$$

Finalmente, notemos que $C = C_1 \cup C_2$, onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)\widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k)u_n(t - \tau_0 + s)))ds \mid 1 \leq n \leq n_0(\tau_0) \right\}, \\ C_2 &= \left\{ \int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)\widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k)u_n(t - \tau_0 + s)))ds \mid n \geq n_0(\tau_0) \right\}. \end{aligned}$$

Como anteriormente, $m(C_1) = 0$. Afirmamos que

($\triangleright$) $K_0 = \{T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)\widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k)u_n(\tau_n - \tau_0 + s))) \mid n \geq n_0(\tau_0), s \in [0, \tau_0]\}$ é relativamente compacto em Z (respectivamente, em Y).

Suponha que a afirmativa acima seja verdadeira. Defina $K_1 = \overline{K_0}$. O Teorema de Mazur (ver Teorema 1.19) implica que $\tau_0 \overline{\text{co}\, K_1}$ é um conjunto compacto, onde $\text{co}\, K_1$ é a envoltória convexa do conjunto K_1. Logo, $m(\tau_0 \overline{\text{co}\, K_1}) = 0$. Recordemos que para cada $n \geq n_0(\tau_0)$ temos

$$\int_0^{\tau_0} T(\tau_0 - s)(0, (1/\varepsilon)\widehat{f}((1 - \overline{\vartheta}_k)u_n(t - \tau_0 + s)))ds = \lim_{j \to \infty} \int_0^{\tau_0} \phi_j(s)ds,$$

onde ϕ_j, $j \in \mathbb{N}$, é uma função simples. A definição da integral de Bochner (ver [12] ou [21]) implica que $\int_0^{\tau_0} \phi_j(s)ds \in \tau_0 \overline{\text{co}\, K_1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $C_2 \subset \tau_0 \overline{\text{co}\, K_1}$ e $m(C_2) = 0$. Portanto,

$$m(C) = m(C_2) = 0. \tag{4.37}$$

Utilizando fórmulas (4.35)–(4.37) na desigualdade (4.34), obtemos

$$m(\{w_n\pi_f\tau_n \mid n\in\mathbb{N}\}) \le 2(\delta/2) = \delta, \text{ para todo } \delta > 0. \tag{4.38}$$

Fazendo $\delta\to 0$ em (4.38) obtemos que $m(\{w_n\pi_f\tau_n \mid n\in\mathbb{N}\}) = 0$, ou seja, $\{w_n\pi_f\tau_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ é um conjunto relativamente compacto em Z (respectivamente, em Y).

Para completar a demonstração basta mostrar a afirmativa ($\triangleright$). Seja $(w_l)_l$ uma sequência em K_0. Segue que, para todo $l\in\mathbb{N}$, existem um $n_l\in\mathbb{N}$ e um $s_l\in[0,\tau_0]$ com $w_l = T(\tau_0-s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l))$, onde $v_l = (1-\overline{\vartheta}_k)u_{n_l}(\tau_{n_l}-\tau_0+s_l)$. Escolhendo subsequências se necessário, podemos assumir que $s_l\to s_\infty$ para algum $s_\infty\in[0,\tau_0]$. Como $(1-\overline{\vartheta}_k)\in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 4.13 que o conjunto $\{(v_l)_l \mid l\in\mathbb{N}\}$ é compacto em $L^s(\Omega)$ para cada $s\in[2,\infty)$, com $s\in[2,2^*)$ se $N\ge 3$.

Suponha que a Hipótese 4.14 seja válida. Para $s\in\{2r/(r-2),2(\overline{\rho}+1)\}$, temos que $s\in[2,2^*)$. Como $\{v_l \mid l\in\mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado e $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, tomando subsequências se necessário, podemos assumir que existe um $v\in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_l\rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, podemos supor ainda que $v_l\to v$ em $L^s(\Omega)$, para $s\in\{2r/(r-2),2(\overline{\rho}+1)\}$. Notemos que para todo $x\in\Omega$ com $|x|\ge\sqrt{2}k$, então $v_l(x)=0$ para todo $l\in\mathbb{N}$ e, portanto, podemos assumir $v(x)=0$ nesse caso. Logo,

$$a(x)(v_l(x)-v(x)) = a_1(v_l(x)-v(x)),\ l\in\mathbb{N},\ x\in\Omega, \tag{4.39}$$

onde $a_1:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ é definida por

$$a_1(x) = \begin{cases} \widetilde{a}(x), \text{ se } x\in\overline{\Omega} \text{ e } |x|\le\sqrt{2}k \\ 0, \quad \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Como $\widetilde{a}\in L^r_{\text{loc}}(\Omega)$, temos que $a_1\in L^r(\mathbb{R}^N)$ e segue que a aplicação de $L^{2r/(r-2)}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ dada por $h\mapsto a_1h$ está bem definida e é linear. Como, para $h\in L^{2r/(r-2)}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |a_1h|^2dx = \int_\Omega |a_1|^2|h|^2dx \le \left(\int_\Omega |a_1|^r\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |h|^{2r/r-2}\right)^{r-2/2r},$$

segue que h é limitada. Agora, como $v,v_l,v_l-v\in L^s(\Omega)$ para $s\in\{2r/(r-2),2(\overline{\rho}+1)\}$, a desigualdade (3.9) e igualdade (4.39) implicam que

$$|\widehat{f}(v_l)-\widehat{f}(v)|_{L^2(\Omega)}\to 0, \text{ quando } l\to\infty. \tag{4.40}$$

Afirmamos que $|w_l - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \to 0$ quando $l \to \infty$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|w_l - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z &= |T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l)) - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \\
&\leq |T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l)) - T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \\
&+ |T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v)) - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
&|T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l)) - T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \\
&\qquad = |T(\tau_0 - s_l)((0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l)) - \widehat{f}(v)))|_Z \\
&\qquad \leq Me^{\mu(\tau_0 - s_l)}|(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v_l)) - (0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \\
&\qquad = Me^{\mu(\tau_0 - s_l}|\widehat{f}(v_l) - \widehat{f}(v)|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde M, μ são como na Proposição 2.17 e que

$$
T(\tau_0 - s_l)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v)) - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v)) = (T(\tau_0 - s_l) - T(\tau_0 - s_\infty))(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v)).
$$

Portanto, a fórmula (4.40) e o Teorema 1.24(i) implicam que

$$
|w_l - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Z \to 0
$$

quando $l \to \infty$. Como $w_n \pi_f \tau_n = (z_n \pi_f t_{\widetilde{N}})\pi_f \tau_n = z_n \pi_f t_n$, $n \in \mathbb{N}$, segue que a sequência $(z_n \pi_f t_n)_n$ possui subsequência convergente em Z e (i) está demonstrada.

Agora suponha a Hipótese 4.15 seja válida. Temos que $2 \in [2, 2^*)$ para $N \geq 3$. Tomando subsequências se necessário, podemos assumir, de maneira análoga ao feito em (i), que existe um $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_l \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_l \to v$ em $L^s(\Omega)$. Usando (3.13) obtemos que $|\widehat{f}(v_l) - \widehat{f}(v)|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$ quando $l \to \infty$. A Proposição 2.19 implica, como em (i), que $|w_l - T(\tau_0 - s_\infty)(0,(1/\varepsilon)\widehat{f}(v))|_Y \to 0$ quando $l \to \infty$ e, finalmente, a sequência $(z_n \pi_f t_n)_n$ possui subsequência convergente em Y. $\square$

Com isso, temos o seguinte resultado de existência de atrator global para o caso subcrítico:

Teorema 4.17. *Assuma a Hipótese 3.9, a Hipótese 4.3 e a Hipótese 4.14. O semifluxo π_f é um semifluxo global e possui um atrator global.*

Demonstração. O Teorema 4.12 implica que π_f é um semifluxo global. Além disso, segue do Teorema 4.12 que todo conjunto limitado é u-limitado e que existe um conjunto limitado B_0

tal que para todo $z \in Z$ existe um $t_z \in [0,\infty)$ com $z\pi_f t_z \in B_0$. Segue do Lema 4.16 que π_f é assintoticamente compacto. Agora, uma aplicação da Proposição 1.60 implica que o semifluxo global π_f possui um atrator global. $\square$

Agora passemos à analise com o caso crítico. Temos que demonstrar que π_f é assintoticamente compacto em Z. Começaremos com o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 4.18. *Assuma Hipótese 3.9, Hipótese 4.3 e Hipótese 4.15. Seja $C_6 \in [0,\infty)$ uma constante arbitrária. Então existe uma constante $C_7 \in [0,\infty)$ tal que para todo $t \in [0,\infty)$ e z, $w \in Z$, com $|z|_Z \leq C_6$ e $|w|_Z \leq C_6$, temos que*

$$|z\pi_f t - w\pi_f t|_Y \leq C_7 e^{C_7 t}|z-w|_Y. \tag{4.41}$$

Demonstração. A Proposição 3.1 implica que

$$z\pi_f t = T(t)z + \int_0^t T(t-s)(0,\widehat{f}(z_1(s)))ds, \text{ para todo } t \in [0,\infty) \text{ e para todo } z \in Z.$$

Assim, para obter a desigualdade (4.41) devemos encontrar estimativas para o lado direito da igualdade acima. A Hipótese 4.15 implica que as condições da Proposição 2.19 estão satisfeitas. Logo,

$$|T(t)z|_Y \leq C_2 e^{C_3 t}|z|_Y, \text{ para todo } t \in [0,\infty) \text{ e para todo } z \in Z, \tag{4.42}$$

onde as constantes C_2 e C_3 são como naquela proposição. Segue do Teorema 4.9 e do Lema 2.10 que existe uma constante $C_8 \in [0,\infty)$ tal que para qualquer que seja $z \in Z$ com $|z|_Z \leq C_6$, então

$$|z\pi_f t|_Z \leq C_8, \text{ para todo } t \in [0,\infty). \tag{4.43}$$

Além disso, afirmamos que existe uma constante $C_9 \in [0,\infty)$ tal que

$$|\widehat{f}(z_1) - \widehat{f}(w_1)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_9|z_1 - w_1|_{L^2(\Omega)} \tag{4.44}$$

para todo $z = (z_1,z_2), w = (w_1,w_2) \in Z$ com $|z|_Z \leq C_8$ e $|w|_Z \leq C_8$. De fato, segue da Proposição 3.8 (ver fórmula (3.13)) que para todo $z = (z_1,z_2)$,$w = (w_1,w_2) \in Z$ temos que existe uma constante $C(t) \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(z_1) - \widehat{f}(w_1)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq{}& C(r)(|a_1|_{L^r(\Omega} + |a_2|_{L^\infty(\Omega)})|z_1 - w_1|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C(r)(|w_1|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)} + |z_1 - w_1|^{\overline{\rho}}_{L^{2^*}(\Omega)})|z_1 - w_1|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

O Teorema 1.10 agora implica que

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(z_1)-\widehat{f}(w_1)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq{} & C(r)\widetilde{K}|z_1-w_1|_{L^2(\Omega)} \\
& +C(r)(K_{2^*}^{\overline{\rho}}|w_1|_{H_0^1(\Omega)}^{\overline{\rho}}+K_{2^*}^{\overline{\rho}}|z_1-w_1|_{H_0^1(\Omega)}^{\overline{\rho}})|z_1-w_1|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde K_{2^*} é como em Teorema 1.10 e $\widetilde{K}=|a_1|_{L^r(\Omega}+|a_2|_{L^\infty(\Omega)}$. Portanto, para todo $z=(z_1,z_2), w=(w_1,w_2)\in Z$ com $|z|_Z\leq C_8$ e $|w|_Z\leq C_8$ temos

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(z_1)-\widehat{f}(w_1)|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq C(r)\widetilde{K}|z_1-w_1|_{L^2(\Omega)} \\
&+C(r)(K_{2^*}^{\overline{\rho}}|w_1|_{H_0^1(\Omega)}^{\overline{\rho}}+K_{2^*}^{\overline{\rho}}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(|z_1|_{H_0^1(\Omega)}^{\overline{\rho}}+|w_1|_{H_0^1(\Omega)}^{\overline{\rho}}))|z_1-w_1|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Big(C(r)\widetilde{K}+C(r)(K_{2^*}^{\overline{\rho}}C_8^{\overline{\rho}}+K_{2^*}^{\overline{\rho}}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(C_8^{\overline{\rho}}+C_8^{\overline{\rho}}))\Big)|z_1-w_1|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Defina $C_9=C(r)\widetilde{K}+C(r)(K_{2^*}^{\overline{\rho}}C_8^{\overline{\rho}}+K_{2^*}^{\overline{\rho}}\max(1,2^{\overline{\rho}-1})(C_8^{\overline{\rho}}+C_8^{\overline{\rho}}))$. A prova da afirmativa está completa.

Sejam z, $w\in Z$ com $|z|_Z\leq C_6$ e $|w|_Z\leq C_6$. Segue das desigualdades (4.42)–(4.44) que

$$
\begin{aligned}
|z\pi_f t-w\pi_f t|_Y \leq{} & |T(t)(z-w)|_Y+\int_0^t |T(t-s)(0,\widehat{f}(z_1(s))-\widehat{f}(w_1(s)))|_Y ds \\
\leq{} & C_2e^{C_3t}|z-w|_Y+\int_0^t C_2e^{C_3(t-s)}|(0,\widehat{f}(z_1(s))-\widehat{f}(w_1(s)))|_Y ds \\
\leq{} & C_2e^{C_3t}|z-w|_Y+\int_0^t C_2e^{C_3(t-s)}|\widehat{f}(z_1(s))-\widehat{f}(w_1(s))|_{H^{-1}(\Omega)} ds \\
\leq{} & C_2e^{C_3t}|z-w|_Y+\int_0^t C_2C_9e^{C_3(t-s)}|z_1(s)-w_1(s)|_{L^2(\Omega)} ds \\
\leq{} & C_2e^{C_3t}|z-w|_Y+\int_0^t C_2C_9e^{C_3(t-s)}|z\pi_f s-w\pi_f s|_Y ds.
\end{aligned}
$$

Aqui usamos a notação $z\pi_f t=(z_1(t),z_2(t))$ e $w\pi_f t=(w_1(t),w_2(t))$, $t\in[0,\infty)$. Agora uma aplicação da Lema de Gronwall (ver Lema 1.61) obtemos

$$
|z\pi_f t-w\pi_f t|_Y\leq C_2|z-w|_Y e^{(C_3+C_2C_9)t},\ \text{para todo}\ t\in[0,\infty).
$$

Logo, para concluir a demonstração basta definir $C_7 := \max(C_2, C_3+C_2C_9)$. □

Estamos prontos para mostrar que o semifluxo π_f é assintoticamente compacto em Z para o caso crítico. O método utilizado em [26] adapta as técnicas apresentadas em [4].

Teorema 4.19. *Assuma a Hipótese 3.9, a Hipótese 4.3 e a Hipótese 4.15. Então o semifluxo π_f é assintoticamente compacto em Z.*

Para demonstrar o Teorema 4.19 vamos utilizar o seguinte lema auxiliar.

Lema 4.20. *Assuma as hipóteses do Teorema 4.19. A aplicação* $\Psi\colon Z \to Z$, *definida por* $\Psi(u,v) = (u, \delta u + v)$, *para* $(u,v) \in Z$ *é um isomorfismo. Além disso, a forma bilinear*

$$[(u_1,v_1),(u_2,v_2)] := \varepsilon\langle \delta u_1 + v_1, \delta u_2 + v_2\rangle + \langle A\nabla u_1, \nabla u_2\rangle + \langle (\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1, u_2\rangle,$$

para (u_1,v_1), $(u_2,v_2) \in Z$ *define um produto interno em* Z *cuja norma* $z \in Z \mapsto \|z\| := \sqrt{[z,z]}$ *é equivalente à norma usual de* Z

Demonstração. É fácil mostrar que Ψ é um isomorfismo e que $[\cdot,\cdot]$ é um produto interno em Z. Para completar a demonstração temos que mostrar que a norma $\|\cdot\|$ é equivalente à norma usual de Z. Seja $(u_1,v_1) \in Z$. Temos que

$$[(u_1,v_1),(u_1,v_1)] = \varepsilon\langle \delta u_1 + v_1, \delta u_1 + v_1\rangle + \langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle (\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1, u_1\rangle.$$

Notemos que

$$\langle \delta u_1 + v_1, \delta u_1 + v_1\rangle = |\delta u_1 + v_1|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\nabla u_1|^2_{L^2(\Omega)} + \delta|u_1|^2_{L^2(\Omega)} + |v_1|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.45}$$

Segue do Lema 2.10, com $\kappa = \delta\alpha_1$, que

$$c|u_1|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle \beta u_1, u_1\rangle - \delta\alpha_1\langle u_1, u_1\rangle \leq C|u_1|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

onde as contantes c e C são como no Lema 2.10. Portanto

$$\langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle (\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1, u_1\rangle \leq C|u_1|^2_{H^1_0(\Omega)} + \delta\alpha_1\langle u_1, u_1\rangle + \langle (-\delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1, u_1\rangle.$$

Segue da Hipótese 2.16 que $\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1$ para quase todo x em Ω. Logo, $-\langle \delta\alpha u_1, u_1\rangle \leq -\delta\alpha_0|u_1|^2_{L^2(\Omega)}$ e obtemos

$$\langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle (\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1, u_1\rangle \leq C|u_1|^2_{H^1_0(\Omega)} + (\delta(\alpha_1 - \alpha_0) + \delta^2\varepsilon)|u_1|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.46}$$

Notemos que $\delta(\alpha_1 - \alpha_0) + \delta^2\varepsilon > 0$. As desigualdades (4.45) e (4.46) implicam que

$$[(u_1,v_1),(u_1,v_1)] \leq (\varepsilon + C)|\nabla u_1|^2_{L^2(\Omega)} + (\delta\varepsilon + \delta(\alpha_1 - \alpha_0) + \delta^2\varepsilon)|u_1|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon|v_1|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$[(u_1,v_1),(u_1,v_1)] \le \max\{\varepsilon + C, \delta\varepsilon + \delta(\alpha_1-\alpha_0)+\delta^2\varepsilon,\varepsilon\}|(u_1,v_1)|_Z^2. \tag{4.47}$$

Por outro lado, temos que

$$\langle \delta u_1 + v_1, \delta u_1 + v_1\rangle = |\delta u_1 + v_1|^2_{L^2(\Omega)} \ge |v_1|^2_{L^2(\Omega)} - \delta^2 |u_1|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.48}$$

$$\langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle(\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1,u_1\rangle \ge c|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + \delta\alpha_1\langle u_1,u_1\rangle + \langle(-\delta\alpha+\delta^2\varepsilon)u_1,u_1\rangle.$$

Como anteriormente temos que $-\langle \delta\alpha u_1, u_1\rangle \ge -\delta\alpha_1|u_1|^2_{L^2(\Omega)}$ e obtemos

$$\langle A\nabla u_1, \nabla u_1\rangle + \langle(\beta - \delta\alpha + \delta^2\varepsilon)u_1,u_1\rangle \ge c|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + \delta^2\varepsilon|u_1|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.49}$$

Segue das desigualdades (4.48) e (4.49) que

$$[(u_1,v_1),(u_1,v_1)] \ge \varepsilon|v_1|^2_{L^2(\Omega)} - \delta^2\varepsilon|u_1|^2_{L^2(\Omega)} + c|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} + \delta^2\varepsilon|u_1|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$[(u_1,v_1),(u_1,v_1)] \ge \varepsilon|v_1|^2_{L^2(\Omega)} + c|u_1|^2_{H_0^1(\Omega)} \ge \min\{\varepsilon,c\}|(u_1,v_1)|_Z^2. \tag{4.50}$$

As desigualdades (4.47) e (4.50) implicam o lema. □

Demonstração do Teorema 4.19. Seja $\widetilde{N}$ um conjunto u-limitado de Z. Então existe um $t_{\widetilde{N}} \in [0,\infty)$ e uma constante $C_{10} \in [0,\infty)$ tais que

$$|z\pi_f t| \le C_{10}, \text{ para todo } z \in \widetilde{N} \text{ e } t \ge t_{\widetilde{N}}.$$

Seja $(z_n)_n$ uma sequência em $\widetilde{N}$ e $(t_n)_n$ uma sequência em $[0,\infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Devemos provar que $(z_n\pi_f t_n)_n$ possui uma subsequência que converge fortemente em Z.

Afirmamos que existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ e, para todo $l \in \mathbb{Z}$ com $l \ge 0$, existe um $k_0(l) \in \mathbb{N}$ e um $w_l \in Z$ com $|w_l|_Z \le C_{10}$ tal que $t_{n_k} - l \ge t_{\widetilde{N}}$ para $k \ge k_0(l)$ e tal que a sequência $(z_{n_k}\pi_f(t_{n_k} - l))_k$ converge para w_l fracamente em Z e fortemente em Y.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $t_n \ge t_{\widetilde{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$|z_n\pi_f t_n| \le C_{10}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, existe um $w_0 \in Z$ e uma sequência $(m_k)_k$ em $\mathbb{N}$ tal que $t_{m_k} \to \infty$ quando $k \to \infty$ e

$$(z_{m_k}\pi_f t_{m_k})_k \text{ converge para } w_0 \text{ fracamente em } Z \text{ e fortemente em } Y.$$

Defina $k_0(0) = m_1$. Como $t_{m_k} \to \infty$ quando $k \to \infty$, existe um $k_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que $t_{m_k} \geq 1 + t_{\widetilde{N}}$ para todo $k \geq k_0(1)$. Logo, $t_{m_k} - 1 \geq t_{\widetilde{N}}$ para todo $k \geq k_0(1)$ e

$$|z_{m_k}\pi_f(t_{m_k} - 1)| \leq C_{10}, \text{ para todo } k \geq k_0(1).$$

Portanto, existe um $w_1 \in Z$ e uma subsequência $(m_k^1)_k$ de $(m_k)_k$ tal que $t_{m_k^1} \to \infty$ quando $k \to \infty$ e

$$(z_{m_k^1}\pi_f(t_{m_k^1} - 1))_k \text{ converge para } w_1 \text{ fracamente em } Z \text{ e fortemente em } Y.$$

Procedendo recursivamente, para cada $l \in \mathbb{Z}$ com $l \geq 0$, existem um $k_0(l) \in \mathbb{N}$, uma sequência $(m_k^l)_k$, subsequência de $(m_k^{l-1})_k$, e $w_l \in Z$ tais que $t_{m_k^{l-1}} \geq l + t_{\widetilde{N}}$ para todo $k \geq k_0(l)$ e

$$(z_{m_k^l}\pi_f(t_{m_k^l} - l))_k \text{ converge para } w_l \text{ fracamente em } Z \text{ e fortemente em } Y.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $n_k = m_k^k$. Fixe $l \in \mathbb{Z}$ com $l \geq 0$. Temos que $(n_k)_{k \geq k_0(l)}$ é uma subsequência de $(m_k^l)_k$ e portanto

$$(z_{n_k}\pi_f(t_{n_k} - l))_k \text{ converge para } w_l \text{ fracamente em } Z \text{ e fortemente em } Y.$$

e a afirmativa está demonstrada. Agora uma aplicação da Proposição 4.18 implica que para todo $l \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, \infty)$,

$$(z_{n_k}\pi_f(t_{n_k} - l))\pi_f t \to w_l \pi_f t, \text{ quando } k \to \infty, \text{ fortemente em } Y. \tag{4.51}$$

Portanto, $w_l \pi_f l = w_0$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Defina a função $\mathscr{F} : Z \to \mathbb{R}$ por

$$\mathscr{F}(z) = V(z) - V^*(z), \ z \in Z,$$

onde V e V^* são definidos como na Proposição 4.2 com $\gamma \equiv 1$ e $\delta \in [0, \infty)$ tal que $\lambda_1 - \delta\alpha_1 > 0$ e $\alpha_0 - 2\delta\varepsilon \geq 0$. Afirmamos que existe uma constante $C_{11} \in [0, \infty)$ tal que

$$\sup\{|\mathscr{F}(z)| \mid z \in Z, |z|_Z \leq C_{10}\} \leq C_{11} \tag{4.52}$$

De fato, seja $z \in Z$ com $|z|_Z \leq C_{10}$. Temos que

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}(z)| &\leq |V(z)| + |V^*(z)| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon|\delta z_1 + z_2|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega ((A\nabla z_1)\cdot\nabla z_1 + \beta|z_1|^2 - \delta\alpha|z_1|^2)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega \delta^2\varepsilon|z_1|^2 dx + \int_\Omega |\widehat{F}(z_1)|dx \\
&\leq \varepsilon(|\delta z_1|^2_{L^2(\Omega)} + |z_2|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \alpha_0 + \delta^2\varepsilon)|z_1|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \overline{C}\left(\frac{1}{2}|a|z_1|^2|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{\overline{\rho}+2}|z_1|^{\overline{\rho}+2}_{L^{\overline{\rho}+2}}\right) + |z_1|_{L^2(\Omega)}|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aqui, usamos a desigualdade (3.10). A Hipótese 4.15 e o Teorema 1.10 completam a demonstração da afirmativa. Notemos que

$$\mathscr{F}(z) = 2\|z\|^2 - V^*(z),\ z \in Z,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma definida no Lema 4.20.

Seja $\zeta(\cdot) = (\zeta_1(\cdot), \zeta_2(\cdot))\colon [0,\infty) \to Z$ uma solução arbitrária de π_f. A Proposição 4.2 implica que a função $\mathscr{F}\circ\zeta$ é continuamente diferenciável e, para todo $t \in [0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}\circ\zeta)'(t) + 2\delta(\mathscr{F}\circ\zeta)(t) &= \int_\Omega (2\delta\varepsilon - \alpha(x))(\delta\zeta_1(t)(x) + \zeta_2(t)(x))^2 dx \\
&+ \int_\Omega \delta\zeta_1(t)(x) f(x,\zeta_1(t)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(t)(x))dx.
\end{aligned}$$

Segue que para todo $t \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}(\zeta(t)) = e^{-2\delta t}\mathscr{F}(\zeta(0)) &+ \int_0^t e^{-2\delta(t-s)}\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon - \alpha(x))(\delta\zeta_1(s)(x) + \zeta_2(s)(x))^2 dx\right) ds \\
&+ \int_0^t e^{-2\delta(t-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x) f(x,\zeta_1(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right) ds. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Fixemos $l \in \mathbb{N}$ e, para $k \geq k_0(l)$, seja $\zeta_k(t) = (z_{n_k}\pi_f(t_{n_k} - l))\pi_f t$ e $\zeta(t) = w_l\pi_f t$ para $t \in [0,\infty)$. Fazendo $t = l$ em (4.53) obtemos

$$\begin{aligned}
2\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\|^2 - V^*(z_{n_k}\pi_f t_{n_k}) &= e^{-2\delta l}\mathscr{F}(z_{n_k}\pi_f(t_{n_k} - l)) \qquad (4.54) \\
&+ \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon - \alpha(x))(\delta\zeta_{k,1}(s)(x) + \zeta_{k,2}(s)(x))^2 dx\right) ds \\
&+ \int_0^t e^{-2\delta(l-s)}\rho(s)ds,
\end{aligned}$$

onde $\rho(s) = \int_\Omega \delta\zeta_{k,1}(s)(x)f(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx$, para $s \in [0,l]$ e

$$
\begin{aligned}
2\|w_0\|^2 - V^*(w_0) &= e^{-2\delta l}\mathscr{F}(w_l) \\
&+ \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon - \alpha(x))(\delta\zeta_1(s)(x) + \zeta_2(s)(x))^2 dx\right) ds \\
&+ \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right) ds.
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

Afirmamos agora que

$$V^*(z_{n_k}\pi_f t_{n_k}) \to V^*(w_0) \tag{4.56}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_{k,1}(s)(x)f(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx\right) ds \\
&\quad \to \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right) ds,
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

quando $k \to \infty$. De fato, como o operador de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ induzido por $u \mapsto |a|u$ é limitado, temos que existe uma constante $\widetilde{L}_a \in (0,\infty)$ tal que

$$||a|u|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{L}_a|u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.58}$$

Este fato, a desigualdade (3.11) da Proposição 3.8 e o Teorema 1.10 implicam que

$$
\begin{aligned}
&|V^*(z_{n_k}\pi_f t_{n_k}) - V^*(w_0)| = |V^*(\zeta_{k,1}(l)) - V^*(\zeta_1(l))| \\
&\leq \int_\Omega |\widehat{F}(\zeta_{k,1}(l)) - \widehat{F}(\zeta_1(l))|dx \\
&\leq \Big[|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(|a\zeta_{k,1}(l)|_{L^2(\Omega)} + |a(\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l))|_{L^2(\Omega)}) \\
&+ \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(|\zeta_{k,1}(l)|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)} + |\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l)|^{\overline{\rho}+1}_{L^{2(\overline{\rho}+1)}(\Omega)})\Big]\,|\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l)|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Big[|\widehat{f}(0)|_{L^2(\Omega)} + \overline{C}(\widetilde{L}_a|\zeta_{k,1}(l)|_{H_0^1(\Omega)} + \widetilde{L}_a(|\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l))|_{H_0^1(\Omega)}) \\
&+ \overline{C}\max(1,2^{\overline{\rho}})(K^{\overline{\rho}+1}_{2(\overline{\rho}+1)}|\zeta_{k,1}(l)|^{\overline{\rho}+1}_{H_0^1(\Omega)} + K^{\overline{\rho}+1}_{2(\overline{\rho}+1)}|\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l)|^{\overline{\rho}+1}_{H_0^1(\Omega)})\Big]\,|\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l)|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Como

$$|\zeta_{k,1}(l) - \zeta_1(l)|_{L^2(\Omega)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty,$$

obtemos (4.56). Para provar (4.57), notemos que

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_{k,1}(s)(x)f(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx\right)ds\right. \\ &\qquad \left. -\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right)ds\right| \\ &\qquad \le \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\left|\int_\Omega \delta\zeta_{k,1}(s)(x)f(x,\zeta_{k,1}(s)(x)) - \zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx\right|\right)ds \\ &\qquad +2\delta\int_0^l\int_\Omega |F(x,\zeta_{k,1}(s)(x)) - F(x,\zeta_1(s)(x))|dxds. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Como para todo para $s \in [0,l]$,

$$|\zeta_1(s) - \zeta_{k,1}(s)|_{L^2(\Omega)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty, \tag{4.60}$$

e o intervalo $[0,l]$ é compacto, a desigualdade (3.11) da Proposição 3.8 e (4.58) implicam que dado $\eta > 0$, existe um $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |F(x,\zeta_{k,1}(s)(x)) - F(x,\zeta_1(s)(x))|dx < \eta, \text{ para todo } k \ge k_1 \text{ e para todo } s \in [0,l]. \tag{4.61}$$

Por outro lado, a desigualdade (3.13) da Proposição 3.8 implica que

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega \zeta_{k,1}\ (s)(x)\widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \zeta_1(s)(x)\widehat{f}(\zeta_1(s))dx\right| \\ &\quad = \left|\int_\Omega \zeta_{k,1}(s)(x)(\widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \widehat{f}(\zeta_1(s))) + (\zeta_{k,1}(s)(x) - \zeta_1(s)(x))\widehat{f}(\zeta_1(s))\right| dx \\ &\quad = |\langle(\zeta_{k,1}(s) - \zeta_1(s)), \widehat{f}(\zeta_1(s))\rangle - \langle\zeta_{k,1}(s), (\widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \widehat{f}(\zeta_1(s)))\rangle| \\ &\quad \le |\langle\zeta_{k,1}(s) - \zeta_1(s), \widehat{f}(\zeta_1(s))\rangle| + |\langle\zeta_{k,1}(s), \widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \widehat{f}(\zeta_1(s))\rangle| \\ &\quad \le |\widehat{f}(\zeta_1(s))|_{H^{-1}(\Omega)}|\zeta_{k,1}(s) - \zeta_1(s)|_{L^2(\Omega)} + |\zeta_{k,1}(s)|_{L^2(\Omega)}|\widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \widehat{f}(\zeta_1(s))|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

onde $s \in [0,l]$. Como anteriormente, usando (3.13), temos que dado $\eta > 0$, existe um $k_2 \in \mathbb{N}$ com $k_2 \ge k_1$ tal que

$$\left|\int_\Omega \zeta_{k,1}(s)(x)\widehat{f}(\zeta_{k,1}(s)) - \zeta_1(s)(x)\widehat{f}(\zeta_1(s))dx\right| \le \eta, \text{ para } k \ge k_2 \text{ e } s \in [0,l]. \tag{4.62}$$

Usando desigualdades (4.61) e (4.62) em (4.59) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_{k,1}(s)(x)f(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_{k,1}(s)(x))dx\right)ds\right.\\
&\left. - \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx - 2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right)ds\right|\\
&\leq \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\eta ds = \frac{\eta}{2\delta}.
\end{aligned}
$$

Como $\eta > 0$ arbitrário, a convergência em (4.57) está demonstrada. A próxima afirmativa é que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty}\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}&\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon-\alpha(x))(\delta\zeta_{k,1}(s)(x)+\zeta_{k,2}(s)(x))^2dx\right)ds \\
&\leq \int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon-\alpha(x))(\delta\zeta_1(s)(x)+\zeta_2(s)(x))^2dx\right)ds.
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

De fato, como $\alpha(x)-2\delta\varepsilon \leq 0$ para todo $x\in\Omega$, temos pelo Lema de Fatou que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty}&\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega (2\delta\varepsilon-\alpha(x))(\delta\zeta_{k,1}(s)(x)+\zeta_{k,2}(s)(x))^2dx\right)ds \\
&= -\liminf_{k\to\infty}\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega (\alpha(x)-2\delta\varepsilon)(\delta\zeta_{k,1}(s)(x)+\zeta_{k,2}(s)(x))^2dx\right)ds \\
&\leq -\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega (\alpha(x)-2\delta\varepsilon)(\delta\zeta_{k,1}(s)(x)+\zeta_{k,2}(s)(x))^2dx\right)ds.
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Seja $s\in[0,l]$ arbitrário. Como a sequência $((\zeta_{k,1}(s),\zeta_{k,2}(s)))_k$ converge fracamente em Z para $(\zeta_1(s),\zeta_2(s))$ e Ψ é uma aplicação contínua e linear, temos que Ψ é também fracamente contínua e, portanto, $((\zeta_{k,1}(s),\delta\zeta_{k,1}(s)+\zeta_{k,2}(s)))_k$ converge fracamente em Z para $(\zeta_1(s),\delta\zeta_1(s)+\zeta_2(s))$. Assim, para todo $v\in L^2(\Omega)$,

$$
\langle v,\delta\zeta_{k,1}(s)+\zeta_{k,2}(s)\rangle \to \langle v,\delta\zeta_1(s)+\zeta_2(s)\rangle,\ \text{ quando } k\to\infty.
$$

Tomando $v=(\alpha-2\delta\varepsilon)(\delta\zeta_1(s)+\zeta_2(s))$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&|(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s))|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad= \langle(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s)),(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s))\rangle\\
&\quad= \lim_{k\to\infty}\langle(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s)),(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_{k,1}(s)+\delta\zeta_{k,2}(s))\rangle\\
&\quad\leq |(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s))|_{L^2(\Omega)}\liminf_{k\to\infty}|(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_{k,1}(s)+\delta\zeta_{k,2}(s))|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$|(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s))|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty}|(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_{k,1}(s)+\delta\zeta_{k,2}(s))|_{L^2(\Omega)}.$$

e, assim,

$$\left(\int_\Omega(\alpha-2\delta\varepsilon)(\delta\zeta_1(s)+\delta\zeta_2(s))^2dx\right) \leq \liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega(\alpha-2\delta\varepsilon)^{1/2}(\delta\zeta_{k,1}(s)+\delta\zeta_{k,2}(s))dx\right). \tag{4.65}$$

A afirmativa em (4.63) é uma consequência das desigualdades (4.65) e (4.64). Usando as desigualdades (4.52), (4.54)–(4.57) e (4.63) obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} 2\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\|^2 - \ V^*(w_0) &\leq e^{2\delta l}C_{11} \\
&+\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega(2\delta\varepsilon-\alpha(x))(\delta\zeta_1(s)(x)+\zeta_2(s)(x))^2dx\right)ds \\
&+\int_0^l e^{-2\delta(l-s)}\left(\int_\Omega \delta\zeta_1(s)(x)f(x,\zeta_1(s)(x))dx-2\delta\int_\Omega F(x,\zeta_1(s)(x))dx\right)ds \\
&= e^{-2\delta l}C_{11}+2\|w_0\|^2-V^*(w_0)-e^{2\delta l}\mathscr{F}(w_l) \\
&\leq 2e^{-2\delta l}C_{11}+2\|w_0\|^2-V^*(w_0).
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $l\in\mathbb{N}$,

$$\limsup_{k\to\infty} 2\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\|^2 \leq 2e^{-2\delta l}C_{11}+2\|w_0\|^2$$

e, assim, $\limsup_{k\to\infty}\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\| \leq \|w_0\|$. Como $(z_{n_k}\pi_f t_{n_k})_k$ converge fracamente para w_0 em $(Z,[\cdot,\cdot])$, temos

$$\liminf_{k\to\infty}\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\| \geq \|w_0\|.$$

Obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\|z_{n_k}\pi_f t_{n_k}\| = \|w_0\|.$$

O Lema 4.20 implica que $(z_{n_k}\pi_f t_{n_k})_k$ converge para w_0 fortemente em Z. A demonstração do teorema está completa. □

Portanto, temos o seguinte resultado de existência de atrator global para o caso crítico.

Teorema 4.21. *Assuma a Hipótese 3.9, a Hipótese 4.3 e a Hipótese 4.15. O semifluxo π_f é um semifluxo global e possui um atrator global.*

Demonstração. Isso é uma consequência imediata do Teorema 4.12, do Teorema 4.19 e da Proposição 1.60. □

Considerações finais

Observamos que a equação (E) depende do parâmetro $\varepsilon > 0$. Portanto, o semifluxo global π_f depende de $\varepsilon > 0$, ou seja, $\pi_f = \pi_{f,\varepsilon}$. Denote por $\mathscr{A}_\varepsilon$ o atrator global de $\pi_{f,\varepsilon}$. Observamos que as estimativas de truncamento para a solução $u(x,t)$ descritas no Capítulo 4 são uniformes no parâmetro $\varepsilon > 0$. Isto nos coloca a pergunta sobre o que ocorre com a família $(\mathscr{A}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Assuma $\alpha \equiv 1$ em (E). Podemos fazer, formalmente, $\varepsilon = 0$ em (E) e obtemos a equação de reação-difusão

$$\begin{array}{ll} u_t + \beta(x)u - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = f(x,u), & x \in \Omega,\ t \in [0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty). \end{array} \tag{P}$$

Em [26], os autores estudam o caso $N = 3$ e mostram que sob certas condições o problema (P) possui atrator global $\widetilde{\mathscr{A}}$ em $H_0^1(\Omega)$.

Em [24] os autores definem uma imersão $\Gamma\colon D \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde D é um subconjunto de $H_0^1(\Omega)$, mostram que $\widetilde{\mathscr{A}} \subset D$ e que a família $(\mathscr{A}_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$, onde $\mathscr{A}_0 = \Gamma(\widetilde{\mathscr{A}})$, é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Demonstrações auxiliares

Nesse apêndice apresentaremos as demonstrações de alguns resultados do Capítulo 1.

A.1 Demonstração de resultados da Seção 1.5

Para demonstrar a Proposição 1.51 necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema A.1. *Suponha que π seja um semifluxo global assintoticamente compacto e seja B um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é um conjunto limitado, para algum $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Então $\omega(B)$ é um conjunto não-vazio, compacto, invariante. Além disso $\omega(B)$ atrai B.*

Demonstração da Proposição 1.51. Suponha que π seja assintoticamente suave. Mostremos que π é assintoticamente compacto. De fato, seja B um subconjunto u-limitado de X, $(x_n)_n$ um sequência em B e $(t_n)_n$ um sequência em $[0,\infty)$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Logo existe um $t_B \geq 0$ tal que o conjunto $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado. Segue do Lema A.1 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Em particular temos que $\mathrm{dist}_H(\pi_{(t_n)}(B), \omega(B)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como

$$d(x_n\pi t_n, \omega(B)) \leq \mathrm{dist}_H(\pi_{(t_n)}(B), \omega(B)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

temos que $d(x_n\pi t_n, \omega(B)) \to 0$ quando $n \to \infty$. A compacidade de $\omega(B)$ implica que existe uma subsequência $(x_{n_k}\pi t_{n_k})_k$ da sequência $(x_n\pi t_n)_n$ e um $y \in \omega(B)$ tais que $x_{n_k}\pi t_{n_k} \to y$ quando $k \to \infty$. Isso implica que π é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, suponha que π seja assintoticamente compacto e considere um subconjunto B de X não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante. Afirmamos que $\omega(B)$ é subconjunto de B não-vazio, invariante, compacto e que $\omega(B)$ atrai B.

Mostremos que $\omega(B)$ é não-vazio. De fato, seja $v \in B$ e considere o conjunto $\{v\}$. Como B é positivamente invariante, temos que, temos que $v\pi t \in B$, para todo $t \geq 0$. Ou seja, $\{v\}$ é u-limitado com $t_{\{v\}} = 0$. Seja $(t_n)_n$ uma sequência em $\mathbb{N}$ tal que $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como π é assintoticamente compacto, segue que existe uma subquência $(v\pi t_{n_k})_k$, da sequência $(v\pi t_n)_n$, e $y \in X$ tal que $d(v\pi t_{n_k}, y) \to 0$ quando $k \to \infty$. Logo $y \in \omega(\{v\}) \subset \omega(B)$.

Mostremos que $\omega(B) \subset B$. De fato, dado $y \in \omega(B)$ existem sequências $(x_n)_n$ em B e $(t_n)_n$ em $\mathbb{N}$ tais que $t_n \to \infty$ e $d(x_n\pi t_n, y) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como B é positivamente invariante, temos que $x_n\pi t_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, sendo B fechado, segue que $y \in B$.

Mostremos que $\omega(B)$ atrai B. De fato, suponha que $\omega(B)$ não atraia B. Então existem um $\varepsilon_0 > 0$, uma sequência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ com $t_n \to \infty$ e uma sequência $(v_n)_n$ em B tais que

$$\inf_{y \in \omega(B)} d(v_n\pi t_n, y) > \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{A.1}$$

Como B é positivamente invariante e limitado, conjunto $E = \{v_n\pi t_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B$ é u-limitado com $t_E = 0$. Agora, a compacidade assintótica de π implica que existe uma subsequência $(v_{n_k}\pi t_{n_k})_k$ da sequência $(v_n\pi t_n)_n$ e um $z \in X$ tal que $d(v_{n_k}\pi t_{n_k}, z) \to 0$ quando $k \to \infty$. Logo $z \in \omega(\{v\}) \subset \omega(B)$ e segue de (A.1)

$$d(v_{n_k}\pi t_{n_k}, z) > \varepsilon_0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

o que é uma contradição. Logo, $\omega(B)$ atrai B.

Mostremos que $\omega(B)$ é invariante. Fixe $t \geq 0$ e considere $v \in \omega(B)$. Logo existem sequências $(v_n)_n$ em B e $(t_n)_n$ em $\mathbb{N}$ tais que $t_n \to \infty$ e $d(v_n\pi t_n, v) \to 0$ quando $n \to \infty$.

A continuidade de π implica que $d((v_n\pi t_n)\pi t, v\pi t) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $(v_n\pi t_n)\pi t = v_n\pi(t_n + t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n + t \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos que $v\pi t \in \omega(B)$. Ou seja,

$$\{x\pi t \mid x \in \omega(B)\} \subset \omega(B).$$

Como $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n_0$. Analogamente ao que já foi feito, o conjunto $\{v_n\pi(t_n - t) \mid n \geq n_0\}$ é u-limitado e a compacidade assintótica de π implica que existe uma subsequência $(v_{n_k}\pi(t_{n_k} - t))_k$ da sequência $(v_n\pi(t_n - t)_{n \geq n_0}$ e um $z \in X$ tal que $d(v_{n_k}\pi(t_{n_k} - t), z) \to 0$ quando $k \to \infty$. Novamente $z \in \omega(B)$ e a continuidade do semifluxo π implica que $d((v_{n_k}\pi(t_{n_k} - t))\pi t, z\pi t) \to 0$ quando $k \to \infty$. Como $(v_{n_k}\pi(t_{n_k} - t))\pi t = v_{n_k}\pi t$ para todo $k \in N$ temos que $v = z\pi t$. Ou seja

$$\omega(B) \subset \{x\pi t \mid x \in \omega(B)\}.$$

Finalmente, mostremos que $\omega(B)$ é compacto. Notemos que $\omega(B)$ é u-limitado. A invariância de $\omega(B)$ e a compacidade assintótica de π implicam que $\omega(B)$ é sequencialmente compacto. Portanto, π é assintoticamente suave. $\square$

Demonstração do Lema 1.55. Seja W um subconjunto limitado de X. Suponha que $\mathscr{A}$ não atraia W. Logo, temos que existem um $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $(t_n)_n$ em $[0,\infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e uma sequência $(w_n)_n$ em W tais que

$$d(w_n\pi t_n, \mathscr{A}) > \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$d(w_n\pi t_n, a) > \varepsilon_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } a \in \mathscr{A}. \tag{A.2}$$

Notemos que $U := \bigcup_{a\in\mathscr{A}} B_X(a,\varepsilon_0)$ é uma vizinhança a aberta de $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é um atrator global de π, existe um $t_{W,U} \in [0,\infty)$ tal que $w\pi t \in U$ para todo $w \in W$ e $t \in [t_{W,U},\infty)$. Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_{W,U}$ para todo $n \geq n_0$ e

$$w_n\pi t_n \in \bigcup_{a\in\mathscr{A}} B_X(a,\varepsilon_0) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, existe uma sequência $(a_n)_n$ em $\mathscr{A}$ tal que

$$d(w_n\pi t_n, a_n) < \varepsilon_0 \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{A.3}$$

Como $\mathscr{A}$ é um conjunto compacto, existe uma subsequência $(a_{n_k})_{n_k}$ da sequência $(a_n)_n$ e um $a \in \mathscr{A}$ tais que $a_{n_k} \to a$ quando $k \to \infty$. Este fato e (A.3) implicam que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(w_{n_k}\pi t_{n_k}, a) \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } k \geq k_0,$$

mas isso contradiz (A.2). Portanto, o conjunto $\mathscr{A}$ atrai conjuntos limitados de X. $\square$

Demonstração do Lema 1.56. Seja $\mathscr{A}$ um atrator global de π. Segue do Lema 1.55 que $\mathscr{A}$ atrai pontos de X, ou seja, π é ponto dissipativo.

Mostremos que π é assintoticamente suave. Seja W um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante de X . Devemos mostrar que existe um conjunto compacto não-vazio C contido em W que atrai W. Defina $C := W \cap \mathscr{A}$. É claro que C limitado e $C \subset W$. Como $\mathscr{A}$ é compacto e W é fechado, segue que C é fechado. Além disso, $C \subset \mathscr{A}$. Portanto, C é compacto.

Afirmamos que C é não vazio. De fato, seja $(t_n)_n$ uma sequência em $[0,\infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $w \in W$. Segue do Lema 1.55 que $\mathscr{A}$ atrai W. Em particular, $\text{dist}_H(\pi_{(t_n)}(W),\mathscr{A}) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como

$$d(w\pi t_n,\mathscr{A}) \leq \text{dist}_H(\pi_{(t_n)}(W),\mathscr{A}), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que $d(w\pi t_n,\mathscr{A}) \to 0$ quando $n \to \infty$. A compacidade de $\mathscr{A}$ implica que existe uma subequência $(t_{n_k})_k$ da sequência $(t_n)_n$ e um $y \in \mathscr{A}$ tais que $w\pi t_{n_k} \to y$ quando $k \to \infty$. Como W é positivamente invariante e fechado, segue que $y \in W$. Ou seja, $y \in C$. Como $\mathscr{A}$ atrai W e

$$\text{dist}_H(\pi_{(t)}(W),\mathscr{A}\cap W) \leq \text{dist}_H(\pi_{(t)}(W),\mathscr{A}), \text{ para todo } t \geq 0,$$

segue C atrai W.

Para concluir a demonstração, mostremos que π é eventualmente limitado. Seja W um subconjunto limitado de X. Temos que $\mathscr{A}$ atrai W. Logo existe um $t_W \geq 0$ tal que

$$\text{dist}_H(\pi_{(t)}(W),\mathscr{A}) < 1, \text{ para todo } t \geq t_W.$$

Portanto,

$$d(w\pi t,\mathscr{A}) < 1, \text{ para todo } t \geq t_W \text{ e } w \in W. \tag{A.4}$$

Como $\mathscr{A}$ é limitado, segue que existe um $z \in X$ e um $M \geq 0$ tal que $d(a,z) \leq M$ para todo $a \in \mathscr{A}$. Seja $t \geq t_W$ e $w \in W$. Segue de (A.4) que existe um $a_{t,w} \in \mathscr{A}$ tal que $d(w\pi t, a_{t,w}) < 1$. Portanto, temos que

$$d(w\pi t,z) \leq 1+M, \text{ para todo } w \in W \text{ e } t \geq t_W.$$

Ou seja, $\gamma^+_{t_W}(W)$ é limitado. □

Demonstração do Lema 1.57. Como π é um semifluxo ponto dissipativo, existe um subconjunto W_0 de X não-vazio e limitado que atrai pontos de X. Seja $\mathscr{N}_{W_0}$ uma vizinhança aberta limitada arbitrária de W_0. Segue da Proposição 1.49 que $\mathscr{N}_{W_0}$ absorve pontos de X.

A continuidade de π e o fato de que $\mathscr{N}_{W_0}$ absorve pontos implicam que para cada $v \in X$, existem um $\tau_v \geq 0$ e um $\varepsilon_v > 0$ tais que

$$\pi_{(\tau_v)}(B_X(v,\varepsilon_v)) \subset \mathscr{N}_{W_0}, \tag{A.5}$$

onde $B_X(v,\varepsilon_v)$ denota a bola aberta em X com centro em v e raio ε_v.

Como π é um semifluxo eventualmente limitado temos que existe um $t_{\mathscr{N}_{W_0}} \geq 0$ tal que

$$\mathscr{O} := \bigcup_{t \geq t_{\mathscr{N}_{W_0}}} \pi_{(t)}(\mathscr{N}_{W_0}) = \gamma^{+}_{t_{\mathscr{N}_{W_0}}}(\mathscr{N}_{W_0})$$

é um conjunto limitado. Segue que o conjunto $\mathscr{O}$ é positivamente invariante e absorve pontos de X. Além disso, segue de (A.5) que para cada $v \in X$ temos que

$$\pi_{(t)}(B_X(v, \varepsilon_v)) \subset \mathscr{O}, \text{ para todo } t \geq t_v, \tag{A.6}$$

onde $t_v := \tau_v + t_{\mathscr{N}_{W_0}} \geq 0$.

Seja C um subconjunto compacto de X. É claro que $C \subset \cup_{v \in C} B_X(v, \varepsilon_v)$, onde $\varepsilon_v > 0$ é como na afirmativa acima. A compacidade do conjunto C implica que existem $v_j \in C$, $j = \{1, \ldots, k\}$ tais que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_X(v_i, \varepsilon_{v_j}) =: \mathscr{N}_C. \tag{A.7}$$

Defina $\sigma := \max\{t_{v_1}, \ldots, t_{v_k}\}$. Fórmulas (A.6) e (A.7) implicam que

$$\pi_{(t)}(C) \subset \pi_{(t)}(\mathscr{N}_C) = \bigcup_{j=1}^{k} \pi_{(t)}(B_X(v_j, \varepsilon_{v_j})) \subset \mathscr{O}, \text{ para todo } t \geq \sigma.$$

A demonstração está completa. □

Demonstração do Lema 1.58. Seja B um subconjunto limitado de X. O Lema A.1 implica que $\omega(B)$ é um conjunto compacto e que atrai B. Segue do Lema 1.57 que existe um conjunto limitado $\mathscr{O} \subset X$ e existe uma vizinhança aberta $\mathscr{N}_{\omega(B)}$ de $\omega(B)$ tal que $\mathscr{O}$ absorve $\mathscr{N}_{\omega(B)}$. Como $\omega(B)$ atrai B temos que existe um $t_B \geq 0$ tal que

$$\pi_{(t)}(B) \subset \mathscr{N}_{\omega(B)}, \text{ para todo } t \geq t_B$$

e portanto existe um $\tau_B \geq 0$ tal que

$$\pi_{(t)}(B) \subset \mathscr{O}, \text{ para todo } t \geq \tau_B.$$

Ou seja, mostramos que o conjunto $\mathscr{O}$ absorve conjuntos limitados de X.

Defina $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{O})$. Aplicando novamente o Lema A.1 temos que $\mathscr{A}$ é um conjunto compacto, invariante e atrai $\mathscr{O}$. Além disso, como o conjunto $\mathscr{O}$ absorve conjuntos limitados de X, temos que $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos limitados de X. Portanto, para todo conjunto limitado B em X

e toda vizinhança aberta U de $\mathscr{A}$, existe um $t_{B,U} \in [0,\infty)$ tal que $x\pi t \in U$ para todo $x \in B$ e todo $t \in [t_{B,U},\infty)$. Mostramos que $\mathscr{A}$ é um atrator global do semifluxo π. □

A.2 Demonstração de resultados da Seção 1.6

Demonstração da Proposição 1.62. Seja $\tau > 0$. Defina $\alpha = \alpha(\tau) = \max\{\|T(t)\| \mid t \in [0,\tau]\}$, $K = 2M\alpha + \|F(0)\|$ e

$$\omega_M = \omega_{M,\tau} = \min\left\{\tau, \frac{1}{(2L_K+2)\alpha}\right\}.$$

Seja agora $x \in X$ com $\|x\| \leq M$ e considere o seguinte espaço métrico:

$$E = \{u \in C([0,\omega_M],X) \mid \|u(t)\| \leq K, \text{ para todo } t \in [0,\omega_M]\}$$

munido da distância proveniente da norma de $C([0,\omega_M],X)$, ou seja, para u, $v \in E$,

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,\omega_M]} \|u(t) - v(u)\|.$$

Temos que (E,d) é um espaço métrico completo. Para cada $u \in E$, definimos a função Φ_u por

$$\Phi_u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds, \text{ para todo } t \in [0,\omega_M].$$

Notemos que $\Phi_u \in C([0,\omega_M],X)$. Mostremos que $\Phi_u \in E$. Para $t \in [0,\omega_M]$, temos que $\|u(t)\| \leq K$ e portanto

$$\begin{aligned}\|F(u(t))\| &\leq \|F(0)\| + \|F(u(t)) - F(0)\| \leq \|F(0)\| + L_K\|u(t) - 0\| \\ &\leq \|F(0)\| + KL_K = \|F(0)\| + 2M\alpha L_K + \|F(0)\|L_K \\ &\leq 2\|F(0)\| + 2M\alpha L_K + 2\|F(0)\|L_K 2M\alpha = (2L_K+2)(M\alpha + \|F(0)\|).\end{aligned}$$

Como $\omega_M \leq \tau$, obtemos para $t \in [0,\omega_M]$ que

$$\begin{aligned}\|\Phi_u(t)\| &\leq \|T(t)\|\|x\| + \int_0^t \|T(t-s)\|\|F(u(s))\|ds \\ &\leq \alpha M + \alpha(2+2L_K)(M\alpha + \|F(0)\|)t \leq \alpha M + \alpha(2+2L_K)(M\alpha + \|F(0)\|)\omega_M.\end{aligned}$$

Como $\omega_M \leq \dfrac{1}{(2L_K+2)\alpha}$ temos que

$$\|\Phi_u(t)\| \leq 2M\alpha + \|F(0)\| = K, \text{ para todo } t \in [0,\omega_M].$$

Portanto, temos definida uma aplicação $F\colon E \to E$ dada por $F(u) = \Phi_u$, $u \in E$. Além disso, para todo u, $v \in E$, temos

$$\|\Phi_v(t) - \Phi_u(t)\| \leq L_K \int_0^t \|T(t)\|\|v(s) - u(s)\|ds \leq \alpha\omega_M L_K d(u,v),\ t \in [0,\omega_M].$$

Suponha que para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ temos que

$$\|\Phi_u^{n-1}(t) - \Phi_v^{n-1}(t)\| \leq \frac{(\alpha L_K \omega_M)^{n-1}}{(n-1)!} d(u,v),\ t \in [0,\omega_M].$$

Para todo $t \in [0,\omega_M]$ segue que

$$\begin{aligned}\|\Phi_u^n(t) - \Phi_v^n(t)\| &\leq \int_0^t \frac{(\alpha L_K |s|)^{n-1}}{(n-1)!} \|T(t-s)\|\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| d(u,v) \\ &\leq \alpha^n L_K^n d(u,v) \int_0^t \frac{|s|^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{(\alpha L_K \omega_M)^n}{n!} d(u,v).\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|\Phi_u^n(t) - \Phi_v^n(t)\| \leq \frac{(\alpha L_K \omega_M)^n}{n!} d(u,v), \text{ para todo } t \in [0,\omega_M].$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(F^n(u),F^n(v)) \leq \frac{(\alpha L_K \omega_M)^n}{n!} d(u,v).$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\frac{(\alpha L_K \omega_M)^n}{n!} < 1.$$

Logo, F^n é uma contração em E. Assim, segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach, a aplicação F^n possui um único ponto fixo $u \in E$ e, portanto, o mesmo ocorre para F. O único ponto fixo da aplicação F é uma solução $u \in C([0,\omega_M],X)$ de (1.4) em $[0,\omega_M]$.

Para concluir mostremos a unicidade. Sejam u, $v \in C([0,\omega_M],X)$ soluções de (1.4) em $[0,\omega_M]$ e defina $P = \sup_{t\in[0,\omega_M]}\{\|u(t)\|,\|v(t)\|\}$. Para $t \in [0,\omega_M]$ temos que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| ds \leq L_P \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds.$$

O Lema 1.61 (com $C_1 = 0$) implica que $u(t) = v(t)$, para todo $t \in [0,\omega_M]$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.63. Seja $x \in X$. Defina o seguinte conjunto

$$\mathscr{C} := \{\omega > 0 \mid \text{existe uma única solução } u \in C([0,\omega],X) \text{ de (1.4) em } [0,\omega]\}.$$

Segue da Proposição 1.62 que

$$\omega(x) = \sup \mathscr{C}$$

está bem definido e $\omega(x) \in (0,\infty]$. Seja $t \in [0,\infty)$. Logo existe um $T \in \mathscr{C}$ tal que $0 < t \leq T$. Seja $u_T \in C([0,T],X)$ a única solução de (1.4) em $[0,T]$ e defina

$$u(t) := u_T(t).$$

Afimamos que a função u está bem definida. De fato, seja $S \in \mathscr{C}$ com $0 < t \leq S$. Sem perda de generalidade podemos supor que $S < T$. Logo u_S e u_T são duas soluções de (1.4) definidas em $[0,S]$. A unicidade da Proposição 1.62 implica que $u_S = u_T$ em $[0,S]$ e a afirmativa está demonstrada.

Além disso, a função u é contínua em $[0,\omega(x))$ e para todo para todo $0 < \omega < \omega(x)$, u é a única solução de (1.4) em $C([0,\omega],X)$.

Para completar a demonstração do resultado, se $\omega(x) < \infty$, mostremos que $\lim_{t\to\omega(x)^-} \|u(t)\| = \infty$. Suponha que exista um $M \geq 0$ tal que $\|u(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0,\omega(x))$ e seja ω_M como na Proposição 1.62. Temos que $\omega_M < \omega(x)$. Seja $t_0 \in]0,\omega(x))$ tal que

$$\omega(x) - t_0 < \omega_M. \tag{A.8}$$

Seja $v \in C([0,\omega_M],X)$ a solução de (1.4) dada pela Proposição 1.62. Logo

$$v(s) = T(s)u(t_0) + \int_0^s T(s-\sigma)F(v(\sigma))d\sigma, \text{ para todo } s \in [0,\omega_M].$$

Defina $w \in C([0,t_0+\omega_M],X)$ por

$$w(s) = \begin{cases} u(s) & \text{se } s \in [0,t_0] \\ v(s-t_0) & \text{se } s \in [t_0,t_0+\omega_M]. \end{cases}$$

Afirmamos que w é solução de (1.4) com $\omega = t_0 + \omega_M$. De fato, para $\tau \in [0,t_0]$ temos que

$$w(\tau) = u(\tau) = T(\tau)x + \int_0^{t_0} T(t_0-s)F(u(s))ds = T(\tau)x + \int_0^{t_0} T(t_0-s)F(w(s))ds.$$

Agora, para $\tau \in [t_0, t_0 + \omega_M]$ temos que

$$\begin{aligned}
w(\tau) = v(\tau - t_0) &= T(\tau - t_0)u(t_0) + \int_0^{\tau - t_0} T(\tau - t_0 - \sigma)F(v(\sigma))d\sigma \\
&= T(\tau - t_0)\left(T(t_0)x + \int_0^{t_0} T(t_0 - \sigma)F(u(\sigma))d\sigma\right) + \int_0^{\tau - t_0} T(\tau - t_0 - \sigma)F(v(\sigma))d\sigma \\
&= T(\tau)x + \int_0^{t_0} T(\tau - \sigma)F(u(\sigma))d\sigma + \int_{t_0}^{\tau} T(\tau - \sigma)F(v(\sigma - t_0))d\sigma \\
&= T(\tau)x + \int_0^{\tau} T(\tau - \sigma)F(w(\sigma))d\sigma.
\end{aligned}$$

O que demonstra a afirmativa. A definição de $\omega(x)$ implica que $t_0 + \omega_M \leq \omega(x)$, mas isso contradiz (A.8). Logo o conjunto $\{\|u(t)\| \mid t \in [0, \omega(x))\}$ não é limitado.

Agora suponha que exista uma constante $M \geq 0$ tal que para todo $\tau \in [0, \omega(x))$ exista um $t_\tau \in (\tau, \omega(x))$ tal que $\|u(t_\tau)\| \leq M$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um $t_n \in (\omega(x) - 1/n, \omega(x))$ tal que $\|u(t_n)\| \leq M$. Temos que $t_n \to \omega(x)^-$ quando $n \to \infty$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x) - t_{n_0} < \omega_M$. Usando um argumento similar ao acima, mostramos que $\omega_M + t_{n_0} < \omega(x)$ o que é uma contradição. Portanto, $\lim_{t \to \omega(x)^-} \|u(t)\| = \infty$. □

Demonstração da Proposição 1.64. Seja $x \in X$ e seja u solução da equação (1.4) dada pelo Teorema 1.63. Seja $0 < \omega < \omega(x)$. Seja $(x_n)_n$ uma sequência em X tal que $x_n \to x$ com $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja u_n a solução da equação (1.4) dada pelo Teorema 1.63 correspondente ao valor inicial x_n. Como na demonstração do Teorema 1.63 seja $\alpha = \max\{\|T(t)\| \mid t \in [0,1]\}$. Afirmamos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x_n) > \omega$ para todo $n \geq n_0$. Para ver isto, defina

$$M = \alpha^{-1} \sup_{t \in [0,\omega]} \|u(t)\|$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$\tau_n = \sup\{t \in [0, \omega(x_n)) \mid \|u_n(s)\| \leq 2M\alpha + \|F(0)\|, \text{ para todo } s \in [0,t]\}.$$

Como a sequência $(x_n)_n$ é convergente, então existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| < M$ para todo $n \geq n_1$. É claro que $\omega_M < \omega(x_n)$ e $\tau_n > \omega_M > 0$. Defina $\beta = \max\{\|T(t)\| \mid t \in [0, \omega]\}$. Para cada $t \leq \omega$, $t \leq \tau_n$, temos

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_n(t)\| &\leq \|T(t)\|\|x - x_n\| + L_{2M\alpha + \|F(0)\|} \int_0^t \|T(t-s)\|\|u(s) - u_n(s)\|ds \\
&\leq \beta\|x - x_n\| + \beta L_{2M\alpha + \|F(0)\|} \int_0^t \|u(s) - u_n(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Segue da Desigualdade de Gronwall descrita no Lema 1.61 que

$$\|u(t)-u_n(t)\| \leq \beta\|x-x_n\|e^{\omega\beta L_{2M\alpha+\|F(0)\|}}, \text{ para todo } t \leq \omega,\, t \leq \tau_n. \tag{A.9}$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 \geq n_1$ tal que

$$\|x-x_n\| \leq \frac{M\alpha}{\beta e^{\omega\beta L_{2M\alpha+\|F(0)\|}}}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Em particular, para todo $t \leq \min\{\omega, \tau_n\}$ e $n \geq n_0$, temos que

$$\|u_n(t)\| \leq \|u(t)\| + \beta\|x-x_n\|e^{\omega\beta L_{2M\alpha+\|F(0)\|}} \leq M\alpha + M\alpha \leq 2M\alpha + \|F(0)\|.$$

Logo, $\tau_n > \min\{\omega, \tau_n\}$ para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $\tau_n > \omega$ para todo $n \geq n_0$ e isso implica que $\omega(x_n) > \omega$ para todo $n \geq n_0$. A demonstração da afirmativa está completa.

Notemos que a semicontinuidade inferior de ω segue imediatamente da afirmativa acima. Para demonstrar (ii) notemos que se $(x_n)_n$ é uma sequência em X e $x \in X$ tais que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$ e se $\omega < \omega(x)$, então pelo que fizemos acima temos que existe uma constante $\widetilde{K} \geq 0$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos que $\omega(x_n) > \omega$ e

$$\|u(t)-u_n(t)\| \leq \widetilde{K}\|x-x_n\|, \text{ para todo } t \in]0,\omega], \tag{A.10}$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam u_n e u as soluções da equação (1.4) correspondentes aos valores iniciais x_n e x. A desigualdade (A.10) implica que $u_n \to u$ em $C([0,\omega],X)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J.M. Arrieta, J.W. Cholewa, T. Dłtoko e A. Rodrigues-Benal, Asymptotoic behavior and attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains, *Nonlinear Anal.* **56** (2004), 515–554.

[2] A.V. Babin e M.I. Vishik, *Attractor of Evolution Equations*, North Holland, Amsterdam, 1991.

[3] A.V. Babin e M.I. Vishik, Attractor of partial differential evolution equations in an unbounded domain, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **116** (1990), 221–243.

[4] J.M. Ball, Global attractors for damped semilinear wave equations. Partial differential equations and applications, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **10** (2004), 31–52.

[5] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[6] A.N. Carvalho, Análise Funcional II, Notas de Aula. Modelo de documento digital disponível em <http://www2.icmc.usp.br/ andcarva/AnaliseFuncional-II.pdf>. Acesso em: 13 de dezembro de 2012.

[7] A.N. Carvalho, Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, Notas de Aula. Modelo de documento digital disponível em <http://www2.icmc.usp.br/ andcarva/SDNL2012.pdf>. Acesso em: 13 de dezembro de 2012.

[8] T. Cazenave e A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford Science Publications, Oxford, 1998.

[9] J.W. Cholewa e T. Dłtoko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[10] R. Dautray e J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[11] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[12] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience Publishers, New York, 1958.

[13] D. Fall e Y. You, Global attractors for the damped nonlinear wave equation in unbounded domin, *Proceedings of the Fourth World Congress of Nonlinear Analysis* (2004).

[14] E. Feireisl, Attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^3$, *Nonlinear Anal.* **23** (1994). 187–195.

[15] E. Feireisl, Asymptotic behaviour and attractors for semilinear damped wave equaitons with a supercritical exponent, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1995), 1051–1062.

[16] D.G. Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[17] J.A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1985.

[18] J. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, American Mathematical Society, Providence, 1988.

[19] J. Hale e G. Rangel, Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation, *J. Differetial Equations.* **73** (1988), 197–214.

[20] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations,* Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[21] E. Hille e R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, AMS, Providence, 1957.

[22] O. Ladyzenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[23] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[24] M. Prizzi e K. P. Rybakowski, Attractors for singularly perturbed damped wave equations on arbitrary unbounded domains, *Top. Meth. in Nonlinear Anal.* **32** (2008), 1–20.

[25] M. Prizzi e K. P. Rybakowski, Attractors for semilinear damped wave equations on arbitrary unbounded domains, *Top. Meth. in Nonlinear Anal.* **31** (2008), 49–82.

[26] M. Prizzi e K. P. Rybakowski, Attractors for reaction-diffusion equations on arbitrary unbounded domains, *Top. Meth. in Nonlinear Anal.* **30** (2007), 251–277.

[27] B. Simon, Schrödinger Semigroups, *Bull. AMS.* **7** (1982) 447–526.

[28] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[29] B. Wang, Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains, *Physica D* **179** (1999), 41–52.