ASPECTOS GEOMÉTRICOS DA TEORIA DE ARNOL'D

Valdeni Soliani Franco

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - S.P.
1986

Aos meus pais,

Carla e Rafael

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa Carla e a meu filho Rafael, por razões óbvias.

Ao Professor Gilberto Francisco Loibel que me orientou desde o início da Graduação com muita dedicação, paciência e competência até a conclusão deste trabalho.

A Professora Izette Alves Coelho Loibel, que auxiliou na minha formação científica.

Aos Professores Carlos Biasi e Oziride Manzoli Neto pelo incentivo e amizade.

Aos amigos do ICMSC-USP e do DME-FUEM pelo estímulo dado aos meus estudos.

Este trabalho foi parcialmente patrocinado pela FAPESP.

GEOMETRICS ASPECTS OF ARNOL'D THEORY

Valdeni Soliani Franco

Adviser: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

A B S T R A C T

In this paper we detailed some of the classification theorems from Arnold's papers, selected mainly from [1], according to the demonstration technics.

In these theorems, he classifies certain subsets of the orbits $\Theta \subset C^{\infty}(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^1)$ as well as quotients of such subsets. We also studied the topology of some of them.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES 1

CAPÍTULO I

ALGUMAS TÉCNICAS DE CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES 8

CAPÍTULO II

A GEOMETRIA DE ALGUMAS SINGULARIDADES 36

BIBLIOGRAFIA 79

INTRODUÇÃO

O problema da classificação de singularidades consiste em estudar as órbitas de $C^{\infty}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n) = \Omega_{m,n}$ sob a ação de certos grupos ($\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, etc. ver [5]). No nosso estudo olharemos para $\Omega_{2,1}$ que chamaremos simplesmente de Ω, e as equivalências utilizadas serão do tipo $\mathcal{R}$.

Nos artigos de Arnol'd, principalmente em [1], encontram-se importantes contribuições para os casos $(\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ e $(\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C},0)$. Em alguns dos muitos teoremas, ele classifica subconjuntos de órbitas $\Theta \subset \Omega$ e em outros classifica quocientes de tais subconjuntos.

Estes estudos geralmente recaem na classificação de polinômios com caracterizações especiais (por exemplo, polinômios da forma $x^4 + ax^2y^2 + y^4$). Em muitos casos, associa a estas, classificações de objetos geométricos conhecidos.

A algumas classes desses objetos geométricos correspondem órbitas, ou seja, elementos de Ω, a outros, blocos de órbitas (classes de singularidades) que são subdivididos em teoremas subsequentes.

O estudo de uma topologia do conjunto Ω que exprimisse a "proximidade" das órbitas é excessivamente complexo, mas certos subconjuntos do tipo Θ ou quocientes destes podem ser identificados com espaços topológicos relativamente simples e em certos casos estabelecido um relacionamento entre alguns desses quocientes.

No Capítulo II, estudaremos algumas situações deste tipo, relacionados com alguns dos teoremas de Arnol'd. Em particular, estudamos alguns casos em que refinamos os blocos dados por Arnol'd em órbitas (§ 3, Cap. II).

No Capítulo 0, relacionamos os conceitos, lemas e teoremas da teoria de Arnol'd, que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo I, selecionamos doze entre os cento e cinco teoremas de Arnol'd, que aparecem em [1], de acordo com as diferentes técnicas de demonstrações. Ainda neste capítulo demonstramos dois teoremas sobre funções quasehomogêneas que além de constituirem uma técnica geral que utiliza raízes de uma álgebra de Lie quase homogênea para a classificação de singularidades quasehomogêneas, nos auxiliam na associação destas classificações com objetos geométricos conhecidos, como aparece em [1], página 48.

Pretendemos num estudo futuro, englobar os resultados aqui obtidos num estudo mais amplo de Ω.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Neste Capítulo os termos que aparecem sublinhados são os conceitos que estaremos definindo.

Um <u>ponto crítico</u> de uma função diferenciável é um ponto para o qual a derivada da função é nula. Um ponto crítico é dito <u>não-degenerado</u> se a derivada segunda é uma forma quadrática não-degenerada.

Dizemos que dois germes de funções em 0 são <u>equivalentes</u> se um deles pode ser obtido do outro sob um difeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ que deixa 0 fixo.

A classe das funções cuja série de Taylor coincide em 0 para os termos de grau r com a série de Taylor de uma função dada é chamada o <u>r-jato</u> da função em 0. O jato de uma função em 0 é <u>suficiente</u> se ele determina o germe dessa função em 0 a menos de equivalência.

Denotaremos por $\mathfrak{m}$ o ideal maximal do anel dos germes diferenciáveis no ponto $0 \in \mathbb{C}^n$. A notação $f \in \mathfrak{m}^r$ denota que f tem um zero de ordem r em 0.

<u>Lema 0.1</u>:

Seja f um germe de uma função no ponto $0 \in \mathbb{C}^n$. Fixamos um número natural r e assumimos que f satisfaz a seguinte condição:

(1_r) $\forall \alpha \in \mathfrak{m}^{r+1}$, $h_i \in \mathfrak{m}^2$ tal que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \bmod \mathfrak{m}^{r+2}$

então, qualquer função f' para a qual $f' = f \bmod \mathfrak{m}^{r+1}$ também satisfaz (1_r).

<u>Lema 0.2</u>:

Suponhamos que o r-jato da função f em 0 satisfaz (1_r), então o r-jato da função f em 0 é suficiente.

As demonstrações dos Lemas 0.1 e 0.2 estão em [3].

Consideremos o espaço aritmético $\mathbb{C}^n$ com coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ fixadas. Uma função $f: (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ é dita ser quasehomogênea de grau d com peso $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ se:

$$f(\lambda^{\alpha_1}x_1,\ldots,\lambda^{\alpha_n}x_n) = \lambda^d f(x_1,\ldots,x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Seja f um germe de uma aplicação diferenciável complexa, com ponto crítico isolado $0 \in \mathbb{C}^n$. A multiplicidade μ de 0 pode ser definida como o número de pontos críticos não-degenerados no qual 0 se divide sob pequenos deslocamentos. Ela também pode ser definida como a dimensão do anel local:

$$\mathcal{Q}_f = \frac{\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_2]]}{(\partial f_1,\ldots,\partial f_n)}$$

Investigando pontos críticos de multiplicidade finita, uma função pode ser representada por jatos suficientes ou um polinômio.

Assim, a questão da classificação de singularidades isoladas se reduz a problemas algébricos concernentes à ação de grupos de Lie de dimensão finita.

Uma função quasehomogênea f é dita ser não-degenerada se 0 é um ponto crítico isolado, isto é, se a multiplicidade μ do ponto crítico 0 é finita.

Dizemos que um monômio $x^k = x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ tem grau d se $(\alpha,k) = \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$. Um polinômio(série de potências, germes, funções) tem filtração d se todos os seus monômios são de grau maior ou igual a d.

Os polinômios (série, germes) com fistração d forma um espaço linear E_d; se $d < d'$ então $E_{d'} \subseteq E_d$; a filtração de uma produto é a soma da filtração dos fatores, assim E_d é um ideal no anel dos polinômios (séries, germes). Denotamos este anel por A, chamamos o anel quociente A/E_d o anel

de d-jatos e seus elementos de d-jatos.

Um polinômio (série de potências, germes) é dito ser semiquasehomogêneo de grau d com peso α se ele é da forma $f = f_o + f'$, onde f_o é um polinômio (série, germe) quasehomogêneo não-degenerado de grau d e peso α e f' é um polinômio (série, germe) de filtração estritamente maior que d.

Em geral, consideraremos funções quasehomogêneas de grau 1, com expoente racional $0 < \alpha_i \leq 1/2$. Tais funções são automaticamente polinomiais. Chamamos o hiperplano $\Gamma = \{k: \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = 1\}$ de diagonal. A diagonal corta os eixos coordenados num segmento de comprimento $a_i = 1/\alpha_i$.

Podemos dizer então que uma função semiquasehomogênea é obtida de uma função quasehomogênea adicionando-se monômios cujos expontes localizam-se sobre ou acima da diagonal.

Teorema 0.1:

A multiplicidade do ponto crítico 0 de uma função semiquasehomogênea f é igual a da sua parte quasehomogênea, isto é, $\mu(f) = \mu(f_o)$.

A demonstração se encontra no §3 de [2].

Por abuso de linguagem, chamamos um conjunto de μ polinômios uma base do anel local de f se ele torna-se uma base para $\mathcal{O}_f$ sobre $\mathbb{C}$ após fatoração pelo ideal.

Teorema 0.2:

Se o sistema de monômios $e_1, \ldots, e_\mu$ é uma base do anel local da parte quasehomogênea f_o de uma função semiquasehomogênea f, então este mesmo sistema de monômios é uma base do anel local de f.

Teorema 0.3:

O número de monômios da base do anel local de uma função quasehomogênea ou semiquasehomogênea f com grau d independe da escolha da base no a-

nel local.

Teorema 0.4:

Uma base monomial do anel local de uma função semiquasehomogênea f de peso $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ e grau 1, tem exatemente um gerador de grau $d_{máx} = \sum_{s=1}^{n} (1-2\alpha_s)$. Todo monômio de grau maior localiza-se no ideal $(\partial f_1,\ldots,\partial f_n)$.

As demonstrações dos Teoremas 0.2,0.3 e 0.4 estão nos §3 e§4de [2].

Consideremos o anel local das funções quasihomogêneas ou semiquasehomogêneas f de grau d. Fixamos um sistema de monômios formando uma base para este anel.

Um monômio é dito ser superior (ou inferior, ou diagonal) se ele tem grau maior que d (ou menor que d, ou igual a d) para um dado expoente quasehomogêneo.

Seja $e_1,\ldots,e_s$ o sistema de todos os monômios superiores da base, numa base fixa do anel local da função f_o.

Teorema 0.5:

Toda função semiquasehomogênea com parte quasehomogênea f_o é equivalente a uma função da forma $f_o + \Sigma c_k e_k$, onde c_k são constantes.

Este Teorema é fundamental em várias demonstrações dos Teoremas de classificação de singularidades que faremos no Capítulo I, sua demonstração se encontra no §7 em [2].

O grupo dos germes (ou jatos) de difeomorfismos de C^n que deixa o ponto 0 fixo, atua no espaço dos germes (ou jatos) de funções em 0. Uma classe de singularidades é um subconjunto do espaço de germes (ou jatos) de funções que é invariante sob esta ação. Órbitas são exemplos de classe de singularidades. Dois germes (ou jatos) são ditos equivalentes se eles permacem na mesma órbita (estas equivalências são as chamadas do tipo $\mathcal{R}$).

Para definir Forma Normal consideremos o espaço dos polinômios $M = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ como um subconjundo do espaço de germes de funções $f(x_1,\ldots,x_n)$ em 0.

Uma Forma Normal para uma classe K de funções é dada pela aplicação ϕ: $B \to M$ de um espaço linear de dimensão finita de parâmetros B no espaço dos polinômios, para o qual as três condiçoes abaixo se verificam:

(1) $\phi(B)$ intercepta toda órbita de K;

(2) a imagem inversa em B de cada órbita é finita;

(3) a imagem inversa de todo complemento para K,está contida em alguma hiper superficie própria em B.

Uma Forma Normal é dita polinomial (respectivamente afim) se a aplicação ϕ é polinomial (respectivamente linear e não homogênea). Uma Forma Normal afim é chamada simples se ϕ tem a forma:

$\phi(b_1,\ldots b_r) = \psi_o + b_1x_1^{m_1} + \ldots + b_rx_r^{m_r}$, onde ψ_o é um polinômio fixado, os b_i são números e os x^{m_i} são monômios.

Dois germes $f: (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ e $g: (\mathbb{C}^m,0) \to (\mathbb{C},0)$ são ditos serem estavelmente equivalentes se eles tornam-se equivalentes após adição de formas quadráticas não-degeneradas (por exemplo: $f(x) = x^3$ é estavelmente equivalente a $g(x,y) = x^3 + y^2$). Se duas funções com o mesmo número de variáveis são estavelmente equivalentes, então elas são equivalentes.

O corank do germe de uma função em um ponto critico é a dimensão do espaço nulo de sua derivada segunda. Toda funçao de corank r é estavelmente equivaelnte a uma função de r variáveis (Lema de Morse generalizado). Na classificação a menos de equivalência estável geralmente tomaremos formas normais com o número de variáveis igual ao corank.

O grupo de difeomorfismos quasehomogêneos de peso α é o grupo de germes de difeomorfismos de $\mathbb{C}^n$ em 0 levando qualquer função quasehomogênea

de peso α e grau d em uma função de mesmo grau. A álgebra de Lie deste grupo é chamado a <u>álgebra quasehomogênea</u> e será denotada por $\mathfrak{a}(\alpha)$.

O <u>espaço dos expoentes de funções</u> de $x_1,\ldots x_n$ é o espaço aritmético $\mathbb{C}^n$ cujos pontos m com coordenadas inteiras não negativas são os expoentes dos monômios x^m.

O <u>suporte</u> de funções quasehomogêneas de grau d e peso α é o conjunto de todos os pontos inteiros não-negativos m no plano $(m,\alpha) = d$. O suporte e dito ser <u>completo</u> se ele não está contido em um subespaço afim de $\mathbb{C}^n$ de dimensão menor que n-1.

As <u>raízes</u> da algebra quasehomogênea $\mathfrak{a}(\alpha)$ são todos os vetores não nulos m do espaço de expoentes que localizam-se no plano $(m,\alpha) = 0$ e tem a forma $m = p - 1_i$ (onde 1_i é o vetor cuja i-ésima componente é 1 e as restantes iguais a 0 e o vetor p tem componentes inteiras não negativas)

Em outras palavras, m é uma raiz se $x^p\partial_i$ é um campo vetorial monomial de $\mathfrak{a}(\alpha)$ distinto de $x_i\partial_i$. Observemos que i pode ser recuperado de uma raiz m, desde que m tem precisamente uma coordenada negativa $m_i = -1$ (nem todas componetes de m pode ser não negativas, pois $(m,\alpha) = 0$).

Queremos agora para finalizar, fixar algumas notações que aparecerão nos teoremas de classificação.

Por $j_k f$ entende-se o k-jato de f em 0 (ou o polinômio de Taylor de ordem k em 0).

$j_{\{x^{m_i}\}} f$ e o quase jato de f em 0, definido pelo monômio x^{m_i} (ou o correspondente polinômio de Taylor).

$j_{\{x^{m_i}\}} f \approx g$ denota equivalência quasehomogênea de jatos (ou polinômios de Taylor).

* Observações:

1. Um sistema de n monômios $\{x^{m_i}\}$ em $x_1,\ldots,x_n$ com expoentes independentes $m_i \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ define um hiperplano $\Gamma = \{m: (\alpha,m) = 1\}$. Se todas as componestes α_i do vetor α são positivas, então α é chamado o tipo de quasehomogeneidade e o número (α,m) é a ordem do monômio x^m. O polinômios $f = \Sigma f_m x^m$ é quasehomogêneo de grau d e tipo α se $(\alpha,m) = d \quad \forall m: f_m \neq 0$. O tipo de quasehomogeneidade define em $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ uma graduação e uma filtração decrescente $\mathcal{E}_o \supset \mathcal{E}_1 \supset \ldots$, onde:

$$\mathcal{E}_d = \{f: (\alpha,m) \geq d, \ \forall m \text{ com } f_m \neq 0\}.$$

2. O espaço quociente $\mathcal{E}_o/\mathcal{E}_d$, $d > 1$, é chamado um espaço de quasejatos definido pelos monômios $\{x^{m_i}\}$ (ou definido pelo tipo de quasehomogeneidade α). Para um sistema de coordenadas fixado, podem ser identificados com polinômios cujos monômios são todos de ordem maior que 1 (um).

CAPÍTULO I

ALGUMAS TÉCNICAS DE CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES

Neste capítulo demonstraremos alguns teoremas de classificação de singularidades utilizando diversas técnicas que aparecem basicamente em dois artigos de V.I.Arnol'd: "Critical points of smooth functions and their normal forms" e "Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points" citados em nossa bibliografia. Os pré-requisitos necessários ou foram dados no Capítulo 0 ou serão citados antes das demonstrações de cada teorema.

Os teoremas numerados de 1.1 a 1.12 foram retirados de uma série de 105 teoremas que aparecem no artigo [1], e antes de enunciarmos cada um desses teoremas colocaremos entre parenteses o número do teorema no referido artigo. Eles foram selecionados devido as diferentes técnicas de demonstração. Algumas dessas demonstrações não existem no artigo, outras fizemos com mais detalhes do que as feitas no artigo.

<u>Teomema 1.1 (2)</u> :

Se corank $f \leq 1 \Rightarrow f \in A_k$ $(k \geq 1)$, onde A_k: x^{k+1} $(k \geq 1)$

<u>Demonstração</u>:

Em [3], Lema 4.1 é demonstrado que numa vizinhança de 0, existe um sistema de coordenadas x,y no qual <u>f</u> pode ser escrito da forma:

$f = \Phi(x) + Q(y)$ onde Q é uma forma quadrática não degenerada e $\dim\{x\}$ = corank f.

No nosso caso corank $f \leq 1$. Em virtude do Lema 0.2 o (k+1)-jato:

(*) $cx^{k+1} + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2$ $(c \neq 0)$ é suficiente, isto segue da fatoração de todos os monômios em x,y de grau k+2.

$$x^{k+2} = (k+1)cx^k \left\{\frac{x^2}{c(k+1)}\right\}, \quad \text{com} \quad \frac{x^2}{c(k+1)} \in \mathfrak{m}^2$$

Substituindo x por $x' = |c|^{1/(k+1)}x$ em (*), obtemos $f \in A_k$.

Teorema 1.2 (3) :

Se $j_2f = 0 \Rightarrow$ um dos quatro casos ocorrem:

$j_3f \approx x^2y + y^3$; $j_3f \approx x^2y$; $j_3f \approx x^3$ ou $j_3f = 0$

Demonstração:

Como o 2-jato de f é nulo, temos que o 3-jato determina uma forma cúbica no plano tangente. Uma forma cúbica em $\mathbb{C}^2$ é reduzida por uma mudança de variáveis em um dos seguintes tipos: $x^2y + y^3$; x^2y; x^3 ou 0. De fato:

$$j_3f = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 \text{ ou ainda}$$

$$j_3f = (\alpha_1x - \beta_1y)(\alpha_2x - \beta_2y)(\alpha_3x - \beta_3y)$$

1º Caso: $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, temos $j_3f = 0$

2º Caso: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, fazemos $\eta = \alpha_1x - \beta_1y$ e assim
$j_3f = \eta^3$ ou $j_3f \approx x^3$

3º Caso: Se $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$, fazemos $\eta = \alpha_1x - \beta_1y$ e $\xi = \alpha_3x - \beta_3y$
Assim $j_3f = \eta^2\xi$ ou $j_3f \approx x^2y$

4º Caso: Todas as raízes são distintas

Podemos escrever $j_3f = xy(\alpha x - \beta y) = \alpha x^2y - \beta xy^2$ e por dilatação ou contração de coordenadas obtemos $x^2y - xy^2 = xy(x - y)$. Consideremos um novo sistema $\xi = x - y$ e $\eta = x + y \Rightarrow x = \frac{\eta + \xi}{2}$ e $y = \frac{\eta - \xi}{2} \Rightarrow j_3f =$

$= \frac{\eta^2 - \xi^2}{4}(\xi) = \frac{\eta^2\xi}{4} - \frac{\xi^3}{4}$ fazendo uma dilatação $j_3f \approx x^3 + x^2y$

Teorema 1.3 (5):

Se $j_3 f = x^2 y \Rightarrow f \in D_k$ $(k > 4)$, onde D_k: $x^2 y + y^{k-1}$ $(k \geq 4)$

Demonstração:

Se $j_3 f = x^2 y$ então o s-jato de $\underline{f}$ tem a forma $x^2 y + \phi_s(x,y)$, ϕ_s é um polinômio homogêneo de grau s. Representamos ϕ_s na forma:

$\phi_s = ay^s + 2bxy^{s-1} + x^2\psi(x,y)$, onde $\psi \in \mathfrak{m}^{s-2}$

Substituindo $x - by^{s-2} = x_1$ e $y - \psi(x,y) = y_1$ reduzimos $\underline{f}$ à forma $f = x_1^2 y_1 + ay_1^s \bmod \mathfrak{m}^{s+1}$ (pois $\mathfrak{m}^{2s-3} \subset \mathfrak{m}^{s-1}$ para $s > 3$). Segue que dois casos são possíveis: $a=0$ ou $a \neq 0$. Se $a=0$, então o s-jato da função é reduzido à forma $x_1^2 y_1 + \phi_{s+1}(x_1,y_1)$ e podemos repetir o argumento anterior, continuando até chegarmos a $a \neq 0$. Se $a \neq 0$ nunca ocorre então a singularidade tem codimensão infinita.

Consideremos o $\underline{s}$ tal que $a \neq 0$, então o germe da função $\underline{f}$ em zero será equivalente ao germe de $x^2 y + ay^s$. De fato: basta verificar que o s-jato $x^2 y + \frac{ay^s}{s}$ $(s > 3,\ a \neq 0)$ é suficiente.

$$x^\alpha y^\beta = (2xy)(h(x,y)),\ h \in \mathfrak{m}^2 \text{ para } \alpha + \beta = s + 1 > 3 (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

$$x^{s+1} = (x^2 + ay^{s-1})(x^{s-1}) + 2xy\left(\frac{-x^{s-2}y^{s-2}}{2a^{-1}}\right) \quad (x^{s-1} \in \mathfrak{m}^2, (xy)^{s-2} \in \mathfrak{m}^2)$$

$$y^{s+1} = (x^2 + ay^{s-1})\left(\frac{y^2}{a}\right) + 2xy\left(\frac{-xy}{2}\right) \quad (y^2 \in \mathfrak{m}^2, \left(\frac{-xy}{2}\right) \in \mathfrak{m}^2)$$

Para converter $x^2 y + \frac{ay^s}{s}$ em $x^2 y + y^s$ basta substituir $x_1 = px$ e $y_1 = qy$.

Teorema 1.4 (6_k):

Se $j_{x^3, y^{3k}} f(x,y) = x^3 \Rightarrow$ ocorre um dos quatro casos:

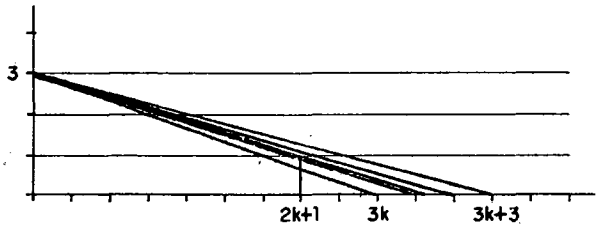
$j_{x^3, y^{3k+1}} f \approx x^3 + y^{3k+1}$; $j_{x^3, y^{2k+2}} f \approx x^3 + xy^{2k+1}$; $j_{x^3, y^{3k+2}} f \approx x^3 + y^{3k+2}$

ou $j_{x^3, y^{3k+2}} f \approx x^3$.

Demonstração:

$j_{x^3,y^{3k}}f(x,y)$ é o quase-jato de $\underline{f}$ definido pelos monômios x^3, y^{3k}.

Assim o suporte da função, localiza-se estritamente acima da linha que liga os pontos (3,0) e (0,3k)



Colocamos uma régua sobre esta linha, fixamos (3,0) e movemos a outra extremidade para cima, encontrando expoentes de monômios não nulos.

Como podemos ver pela figura, dentro do triângulo entre as retas ligando (3,0) a (0,3k) e a (0,3(k+1)) existem ao todo três pontos reticulados (no quadrante positivo) a saber, (0,3k+1);(1,2k+1) e (0,3k+2).

Se o coeficiente de y^{3k+1} é diferente de 0, então temos o primeiro caso do teorema. Se o coeficiente de y^{3k+1} é 0, mas o de xy^{2k+1} é diferente de 0, então temos o segundo caso. Se ambos os monômios y^{3k+1} e xy^{2k+1} não ocorre em $\underline{f}$, mas y^{3k+2} sim, então temos o terceiro caso. Se os coeficientes de todos os três monômios y^{3k+1}, xy^{2k+1} e y^{3k+2} são nulos, então temos o outro caso.

Teorema 1.5 (7_k):

Se $j_{x^3,y^{3k+1}}f = x^3 + y^{3k+1} \Rightarrow f \in E_{6k}$, onde E_{6k}: $x^3+y^{3k+1}+\alpha xy^{2k+1}$
com $\alpha = a_0+\ldots+a_{k-2}y^{k-2}$

Demonstração:

Pelo Lema 0.2, a função quasehomogênea $f_0 = x^3 + y^{3k+1}$ tem o 3k+1-jato suficiente, trivialmente.

E_{6k}: $x^3 + y^{3k+1} + \alpha xy^{2k+1}$, onde $\alpha = a_0 + a_1y + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$

(e $a = 0$, para $k = 1$)

O Teorema 0.5 garante que toda função semiquasehomogênea f é equivalente a uma função da forma $f_0 + \Sigma c_k e_k$, onde c_k são constantes e $e_1, e_2, \ldots, e_s$ é o sistema de monômios superiores da base, numa base monomial fixa do anel local da função f .

Monômios superiores devem ter grau superior a 9k+3 (grau de f). Então o menor grau será 9k+4. Monômios contendo só $\underline{x}$ para ter grau superior a 9k+3 deve ter expoente superior a 3 que está assim contido no ideal. Monômios contendo y puro, para ter grau superior a 9k+3 deve ter expoente acima de 3k+1 e assim estará no ideal. Não se deve ter monômios que contenham x^2, pois estariam claramente no ideal, restam então monômios que contêm x e y^p , além disso $(3k+1) + 3p \geqq 9k+4 \Rightarrow 3p \geqq 6k+3 \Rightarrow p \geqq 2k+1$.

Para calcularmos o limite de p devemos calcular d_{max} (ver Teorema 0.4).

$$d_{max} = n - 2\,\Sigma\alpha_i = 2 - 2\,(\,(1/3) + (1/(3k+1))) = 2 - (6k+8)/(9k+3) =$$

$$= (18k + 6 - 6k - 3)/(9k+3) = (12k - 2)/(9k+3)$$

Queremos então que $9k+4+3\eta = 12k - 2 \Rightarrow \eta = k - 2$, onde η é o maior expoente de y que podemos multiplicar xy^{2k-1}.

Portanto $f = x^3 + y^{3k+1} + a x y^{2k+1}$, onde $a = a_0 + a_1 y + \ldots + a_{k-2} y^{k-2}$.

No artigo [1], Arnol'd formula teoremas gerais sobre funções quasehomogêneas (Teoremas A e B) que além de nos auxiliar na classificação das singularidades nos fornece uma maneira de identificarmos problemas de classificação com problemas geométricos.

Na sequência enunciaremos esses teoremas, fazendo suas demonstrações com mais detalhes que no artigo. Citaremos em seguida alguns corolários importantes.

Seja $M \subset \mathbb{C}^r \subset \mathbb{C}^n$ um sistema de raízes de $\mathfrak{a}(\alpha)$ gerando o plano $\mathbb{C}^r$

em $\mathbb{C}^n$ $(0 \leq r \leq n-1)$. A cada $m \in M$ associamos um vetor e_m de uma base vetorial em $\mathbb{C}^\nu$ (ν é o número de raízes). Consideremos o espaço vetorial r-dimensional $H = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C})$ e a soma direta $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbb{C}^\nu$.

Lema 1.1:

Ao espaço $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbb{C}^\nu$ pode ser dado a seguinte estrutura de álgebra de Lie:

(1) $[h', h''] = 0 \quad \forall\, h', h'' \in H$

(2) $[h, e_m] = (h,m) e_m \quad \forall\, h \in H,\ m \in M$

(3) $[e_{m_1}, e_{m_2}] = N_{m_1,m_2} e_{m_1+m_2}$, desde que $m_1+m_2 \neq 0$ e onde

$$N_{m_1,m_2} = \begin{cases} 0, \text{ se } m_1+m_2 \text{ não é uma raiz} \\ -\text{máx}\{\lambda : m_1+\lambda m_2 \text{ é uma raiz}\} \text{ e este máx é } > 1 \\ +\text{máx}\{\lambda : m_1+\lambda m_2 \text{ é uma raiz}\} \text{ e este máx é } > 1 \\ \pm 1 \text{ se ambos os máx são } = 1 \ (\text{o caso onde ambos os máx são } > 1 \text{ é impossível.}) \end{cases}$$

(4) $[e_m, e_{-m}] = h_m$ onde $h_m \in H$ muda de sinal sob a reflexão de C^r que preserva M e troca m por $-m$ normalizado pela condição $h_m(m) = 2$ (uma tal reflexão existe e é única para qualquer par de raízes opostas).

A álgebra de Lie quasehomogênea $\mathfrak{a}(\alpha)$ é isomórfa a soma direta da álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ (para alguma escolha de sinal $\pm$ em (3)) e uma álgebra (comutativa) trivial $\mathfrak{a}(\alpha) \approx \mathfrak{b} \oplus C^{n-r}$.

Demonstração:

Consideremos uma base monomial para $\mathfrak{a}(\alpha)$ sobre $\mathbb{C}$ e escrevemos os monômios da base como segue:

$$h' = x_i \partial_i \quad \text{e} \quad e_m = x^m x_i \partial_i$$

(1) Sejam $h', h'' \in H \Rightarrow h' = x_i \partial_i$ e $h'' = x_j \partial_j$

$[h', h''] = [x_i \partial_i, x_j \partial_j] = 0$ (trivialmente)

(2) Sejam $h \in H$ e $m \in M \Rightarrow$

$$[h,e_m](x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = [x_i\partial_i, x^m x_j\partial_j](x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) =$$

$$= (x_i\partial_i \circ x^m x_j\partial_j)(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) - (x^m x_j\partial_j \circ x_i\partial_i)(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) =$$

$$= x_i\partial_i(\alpha_j x_1^{\alpha_1+m_1} \ldots x_j^{\alpha_j+m_j} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n}) - x^m x_j\partial_j(\alpha_i x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) =$$

$$= \alpha_j(\alpha_i+m_i)\, x_1^{\alpha_1+m_1} \ldots x_r^{\alpha_r+m_r} - \alpha_i\alpha_j x_1^{\alpha_1+m_1} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n} =$$

$$= \alpha_j m_i x_1^{\alpha_1+m_1} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n} = m_i x^m x_j\partial_j = m_i e_m = (h,m)e_m$$

(3) $[e_m,e_{m'}](x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = [x^m x_i\partial_i, x^{m'} x_j\partial_j](x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) =$

$$= x^m x_i\partial_i(\alpha_j x_1^{\alpha_1+m_1'} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n'}) - x^{m'} x_j\partial_j(\alpha_i x_1^{\alpha_1+m_1} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n}) =$$

$$= (\alpha_j m_i' - \alpha_i m_j) x_1^{\alpha_1+m_1+m_1'} \ldots x_i^{\alpha_i+m_i+m_i'} \ldots x_j^{\alpha_j+m_j+m_j'} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n+m_n'}$$

Como m e m' são raízes

$m = (m_1,\ldots,-1,\ldots,m_j,\ldots,m_n)$

$m' = (m_1',\ldots,m_i',\ldots,-1,\ldots,m_n')$

Tomemos $m+\lambda m' = (m_1+\lambda m_1',\ldots,-1+\lambda m_i',\ldots,m_j+(-\lambda),\ldots,m_n+\lambda m_n')$

Para ser raiz devemos ter:

$-1+\lambda m_i' = -1$ e $m_j-\lambda \geqq 0$ ou

$-1+\lambda m_i' \geqq 0$ e $m_j-\lambda = -1$

1º Caso: $-1+\lambda m_i' = -1$ e $m_j-\lambda \geqq 0 \Rightarrow m_i' = 0$ e $m_j \geqq \lambda$. Assim

$$[e_m,e_{m'}](x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = -\alpha_i m_j x_1^{\alpha_1+m_1+m_1'} \ldots x_n^{\alpha_n+m_n+m_n'} =$$

$$= -m_j e_{m+m'} = -\text{máx}\{\lambda : m+\lambda m' \text{ é uma raiz}\}\, e_{m+m'}$$

2º Caso: $-1+\lambda m_i' \geqq 0$ e $m_j - \lambda = -1 \Rightarrow \lambda m_i' \geqq 1$ e $\lambda = m_j+1$

Se tivermos pesos $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, obteremos:

a. $\beta_1 m_1+\beta_2 m_2+\ldots-\beta_i+\ldots+\beta_j m_j+\ldots+\beta_n m_n = 0$

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \beta_1 m_1 + \ldots + \beta_j m_j + \ldots + \beta_n m_n$$

b. $\beta_1 m_1' + \beta_2 m_2' + \ldots + \beta_i m_i' + \ldots + (-\beta_j) + \ldots + \beta_n m_n' = 0 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad \beta_j = \beta_1 m_1' + \ldots + \beta_i m_i' + \ldots + \beta_n m_n'$$

Como m_i' são inteiros não negativos para $i \neq j$ então para que $\lambda m_i' \geqq 1$, devemos ter $\lambda \geqq 1$ e $m_i' \geqq 1$.

(A) Caso $\lambda > 1 \Rightarrow m_j > 0 \underset{a.}{\Rightarrow} \beta_i \geqq \beta_j$

(A_1) $\beta_i > \beta_j \underset{b.}{\Rightarrow} m_i' = 0$ (absurdo pois por hipótese $m_i' \geqq 1$)

(A_2) $\beta_i = \beta_j \Rightarrow m = (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$

$m' = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)$

Assim: $[e_m, e_{m'}] = (\alpha_j - \alpha_i) x_1^{\alpha_1 + m_1 + m_1'} \ldots x_n^{\alpha_n + m_n + m_n'} = h_j - h_i = h_m$.

(B) Caso $\lambda = 1 \underset{hip.}{\Rightarrow} m_j = 0$ e $[e_m, e_{m'}] = \alpha_j m_i' x_1^{\alpha_1 + m_1 + m_1'} \ldots x_n^{\alpha_n + m_n + m_n'} =$

$= \max\{\lambda : m' + \lambda m$ é uma raiz $\} e_{m+m'}$.

Assim h e e_m satisfazem (1)-(4)

Sabemos pela construção de (4) que $h_m(-m) = -h_m(m)$. Logo

$h_m(M) = 2$ e $h_m(v) = 0 \ \forall v \in M^{\perp}$

$[e_m, e_{-m}] = -[e_{-m}, e_m] = h_m \in H^r = \bigoplus_{i=1}^{r} [x_i \partial_i] = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C})$

O espaço $\mathbb{C}^r$ e a métrica são invariantes relativos a todas as permutações de coordenadas com pesos iguais ($\alpha_i = \alpha_j$). Portanto o complemento ortogonal $\mathbb{C}^{n-r}$ para $\mathbb{C}^r$ em $\mathbb{C}^n$ é também invariante. Representamos o espaço linear $\mathfrak{a}(\alpha)$ como $\mathfrak{a}(\alpha) = H^r \oplus K^{\nu} \oplus H^{n-r}$, onde H^r consiste daquelas funções lineares h em $\mathbb{C}^n$ que se anulam em $\mathbb{C}^{n-r}$; H^{n-r} é constituido por funções h em $\mathbb{C}^n$ que se anulam em $\mathbb{C}^r$; K^{ν} as combinações lineares dos vetores e_m.

Da relação de comutação segue que H^{n-r} localiza-se no centro de

$\mathfrak{a}(\alpha)$ e que $H^r \oplus K^\nu$ é um ideal isomórfo a $\mathfrak{b}$.

Teorema A:

A álgebra de Lie quasehomogênea $\mathfrak{a}(\alpha)$ é determinada, a menos de um número finito de variantes, por seu sistema de raízes (como um subespaço do espaço gerado pelas raízes) e por sua dimensão.

Demonstração:

As relações (1)-(4) do Lema 1.1 expressam os comutadores em $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ a geometria das raízes, sem referência as coordenadas (excluíndo a escolha de sinal $\pm$ em uma das relações (3)). Assim, o conjunto de raízes, os vetores no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^r$, determina $\mathfrak{b}$ a menos de um número finito de possibilidades.

Teorema B:

Assumimos que o suporte é completo. Então a ação da álgebra de Lie $\mathfrak{a}(\alpha)$ no espaço das funções no suporte é univocamente determinada em relação a classe de equivalência afim dos pares (suporte, sistema de raízes).

Demonstração:

Denotamos por σ_m a ação de translação para $m \in \mathbb{Z}^n$

$(\sigma_m a)(k) = a(k-m)$, onde $k \in \mathbb{Z}^n$ e $a: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. Então:

$e_m = \sigma_m h'$ (este h' é o operador de multiplicação pela i-ésima coordenada; $h' = x_i \partial_i$)

De fato: Consideremos o monômio $a = z x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$

$k = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$

$a(k) = z$. Seja $m = (m_1, \ldots, -1, \ldots, m_n)$ uma raiz para um certo peso $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ fixo.

$h_i a = (x_i \partial_i) a = z\, \beta_i x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$. Como operador

$(h_i a)(k) = h_i(k) a(k) = \beta_i z$

$e_m = x_1^{m_1} \ldots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_{i+1}^{m_{i+1}} \ldots x_n^{m_n}\, \partial_i$; $k' = (\beta_1 + m_1, \ldots, \beta_n + m_n)$

$e_m a = z\, \beta_i x_1^{\beta_1 + m_1} \ldots x_i^{\beta_i - 1} \ldots x_n^{\beta_n + m_n}$

(*) $(e_m a)(k') = \beta_i z$

$(\sigma_m (h_i a))(k') = (h_i a)(k) = \beta_i z$ de (*). Portanto

$e_m = \sigma_m h_i$

Estendemos as funções no suporte sobre o reticulado $\mathbb{Z}^{n-1}$ de todos os pontos inteiros no plano suporte, fazendo tudo igual a zero fora do suporte. Os operadores h_i, e_m, σ_m, h_m defini - dos anteriormente nas funções em $\mathbb{Z}^n$ também atuam no espaço das funções nos reticulados $\mathbb{Z}^{n-1}$ no plano suporte. Estes operadores no espaço das funções em $\mathbb{Z}^{n-1}$ são denotados pelas mesmas letras. Assim h_i e h_m são operadores de multiplicação pelas funções afins no plano suporte, σ_m é o operador de translação pela raiz m e $e_m = \sigma_m h_i$.

Suponha que m é uma raíz. Chamamos um ponto k do suporte um <u>ponto base para m</u> se $k+m$ não pertence ao suporte. O conjunto de todos os pontos bases de m é chamado a base da raiz m (no dado suporte).

A base da raiz $m = p-1_i$ é formada por todos os pontos do suporte cuja i-ésima coordenada é 0. Consequentemente a base inteira localiza-se no hiperplano afim $\mathbb{C}^{n-2}$ do plano suporte.

A base de cada raíz do suporte completo pertence a precisamente um hiperplano afim $\mathbb{C}^{n-2} \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Cada ponto do suporte é obtido de um ponto da base por subtração de um múltiplo inteiro

não negativo m, assim se a base está contida em $\mathbb{C}^{n-3}$, o suporte estará contido em $\mathbb{C}^{n-2}$ e não será completo.

Assim, existe precisamente uma função afim no plano suporte que é igual a 0 na base de m e cujo incremento ao longo de m é -1. Esta função é h_i (restrito ao plano suporte). Conse - quentemente, a restrição de h_i ao plano suporte, pode ser re- construído univocamente do suporte e a raiz m.

A ação de e_m no espaço das funções no suporte pode a- gora ser descrito em termos somente da geometria do suporte e as raízes: $e_m = \sigma_m h_i$, isto é, $(e_m a)(k) = h_i(k-m)a(k-m)$ para qualquer função a. Notamos que o operador e_m deixa o espaço das funções invariantes e que anula o exterior do suporte desde que h_i anula os pontos base.

A álgebra $\mathfrak{a}(\alpha)$ atua no espaço das funções num reticu- lado do plano suporte, assim temos a representação $\phi : \mathfrak{a}(\alpha) \to \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é a álgebra de endomorfismo deste espaço de funções (de dimensão infinita). Consideremos a imagem da representação ϕ. Es- ta imagem é determinada pela geometria do suporte e pelas raízes. Mais precisamente, seja $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}(\alpha^1)$ e $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}(\alpha^2)$ duas álgebras quasehomogênneas e $S_1 \subset \mathbb{C}_1^{n-1}$, $S_2 \subset \mathbb{C}_2^{n-1}$ suportes completos. Se- ja $\psi : \mathbb{C}_1^{n-1} \to \mathbb{C}_2^{n-1}$ uma aplicação afim que leva S_1 em S_2 bijeti- vamente e o sistema de raízes de $\mathfrak{a}_1$ no de $\mathfrak{a}_2$. Então o isomorfis- mo ψ^*, induzido por ψ, do espaço de funções em $\mathbb{C}_2^{n-1}$ no espaço de funções em $\mathbb{C}_1^{n-1}$ leva a álgebra de Lie $\phi(\mathfrak{a}_2)$ isomorficamente na álgebra de Lie $\phi(\mathfrak{a}_1)$.

A $\mathfrak{a}(\alpha)$ é gerada sobre $\mathbb{C}$ e pelos monômios $x_i \partial_i$ e $x^m x_i \partial_{i(m)}$. A imagem dos campos $\Sigma c_i x_i \partial_i$ em $\mathcal{E}$ são operadores

de multiplicação por todas as possíveis funções afins do plano suporte. A imagem do campo $x^m x_i \partial_{i(m)}$ são os operadores e_m, definidos pela geometria do suporte e as raízes. Consequentemente, $\psi^* e_{\phi(m)} = e_m \psi^*$ e assim, ψ induz um isomorfismo $\psi: \phi(\mathfrak{a}_1) \to \phi(\mathfrak{a}_2)$

O núcleo do homomorfismo de álgebras de Lie $\phi: \mathfrak{a}(\alpha) \to \mathcal{E}$ é 0. De fato:

$$(h + \Sigma c_m e_m)(a) = 0 \quad \forall a$$

Podemos tomar δ_k que é igual a 1 somente em k.

$$(h + \Sigma c_m e_m)(\delta_k)(p) = \underset{\substack{\| \\ (h(k)\delta_k)(p)}}{h(p)\delta_k(p)} + \underbrace{\Sigma c_m h_{i(m)} \delta_k(p-m)}_{\substack{\text{se } p=k+m \text{ obtemos} \\ \Sigma c_m h_i(k) \delta_{k+m}}}$$

Para um k qualquer

$$(h + \Sigma c_m e_m)(\delta_k)(k) = h(k) = 0 \Rightarrow h = 0$$

$$(\Sigma c_m e_m)(\delta_{k-\bar{m}})(k) = \Sigma c_m h_{i(m)}(k) \delta_{k-m}(k-m) =$$

$= c_{\bar{m}} h_{i(m)}(k)$. Escolhemos k tal que $h_{i(\bar{m})}(k) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_{\bar{m}} = 0$.

Assim a álgebra de Lie $\phi(\mathfrak{a}(\alpha))$ é isomorfa a $\mathfrak{a}(\alpha)$.

O isomorfismo $\mathfrak{a}_2 \to \phi(\mathfrak{a}_2) \xrightarrow{\psi} \phi(\mathfrak{a}_1) \to \mathfrak{a}_1$ mostra que ambas as álgebras $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ e suas ações no espaço de funções em S_1 e S_2 são isomorfas.

<u>Corolário 1</u>:

Suponha que o conjunto de pesos α e o grau d são tais que existe uma função quasehomogênea com um ponto crítico isolado 0 com 2-jato nulo. Então o sistema de raízes e o suporte determina univocamente a álgebra de Lie $\mathfrak{a}(\alpha)$ e sua ação ϕ.

Corolário 2:

Seja $\gamma: \mathbb{C}_1^{n-1} \to \mathbb{C}_2^{n-1}$ um isomorfismo afim de um suporte completo plano S_1 em um suporte completo plano S_2, levando S_1 em parte de S_2, as raízes de $\mathfrak{a}_1$ em parte das raízes de $\mathfrak{a}_2$ e as bases das raízes de $\mathfrak{a}_1$ nas parte das bases das correspondentes raízes de $\mathfrak{a}_2$. Então γ induz um isomorfismo entre a ação ϕ de $\mathfrak{a}_1$ no espaço de funções em S_1 e a ação de uma subálgebra de $\mathfrak{a}_2$ no espaço de funções em S_2 que se anula fora de $\gamma(S_1)$.

Corolário 3:

Suponhamos que sob as hipóteses do Corolário 2, vários pontos do suporte S_1 são distinguidos e os valores das funções são fixados para eles. Todas as funções em S_1 com valores fixados por estes pontos formam um plano afim P no espaço de funções S_1. Seja $\mathfrak{a}_p$ álgebra de isotropia deste plano afim. Então o isomorfismo γ do Corolário 2 induz um isomorfismo da ação de $\mathfrak{a}_p$ em P com a ação de alguma subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{a}_2$, preservando o plano $\gamma^{-1*}P$ no espaço de funções em S_2.

Nas demonstrações dos teoremas 1.6 e 1.11 utilizamos os resultados obtidos acima.

Teorema 1.6 (10_k):

$j_{x^3,y^{3k-1}}f = x^3 \Rightarrow$ um dos três caso ocorrem:

$$j_{x^3,y^{3k}}f \approx x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\ 4a^3+27 \neq 0$$

$$\approx x^3 + x^2y^k$$

$$\approx x^3$$

Demonstração:

Vamos utilizar o Corolário 3

Se $j_{x^3,y^{3k-1}}f = x^3 \Rightarrow f = x^3 + ax^2y^k + bxy^{2k} + cy^{3k}$

peso: $\alpha = (k,1)$ e grau: $d = 3k$

suporte: $s_1=(3,0)$; $s_2=(2,k)$; $s_3=(1,2k)$; $s_4=(0,3k)$. Logo os monômios bases são: x^3, x^2y^k, xy^{2k}, y^{3k}.

raízes: $m = (-1,k)$, temos então: $x\partial_x = h_1$ e $e_m = x^{-1}y^kx\partial_x = y^k\partial_x$

ponto base: $(0,3k)$

Seja $\gamma: \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ descrita no Corolário 2, dada por $\gamma(r,s) = (r,s/k)$

Seja S_1 o suporte acima e S_2 dado por $(3,0)$; $(2,1)$; $(1,2)$; $(0,3)$. Logo os monômios bases são: X^3, X^2Y, XY^2, Y^3.

Observamos que temos $(-1,1)$ e $(1,-1)$ como raízes, mas tomaremos a subálgebra de Lie correspondente a raíz $(-1,k)$ e portanto tomaremos como raíz $m' = (-1,1)$ que tem como ponto base $(0,3)$.

Devemos mostrar que $\gamma^* e_{\gamma(m)} = e_m\gamma^*$

De fato: $\gamma^*: \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ são espaços de funções de V^{n-1} em $\mathbb{C}$)

Seja $\alpha \in \mathfrak{F}_2$; $\gamma^*\alpha = \alpha_o\gamma$

$(e_m\gamma^*)(\alpha)(t) = (e_m(\alpha_o\gamma))(t) = x\partial_x(t-m)(\alpha_o\gamma)(t-m)$

Os t_s que nos servem serão:

$t_1 = (2,k)$ pois $t_1-m = (3,0) \Rightarrow 3\alpha(3,0)$

$t_2 = (1,2k)$ pois $t_2-m = (2,k) \Rightarrow 2\alpha(2,1)$

$t_3 = (0,3k)$ pois $t_3-m = (1,2k) \Rightarrow 1\alpha(1,2)$

$t_4 = (-1,4k)$ pois $t_4-m = (0,3k) \Rightarrow 0\alpha(0,3)$

$(\gamma^* e_{m'}(\alpha))(t) = e_{m'}(\alpha)_o(\gamma(t)) = x\partial_x(\gamma(t)-m')\alpha(\gamma(t)-m')$

$\gamma(t_1) = (2,1) \Rightarrow \gamma(t_1)-m' = (3,0) \Rightarrow 3\alpha(3,0)$

$\gamma(t_2) = (1,2) \Rightarrow \gamma(t_2)-m' = (2,1) \Rightarrow 2\alpha(2,1)$

$\gamma(t_3) = (0,3) \Rightarrow \gamma(t_3)-m' = (1,2) \Rightarrow 1\alpha(1,2)$

$\gamma(t_4) = (-1,4) \Rightarrow \gamma(t_4)-m' = (0,3) \Rightarrow 0\alpha(0,3)$

Logo $e_m\gamma^* = \gamma^* e_{\gamma(m)}$

Como as hipóteses do corolário 3 estão satisfeitas, então o problema reduz-se à classificação dos polinômios P: $X^3 + AX^2Y + BXY^2 + CY^3$. Como $e_m = y\partial_x$, o deslocamento na direção de x deve ser βy, isto é:

$$\begin{cases} X = \alpha x + \beta y \\ Y = \delta y \end{cases}$$

isto é, $\alpha^3x^3 + (3\alpha^2\beta+A\alpha^2\delta)x^2y + (3\alpha\beta^2+2A\alpha\beta\delta+B\alpha\delta^2)xy^2 + (\beta^3+A\beta^2\delta+B\beta\delta^2+C\delta^3)y^3 = x^3 + ax^2y + y^3$ para α,β,δ convenientes.

Fazendo $x = X/Y$ em $\frac{X^3}{Y^3} + \frac{aX^2Y}{Y^3} + \frac{Y^3}{Y^3}$, obtemos

$x^3 + ax^2 + 1$.

Segue da solução de Cardan para a equação cúbica que para existirem 3 (três) raízes distintas, devemos ter $4a^3+27\neq 0$.

Caso as raízes tenham multiplicidade 2 ou 1, então podemos fazer uma substituição $x = x + \lambda y$ e P passa a ter a forma $X^3 + AX^2Y$, $A\neq 0$. Dilatando Y obtemos $X^3 + X^2Y$. Se a multiplicidade é 3(três), então $P = X^3$ e assim o teorema 1.6 fica demonstrado.

Veremos no Capítulo II que esta classificação de singularidades do teorema 1.6 coincide com o problema da classificação afim de triplas de pontos em $\mathbb{C}^1$.

<u>Teorema 1.7 (11_k)</u>:

$$j_{x^3,y^{3k}}f = x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\ 4a^3+27\neq 0 \Rightarrow f \in J_{k,0}.$$

Forma normal de $J_{k,0}$: $x^3 + ax^2y^k + y^{3k} + cxy^{2k+1}$, onde $c = c_0+\ldots+c_{k-3}\,y^{k-3}$ para $k>2$, para $k = 2$, tomamos $c = 0$.

<u>Demonstração</u>

Mostraremos que $f_o=x^3+ax^2y^k+y^{3k}$ é $(4k-1)$-determinado.

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = 3x^2 + 2axy^k \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_o}{\partial y} = akx^2y^{k-1} + 3ky^{3k-1}$$

$$\begin{aligned} y^{4k} = {} & \frac{1}{3k}\,y^{k+1}(akx^2y^{k-1} + 3ky^{3k-1}) - \frac{1}{6}\,xy^k(3x^2+2axy^k) + \\ & + \frac{1}{2ka}\,xy(akx^2y^{k-1}+3ky^{3k-1}) - \frac{3}{4a^2}\,y^{2k}(3x^2+2axy^k) + \\ & + \frac{9}{4a^3k}\,y^{k+1}(akx^2y^{k-1}+3ky^{3k-1}) - \frac{27}{4a^3}\,y^{4k} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{27}{4a^3}\right)y^{4k} = {} & \frac{1}{3k}\,y^{k+1}\frac{\partial f_o}{\partial y} - \frac{1}{6}\,xy^k\frac{\partial f_o}{\partial x} + \frac{1}{2ka}\,xy\frac{\partial f_o}{\partial y} - \\ & - \frac{3}{4a^2}\,y^{2k}\frac{\partial f_o}{\partial x} + \frac{9}{4a^2k}\,y^{k+1}\frac{\partial f_o}{\partial y} \end{aligned}$$

Para ser determinado, ou seja não degenerado $27+4a^3\neq 0$

Então:
$$\begin{aligned} y^{4k} = {} & \frac{4a^3}{3k(27+4a^3)}\,y^{k+1}\partial_2 f_o - \frac{4a^3}{(27+4a^3)6}\,xy^k\partial_1 f_o + \\ & + \frac{2a^2}{k(27+4a^3)}\,xy\partial_2 f_o - \frac{3a}{(27+4a^3)}\,y^{2k}\,\partial_1 f_o + \\ & + \frac{9}{k(27+4a^3)}\,y^{k+1}\partial_2 f_o. \end{aligned}$$

$x^2\phi = \frac{1}{3}\partial_1 f_o\,\phi + m^{4k}$, onde ϕ é um monômio em x e y com grau $\geq$ $\geq 2k$

O Teorema 0.5 garante que toda função semiquasehomogê

nea com parte quasehomogênea f_o é equivalente a uma função da forma $f_o + \Sigma c_k e_k$, onde c_k são constantes e $e_1, e_2, \ldots, e_s$ é o sistema de monômios superiores da base em uma base fixa do anel local da função f_o.

Os monômios acima da diagonal são de grau superior a 3k ou seja maior ou igual a 3k+1.

x^p : $kp > 3k+1$ está contido no ideal.

y^{3k+1}: está contido no ideal.

Restam elementos da forma xy^p

Queremos $k+p \geqq 3k+1 \Rightarrow p \geqq 2k+1$

$$\frac{d_{máx}}{N} = n - 2\Sigma\alpha_i = 2 - 2\left(\frac{k}{3k} + \frac{1}{3k}\right) = \frac{6k-2k-2}{3k} = \frac{4k-2}{3k}$$

Logo k+p é no máximo $4k - 2 \Rightarrow p = 3k - 2$.

Assim $f = x^3 + ax^2y^k + y^{3k} + cxy^{2k+1}$, com c dado acima.

No capítulo II faremos dois tipos de estudos com a forma normal obtida no teorema 1.7. O primeiro é encontrar os possíveis elementos de uma mesma órbita após a ação de difeomorfismos em f_o, em seguida passando ao quociente pela relação"germes de uma mesma órbita", encontraremos o espaço de órbitas. O segundo é de como se comporta f' quando aplicamos estes mesmos difeomorfismos.

Para emonstrar o próximo teorema (teorema 1.8) utilizaremos uma técnica que descreveremos a seguir denominada "solução das palavras cruzadas". Esta técnica que auxilia na classificação de singularidades de germes em duas variáveis, constitui-se em certas construções geométricas que descrevermos a seguir.

Suponha que cada derivada parcial da função dada não contenha mais que dois monômios. No plano dos expoentes junta -

mos os monômios (expoentes) da derivada parcial em relação a x por um segmento que chamamos x-segmento fundamental. Analogamente, segmentos fundamentais são definidos para as outras variáveis.

Os segmentos fundamentais descrevem afinidades entre as imagens de seus monômios no anel local. Consideremos algumas consequências destas afinidades. Chamamos toda translação de um segmento fundamental por um vetor inteiro com componentes não negativas de segmento permitido. Notamos que dois segmentos permitidos podem localizar-se um sobre o outro e coincidir geometricamente(se um é um x-segmento e o outro um y-segmento).

Dois segmentos permitidos são ditos ligados se eles tem um final comum. Uma cadeia permitida é uma coleção de segmentos permitidos tal que cada um dos segmentos é ligado um ao outro numa sequência de segmentos consecutivos ligados na coleção. Uma cadeia é dita maximal se ela não é parte de nenhuma cadeia permitida maior.

Um ciclo é uma sequência consecutiva de segmentos permitidos ligados a qual o último segmento é ligado ao primeiro. Um ciclo é dito ser regular se ao longo de seu caminho cada direção x-(y)-...-segmentos é percorrido o mesmo número de vezes como os outros.

Podemos formular agora a regra "solução das palavras cruzadas" para uma função f com um ponto crítico de multiplicidade finita:

(a) Se o expoente de um monômio está localizado

(b) Se todos os ciclos são regulares, então a dimensão μ do anel local é igual ao número de ciclos maximais. Neste caso podemos achar uma base do anel local tomando arbitrariamente um monômio de cada uma das cadeias maximais.

(c) Além disso, dada uma filtração, obtemos uma base regular escolhendo um monômio de filtração maior de cada uma das cadeias maximais.

<u>Teorema 1.8 (12_k):</u>

$$j_{x^3,y^{3k}} f = x^3 + x^2y^k \Rightarrow f \in J_{k,p} \quad (p > 0)$$

Forma normal de $J_{k,p}$: $x^3 + x^2y^k + \alpha y^{3k+p}$ $(k > 1, p > 0)$, onde: $\alpha = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ $(a_0 \neq 0)$.

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos que f se escreve como:

$x^3 + x^2y^k + x\phi(y) + \psi(y)$, onde $\phi(y) \in \mathfrak{m}^{2k+1}$ e $\psi(y) \in \mathfrak{m}^{3k+1}$

Queremos efetuar uma mudança de coordenadas de tal forma que o termo $x\phi(y)$ desapareça.

Façamos a mudança: $\begin{cases} x = X + \beta(y) \\ y = Y \end{cases}$

Ficamos com:
$$\begin{aligned} X^3 + 3X^2\beta(y) + 3X\beta^2(y) + \beta^3(y) &+ \\ + X^2Y^k + 2X\beta(y)Y^k + \beta^2(y)Y^k &+ \\ + X\phi(y) + \beta(y)\phi(y) &+ \\ + \psi(y). \end{aligned}$$

Queremos que: $3\beta^2(y) + 2\beta^k\phi(y) + \ldots$

Assim $\beta(y) = (-2y^k \pm \sqrt{4y^{2k}(1-3\theta(y))})/6$

Tomamos $\beta_1(y) = (-2y^k + 2y^k\sqrt{1-3\,\theta(y)})/6 =$

$= y^k[(-1 + \sqrt{1-3\theta(y)})/3]$ que é uma função analítica, com $\beta_1(y) \in \mathfrak{m}^{k+1}$.

Fazendo então a mudança: $\begin{cases} x = X + \beta_1(y) \\ y = Y \end{cases}$ obtemos:

(*) $X^3 + X^2(Y^k + 3\beta_1(y)) + \sigma(y)$, onde $\sigma(y) = \beta^3(y) + \beta^2(y)Y^k + \beta(y)\phi(y) + \psi(y) \in \mathfrak{m}^{3k+1}$, pois $\beta^3(y) \in \mathfrak{m}^{3k+3}$, $\beta^2(y) \in \mathfrak{m}^{3k+2}$, $\beta(y)\phi(y) \in \mathfrak{m}^{3k+2}$ e $\psi(y) \in \mathfrak{m}^{3k+1}$.

chamamos o coeficiente do termo de maior grau de $\tau(\eta)$ de a_0.

Observamos que: $y^k + 3\beta_1(y) = y^k(1 + \gamma(y))$, com $\gamma(y) \in \mathfrak{m}$.

Fazendo a mudança: $\eta = y^k\sqrt{1+\gamma(y)}$ e $\xi = x$ em (*), obtemos:

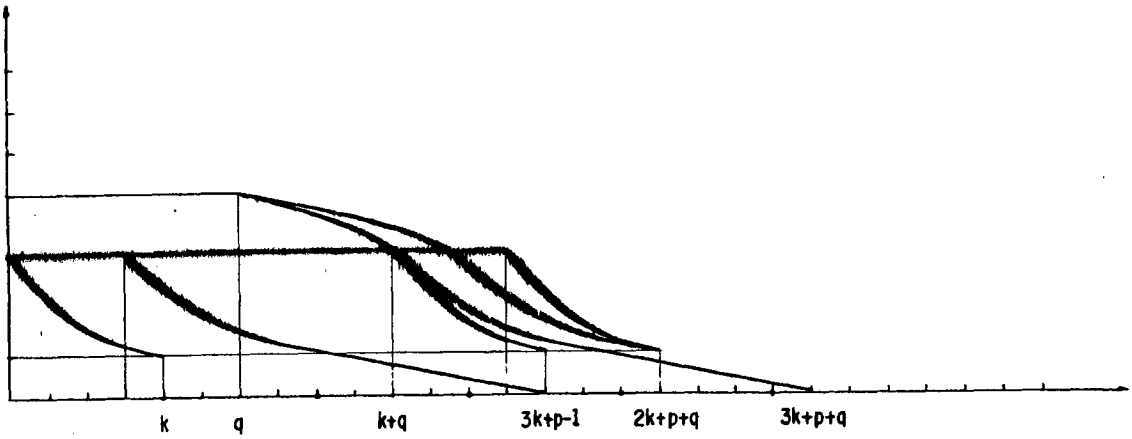
$\xi^3 + \xi^2\eta + \tau(\eta)$ onde $\eta \in \mathfrak{m}^{3k+1}$

Como f_o é dado por $x^3 + x^2y^k + a_oy^{3k+p}$, vamos utilizar a "solução de palavras cruzadas" para verificar até que grau temos os termos em y.

Os segmentos fundamentais são obtidos através das derivadas parciais em relação a x e a y.

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^k \quad e \quad \frac{\partial f_o}{\partial y} = kx^2y^{k-1} + (3k+p)a_oy^{3k+p-1}$$

Queremos encontrar o maior grau q de tal forma que o expoente do monômio y^{3k+p+q} não pertença a uma cadeia permitida infinita (pois neste caso ele pertenceria ao ideal gerado pela derivada parcial). Consideremos então as cadeias de segmentos permitidos:



$$y^{3k+p+q} \to x^2y^{k+q} \begin{cases} \nearrow xy^{2k+q} & \text{quando } q \geqq k+p-1 \quad (1) \\ \searrow x^3y^q & \text{quando } q \geqq k-1 \quad (2) \end{cases}$$

As restrições (1) e (2) são para que as translações dos segmentos fundamentais sejam feitas por vetores inteiros com compontes não negativas.

Escolhemos então o caso (2). Logo

$$x^3y^q \to xy^{2k+p+q} \to x^2y^{k+p+q} \to y^{(3k+p+q)+1}$$

Assim os monômios $(y^q.y^{3k+p})$ onde $q < k-1$ não estão no ideal.

Portanto pela "solução de palavras cruzadas" nosso f será da forma

$$x^3 + x^2y^k + ay^{3k+p}, \text{ onde } a = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2} \ (a \neq 0).$$

Para a demonstração do próximo teorema necessitamos do seguinte Lema:

Lema 1.2:

Toda forma binária não-degenerada de grau $\geqq 4$ reduz-se à forma normal com (n-3)-parâmetros:

$$x^{n-1}y + c_1x^{n-2}y^2 + \ldots + c_{n-3}x^2y^{n-2} + xy^{n-1}.$$

Teorema 1.9 (13):

$j_3f(x,y) = 0 \Rightarrow$ ocorre um dos seis casos:

$$j_4 \approx x^4 + ax^2y^2 + y^4 \ , \quad a^2 \neq 4$$

$$\approx x^4 + x^2y^2$$

$$\approx x^2y^2$$

$$\approx x^3y$$

$$\approx x^4$$

$$\approx 0$$

Demonstração:

$$f = (x-\beta_1 y)(x-\beta_2 y)(x-\beta_3 y)(x-\beta_4 y)$$

1º Caso: $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4 \Rightarrow j_4f \approx x^4$.

2º Caso: $\beta_1=\beta_2=\beta_3\neq\beta_4 \Rightarrow j_4f \approx x^3y$.

3º Caso: $\beta_1=\beta_2\neq\beta_3=\beta_4 \Rightarrow j_4f \approx x^2y^2$.

4º Caso: $\beta_1=\beta_2\neq\beta_3$; $\beta_1\neq\beta_4$ e $\beta_3\neq\beta_4 \Rightarrow j_4f \approx x^2(x^2+y^2) = x^4 + x^2y^2$.

5º Caso: $\beta_i\neq \beta_j$ $\quad i\neq j$, $i,j = 1,2,3$ ou 4

Segue do lema 1.2 que $x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + y^4$ reduz-se à $xy(x^2+2cxy+y^2)$, isto é, no produto das formas quadráticas $a=xy$ e $b=x^2+2cxy + y^2$. Existem duas formas degeneradas independentes entre as combinações lineares $pa+qb$ de a e b ($p:q$ é definido da equação característica $p^2 + 4cpq + 4(c^2-1)q^2 = 0$ cujo discriminante é não nulo).

Tomando as raízes destas formas degeneradas como coordenadas, reduzimos a forma original à $c_1x^4 + c_2x^2y^2 + c_3y^4$. A condição para tal forma ser não-degenerada é que $c_1c_3(4c_1c_3-c_2^2) \neq 0$. Por uma dilatação nas coordena-

Teorema 1.10 (14):

$j_4 f = x^4 + ax^2y^2 + y^4$, $a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in X_0$

A forma normal de X_0 é: $x^4 + a_0 x^2 y^2 + y^4$, com $a_0^2 \neq 4$.

Demonstração:

Basta mostrar a suficiência do jato de f_o: $x^4 + ax^2y^2 + y^4$, para tanto exprimimos y^5, y^4x, y^3x^2, y^2x^3, yx^4 e x^5 em termos de $\partial_1 f_o$ e $\partial_2 f_o$.

$\partial_1 f_o = 4x^3 + 2axy^2$ e $\partial_2 f_o = 2ax^2y + 4y^3$

que é uma função racional de grau 3 em λ.

Consequentemente se as raízes de D' são simples, então no mínimo uma das raízes de λ não faz o número ab-9 nulo.

Concluímos então que no caso de raízes simples, P reduz-se à forma

$x^4 + bx^3y + ax^2y^2 + xy^3$, onde $\Delta = 4(a^3+b^3) + 27 \neq a^2b^2 + 18ab$ e $ab \neq 9$.

No caso de uma raiz de multiplicidade dois, podemos levar $P(x,y)$ à forma $x^4 + A'x^3y + B'x^2y^2$ após o qual fazer $y = \delta y'$ e obter $x^2(x^2+cxy+y^2)$ com $a^2 \neq 4$.

31

$$j_{x^4,y^{4k}}f \approx x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}, \quad \Delta \neq 0,\ ab \neq 9,\ k > 1$$

$$\approx x^2(x^2 + axy^k + y^{2k}),\ a^2 \neq 4 \qquad k > 1$$

$$\approx x^2(x + y^k)^2 \qquad k > 1$$

$$\approx x^3(x + y^k) \qquad k > 1$$

$$\approx x^4$$

onde $\Delta = 4(a^3+b^3) + 27 - a^2b^2 - 18ab$

<u>Demonstração</u>:

$$f = x^4 + ax^3y^k + bx^2y^{2k} + cxy^{3k} + dy^{4k}$$

peso: $(k,1)$

suporte: $(4,0)$; $(3,k)$; $(2,2k)$; $(1,3k)$; $(0,4k)$ (S_1)

raiz: $(-1,k)$

Tomamos $\gamma(r,s) = (r,s/k)$

suporte: $(4,0)$; $(3,1)$; $(2,2)$; $(1,3)$; $(0,4)$ (S_2)

Pelo Corolário 3, o problema reduz-se à classificação dos polinô -

Vamos chamar de $\nu(d)$ o número de monômios de grau d.

Observemos que para polinômios de grau $4k \leqq d \leqq 5k-1$, $\nu(d) = 5$, pois $P(x,y) = \alpha\, x^4 y^i + \beta\, x^3 y^{k+i} + \gamma\, ax^2 y^{2k+i} + \delta\, xy^{3k+i} + \varepsilon\, y^{4k+i}$, onde $d = 4k+i$ e $i < k$.

<u>para $4k \leqq d \leqq 5k-2$</u> .

Se existir A,B,C,D e E tal que

$$P(x,y) = Ay^i x\frac{\partial f_o}{\partial x} + By^{k+i}\frac{\partial f_o}{\partial x} + Cy^{i+1}\frac{\partial f_o}{\partial y} + Dx^2y^{2k+i} + Ex^3y^{k+i},$$ en - tão $P(x,y) - Dx^2y^{2k+i} - Ex^3y^{k+i}$ pertence ao ideal e assim é não - degenerada. Mas para que a igualdade seja verificada devemos ter:

$$\begin{aligned}
4A &= \alpha \\
3bA + 4B + bkC + E &= \beta \\
2aA + 3bB + 2akC + D &= \gamma \\
A + 2aB + 3kC &= \delta \\
B &= \varepsilon
\end{aligned}$$

que tem solução única, pois

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 4 & bk & 0 & 1 \\ 2a & 3b & 2ak & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12k \neq 0.$$

<u>para $d = 5k - 1$</u>

Os monômios guias serão:

$y^{k-1}x\partial_x$; $y^{2k-1}\partial_x$; $x\partial_y$; $y^k\partial_y$.

Necessitamos neste caso de apenas um monômio base: x^3

O determinante será:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & kb & 0 & 0 \\ 3b & 4 & 2ka & kb & 1 \\ 2a & 3b & 3k & 2ka & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 3k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & kb & 0 \\ 2a & 3k & 2ka \\ 1 & 0 & 3k \end{vmatrix} = -4k^2(ab-9) \neq 0, \quad \text{pois}$$

$ab-9 \neq 0$

Já para $5k \leqq d \leqq 6k-1$, $\nu(d) = 6$

<u>para $5k \leqq d \leqq 6k-2$</u>

Os monômios guias são:

$y^i x^2 \partial_x$, $y^{k+i} x \partial_x$, $y^{2k+i} \partial_x$, $y^{i+1} x \partial_y$, $y^{k+i+1} \partial_y$

O único monômio base é: x^3

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 4 & 0 & kb & 0 & 0 \\ 2a & 3b & 4 & 2ka & kb & 1 \\ 1 & 2a & 3b & 3k & 2ka & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 3k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16k^2(ab-9) \neq 0$$

<u>para $d = 6k-1$</u>

Os monômios guias são:

$y^{k-1} x^2 \partial_x$; $y^{2k-1} x \partial_x$; $y^{3k-1} \partial_x$; $x^2 \partial_y$; $y^k x \partial_y$; $y^{2k} \partial_y$

O determinante será:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 4 & 0 & kb & 0 & 0 \\ 2a & 3b & 4 & 2ka & kb & 0 \\ 1 & 2a & 3b & 3k & 2ka & kb \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 3k & 2ka \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3k \end{vmatrix} = -64k^3\Delta, \text{ onde}$$

Δ é o discriminante do polinômio $x^3 + bx^2 + ax + 1$, $\Delta \neq 0$ pois tem a forma $4(a^3+b^3) + 27 - a^2b^2 - 18ab$.

Assim os monômios guias e os monômios base geram $C^{\nu(d)}$ e f reduz-se à forma normal:

$$f_o + \Sigma c_s e_s = x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}, \text{ onde:}$$

$a = a_0 + \ldots + a_{K-2}y^{k-2}$, $b = b_0 + \ldots + b_{2K-2}y^{2k-2}$.

CAPÍTULO II

A GEOMETRIA DE ALGUMAS SINGULARIDADES

Neste Capítulo trataremos de dois tipos de classificação geométrica. Em primeiro lugar aproveitaremos um exemplo da tabela apresentada no artigo [1], que nos fornece uma série de identificações entre os problemas de classificação de singularidades com problemas geométricos. Esta tabela foi obtida utilizando os dois teoremas gerais sobre funções quasehomogêneas (Teoremas A e B) dados no Capítulo I. Em segundo lugar, faremos um estudo da geometria da parte principal f_o das funções semiquasehomogêneas $f = f_o + f'$ em alguns exemplos particulares. Em um deles a função a ser estudada é quasehomogênea e nos restringiremos portanto a encontrar o espaço de órbitas após uma mudança de coordenadas permitida. Já em outros exemplos procuraremos aprofundar o estudo, examinando o comportamento da parte f' quando aplicamos difeomorfismos que fixam f_o a menos de germes da mesma órbita.

§1. Problemas de classificação de singularidades identificados com problemas geométricos

Neste parágrafo explicitaremos um exemplo da tabela de Arnol'd [1] onde é feita a identificação de um problema de classificação de singularidades com um problema geométrico. Feito isto, obteremos o espaço de órbitas através da identificação. Aqui a classe de objetos geométricos correspondem a blocos de órbitas.

Já demonstramos o teorema:

$j_{x^3,y^{3k-1}} f = x^3 \Rightarrow$ um dos três casos ocorrem:

$$j_{x^3,y^{3k}}f \approx x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\ 4a^3+27 \neq 0$$
$$\approx x^3 + x^2y^k$$
$$\approx 0$$

(Teorema 1.6)

Vimos que o problema se reduz a classificação dos polinômios homogêneos P: $X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3$. Mostraremos que geometricamente isto corresponde a classificação afim de triplas de pontos em $\mathbb{C}^1$.

De fato: fatorando P: $X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 =$

$= (X - AY)(X - BY)(X - CY)$, associamos a cada polinômio, a tripla (não ordenada) de pontos $\{A,B,C\}$.

À mudança de coordenada X,Y permitida ($X = X' - \beta Y$ e $Y = \delta Y'$) corresponde a mudança da tripla $\{A,B,C\}$ para a tripla $\{\delta A+\lambda,\delta B+\lambda,\delta C+\lambda\}$.

$$P: ((X' - \beta Y) - AY)((X' - \beta Y) - BY)((X' - \beta Y) - CY) =$$
$$= (X' - (A + \beta)Y)(X' - (B + \beta)Y)(X' - (C + \beta)Y) =$$
$$= (X' - (\delta A + \lambda)Y')(X' - (\delta B + \lambda)Y')(X' - (\delta C + \lambda)Y')$$

Esta mudança $\{A,B,C\} \to \{\delta A+\lambda, \delta B+\lambda,\delta C+\lambda\}$ pode ser interpretada como obtida pela transformação afim.

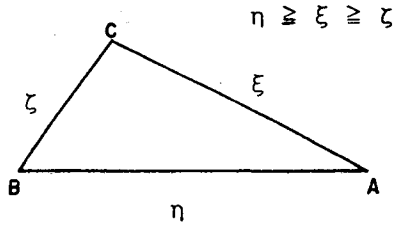
$t = \delta u + \lambda$, $\delta,\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ na reta complexa a qual interpretamos como plano de Argand-Gauss.

Pondo $\delta = \rho e^{i\theta}$ podemos decompor $t = \rho e^{i\theta}u + \lambda$ em três transformações elementares:

$p = e^{i\theta}u$; $s = \rho p$; $t = s + \lambda$, ou seja, a transformação afim é a composição de uma rotação, uma homotetia e uma translação.

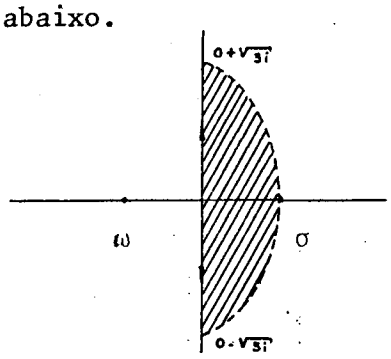
Vamos agora determinar um sistema de representantes e analisar a estrutura topológica do espaço quociente ou seja o espaço de órbitas.

Dados os pontos A,B e C distintos em $\mathbb{C}^1$, suponhamos que A seja o vértice dos dois maiores lados do triângulo ABC, B o outro vértice do maior lado, então C é o vértice dos dois menores lados, como mostra a figura ao lado.



*Observação: A,B e C podem ser colineares, neste caso o resultado continuará sendo válido.

Levamos A em $\omega = -1+0i$ por uma translação, B em $\sigma = 1+0i$ por uma homotetia e uma rotação, então o vértice C é levado na região hachuriada Σ na figura abaixo.



Se A = B = C levamos o ponto em ω

Se $A \neq B = C$ levamos A em ω e B em σ.

Cada ponto $P \in \Sigma$ determina portando uma tripla $\{\omega,\sigma,P\}$ e no caso degenerado $P = \omega$ determina a tripla $\{\omega,\omega,\omega\}$. Vamos identificar P com a tripla correspondente.

Assim temos uma região $\Sigma \cup \{\omega\}$ que contém ao menos um representante de cada classe de equivalência. Na realidade somente se dois pontos são do contorno da figura, e simétricos em relação ao eixo real eles são equivalentes, todas as outras classes tem somente um representante em Σ.

Para obter o espaço de órbitas (ou quociente) observemos portanto que o arco da circunferência no primeiro quadrante deve se identificado com o arco no quarto quadrante, pois os pontos sobre o arco possuem a propriedade que $\overline{AB} = \overline{AC}$, então trocando B por C justificamos a identificação. Temos ainda que o segmento de reta que liga (0,0) a $(0,-\sqrt{3})$ deve ser identificado com o segmento de reta que liga (0,0) a $(0,\sqrt{3})$ trocando A por B pois neste caso

$\overline{AC} = \overline{BC}$.

Vamos mostrar que o espaço quociente é homeomorfo a S^2 (obtida por identificação da meia lua) à qual fica colado o ponto ω, imagem da classe de $\{(A,A,A), A \in \mathbb{C}\}$.

Desde que a relação de afinidade ($\sim$) identifica pontos, precisamos colocar uma estrutura topológica no espaço resultante. Seja $\rho: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3/\sim = S^2 \cup \{\omega\}$ a identificação dos coeficientes dos polinômios com os elementos do quociente pela relação de afinidade.

Afirmamos que:

1. O único aberto que contém ω é o espaço todo $S^2 \cup \{\omega\}$.
2. Os outros abertos são os abertos em S^2.

<u>De fato</u>: 1. Suponhamos que A seja uma raiz tripla, então o polinômio é do tipo: $(X - A)^3 = X^3 - 3AX^2 + 3A^2X - A^3$.

Logo $\rho^{-1}(\omega) = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid a=-3A, b=3A^2, C=-A^3, \text{ com } A \in \mathbb{C}^1\}$

Queremos encontrar Ω aberto em $S^2 \cup \{\omega\}$ talque $\omega \in \Omega$.

Lembremos que um conjunto Ω é um aberto no quociente $S^2 \cup \{\omega\}$ se $\rho^{-1}(\omega)$ é um aberto em $\mathbb{C}^3$ (em $\mathbb{C}^3$ utilizaremos a topologia usual).

Temos que $(0,0,0) \in \rho^{-1}(\omega)$. Dado um polinômio qualquer com coeficientes em $\mathbb{C}$, que não tenha raiz tripla, obtemos com suas raízes um triângulo ABC que pela relação de afinidade é levado em $(-1,1,C)$. Porém para qualquer $\varepsilon > 0$, o polinômio $X^3 - \varepsilon CX^2 - \varepsilon^2 X + \varepsilon^3 C = (X + \varepsilon)(X - \varepsilon)(X - \varepsilon C)$ tem raízes $(\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon C)$ que é levado no mesmo triângulo $(-1,1,C)$ pela relação de afinidade.

Observamos que para qualquer aberto em torno de $(0,0,0)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon C, -\varepsilon^2, \varepsilon^3)$ está nele contido, assim $(-\varepsilon C, -\varepsilon^2, \varepsilon^3) \in \mathbb{C}^3$ está tão próximo de $(0,0,0)$ quanto se queira. Como o polinômio foi tomado arbitraria-

mente temos que todos os polinômios são equivalentes a representantes num aberto qualquer em torno de (0,0,0), isto é, para que Ω seja aberto em $S^2 \cup \{\omega\}$ é necessário que $\rho^{-1}(\Omega)$ contenha representantes de todas as classes de polinômios de $\mathbb{C}^3$, logo $\Omega = S^2 \cup \{\omega\}$.

Também podiamos dizer que em qualquer vizinhança de ω podemos encontrar triângulos semelhantes a qualquer triângulo dado.

Assim 1. fica demonstrado.

2. Queremos inicialmente os abertos no interior de Σ, vamos mostrar que um aberto neste caso em torno de $C \in \text{int}\Sigma$ é dado por:

$$U = \{C' \in \text{int}\Sigma : |C - C'| < \varepsilon\} .$$

Com efeito: Dado um polinômio $P: X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ podemos encontrar coeficientes α', β', γ' tais que $|\alpha - \alpha'| < \delta$; $|\beta - \beta'| < \delta$ e $|\gamma - \gamma'| < \delta$ onde δ é escolhido de maneira que as raízes (A',B',C') do novo polinômio P' estejam muito próximas das raízes originais (A,B,C) e com isto fazer com que após as duas identificações A com ω, B com σ e C com $\tilde{C}$ em seguida A' com ω, $\bar{B}'$ com σ e C com $\tilde{C}'$ conseguimos obter $\{\tilde{C}' \in U: |\tilde{C} - \tilde{C}'| < \varepsilon'\} = \tilde{D}$. Logo se

$$W = \{(\alpha',\beta',\gamma') \in C^3: |\alpha - \alpha'| < \delta , |\beta - \beta'| < \delta, |\gamma - \gamma'| < \delta\}$$ então $\rho(W) \subset \tilde{D}$, e assim $W \subset \rho^{-1}(\tilde{D}) \subset \rho^{-1}(U)$ e portanto $\rho^{-1}(U)$ é um aberto.

Seja agora um ponto $C = (c_1,c_2) \in Fr\Sigma$ tal que $\sqrt{(c_1+1)^2 + c_2^{\,2}} = 2$. Queremos mostrar que os abertos de Σ que contém C são da forma

$V = \{C' \in \Sigma: |C - C'| < \varepsilon$ ou $|\bar{C} - C'| < \varepsilon\}$, onde $\bar{C}$ é o conjugado de C.

Consideremos o mesmo aberto W em C^3 tal que δ é escolhido de maneira que $\rho(\alpha',\beta',\gamma') \overset{(*)}{\subset} \{C' \in \Sigma: |C - C'| < \varepsilon$ ou $|\bar{C} - C'| < \varepsilon\}$. Logo $\rho(W) \subset V$ então $W \subset \rho^{-1}(V)$ e assim V é aberto em Σ.

(*) é possível pois se as raízes A',B',C' do polinômio $X^3 + \alpha' X^2 + \beta' X + \gamma'$ forem tais que $\overline{A'C'} > \overline{A'B'}$ trocamos C' por B' e assim o novo C' é levado próximo de $\overline{C}$ em Σ.

Tomemos agora um ponto $C = (c_1, c_2) \in Fr\,\Sigma$ tal que $c_1 = 0$. Queremos mostrar que os abertos de Σ que contêm C são da forma de V definido acima. Para isto resta justificar (*).

(*) aqui é possível pois se as raízes A',B',C' do polinômio $X^3 + \alpha' X^2 + \beta' X + \gamma'$ forem tais que $\overline{A'C'} < \overline{B'C'}$ trocamos A' por B' e assim o novo C' é levado próximo de c_o em Σ.

§2. O espaço de órbitas da parte principal f_o

Aqui estudaremos em dois exemplos a topológia de subconjuntos $\Theta \subset \Omega$, obtendo a identificação com espaços topológicos simples.

2.1 - Exemplo 1

Mostramos no Capítulo I (Teorema 1.10) que se $j_4 f = x^4 + ax^2y^2 + y^4$, $a^2 \neq 4$, então $f \in X_9$ isto é, $f = x^4 + ax^2y^2 + y^4$.

Vamos agora encontrar os possíveis elementos de uma mesma órbita após a ação de difeomorfismos que deixam fixo f_o a menos que sejam germes de uma mesma órbita. Em seguida passando ao quociente pela relação, "germes da mesma órbita", encontraremos a geometria do espaço das órbitas.

Façamos a mudança: $\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$

Logo:

$$x^4 + ax^2y^2 + y^4 = (\alpha x' + \beta y')^4 + a(\alpha x' + \beta y')^2(\gamma x' + \delta y')^2 + (\gamma x' + \delta y')^4 =$$
$$= (\alpha^4 + a\alpha^2\gamma^2 + \gamma^4)x'^4 + (4\alpha^3\beta + 2a\alpha^2\gamma\delta + 2a\alpha\beta\gamma^2 + 4\gamma^3\delta)x'^3y' +$$

$+ (6\alpha^2\beta^2+a\alpha^2\delta^2+4a\alpha\beta\gamma\delta+a\beta^2\gamma^2+6\gamma^2\delta^2)x'^2y'^2 + (4\alpha\beta^3+2a\alpha\beta\delta^2+2a\beta\gamma^2\delta+4\gamma\delta^3)x'y'^3 +$
$+ (\beta^4+a\beta^2\delta^2+\delta^4)y'^4$. Queremos que:

$$\begin{cases} \alpha^4 + a\alpha^2\gamma^2 + \gamma^4 = 1 & (1) \\ 4\alpha^3\beta + 2a\alpha^2\gamma\delta + 2a\alpha\beta\gamma^2 + 4\gamma^3\delta = 0 & (2) \\ 6\alpha^2\beta^2 + a\alpha^2\delta^2 + 4a\alpha\beta\gamma\delta + a\beta^2\gamma^2 + 6\gamma^2\delta^2 = b & (3) \\ 4\alpha\beta^3 + 2a\alpha\beta\delta^2 + 2a\beta^2\gamma\delta + 4\gamma\delta^3 = 0 & (4) \\ \beta^4 + a\beta^2\delta^2 + \delta^4 = 1 & (5) \end{cases}$$

Sejam $A = \alpha/\gamma$ e $B = \beta/\delta$, assim ficamos com:

$$\begin{cases} A^4 + aA^2 + 1 = 1/\gamma^4 & (1') \\ 4A^3B + 2aA^2 + 2aAB + 4 = 0 & (2') \\ 6A^2B^2 + aA^2 + 4aAB + 2aB^2 + 6 = b/(\gamma^2\delta^2) & (3') \\ 4AB^3 + 2aAB + aB^2 + 4 = 0 & (4') \\ B^4 + aB^2 + 1 = 1/\delta^4 & (5') \end{cases}$$

Subtraindo (2') de (4') obtemos:

$(A^2 - B^2)(2AB + a) = 0.$

$A = B$ não pode ocorrer, pois neste caso $\alpha\delta = \beta\gamma$ e não teríamos uma boa mudança de coordenadas.

Suponhamos: (a) $A = -B$ e (b) $A = -a/2B$.

(a) Tomemos $A = -B$ em (2')

$-4A^4 - 2aA^2 + 2aA^2 + 4 = 0 \Rightarrow A^4 = 1 \Rightarrow \gamma = \varepsilon\alpha$, onde

$\varepsilon = \{1,i,-1,-i\}$.

Substituindo $\gamma = \varepsilon\alpha$ em (1) obtemos $\alpha^4 + a\alpha^2(\varepsilon\alpha)^2 + (\varepsilon\alpha)^4 = 1$

Ficamos então com as equações:

$$\begin{cases} \alpha^4 + a\alpha^4 + \alpha^4 = 1 & \text{(i) } \varepsilon = \pm 1 \text{ ou} \\ \alpha^4 - a\alpha^4 + \alpha^4 = 1 & \text{(ii) } \varepsilon = \pm i \end{cases}$$

Temos ainda que $(\alpha/\gamma) = (-\beta/\delta) \Rightarrow (\alpha/\varepsilon\alpha) = (-\beta/\delta) \Rightarrow \delta = -\varepsilon\beta$, em (5), obtemos: $\beta^4 + a\beta^2(-\varepsilon\beta)^2 + (-\varepsilon\beta)^4 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^4 + a\beta^4 + \beta^4 = 1 & \text{(iii) se ocorre (i)} \\ \beta^4 - a\beta^4 + \beta^4 = 1 & \text{(iv) se ocorre (ii)} \end{cases}$$

<u>1º Caso</u>: De (i) $\alpha^4 = 1/(2+a) \Rightarrow \alpha = \nu(1/(2+a))^{1/4}$, onde $\nu = \{1,i,-1,-i\}$. Logo $\gamma = \varepsilon\alpha = \varepsilon\nu(1/(2+a))^{1/4}$ (v); $\varepsilon = \pm 1$

De (iii) $\beta^4 = 1/(2+a) \Rightarrow \beta = \mu(1/(2+a)^{1/4}$, onde $\mu = \{1,i,-1,-i\}$

Logo: $\delta = -\varepsilon\beta = -\varepsilon\mu(1/(2+a))^{1/4}$ (vi)

(v) e (vi) em (3):

$$6\nu^2\mu^2(1/(2+a)) + a\nu^2(-\varepsilon\mu)^2(1/(2+a)) + 4a\nu\mu(\varepsilon\nu)(-\varepsilon\mu)(1/(2+a)) +$$
$$+ a\mu^2(\varepsilon\nu)^2(1/(2+a)) + 6(\varepsilon\nu)^2(-\varepsilon\mu)^2(1/(2+a)) = b \underset{\varepsilon=\pm 1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{1}{2+a}\right) + a\left(\frac{1}{2+a}\right) + a\left(\frac{1}{2+a}\right) - 4a\left(\frac{1}{2+a}\right) + 6\left(\frac{1}{2+a}\right) = b \\ 6\left(\frac{1}{2+a}\right) + a\left(\frac{1}{2+a}\right) + a\left(\frac{1}{2+a}\right) - 4a\left(\frac{1}{2+a}\right) + 6\left(\frac{1}{2+a}\right) = -b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{12 - 2a}{2+a} \quad \text{ou} \quad b = \frac{-12 + 2a}{2+a}$$

<u>2º Caso</u>: De (ii) $\alpha^4 = 1/(2-a) \Rightarrow \alpha = \nu(1/(2-a))^{1/4}$. Logo:

$\gamma = \varepsilon\alpha = \varepsilon\nu(1/(2-a))^{1/4}$ (vii); $\varepsilon = \pm i$

De (iii) $\beta^4 = 1/(2-a) \Rightarrow \beta = \mu(1/(2-a)^{1/4}$. Logo:

$\delta = -\varepsilon\beta = -\varepsilon\mu(1/(2-a))^{1/4}$ (viii)

(vii) e (viii) em (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{1}{2-a}\right) - a\left(\frac{1}{2-a}\right) + 4a\left(\frac{1}{2-a}\right) - a\left(\frac{1}{2-a}\right) + 6\left(\frac{1}{2-a}\right) = b \\ 6\left(\frac{1}{2-a}\right) - a\left(\frac{1}{2-a}\right) + 4a\left(\frac{1}{2-a}\right) - a\left(\frac{1}{2-a}\right) + 6\left(\frac{1}{2-a}\right) = -b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{12 + 2a}{2-a} \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{-12 - 2a}{2-a}$$

<u>3º Caso</u>: Pode ocorrer $\alpha = 0$. Neste caso, substituindo em (1) obtemos $\gamma = \varepsilon$ em (2) obtemos $\delta = 0$ que em (5) nos dá $\beta = \mu$, em (3) $b = \pm a$.

*Observação: obtemos resultados análogos para $\beta = 0$.

Esgotamos assim todas as possibilidades de (a).

(b) Tomemos $A = -a/2B$ em (2'), obtemos:

$$4(-a/2B)^3B + 2a(-a/2B)B + 2a(-a/2B)^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -(a^3/2B^2) - a^2 - (a^3/2B) + 4 = 0 \Rightarrow \quad a = \pm 2, \text{ que nos dá:}$$

$x^4 \pm 2x^2y^2 + y^4$, que possui pontos singulares degenerados.

Concluímos então que os germes $x^4 + b_ix^2y^2 + y^4$, $i = 1,2.3,4,5$ e 6, onde $b_1 = a$; $b_2 = -a$; $b_3 = \frac{12-2a}{2+a}$; $b_4 = \frac{-12+2a}{2+a}$; $b_5 = \frac{12+2a}{2-a}$; $b_6 = \frac{-12-2a}{2-a}$ são equivalentes.

Representando $x^4 + ax^2y^2 + y^4$ pelo ponto a do plano complexo obte - mos na figura A uma região (hachuriada) que representa todas as classes de equivalência dos germes, isto é, a região contém representantes de todas as diferentes órbitas (sistema de representantes).

Demonstraremos agora a veracidade deste fato:

Suponhamos que $a = p + qi$, ficamos então com

$$b_1 = (p,q);\ b_2 = (-p,-q);\ b_3 = \left(\frac{24+8p-2p^2-2q^2}{(2+p)^2 + q^2}, \frac{-16q}{(2+p)^2 + q^2}\right);$$

$$b_4 = \left(\frac{-24-8p+2p^2+2q^2}{(2+p)^2 + q^2}, \frac{16q}{(2+p)^2 + q^2}\right);\ b_5 = \left(\frac{24-8p-2p^2-2q^2}{(2-p)^2 + q^2}, \frac{16q}{(2-p)^2 + q^2}\right);$$

$$b_6 = \left(\frac{-24+8p+2p^2+2q^2}{(2-p)^2 + q^2}, \frac{-16q}{(2-p)^2 + q^2}\right).$$

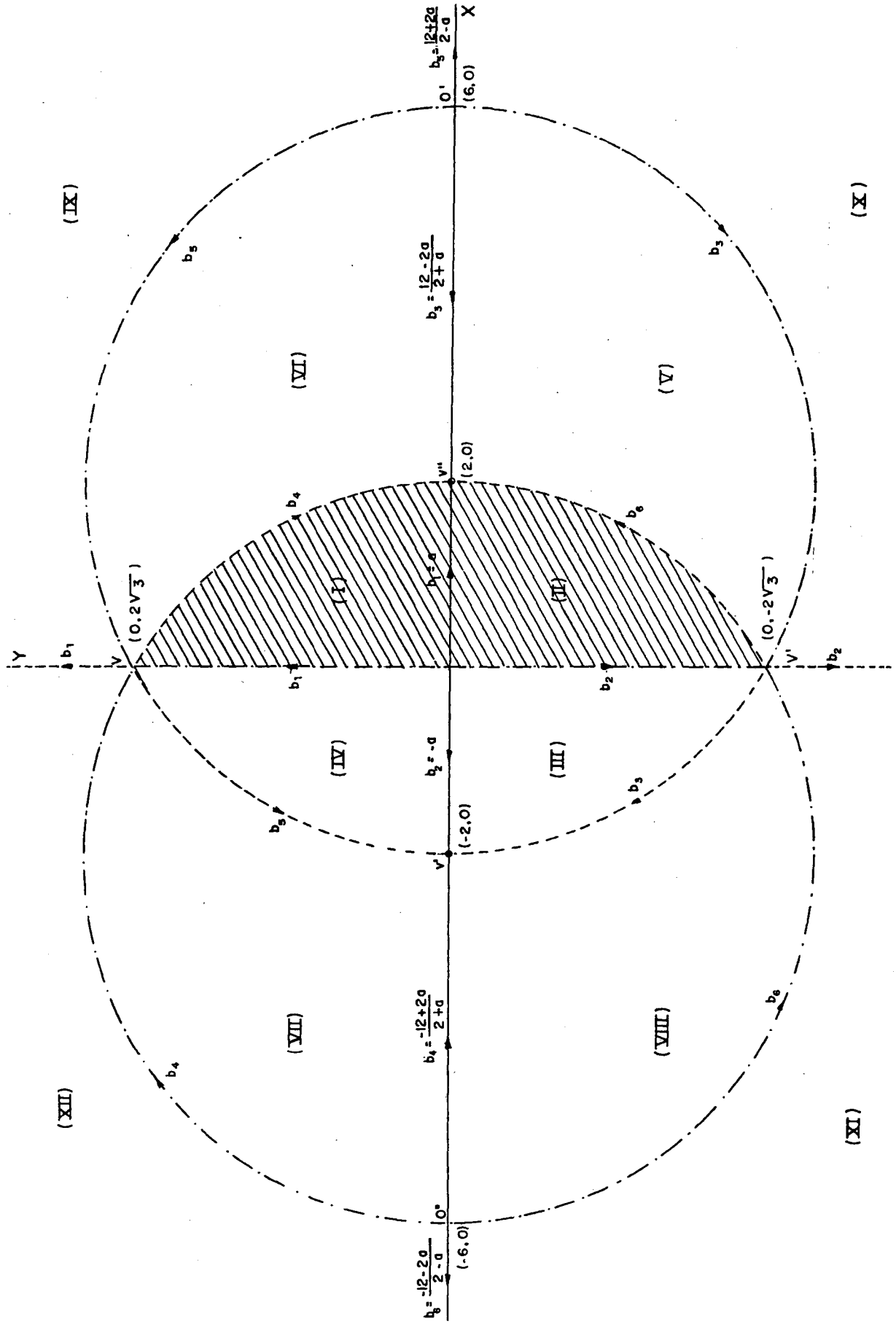

X
Y
O'
O"
(6,0)
(-6,0)
(2,0)
(-2,0)
(0,2√3)
(0,-2√3)
V
V'
V"
V'
(I)
(II)
(III)
(IV)
(V)
(VI)
(VII)
(VIII)
(IX)
(X)
(XI)
(XII)
b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6
$b_1 = a$
$b_2 = -a$
$b_3 = \frac{12-2a}{2+a}$
$b_4 = \frac{-12+2a}{2+a}$
$b_5 = \frac{12+2a}{2-a}$
$b_6 = \frac{-12-2a}{2-a}$

FIGURA A

Consideremos as regiões em $\mathbb{C}^1$ dadas por:

$$\text{(I)} \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \leqq 16 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \leqq 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \leqq 16 \end{cases}$$

Vamos tomar um ponto (p,q) tal que $b_1 = (p,q) \in$ (I) e vamos analisar em quais regiões aparecem b_2, b_3, b_4, b_5 e b_6.

$$b_2 = (p_2,q_2) = (-p,-q) \Rightarrow \begin{cases} p_2 \leqq 0 \\ q_2 \leqq 0 \\ (p_2-2)^2 + q_2^2 \leqq 16 \end{cases} \qquad \text{região (III)}$$

$$b_3 = (p_3,q_3) \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{24+8p-2p^2-2q^2}{(2+p)^2 + q^2} \\ q_3 = \dfrac{-16q}{(2+p)^2 + q^2} \end{cases}$$

Claramente $q_3 \leqq 0$. Mostraremos que: $\begin{cases} (p_3+2)^2 + q_3^2 \geqq 16 & 1. \\ (p_3-2)^2 + q_3^2 \leqq 16 & 2. \end{cases}$

isto é, b_3 pertence a região (V)

<u>De fato:</u>

1. $$\left[\frac{24+8p-2p^2-2q^2}{(2+p)^2 + q^2} + 2\right]^2 + \left[\frac{-16q}{(2+p)^2 + q^2}\right]^2 = \frac{16}{(2+p)^2 + q^2} \geqq 16, \quad \text{pois}$$

por hipótese $(2+p)^2 + q^2 \leqq 16$. Portanto 1. está verificado.

2. $$\left[\frac{24+8p-2p^2-2q^2}{(p+2)^2 + q^2} - 2\right]^2 + \left[\frac{-16q}{(2+p)^2 + q^2}\right] = \underbrace{16\,\frac{[(4-p^2-q^2)^2 + 16q^2]}{[(p+2)^2 + q^2]^2}}_{A}$$

Mostremos que $A \leqq 1$

$$(4-p^2-q^2)^2 + 16q^2 = (4-(p^2+q^2))^2 + 16q^2 = 16-8p^2+8q^2+(p^2+q^2)^2 \quad (*)$$

Por outro lado:

$$[(p+2)^2 + q^2]^2 = (p^2 + 4p + 4 + q^2)^2 = (p^2 + q^2 + 4(p+1))^2 =$$

$$= (p^2 + q^2)^2 + 8(p^2 + q^2)\underbrace{(p + 1)}_{\geqq 1} + 16\underbrace{(p + 1)^2}_{\geqq 1} \geqq$$

$$\geqq (p^2 + q^2)^2 + 8(p^2 + q^2) + 16 \geqq (p^2 + q^2) - 8p^2 + 8q^2 + 16 =$$

$$\overset{(*)}{=} (4 - p^2 - q^2)^2 + 16q^2.$$

Portanto $A \leqq 1$ e assim 2. fica demonstrado.

$$b_4 = (p_4, q_4) \Rightarrow \begin{cases} p_4 = \dfrac{-24-8p+2p^2+2q^2}{(2+p)^2 + q^2} \\ q_4 = \dfrac{16q}{(2+p)^2 + q^2} \end{cases}$$

Claramente $q_4 \geqq 0$. Mostraremos que: $\begin{cases} (p_4-2)^2 + q_4^2 \geqq 16 & 3. \\ (p_4+2)^2 + q_4^2 \leqq 16 & 4. \end{cases}$

isto é, b_4 pertence a região (VII).

Observando que: $(p_4-2)^2 = (p_3+2)^2$ 3. fica demonstrado.

$(p_4+2)^2 = (p_3-2)^2$ 4. fica demonstrado.

$$b_5 = (p_5, q_5) \Rightarrow \begin{cases} p_5 = \dfrac{24-8p-2p^2-2q^2}{(2-p)^2 + q^2} \\ q_5 = \dfrac{16q}{(2-p)^2 + q^2} \end{cases}$$

Claramente $q_5 \geqq 0$. Mostremos que: $\begin{cases} p_5 \geqq 0 & 5. \\ (p_5-2)^2 + q_5^2 \geqq 16 & 6. \end{cases}$

isto é, b_5 pertence a região (IX).

<u>De Fato</u>: para 5. basta mostrar que $24-8p-2p^2-2q^2 \geqq 0$ ou seja $12-4p-p^2-q^2 \geqq$ $\geqq 0$.

$$12-4p-p^2-q^2 = 12+4-4-4p-p^2-q^2 = 16 - \underbrace{[(p+2)^2 + q^2]}_{\leqq 16} \geqq 0$$

Portanto 5. fica demonstrado.

para 6 $\left[\frac{24-8p-2p^2-2q^2}{(2-p)^2+q^2}-2\right]^2 + \left[\frac{16q}{(2-p)^2+q^2}\right] =$

$$= 16\,\frac{[(4-p^2-q^2)^2+16q^2]}{[(2-p)^2+q^2]} = B$$

Mostremos que $B \geqq 1$.

De (*) $(4-p^2-q^2)^2 + 16q^2 = 16-8p^2+8q^2+(p^2+q^2)^2$

Por outro lado

$$[(p-2)^2+q^2]^2 = (p^2+q^2)^2 + 8(p^2+q^2)(1-p) + 16(1-p)^2 \overset{(**)}{\leqq}$$

$$\leqq 16-8p^2+8q^2+(p^2+q^2)^2 \overset{(*)}{=} (4-p^2-q^2)^2 + 16q^2$$

Logo $B \geqq 1$ e 6. fica demonstrado se demonstrarmos (**).

(**) fica demonstrado se demonstrarmos que:

$(16-8p^2+8q^2) - [8(p^2+q^2)(1-p) + 16(1-p)^2] \geqq 0$ e isto é verdadeiro.

<u>Com efeito</u>: $16-8p^2+8q^2-[8p^2+8q^2-8p(p^2+q^2)+16(1-2p+p^2)] =$

$= 8p(p^2+q^2) + 32p \geqq 0$

$$b_6 = (p_6, q_6) \Longrightarrow \begin{cases} p_6 = \dfrac{-24+8p+2p^2+2q^2}{(p-2)^2+q^2} \\[2ex] q_6 = \dfrac{-16q}{(p-2)^2+q^2} \end{cases}$$

Claramente $q_6 \leqq 0$. Mostremos que: $\begin{cases} p_6 \leqq 0 & 7. \\ (p_6+2)^2 + q_6 \geqq 16 & 8. \end{cases}$

isto é, b_6 pertence a região (XI).

Como $p_6 = -p_5$ de 5. segue 7..

Observando que $(p_6+2)^2 = (p_5-2)^2$ de 6. obtemos 8.

Concluímos então que, dado um ponto em (I) temos mais 5 (cinco)pontos distribuídos nas regiões (III), (V), (VII), (IX) e (XI), pertencentes a mesma órbita.

Fazendo agora um estudo semelhante para um ponto $b_1 = (p,q)$ pertencente a região (II), temos que:

$b_2 = (p_2,q_2)$ pertence a região (IV)

$b_3 = (p_3,q_3)$ pertence a região (VI)

$b_4 = (p_4,q_4)$ pertence a região (VIII)

$b_5 = (p_5,q_5)$ pertence a região (X)

$b_6 = (p_6,q_6)$ pertence a região (XII)

As demonstrações são semelhantes as dos casos anteriores.

Portanto temos que se um ponto está em (II), então existem outros 5 (cinco) pontos distribuídos nas regiões (IV), (VI), (VIII), (X), (XII) pertencentes a mesma órbita.

Como as transformações:

$b_1 = a$; $b_2 = -a$; $b_3 = \frac{12-2a}{2+a}$; $b_4 = \frac{-12+2a}{2+a}$; $b_5 = \frac{12+2a}{2-a}$; $b_6 = \frac{-12-2a}{2-a}$, onde b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, $b_6 \in \mathbb{C}$ são de Möbius, as correspondências entre os pontos de (I) e (II) e os correspondentes contra-domínios encontrados acima são biunívocas.

Com isso verificamos o afirmado, isto é, que as regiões (I) e (II) contém representantes de todas as órbitas do germe $x^4 + ax^2y^2 + y^4$.

Observamos que se b_1 caminha pelo segmento de reta de (0.0) a $(0,2\sqrt{3})$ então b_2 caminha de (0,0) a $(0,-2\sqrt{3})$, logo devemos identificar estes dois segmentos; além disso quando b_1 caminha de $(0,2\sqrt{3})$ para $(0,\infty)$ temos que b_4 caminha de $(0,2\sqrt{3})$ para (2,0) pelo arco $(x+2)^2 + y^2 = 16$ e b_5 caminha de $(0,-2\sqrt{3})$ para (2,0) pelo arco $(x+2)^2 + y^2 = 16$ que portanto também podem ser identificados.

Vamos mostrar que o quociente é homeomorfo a S^2.

Os pontos que poderiam gerar dúvidas são os pontos de fronteira. Para esta demonstração, denotaremos a identificação de $\mathbb{C}$ com o espaço quociente por $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\sim = S^2$.

1) Consideremos uma bola aberta B_1^1 com centro em $(0,y)$, onde $0 < y < 2\sqrt{3}$ e contida nas regiões (I) e (IV). No quociente, a parte da bola contida em (IV) é levada na parte da bola B_2^1 com centro em $(0,-y)$ contida em (II). Afirmamos que o conjunto A_1 formado pelas partes das bolas contidas em (I) e (II) é um aberto no quociente. De fato:

$\phi^{-1}(A_1) = B_1^1 \cup B_2^1 \cup B_3^1 \cup B_4^1 \cup B_5^1 \cup B_6^1$ por continuidade, onde por exemplo B_3^1 é a bola com centro em $\left(\frac{24-2y^2}{2+y^2}, -\frac{16y}{2+y^2}\right)$, a parte (I) é levada em (V) e a de (II) em (X).

2) Consideremos agora uma bola aberte B_4^2 com centro em (x_o,y_o) onde $(x_o+2)^2 + y_o^2 = 16$, $x_o > 0$ e $y_o > 0$. No quociente a parte da bola contida em (VI) é levada na parte da bola B_6^2 com centro em $(x_o,-y_o)$ contida em (II). Afirmamos que o conjunto A_2 formado pelas partes de B_4^2 e B_6^2 contidas em (I) e (II) respectivamente é um aberto no quociente. De fato:

$\phi^{-1}(A_2) = B_1^2 \cup B_2^2 \cup B_3^2 \cup B_4^2 \cup B_5^2 \cup B_6^2$ por continuidade, onde por exemplo B_1^2 é a bola com centro em $\left(0, \sqrt{\frac{4x_o+24}{2-x_o}}\right)$ tal que a parte de A_2 em (I) é levada em (XI) e a de (II) em (XII).

3) Uma bola B_1^3 com centro em $(2,0)$ contida em (I) e (II) coincide com ela mesma no quociente. Afirmamos que B_1^3 é aberto no quociente. De fato:

$\phi^{-1}(B_1^3) = B_1^3 \cup B_2^3 \cup B_3^3 \cup B_4^3 \cup B_5^3 \cup B_6^3$ por continuidade, onde por exemplo B_6^3 tem centro em $\left(\frac{-24+8x+2x^2}{(2-x)^2}, 0\right)$, onde a parte de (I) é levada em (XI) e a

parte de (II) em (XII).

4) Tomemos uma bola aberta B_0^4 com centro em (0,0) contida em (I),(II), (III) e (IV). No quociente a parte de B_0^4 em (III) é levada na parte da bola B_0^4 em (I) e a de (IV) em (II). Afirmamos que o semi-círculo A_4 de (I) é um aberto no quociente. De fato:

$\phi^{-1}(A_4) = B_0^4 \cup B_{0'}^4 \cup B_{0''}^4$ por continuidade, onde $B_{0'}^4$ tem centro em (6,0), a parte de (I) é levada em (V) e (IX) e a parte de (II) em (VI) e (X), já $B_{0''}^4$ tem centro em (-6,0) a parte de (I) é levada em (VII) e (XI) e a parte de (II) em (VIII) e (XII).

5) Uma bola B_2^5 com centro em (2,0) contida em (I), (II), (V) e (VI),no quociente a parte de (V) vai em (I) e a parte de (VI) na parte de B_2^5 em (II). Afirmamos que o conjunto A_5 constituido da parte de B_2^5 em (I) e (II) é um aberto no quociente. De fato:

$\phi^{-1}(A_5) = B_2^5 \cup B_{-2}^5 \cup B_{\omega}^5$ por continuidade, onde B_{-2}^5 é a bola com centro em (-2,0) e contida em (III), (IV), (VII) e (VIII), a parte de (I) é levada em (III) e (VII) e a de (II) em (IV) e (VIII); já a bola B_{ω}^2 é a bola com centro no ponto impróprio contida em (IX), (X), (XI) e (XII), a parte de (I) é levada em (IX) e (XI) e a de (II) em (X) e (XII).

6) Finalmente uma bola B_V^6 com centro em $(0,2\sqrt{3})$ contida em (I), (IV), (VI), (VII), (IX) e (XII).No quociente as partes de (VII), (IX) são levadas em (I) e as partes de B_V^6 em (IV), (VI) e (XII) na parte da bola $B_{V'}^6$ em (II) onde $B_{V'}^6$ é a bola com centro em $(0,-2\sqrt{3})$ contida em (II), (III), (V), (VIII), (X) e (XI). Afirmamos que o conjunto A_6 constituido pelas partes de B_V^6 e $B_{V'}^6$ em (I) e (II) é um aberto no quociente. De fato

$\phi^{-1}(A_6) = B_V^6 \cup B_{V'}^6$ por continuidade.

Agora temos uma topologia no espaço das órbitas.

2.2 - As órbitas e a razão dupla entre as retas que se decompõe o germe $x^4 + ax^2y^2 + y^4$.

Façamos $x^2 = X$ e $y^2 = Y$, então $x^4 + ax^2y^2 + y^4 = X^2 + aXY + Y^2 = (X - \alpha Y)(X - \beta Y)$ onde $\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2-4}}{2}$ e $\beta = \frac{-a - \sqrt{a^2-4}}{2}$.

Substituindo X,Y por x e y novamente, obtemos: $(x^2-\alpha y^2)(x^2-\beta y^2) = (x+\sigma y)(x-\sigma y)(x+\tau y)(x-\tau y)$, onde:

$$\sigma = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2-4}}{2}} \quad \text{e} \quad \tau = \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2-4}}{2}}$$

além disso $\alpha\beta = 1$, $\alpha + \beta = -a$, $\sigma^2 = +\alpha$, $\tau^2 = +\beta$ e $(\sigma\tau)^2 = 1$. Escolhemos σ e τ de tal forma que $\sigma\tau = 1$.

Podemos pensar então em calcular a razão dupla entre as quatro retas $x = -\sigma y$; $x = \sigma y$; $x = -\tau y$ e $x = \tau y$. Esta razão pode ser obtida cortando as retas pela reta $y = 1$, obtemos: $(-\sigma,\sigma,-\tau,\tau)$.

$$d = \text{razão dupla}(-\sigma,\sigma,-\tau,\tau) = \frac{(-\sigma,\sigma,-\tau)}{(-\sigma,\sigma,\tau)} = \frac{\dfrac{-\tau + \sigma}{-\tau - \sigma}}{\dfrac{\tau + \sigma}{\tau - \sigma}} = \left(\frac{\tau - \sigma}{\tau + \sigma}\right)^2 =$$

$$= \frac{\tau^2 - 2\sigma\tau + \sigma^2}{\tau^2 + 2\sigma\tau + \sigma^2}, \text{ então } d = \frac{-a - 2}{-a + 2} = \frac{a + 2}{a - 2}.$$

Lembramos que permutando as retas, obtemos ao total 6 (seis) valores para a razão dupla as quais são invariantes por difeomorfismos. Associando a $b_1 = a$ o valor $d = \frac{a + 2}{a - 2}$ como valor principal observamos que fica associado a b_i o valor $d_i = \frac{b_i + 2}{b_i - 2}$ que percorre os 6 (seis) valores da razão dupla correspondentes às permutações das retas. De fato:

A razão dupla correspondente a $b_2 = -a$ é $d_2 = \frac{-a + 2}{-a - 2} = \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{1}{d}$.

A razão dupla correspondente a $b_3 = \frac{12-2a}{2+a}$ é $d_3 = \dfrac{\frac{12-2a}{2+a} + 2}{\frac{12-2a}{2+a} - 2} = 1 - d$.

A razão dupla correspondente a $b_4 = \frac{-12+2a}{2+a}$ é $d_4 = \dfrac{\frac{-12+2a}{2+a} + 2}{\frac{-12+2a}{2+a} - 2} = \dfrac{1}{1-d}$.

A razão dupla correspondente a $b_5 = \frac{12+2a}{2-a}$ é $d_5 = \dfrac{\frac{12+2a}{2-a} + 2}{\frac{12+2a}{2-a} - 2} = \dfrac{d-1}{d}$.

A razão dupla correspondente a $b_6 = \frac{-12-2a}{2-a}$ é $d_6 = \dfrac{\frac{-12-2a}{2-a} + 2}{\frac{-12-2a}{2-a} - 2} = \dfrac{d}{d-1}$.

Notas: 1. Vimos que se escolhermos $\tau\sigma = 1$ e considerarmos todos os germes de uma mesma órbita, obtemos para cada germe uma razão dupla, obtida por uma permutação entre as quatro retas originais.

2. Observamos que a órbita de 0 sómente contém mais dois pontos 6 e -6.

para $a = 0$: $d = -1$; $d_2 = -1$; $d_3 = 2$; $d_4 = 1/2$; $d_5 = 2$ e $d_6 = 1/2$.

para $a = 6$: $d = 2$; $d_2 = 1/2$; $d_3 = -1$; $d_4 = -1$; $d_5 = 1/2$ e $d_6 = 2$.

para $a = -6$: $d = 1/2$; $d_2 = 2$; $d_3 = 1/2$; $d_4 = 2$; $d_5 = -1$ e $d_6 = -1$.

Os seis valores se reduzem portanto a três $\{-1,2,1/2\}$. Neste caso dizemos que $(-\sigma,\sigma,-\tau,\tau)$ forma um conjunto harmônico.

3. Os pontos -2, 2 e ∞ são de uma mesma órbita que corresponde ao caso em que uma das retas tende a posição da outra.

2.3- Outro exemplo

Vamos considerar o jato $j_{x^3,y^{3k}}f = x^3 + ax^2y^k + y^{3k}$ com $4a^3+27 \neq 0$.

O Teorema 1.7, garante que neste caso $f \in J_{k,0}$, cuja forma normal é $x^3+ax^2y^k + y^{3k} + cxy^{2k+1}$, onde $c = c_o + \ldots + c_{k-3}y^{k-3}$ para $k > 2$; para $k = 2$, toma-se $c = 0$.

Encontraremos como em 2.1 os possíveis elementos de uma mesma órbi-

ta após a ação de um difeomorfismo que deixa f_o fixo a menos de germes de uma mesma órbita. Passando ao quociente pela relação "germes de uma mesma órbita", encontraremos o espaço de órbitas. Faremos isto para o caso particular em que $k = 2$, isto é, o germe $x^3 + ax^2y^2 + y^6$.

Façamos então a mudança:

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y^2 \\ y = \delta Y \end{cases}$$

Ficamos com:

$$(\alpha X + \beta Y^2)^3 + a(\alpha X + \beta Y^2)^2 (\delta Y)^2 + (\delta Y)^6 =$$

$$= \alpha^3 X^3 + (3\alpha^2\beta + a\alpha^2\delta^2)X^2Y^2 + (3\alpha\beta^2 + 2a\alpha\beta\delta^2)XY^4 + (\beta^3 + a\beta^2\delta^2 + \delta^6)Y^6 =$$

$$= x^3 + ax^2y^2 + y^6.$$

Segue que:

$$\begin{cases} \alpha^3 = 1 \\ 3\alpha^2\beta + a\alpha^2\delta^2 = b \\ 3\alpha\beta^2 + 2a\alpha\beta\delta^2 = 0 \\ \beta^3 + a\beta^2\delta^2 + \delta^6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 1 & (1) \\ \alpha^2(3\beta + a\delta^2) = b & (2) \\ \alpha\beta(3\beta^2 + 2a\delta^2) = 0 & (3) \\ \beta^3 + a\beta^2\delta^2 + \delta^6 = 1 & (4) \end{cases}$$

<u>1º Caso</u>: Se $\beta = 0$, em (4) $\delta^6 = 1$. Portanto:

$$\delta = \{1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\} \qquad \text{(i)}$$

De (1) $\alpha^3 = 1$, logo $\alpha = \{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$ (ii)

(i) e (ii) em (2) $a\alpha^2\delta^2 = b$, como $\alpha^2\delta^2 = \{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$, teremos:

$$b_1 = a;\ b_2 = a\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right);\ b_3 = a\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

<u>2º Caso</u>: se $3\beta + 2a\delta^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-2a\delta^2}{3}$, em (4)

$$\left(\frac{-2a\delta^2}{3}\right)^3 + \delta^2\left[a\left(\frac{-2a\delta^2}{3}\right)^2 + \delta^4\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{27}a^3\delta^6 + \frac{4a^3\delta^6}{9} + \delta^6 = 1 \Rightarrow \delta^6\left(\frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 1\right) = 1$$

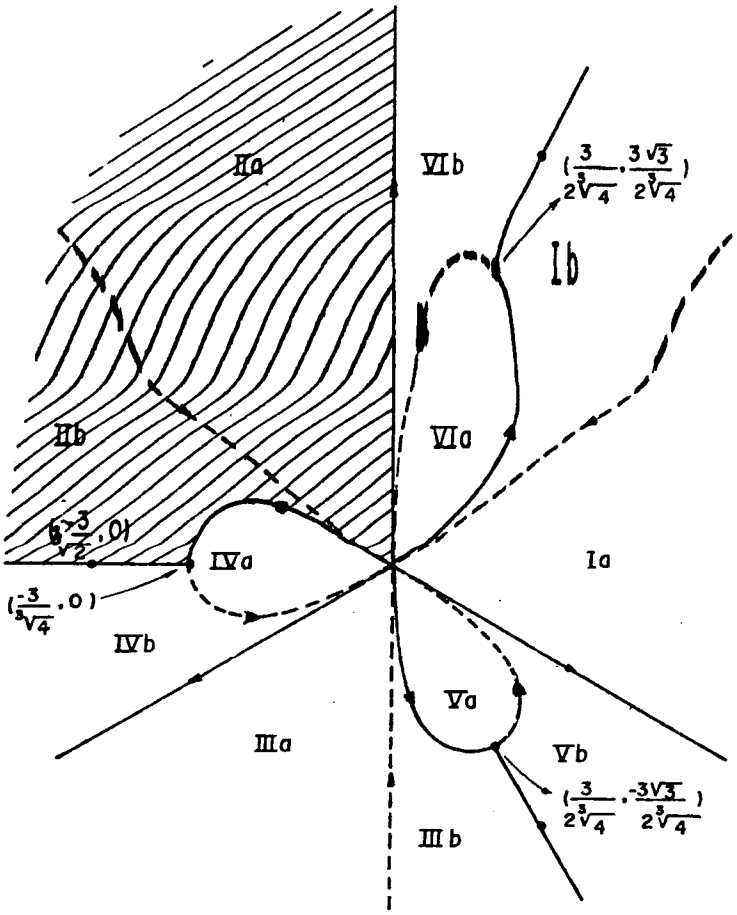
Como por hipótese $4a^3 + 27 \neq 0$, segue que:

$$\delta^6 = \frac{27}{4a^3+27} \Rightarrow \delta^2 = \sqrt[3]{\frac{27}{4a^3+27}}$$

De (2) $\alpha^2\left[3\left(\frac{-2a\delta^2}{3}\right) + a\delta^2\right] = b \Rightarrow -a\alpha^2\delta^2 = b$

$$b_4 = -a\sqrt[3]{\frac{27}{4a^3+27}};\quad b_5 = -a\sqrt[3]{\frac{27}{4a^3+27}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right);\quad b_6 = -a\sqrt[3]{\frac{27}{4a^3+27}}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

Representando $x^3 + ax^2y^2 + y^6$ pelo ponto a do plano complexo, obtemos na Figura B uma região (hachuriada) que representa todas as classes de equivalências dos germes, isto é, a região contém representantes de todas as diferentes órbitas (sistema de representantes).



Em seguida demonstraremos este fato.

Seja $a = \lambda i$. Vamos analisar como se comporta b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 e b_6.

Temos que : $b_1 = (0,\lambda)$; $b_2 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{-1}{2}\lambda\right)$; $b_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{-1}{2}\lambda\right)$

Estudaremos o comportamento de b_4

$$b_4 = -\lambda \sqrt[3]{\frac{27}{27-4\lambda^3 i}}\ i = -\frac{3\lambda}{\sqrt[6]{27^2+(4\lambda^3)^2}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) i$$

onde $\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{4\lambda^3}{27}$, $k = 0,1,2$.

$$\text{Assim } b_4 = \frac{3\lambda}{\sqrt[6]{27^2+(4\lambda^3)^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{arctg}(4\lambda^3/27)+2k\pi}{3}\right) -$$

$$- \frac{3\lambda}{\sqrt[6]{27^2+(4\lambda^3)^2}}\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(4\lambda^3/27)+2k\pi}{3}\right) i$$

*Observação: As três raízes obtidas variando k, nos fornecem também as três raízes de b_5 e b_6 para diferentes valores de k. Fixaremos um valor de k e assim obteremos b_4, b_5 e b_6. Se $k = 0$, b_5 coincide com b_4 para $k = 1$ e com b_6 caso $k = 2$. Antes porém vamos analisar o que nos fornecem geometricamente essas três raízes fazendo λ variar.

$$\text{(a)}\quad x = \mathrm{sen}\left(\frac{\mathrm{arctg}(4\lambda^3/27)+2k\pi}{3}\right)\frac{3\lambda}{\sqrt[6]{27^2+(4\lambda^3)^2}}$$

$$\text{(b)}\quad y = -\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}(4\lambda^3/27)+2k\pi}{3}\right)\frac{3\lambda}{\sqrt[6]{27^2+(4\lambda^3)^2}}$$

Dividindo (a) por (b), obtemos

$$\text{Mas } tg\ 3\alpha = \frac{3tg\ \alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad (**)$$

Fazendo $\alpha = arctg(x/y) \Rightarrow tg\ \alpha = x/y$

$$\frac{-4\lambda^3}{27} = -\ tg(arctg(4\lambda^3/27) \overset{(*)}{=} tg(3arctg(x/y) = tg\ 3\alpha \overset{(**)}{=} \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} =$$

$$\frac{3(x/y) - (x/y)^3}{1 - 3(x/y)^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{3x^2y - y^3}.$$

$$\text{Assim:} \quad \frac{x^3 - 3xy^2}{3x^2y - y^3} = -\frac{4\lambda^3}{27} \qquad (c)$$

Somando-se os quadrados de (a) e (b) e substituindo em (c), obte - mos:

$$x^2 + y^2 = \frac{9\lambda^2}{\sqrt[3]{(4\lambda^3)^2 + 27^2}} = 9\sqrt[3]{\frac{(27/4)^2\left\{\frac{-x^3 + 3xy^2}{3x^2y - y^3}\right\}^2}{27^2\left[\left\{\frac{-x^3 + 3xy^2}{3x^2y - y^3}\right\}^2 + 1\right]}} =$$

$$= \frac{9}{2\sqrt[3]{2}\,(x^2 + y^2)}\sqrt[3]{(-x^3 + 3xy^2)^2} \Rightarrow 2(x^2 + y^2)^2 = 9\left\{\frac{(-x^3 + 3xy^2)^2}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$4(x^2 + y^2)^3 = 27(-x^3 + 3xy^2) \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3}}$$

A equação obtida é a equação da rosácea desenhada na Figura B. Nas equações (a) e (b), podemos fazer $\lambda \to \infty$ e $\lambda \to -\infty$, com $k = 0,1,2$.

(i) se $k = 0$, então:

$\lambda \to \infty$, nos fornece $\left(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}, \frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

$\lambda \to -\infty$, nos fornece $\left(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

(ii) se $k = 1$, então:

$\lambda \to \infty$, nos fornece $\left(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

$\lambda \to -\infty$, nos fornece $(\frac{-3}{\sqrt[3]{4}},0)$

(iii) se k = 2, então:

$\lambda \to \infty$, nos fornece $(\frac{-3}{\sqrt[3]{4}},0)$

$\lambda \to -\infty$, nos fornece $(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}},\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}})$

Assim pela observação anterior, juntamente com o descrito acima, quando λ varia de $-\infty$ a $+\infty$ temos que b_4 percorre o trecho da rosácea de $(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}},\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}})$ a $(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}},\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}})$; b_5 percorre o trecho da rosácea de $(\frac{-3}{\sqrt[3]{4}},0)$ a $(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}},\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}})$; b_6 percorre o trecho da rosácea de $(\frac{3}{2\sqrt[3]{4}},\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}})$ a $(\frac{-3}{\sqrt[3]{4}},0)$.

Os pontos interiores à rosácea satisfazem a desigualdade:

$x^2 + y^2 < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3}$ e os exteriores a desigualdade com o sinal maior.

Consideremos as regiões em $\mathbb{C}^1$ dadas por:

$$(II) = (II_a \cup II_b) \text{ onde } \begin{cases} II_a: \ x < 0;\ y > \frac{-\sqrt{3}}{3}x \\ II_b: \ 0 < y < \frac{-\sqrt{3}}{3}x;\ x < 0;\ x^2+y^2 > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3+3xy^2)^{1/3} \end{cases}$$

$$(III) = (III_a \cup III_b) \text{ onde} \begin{cases} III_a: \ y < \frac{\sqrt{3}}{3}x;\ x < 0 \\ III_b: \ x>0; y < -\sqrt{3}x;\ x^2 + y^2 < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3+3xy^2)^{1/3} \end{cases}$$

$$(VI) = (VI_a \cup VI_B) \text{ onde } \begin{cases} VI_a: x < 0;\ x^2 + y^2 < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3} \\ VI_b: x < 0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < 0;\ x^2+y^2 > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3+3xy^2)^{1/3} \end{cases}$$

$$(IV) = (IV_a \cup IV_b) \text{ onde } \begin{cases} IV_a: x > 0;\ y > 0;\ x^2 + y^2 < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3} \\ IV_b: y > -\sqrt{3}x;\ y < \frac{-\sqrt{3}}{3}x;\ x^2+y^2 > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3+3xy^2)^{1/3} \end{cases}$$

$$(V) = (V_z \cup V_b) \text{ onde } \begin{cases} V_a: x > 0;\ y > 0;\ x^2 + y^2 < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3} \\ V_b: x > 0;\ y > \sqrt{3}x;\ x^2 + y^2 > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3} \end{cases}$$

Mostraremos que os pontos de I_a são levados em:

II_a por b_2	1
III_a por b_3	2
IV_a por b_4	3
V_a por b_5	4
VI_a por b_6	5

De fato: 1 rotação de 120^0

2 rotação de 240^0

3 (i) $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x > 0 \end{cases}$ é levado por b_4 nas partes tracejadas

de $x^2 + y^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3 + 3xy^2)^{1/3}$

Assim por continuidade I_a é levado por b_4 em IV_a

4 Aplicar b_5 em pontos de I_a é equivalente a aplicar b_4 em seguida aplicar b_2. Assim de 3 e 1 temos que I_a é levado em V_a por b_5.

5 Aplicar b_6 em pontos de I_a é equivalente a fazer a composição $b_3 \circ b_4$. Assim de 3 e 2 temos que I_a é levado em VI_a por b_6.

Alem disso os pontos de I_b são levados em :

II_b por b_2 1'

III_b por b_3 2'

IV_b por b_4 3'

V_b por b_5 4'

VI_b por b_6 5'

De fato: 1' rotação de 120°

2' rotação de 240°

3' já vimos em 3 (i). Mostremos

(iv) as partes de traço contínuo da rosácea que é levada por b_4 coincidem.

(v) a semi-reta $\{y = \sqrt{3}x;\ x > \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\}$ é levada por b_4 em

damental de representantes.

Para obtermos o espaço de órbitas observemos que podemos identificar a semi-reta $\{x = 0, y \geq 0\}$ com $\{x^2+y^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(-x^3+3xy^2)^{1/3},\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$ no sentido crescente e $\{y = 0; \frac{-3}{\sqrt[3]{2}} \leq x < \frac{-3}{\sqrt[3]{4}}\}$ com $\{y = 0, -\infty < x \leq \frac{-3}{\sqrt[3]{2}}\}$ no sentido decrescente.

Fazendo estas identificações obtemos como espaço de órbitas S^2. De maneira análoga ao exemplo 2.1 mostra-se que o quociente é homeoforfo a S^2.

§3 - Comportamento da parte f' de uma função semiquasehomogênea $f = f_o + f'$ após difeomorfismo que deixa f_o fixo a menos de germes de uma mesma órbita.

Consideraremos inicialmente o exemplo estudado no ítem 2.3, isto é, $x^3 + ax^2y^k + y^{3k} + cxy^{3k+1}$ onde $c = c_o + \ldots + c_{k-3}y^{k-3}$.

Neste exemplo estudaremos as mudanças de coordenadas que deixam f_o fixo. Em seguida faremos um estudo utilizando uma mudança que deixa f_o fixo a menos de germes da mesma órbita.

Começaremos com o caso $k = 3$, isto é, o germe $x^3 + ax^2y^3+y^9+c_0xy^7$.

Façamos a mudança: $\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y^3 \\ y = \delta Y \end{cases}$ em f_o. Obtemos então:

$$(\alpha X + \beta Y^3)^3 + a(\alpha X + \beta Y^3)^2(\delta Y)^3 + (\delta Y)^9 =$$

$$= \alpha^3X^3 + (3\alpha^2\beta + a\alpha^2\delta^3)X^2Y^3 + (3\alpha\beta^2+2a\alpha\beta\delta^3)XY^6 + (\beta^3+\beta^2\delta^3a+\delta^9)Y^9.$$

Queremos que:

$$\alpha^3 = 1 \qquad (1)$$

$$3\alpha^2\beta + a\alpha^2\delta^3 = a \quad \Rightarrow \quad \alpha^2(3\beta + a\delta^3) = a \qquad (2)$$

$$3\alpha\beta^2 + 2a\alpha\beta\delta^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta(3\beta + 2a\delta^3) = 0 \qquad (3)$$

$$\beta^3 + a\beta^2\delta^3 + \delta^9 = 1 \qquad (4)$$

1º Caso: $\beta = 0$

em (4) $\Rightarrow \delta^9 = 1$ (5)

em (2) $\Rightarrow \alpha^2\delta^3 = 1$ (6)

Sejam: ε_i $(i = 0,1,2)$ as raízes triplas da unidade

ϕ_j $(j = 0,1,2,\ldots,8)$ as raízes nonas da unidade

Assim de (1) e (5) a dança será $\begin{cases} x = \varepsilon_i X \\ y = \phi_j Y \end{cases}$

Logo f' fica da forma: $c_o xy^7 = c_o(\varepsilon_i X)(\phi_j Y)^7 = c_o\varepsilon_i\phi_j^7 XY^7$. Mas temos a restrição (6), isto é, $\varepsilon_i^2\phi_j^3 = 1$ ou seja $2.3i + 3j \equiv 0 \bmod 9$ que nos fornece :

i	0	1	2	0	1	2	0	1	2
j	0	1	2	3	4	5	6	7	8

TABELA 1

Colocamos $\varepsilon_i\phi_j^7 = \phi_h$, portanto $3i + 7j \equiv h \bmod 9$, donde

i	0	1	2	0	1	2	0	1	2
j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	1	2	3	4	5	6	7	8

TABELA 2

Assim o novo f' é da forma $c_o\phi_j XY^7$, com $j = 0,1,\ldots,8$.

2º Caso: $3\beta + 2a\delta^3 = 0$

Então $\beta = \frac{-2}{3}a\delta^3$ em (4) $\Rightarrow \frac{-8}{27}a^3\delta^9 + \frac{4}{9}a^3\delta^6\delta^3 + \delta^9 = 1$

9 27 (7)

fazendo $\beta = \frac{-2}{3} a\delta^3$ em (2), obtemos:

$$\alpha^2(-2a\delta^3 + a\delta^3) = a \Rightarrow \alpha^2\delta^3 = -1 \qquad (8)$$

De (1) $\alpha = \varepsilon_i (i = 0,1,2)$ em (8), segue que:

$\varepsilon_i^2\delta^3 = -1 \Rightarrow \delta^3 = -\varepsilon_i$ substituindo em (7) obtemos:

$$\delta^9 = -1 \text{ e } \frac{27}{4a^3 + 27} = -1 \Rightarrow \delta^9 = -1 \text{ e } a = \frac{-3}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell \quad (\ell = 0,1,2)$$

Chamemos de ψ_j $(j = 0,1,2,\ldots,8)$ as raízes nonas de -1. Segue que $\beta = \frac{-2}{3}\left(\frac{-3}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell\right)(\psi_j)^3 = \frac{-2}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell\,\psi_j^3$.

Assim a mudança é dada por:

$$\begin{cases} x = \varepsilon_i X - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell\,\psi_j^3\,Y^3 \\ y = \psi_j Y \end{cases}$$

Vamos então calcular f'.

$$c_o xy^7 = c_o(\varepsilon_i X - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell\,\psi_j^3 Y^3)(\psi_j Y)^7 = c_o\varepsilon_i\psi_j^7 XY^7 - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}c_o\,\varepsilon_\ell\psi_j^{10}Y^{10} \qquad (*)$$

Mas, observemos que:

$f_o = X^3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell X^2Y^3 + Y^9$. Portanto:

$$\frac{\partial f_o}{\partial X} = 3X^2 - \frac{6}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell XY^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_o}{\partial Y} = \frac{-9}{\sqrt[3]{2}}\varepsilon_\ell X^2Y^2 + 9Y^8$$

e portanto: $Y^{10} = \frac{1}{9}Y^2\frac{\partial f_o}{\partial Y} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}Y^4\varepsilon_\ell\frac{\partial f_o}{\partial X} + \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon_\ell^2 XY^7$

em (*) $c_o xy^7 = c_o\varepsilon_i\psi_j^7 XY^7 - (2/\sqrt[3]{2})c_o\varepsilon_\ell^{10}.(2/\sqrt[3]{4})\varepsilon_\ell^2 XY^7 + \ldots$

Mostramos no 1º Caso que $\varepsilon_i \phi_j^7 = \phi_j$, de modo análogo mostra-se que $\varepsilon_i \phi_j^7 = \psi_j$.

Assim o novo f' é da forma $-c_o \psi_j XY^7$.

Concluímos que no caso $k = 3$ os difeomorfismos permitidos, leva f' em 18 elementos de uma mesma órbita , a saber, $c_o \phi_j$ e $c_o \psi_j$ onde ϕ_j são as raízes nonas da unidade e ψ_j são as raízes nonas de -1.

Façamos agora o mesmo estudo para o caso em que k é arbitrário. A função é da forma:

$$x^3 + ax^3y^k + y^{3k} + c_o xy^{2k+1} + c_1 xy^{2k+2} + \dots + c_{k-3} xy^{3k-2} \text{ para } k > 2.$$

A mudança que faremos é do tipo:

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y^k \\ y = \delta Y \end{cases}$$

Obteremos o seguinte sistema que denotaremos por $\mathcal{S}$:

$$\alpha^3 = 1 \qquad (1)$$

Então a parte semiquasehomogênea fica:

$$c_o\varepsilon_i\phi_j^{2k+1}XY^{2k+1} + c_1\varepsilon_i\phi_j^{2k+2}XY^{2k+2} + \dots + c_{k-3}\varepsilon_i\phi_j^{3k-2}XY^{3k-2}.$$

Mas temos a restrição (6) $\varepsilon_i^2\phi_j^k = 1$ que nos leva a $2i+j \equiv 0 \bmod 3$

que implicará numa tabela análoga a Tabela 1.

Assim (a) $\varepsilon_i\phi_j^{2k+1} = \phi_{h_1}$ ou seja $k.i + (2k+1)j \equiv h_1 \bmod 3k$ nos dando:

i	0	1	2	0	1	2	...	2
j	0	1	2	3	4	5	...	3k-1
h_1	0	1	2	3	4	5	...	3k-1

Portanto $\varepsilon_i\phi_j^{2k+1} = \phi_j$

(b) $\varepsilon_i\phi_j^{2k+2} = \varepsilon_i\phi_j^{2k+1}\phi_j \overset{(a)}{=} \phi_j^2$.

$\vdots$

(k-2) $\varepsilon_i\phi_j^{3k-2} = \varepsilon_i\phi_j^{2k+1}\phi_j^{k-3} = \phi_j\phi_j^{k-3} = \phi_j^{k-2}$.

Assim após o difeomorfismo obtemos o novo f' que será:

$$c_o\phi_jXY^{2k+1} + c_1\phi_j^2XY^{2k+2} + \dots + c_{k-3}\phi_j^{k-2}XY^{3k-2}.$$

<u>2º Caso:</u> $3\beta + 2a\delta^k = 0$

Então $\beta = \frac{-2}{3}a\delta^3$ que em (4) nos dá $\delta^{3k} = \dfrac{27}{4a^3 + 27}$ (7)

em (2) nos dá $\alpha^2\delta^k = -1$ (8)

de (1) $\alpha = \varepsilon_i$ $(i = 0,1,2)$ em (8) $\Rightarrow$ $\varepsilon_i^2\delta^k = -1 \Rightarrow \delta^k = -\varepsilon_i$ que substituindo em (7) nos fornece $\delta^{3k} = -1$ e $\frac{27}{3} = -1$ ou seja:

$\beta = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,k}$ e a mudança é dada por:

$$\begin{cases} x = \varepsilon_i X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,k} Y^k \\ y = \psi_j Y \end{cases}$$

Vamos estudar o comportamento da parte semiquasehomogênea após a mudança acima:

$$c_o(\varepsilon_i X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,k} Y^k)(\psi_j Y)^{2k+1} + c_1(\varepsilon_i X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,k} Y^k)(\psi_j Y)^{2k+2} + \dots +$$

$$c_{k-3}(\varepsilon_i X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,k} Y^k)(\psi_j Y)^{3k-2} =$$

$$= c_o\varepsilon_i\psi_j^{\,2k+1} XY^{2k+1} - \frac{2}{3\sqrt{2}} c_o\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,3k+1} Y^{3k+1} + c_1\varepsilon_i\psi_j^{\,2k+2} XY^{2k+2} -$$

$$- \frac{2}{3\sqrt{2}} c_o\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,3k+2} Y^{3k+2} + \dots + c_{k-3}\varepsilon_i\psi_j^{\,3k-2} XY^{3k-2} - \frac{2}{3\sqrt{2}} c_{k-3}\varepsilon_{\ell}\psi_j^{\,4k-2} Y^{4k-2} \quad (**)$$

Mas observemos que: $f_o = X^3 - \frac{3}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} X^2 Y^k + Y^{3k}$. Portanto

$$\partial_1 f_o = 3X^2 - \frac{6}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} XY^k \quad \text{e} \quad \partial_2 f_o = -\frac{3k}{3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} X^2 Y^{k-1} + 3kY^{3k-1}$$

Então:

$$Y^{3k+1} = \frac{Y^2}{3k}\partial_2 f_o + \frac{1}{3\,3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} Y^{k+1}\partial_1 f_o + \frac{2}{3\sqrt{4}}\varepsilon_{\ell}^{\,2} XY^{2k+1}$$

$$Y^{3k+2} = \frac{Y^3}{3k}\partial_2 f_o + \frac{1}{3\,3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} Y^{k+2}\partial_1 f_o + \frac{2}{3\sqrt{4}}\varepsilon_{\ell}^{\,2} XY^{2k+2}$$

$$\vdots$$

$$Y^{4k-2} = \frac{Y^{k-1}}{3k}\partial_2 f_o + \frac{1}{3\,3\sqrt{2}}\varepsilon_{\ell} Y^{2k-2}\partial_1 f_o + \frac{2}{3\sqrt{4}}\varepsilon_{\ell}^{\,2} XY^{3k-2}$$

Substituindo em (**) os f' resultantes são da forma:

$$+ \dots + c_{k-3}\varepsilon_i\psi_j^{3k-2}XY^{3k-2} - \frac{2}{3\sqrt{2}}c_{k-3}\,\varepsilon_\ell\psi_j^{4k-2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{4}}\varepsilon_\ell^{2}XY^{3k-2} =$$

$$= -c_o\psi_\ell XY^{2k+1} - c_1\psi_\ell^{2}XY^{2k+2} - \dots - c_{k-3}\psi_\ell^{k-2}XY^{3k-2}.$$

Logo os difeomorfismos que fixam f_0 nos fornecem 6k elementos f' numa mesma órbita.

Um fato que nos chama a atenção é que quando fixamos o parâmetro $\underline{a}$ os únicos valores possíveis para $\underline{a}$ são $a = -\frac{3}{3\sqrt{2}}\varepsilon_j$ $(j = 0,1,2)$ que são pontos onde aparecem apenas três elementos na mesma órbita, como visto em 2.3.

Vamos agora, estudar o comportamento da parte f' quando aplicamos difeomorfismos que deixam f_o fixo a menos dos elementos de uma mesma órbita.

Estudaremos o caso k arbitrário.

Observamos que a única alteração que ocorre no sistema $\mathcal{S}$ após a mudança efetuada é na equação (2), ele fica agora:

$$\alpha^3 = 1 \qquad (1)$$

$$\alpha^2(3\beta + a\delta^k) = b \qquad (2')$$

$$\alpha\beta(3\beta + 2a\delta^k) = 0 \qquad (3)$$

$$\beta^3 + a\beta^2\delta^k + \delta^{3k} = 1 \qquad (4)$$

Em 2.3 vimos que para k = 2, existia no máximo seis elementos em cada órbita. No caso geral isto também ocorre, como mostraremos a seguir.

Caso 1: $\beta = 0$

Temos então: $\begin{cases} \alpha = \varepsilon_i \quad (i = 0,1,2) \\ \delta^{3k} = 1 \Rightarrow \delta = \phi_j \quad (j = 0,1,2,\dots,3k-1) \end{cases}$

em (2') $a\varepsilon_i^{2}\phi_j^{k} = b \Rightarrow b_{\ell+1} = a\,\varepsilon_\ell$ $(\ell = 0,1,2)$

Caso 2: $\beta = -(2/3)a\delta^k$

em (4) $\delta^{3k} = \dfrac{27}{4a^3 + 27}$, em (2') $-a\alpha^2\delta^k = b$, donde obtemos os mesmos b_4, b_5 e b_6 de 2.3.

<u>1º Caso</u>: $\beta = 0$

A mudança neste caso é $\begin{cases} x = \varepsilon_i X \\ y = \phi_j Y \end{cases}$

A parte semiquasehomogênea é dada por:

$$c_o\varepsilon_i\phi_j^{2k+1}XY^{2k+1} + c_1\varepsilon_i\phi_j^{2k+2}XY^{2k+2} + \ldots + c_{k-3}\varepsilon_i\phi_j^{3k-2}XY^{3k-2}.$$

Temos de (2') que $a\varepsilon_i^2\phi_j^k = b = a\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_i^2\phi_j^k = \varepsilon_1$

Assim existem 9k f' distintos numa mesma órbita.

<u>2º Caso</u>: $\beta = -\frac{2}{3}a\delta^k$

ψ_m $(m = 0,1,2,\ldots,3k-1)$ são as raízes 3k-ésimas de $\dfrac{27}{4a^3+27}$.

A mudança neste caso é então:

$$\begin{cases} x = \varepsilon_i X - \frac{2}{3}a\psi_m^k Y^k \\ y = \psi_m Y \end{cases}$$

Vamos estudar o comportamento da parte semiquasehomogênea após a mudança acima.

$$c_o(\varepsilon_i X - \tfrac{2}{3}a\psi_m^k Y^k)(\psi_m Y)^{2k+1} + c_1(\varepsilon_i X - \tfrac{2}{3}a\psi_m^k Y^k)(\psi_m Y)^{2k+2} + \ldots +$$

$$+ c_{k-3}(\varepsilon_i X - \tfrac{2}{3}a\psi_m^k Y^k)(\psi_m Y)^{3k-2} = c_o\varepsilon_i\psi_m^{2k+1}XY^{2k+1} - \tfrac{2}{3}c_o a\psi_m^{3k+1}Y^{3k+1} +$$

$$+ c_1\varepsilon_i\psi_m^{2k+2}XY^{2k+2} - \tfrac{2}{3}c_1 a\psi_m^{3k+2}Y^{3k+2} + \ldots + c_{k-3}\varepsilon_i\psi_m^{3k-2}XY^{3k-2} -$$

$$- \tfrac{2}{3}c_{k-3}\, a\psi_m^{4k-2}Y^{4k-2} \quad (***)$$

Mas observemos que $f_o = X^3 + bXY^k + Y^{3k}$. Portanto:

$$\frac{\partial f_o}{\partial X} = 3X^2 + 2bXY^k \quad e \quad \frac{\partial f_o}{\partial Y} = kbX^2Y^{k-1} + 3kY^{3k-1}$$

$$Y^{3k+1} = \frac{Y^2}{3k}\frac{\partial f_o}{\partial Y} - \frac{b}{9}Y^{k+1}\frac{\partial f_o}{\partial X} + \frac{2}{9}b^2XY^{2k+1}$$

$$y^{3k+2} = \frac{Y^3}{3k}\frac{\partial f_o}{\partial Y} - \frac{b}{9}Y^{k+2}\frac{\partial f_o}{\partial X} + \frac{2}{9}b^2XY^{2k+2}$$

$$\vdots$$

$$Y^{4k-2} = \frac{Y^{k-1}}{3k}\frac{\partial f_o}{\partial Y} - \frac{b}{9}Y^{2k-2}\frac{\partial f_o}{\partial X} + \frac{2}{9}b^2XY^{3k-2}$$

Substituindo em (***) obtemos os possíveis f'

$$c_o\varepsilon_i\psi_m^{2k+1}XY^{2k+1} - \frac{2}{3}c_oa\psi_m^{3k+1}\cdot\frac{2}{9}b^2XY^{2k+1} +$$

$$+ c_1\varepsilon_i\psi_m^{2k+2}XY^{2k+2} - \frac{2}{3}c_1a\psi_m^{3k+2}\cdot\frac{2}{9}b^2XY^{2k+2} + \ldots +$$

$$+ c_{k-3}\varepsilon_i\psi_m^{3k-2}XY^{3k-2} - \frac{2}{3}c_{k-3}a\psi_m^{4k-2}\cdot\frac{2}{9}b^2XY^{3k-2} + \mathfrak{m} \qquad (£)$$

De (2') $-a\varepsilon_i^2\psi_m^k = b \Rightarrow b^2 = a^2\varepsilon_i\psi_m^{2k}$ substituindo em (£) obtemos:

$$c_o\varepsilon_i\psi_m^{2k+1}XY^{2k+1} - \frac{4}{9}c_oa\psi_m^{3k+1}(a^2\varepsilon_i\psi_m^{2k})XY^{2k+1} +$$

$$+ c_1\varepsilon_i\psi_m^{2k+2}XY^{2k+2} - \frac{4}{9}c_oa\psi_m^{3k+2}(a^2\varepsilon_i\psi_m^{2k})XY^{2k+2} + \ldots +$$

$$+ c_{k-3}\varepsilon_i\psi_m^{3k-2}XY^{3k-2} - \frac{4}{9}c_oa\psi_m^{4k-2}(a^2\varepsilon_i\psi_m^{2k})XY^{3k-2} =$$

$$c_o\varepsilon_i\psi_m^{2k+1}(1 - \frac{4}{9}a^3)XY^{2k+1} + c_1\varepsilon_i\psi_m^{2k+2}(1 - \frac{4}{9}a^3)XY^{2k+2} + \ldots +$$

$$+ c_{k-3}\varepsilon_i\psi_m^{3k-2}(1 - \frac{4}{9}a^3)XY^{3k-2}.$$

18k f' distintos com a aplicação de difeomorfismos que fixa f_o a menos de germes da mesma órbita.

Faremos agora um estudo semelhante para

$$Z_{i,0}: x^3y + ax^2y^{i+2} + y^{3i+4} + cxy^{2i+4}, \text{ onde } i > 0 \text{ e } c = c_0 + \ldots + c_{i-1}y^{i-1}.$$

Esta forma normal surge do teorema de classificação abaixo, cuja demonstração é análoga a do Teorema 1.7.

$$j_{x^3y,y^{3p+1}}f = y(x^3 + bx^2y^p + y^{3p}),\ 4b^3+27 \neq 0 \Rightarrow f \in Z_{p-1,0}.$$

Para este exemplo faremos uma mudança de coordenadas que deixa f_o fixo. Inicialmente faremos o caso i = 1, para depois generalizar para i =k.

<u>1º Caso (i = 1):</u> Para este caso temos a forma:

$$x^3y + ax^2y^3 + y^7 + c_oxy^6$$

$$f_o = x^3y + ax^2y^3 + y^7$$

$$\partial_1 f_o = 3x^2y + 2axy^3$$

$$\partial_2 f_o = 3ax^2y^2 + 7y^6$$

Façamos inicialmente a substituição: $\begin{cases} x = \alpha X \\ y = \delta Y \end{cases}$ em f_o, obtemos então:

$\alpha^3\delta X^3Y + a\alpha^2\delta^3X^2Y^3 + \delta^7Y^7$. Queremos f_o fixo, assim:

$$\alpha^3\delta = 1 \qquad (1)$$

$$a\alpha^2\delta^3 = a \Rightarrow \alpha^2\delta^3 = 1 \qquad (2)$$

$$\delta^7 = 1 \qquad (3)$$

Chamemos ε_1 a primeira raiz sétima da unidade e façamos $\alpha = \varepsilon_1^{b}$ e $\delta = \varepsilon_1^{d}$.

de (1) $\varepsilon_1^{3b} \cdot \varepsilon_1^{d} = 1 \Rightarrow \varepsilon_1^{3b+d} = 1$. Portanto $3b+d \equiv 0 \bmod 7$ (4)

de (2) $\varepsilon_1^{2b} \cdot \varepsilon_1^{3d} = 1 \Rightarrow \varepsilon_1^{2b+3d} = 1$. Portanto $2b+3d \equiv 0 \bmod 7$ (5)

de (4) $d \equiv -3b \bmod 7$ ou $d \equiv 4b \bmod 7$ que em (5) nos fornece:

$2b+12a \equiv 0 \bmod 7$, que sempre se verfica.

Assim temos 7(sete) soluções possíveis para α e δ.

b	0	1	2	3	4	5	6
d	0	4	1	5	2	6	3

Portanto a substituição é da forma : $\begin{cases} x = \varepsilon_1^{b} X \\ y = \varepsilon_1^{d} Y \end{cases}$ que na equação ,

fica: $X^3Y + aX^2Y^3 + Y^7 + c_o \varepsilon_i^{b} (\varepsilon_1^{d})^6 XY^6$

porém $b+6d \equiv b+24b \equiv 25b \equiv 4b \equiv d \bmod 7$. Logo, ficamos com:

$x^3y + ax^2y^3 + y^7 + c_o \varepsilon_1^{d} xy^6$ com $d = 0,1,2,\ldots,6$

Consideremos agora a substituição

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y^2 \\ y = \delta Y \end{cases} \quad \text{em } f_o$$

$(\alpha X + \beta Y^2)^3(\delta Y) + a(\alpha X + \beta Y^2)^2(\delta Y)^3 + (\delta Y)^7 =$

De (8) $\delta^2 = -\alpha$ em (5) $\beta = -\frac{2}{3} a\delta^2 = \frac{2}{3} a\alpha = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i \alpha$

Então a mudança é da forma

$$\begin{cases} X = \phi_1^b X - \frac{2}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i \phi_1^b Y^2 \\ y = \phi_1^d Y \end{cases}$$

e ficamos com:

$$X^3Y - \frac{3}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i X^2Y^3 + Y^7 + c_o(\phi_1^b X - \frac{2}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i \phi_1^b Y^2)(\phi_1^d Y)^6.$$

$A = c_o \phi_1^b \phi_1^{6d} XY^6 - \frac{2}{3\sqrt{2}} c_o \phi_1^b \phi_1^{6d} \varepsilon_i Y^8$, mas observemos que:

$a+6d \equiv b+66b \equiv 67b \equiv 11b \equiv d \bmod 14$. Portanto:

$$A = c_o \delta XY^6 - \frac{2}{3\sqrt{2}} c_o \delta \varepsilon_i Y^8$$

Porém: $f_o = X^3Y - \frac{3}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i X^2Y^3 + Y^7$ $\begin{cases} \partial_1 f_o = 3X^2Y - \frac{6}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i XY^3 \\ \partial_2 f_o = X^3 - \frac{9}{3\sqrt{2}} \varepsilon_i X^2Y^2 + 7Y^6 \end{cases}$

E assim: $Y^8 = \frac{1}{7} Y^2 \partial_2 f_o + \frac{3}{7\,3\sqrt{2}} \varepsilon_i Y^3 \partial_1 f_o - XY\partial_1 f_o -$

$$- \frac{2}{21\,3\sqrt{2}} \varepsilon_i Y^3 \partial_1 f_o - \frac{14}{7\,3\sqrt{4}} \varepsilon_i^2 XY^6$$

Portanto $A = c_o \delta XY^6 - 2c_o \delta XY^6 = - c_o \phi_1^d XY^6$.

Concluímos que no caso $i = 1$ o difeomorfismo permitido, leva f' em

$$\begin{cases} x = \alpha X \\ y = \delta Y \end{cases}$$ em f_o, obtemos então:

$$\alpha^3 \delta = 1 \qquad (1)$$

$$\alpha^2 \delta^{k+2} = 1 \qquad (2)$$

$$\delta^{3k+4} = 1 \qquad (3)$$

De (1) em (2) $\alpha^2 . (1/\alpha^3)^{k+2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha^{3k+6} \Rightarrow \alpha^2(1 - \alpha^{3k+4}) = 0$

Portanto: $\alpha^{3k+4} = 1 \qquad (4)$

Seja ε_1 a primeira das raízes (3k+4)-ésimas da unidade, façamos:

$\alpha = \varepsilon_1^b$ e $\delta = \varepsilon_1^d$

em (1) $\varepsilon_1^{3b} . \varepsilon_1^d = 1 \Rightarrow 3b+d \equiv 0 \bmod (3k+4) \qquad (5)$

em (2) $\varepsilon_1^{2b} . \varepsilon_1^{(k+2)d} = 1 \Rightarrow 2b+(k+2)d \equiv 0 \bmod (3k+4) \qquad (6)$

de (5) $d \equiv [(3k+4) - 3]b \bmod (3k+4) \Rightarrow d \equiv (3k+1)b \bmod (3k+4)$ em (6)

$2b + (k+2)d \equiv 2b + (k+2)(3k+1)b \equiv (2 + (3k+1)(k+2)b \equiv (3k^2+7k+4)b \equiv$

$\equiv (3k+4)(k+1)b \equiv 0 \bmod (3k+4)$.

Logo, temos (3k+4) soluções possíveis para α e δ.

A substituição é da forma:

$$b + (2k+5)d \equiv b + (3k+1)(2k+5)b \equiv (1+6k^2+17k+5)b \equiv (6k^2+17k+6)b \equiv (3k+2)b \equiv$$

$$\overset{(*)}{\equiv} 2d \bmod (3k+4)$$

(*) se verifica. De fato:

$$\text{Como } d \equiv (3k+1)b \bmod (3k+4) \Rightarrow \frac{d - (3k+1)}{3k+4} = w \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2d - 2(3k+1)}{3k+4} = 2w \Rightarrow 2d \equiv 6k+2 \equiv (3k-2) \bmod (3k+4)$$

$$\vdots$$

$$b + (3k+3)d \equiv b + (3k+1)(3k+3)b \equiv (1+9k^2+12k+3)b \equiv (9k^2+12k+4)b \equiv 4b \overset{(**)}{\equiv}$$

$$\equiv kd \bmod (3k+4)$$

(**) se verifica. De fato:

$$\text{Como } d \equiv (3k+1)b \bmod (3k+4) \Rightarrow kd \equiv (3k^2+k)b \equiv 4b \bmod (3k+4)$$

Assim ficamos com:

$$x^3y + ax^2y^{k+2} + y^{3k+4} + c_0\varepsilon_1^d xy^{2k+4} + c_1\varepsilon_1^{2d} xy^{2k+5} + \dots + c_{k-1}\varepsilon_1^{kd} xy^{3k+3}.$$

Consideremos agora a substituição:

$$\begin{cases} X = \phi_1^{\,b} X - \dfrac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i \phi_1^{\,b} Y^{k+1} \\ y = \phi_1^{\,d}\, Y \end{cases}$$

$$\text{Seja } A = c_0\left(\phi_1^{\,b} X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i \phi_1^{\,b} Y^{k+1}\right)\left(\phi_1^{\,d}\right)^{2k+4} Y^{2k+4} +$$

$$+ c_1\left(\phi_1^{\,b} X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i \phi_1^{\,b} Y^{k+1}\right)\left(\phi_1^{\,d}\right)^{2k+5} Y^{2k+5} + \dots +$$

$$+ c_{k-1}\left(\phi_1^{\,b} X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i \phi_1^{\,b} Y^{k+1}\right)\left(\phi_1^{\,d}\right)^{3k+3} Y^{3k+3}.$$

Mas : $a + (2k+4)d \equiv d \bmod (6k+8)$

$a + (2k+5)d \equiv 2d \bmod (6k+8)$

$\vdots$

$a + (3k+3)d \equiv kd \bmod (6k+8)$

(demonstrado anteriormente um caso análogo)

$$\text{Portanto } A = c_0\delta\left(X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i Y^{k+1}\right)Y^{2k+4} + c_1\delta^2\left(X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i Y^{k+1}\right)Y^{2k+5} +$$

$$+ \dots + c_{k-1}\delta^k\left(X - \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i Y^{k+1}\right)Y^{3k+3}.$$

Porém $f_o = X^3Y - \dfrac{3}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i X^2 Y^{k+2} + Y^{3k+4}$. Logo

$$\partial_1 f_o = 3X^2Y - \frac{6}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i XY^{k+2}$$

$$\partial_2 f_o = X^3 - \frac{3(k+2)}{3\sqrt{2}}\,\varepsilon_i X^2 Y^{k+1} + (3k+4)Y^{3k+3}$$

E assim:

$$Y^{3k+5+i} = \left(\frac{6(k+2)}{(3k+4)\sqrt[3]{4}} \varepsilon_1^2 XY^{2k+4} - \frac{4}{\sqrt[3]{4}(3k+4)} \varepsilon_1^2 XY^{2k+4} \right) Y^i + \mathfrak{m} =$$

$$= \frac{6k+8}{\sqrt[3]{4}(3k+4)} \varepsilon_1^2 XY^{2k+4} + \mathfrak{m} \quad \text{. Ou seja:}$$

$$A = - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \phi_1^{d_i} XY^{2k+4+i}$$

Logo difeomorfismos que fixam f_o nos fornecem 6k+8 elementos f' numa mesma órbita.

Seria interessante ter estudado a topologia da parte quasehomogênea f_o deste último exemplo e também o comportamento de f' quando aplicamos difeomorfismos que fixam f_o a menos de germes de uma mesma órbita, mas isto ampliaria bastante o trabalho, pois é um caso com um pouco mais de detalhes, porisso deixamos para uma próxima oportunidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] - ARNOL'D, V.I., Critical points of smooth functions and their normal forms. Russian Math. Surveys, 30:5 (1975), 1-75.
= Uspekhi Mat. Nauk, 30:5 (1975), 3-65.

[2] - ARNOL'D, V.I., Normal forms of functions in a neighbourhood of a degenerate critical point. Uspekhi Mat. Nauk, 29:2 (1974), 11-49.
= Russian Math. Surveys, 29:2 (1974), 10-50.

[3] - ARNOL'D, V.I., Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. 6, n.° 4 (1972), 3-25; MR 50 # 8595.
= Functional Anal. Appl. 6 (1973), 254-272.

[4] - HUMPHREYS, J.E., Introductions to Lie Algebras and Representations Theory. Second Printing, Revised 1972, Springer-Verlag, New York Inc. (GTM-09).

[5] - MATHER, I.N., Stability of C^{∞}-Mappings: finitely determined map-germs. Publ. Math. I.H.E.S., Vol. 35, 1968.

[6] - BRÖCKER, Th., Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge University Press, 1975. (LMS-17).

[7] - GIBSON, C.G., Singular Points of Smooth Mappings. Pitman Publishing Limited, 1979.

[8] - GOLUBITSKY, M. & GUILLEMIN, V., Stable Mappings and Their Singularities. Springer-Verlag, 1973. (GTM-14).