Teorema de Radó para campos vetoriais localmente resolúveis

Manuel Francisco Zuloeta Jimenez

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 21 / 09 /2010

Assinatura: ________________________

Teorema de Radó para campos vetoriais localmente resolúveis [1]

Manuel Francisco Zuloeta Jimenez

Orientador: *Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Julho de 2010

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

O futuro não pode ser previsto, mas pode ser inventado. É a nossa habilidade de inventar o futuro que nos dá esperança para fazer de nós o que somos.

Dennis Gabor

Agradecimentos

Tentarei expressar em poucas linhas minha gratidão às pessoas que de alguma forma estiveram presentes e que muito me ajudaram a escrever as páginas de mais esta vitória.

Inicialmente gostaria de expressar minha eterna gratidão a Deus pelo amor, pela força que me impulsiona a lutar pelos meus objetivos e por me ter permitido, sempre com muita fé, ultrapassar todos os obstáculos.

Agradeço à minha família que sempre esteve presente para me dar suporte de forma incondicional em todos os aspectos possíveis durante meus estudos, mesmo distante. Aos meus pais, Juan e Gladis, pela dedicação, pela educação e pelo esforço para comigo e meus irmãos. Aos meus irmãos, Fernando, Elvis, Angel, Jose, Clara e Paola, pelo incentivo, carinho e compreensão ao longo destes anos de dedicação à Matemática. Aos meus sobrinhos, Crisby, Diego, Carmen, Dayana e Josue, obrigado por fazer de minha vida mais feliz. Amo todos vocês!

Agradeço ao meu orientador, Prof. Evandro Raimundo da Silva, pelo apoio, pela amizade, pela dedicação e por estar sempre disposto em ajudar no que fosse preciso. Pelo constante incentivo, por acreditar sempre no meu trabalho, por me ajudar a trilhar este caminho difícil, mas que no final, é compensador, muito obrigado!

Agradeço aos professores do departamento de Matemática do ICMC, pelos ensinamentos, apoio, motivação, pela amizade e pelas aulas ministradas durante este período com as quais muito aprendi.

Agradeço aos colegas e amigos da USP e em especial, aqueles que estiveram sempre presentes: Nancy Chachapoyas, José Bravo, Luis Espinoza, Napoleon Caro, Norbil Cordova, Lizandro Sanchez e Walter Huaraca. Obrigado pelo apoio, pelas longas conversas, pelas horas de estudo, pelos dias de futebol e por todos os momentos inesquecíveis vividos.

Agradeço a todos meus amigos que conheço há muito tempo e que sem dúvida tem um papel fundamental em toda na minha vida: Augusto, Juan, Eder, Raul, Marlenny, Carlos, Jose, Alex... Obrigado por todos os momentos divertidos, pelo exemplo de pessoas íntegras que são, gigantes que me emprestam seu ombro para apoiar e ver mais longe.

Não poderia deixar de agradecer aos funcionários do ICMC por estarem sempre à disposição e tornarem nossa vivência mais agradável

Agradeço à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo suporte financeiro durante meus estudos.

Enfim, se for agradecer a cada um, não acabaria nunca, pois são tantas as pessoas especiais que passaram e marcaram esta jornada...

Mais uma vez a todos vocês muito obrigado!!!

Resumo

Um resultado conhecido na teoria de variáveis complexas é o Teorema clássico de Radó que afirma que se uma função complexa u é contínua em $\bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ e holomorfa em $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\,,\, u(z) \neq 0\} = D(0,1) \setminus u^{-1}(0)$, então é holomorfa em $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$. Diferentes provas e generalizações para este resultado foram dadas por muitos autores, ver por exemplo, [4], [7], [8], [10] and [13]. Em [7] J. Hounie e J.Tavares provaram um Teorema do tipo Radó no caso de soluções homogêneas de campos vetoriais localmente resolúveis com coeficientes suaves. Mais precisamente, eles provaram o seguinte teorema:

Seja L um campo vetorial com coeficientes suaves definido em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a condição (P). Então L tem a propriedade de Radó.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo detalhado deste resultado. Mas antes faremos um estudo geral da teoria que está por trás deste resultado, como teoria de distribuições, estruturas localmente integráveis, resolubilidade local, entre outros. A exposição de tais conteúdos não será longa, pois o intuito é apenas indicar o que é minimamente necessário para entender a prova deste resultado.

Palavras chaves: Teorema de Radó, estruturas localmente integráveis, resolubilidade local, Teorema de aproximação de Baouendi-Treves.

Abstract

A known result in complex variables theory is the classical Radó's Theorem, which states that if a complex function f is continuous in $\bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ and holomorphic on $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\,,\, f(z) \neq 0\} = D(0,1) \setminus f^{-1}(0)$ then it is holomorphic in $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$. Different proofs and generalizations of this result have been given by many authors, see e.g. [4], [7], [8], [10] and [13]. In [7] J. Hounie e J.Tavares proved a Radó type Theorem for homogeneous solutions of locally solvable vector fields with smooth coefficients. More precisely they proved the following theorem:

Let L be a vector field with smooth coefficients in an open subset $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfying condition (P). Then L has the property of Radó.

The main goal of this work is to present a detailed study of this theorem. But before we will do an overall study of the theory behind of this result such as theory of distributions, locally integrable structures, local solvability, among others. The presentation of such contents will not be long, since the purpose is only to indicate what is minimally necessary for understanding the proof of this result.

Keywords: Radó's Theorem, Locally integragle structures, local solvability, Baouendi-Treves approximation Theorem.

Sumário

Introdução

A teoria de variáveis complexas é uma ferramenta muito importante para a matemática. Nos últimos anos têm surgido várias generalizações de resultados clássicos da teoria de variáveis complexas. Um resultado conhecido é o Teorema clássico de Radó o qual afirma que:

Se uma função complexa u, é contínua em $\bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ e holomorfa em $U = D(0,1) \setminus u^{-1}(0)$, então é holomorfa em $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$.

Este teorema implica facilmente que o mesmo resultado vale para funções de várias variáveis complexas. Diferentes provas e generalizações para este resultado foram dadas por muitos autores. Uma generalização para uma classe mais geral de funções foi dada por Rosay e Stout [10], eles estenderam o Teorema de Radó para CR-funções sobre hipersuperfícies de $\mathbb{C}^n$ estritamente pseudoconvexas e formularam um problema mais geral sobre campos vetoriais complexos. A solução deste problema foi dada por J.Hounie e J. Tavares [7] no caso de campos vetoriais complexos localmente resolúveis com coeficientes suaves definidos em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para descrever brevemente o resultado, seja L um campo vetorial complexo definido em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

Definição. Uma função $u \in C(\Omega)$ que satisfaz a equação $Lu = 0$ no sentido das distribuições no conjunto $\Omega \setminus u^{-1}(0)$ é chamada uma função de Radó para L. Dizemos que o campo vetorial L tem a propriedade Radó, se toda função de Radó para L é uma solução fraca de $Lu = 0$ em Ω.

Definição. Seja $p \in \Omega$, dizemos que L é localmente resolúvel em p se existe uma vizinhança $U = U(p)$ tal que para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $Lu = f$ em U. Se L é localmente resolúvel em todo ponto $p \in \Omega$, dizemos que L é localmente resolúvel em Ω.

Tendo presente que os campos vetoriais localmente resolúveis são conhecidos por serem caracterizados pela condição (P) introduzida por Nierenberg e Treves em [9], J.Hounie e J.Tavares provaram o seguinte teorema:

Seja L um campo vetorial com coeficientes suaves definido em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a condição (P). Então L tem a propriedade de Radó.

No caso em que $n = 1$ e L é o operador de Cauchy-Riemann o resultado se reduz ao Teorema clássico de Radó citado acima.

O objetivo principal da presente monografia é apresentar um estudo detalhado deste resultado. A prova deste resultado explora duas propriedades importantes dos campos vetoriais localmente resolúveis: o seu caráter essencialmente bidimensional (expressa pelo fato de que suas órbitas tem dimensão no máximo dois) e a propriedade da integrabilidade local que permite a redução do problema à versão clássica do Teorema de Radó no plano. Quando falamos das órbitas de um campo vetorial nos referimos às órbitas do campo no sentido de Sussmann cuja definição foi introduzida por Sussmann em [14]. Para uma melhor compreensão, esta monografia esta dividida em cinco capítulos

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados importantes sobre a teoria de distribuições, os quais serão utilizados nos capítulos posteriores. Para um tratamento detalhado dos tópicos apresentados, ver por exemplo, Rudin [11], Hounie [6] e Trèves [15].

No Capítulo 2, apresentamos um apanhado sobre funções holomorfas e funções harmônicas, principalmente mostraremos dois teoremas de grande importância para este trabalho, o Teorema de Mergelyam e o Teorema clássico de Radó. Para mais detalhes desta parte pode-se ver, Conway [2], Kaufman [8] e Rudin [12].

No Capítulo 3, vamos dar a definição de estrutura localmente integrável bem como algumas de suas propriedades mais importantes, mostraremos o Teorema de geradores locais o qual nos permitirá construir coordenadas e geradores locais adequados para o subfibrado vetorial T' e finalmente mostraremos o Teorema de aproximação de Baouendi-Treves no caso em que L é um campo vetorial definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, u é uma função contínua e temos uma única solução Z. Nossas principais referências para este capítulo são [1] e [3].

No Capítulo 4, vamos apresentar a definição de resolubilidade local de um campo vetorial, a condição (P) e de forma rápida introduziremos a definição de órbitas de um campo vetorial no sentido de Sussmann. Um dos resultados importantes neste capítulo é que todo campo vetorial localmente resolúvel é localmente integrável. Para este capítulo nossas referências são [1], [3] e [14].

No Capítulo 5, fazemos uma exposição, em detalhes, do Teorema 2.1 de [7], que aqui aparece como Teorema 5.4. Uma observação a fazer é que neste capítulo assumimos que a condição (P) é condição necessária e suficiente para a resolubilidade local de um campo vetorial.

Capítulo

1

Resultados básicos sobre distribuições

Neste capítulo pretendemos abordar alguns resultados importantes sobre a teoria das distribuições, os quais serão utilizados nos capítulos posteriores. Iremos colocar as idéias de maneira direta com o objetivo apenas de estabelecer noções básicas, deixando claro que o leitor deverá possuir conhecimentos mínimos de análise real e teoria da medida. Alguns resultados serão somente enunciados sendo omitidas as suas demonstrações.

Para uma maior quantidade de detalhes pode-se consultar Rudin [11], Hounie [6] e Trèves [15].

Salvo menção explícita em contrário, ao longo deste capítulo, Ω representará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Funções teste

Definição 1.1. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que f é de classe C^k (ou seja $f \in C^k(\Omega)$), se $\partial^\alpha f$ existe e é contínua até ordem k isto é para α com $|\alpha| \leq k$.*

Onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$

Definição 1.2. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, o conjunto*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

é o suporte da função f.

Ou seja o suporte da função f é o menor subconjunto fechado de Ω tal que $f \equiv 0$ em seu complementar.

Observação 1.3. *x não pertence ao supp(f) se e somente se $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x em Ω.*

As funções de nosso principal interesse serão as de classe $C^\infty(\Omega)$ que possuem suporte compacto, para este propósito vamos dar a seguinte definição.

Definição 1.4. *Chamaremos de espaço das funções teste ao conjunto*

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,;\ f \in C^\infty(\Omega) \ \ e \ \ supp(f) \text{ é compacto em } \Omega\}.$$

Exemplo 1.5. Um exemplo de uma função teste em $\mathbb{R}^n$, ou seja de uma função que pertence ao espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\varphi(x) = g(1- \mid x \mid^2) = \begin{cases} p(\dfrac{1}{1- \mid x \mid^2})e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , \quad \text{se } \mid x \mid < 1 \\ \\ 0 & , \quad \text{se } \mid x \mid \geq 1 \end{cases}$$

onde p é um polinômio qualquer em $\mathbb{R}$ e g é uma função real definida da seguinte forma

$$g(t) = \begin{cases} p(\dfrac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}} & , \quad \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & , \quad \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Observação 1.6.

1) Pode-se observar que a funcão φ do Exemplo 1.5 satisfaz: $\varphi \geq 0$, $\varphi(0) > 0$ e supp$(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$. Mais ainda, multiplicando φ por uma constante adequada obtemos uma nova função que além de satisfazer as condições anteriores, satisfaz também que $\int \varphi(x)dx = 1$.

2) Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi \geq 0$ e supp$(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$, se x_0 é um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, então podemos considerar a seguinte função

$$\varphi_\epsilon^{x_0}(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x - x_0}{\epsilon})$$

a qual satisfaz que supp$(\varphi_\epsilon^{x_0}) \subset \overline{B(x_0, \epsilon)}$. Se $x_0 = 0$, $\varphi_\epsilon^{x_0}$ será denotada por φ_ϵ.

Antes de enunciar o teorema seguinte vamos definir o que é uma função localmente integrável.

Definição 1.7. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função Lebesgue mensurável, dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ se para cada compacto $K \subset \Omega$ temos que*

$$\int_K \mid f(x) \mid dx < \infty.$$

Teorema 1.8. *Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi \geq 0$, $supp(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$ e $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\epsilon > 0$, definimos*

$$f * \varphi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \epsilon y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\frac{x-y}{\epsilon})dy. \quad (1.1)$$

Então

a) $f * \varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Se $f(x) = 0$ q.t.p, fora de um conjunto fechado A, então $supp(f * \varphi_\epsilon) \subseteq A + \overline{B(0,\epsilon)}$.

c) Se f é contínua e $supp(f)$ é compacto, então $f * \varphi_\epsilon \to f$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$.

Demonstração. Para mostrar a), vamos mostrar primeiro que $f * \varphi_\epsilon$ é contínua. De fato, seja $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ tal que $x_m \to x$, como φ é contínua, então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\big|[\varphi_\epsilon(x_m - y) - \varphi_\epsilon(x-y)]f(y)\big| &= \big|\frac{1}{\epsilon^n}[\varphi(\frac{x_m - y}{\epsilon}) - \varphi(\frac{x-y}{\epsilon})]f(y)\big| \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^n}\sup_{z\in B(0,1)} \mid \varphi(z) \mid\mid f(y) \mid \\ &\leq M \mid f(y) \mid .\end{aligned}$$

Como $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ e φ é contínua, vem do Teorema da convergência dominada que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}[f * \varphi_\epsilon(x_m) - f * \varphi_\epsilon(x)] &= \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}[\varphi_\epsilon(x_m - y) - \varphi_\epsilon(x-y)]f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{m\to\infty}[\varphi_\epsilon(x_m - y) - \varphi_\epsilon(x-y)]f(y)dy \\ &= 0 \quad (1.2)\end{aligned}$$

o qual implica que

$$\lim_{m\to\infty} f * \varphi_\epsilon(x_m) = f * \varphi_\epsilon(x)$$

portanto $f * \varphi_\epsilon$ é contínua.

Mostremos agora que $\partial(f * \varphi_\epsilon)/\partial x_j$ existem e é igual a $f * \partial\varphi_\epsilon/\partial x_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, Como $\partial\varphi_\epsilon/\partial x_j$ são contínuas para todo $j \in \mathbb{N}$, então existe uma constante $M > 0$ tal que $\sup_{z\in B(0,1)} \mid d\varphi_\epsilon(z) \mid \leq M$, logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \varphi_\epsilon(x)) &= \lim_{t\to 0} \frac{f * \varphi_\epsilon(x + te_j) - f * \varphi_\epsilon(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_\epsilon(x - y + te_j) - \varphi_\epsilon(x - y)] f(y) dy.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade do valor médio vem que

$$\frac{1}{\mid t \mid} \mid \varphi_\epsilon(x-y+te_j) - \varphi_\epsilon(x-y) \mid\mid f(y) \mid \leq \frac{M}{\mid t \mid} \mid x-y-(x-y+te_j) \mid\mid f(y) \mid = M \mid f(y) \mid,$$

aplicando o Teorema da convergência dominada obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \varphi_\epsilon(x)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to 0} [\frac{\varphi_\epsilon(x - y + te_j) - \varphi_\epsilon(x - y)}{t}] f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_\epsilon(x - y) f(y) dy \\ &= f * \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Portanto $\partial(f * \varphi_\epsilon)/\partial x_j$ existe e, mais ainda, é contínua, ou seja, $f * \varphi_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
No caso das derivadas superiores repetimos o argumento e obtemos $D^\alpha(f * \varphi_\epsilon) = f * D^\alpha \varphi_\epsilon$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Vamos mostrar agora b), por hipótese temos que

$$f * \varphi_\epsilon(x) = \int_{supp(\varphi)} f(x - \epsilon y)\varphi(y) dy.$$

Se $x_0 \in int(A)$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset int(A)$, ou seja, $f(x) \neq 0$, para todo $x \in B(x_0, \delta)$.
Por outro lado para todo $x \in B(x_0, \delta)$, existe $y_x \in supp(\varphi) \subset \overline{B(0, 1)}$ tal que

$$x - \epsilon y_x \in B(x_0, \delta) \subset A,$$

logo $f * \varphi_\epsilon(x) \neq 0$, para todo $x \in B(x_0, \delta)$.
Agora para todo $x \in B(x_0, \delta) \subset A$ seja $a = x - \epsilon y_x$, temos que $x = a + \epsilon y_x \in A + \overline{B(0, \epsilon)}$.
Portanto

$$supp(f * \varphi_\epsilon) \subseteq A + \overline{B(0, \epsilon)}.$$

Finalmente mostremos c). De fato, como $supp(f)$ é compacto e pelo item b) temos $supp(f * \varphi_\epsilon) \subseteq A + \overline{B(0,\epsilon)}$, logo $supp(f * \varphi_\epsilon)$ é compacto, pois basta tomar $A = supp(f)$. Portanto obtemos que $f * \varphi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Por outro lado, dado $\delta > 0$, como f é uniformemente contínua, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$, usando o fato de que $\int \varphi(y)dy = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f * \varphi_\epsilon(x)\big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\epsilon y)\varphi(y)dy\Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x-\epsilon y)]\varphi(y)dy\Big| \\
&\leq \sup_y \mid f(x) - f(x-\epsilon y) \mid \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)dy \ \leq \ \delta,
\end{aligned}$$

portanto,

$$f * \varphi_\epsilon \longrightarrow f \quad \text{ uniformemente.}$$

□

Corolário 1.9. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * \varphi_\epsilon$ é definido como em (1.1), então as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $\parallel f * \varphi_\epsilon \parallel_{L^1} \leq \parallel f \parallel_{L^1}$.

ii) $\parallel f * \varphi_\epsilon - f \parallel_{L^1} \to 0$ *quando* $\epsilon \to 0$.

Demonstração. Vamos mostrar o item i). De fato, pelo Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mid f * \varphi_\epsilon(x) \mid dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\epsilon y)\varphi(y)dy\Big| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} [\int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x-\epsilon y) \mid\mid \varphi(y) \mid dy]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x-\epsilon y) \mid dxdy. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x-\epsilon y) \mid dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x) \mid dx \quad \text{ e } \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)dy = 1.$$

Portanto obtemos que

$$\parallel f * \varphi_\epsilon \parallel_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \mid f * \varphi_\epsilon(x) \mid dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x) \mid dx = \parallel f \parallel_{L^1},$$

ou seja,

$$\| f * \varphi_\epsilon \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^1} .$$

Para mostrar o item $ii)$ temos que dado $\delta > 0$, usando o fato que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\| f - g \|_{L^1} < \frac{\delta}{3}. \tag{1.4}$$

Logo usando (1.4) e o item $i)$ temos

$$\begin{aligned} \| f - f * \varphi_\epsilon \|_{L^1} &= \| f - g + g - g * \varphi_\epsilon + g * \varphi_\epsilon - f * \varphi_\epsilon \|_{L^1} \\ &\leq \| f - g \|_{L^1} + \| g - g * \varphi_\epsilon \|_{L^1} + \| (g - f) * \varphi_\epsilon \|_{L^1} \\ &\leq \| f - g \|_{L^1} + \| g - g * \varphi_\epsilon \|_{L^1} + \| g - f \|_{L^1} \\ &< \frac{2\delta}{3} + \| g - g * \varphi_\epsilon \|_{L^1} . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pelo item $b)$ e $c)$ do Teorema 1.8 temos que $g * \varphi_\epsilon \to g$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$ e

$$supp(g * \varphi_\epsilon) \subseteq supp(g) + \overline{B(0,\epsilon)} \subseteq supp(g) + \overline{B(0,1)} \ , \quad \text{para } 0 < \epsilon < 1.$$

Logo chamemos de $K = supp(g) + \overline{B(0,1)}$, o qual é compacto , então temos

$$\begin{aligned} \| g - g * \varphi_\epsilon \|_{L^1} &= \int_K | g(x) - g * \varphi_\epsilon(x) | \, dx \\ &\leq \sup_{x \in K} | g(x) - g * \varphi_\epsilon(x) | \int_K dx \\ &< \frac{\delta}{3|K|}|K| \ = \ \frac{\delta}{3}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $|K|$ é a medida do conjunto K.
Portanto usando (1.5) e (1.6) temos que

$$\| f - f * \varphi_\epsilon \|_{L^1} < \delta \ , \quad \text{para } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno} .$$

Isto mostra $ii)$. □

Corolário 1.10. *Seja $K \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com K compacto. Então existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de K.*

Demonstração. Seja $\delta = d(K, \Omega^c) = \inf\{| x - y | ; x \in K, y \notin \Omega\}$ como K é compacto e Ω^c é fechado e disjuntos, temos que $\delta > 0$.

Sejam $\epsilon, \rho > 0$ tal que $0 < \epsilon < \rho < \epsilon + \rho < \delta$ e χ a função caraterística do conjunto $K_\rho = K + \overline{B(0,\rho)}$ (que é compacto), ou seja,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K_\rho \\ 0 & \text{se } x \notin K_\rho \end{cases}$$

Agora consideremos $\psi(x) = \chi * \varphi_\epsilon(x)$, onde $\begin{cases} \varphi_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\epsilon^n}\varphi(\dfrac{x}{\epsilon}) \ , \ \displaystyle\int \varphi(x)dx = 1 \\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ , \ supp(\varphi) \subset B(0,1) \end{cases}$
e φ é dada como no Exemplo 1.5. Temos que

$$\begin{aligned} supp(\psi) &\subset K_\rho + \overline{B(0,\epsilon)} \\ &\subseteq K + \overline{B(0,\rho)} + \overline{B(0,\epsilon)} \\ &= \underbrace{K + \overline{B(0,\rho+\epsilon)}}_{compacto} \ \subset \ \Omega \end{aligned}$$

vem que $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.
Por outro lado temos

$$0 \leq \psi(x) = \int_\Omega \chi(x)\varphi_\epsilon(x-y)dy \leq \int_\Omega \varphi_\epsilon(x-y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y)dy = 1$$

assim obtemos que

$$0 \leq \psi(x) \leq 1 \ , \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Além disso, se $x \in supp(\psi)$, segue que $d(x,K) \leq \rho + \epsilon$, daí $x = \tilde{x} + (\rho+\epsilon)y$, onde $\tilde{x} \in K$ e $y \in \overline{B(0,1)}$, então

$$x - \epsilon y = \tilde{x} + \rho y \in K + \overline{B(0,\rho)} = K_\rho.$$

Portanto se $x \in supp(\psi)$, então

$$\psi(x) = \int \chi(x-\epsilon y)\varphi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \overbrace{\chi(x-\epsilon y)}^{=1} \varphi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \varphi(y)dy = 1.$$

Logo, $\psi \equiv 1$ em $supp(\psi)$, que é uma vizinhança de K. Isto completa a demonstração do corolário. $\square$

1.2 As distribuições

Nesta seção vamos definir o importante espaço das distribuições e estudar algumas de suas propriedades. Lembremos que um funcional linear é contínuo se e somente se ele for contínuo no ponto zero, a fim de usar este resultado é necessário saber o que significa convergência a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, que é o que iremos fazer em seguida. Como antes Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.11. *Uma sequência de funções $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se*

i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que supp$(\varphi_j) \subset K$, para todo $j = 1, 2, \ldots$

ii) Para todo inteiro positivo m, as derivadas até ordem m das funções φ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$. Ou seja, $\partial^\alpha \varphi_j \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$, para todo α tal que $\mid \alpha \mid \leq m$, para todo $m = 0, 1, \ldots$

Nota: Diremos que uma sequência de funções $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge para a função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ quando $(\varphi_j - \varphi) \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Observação 1.12. *É possível dotar o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a convergência nessa topologia coincide com a dada pela definição acima (ver [15]). Vejamos que essa topologia não provem de uma métrica.*

De fato, Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, suponhamos por contradição que d é uma distância tal que $d(\varphi, \varphi_n) \to 0$ se e somente se $(\varphi_n - \varphi) \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Considere K_m uma sequência de compactos cuja união seja Ω, logo pelo Corolário 1.10, pode-se escolher funções $\varphi_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_m \equiv 1$ em uma vizinhança de K_m. Como para cada m fixo temos que $\epsilon\varphi_m \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$, logo por hipótese vem que existe $\epsilon_m > 0$ tal que $d(\epsilon_m\varphi_m, 0) < 1/m$, agora fazendo variar m temos que $d(\epsilon_m\varphi_m, 0) \to 0$, mas $\epsilon_m\varphi_m \nrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, pois $K_m \subset$ supp$(\epsilon_m\varphi_m)$ o qual implica que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}$ supp$(\epsilon_m\varphi_m) = \Omega$, e isto contradiz o item i) da Definição 1.11.

A seguir vamos definir o espaço das distribuições.

Definição 1.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, o espaço das distribuições é dado por*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ u \text{ é linear e contínua }\}.$$

Ou seja, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se satisfaz a seguintes propriedades:

i) $u(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = u(\varphi_1) + \alpha u(\varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

ii) Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $\varphi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *em* $C_c^\infty(\Omega)$*, então* $u(\varphi_j) \to 0 = u(0)$ *em* $\mathbb{C}$.

Notação: Geralmente denotaremos o valor da distribuição u aplicada na função teste φ por $\langle u, \varphi\rangle$ em lugar de $u(\varphi)$.

Exemplo 1.14. Considere $\Omega = \mathbb{R}^n$. Para $a \in \Omega$ defina $\delta_a : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ da seguinte maneira $\delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$, logo

i) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}\langle \delta_a, \varphi_1 + \alpha\varphi_2\rangle &= (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(a)\\ &= \varphi_1(a) + \alpha\varphi_2(a)\\ &= \langle \delta_a, \varphi_1\rangle + \alpha\langle \delta_a, \varphi_2\rangle\end{aligned}$$

ii) Seja $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de funções tal que $\varphi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, vem que $\sup\limits_K |\varphi_j| \to 0$ quando $j \to \infty$, em particular $\varphi_j(a) \to 0$ quando $j \to \infty$ em $\mathbb{C}$, ou seja $\langle \delta_a, \varphi_j\rangle \to 0$ quando $j \to \infty$.

Portanto de $i)$ e $ii)$ segue que δ_a é uma distribuição, chamada de Delta de Dirac centrada no ponto a.

Exemplo 1.15. Seja $\Omega = \mathbb{R}$ e defina $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t|\varphi'(t)dt, \qquad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Mostremos que T é uma distribuição. De fato,

i) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, logo

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi_1 + \alpha\varphi_2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)'(t)dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} [|t|\varphi_1'(t) + |t|\alpha\varphi_2'(t)]dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|\varphi_1'(t)dt + \alpha\int_{-\infty}^{\infty} |t|\varphi_2'(t)dt \;=\; \langle T, \varphi_1\rangle + \alpha\langle T, \varphi_2\rangle.\end{aligned}$$

ii) Seja $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma sequência de funções tal que $\varphi_j \to 0$, quando $j \to \infty$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$, então existe $a > 0$ tal que $supp(\varphi_j) \subset [-a, a]$ para todo $j \in \mathbb{N}$, além disso, $\varphi_j'(t) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{C}$, logo

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_j \rangle| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |t||\varphi_j'(t)|dt = \int_{-a}^{a} |t||\varphi_j'(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in[-a,a]} |\varphi_j'(t)| \int_{-a}^{a} |t|dt = a^2 \sup_{t\in[-a,a]} |\varphi_j'(t)|. \end{aligned}$$

Segue-se que $|\langle T, \varphi_j \rangle| \leq a^2 \sup\limits_{t\in[-a,a]} |\varphi_j'(t)|$ e como $\sup\limits_{t\in[-a,a]} |\varphi_j'(t)| \to 0$ em $\mathbb{C}$, quando $j \to \infty$, então

$$\langle T, \varphi_j \rangle \to 0 \text{ em } \mathbb{C}, \text{ quando } j \to \infty.$$

Logo de $i)$ e $ii)$ temos que T é uma distribuição.

Exemplo 1.16. Seja $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é subconjunto aberto. Defina $T_f : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

temos que T_f é bem definida, além disso,

i) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 \rangle &= \int_\Omega f(x)(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(x)dx \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)dx + \alpha \int_\Omega f(x)\varphi_2(x)dx \\ &= \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \alpha\langle T_f, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

ii) Seja $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ uma sequência de funções tal que $\varphi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, quando $j \to \infty$. Então $\sup\limits_K \mid \varphi_j(x) \mid \to 0$ em $\mathbb{C}$. Por outro lado, temos

$$|\langle T_f, \varphi_j \rangle| \leq \int_{supp(\varphi_j)} |f(x)||\varphi_j(x)|dx \leq \sup_K |\varphi_j(x)| \int_K |f(x)|dx$$

o qual implica que

$$\langle T_f, \varphi_j \rangle \to 0 \text{ em } \mathbb{C} \text{ quando } j \to \infty.$$

pois $\sup\limits_K |\varphi_j(x)| \to 0$ em $\mathbb{C}$ e $\int_K |f(x)|dx$ é finita.

Logo de $i)$ e $ii)$ segue que T_f é uma distribuição.

Observação 1.17. *Suponha que $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tais que $T_f = T_g$ no sentido das distribuições, isto é $\langle T_f, \varphi\rangle = \langle T_g, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Mostremos que $f = g$ q.t.p.*

De fato, seja $K \subset \Omega$ um subconjunto compacto tal que $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \equiv 1$ em K, seja $h = f - g$ e considere a seguinte função

$$H = \begin{cases} \alpha h & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \Omega^c \end{cases}$$

Observe que $H \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$, além disso, temos

$$\begin{aligned} H * \varphi_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} H(y)\varphi(\frac{x-y}{\epsilon})dy = \epsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha h)(y)\varphi(\frac{x-y}{\epsilon})dy \\ &= \epsilon^{-n}\int_{\Omega} \alpha(y)f(y)\varphi(\frac{x-y}{\epsilon})dy - \epsilon^{-n}\int_{\Omega} \alpha(y)g(y)\varphi(\frac{x-y}{\epsilon})dy \\ &= \langle T_f, \beta_\epsilon^x\rangle - \langle T_g, \beta_\epsilon^x\rangle = 0 \quad , \quad \text{onde } \beta_\epsilon^x(y) = \alpha(y)\frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x-y}{\epsilon}) \in C_c^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

portanto $H * \varphi_\epsilon(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$.
Por outro lado sabemos que $H * \varphi_\epsilon \longrightarrow H$ em L^1, ou seja $H = 0$ q.t.p ou $\alpha h(x) = 0$ q.t.p x. Logo em um compacto K temos que $h = 0$ q.t.p logo $f = g$ q.t.p em K, fazendo $\Omega = \bigcup K_n$ onde K_n é compacto teremos que $f = g$ q.t.p em Ω.

Pela observação acima, podemos imediatamente constatar que se $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $f = 0$ q.t.p. A distribuição T_f sera denotada como f, e escrevemos simplesmente $\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$, obtendo assim uma identificação entre qualquer função localmente integrável f com o funcional T_f definido no Exemplo 1.16. Esta identificação permite considerar o seguinte $C^k(\Omega) \subset L^p_{Loc}(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, onde $1 \leq k \leq \infty$ e $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.1 Operações com distribuições

A soma e o produto por um escalar de distribuições definem-se da maneira óbvia. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos

$$\langle u_1 + u_2, \varphi\rangle = \langle u_1, \varphi\rangle + \langle u_2, \varphi\rangle$$
$$\langle \alpha u_1, \varphi\rangle = \alpha\langle u_1, \varphi\rangle.$$

Mostrar que $u_1 + u_2$ e αu_1 são distribuições não apresenta grandes dificuldades.

Para definirmos outros tipos de operações que envolvem distribuições precisamos da noção de operador linear contínuo sobre $C_c^\infty(\Omega)$ que definimos a seguir.

Definição 1.18. *$L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ é um operador linear contínuo se é linear e satisfaz o seguinte: dada uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $L\varphi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.*

Exemplo 1.19. $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j} : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ definido por

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad , \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

é um operador linear contínuo.

Exemplo 1.20. Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e defina $L_f : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ da seguinte forma

$$L_f(\varphi) = f\varphi \quad , \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

então L_f é um operador linear contínuo.

Definição 1.21. *(Transposto Formal)*
Sejam $L, L^t : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ operadores lineares contínuos. Dizemos que L^t é o transposto formal de L se

$$\int_\Omega (L\varphi)\psi dx = \int_\Omega \varphi(L^t\psi)dx \quad , \quad \textit{para todo } \varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.7}$$

Exemplo 1.22. Seja $L_f(\varphi) = f\varphi$, com $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então temos

$$\int_\Omega L_f(\varphi)\psi dx = \int_\Omega (f\varphi)\psi dx = \int_\Omega \varphi(f\psi)dx = \int_\Omega \varphi L_f(\psi)dx$$

portanto $L_f^t = L_f$.

Exemplo 1.23. Considere $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, vamos obter o seu transposto formal. Para isto sejam $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega L(\varphi)\psi dx &= \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi = \varphi\psi \mid_{\partial(supp(\varphi))} - \int_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \\ &= \int_\Omega \varphi(-\frac{\partial \psi}{\partial x_j})dx = \int_\Omega \varphi L^t(\psi)dx \end{aligned}$$

portanto obtemos que $L^t = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Exemplo 1.24. Seja $L = a\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, com $a \in C^\infty(\Omega)$. Se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega L(\varphi)\psi dx &= \int_\Omega a\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi dx = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} a\psi dx \\ &= -\int_\Omega \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}(a\psi) dx = \int_\Omega \varphi(-\frac{\partial a}{\partial x_j} - a\frac{\partial}{\partial x_j})\psi dx\end{aligned}$$

portanto segue que $L^t = -\dfrac{\partial a}{\partial x_j} - a\dfrac{\partial}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial a}{\partial x_j} - L$.

Exemplo 1.25. Considere o operador $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega L(\varphi)\psi dx = \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}\psi dx = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} dx$$

portanto $L^t = L$.

Observação 1.26. *Notemos que $\varphi, L\varphi, \psi, L^t\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{Loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e portanto a equação (1.7) pode também ser escrita da forma*

$$\langle L\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, L^t\psi\rangle.$$

Podemos então estender L para um operador $\tilde{L}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou seja, $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ definido por

$$\langle \tilde{L}u, \psi\rangle = \langle u, L^t\psi\rangle \quad , \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemplo 1.27. *(produto por uma função C^∞)*
Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pelo Exemplo 1.22 a "operação multiplicação por f" fica definida pela seguinte expressão

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle, \quad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Consideremos, por exemplo, a distribuição Delta de Dirac centrada em $a \in \mathbb{R}^n$, δ_a e f qualquer função em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que esteja definida em a, então para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle f\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, f\varphi\rangle = f(a)\varphi(a) = \langle f(a)\delta_a, \varphi\rangle.$$

Ou seja, obtemos que $f\delta_a = f(a)\delta_a$.

Exemplo 1.28. *(derivação)*
seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então pelo Exemplo 1.23, podemos definir a operação "derivação" da seguinte forma
$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle, \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$
Por aplicação repetida da expressão acima e indução em $|\alpha|$ vemos que, dados um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então
$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemplo 1.29. Considere $L = a\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ com $a \in C^\infty(\Omega)$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, temos que
$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, (-\frac{\partial a}{\partial x_j})\varphi \rangle - \langle u, a\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle, \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemplo 1.30. *(Mudança de variáveis)*
Seja $\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ um difeomorfismo, isto é Φ, Φ^{-1} são bijeções de classe C^∞ sobre Ω. Definimos $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ da seguinte forma
$$L(\varphi) = \varphi \circ \Phi, \qquad \text{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$
Observe que $supp(\varphi \circ \Phi) = \Phi^{-1}(supp(\varphi))$ e, portanto, $L(\varphi) \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo
$$\begin{aligned}\int_\Omega L(\varphi)\psi dx &= \int_\Omega \varphi(\Phi(x))\psi(x)dx = \int_\Omega \varphi(\Phi(x))\psi(\Phi^{-1} \circ \Phi(x))dx \\ &= \int_\Omega \varphi(y)\psi(\Phi^{-1}(y)) \mid J\Phi^{-1}(y) \mid dy \quad \text{ onde } y = \Phi(x)\end{aligned}$$
portanto $L^t(\psi) =\mid J\Phi^{-1}(y) \mid \psi \circ \Phi^{-1}$.
Logo se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos então
$$\langle u \circ \Phi, \psi \rangle = \langle u, L^t(\psi) \rangle = \langle u, \psi \circ \Phi^{-1} \mid J\Phi^{-1} \mid \rangle.$$

É fácil ver que a regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções se mantém quando um dos fatores é uma distribuição, ou seja se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ se satisfaz que
$$\frac{\partial (fu)}{\partial x_j} = f\frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ para } j = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$
Para a demonstração de este fato consultar [6] pag.22.

A seguir vamos provar um resultado que é muito importante na resolução de EDP´s, pois permite procurar soluções de equações diferenciais em um espaço com muito mais exemplares que o usual.

Teorema 1.31. *Se u e f são funções contínuas definidas em Ω e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido das distribuições. Então u é diferenciável em relação a x_j e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido clássico.*

Demonstração. Suponha primeiro que $supp(u)$ é compacto, então pelo Teorema 1.8 sabemos que $u * \varphi_\epsilon \to u$ uniformemente. Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}(u * \varphi_\epsilon)(x) &= \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\frac{x-y}{\epsilon}) dy \\
&= -\epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(\frac{x-y}{\epsilon}) dy \\
&= \langle \frac{\partial u}{\partial y_j}, \varphi_\epsilon(x - \cdot) \rangle \\
&= \langle f, \varphi_\epsilon(x - \cdot) \rangle \ = \ f * \varphi_\epsilon(x) \to f \ \text{ uniformemente,}
\end{aligned}$$

ou seja, temos o seguinte

$$u * \varphi_\epsilon \to u \ \text{ e } \ \frac{\partial}{\partial x_j}(u * \varphi_\epsilon) \to f \ \text{ uniformemente quando } \epsilon \to 0.$$

Portanto vem que $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido clássico.

Para mostrar o caso geral, seja $x_0 \in \Omega$ e pelo Corolário 1.10 temos que existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, tal que $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0. Logo ψu é contínua, tem suporte compacto e por (1.8) vem que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi u) = \psi \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \psi f + u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \ \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Além disso, $\psi f + u \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$ é contínua, então pelo que foi provado antes temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi u) = \psi f + u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \ \text{ no sentido clássico,}$$

mas como $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0 segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = f(x_0)$$

e como x_0 foi escolhido de forma abitrária em Ω, o teorema está provado. $\square$

1.2.2 Igualdade e suporte de distribuições

Bem como na teoria de funções, na teoria das distribuições também pode-se definir a igualdade entre duas distribuições e o suporte de uma distribuição, mas antes de dar essas definições vamos enunciar e mostrar o seguinte resultado importante.

Teorema 1.32. *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e consideremos abertos $V_1, \ldots, V_l$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} V_j$. Então existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ tais que satisfazem as seguintes condições:*

i) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \leq 1$.

ii) $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) = 1$ *numa vizinhança de* K.

iii) $0 \leq \phi_j \leq 1$ *em* $\mathbb{R}^n$ *para* $j = 1, 2, \ldots, l$.

Demonstração. Para cada $j = 1, 2, \ldots, l$ escolhemos compactos $K_j \subseteq V_j$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j$. Em seguida construímos funções $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l$ tais que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $\psi_j \equiv 1$ numa vizinhança de K_j. Agora defina as seguintes funções

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 & = & \psi_1 \\ \phi_2 & = & \psi_2(1 - \psi_1) \\ \phi_3 & = & \psi_3(1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_l & = & \psi_l(1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{l-1}). \end{array}$$

Assim, usando indução sobre l, obtemos a seguinte igualdade

$$\sum_{j=1}^{l} \phi_j = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_l)$$

Para verificar $i)$ temos que para todo $j = 1, \ldots, l$ se satisfaz que $0 \leq \psi_j \leq 1$, o qual implica que $0 \leq (1 - \psi_j) \leq 1$, para todo $j = 1, \ldots, l$, logo obtemos

$$0 \leq (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \cdots (1 - \psi_l) \leq 1$$

daí segue que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \leq 1 \quad , \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Para verificar $ii)$ seja U_j a vizinhança de K_j tal que $\psi_j \equiv 1$ em U_j onde $j = 1, \ldots, l$, assim $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_j$, ou seja, $\bigcup_{j=1}^{l} U_j$ é uma vizinhança de K, além disso, se

$x \in \bigcup_{j=1}^{l} U_j$, então $x \in U_j$ para algum j, o qual implica que $\psi_j(x) = 1$. Portanto obtemos que

$$\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) = 1 - (1 - \psi_1(x)) \cdots (1 - \psi_j(x)) \cdots (1 - \psi_l(x)) = 1.$$

Finalmente verifiquemos *iii*), sabemos que para todo $j = 1, \ldots, l$ se satisfaz que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $0 \leq (1 - \psi_j) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$, daí segue que

$$0 \leq \psi_j (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \cdots (1 - \psi_{j-1}) \leq 1 \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$0 \leq \phi_j \leq 1 \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \text{ para } j = 1, \ldots, l.$$

□

Definição 1.33. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que u_1 é igual a u_2 em um aberto $U \subset \Omega$ e escrevemos $u_1 = u_2$, quando $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in C_c^\infty(U)$.*

Teorema 1.34. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $K = supp(\varphi) \subset \Omega$. Escrevemos $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} U_x$, onde U_x é tal que $u_1 = u_2$ em U_x, mas $K \subset \Omega = \bigcup_{x \in \Omega} U_x$ e como K é compacto obtemos $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} \quad \text{e} \quad u_1 = u_2 \text{ em } U_{x_j}\ ,\ j = 1, \ldots, m.$$

Agora pelo Teorema 1.32, existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(U_{x_j})$, $j = 1, \ldots, m$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) = 1 \quad \text{em uma vizinhança de } K$$

logo

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) \varphi(x), \qquad \text{para todo } x \in K.$$

Segue-se que

$$\langle u_1, \varphi \rangle = \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{m} \phi_j \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle u_1, \phi_j \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle u_2, \phi_j \varphi \rangle = \left\langle u_2, \sum_{j=1}^{m} \phi_j \varphi \right\rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$$

onde a terceira igualdade se satisfaz porque $\phi_j\varphi \in C_c^\infty(U_{x_j})$. Portanto, obtemos que

$$u_1 = u_2 \text{ em } \Omega.$$

□

Definição 1.35. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos o suporte de u, $supp(u)$, como a intersecção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo. Isto é, se Λ é um conjunto de indices e para cada $\alpha \in \Lambda$, F_α é um subconjunto fechado de Ω, então*

$$supp(u) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \qquad tal\ que\ u = 0\ em\ F_\alpha^c$$

Equivalentemente, $supp(u)$ é o complementar do maior aberto U de Ω tal que $u = 0$ em U.

Observação 1.36. *Decorre diretamente da Definição 1.35, que para mostrar que um determinado ponto $a \in \Omega$ pertence ao $supp(u)$ é suficiente mostrar que para toda bola aberta $B(a,r) \subset \Omega$, existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(B(a,r))$ tal que $\langle u, \varphi\rangle \neq 0$.*

De fato, seja $a \in supp(u)$ e suponhamos que exista uma bola de raio $r > 0$ centrada em a tal que para toda função $\varphi \in C_c^\infty(B(a,r))$ tenhamos $\langle u, \varphi\rangle = 0$. Como $B(a,r)$ é aberto, temos que $F = \Omega \setminus B(a,r)$ é um conjunto fechado. Mas $supp(u)$ é a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais $u = 0$ e $a \notin F$, logo a não pertence à interseção destes fechados; portanto $c \notin supp(u)$, o que é uma contradição.

Definição 1.37. *Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, denotamos com $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto. Ou seja,*

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ supp(u)\ \text{é compacto}\ \}$$

Teorema 1.38. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que satisfaz a seguintes condições:*

i) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$, *para todo* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

ii) $\tilde{u}(\varphi) = 0$ *se* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(\varphi) \cap supp(u) = \emptyset$.

Demonstração. Mostremos a unicidade. Para isto, suponha que existem dois funcionais lineares $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ que satisfazem *i)* e *ii)*.
Como $supp(u) \subset \Omega$ é compacto, então podemos considerar $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ em

uma vizinhança de $supp(u)$.
Agora, seja $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$, temos que

$$\varphi = \varphi + \varphi\psi - \varphi\psi = \varphi\psi + (1-\psi)\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

onde $\varphi_1 = \varphi\psi \in C_c^{\infty}(\Omega)\,,\ \varphi_2 = (1-\psi)\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ e $supp(\varphi_2) \cap supp(u) = \emptyset$. Logo

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\varphi) &= \tilde{u}(\varphi_1) + \tilde{u}(\varphi_2) = \tilde{u}(\varphi_1) = u(\varphi_1) \\ &= \tilde{u}_2(\varphi_1) = \tilde{u}_2(\varphi_1) + \tilde{u}_2(\varphi_2) = \tilde{u}_2(\varphi) \end{aligned}$$

onde na segunda e quinta iguladade usamos a condição $ii)$ e na terceira e quarta igualdade usamos a condição $i)$. Portanto temos que $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$

Para mostrar a existência, defina $\tilde{u} : C^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi_1)$, onde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ é qualquer descomposição de φ com $\varphi_1 \in C_c^{\infty}(\Omega)$, $\varphi_2 \in C^{\infty}(\Omega)$ e $supp(\varphi_2) \cap supp(u) = \emptyset$.
Vejamos se $\tilde{u}$ está bem definida. De fato, se $\varphi = \varphi_1' + \varphi_2' = \varphi_1 + \varphi_2$, então $\varphi_1 - \varphi_1' = \varphi_2' - \varphi_2$, daí segue que

$$supp(\varphi_1 - \varphi_1') = supp(\varphi_2' - \varphi_2) \quad \text{e} \quad supp(\varphi_2' - \varphi_2) \cap supp(u) = \emptyset$$

pois $supp(\varphi_2') \cap supp(u) = \emptyset$ e $supp(\varphi_2) \cap supp(u) = \emptyset$. Assim obtemos que

$$supp(\varphi_1 - \varphi_1') \cap supp(u) = \emptyset$$

o qual implica que

$$u(\varphi_1 - \varphi_1') = 0.$$

Portanto $u(\varphi_1) = u(\varphi_1')$. Ou seja $\tilde{u}$ está bem definida.
Para a linearidade de $\tilde{u}$ sejam $\varphi, \phi \in C^{\infty}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\tilde{u}(\varphi + \alpha\phi) = u(\varphi_1 + \alpha\phi_1) = u(\varphi_1) + \alpha u(\phi_1) = \tilde{u}(\varphi) + \alpha\tilde{u}(\phi).$$

Portanto $\tilde{u}$ é linear.
Finalmente para verificar $i)$ basta tomar a descomposição $\varphi = \varphi + 0$ onde $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.
E para verificar $ii)$ basta tomar a descomposição $\varphi = 0 + \varphi$, onde $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ com $supp(\varphi) \cap supp(u) = \emptyset$. $\square$

Capítulo 2

Teorema de Mergelyan e teorema clássico de Radó

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades básicas sobre funções holomorfas e funções harmônicas e principalmente mostraremos dois teoremas de grande importância para este trabalho, o Teorema de Mergelyam e o Teorema clássico de Radó. Alguns resultados serão somente enunciados, sendo omitidas suas demonstrações, podendo estas ser encontradas em Conway [2] ou Rudin [12].

Vamos começar este capítulo lembrando a definição de diferenciabilidade de uma função de várias variáveis reais.

Definição 2.1. *Suponha que V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, $x \in V$ e T um operador linear sobre $\mathbb{R}^n$.*
Se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que a desigualdade

$$\| F(x+h) - F(x) - Th \| \leq \epsilon \| h \| \tag{2.1}$$

se satisfaz para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\| h \| < \delta$ e $x + h \in V$, dizemos que F é diferenciável em x e definimos

$$F'(x) = T.$$

O operador linear $F'(x)$ é chamado de derivada de F em x. O termo diferencial é freqüentemente usado para $F'(x)$. Portanto pode-se falar também que F tem um diferencial em x, ou que o diferencial de F existe em x.
Dizemos que F é diferenciável em V se F é diferenciável em todo ponto de V.

Antes de falar sobre funções holomorfas, vamos fixar primeiro algumas notações. Se $r > 0$ e a é numero complexo, então

$$D(a, r) = \{z\,;\, |z - a| < r\}$$

é o disco aberto com centro em a e raio r. $\overline{D}(a, r)$ é o fecho de $D(a, r)$ e $D(0, 1)$ denotará o disco unitário.
Além disso, Ω denotará sempre um subconjunto aberto do plano complexo $\mathbb{C}$.

Definição 2.2. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em Ω. Se $z_0 \in \Omega$ e se*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.2}$$

existe, denotamos este limite por $f'(z_0)$ e chamamos de ***derivada*** *de f em z_0.*
Se $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in \Omega$, dizemos que f é ***holomorfa*** *(ou analítica) em Ω. A classe de todas as funções holomorfas em Ω sera denotada por $H(\Omega)$.*

Se na definição anterior nós olhamos a função complexa f como uma transformação que leva Ω em $\mathbb{R}^2$ e assumimos que f tem um diferencial em algum ponto $z_0 \in \Omega$, no sentido da Definição 2.1. Para mais simplicidade, suponha que $z_0 = f(z_0) = 0$. Logo nossa hipótese de diferenciabilidade é equivalente à existência de dois números complexos α e β (as derivadas parciais de f em relação a x e y em $z_0 = 0$) tais que

$$f(z) = \alpha x + \beta y + \eta(z) z \;\text{ com } z = x + iy, \tag{2.3}$$

onde $\eta(z) \to 0$ quando $z \to 0$.

Como $2x = z + \bar{z}$ e $2iy = z - \bar{z}$, a equação (2.3) pode ser reescrita na forma seguinte

$$f(z) = \frac{\alpha - i\beta}{2} z + \frac{\alpha + i\beta}{2} \bar{z} + \eta(z) z. \tag{2.4}$$

Isso motiva a introdução dos seguintes operadores diferenciais

$$\partial = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \;\text{ e }\; \bar{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big). \tag{2.5}$$

Agora a equação (2.4) torna-se

$$\frac{f(z)}{z} = (\partial f)(0) + (\bar{\partial} f)(0) \cdot \frac{\bar{z}}{z} + \eta(z) \;\text{ com } z \neq 0. \tag{2.6}$$

Para z real, $\bar{z}/z = 1$; para z imaginário puro, $\bar{z}/z = -1$. Assim $f(z)/z$ tem limite em 0 se e somente se $(\bar{\partial} f)(0) = 0$, e obtemos a seguinte caracterização das funções holomorfas.

Teorema 2.3. *Suponha que f é uma função complexa definida em Ω a qual tem um diferencial em todo ponto de Ω. Então $f \in H(\Omega)$ se e somente se a equação de Cauchy-Riemann*

$$(\bar{\partial} f)(z) = 0 \tag{2.7}$$

se satisfaz para todo $z \in \Omega$. Nesse caso, temos

$$f'(z) = (\partial f)(z).$$

Se escrevemos $f = u + iv$, onde u e v são funções a valores reais, a equação de Cauchy-Riemann (2.7) é equivalente ao par de equações seguintes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2.8}$$

Estas são as conhecidas equações de Cauchy-Riemann.

Definição 2.4. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa tal que f_{xx} e f_{yy} existem em todo ponto de Ω. O Laplaciano de f é definido por*

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

*Se f é contínua em Ω e se $\Delta f = 0$ em todo ponto de Ω, então dizemos que f é **harmônica** em Ω.*

Vamos enumerar algumas consequências imediatas desta definição

1) Desde que o Laplaciano de uma função real é real (se este existe), é claro que uma função complexa é harmônica em Ω se e somente se sua parte real e imaginaria são harmônicas em Ω.

2) Observe que se f tem derivadas de segunda ordem contínuas, então temos que

$$\Delta f = 4\partial\bar{\partial} f = 4\bar{\partial}\partial f. \tag{2.9}$$

3) Lembremos que f é holomorfa em Ω se e somente se $\bar{\partial} f = 0$ em Ω. Assim para f com derivadas de segunda ordem contínuas temos que, f é harmônica se e somente se ∂f é holomorfa. Em particular toda função holomorfa é harmônica.

Um dos aspectos importantes sobre funções harmônicas é que elas surgem como funções que resolvem um problema de valor em fronteira para funções holomorfas, conhecido como o problema de Dirichlet. Um exemplo é o problema de encontrar uma função contínua em um disco fechado, que assume determinados valores conhecidos na fronteira do disco e é harmônica no interior do disco. O seguinte teorema afirma que o problema de Dirichlet pode-se resolver para o disco unitário.

Teorema 2.5. *Seja $D = D(0,1)$ o disco unitário e suponha que $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então existe uma única função contínua $u : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

a) $u(z) = f(z)$, para todo $z \in \partial D$.

b) u é harmônica em D.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode-se encontar em [2]. □

Vamos definir agora a integral de uma função complexa ao longo de uma curva. Para isto precisamos das seguintes definições.

Definição 2.6. *Uma curva no plano complexo $\mathbb{C}$ é uma função contínua*

$$\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Se $t \in [a,b]$, indicamos o ponto $\gamma(t) \in \mathbb{C}$ por

$$\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t).$$

Denotamos por γ^* o conjunto $\{\gamma(t)\,;\, t \in [a,b]\}$ que é chamado traço de γ.

Observação 2.7.

1) As funções reais $x(t)$ e $y(t)$, componentes da curva γ, são contínuas.

2) Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ da curva γ são chamados, respectivamente, ponto inicial e final da curva ou simplesmente extremos da curva. A curva γ é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Uma curva fechada γ é simples se $a \le t < t' \le b$ e $\gamma(t) = \gamma(t')$ implica $t = a$ e $t' = b$.

Definição 2.8. *Uma curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamada de suave se $\gamma'(t)$ existe e é contínua para todo $t \in [a,b]$. Além disso, γ é suave por partes se existe uma partição de $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que γ é suave em cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \le j \le n$.*

Dizer que a função $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tem derivada $\gamma'(t)$ para todo ponto $t \in [a, b]$ significa que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t)$$

existe para $a < t < b$ e que os limites laterais à direita e à esquerda existem para $t = a$ e $t = b$, respectivamente.

Definição 2.9. *Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma curva suave por partes e $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, então a integral de f ao longo de γ é dada por*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{2.10}$$

Pode-se mostrar que a integral (2.10) é independente da troca de parâmetro.

Um caso especial é dado pela curva $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = a + re^{it}$$

onde a é um número complexo e $r > 0$. Esta curva é chamada o círculo positivamente orientado com centro em a e raio r, logo a integral (2.10) fica da seguinte forma

$$\int_\gamma f(z)dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}dt$$

além disso, o comprimento de γ é $2\pi r$.

Vamos enunciar sem demostrar a regra de Leibniz.

Teorema 2.10. *Seja $\varphi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e defina $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ por*

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t)ds.$$

Então g é contínua. Além disso, se $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ existe e for contínua, então g será continuamente diferenciável e

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t)ds.$$

Demonstração. Para a demonstração deste teorema ver [2]. □

Este resultado pode ser usado para mostrar a igualdade seguinte

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi \quad \text{se} \quad |z| < 1. \tag{2.11}$$

De fato, seja $\varphi(s,t) = \dfrac{e^{is}}{e^{is} - tz}$ para $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 1$. Como $|z| < 1$, temos que φ é continuamente diferenciável. Logo usando o Teorema 2.10 vem que

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t) ds = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - tz} ds$$

é continuamente diferenciável. Além disso, temos

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,0) ds = 2\pi.$$

Por outro lado $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \dfrac{ze^{is}}{(e^{is} - tz)^2}$ de onde obtemos o seguinte

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) ds = \int_0^{2\pi} \frac{ze^{is}}{(e^{is} - tz)^2} ds;$$

mas para t fixado, temos que a função $\phi(s) = iz(e^{is} - tz)^{-1}$ é diferenciável e $\phi'(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)$. Portanto

$$g'(t) = \phi(2\pi) - \phi(0) = 0$$

o qual implica que g é constante. Como g é constante e $g(0) = 2\pi$, temos que $g(1) = 2\pi$ e fica mostrada a igualdade (2.11).

Usando o Teorema 2.10 e a igualdade (2.11) vamos mostrar a seguinte versão da fórmula integral de Cauchy.

Proposição 2.11. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e suponha $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$ com $r > 0$. Se $\gamma(s) = a + re^{is}$, $0 \leq s \leq 2\pi$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \textit{para todo } z \in D(a,r). \tag{2.12}$$

Demonstração. Cosiderando $\Omega_1 = \{\frac{1}{r}(z - a)\,;\, z \in \Omega\}$ e a função $g : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = f(a + rz)$, podemos assumir sem perda de generalidade que $a = 0$ e $r = 1$. Ou seja, podemos assumir que $\bar{D}(0,1) \subset \Omega$.

Para z fixo com $|z| < 1$ devemos mostrar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})}{e^{is}-z}e^{is}ds$$

ou equivalentemente

$$\int_0^{2\pi} \Big[\frac{e^{is}f(e^{is})}{e^{is}-z} - f(z)\Big]ds = 0$$

De fato, para $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq s \leq 2\pi$ considere a seguinte função

$$\varphi(s,t) = \frac{e^{is}f((1-t)z + te^{is})}{e^{is}-z} - f(z).$$

Como $\mid (1-t)z + te^{is} \mid = \mid z + t(e^{is}-z) \mid \leq 1$, temos que φ está bem definida e é continuamente diferenciável. Logo aplicando o Teorema 2.10 obtemos que $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)ds$ é continuamente diferenciável e

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)ds = \int_0^{2\pi} e^{is}f'((1-t)z + te^{is})ds.$$

Além disso,

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,0)ds \;=\; \int_0^{2\pi} \Big[\frac{e^{is}f(z)}{e^{is}-z} - f(z)\Big]ds$$

$$= f(z)\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z}ds - 2\pi f(z) \underbrace{=}_{por 2.11} 0$$

Por outro lado, para $0 < t \leq 1$, temos que a função $\phi(s) = -it^{-1}f((1-t)z + te^{is})$ é diferenciável e $\phi'(s) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)$, logo temos

$$g'(t) = \phi(2\pi) - \phi(0) = 0 \qquad \text{para } 0 < t \leq 1$$

e como g' é contínua, segue que $g'(0) = 0$. Portanto g é constante. Logo vem que

$$0 = g(1) = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{e^{is}f(e^{is})}{e^{is}-z} - f(z)\Big]ds$$

o qual implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}f(e^{is})}{e^{is}-z}ds.$$

$\square$

Observação 2.12. *Se fazemos a substituição* $w = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ *na fórmula integral de Cauchy (2.12), obtemos que as funções holomorfas satisfazem a seguinte igualdade*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{is})ds. \tag{2.13}$$

Esta igualdade é chamada de ***propriedade do valor médio****.*
As partes reais e imaginárias da f *satisfazem também a mesma propriedade.*

Um outro resultado importante na teoria das funções holomorfas é o chamado Teorema do módulo máximo, que enunciamos a continuação.

Teorema 2.13. *(do módulo máximo) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *aberto e conexo e* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfa. Suponha que existe* $a \in \Omega$ *tal que* $|f(a)| \geq |f(z)|$ *para todo* $z \in \Omega$*, então* f *é constante.*

Demonstração. Para a demonstração deste teorema pode-se ver [2] ou [12]. □

Observação 2.14.

1) *O Teorema do módulo máximo afirma que o módulo de uma função holomorfa não constante, não tem máximos relativos.*

2) *Suponha que a função* f *é holomorfa em* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, onde* Ω *é aberto, conexo e limitado, e contínua em* $\bar{\Omega}$*. Então a função* $|f|$ *assume seu máximo valor em algum ponto de* $\bar{\Omega}$*. O Teorema do módulo máximo pode ser usado então para afirmar que este máximo é sempre assumido sobre a fronteira de* Ω *(*$\partial\Omega$*).*

2.1 O Teorema de Mergelyan

Seja K um conjunto compacto no plano complexo e $\overset{o}{K}$ o interior de K, denotemos por $P(K)$ o conjunto de todas as funções sobre K as quais são limites uniformes de polinômios em z. Uma questão seria: quais funções pertencem a $P(K)$?.
Duas condições necessárias vêm à mente imediatamente: se $f \in P(K)$, então $f \in \mathcal{C}(K)$ e $f \in H(\overset{o}{K})$. A questão é se estas condições necessárias também são suficientes. A resposta é negativa sempre que K separe o plano, ou seja, quando o complementar de K é não conexo. Por outro lado se K é um intervalo no eixo real (em tal caso $\overset{o}{K} = \emptyset$), o Teorema de aproximação de Weierstrass afirma que $P(K) = \mathcal{C}(K)$, logo a resposta é positiva se K é um intervalo.

O Teorema de Runge também aponta nessa direção, pois afirma que para conjuntos compactos K que não separam o plano: $P(K)$ contém pelo menos todas aquelas funções $f \in \mathcal{C}(K)$ que têm extensão holomorfa para algum conjunto aberto Ω contendo K.
Agora veremos um outro teorema chamado de Teorema de Mergelyan o qual afirma sem qualquer hipótese supérflua que a condição necessária mencionada acima também é suficiente se K não separa o plano.

Antes de enunciar e mostrar o Teorema de Mergelyan, vamos dar alguns resultados que serão usados na demonstração.

Lema 2.15. *Suponha que D é um disco aberto de raio $r > 0$, $E \subset D$, E é compacto e conexo, $\Omega = S^2 \setminus E$ é conexo e o diâmetro de E é ao menos r. Então existe uma função $g \in H(\Omega)$ e uma constante b com a seguinte propiedade: se*

$$Q(\zeta, z) = g(z) + (\zeta - b)g^2(z) \tag{2.14}$$

as desigualdades

$$\mid Q(\zeta, z) \mid < \frac{100}{r} \tag{2.15}$$

$$\mid Q(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} \mid < \frac{1,000r^2}{\mid z - \zeta \mid^3} \tag{2.16}$$

são satisfeitas, para todo $z \in \Omega$ e para todo $\zeta \in D$.

Demonstração. Para a demonstração consulte [12]. □

Se $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ é o operador de Cauchy-Riemann, temos o seguinte lema

Lema 2.16. *Suponha que $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. Então a seguinte fórmula se satisfaz*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad , \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Demonstração. Considere $\varphi(r, \theta) = f(z + re^{i\theta})$, com $r > 0$ e θ real. O operador $\overline{\partial}$ em coordenadas polares é dado por

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

Se escrevemos $\zeta = z + re^{i\theta}$, temos que

$$(\overline{\partial} f)(\zeta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r, \theta) + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\varphi(r, \theta)\right)$$

Por outro lado, observe que, para cada $r > 0$ a função φ é periódica em θ de período 2π, ou seja, $\varphi(r,\theta) = \varphi(r, \theta + 2\pi)$. Portanto, a integral de $\partial\varphi/\partial\theta$ é zero em $[0, 2\pi]$.
Logo temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta &= \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_\epsilon^\infty\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})}{z + re^{i\theta} - z} r d\theta dr \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_\epsilon^\infty\int_0^{2\pi} (\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) d\theta dr \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial r} dr d\theta \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big[\varphi(r,\theta)\big]_\epsilon^\infty d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon,\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0}\varphi(\epsilon,\theta) d\theta \\
&= f(z),
\end{aligned}$$

A última igualdade é satisfeita porque $\varphi(\epsilon,\theta)$ converge uniformemente a $f(z)$ quando $\epsilon \to 0$ e $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1$. Portanto, obtemos a igualdade desejada

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

□

Teorema 2.17. *(da extensão de Tietze)*
Suponha que K é um subconjunto compacto de um espaço Hausdorff localmente compacto X e $f \in C(K)$, então existe $F \in C_c^0(X)$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in K$.

Demonstração. Para a demonstração consulte [12]. □

Teorema 2.18. *(de Mergelyan)*
Se K é um conjunto compacto no plano com o seu complementar conexo, se f é uma função complexa contínua sobre K a qual é holomorfa no interior de K, e se $\epsilon > 0$, então existe um polinômio P tal que $\mid f(z) - P(z) \mid < \epsilon$, para todo $z \in K$.

Demonstração. Como $f \in C(K)$, com $K \subset \mathbb{C}$ compacto, $\mathbb{C}$ é Hausdorff e localmente compacto então pelo Teorema da extensão de Tietze, existe uma função $F \in C_c(\mathbb{C})$ tal que $F(x) = f(x)$, para todo $x \in K$. Vamos fixar uma tal extensão e denotaremos ela ainda por f.

Para qualquer $\delta > 0$, definimos

$$\omega(\delta) = \sup\{\mid f(z_2) - f(z_1) \mid \; ; \; \mid z_2 - z_1 \mid \leq \delta\}. \tag{2.17}$$

Como f é uniformemente contínua, temos que

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{2.18}$$

Daqui em diante, δ será fixado. Vamos provar que existe um polinômio P tal que

$$\mid f(z) - P(z) \mid < 10000\omega(\delta) \quad , \qquad \text{para } z \in K.$$

e usando (2.18) o teorema ficara provado.

Primeiro construiremos uma função $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ tal que para todo z satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mid f(z) - \Phi(z) \mid \leq \omega(\delta) \tag{2.19}$$

$$\mid (\overline{\partial}\Phi)(z) \mid < \frac{2\omega(\delta)}{\delta} \tag{2.20}$$

e

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int\!\!\int_X \frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \qquad \text{com } \; \zeta = \xi + i\eta. \tag{2.21}$$

onde $X = \{z \in supp(\Phi) \; ; \; d(z, K^c) \leq \delta\}$.
De fato, considere a seguinte função

$$a(r) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \dfrac{r^2}{\delta^2}\right)^2 & \text{se} \quad 0 \leq r \leq \delta \\ \\ 0 & \text{se} \quad r > \delta \end{cases}$$

cuja derivada é dada por

$$a'(r) = \begin{cases} -\dfrac{12r}{\pi\delta^4}\left(1 - \dfrac{r^2}{\delta^2}\right) & \text{se} \quad 0 \leq r \leq \delta \\ \\ 0 & \text{se} \quad r > \delta \end{cases}$$

Então $a \in C_c^1(\mathbb{R})$, pois a, a' são contínuas e, além disso, $supp(a) = [0, \delta]$ que é compacto.

Logo, para todo $z \in \mathbb{R}^2$ definamos

$$A(z) = a(\mid z \mid) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \dfrac{\mid z \mid^2}{\delta^2}\right)^2 & \text{se} \quad 0 \leq \mid z \mid \leq \delta \\ \\ 0 & \text{se} \quad \mid z \mid > \delta \end{cases}$$

e temos que $A \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$.
Vamos fazer as seguintes afirmações

$$\iint_{\mathbb{R}^2} A = 1 \tag{2.22}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\partial} A = 0 \tag{2.23}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mid \overline{\partial} A \mid = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta} \tag{2.24}$$

Para mostrar estas afirmações trabalharemos em coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 r dr d\theta = \frac{3}{\pi\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\left(r - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{r^5}{\delta^4}\right) dr d\theta \\ &= \frac{3}{\pi\delta^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2\delta^2} + \frac{r^6}{6\delta^4}\right)\Bigg|_0^{\delta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{\partial} A &= \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^{i\theta}\left[\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right] r d\theta dr = \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^{i\theta}\left[-\frac{12}{\pi\delta^4}(r - \frac{r^3}{\delta^2})\right] r d\theta dr \\ &= -\frac{6}{\pi\delta^4}\int_0^{\delta}(r^2 - \frac{r^4}{\delta^2}) dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = -\frac{6}{i\pi\delta^4}\int_0^{\delta}(r^2 - \frac{r^4}{\delta^2})\left[e^{2\pi i} - 1\right] dr = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \mid \overline{\partial} A \mid &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} \frac{6}{\pi\delta^4}(r - \frac{r^3}{\delta^2}) r dr d\theta = \frac{6}{\pi\delta^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}(r^2 - \frac{r^4}{\delta^2}) dr d\theta \\ &= \frac{6}{\pi\delta^4}\int_0^{2\pi}(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5\delta^2}) \mid_0^{\delta} d\theta = \frac{12}{15\pi\delta}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta}. \end{aligned}$$

Defina agora a seguinte função

$$\Phi(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta)A(\zeta)d\xi d\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} A(z-\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta = (f * A)(z). \tag{2.25}$$

Onde $\zeta = \xi + i\eta$. Como f e A têm suporte compacto, então Φ também tem suporte compacto, pois, $supp(\Phi) \subset supp(f) + supp(A)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(z) - f(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta)A(\zeta)d\xi d\eta - f(z) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta)A(\zeta)d\xi d\eta - \int\int_{\mathbb{R}^2} f(z)A(\zeta)d\xi d\eta \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} [f(z-\zeta) - f(z)]A(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}$$

e como $A(\zeta) = 0$ quando $\mid \zeta \mid > \delta$, então segue que

$$\begin{aligned}
\mid \Phi(z) - f(z) \mid &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \mid f(z-\zeta) - f(z) \mid\mid A(\zeta) \mid d\xi d\eta \\
&\leq \sup_{|\zeta|\leq\delta}\{\mid f(z-\zeta) - f(z) \mid\} \iint_{\mathbb{R}^2} A(\zeta)d\xi d\eta \\
&= \omega(\delta).
\end{aligned}$$

Isto mostra a propriedade (2.19).
Mostremos a propriedade (2.20). Para isto como $A \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, usando o Teorema da convergência dominada temos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (f * \frac{\partial A}{\partial x}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (f * \frac{\partial A}{\partial y}) \tag{2.26}$$

logo

$$\begin{aligned}
(\overline{\partial}\Phi)(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi(z)}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi(z)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[(f * \frac{\partial A}{\partial x})(z) + i(f * \frac{\partial A}{\partial y})(z)\right] \\
&= \left[f * \frac{1}{2}(\frac{\partial A}{\partial x} + i\frac{\partial A}{\partial y})(z)\right] = (f * (\overline{\partial}A))(z) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta)(\overline{\partial}A)(\zeta)d\xi d\eta \underbrace{=}_{por\ (2.23)} \iint_{\mathbb{R}^2} [f(z-\zeta) - f(z)](\overline{\partial}A)(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}$$

daí temos o seguinte

$$\begin{aligned} |\, (\overline{\partial}\Phi)(z)\, | &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |\, f(z-\zeta)-f(z)\, ||\, (\overline{\partial}A)(\zeta)\, |\, d\xi d\eta \\ &\leq \sup_{|\zeta|\leq\delta}\{|\, f(z-\zeta)-f(z)\, |\} \iint_{\mathbb{R}^2} |\, (\overline{\partial}A)(\zeta)\, |\, d\xi d\eta \end{aligned}$$

e usando (2.17) e (2.24) obtemos que

$$|\, (\overline{\partial}\Phi)(z)\, |\leq \frac{2\omega(\delta)}{\delta}.$$

Para mostrar a propriedade (2.21), observe que de (2.26) segue que Φ_x e Φ_y são contínuas. Logo $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. Então usando o Lema 2.16 temos que

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \text{com } \zeta = \xi + i\eta.$$

Portanto, somente falta mostrar que $\overline{\partial}\Phi = 0$ em G, onde $G = \{z \in K \ ; \ d(z, K^c) > \delta\}$. Para isto vamos mostrar que

$$\Phi(z) = f(z), \quad \forall z \in G.$$

De fato, note que $\overline{\partial} f = 0$ em G, pois f é holomorfa em G. Agora se $z \in G$, então $z-\zeta \in \overset{o}{K}$ para todo ζ com $|\, \zeta\, |< \delta$; logo, aplicando a propriedade do valor médio para f, obtemos que

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(z-\zeta)A(\zeta)d\xi d\eta = \int_0^\delta a(r)rdr \int_0^{2\pi} f(z-re^{i\theta})d\theta \\ &= 2\pi f(z)\int_0^\delta a(r)rdr = f(z)\iint_{\mathbb{R}^2} A(\zeta)d\xi d\eta = f(z). \end{aligned}$$

Portanto, fica mostrada a propriedade (2.21).

Pela mesma definição de X temos que X é compacto e pode ser coberto por uma quantidade finita de discos abertos $D_1, \ldots, D_n$, de raio 2δ, cujos centros não estão em K. Como $S^2 \setminus K$ é conexo segue que, o centro de cada D_j pode ser unido com ∞ por um caminho poligonal em $S^2 \setminus K$. Logo cada D_j contém um conjunto compacto e conexo E_j de diâmetro pelo menos 2δ, de modo que $S^2 \setminus K$ é conexo e $K \cap E_j = \emptyset$.

Agora aplicando o Lema 2.15, com $r = 2\delta$, existem funções $g_j \in H(S^2 \backslash E_j)$ e constantes

b_j tal que para todo $z \notin E_j$ e para todo $\zeta \in D_j$, se satisfazem as seguintes desigualdades

$$| Q_j(\zeta, z) | < \frac{50}{\delta} \tag{2.27}$$

$$| Q_j(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} | < \frac{4,000\delta^2}{| z - \zeta |^3} \tag{2.28}$$

onde

$$Q_j(\zeta, z) = g_j(z) + (\zeta - b_j)g_j^2(z). \tag{2.29}$$

Seja

$$\Omega = (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)^c = \bigcap_{j=1}^{n} (S^2 \setminus E_j),$$

então Ω é aberto e $K \subset \Omega$.
Considere agora

$$X_1 = X \cap D_1 \quad \text{e} \quad X_j = (X \cap D_j) \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{j-1}), \quad \text{para } 2 \leq j \leq n,$$

observe que $X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j$. Defina

$$R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z) \quad , \quad \text{para } \zeta \in X_j \ , \ z \in \Omega. \tag{2.30}$$

e

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \iint_X (\overline{\partial}\Phi)(\zeta) R(\zeta, z) d\xi d\eta \quad , \quad \text{para } z \in \Omega. \tag{2.31}$$

Como

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \iint_{X_j} (\overline{\partial}\Phi)(\zeta) Q_j(\zeta, z) d\xi d\eta,$$

usando (2.29) obtemos que

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \iint_{X_j} (\overline{\partial}\Phi)(\zeta)[g_j(z) + (\zeta - b_j)g_j^2(z)] d\xi d\eta. \tag{2.32}$$

Ou seja, F é uma combinação linear finita das funções g_j e g_j^2. Portanto, $F \in H(\Omega)$.

Por outro lado, de (2.21) e (2.31) temos que

$$| F(z) - \Phi(z) | \leq \frac{1}{\pi} \iint_X | (\overline{\partial}\Phi)(\zeta) || R(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} | d\xi d\eta$$

e usando a deisgualdade (2.20) obtemos o seguinte

$$| F(z) - \Phi(z) |< \frac{2\omega(\delta)}{\delta} \iint_X | R(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} | d\xi d\eta, \quad z \in \Omega. \tag{2.33}$$

Observe que as desigualdades (2.27) e (2.28) são válidas com R no lugar de Q_j se $\zeta \in X$ e $z \in \Omega$; pois se $\zeta \in X$, então $\zeta \in X_j$, para algum j, e assim $R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z)$ para todo $z \in \Omega$.

Agora fixe $z \in \Omega$ e coloque $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$, vamos estimar a integral na equação (2.33) em duas partes.

Se $\rho < 4\delta$, neste caso usamos (2.27), então

$$\begin{aligned}
\iint_X | R(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} | d\xi d\eta &\leq \iint_X \Big(| R(\zeta, z) | + \frac{1}{| z - \zeta |}\Big) d\xi d\eta \\
&< \iint_X \Big(\frac{50}{\delta} + \frac{1}{| z - \zeta |}\Big) d\xi d\eta \\
&= \int_0^{4\delta} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{50}{\delta} + \frac{1}{\rho}\Big) \rho d\theta d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{4\delta} \Big(\frac{50\rho}{\delta} + 1\Big) d\rho \\
&= 808\pi\delta.
\end{aligned}$$

Se $\rho \geq 4\delta$, neste caso usamos (2.28), então

$$\begin{aligned}
\iint_X | R(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} | d\xi d\eta \;&<\; \iint_X \frac{4000\delta^2}{| z - \zeta |^3} d\xi d\eta \;=\; \int_{4\delta}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{4000\delta^2}{\rho^3} \rho d\theta d\rho \\
&=\; 2\pi \int_{4\delta}^{\infty} \frac{4000\delta^2}{\rho^2} d\rho \;=\; 2000\pi\delta.
\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\begin{aligned}
| F(z) - \Phi(z) | \;&<\; \frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta} \iint_X | R(\zeta, z) - \frac{1}{z - \zeta} | d\xi d\eta < \frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta}(808\pi\delta + 2000\pi\delta) \\
&=\; 5616\omega(\delta) \;<\; 6000\omega(\delta).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$| F(z) - \Phi(z) |< 6000\omega(\delta), \quad z \in \Omega. \tag{2.34}$$

Como $F \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$ e $S^2 \backslash K$ é conexo, pelo Teorema de Runge obtemos um polinômio

P tal que

$$| F(z) - P(z) | < \omega(\delta), \quad z \in K. \tag{2.35}$$

Portanto, para $z \in K$, usando (2.19), (2.34) e (2.35) temos que

$$\begin{aligned} | f(z) - P(z) | &\leq | f(z) - \Phi(z) | + | \Phi(z) - F(z) | + | F(z) - P(z) | \\ &< 6002\omega(\delta) \, < \, 10000\omega(\delta). \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do teorema. □

2.2 O Teorema clássico de Radó

Agora vamos enunciar e mostrar o Teorema clássico de Radó que será usado no capítulo 5 de nosso trabalho. A demonstração é baseada no trabalho de Kaufman [8], mas pode-se consultar uma outra demonstração em [12].

Teorema 2.19. *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\overline{D}(0,1))$ e é holomorfa em U, onde*

$$U = \{z \in D(0,1) \ ; \ f(z) \neq 0\}.$$

Então f é holomorfa em $D(0,1)$.

Demonstração. Vamos fazer a prova deste teorema em 4 passos.
Primeiro passo. Suponha que $g \in \mathcal{C}(\overline{U})$ e holomorfa em U, então mostraremos que para cada $a \in U$ se satisfaz a seguinte desigualdade

$$|g(a)| \leq \sup\{|g(z)| \ ; \ z \in \partial U \ , \ |z| = 1\} \tag{2.36}$$

De fato, observe que $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ onde cada U_k é componente conexa de U e além disso, $\partial U_k \subset \partial U$.
Também temos que para cada $n = 1, 2, ...,$ $g^n f$ é holomorfa em U e, portanto, em cada uma da suas componentes conexas. Então pelo princípio do máximo para cada $a \in U$ temos que

$$|g^n(a) f(a)| \leq \sup\{|g^n(z) f(z)| \ ; \ z \in \partial U_k\} \leq \sup\{|g^n(z) f(z)| \ ; \ z \in \partial U\}. \tag{2.37}$$

Por outro lado, se $|z| < 1$ e $z \in \partial U$, então existe uma sequência $z_\epsilon \subset D(0,1) - U$ tal que $z_\epsilon \to z$ e como f é contínua temos que $f(z_\epsilon) \to f(z)$. Mas $f(z_\epsilon) = 0$, para todo $\epsilon > 0$, então segue que $f(z) = 0$. Logo, isto e (2.37) implicam

$$|g^n(a)f(a)| \leq \sup\{|g^n(z)f(z)| \; ; \; z \in \partial U \; , \; |z| = 1\}. \tag{2.38}$$

De (2.38) temos que

$$|g(a)|^n |f(a)| \leq (\sup\{|g(z)| \; ; \; z \in \partial U \; , \; |z| = 1\})^n \cdot \sup\{|f(z)| \; , \; |z| = 1\},$$

extraindo a n-ésima raiz obtemos

$$|g(a)||f(a)|^{\frac{1}{n}} \leq \sup\{|g(z)| \; ; \; z \in \partial U \; , \; |z| = 1\}(\sup\{|f(z)| \; , \; |z| = 1\})^{\frac{1}{n}},$$

fazendo $n \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos (2.36).
Segundo passo. Vamos mostrar que U é denso em $D(0,1)$. Para isto suponhamos por contradição que U não é denso em $D(0,1)$.
Seja $z_0 \in \partial U \cap D(0,1) \subset D(0,1) \cap \overline{U}$, logo existe $\{w_n\} \subset D(0,1) - (D(0,1) \cap \overline{U})$ tal que $w_n \to z_0$. Em seguida considere a sequência $\{g_n\}$, onde

$$g_n(z) = \frac{1}{z - w_n} \; , \; z \in \overline{U}$$

temos que $g_n \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap H(U)$ e pelo primeiro passo temos que

$$|g_n(a)| \leq \sup\{|g_n(z)| \; ; \; z \in \partial U \; , \; |z| = 1\}, \quad \forall a \in U. \tag{2.39}$$

Por outro lado se $g(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, temos que $g_n(z)$ converge para $g(z)$, para todo $z \in \overset{o}{U}$, e afirmamos que $\{g_n\}$ converge uniformemente para g em $\partial U \cap S(0,1)$.
De fato, dado $\epsilon > 0$, se $R = 1 - |z_0|$, existe n_0 tal que $\forall n > n_0$ $|z - w_n| > R$, $\forall z \in \partial U \cap S(0,1)$, uma vez que $|z - w_n| \to |z - z_0|$ uniformemente em $\mathbb{C}$. Daí temos que se $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= |\frac{1}{z - w_n} - \frac{1}{z - z_0}| \\ &= \frac{|w_n - z_0|}{|z - w_n||z - z_0|} \\ &< \frac{|w_n - z_0|}{R^2} \\ &< \frac{\epsilon}{R^2}, \qquad \qquad \forall z \in \partial U \cap S(0,1). \end{aligned}$$

Deste fato e fazendo $n \to \infty$ em (2.39), obtemos

$$|g(a)| \leq \sup\{|g(z)| \ ; \ z \in \partial U \ , \ |z| = 1\} \ , \ \forall a \in U$$

o qual é um absurdo pois g não é limitada em U.
Terceiro passo. Neste passo vamos mostrar que f é harmônica em $D(0,1)$. Para isto provaremos que Ref é harmônica em $D(0,1)$, e de maneira similar se mostra para Imf.
Seja u solução do problema de Dirichlet seguinte

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em } D(0,1) \\ u &= Ref \quad \text{em } S(0,1) \end{cases}$$

e considere a função H holomorfa em $D(0,1)$ tal que

$$H = u + iImH.$$

Logo

$$H = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k(0)}{k!} z^k.$$

Assim, se fazemos $p_n(z) = S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{H^k(0)}{k!} z^k$ temos que, existe uma sequência $\{p_n\}$ de polinômios tais que $Re(p_n - f) \to 0$ uniformemente em $S(0,1)$.
Se agora, $|Re(p_n(z) - f(z))| < \frac{1}{n}$, para $z \in S(0,1)$, então

$$\begin{aligned} |\exp[p_n(z) - f(z)]| &= \exp\{Re[p_n(z) - f(z)]\} \\ &\leq \exp|Re[p_n(z) - f(z)]| \\ &< \exp\tfrac{1}{n}, \qquad z \in S(0,1). \end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$|\exp[f(z) - p_n(z)]| < \exp\frac{1}{n}, \quad z \in S(0,1).$$

Resumindo para todo $z \in S(0,1)$ se satisfaz o seguinte:

$$|\exp[p_n(z) - f(z)]| < \exp\frac{1}{n} \ \text{ e } \ |\exp[f(z) - p_n(z)]| < \exp\frac{1}{n}. \tag{2.40}$$

Por outro lado, aplicando (2.36) para $\exp[p_n(z)-f(z)]$ e $\exp[f(z)-p_n(z)]$ e usando (2.40) obtemos para $a \in U$ que

$$|\exp[p_n(a)-f(a)]| \leq \sup\{|\exp[p_n(z)-f(z)]| \; ; \; z \in \partial U \; , \; z \in S(0,1)\} < \exp\frac{1}{n}$$

$$|\exp[f(a)-p_n(a)]| \leq \sup\{|\exp[f(z)-p_n(z)]| \; ; \; z \in \partial U \; , \; z \in S(0,1)\} < \exp\frac{1}{n}.$$

Das desigualdades anteriores e pela densidade de U em $D(0,1)$ concluímos que

$$|\exp[p_n(z)-f(z)]| < \exp\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |\exp[f(z)-p_n(z)]| < \exp\frac{1}{n} \; , \; \forall z \in D(0,1). \qquad (2.41)$$

Temos de (2.41) que

$$|Re(f(z)-p_n(z))| < \frac{1}{n} \; , \; \forall z \in D(0,1).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos que $Re(p_n) \longrightarrow Ref(f)$ uniformemente em $D(0,1)$ e como o limite uniforme de funçoes harmônicas é uma função harmônica, vem que $Re(f)$ é harmônica.

Quarto passo. Como f é harmônica em $D(0,1)$, temos que $\overline{\partial} f$ é harmônica em $D(0,1)$ e, por hipótese, zero no subconjunto denso U. portanto, f é holomorfa em $D(0,1)$. $\square$

Capítulo

3

Estruturas involutivas e Estruturas localmente integráveis

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos básicos da teoria de estruturas involutivas e localmente integráveis, bem como algumas de suas propriedades. Além disso, iremos mostrar o Teorema de geradores locais o qual nos permitirá construir coordenadas locais e geradores locais adequados para o subfibrado vetorial T' e estudaremos um dos resultados mais importantes nesta teoria o Teorema de aproximação de Baouendi-Treves. O leitor deverá possuir conhecimentos em análise real, análise complexa em uma variável, conhecimentos básicos em análise complexa em várias variáveis e equações diferenciais parciais lineares. Nossas principais referências para este capítulo são [1] e [3].

Nas duas primeiras seções vamos lembrar algumas noções padron tais como variedades diferenciáveis, campos de vetores, formas diferenciais, etc., com o objetivo principal de estabelecer a base para a apresentação e para estabelecer as notações.

3.1 Campos vetoriais complexos sobre variedades

Definição 3.1. *Seja Ω um espaço topológico Hausdorff com base enumerável. Uma estrutura defierenciável em Ω de dimensão N é uma coleção de pares*

$$\mathfrak{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \; ; \; \alpha \in \Lambda\}$$

onde cada $U_\alpha \subset \Omega$ é aberto e $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre o aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^N$.
Além disso, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas

i) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \Omega$.

ii) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *é difeomorfismo* C^∞*, para todo* $\alpha, \beta \in \Lambda$.

iii) Se $V \subset \Omega$ *é aberto,* $V \neq \emptyset$ *e* $\psi : V \longrightarrow \psi(V)$ *é um homeomorfismo tal que, para todo* $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{F}$ *com* $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$*, temos que* $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \longrightarrow \psi(U_\alpha \cap V)$ *é um difeomorfismo* C^∞*, então* $(V, \psi) \in \mathfrak{F}$.

Observação 3.2. *Dada* $\mathfrak{F}^* = \{(V_\beta, \psi_\beta)\ ;\ \beta \in \mathfrak{B}\}$ *satisfazendo i) e ii), então existe uma única estrutura diferenciável* $\mathfrak{F}$ *em* Ω *tal que* $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$.

De fato, defina $\mathfrak{F} = \{(U, \varphi)\ ;\ U \subset \Omega$ aberto , $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ homeomorfismo e $\varphi \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\beta \cap U) \longrightarrow \varphi(U_\beta \cap U)$ é difeomorfismo $C^\infty\ \forall\ (U_\beta, \psi_\beta) \in \mathfrak{F}^*\}$.

Notemos que $\mathfrak{F}$ satisfaz $i)$ e $iii)$. Vejamos se $\mathfrak{F}$ satisfaz $ii)$, para isto, sejam (U_1, φ_1), $(U_2, \varphi_2) \in \mathfrak{F}$ tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Como $\bigcup_{\beta\in\mathfrak{B}} V_\beta = \Omega$, então dado $p \in U_1 \cap U_2$ existe $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathfrak{F}^*$ tal que $p \in V_\beta$ e, portanto,

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_2 \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ \varphi_1^{-1}) : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \in U_2) \text{ é difeomorfismo } C^\infty,$$

pois por construção da $\mathfrak{F}$ temos que $\varphi_2 \circ \psi_\beta^{-1}$ e $\psi_\beta \circ \varphi_1^{-1}$ são difeomorfismos C^∞.

Definição 3.3. *Uma variedade diferenciável de dimensão* N *é um par* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *onde* Ω *é espaço topológico Hausdorff com base enumerável e* $\mathfrak{F}$ *é uma estrutura diferenciável de dimensão* N *sobre* Ω.

Exemplo 3.4. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$ e considere $\mathfrak{F}^* = \{(\mathbb{R}^N, Id)\}$ temos que $(\Omega, \mathfrak{F}^*)$ satisfaz $i)$ e $ii)$ pela observação anterior vem que se

$$\mathfrak{F} = \{(U, \varphi)\ ;\ \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \text{ é difeomorfismo } C^\infty\}$$

então $(\Omega, \mathfrak{F})$ é uma variedade diferenciável.

Exemplo 3.5. Seja $(\Omega, \mathfrak{F})$ uma variedade diferenciável e $W \subset \Omega$ aberto então W admite uma estrutura diferenciável " por restrições " $(W, \mathfrak{F}_W)$ onde

$$\mathfrak{F}_W = \{(U_\beta \cap W, \varphi_\beta\ |_W)\ ;\ (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathfrak{F}\}.$$

Notação: Seja $(\Omega, \mathfrak{F})$ uma variedade diferenciável de dimensão N, um par $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$ é chamado de carta ou sistema de coordenadas.
A função φ denota-se por $\varphi = (x_1, x_2, ..., x_N)$, ou seja, $\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_N(p))$, para todo $p \in U$.

Definição 3.6. *Seja* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *uma variedade diferenciável, uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *pertence a* $C^\infty(\Omega)$ *se para toda* $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$ *tem-se* $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ *é de classe* C^∞ *em* $\varphi(U)$.

Observação 3.7. *O conjunto*

$$C^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ f \text{ é de classe } C^\infty\}$$

é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, *ou seja, é um espaço vetorial complexo no qual temos uma noção de produto.*
Escrevemos $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *para denotar o subconjunto de* $C^\infty(\Omega)$ *formado pelas funções* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *com* $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

De agora em diante denotamos Ω, como sendo uma variedade sem especificar a sua estrutura diferenciável.

Definição 3.8. *Um campo vetorial complexo sobre* Ω *é uma aplicação* $\mathbb{C}$*-linear* $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$, *isto é:*

$$L(f + \alpha g) = L(f) + \alpha L(g), \quad \forall\, f, g \in C^\infty(\Omega)\ ,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C},$$

além disso, satisfaz a seguinte regra de Leibniz

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad \forall\, f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Notação: Vamos denotar por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos vetoriais complexos sobre Ω, ou seja

$$\mathfrak{X}(\Omega) = \{L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)\ ;\ L \text{ é campo vetorial complexo}\}.$$

Definição 3.9. *Seja* f *uma função em* $C^\infty(\Omega)$, *o suporte da* f *é dado por*

$$supp(f) = \overline{\{p \in \Omega\, ;\, f(p) \neq 0\}}.$$

Proposição 3.10. *Seja* $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ *e* $f \in C^\infty(\Omega)$ *então, temos a seguintes propriedades:*

a) Se f *é constante então* $Lf = 0$.

b) $supp(Lf) \subseteq supp(f)$.

Demonstração.

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $L(\alpha) = L(\alpha.1) = \alpha L(1)$, logo para provar $a)$ basta mostrar que $L(1) = 0$. Mas $L(1) = L(1.1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1)$, e como $C^\infty(\Omega)$ é uma álgebra vem que $L(1) = 0$.

Mostrar $b)$ é equivalente mostrar que, se V é aberto e $f\mid_V \equiv 0$, então $Lf\mid_V \equiv 0$. Suponha que $f\mid_V \equiv 0$ e $p \in V$ arbitrário, tomemos uma carta (U, φ) com $p \in U$ tal que $U \subset V$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\varphi(U))$ tal que $\chi(\varphi(p)) = 1$, então a função $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(q) = \begin{cases} \chi(\varphi(q)), & q \in U \\ 0, & q \notin U \end{cases}$$

pertence ao espaço $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $g \equiv 0$ em $\Omega \backslash V$ e $g(p) = 1$. Como $f.g \equiv 0$ em Ω então podemos escrever

$$f = f - 0 = f - fg = (1 - g)f$$

e daí temos que

$$L(f)(p) = L((1-g)f)(p) = \underbrace{(1-g)(p)}_{0} L(f)(p) + \underbrace{f(p)}_{0} L(1-g)(p) = 0,$$

ou seja, $L(f)(p) = 0$e como p é arbitrario, vem que

$$Lf\mid_V \equiv 0.$$

$\square$

O seguinte corolário resulta como consequência da proposição anterior.

Corolário 3.11. *Se $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $f = g$ numa vizinhança de $p \in \Omega$ então $Lf(p) = Lg(p)$.*

Demonstração. Basta aplicar o item $b)$ da proposição anterior para a função $h = f - g$. $\square$

Observação 3.12. *Como consequência do Corolário 3.11 vem que, todo campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ admite uma restrição a um aberto $W \subseteq \Omega$, ou seja, existe um elemento $L_W \in \mathfrak{X}(W)$ que faz o diagrama abaixo ficar comutativo*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{L} & C^\infty(\Omega) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ C^\infty(W) & \xrightarrow{L_W} & C^\infty(W) \end{array}$$

Onde as setas verticais indicam as funções restrições.

Definição 3.13. *Seja* $W \subseteq \Omega$ *aberto,* $p \in W$*,* $f \in C^\infty(W)$ *e* $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ *definimos* $L_W : C^\infty(W) \longrightarrow C^\infty(W)$ *por* $L_W(f)(p) = L(\tilde{f})(p)$*, onde* $\tilde{f}$ *é qualquer elemento de* $C^\infty(\Omega)$ *que coincide com* f *em uma vizinhança* V *de* p*. Podemos tomar* $\tilde{f} = f\chi$ *onde* $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$*, supp*$(\chi) \subset W$ *e* $\chi\,|_V \equiv 1$.

Definição 3.14. *Seja* $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ *e* $g \in C^\infty(\Omega)$ *definimos* $gL \in \mathfrak{X}(\Omega)$ *da seguinte forma*

$$gL(f)(p) \doteq g(p)Lf(p).$$

Essa multiplicação externa dá a $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma estrutura de $C^\infty(\Omega) - mdulo$.

Definição 3.15. *Dados* $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$*, definimos o comutador de* L *e* M *como*

$$[L, M] = LM - ML.$$

Proposição 3.16. *Se* $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$*, então* $[L, M] \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Demonstração. Temos que provar que $[L, M]$ é linear e que satisfaz a regra de Leibniz. De fato, sejam $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

i) Linearidade:

$$\begin{aligned}
[L, M](f + \alpha g) &= LM(f + \alpha g) - ML(f + \alpha g) \\
&= L(M(f) + \alpha M(g)) - M(L(f) + \alpha L(g)) \\
&= L(Mf) + \alpha L(Mg) - M(Lf) - \alpha M(Lg) \\
&= L(Mf) - M(Lf) + \alpha(L(Mg) - M(Lg)) \\
&= (LM - ML)(f) + \alpha(LM - ML)(g) \\
&= [L, M](f) + \alpha[L, M](g).
\end{aligned}$$

ii) Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
[L, M](f.g) &= (LM - ML)(f.g) \\
&= LM(f.g) - ML(f.g) \\
&= L(fMg + gMf) - M(fLg + gLf) \\
&= L(fMg) + L(gMf) - M(fLg) - M(gLf) \\
&= fL(Mg) + MgLf + gL(Mf) + MfLg - fM(Lg) - \\
&\quad - LgMf - gM(Lf) - LfMg \\
&= f(L(Mg) - M(Lg)) + g(L(Mf) - M(Lf)) \\
&= f[L, M](g) + g[L, M](f).
\end{aligned}$$

□

Agora seja (U,φ) uma carta em Ω e $f \in C^\infty(U)$ e $\varphi(q) = (x_1(q),\dots,x_N(q))$. Considere o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(\varphi(U)) & \longrightarrow & C^\infty(\varphi(U)) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ f & \longmapsto & f\circ\varphi^{-1} & \longmapsto & \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1}) & \longmapsto & h\circ\varphi \end{array}$$

onde $h = \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})$.

Definição 3.17. *Dada (U,φ) uma carta em Ω e $f \in C^\infty(U)$, definimos*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \doteq \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi, \quad j = 1,2\dots,N.$$

Proposição 3.18. *Seja (U,φ) uma carta local em Ω, então $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$.*

Demonstração. Sejam $f,g \in C^\infty(U)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

i) Linearidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(f+\alpha g) &\doteq \{\frac{\partial}{\partial x_j}((f+\alpha g)\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1}+\alpha g\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})+\alpha\frac{\partial}{\partial x_j}(g\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi+\alpha\{\frac{\partial}{\partial x_j}(g\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}+\alpha\frac{\partial g}{\partial x_j} \end{aligned}$$

ii) Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(f.g) &\doteq \{\frac{\partial}{\partial x_j}((f.g)\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1}.g\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= \{f\circ\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(g\circ\varphi^{-1})+g\circ\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= f\{\frac{\partial}{\partial x_j}(g\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi+g\{\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi \\ &= f\frac{\partial g}{\partial x_j}+g\frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.19. *Seja $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e (U,φ) carta local em Ω, $\varphi = (x_1,\dots,x_N)$, então*

a) $L_U = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}(Lx_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

b) $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}\}$ *é base para o* $C^\infty(U)-$*módulo* $\mathfrak{X}(U)$.

Demonstração. Vamos mostrar o item $a)$. Para isto seja $p \in U$ e $V \subset U$ aberto , $p \in V$ tal que $\varphi(V) = B(a,r)$ onde $a = \varphi(p)$ e seja $f \in C^\infty(U)$.
Se $q \in V$ então $\varphi(q) = (x_1(q),\dots,x_N(q)) \in B(a,r)$, agora na bola $B(a,r)$ usamos a fórmula de Taylor com resto integral.

$$(f\circ\varphi^{-1})(x) = (f\circ\varphi^{-1})(a) + \sum_{j=1}^{N} h_j(x)(x_j - a_j)$$

onde cada $h_j \in C^\infty(B(a,r))$ é dada por $h_j(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})(a+t(x-a))dt$ para todo $x \in B(a,r)$.
Agora em V temos

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{N}(h_j\circ\varphi)(q)(x_j - x_j(p))(q)$$

aplicando L à expressão anterior temos

$$\begin{aligned} L_V(f)(q) &= L_V(f(p)) + \sum_{j=1}^{N} L_V[(h_j\circ\varphi)(q)(x_j - x_j(p))(q)] \\ &= \sum_{j=1}^{N}(h_j\circ\varphi)(q)L_V(x_j(q) - x_j(p)) + (x_j(q) - x_j(p))L_V(h_j\circ\varphi)(q) \\ &= \sum_{j=1}^{N}(h_j\circ\varphi)(q)L_V(x_j)(q) + (x_j(q) - x_j(p))L_V(h_j\circ\varphi)(q). \end{aligned}$$

Tomando $p = q$ segue que

$$\begin{aligned} L_V(f)(q) &= \sum_{j=1}^{N}(h_j\circ\varphi)(p)L_V(x_j)(p) \;=\; \sum_{j=1}^{N} L_V(x_j)(p)h_j(\varphi(p)) \\ &= \sum_{j=1}^{N} L_V(x_j)(p)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(a) \;=\; \sum_{j=1}^{N} L_V(x_j)(p)\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi(p) \end{aligned}$$

daí vem que
$$L_U = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Como consequência do item $a)$ temos que $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_N}\}$ gera $\mathfrak{X}(U)$. Logo para mostrarmos o item $b)$ é suficiente provar que este conjunto é linearmente independente. De fato, sejam $g_1, g_2, \ldots, g_N \in C^\infty(U)$ tais que $L = \sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$.
Considere as funções $f_k = \rho_k \circ \varphi$ onde $\rho_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho_k(x) = x_k$, temos que $f_k \in C^\infty(U)$ e
$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \doteq \{\frac{\partial}{\partial x_j}(f_k\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi = \{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_k\circ\varphi\circ\varphi^{-1})\}\circ\varphi = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j}\circ\varphi = \delta_{kj}$$
assim para cada $1 \leq k \leq N$, temos
$$0 = Lf_k = g_1\frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \cdots + g_k\frac{\partial f_k}{\partial x_k} + \cdots + g_N\frac{\partial f_k}{\partial x_n} = g_k.$$

$\square$

Observação 3.20. *Seja (U, φ) uma carta local em Ω e $L, M \in \mathfrak{X}(U)$ então a representação de $[L, M]$ em coordenadas locais é dado por*

$$\begin{aligned}
[L, M]\mid_U &= \sum_{j=1}^{N}(L(Mx_j) - M(Lx_j))\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{N}[L, M](x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Definição 3.21. *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, definimos o campo $\bar{L}$ conjugado complexo de L da seguinte maneira $\bar{L}(f) = \overline{L(\bar{f})}$, para toda $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Verifiquemos se $\bar{L}$ é um campo vetorial complexo, para isto sejam $f, g \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ mostremos primeiro que $\bar{L}$ é linear

$$\begin{aligned}
\bar{L}(f + \alpha g) &= \overline{L(\overline{f + \alpha g})} = \overline{L(\bar{f} + \bar{\alpha}\bar{g})} = \overline{L(\bar{f}) + \bar{\alpha}L(\bar{g})} \\
&= \overline{L(\bar{f})} + \alpha\overline{L(\bar{g})} = \bar{L}(f) + \alpha\bar{L}(g).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\bar{L}$ satisfaz a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}\bar{L}(f.g) &= \overline{L(\overline{f.g})} = \overline{L(\bar{f}.\bar{g})} = \overline{\bar{f}L(\bar{g}) + \bar{g}L(\bar{f})} = \overline{\bar{f}L(\bar{g})} + \overline{\bar{g}L(\bar{f})} \\ &= f\overline{L(\bar{g})} + g\overline{L(\bar{f})} = f\bar{L}(g) + g\bar{L}(f).\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{L}$ é um campo vetorial complexo.

Observação 3.22.

1) Notemos que $\overline{\dfrac{\partial}{\partial x_j}} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. *De fato, considere* $f = u + iv$, *logo*

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}}(f) &= \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{f})} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(u - iv)}; = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(u) - i\frac{\partial}{\partial x_j}(v)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) + i\frac{\partial}{\partial x_j}(v) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u + iv) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f).\end{aligned}$$

2) Se (U, φ) *é um sistema de coordenadas em* Ω *com* $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$, *se sabe que neste sistema* L *é dado por* $L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, *então*

$$\bar{L} = \overline{\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^{N} \overline{a_j(x)}\,\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^{N} \overline{a_j(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

3.2 Vetores tangentes complexos e 1-formas diferenciáveis

Seja $p \in \Omega$ considere o conjunto

$$\beta_p = \{(V, f)\ ;\ V \subset \Omega \text{ aberto },\ p \in V \text{ e } f \in C^\infty(V)\}$$

Em β_p definimos a seguinte relação de equivalência: dados (V_1, f_1) , $(V_2, f_2) \in \beta_p$ dizemos que $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ se existe uma vizinhanaça aberta $V \subset V_1 \cap V_2$ com $p \in V$ tal que $f_1 |_V = f_2 |_V$.

Definição 3.23. *Um germe de uma função* C^∞ *no ponto* p *é uma classe de equivalência em* β_p, *ou seja é um elemento do espaço quociente* $C^\infty(p) = \beta_p/\sim$.

Se f é uma função C^∞ numa vizinhança de p, denotaremos o seu germe por $\underline{f}$. Pode-se mostrar que $C^\infty(p)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra.

Observação 3.24. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T : C^\infty(p) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \underline{f} & \longmapsto & T(\underline{f}) = f(p) \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

De fato, se $\underline{f} = \underline{g}$ então existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$, $p \in V$ tal que $f\mid_V = g\mid_V$, então $f(p) = g(p)$, ou seja $T(\underline{f}) = T(\underline{g})$. Portanto, T está bem definida.

Por outro lado se $f, g \in C^\infty$ numa vizinhança de p e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{array}{lllll} T(\underline{f} \cdot \underline{g}) & = T(\underline{f.g}) & = (f.g)(p) & = f(p)g(p) & = T(\underline{f})T(\underline{g}) \\ T(\alpha\underline{f}) & = T(\underline{\alpha f}) & = (\alpha f)(p) & = \alpha f(p) & = \alpha T(\underline{f}) \\ T(\underline{f} + \underline{g}) & = T(\underline{f+g}) & = (f+g)(p) & = f(p) + g(p) & = T(\underline{f}) + T(\underline{g}). \end{array}$$

Logo T é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Definição 3.25. *Um vetor tangente complexo a Ω no ponto p é uma aplicação*

$$v : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz a seguinte condição

$$v(\underline{f}.\underline{g}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f})\ , \quad \textit{para todo } \underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p).$$

O espaço tangente complexo a Ω em p é o espaço vetorial complexo

$$\mathbb{C}T_p\Omega = \{v\ ;\ v \text{ é vetor tangente complexo a } \Omega \text{ em } p\}.$$

Observação 3.26. *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $p \in \Omega$, então definimos um elemento $L_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$ da seguinte forma*

$$\begin{array}{rcl} L_p : C^\infty(p) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \underline{f} & \longmapsto & L_p(\underline{f}) \doteq (Lf)(p). \end{array}$$

L_p está bem definida pois pelo Corolário 3.11 temos que se $f\mid_V = g\mid_V$, então $Lf = Lg$ em V, ou seja, se $\underline{f} = \underline{g}$, então existe uma vizinhança aberta V com $p \in V$ tal que $f\mid_V = g\mid_V$, logo $L_p(\underline{f}) = L_p(\underline{g})$.

Mostraremos agora que L_p é linear e que satisfaz a regra de Leibniz. De fato, sejam

$\underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} L_p(\underline{f} + \alpha \underline{g}) &= L_p(\underline{f + \alpha g}) = L(f + \alpha g)(p) = (Lf + \alpha Lg)(p) \\ &= Lf(p) + \alpha Lg(p) = L_p(\underline{f}) + \alpha L_p(\underline{g}). \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} L_p(\underline{f}.\underline{g}) &= L_p(\underline{f.g}) = L(f.g)(p) = (fLg + gLf)(p) = (fLg)(p) + (gLf)(p) \\ &= f(p)Lg(p) + g(p)Lf(p) = f(p)L_p(\underline{g}) + g(p)L_p(\underline{f}). \end{aligned}$$

Portanto $L_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$.

Observação 3.27. *Dado $\underline{f} \in C^\infty(p)$, pode ocorrer que f não esteja definida na variedade toda. Contornamos este problema do seguinte modo.*
Se $f \in C^\infty(V)$, com $p \in V$, tome $K \subset V$ compacto, $p \in K$ e considere a função $\chi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\chi(q) = \begin{cases} 1, & se\ q \in K \\ 0, & se\ q \notin V \end{cases}$$

e faça $g = \chi f \in C^\infty(\Omega)$, então $g\,|_K = f\,|_K$ e $g\,|_{V^c} \equiv 0$, logo temos que $\underline{g} = \underline{f}$ e defina $L_p(\underline{f}) = (Lg)(p)$.

Proposição 3.28. *Seja Ω uma variedade diferenciável e (U, φ) uma carta local, $p \in U$ e $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$, então*

i) $v(\underline{f}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j}\,|_p\,(\underline{f})$, *para toda* $\underline{f} \in C^\infty(p)$.

ii) $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\,|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\,|_p\}$ *é base de* $\mathbb{C}T_p\Omega$.

Demonstração. Seja $\underline{f} \in C^\infty(p)$ e $V \subset U$ aberto $p \in V$ tal que

$$f \in C^\infty(V)\ , \quad \varphi(V) = B(a, r) \quad \text{e} \quad a = \varphi(p).$$

Dado $q \in V$ temos que $x = \varphi(q) \in B(a, r)$ e pela fórmula de Taylor com resto integral temos

$$(f \circ \varphi^{-1})(x) = (f \circ \varphi^{-1})(a) + \sum_{j-1}^{N} h_j(x)(x_j - a_j), \quad \forall x \in B(a, r)$$

onde $h_j \in C^\infty(B(a,r))$ e $h_j(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \varphi^{-1})(a)$.
Agora em V temos que

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), \qquad \text{para qualquer } q \in V,$$

onde $g_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(p)$, portanto

$$\underline{f} = \underline{f}(p) + \sum_{j=1}^{N} \underline{g}_j(\underline{x}_j - \underline{x}_j(p)).$$

Notemos que $\underline{f}(p)$ e $\underline{x}_j(p)$ são germes de funções constantes e vemos que

$$v(\underline{c}) = v(c.\underline{1}) = cv(\underline{1})$$

mas $v(\underline{1}) = v(\underline{1}.\underline{1}) = 1v(\underline{1}) + 1v(\underline{1}) = 2v(\underline{1})$ o qual implica que $v(\underline{1}) = 0$, logo

$$\begin{aligned} v(\underline{f}) &= v(\underline{f}(p)) + \sum_{j=1}^{N} v(\underline{g}_j(\underline{x}_j - \underline{x}_j(p))) \\ &= \sum_{j=1}^{N} [v(\underline{g}_j \underline{x}_j) - v(\underline{g}_j \underline{x}_j(p))] \\ &= \sum_{j=1}^{N} [g_j(p)v(\underline{x}_j) + x_j(p)v(\underline{g}_j) - g_j(p)v(\underline{x}_j(p)) - x_j(p)v(\underline{g}_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{N} g_j(p)v(\underline{x}_j). \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} g_j(p) &= (h_j \circ \varphi)(p) = h_j(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \varphi^{-1})(a) \\ &= (\{\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \varphi^{-1})\} \circ \varphi)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} |_p (\underline{f}), \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$v(\underline{f}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} |_p (\underline{f}) v(\underline{x}_j), \qquad \text{para toda } \underline{f} \in C^\infty(p).$$

O que mostra o item i).

Para mostrar $ii)$ basta mostrar que os vetores $\frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N} \mid_p$ são linearmente independentes, pois pelo item $i)$ eles geram $\mathbb{C}T_p\Omega$. De fato, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ tais que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p = 0$. Em seguida considere funções $h_1, \ldots, h_N \in C^\infty(U)$ tais que

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_j}(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ 1, & \text{se } j = k \end{cases}$$

Então

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p (h_k) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(p) = \alpha_k$$

para $k = 1, 2, \ldots, N$, portanto $\{\frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N} \mid_p\}$ é base de $\mathbb{C}T_p\Omega$. □

Exemplo 3.29. Dado $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$, existe $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_p = v$.
De fato, pela Proposição 3.28 temos que, dado $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ e (U, φ) carta local com $p \in U$, podemos escrever

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p .$$

Por outro lado, como $\{\frac{\partial}{\partial x_1} \mid_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N} \mid_q\}$ é base de $\mathbb{C}T_p\Omega$ para todo $q \in U$, então definimos o vetor $v_q \in \mathbb{C}T_p\Omega$ pondo

$$v_q \doteq \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_q .$$

Agora seja $V \subset U$ aberto, $p \in V$, $K \subset V$ compacto e $g \in C^\infty(U)$ tal que $g \mid_K \equiv 1$ e $g \mid_{U \setminus V} \equiv 0$ e em seguida defina $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que no sistema de coordenadas (U, φ) em torno de p é da forma

$$L = \sum_{j=1}^{N} g v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Assim, L está bem definido, é linear, respeita a regra de Leibniz e além disso,

$$\begin{aligned} L_p(\underline{f}) &= (Lf)(p) = \sum_{j=1}^{N} g(p) v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} f(p) \\ &= \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p (\underline{f}) = v(\underline{f}). \end{aligned}$$

Exemplo 3.30. Suponha que para cada $p \in \Omega$ é dado $v_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tal que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & v_p(\underline{f}) \end{array}$$

é C^∞, para todo $f \in C^\infty(\Omega)$ fixado. Então existe um único campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_p = v_p$, $\forall p \in \Omega$.

De fato, defina $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ por $(Lf)(p) = v_p(\underline{f})$.
Por hipótese, se $f \in C^\infty$ então $Lf \in C^\infty$, além disso, se $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} L(\alpha f + g)(p) &= v_p(\underline{\alpha f + g}) = v_p(\underline{\alpha f} + \underline{g}) = v_p(\underline{\alpha f}) + v_p(\underline{g}) \\ &= \alpha v_p(\underline{f}) + f(p)v_p(\underline{\alpha}) + v_p(\underline{g}) = \alpha(Lf)(p) + (Lg)(p) \end{aligned}$$

segue que L é linear. Por outro lado,

$$\begin{aligned} L(f.g)(p) &= v_p(\underline{f.g}) = v_p(\underline{f}.\underline{g}) = f(p)v_p(\underline{g}) + g(p)v_p(\underline{f}) \\ &= f(p)Lf(p) + g(p)Lg(p) = (fLg) + gLf)(p) \end{aligned}$$

satisfazendo também a regra de Leibniz. Para mostrar a unicidade, suponha que exista $M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $M_p = v_p$, para todo $p \in \Omega$, então $M_p(\underline{f}) \doteq Mf(p)$, para toda $\underline{f} \in C^\infty(p)$, daí

$$Mf(p) = M_p(\underline{f}) = v_p(\underline{f}) = Lf(p)$$

o que implica que $L = M$.

Definição 3.31. *O fibrado tangente complexo é definido e denotado da seguinte forma*

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

Onde a união acima é disjunta.

Definição 3.32. *Se $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ definimos $\bar{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega$ (o conjugado de v) como $\bar{v}(\underline{f}) = v(\underline{\bar{f}})$, para toda $\underline{f} \in C^\infty(p)$.*

Definição 3.33. *Denotemos por $\eta(\Omega)$ o dual do $C^\infty(\Omega)-$módulo $\mathfrak{X}(\Omega)$, ou seja, $\omega \in \eta(\Omega)$, se $\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ e satisfaz*

$$\omega(fL + M) = f\omega(L) + \omega(M), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega)\ , \ \forall L, M \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Os elementos de $\eta(\Omega)$ são chamados de 1-formas diferenciáveis.

Lema 3.34. *Se $\omega \in \eta(\Omega)$, $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $L\mid_V \equiv 0$, com $V \subseteq \Omega$ aberto, então $\omega(L)\mid_V \equiv 0$.*

Demonstração. Dado $p \in V$, tomemos $g \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $g(p) = 1$ e $g\mid_{\Omega \setminus V} \equiv 0$. Então see $q \in V$, tem-se $L_q = 0$ e se $q \in \Omega \setminus V$ tem-se $g(q) = 0$. Logo $(gL)_q = g(q)L_q = 0$, para todo $q \in \Omega$, portanto $gL = 0$. Daí vem que $L = L - gL = (1-g)L$, logo

$$\omega(L)(p) = \omega((1-g)L)(p) = (1-g)(p)\omega(L)(p) = (1-g(p))\omega L(p) = 0$$

Portanto $\omega(L)\mid_V \equiv 0$. □

Observação 3.35. *Sempre é possível restringir um elemento de $\eta(\Omega)$ a um elemento de $\eta(W)$ com $W \subseteq \Omega$ aberto.*

De fato, se $L \in \mathfrak{X}(W)$, $p \in W$ então dada uma 1-forma $\omega \in \eta(\Omega)$ definimos

$$\omega\mid_W (L)(p) \doteq \omega(\tilde{L})(p)$$

onde $\tilde{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é tal que $\tilde{L} = L$ em uma vizinhança de p.
Notemos que $\omega\mid_W$ está bem definida, pois se $\tilde{L}, \tilde{M} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ são tais que $\tilde{L} = L$ em $V_1 \subseteq \Omega$ com $p \in V_1$ e $\tilde{M} = L$ em $V_2 \subseteq \Omega$ com $p \in V_2$, V_1 e V_2 abertos, então $p \in V_1 \cap V_2$ e temos que

$$\omega(\tilde{L})(p) = \omega\mid_W (L)(p) = \omega(\tilde{M})(p).$$

Além disso, a definição de $\omega\mid_W$ não depende de $\tilde{L}$ ja que se $\tilde{L}, \tilde{M} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $\tilde{M} = \tilde{L}$ em V, $p \in V$ então $\tilde{M} - \tilde{L} = 0$ em V e do Lema 3.34 vem que

$$\omega(\tilde{M} - \tilde{L})(p) = 0,$$

ou seja,

$$\omega(\tilde{M})(p) = \omega(\tilde{L})(p).$$

Lema 3.36. *Seja $\omega \in \eta(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Se $L_p = 0$ então $\omega(L)(p) = 0$.*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local de Ω tal que $p \in U$ e $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$, então

$$\begin{aligned}
\omega(L)(p) &= \omega_U(L_U)(p) = \omega_U\Big(\sum_{j=1}^N (Lx_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)(p) = \Big(\sum_{j=1}^N (Lx_j)\omega_U(\frac{\partial}{\partial x_j})\Big)(p) \\
&= \sum_{j=1}^N (L_U x_j)(p)\omega_U(\frac{\partial}{\partial x_j})(p) = \sum_{j=1}^N L_p(\underline{x}_j)\omega_U(\frac{\partial}{\partial x_j})(p) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\omega(L)(p) = 0$. □

Definição 3.37. *O dual de $\mathbb{C}T_p\Omega$, $p \in \Omega$ é denotado por $\mathbb{C}T_P^*\Omega$ e chamado de espaço cotangente a Ω em p.*

Observação 3.38. *Dada $\omega \in \eta(\Omega)$ e $p \in \Omega$ podemos definir $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$*

$$\omega_p : \mathbb{C}T_p\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

por $\omega_p(v) = \omega(L)(p)$, onde $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $L_p = v$.

De fato, para verificar que ω_p está bem definida considere $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tais que $L_p = v = M_p$, então $L_p - M_p = 0$ ou equivalentemente $(L - M)_p = 0$ pelo lema anterior temos

$$0 = \omega(L - M)(p) = \omega(L)(p) - \omega(M)(p)$$

daí vem que

$$\omega(L)(p) = \omega(M)(p).$$

Mostremos agora que ω_p é linear. Para isso sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{C}T_p\Omega$, $\alpha \in \mathbb{C}$ com $L_p = v_1$, $M_p = v_2$ temos que $\alpha v_1 + v_2 = \alpha L_p + M_p = (\alpha L + M)_p$. Daí

$$\begin{aligned} \omega_p(\alpha v_1 + v_2) &= \omega(\alpha L + M)(p) = (\alpha\omega(L) + \omega(M))(p) = \alpha\omega(L)(p) + \omega(M)(p) \\ &= \alpha\omega_p(L) + \omega_p(M) = \alpha\omega_p(v_1) + \omega_p(v_2). \end{aligned}$$

Proposição 3.39. *Seja Ω uma variedade diferenciável de dimensão N, então*

$$\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p \ ; \ \omega \in \eta(\Omega)\}.$$

Demonstração. Pela observação anterior temos que

$$\{\omega_p \ ; \ \omega \in \eta(\Omega)\} \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Além disso, se (U, φ) é uma carta local com $p \in U$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, sabemos que $L_U = \sum_{j=1}^{N} (Lx_j) \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Definimos $dx_j \in \eta(U)$, $j = 1, \ldots, N$ por $dx_j(\dfrac{\partial}{\partial x_k}) = \delta_{jk}$, ou seja,

$$dx_j(L_U) = \sum_{k=1}^{N} (Lx_k) dx_j(\frac{\partial}{\partial x_k}) = Lx_j.$$

Se $\omega \in \eta(U)$, então

$$\begin{aligned} \omega(L) &= \omega\Big(\sum_{k=1}^{N}(Lx_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) = \sum_{k=1}^{N}(Lx_k)\omega(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \sum_{k=1}^{N}\omega(\frac{\partial}{\partial x_k})L(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\omega(\frac{\partial}{\partial x_k})dx_k(L) = \Big(\sum_{k=1}^{N}\omega(\frac{\partial}{\partial x_k})dx_k\Big)(L). \end{aligned}$$

Portanto obtemos que

$$\omega = \sum_{k=1}^{N}\omega(\frac{\partial}{\partial x_k})dx_k.$$

Resumindo temos que $\{dx_{1p}, \ldots, dx_{Np}\}$ é base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\ |_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\ |_p\}$ e qualquer elemento da forma ω_p se escreve como $\omega_p = \sum_{k=1}^{N}\omega(\frac{\partial}{\partial x_k})dx_{kp}$.

Mostremos agora que $\mathbb{C}T_p^*\Omega \subset \{\omega_p\,;\,\omega \in \eta(\Omega)\}$. De fato, se $v^* \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tais que $v^* = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k dx_{kp}$. Agora, se $\omega = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k dx_k \in \eta(\Omega)$ então $\omega_p = v^*$, ou seja, $v^* \in \{\omega_p\,;\,\omega \in \eta(\Omega)\}$. $\square$

Definição 3.40. *(diferencial de uma função)*
Seja $f \in C^\infty(\Omega)$, definimos $df \in \eta(\Omega)$ $df : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty$ como $df(L)(p) \doteq (Lf)(p)$.

Observação 3.41. *Notemos que se $g \in C^\infty$ e $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ temos que*

$$\begin{aligned} df(gL+M)(p) &= (gL+M)(f)(p) \\ &= g(p)(Lf)(p) + (Mf)(p) \\ &= g(p)df(L)(p) + df(M)(p). \end{aligned}$$

Mais ainda, se (U, φ) é carta local de Ω com $p \in U$ e $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$ temos que

$$\begin{aligned} df(L)(p) &= (Lf)(p) = \sum_{j=1}^{N}(Lx_j)(p)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \sum_{j=1}^{N}dx_j(L)(p)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{N}dx_j(L)\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(p). \end{aligned}$$

Portanto

$$df = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j.$$

Definição 3.42. *O fibrado cotangente complexo é definido e denotado por*

$$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega,$$

onde a união acima é disjunta.

Observação 3.43. *Seja* Ω *uma variedade diferenciável de dimensão* N*, temos as seguintes notações.*

$$T_p\Omega = \{v \in \mathbb{C}T_p\Omega\,;\ v \text{ é real }\}$$

$$T_p^*\Omega = \{\xi \in \mathbb{C}T_p^*\Omega\,;\ \xi \text{ é real }\}$$

$$T\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} T_p\Omega, \quad T^* = \bigcup_{p\in\Omega} T_p^*\Omega$$

3.3 Estruturas localmente integráveis

Nesta parte do trabalho vamos definir o que é uma estrutura involutiva e uma estrutura localmente integrável, mas para isso precisamos da noção de subfibrado vetorial complexo que é o conteúdo da seguinte definição. Salvo menção explícita em contrário, ao longo desta seção, Ω representará uma variedade diferenciável suave de dimensão N.

Definição 3.44. *Um subfibrado vetorial complexo de* $\mathbb{C}T\Omega$ *de dimensão* n*, com* $1 \leq n \leq N$ *é da forma* $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) Cada $\mathcal{V}_p \subseteq \mathbb{C}T_p\Omega$ *é um subespaço vetorial de dimensão* n*.*

ii) Para cada $p_0 \in \Omega$ *existe um aberto* $U_0 \subset \Omega$*,* $p_0 \in U_0$ *e campos* $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$ *tais que* $L_{1q}, \dots, L_{nq}$ *geram* $\mathcal{V}_q$*, para todo* $q \in U_0$*.*

Definição 3.45. *Uma seção do subfibrado vetorial complexo* $\mathcal{V}$ *sobre o aberto* $W \subset \Omega$ *é um campo vetorial* $L \in \mathfrak{X}(W)$ *tal que* $L_p \in \mathcal{V}_p$*, para todo* $p \in W$*.*

Definição 3.46. *Uma estrutura involutiva (ou formalmente integrável) é um subfibrado vetorial complexo* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ *tal que dado qualquer* $W \subset \Omega$ *aberto e seções* $L, M \in \mathfrak{X}(W)$ *de* $\mathcal{V}$ *sobre* W*, então* $[L, M]$ *é também uma seção de* $\mathcal{V}$ *sobre* W*.*

Em outras palavras, $[L, M]$ também é combinação linear de $L_{1p}, \dots, L_{np}$ em $\mathcal{V}_p$.

Exemplo 3.47. Seja $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ um campo vetorial complexo não singular, ou seja, $L_p \neq 0$, para todo $p \in \Omega$. Então $\mathcal{V} =< L >= \{fL\,;\ f \in C^\infty(\Omega)\}$ é uma estrutura involutiva.

De fato, primeiro verifiquemos que $\mathcal{V}$ é subfibrado, se $\mathcal{V}_p = \{\alpha L_p\,;\,\alpha \in \mathbb{C}\}$ teremos

$$\mathcal{V} =< L >= \{fL\,;\,f \in C^\infty(\Omega)\} = \bigcup_{p\in\Omega}\{f(p)L_p\,;\,f \in C^\infty(\Omega)\} = \bigcup_{p\in\Omega}\mathcal{V}_p$$

onde $\mathcal{V}_p \subseteq \mathbb{C}T_p\Omega$ é subespaço vetorial complexo de dimensão 1 gerado pelo vetor L_p. Observe ainda que fL é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre qualquer aberto $W \subset \Omega$ para qualquer $f \in C^\infty(\Omega)$, pois $f(p)L_p \in \mathcal{V}_p$, para todo $p \in \Omega$.
Verifiquemos agora que $\mathcal{V}$ é uma estrutura involutiva, para isso, consideremos um aberto $W \subset \Omega$ e duas seções $fL, gL \in \mathfrak{X}(W)$ de $\mathcal{V}$ sobre W com $f, g \in C^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}
[fL, gL] &= fL(gL) - gL(fL)\\
&= f(gLL + L(g)L) - g(fLL + L(f)L)\\
&= fgLL + fL(g)L - gfLL - gL(f)L\\
&= (fL(g) - gL(f))L
\end{aligned}$$

então

$$[fL, gL]\,|_p = (f(p)Lg(p) - g(p)Lf(p))L_p \in \mathcal{V}_p.$$

Daí vem que $\mathcal{V}$ é uma estrutura involutiva.

Observação 3.48. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura involutiva sobre Ω, pela definição de subfibrado vetorial obtemos uma carta (U, φ) contendo p e campos $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que os vetores $L_{1q}, \ldots, L_{nq}$ formam uma base para $\mathcal{V}_q$ para todo $q \in U$. Se $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$ então*

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

onde $a_{jk} = L_j x_k \in C^\infty(U)$.
Como $\mathcal{V}$ é uma estrutura involutiva temos que $[L_j, L_l]\,|_p \in \mathcal{V}_p$, $1 \leq j, l \leq n$.

Exemplo 3.49. Na observação acima, pode-se mostrar que existem funções $C_{jl}^{\nu} \in C^\infty(U)$ tais que

$$[L_j, L_l] = \sum_{\nu=1}^{n} C_{jl}^{\nu} L_\nu.$$

De fato, na própria definição de involutividade temos a existência das funções C_{jl}^{ν}, mais ainda é possivel mostrar que estas funções são de classe C^∞ em U.

De forma análoga, podemos também introduzir a noção de subfibrado vetorial complexo do fibrado cotangente complexo $\mathbb{C}T^*\Omega$.

Definição 3.50. *Um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T^*\Omega$ de dimensão m é da forma $\mathcal{W} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{W}_p$ satisfazendo a seguintes condições:*

i) Cada $\mathcal{W}_p$ é subespaço vetorial de $CT_p^*\Omega$ com dimensão fixa m, $0 \leq m \leq N$.

ii) Para cada $p_0 \in \Omega$ existe um aberto $U_0 \subset \Omega$ com $p_0 \in U_0$ e existem, 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m$ tais que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ geram $\mathcal{W}_q$ para todo $q \in U_0$.

Proposição 3.51. *Seja $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ um subfibrado vetorial de $\mathbb{C}T\Omega$, então*

$$\mathcal{V}^\perp = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^\perp$$

é um subfibrado vetorial de $\mathbb{C}T^*\Omega$, onde

$$\mathcal{V}_p^\perp = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega \; ; \; \lambda(v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}_p\}.$$

Demonstração. Temos $m = dim\mathcal{V}_p^\perp = N - n$ onde $n = dim\mathcal{V}_p$.

Por outro lado como $\mathcal{V}$ é um subfibrado, dado $p \in \Omega$ tem-se (U, φ) carta local de Ω, $p \in U$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$ e campos $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $\{L_{1q}, \ldots, L_{nq}\}$ é base de $\mathcal{V}_q$, para todo $q \in U$. Além disso, sabemos que $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$, $j = 1, \ldots, n$ onde $a_{jk} \in C^\infty(U)$.

Como, os campos $L_1, \ldots, L_n$ são linearmente independentes em U, então em particular no ponto p a matriz $(a_{jk}(p))_{n\times N}$ tem uma submatriz $n \times n$ com determinante diferente de zero.

Fazendo uma permutação nas variáveis $x_1, \ldots, x_N$ (caso seja necessário) podemos supor que $det\{(a_{jk}(p))\,, 1 \leq j, k \leq n\} \neq 0$, logo pela continuidade da função determinante e regularidade das funções (a_{jk}), $1 \leq j \leq n$ obtemos uma vizinhança de p, a qual iremos continuar denotando por U, na qual $det\{(a_{jk}(q))\,, 1 \leq j, k \leq n\} \neq 0$, para todo $q \in U$.

Agora seja $(b_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ a matriz inversa de $(a_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ em U e considere os seguintes campos vetoriais

$$L_j^\sharp = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} L_\nu d, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Então os vetores $L_{1q}^\sharp, \ldots, L_{nq}^\sharp$ também formam uma base para $\mathcal{V}_q$, para todo $q \in U$, além disso,

$$\begin{aligned}
L_j^\sharp &= \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} L_\nu \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}(\sum_{k=1}^{N} a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k})\\
&= \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}(\sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=n+1}^{N} a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k})\\
&= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{N} b_{j\nu}a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k})\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=n+1}^{N}(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k})\frac{\partial}{\partial x_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k})\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{m}(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k})\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}$ é (j,k)-ésimo elemento da matriz $(b_{jk})(a_{jk}) = Id$, logo vem que

$$L_j^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}, \quad j = 1,\dots,n,$$

onde $c_{jk} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k} \in C^\infty(U)$.

Agora que estabelecemos uma expresão conveniente para uma base de $\mathcal{V}_q^\perp$, definimos

$$\omega_l = dx_{n+l} - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}dx_\gamma, \quad l = 1,\dots,m.$$

Observe que $\{\omega_{1q},\dots,\omega_{mq}\}$ é um conjunto linearmente independente em cada $q \in U$ e

$$\begin{aligned}
\omega_l(L_j^\sharp) &= \Big(dx_{n+l} - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}dx_\gamma\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\Big)\\
&= dx_{n+l}(\frac{\partial}{\partial x_j}) + dx_{n+l}\Big(\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\Big) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}dx_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_j}) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}dx_\gamma\Big(\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{jk}dx_{n+l}(\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}dx_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_j}) - \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{\gamma l}c_{jk}dx_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_{n+k}})\\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\delta_{(n+l,n+k)} - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}\delta_{\gamma j}\\
&= c_{jl} - c_{jl} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\omega_l \in \mathcal{V}_q^\perp$, para todo $q \in U$.

Isto mostra que em cada ponto $q \in U$ o ortogonal $\mathcal{V}_q^{\perp}$ é um espaço vetorial gerado pelos vetores cotangentes $\{\omega_{1q}, \dots, \omega_{mq}\}$, de onde vem que $\mathcal{V}^{\perp} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p^{\perp}$ é um subfibrado de $\mathbb{C}T^*\Omega$. $\square$

Exemplo 3.52. Se $\mathcal{V} =< \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} >$, então $\mathcal{V}^{\perp} =< dx_{n+1}, \dots, x_{n+m} >$ com $n+m = N$.

Notação: Se $\mathcal{V}$ for uma estrutura involutiva sobre Ω denotamos $\mathcal{V}^{\perp}$ por T' e sempre $dim\mathcal{V} = n$, $dimT' = m$ e $n + m = N$.

Vamos dar agora a definição de conjunto característico de uma estrutura involutiva e do símbolo de um campo vetorial, para isto, considere $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura involutiva e $T' = \mathcal{V}^{\perp}$ o subfibrado ortogonal.

Definição 3.53. *O conjunto característico de $\mathcal{V}$ é o conjunto*

$$T^0 = T' \cap T^*\Omega$$

onde $T^*\Omega$ é o fibrado cotangente real dado como na Observação 3.43.

Definição 3.54. *O símbolo $\sigma(L)$ do campo vetorial $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é a aplicação $\sigma(L) : T^*\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\sigma(L)(p, \xi) = \xi(L_p)$, para todo $\xi \in T_p^*\Omega$.*

Agora dado um sistema de coordenadas (U, φ) em torno de p com $\varphi = (x_1, \dots, x_N)$ e $\xi \in T_p^*\Omega$, podemos escrever

$$\xi = \sum_{k=1}^{N} \xi_k dx_k \mid_p$$

com $\xi_j \in \mathbb{R}$ e $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $a_j \in C^{\infty}(U)$, então

$$\sigma(L)(p, \xi) = \xi(L_p) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \xi_k a_j(p) dx_k \mid_p (\frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p) = \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j.$$

Observação 3.55. *Seja $\mathcal{V} =< L >$ o subfibrado gerado por um único campo não singular $L \in \mathfrak{X}(U)$. Vimos que $\mathcal{V}$ é involutiva, neste caso $\mathcal{V} =< L >= \{fL\, ;\, f \in C^{\infty}(U)\}$, assim $\mathcal{V}_p = \{f(p)L_p\, ;\, f \in C^{\infty}(U)\} = \{\alpha L_p\, ;\, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Desta maneira, se $\lambda \in \mathcal{V}_p^{\perp}$, então $0 = \lambda(\alpha L_p) = \alpha\lambda(L_p)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, ou seja $\mathcal{V}_p^{\perp} = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega\, ;\, \lambda(L_p) = 0\}$.*

Supondo que (U, φ) é um sistema de coodenadas centradas em p, com $\varphi = (x_1, \dots, x_N)$

e que $\lambda = \sum_{k=1}^{N} \xi_k dx_k \,|_p$, $\xi_k \in \mathbb{C}$ e $L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $a_j \in C^\infty(U)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p^\perp &= \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega\,;\, \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j = 0\,,\, \xi_j \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N\,;\, \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j = 0\}. \end{aligned}$$

Daí interceptando $T' = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^\perp$ com o fibrado tangente real $T^*\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} T_p^*\Omega$ teremos

$$T^0 = \{(p,\xi)\,;\, \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j = 0\,,\, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\begin{aligned} T^0 &= \{(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N\,;\, \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j = 0\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R}^N\,;\, \sigma(L)(p,\xi) = 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, para determinar o conjunto característico de um operador L, ou seja, para determinar o conjunto característico de uma estrutura involutiva $\mathcal{V}$ gerado por um único campo L precisamos saber em quais dos pontos de $\mathbb{R}^N$ o símbolo se anula.

Exemplo 3.56. Se $L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $a_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e $N \geq 2$, então T^0 é não trivial.

De fato, o símbolo de L é $\sigma(L)(x,\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\xi_j$ com $a_j \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, logo $\sigma(L)(x,\xi) = 0$ com $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}$ não todos nulos.

Exemplo 3.57. Se $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{(x,y)})$, então $T^0 = \{(0,0)\}$.

De fato, $\sigma(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}})(x, y, \xi_1, \xi_2) = \dfrac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2) = 0$ se e somente se $\xi_1 = \xi_2 = 0$, por tanto

$$T^0 = \{(0,0)\}$$

Definição 3.58. *Se $\mathcal{V} =< L_1, \ldots, L_n >$, onde $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $j = 1, \ldots, N$ em (U, φ), então o conjunto característico de $\mathcal{V}$ sobre U é descrito pelas equações*

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(p)\xi_k = 0$$

com $p \in U$, $\xi_k \in \mathbb{R}$ *e* $j = 1, \ldots, N$.

Exemplo 3.59. O operador de Mizohata $M = \dfrac{\partial}{\partial t} - it\dfrac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{(x,t)})$, $\xi = \xi_1 dx + \xi_2 dt$, temos que $\sigma(M)(x,t,\xi_1,\xi_2) = \xi_2 - it\xi_1 = 0$ se e somente se $\xi_2 = 0$ ou $t\xi_1 = 0$, por tanto

$$T^0_{(x,t)} = \begin{cases} \{(0,0)\} & , \quad \text{se } t \neq 0 \\ \{\xi_1 dx\mid_p ; \, \xi_1 \in \mathbb{R}\} & , \quad \text{se } t = 0 \end{cases}$$

em particular temos que

$$dim T^0_{(x,t)} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } t \neq 0 \\ 1 & , \quad \text{se } t = 0 \end{cases}$$

logo T^0 não é subfibrado.

Definição 3.60. *Se* $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ *é um subfibrado vetorial, definimos o subfibrado conjugado de* $\mathcal{V}$ *por*

$$\overline{\mathcal{V}} = \bigcup_{p\in\Omega} \overline{\mathcal{V}}_p,$$

onde $\overline{\mathcal{V}}_p = \{\overline{v}\, ; \; v \in \mathcal{V}_p\}$.

Observação 3.61. *Uma definição análoga pode-se dar para um subfibrado vetorial de* $\mathbb{C}T^*\Omega$*, mais ainda, a seguinte igualdade é satisfeita*

$$(\overline{\mathcal{V}})^\perp = \overline{(\mathcal{V}^\perp)}.$$

Daremos agora algumas estruturas especiais que pode-se encontrar na teoria das estrururas involutivas.

Definição 3.62. *Seja* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ *uma estrutura involutiva. Então* $\mathcal{V}$ *é dita uma estrutura*

i) Elítica se $T^0_p = \{0\}$*, para todo* $p \in \Omega$.

ii) Complexa se $\mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}_p} = \mathbb{C}T_p\Omega$*, para todo* $p \in \Omega$.

iii) C-R se $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}_p} = 0$*, para todo* $p \in \Omega$.

iv) Essencialmente real se $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}_p}$*, para todo* $p \in \Omega$.

Exemplo 3.63. seja $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{(x,y)})$ e $\mathcal{V} =< \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} >$, então $\mathcal{V}$ é estrutura C-R e elítica.

De fato, já vimos que $T^0_{(x,y)} = \{(0,0)\}$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $\mathcal{V}$ é elítica.
Agora se $v \in \mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}_p}$, então $v = \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}} |_p$ e $v = \beta \frac{\partial}{\partial z} |_p$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, assim

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}} |_p = \beta \frac{\partial}{\partial z} |_p \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

o qual implica que $v = 0$, portanto $\mathcal{V}$ é C-R.

Exemplo 3.64. Seja $\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$, então $\mathcal{V} =< \frac{\partial}{\partial x_j} >$ é essencialmente real.
De fato, observamos anteriormente que $\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, assim

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{V}_p} &= \{\bar{v}\,;\, v \in \mathcal{V}_p\} = \{\bar{v}\,;\, v = \alpha \frac{\partial}{\partial x_j}, \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} |_p \,;\, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\beta \frac{\partial}{\partial x_j} |_p \,;\, \beta \in \mathbb{C}\} = \mathcal{V}_p \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}_p}\,, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^N.$$

Isto é $\mathcal{V}$ é uma estrutura essencialmente real.

Na seguinte definição vamos introduzir o que vem a ser um dos conceitos mais importantes da teoria de estruturas involutivas e, portanto, também para este trabalho.

Definição 3.65. *(Estrutura localmente integrável).*
Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura involutiva sobre Ω, dizemos que $\mathcal{V}$ é localmente integrável se para cada $p \in \Omega$, existe um aberto $U \subseteq \Omega$ com $p \in U$ e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\{dZ_1(q), \ldots, dZ_m(q)\}$ é uma base de T'_q, para todo $q \in U$.
Em outras palavras, para cada $p \in \Omega$ é possível obter uma carta (U, φ), centrada em p, $\varphi = (x_1, \ldots, x_N)$; funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(U)$ e seções $L_1, \ldots, L_n$ de $\mathcal{V}$ sobre U tais que

i) $\{dZ_1(q), \ldots, dZ_m(q)\}$ é linearmente independente para todo $q \in U$.

ii) $\{L_{1q}, \ldots, L_{nq}\}$ é linearmente independente para todo $q \in U$.

iii) Se $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$, $j = 1, \ldots, n$, então $0 = dZ_l(L_j) = L_j(Z_l) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial Z_l}{\partial x_k}$, para todo $j = 1, \ldots, n$ e $l = 1, \ldots, m$.

Observação 3.66. *Dizemos que um operador é localmente integrável quando a estrutura gerada por ele for localmente integrável, analogamente falamos em sistema de operadores localmente integráveis.*

Exemplo 3.67. O operador de Mizohata $M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x}$ é localmente integrável.
De fato, notemos que M é não singular em $\mathbb{R}^2$, ou seja $M_{(x,t)} \neq 0$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Logo $\mathcal{V} =< M >$ é involutiva.
Por outro lado tomando $Z(x,t) = x + i\frac{t^2}{2}$, temos que $Z \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $dZ = dx + itdt \neq 0$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, além disso,

$$dZ(M) = MZ = \frac{\partial}{\partial t}(x + i\frac{t^2}{2}) - it\frac{\partial}{\partial x}(x + i\frac{t^2}{2}) = it - it = 0.$$

Portanto $\mathcal{V}$ é localmente integrável e $T' =< dZ >$.

Proposição 3.68. *Seja* $L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ *e* $f \in C^\infty(U)$ *tal que* $Lf = 0$. *Se* $h \in \mathcal{O}(V)$, *onde* V *é aberto de* $\mathbb{C}$ *com* $Im(f) \subset V$, *então* $L(h \circ f) = 0$. *Mais geralmente se* $Lf_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$ *e* $h \in \mathcal{O}(V)$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$, *com* $Im(f) \subset V$, *onde* $f = (f_1, \ldots, f_m)$, *então* $L(h \circ f) = 0$.

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^m & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \\ & {\scriptstyle F}\searrow & \downarrow & \nearrow{\scriptstyle H} & \\ & & \mathbb{R}^{2m} & & \end{array}$$

onde a seta vertical indica o isomorfismo G entre $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{R}^{2m}$. Logo, $F = G \circ f$, $H = h \circ G^{-1}$ e, além disso, $H \circ F = h \circ f$.
Aqui $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ com $\zeta_j = u_j + iv_j$, $j = 1, \ldots, m$ e $f_j(x) = u_j(x) + iv_j(x)$. Pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(h \circ f) = \frac{\partial}{\partial x_j}(H \circ F) = \sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial H}{\partial u_k}.\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial v_k}.\frac{\partial v_k}{\partial x_j}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} L(h \circ f) &= \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(h \circ f) \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_k}.\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial v_k}.\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left[\Big(\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial H}{\partial u_k} + \Big(\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial H}{\partial v_k}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\Big(Lu_k\frac{\partial H}{\partial u_k} + Lv_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\Big), \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$L(h\circ f)=\sum_{k=1}^{m}\Big(Lu_k\frac{\partial H}{\partial u_k}+Lv_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\Big). \tag{3.1}$$

Por outro lado, como h é holomorfa então $\dfrac{\partial h}{\partial\bar{\zeta}_k}=0$, $k=1,\ldots,m$, mas

$$0=\frac{\partial h}{\partial\bar{\zeta}_k}=\frac{1}{2}(\frac{\partial H}{\partial u_k}+i\frac{\partial H}{\partial v_k}),$$

logo $-i\dfrac{\partial H}{\partial v_k}=\dfrac{\partial H}{\partial u_k}$, o qual implica que $\dfrac{\partial H}{\partial v_k}=i\dfrac{\partial H}{\partial u_k}$. Portanto, de (3.1) temos

$$\begin{aligned} L(h\circ f) &= \sum_{k=1}^{m}\Big(Lu_k\frac{\partial H}{\partial u_k}+iLv_k\frac{\partial H}{\partial u_k}\Big) = \sum_{k=1}^{m}(Lu_k+iLv_k)\frac{\partial H}{\partial u_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m}(L(u_k+iv_k))\frac{\partial H}{\partial u_k} = \sum_{k=1}^{m}(Lf_k)\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos que $L(h\circ f)=0$. $\square$

Observação 3.69. *Um fato interessante que devemos observar é que na definição de estrutura localmente integrável não precisamos mencionar que $\mathcal{V}$ é involutiva, pois se $\mathcal{V}$ é um subfibrado que satisfaz a definição de estrutura localmente integrável, então ela é involutiva.*

Proposição 3.70. *Seja $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{C}T\Omega$ um subfibrado e suponha que em cada $p\in\Omega$ existe uma carta (U,φ), centrada em p com $\varphi=(x_1,\ldots,x_N)$ e que existem seções de $\mathcal{V}$, $L_1,\ldots,L_n$ sobre U e $Z_1,\ldots,Z_m$ funções $C^\infty(U)$ tais que $L_jZ_l=0$, $j=1,\ldots,n$ e $l=1,\ldots,m$. Onde $\mathcal{V}$ é gerado sobre U pelas seções $L_1,\ldots,L_n$ e $T'=\mathcal{V}^\perp$ é gerado sobre U pelas 1-formas $dZ_1,\ldots,dZ_m$, então $\mathcal{V}$ é involutiva.*

Demonstração. Notemos que para todo $j=1,\ldots,n$ e $l=1,\ldots,m$ temos

$$dZ_l([L_j,L_k])=[L_j,L_k](Z_l)=L_j(L_k(Z_l))-L_k(L_j(Z_l))=0$$

pois $L_j,L_k\in\mathcal{V}$ e $dZ_l\in T'=\mathcal{V}^\perp$.
Portanto $[L_j,L_k]\perp dZ_l$, para todo $j,k=1,\ldots,n$ e $l=1,\ldots,m$, o qual implica que $[L_j,L_k]\in(T')^\perp=(\mathcal{V}^\perp)^\perp=\mathcal{V}$ para todo $j,k=1,\ldots,n$. Logo $\mathcal{V}$ é involutiva. $\square$

Lema 3.71. *Seja $V\subseteq\mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial complexo e $V_0=V\cap\mathbb{R}^N$, então $V_0+iV_0=V\cap\overline{V}$.*

Demonstração. Mostremos primeiro que $V_0 + iV_0 \subset V \cap \overline{V}$. De fato, sejam $x, y \in V_0 = V \cap \mathbb{R}^N$, em particular $x, y \in V$ e como V é espaço vetorial complexo segue que $x + iy$, $x - iy \in V$. Por outro lado $x + iy = \overline{x - iy} \in \overline{V}$, portanto $x + iy \in V \cap \overline{V}$, $\forall x, y \in V_0$.

Mostremos agora que $V \cap \overline{V} \subset V_0 + iV_0$. De fato, seja $z \in V \cap \overline{V}$, então $\bar{z} \in \overline{V \cap \overline{V}} = V \cap \overline{V}$, logo $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\frac{1}{2}(i\bar{z} - iz) \in V$, daí $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$ e $Im(z) = \frac{1}{2}(i\bar{z} - iz) \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$, mas $z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + i\frac{1}{2}(i\bar{z} - iz) \in V_0 + iV_0$. □

Corolário 3.72. *Se T^0 é o conjunto característico de uma estrutura involutiva $\mathcal{V}$ e T' é o subfibrado ortogonal, então para cada $p \in \Omega$ temos que*

$$T_p^0 + iT_p^0 = T_p' \cap \overline{T'}_p.$$

Demonstração. Como T_p' e um subespaço vetorial complexo e $T_p^0 = T_p' \cap T_p^*\Omega$, o resultado segue do Lema 3.71 □

Corolário 3.73. *Uma estrutura involutiva $\mathcal{V}$ é elítica se e somente se $T_p' \cap \overline{T'}_p = 0$.*

Demonstração. $\mathcal{V}$ é elítica se e somente se $T_p^0 = T_p' \cap T_p^*\Omega = 0$, para todo $p \in \Omega$ e pelo Corolário 3.72 isso é verdadeiro se e somente se $T_p' \cap \overline{T'}_p = 0$. □

3.4 O teorema de Frobenius e geradores locais

Nesta parte vamos obter um resultado que nos permite escolher coordenadas locais apropriadas e geradores locais do subfibrado vetorial ortogonal T' quando a estrutura $\mathcal{V}$ é localmente integrável (Teorema 3.78). Este resultado é de extrema utilidade.
Vamos iniciar mostrando o Teorema de Frobenius, para isso precisamos do resultado seguinte.

Teorema 3.74. *Seja $L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ um campo vetorial real não singular na origem $0 \in \mathbb{R}^N$, isto é $a_j \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $j = 1, \ldots, N$ e $L_0 \neq 0$. Então existem coordenadas locais $y_1, \ldots, y_N$ definida numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^N$, segundo as quais L se escreve como $\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial y_1}$*

Demonstração. Podemos supor que $a_1(0) \neq 0$ (caso contrário uma permutação de variáveis resolve o problema). Considere o seguinte P.V.I

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = a_j(x_1, \ldots, x_N) \quad , \quad j = 1, \ldots, N \\ x_1(0, y_2, \ldots, y_N) = 0 \\ x_j(0, y_2, \ldots, y_N) = y_j \quad , \quad j = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Pelo Teorema de existência, unicidade e dependência C^∞ de soluções de E.D.O obtemos a única solução $(t, y_2, \ldots, y_N)$ do P.V.I acima a qual é C^∞ em uma vizinhança da origem. Como a matriz jacobiana na origem é dada por

$$J = \begin{bmatrix} a_1(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2(0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3(0) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N(0) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e $det(J) = a_1(0) \neq 0$, então pelo Teorema da função inversa obtemos $t = t(x)$ e $y_j = y_j(x)$, $j = 2, \ldots, N$, ou seja

$$\begin{cases} t &= t(x_1(t,y), \ldots, x_N(t,y)) \\ y_j &= y_j(x_1(t,y), \ldots, x_N(t,y)) \quad , \quad j = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Derivando ambas as expressões acima em relação a t obtemos o seguinte

$$\begin{cases} 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} a_k \frac{\partial t}{\partial x_k} = L(t) \\ 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = L(y_j) \quad , \quad j = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Agora se colocarmos $y_1 = t$, nas novas coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ teremos

$$L = \sum_{j=1}^{N} L(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

□

Teorema 3.75. *(Frobenius)*
Sejam $L_1, \ldots, L_n$ campos reais linearmente independentes em cada ponto de uma vizinhança V da origem de $\mathbb{R}^N$. Suponha que o subfibrado $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}TV$ definido por estes campos seja uma estrutura involutiva. Então existem coordenadas locais $y_1, y_2, \ldots, y_N$ em torno da origem de $\mathbb{R}^N$ tais que numa vizinhança da origem, $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_N}$.

Demonstração. A demonstração segue por indução sobre a dimensão N.

No caso $N = 1$ temos $L = a(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}$ com $a(x_1) \neq 0$ numa vizinhança da origem, portanto $\mathcal{V} =< \frac{\partial}{\partial x_1} >$ nesta vizinhança.

Suponhamos agora que o teorema seja verdadeiro para qualquer natural menor do que N. Fazendo uma mudança de variáveis conveniente (sugerido pelo Teorema 3.74), podemos assumir que os campos acima se escrevem

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ L_j &= \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Logo sejam $L_1^\sharp = L_1$ e $L_j^\sharp = L_j - a_{j1}L_1$, $j = 2, \ldots, n$ então $L_1^\sharp, \ldots, L_n^\sharp$ geram $\mathcal{V}$ numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^N$ (basta ver que $L_1^\sharp, \ldots, L_n^\sharp$ são l.i e que $L_1^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_1}$ afeta apenas as derivadas em relação a x_1).
Teremos assim que

$$\begin{cases} L_1^\sharp &= \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ L_j^\sharp &= \displaystyle\sum_{k=2}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 2, \ldots, n \end{cases}$$

além disso, pela involutividade temos que

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp] = \sum_{\nu=2}^{N} c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp, \quad j, k = 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

Agora considere os campos

$$M_j = \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(0, x_2, \ldots, x_N) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 2, \ldots, n$$

definidos numa vizinhança W da origem em $\mathbb{R}^{N-1}$. Aqui a variável $x_1 = 0$ (congelada em zero).
Devido a (3.2) acima, o subfibrado $\mathcal{V}^0$ de $\mathbb{C}TW$ gerado por $M_2, \ldots, M_n$ também é uma estrutura involutiva de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^{N-1}$, segue por indução que existem coordenadas $y_2, \ldots, y_N$ segundo as quais $\mathcal{V}^0 =< \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n} >$. Portanto, como M_j é seção de $\mathcal{V}^0$ sobre W então temos que

$$M_j = \sum_{k=2}^{n} b_{jk}(y_2, \ldots, y_N) \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad j = 2, \ldots, n.$$

Assim, retornando as coordenadas originais $(x_1, \ldots, x_N)$, podemos assumir que

$$L_j^\sharp = \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(x_1, \ldots, x_N)\frac{\partial}{\partial x_k}; \quad j = 2, \ldots, n$$

e em $x_1 = 0$ temos que

$$L_j^\sharp = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(0, x_2, \ldots, x_N)\frac{\partial}{\partial x_k}; \quad j = 2, \ldots, n$$

ou seja, $a_{jk}(0, x_2, \ldots, x_N) = 0$ para $j = 2, \ldots, n$ e $k = n+1, \ldots, N$.
Vamos mostrar agora que $a_{jk}(x_1, \ldots, x_N) = 0$ para $j = 2, \ldots, n$ e $k = n+1, \ldots, N$.
Notemos que para $j = 2, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned}
[L_1^\sharp, L_j^\sharp] &= L_1^\sharp L_j^\sharp - L_j^\sharp L_1^\sharp \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\sum_{k=2}^{N} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) - \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado pela involutividade de $\mathcal{V}$ temos para $j = 2, \ldots, n$ que

$$\begin{aligned}
[L_1^\sharp, L_j^\sharp] &= \sum_{\nu=1}^{n} c_{1j}^{\nu} L_\nu^\sharp \\
&= c_{1j}^1 L_1^\sharp + \sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^{\nu} L_\nu^\sharp \\
&= c_{1j}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^{\nu}\Big(\sum_{k=2}^{N} a_{\nu k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big) \\
&= c_{1j}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{N}\Big(\sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^{\nu} a_{\nu k}(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$[L_1^\sharp, L_j^\sharp] = \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{3.3}$$

$$[L_1^\sharp, L_j^\sharp] = c_{1j}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{N} \Big(\sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu a_{\nu k}(x) \Big) \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3.4}$$

Portanto, das equações (3.3) e (3.4) segue que

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_1} = \sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu a_{\nu k} \quad ; \quad k = 2, \ldots, N \text{ e } j = 2, \ldots, n.$$

Agora para $k = n+1, \ldots, N$ o P.V.I seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{a}_{jk}}{dx_1} = \displaystyle\sum_{\nu=2}^{N} c_{1j}^\nu \tilde{a}_{\nu k} \\ \tilde{a}_{jk}(x) \mid_{x_1=0} = 0; \quad j = 2, \ldots, n \end{cases}$$

tem como solução os vetores $(a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ e $(0, 0, \ldots, 0)$ e pela unicidade de soluções para o P.V.I vem que $a_{jk}(x) = 0$ numa vizinhança da origem para $j = 2, \ldots, n$ e $k = n+1, \ldots, N$. Desta forma temos que

$$L_1^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad L_j^\sharp = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \; ; \; j = 2, \ldots, n.$$

Isto é, $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, o que prova o teorema. □

Lema 3.76. *Seja $V \subseteq \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial complexo com dim$(V) = m$ e seja $V_0 = V \cap \mathbb{R}^N$ onde $d = dim_{\mathbb{R}}(V_0)$ e $\nu = m - d \geq 0$. Seja $V_1 \subseteq \mathbb{C}^N$ o subespaço vetorial tal que $(V_0 + iV_0) \oplus V_1 = V$, considere $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ base de V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ base real de V_0. Se escrevemos $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \ldots, \nu$ então*

a) $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ *é base de* V.

b) $\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_\nu\}$ *é l.i sobre* $\mathbb{R}$.

c) $\nu + m \leq N$.

Demonstração. Mostremos a). Como $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ é base (complexa) de V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é base (real) de V_0, então $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é base complexa de $V_0 + iV_0$ (complexa no sentido de podermos usar coeficientes complexos nas combinações lineares), mas $(V_0 + iV_0) \cap V_1 = \{0\}$ e $V = (V_0 + iV_0) \oplus V_1$, então segue que $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é base de V.

Para mostrar b) notemos primeiro que $V \cap \overline{V}_1 = 0$. De fato, se $z = x + iy \in V \cap \overline{V}_1$, então $\bar{z} = x - iy \in V_1 \subset V$, ou seja $z, \bar{z} \in V$ logo $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$ e $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$, logo $x, y \in V_0$ e $\bar{z} = x - iy = x + i(-y) \in V_0 + iV_0$. Daí

$\bar{z} \in V_1 \cap (V_0 + iV_0) = \{0\}$, então $\bar{z} = 0$, o qual implica que $z = 0$. Portanto $V \cap \overline{V}_1 = 0$. Agora, como $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ é base de V_1 então $\{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_\nu\}$ é base de $\overline{V}_1$ e pelo item $a)$ temos que $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base de V, então $\beta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_\nu\}$ é base de $V \oplus \overline{V}_1$. Mas $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \dots, \nu$. Portanto, recombinando os elementos de β obtemos uma nova base $\beta' = \{\xi_1, \dots, \xi_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ para $V \oplus \overline{V}_1$, em particular este conjunto é l.i sobre $\mathbb{C}$ e, portanto, l.i sobre $\mathbb{R}$.

Finalmente para mostrar $c)$ basta observar que como o conjunto β' é uma base complexa de $V \oplus \overline{V}_1 \subseteq \mathbb{C}^N$, então $\nu + m \leq N$. □

Corolário 3.77. *Nas mesmas hipóteses do Lema 3.76, a seguinte igualdade se satisfaz*

$$V \oplus \overline{V}_1 = V \oplus \overline{V}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} V \oplus \overline{V} &= [(V_0 + iV_0) \oplus V_1] \oplus \overline{[(V_0 + iV_0) \oplus V_1]} \\ &= [(V_0 + iV_0) \oplus V_1] \oplus [(V_0 + iV_0) \oplus \overline{V}_1] \\ &= V \oplus \overline{V}_1. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.78. *(geradores locais)*
Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura localmente integrável definida sobre a variedade Ω, $p \in \Omega$ e $d = dim_{\mathbb{R}} T_p^0$. Então existe um sistema de coordenadas centrado em p, zerando em p

$$\{x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

e funções $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de classe C^∞ definidas numa vizinhança da origem e a valores reais satisfazendo

$$\varphi_k(0) = 0 \, = \, d\varphi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

tais que os diferenciais das funções

$$Z_j(x, y) = z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, \nu;$$
$$W_k(x, y, s, t) = s_k + i\varphi_k(x, y, s, t), \quad k = 1, \dots, d,$$

geram T' em uma vizinhança da origem. Em particular, temos que $\nu + d = m$, $\nu + n' = n$ e também

$$T_p^0 =< ds_1 \,|_0, \dots, ds_d \,|_0> .$$

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável sobre Ω, $p \in \Omega$ e $G_1, \ldots, G_m \in C^\infty(W)$, com W vizinhança de p tais que $\{dG_1(q), \ldots, dG_m(q)\}$ é base de T'_q, para todo $q \in W$. Vamos aplicar o Lema 3.76 com $V = T'_p \subseteq \mathbb{C}T^*_p\Omega \cong \mathbb{C}^N$ e $V_0 = T'_p \cap T^*_p\Omega = T^0_p$. Seja $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ a base de T'_p (como no item a) do Lema 3.76). Então existe uma matriz invertível $(c_{jk})_{m\times m}$ (matriz mudança de base), tal que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{jk} dG_k(p) = \zeta_j \quad , \quad j = 1, \ldots, \nu \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{jk} dG_k(p) = \xi_j \quad , \quad j = \nu+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{3.5}$$

ou seja,

$$(c_{jk}). \begin{bmatrix} dG_1(p) \\ \vdots \\ dG_\nu(p) \\ dG_{\nu+1}(p) \\ \vdots \\ dG_m(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_\nu \\ \xi_{\nu+1} \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} Z_j(q) &= \sum_{k=1}^{m} c_{j,k}(G_k(q) - G_k(p)) \quad , \quad q \in W, j = 1, \ldots, \nu \\ W_l(q) &= \sum_{k=1}^{m} c_{\nu+l,k}(G_k(q) - G_k(p)) \quad , \quad q \in W, l = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Temos assim por (3.5) que $dZ_1, \ldots, dZ_\nu, dW_1, \ldots, dW_d$ geram T' numa vizinhança de p. Pela conclusão *b*) do Lema 3.76, com $Z_j = x_j + iy_j$; $dZ_j = \zeta_j = dx_j + idy_j$, $j = 1, \ldots, \nu$; $dW_l(p) = \xi_l$ e $s_l = Re(W_l)$, temos que

$$\{dx_1(p), \ldots, dx_\nu(p), dy_1(p), \ldots, dy_\nu(p), ds_1(p), \ldots, ds_d(p)\}$$

é um conjunto linearmente independente sobre $\mathbb{R}$.

Agora escolhamos $t_1, \ldots, t_{n'}$ funções C^∞ a valores reais definidas numa vizinhança de p com $t_k(p) = 0$, $k = 1, \ldots, n'$ onde $\nu + n' = n$ de modo que $dx_1, \ldots, dx_\nu, dy_1, \ldots, dy_\nu, ds_1, \ldots, ds_d$, $dt_1, \ldots, dt_{n'}$ sejam linearmente independentes em p. Logo (x, y, s, t) é um sistema de coordenadas centrada em p e anulando-se em p. Temos, portanto,

$$\begin{cases} Z_j &= x_j + iy_j \qquad , \quad j = 1, \ldots, \nu \\ W_l &= s_l + i\varphi_l(x, y, s, t) \end{cases}$$

e $dZ_1, \ldots, dZ_\nu, dW_1, \ldots, dW_d$ geram T' numa vizinhança de p, além disso,

$$\begin{cases} x_j(p) = y_j(p) &= 0\,, \quad j = 1, \ldots, \nu \\ s_l(p) &= 0\,, \quad l = 1, \ldots, d \\ t_k(p) &= 0\,, \quad k = 1, \ldots, n' \end{cases}$$

daí

$$\begin{aligned} &\varphi_l(0) = \varphi_l(x(p), y(p), s(p), t(p)) = \varphi_l(0,0,0,0) = 0\,,\ (\text{ pois } \omega_l(0) = 0) \quad \text{e} \\ &dW_l(p) = ds_l(p) + id\varphi_l(x(p), y(p), s(p), t(p)) = \xi_{\nu+l} \text{ real}\,. \end{aligned}$$

Logo $d\varphi_l(0,0,0,0) = 0$, $l = 1, \ldots, d$. □

O seguinte corolário é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 3.79. *Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura localmente integrável, $p \in \Omega$. Então existe um sistema de coordenadas zerando em p $\{x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n\}$ e funções a valores reais suaves $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ definidas numa vizinhança da origem satisfazendo*

$$\varphi_k(0,0) = 0 \qquad d_x\varphi_k(0,0) = 0\ ,\ k = 1, \ldots, m,$$

tais que os diferenciais das funções $Z_k(x,t) = x_k + i\varphi_k(x,t)$ geram T' em uma vizinhança da origem.

Aplicação: Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura localmente integrável segundo o corolário anterior existe um sistema de coordenadas zerando em p, $(x,t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n)$ e existem funções reais φ_k de classe C^∞ numa vizinhança da origem satisfazendo $\varphi_k(0,0) = 0$ e $d_x\varphi_k(0,0) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, tais que os diferenciais das funções $Z_k(x,t) = x_k + i\varphi_k(x,t)$, $k = 1, \ldots, m$ geram T' numa vizinhança de p.

Agora vamos definir alguns campos vetoriais numa vizinhança da origem do $\mathbb{R}^N$ pondo

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} M_{kl}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_l} \quad , \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.6}$$

de modo que $M_k Z_j = \delta_{kj}$, $k = 1, \ldots, m$. Ou seja, os coeficientes M_{kl} são definidos pela igualdade de matrizes abaixo

$$\left[\sum_{l=1}^{m} M_{kl} \frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]_{1\leq k,j\leq m} = I_{m\times m}.$$

Na matriz do lado esquerdo da igualdade acima, fixando um (k,j) e somando em l obtemos o (k,j)-ésimo elemento do produto de $\left[M_{kl}\right]_{m\times m}$ pela transposta de $\left[\frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]_{m\times m}$, ou seja, para determinarmos a matriz $\left[M_{kj}\right]_{m\times m}$ precisamos resolver o sistema linear seguinte

$$\left[M_{kl}\right]_{m\times m} \left[\frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]^t_{m\times m} = \left[\sum_{l=1}^{m} M_{kl} \frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]_{m\times m} = I_{m\times m}.$$

Como os diferenciais das funções Z_k geram T' numa vizinhança da origem então os vetores $dZ_k = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial Z_k}{\partial x_l} dx_l$ são linearmente independentes nesta vizinhança. Em outras palavras a matriz $\left[\frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]^t_{m\times m}$ é invertível , logo

$$[M_{kl}]_{m\times m} = \left[\left[\frac{\partial Z_j}{\partial x_l}\right]^t\right]^{-1}.$$

Agora se $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$, pelo corolário acima temos que

$$Z_x(0,0) = \left[\frac{\partial Z_j}{\partial x_l}(0,0)\right]_{m\times m} = I_x + i\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(0,0)\right] = I_{m\times m},$$

onde a última igualdade é satisfeita porque $d_x\varphi_k(0,0) = 0$, para $k = 1, \ldots, m$.
Defina

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi_l(x,t)}{\partial t_j} M_l. \tag{3.7}$$

Então temos que

$$\begin{cases} L_1, L_2, \ldots, L_n & \text{são l.i} \\ L_j Z_k = 0 & j = 1, \ldots, n \text{ e } k = 1, \ldots, m \end{cases}$$

De fato, para mostrar que $L_1, \ldots, L_n$ são l.i, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$L = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu L_\nu \equiv 0,$$

e seja $\psi_j(x,t) = t_j$, $j = 1, \ldots, n$ então

$$0 = Lt_j = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu L_\nu t_j = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Mostremos agora que $L_j Z_k = 0$:

$$\begin{aligned} L_j Z_k &= \Big(\frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t_j}(x,t) M_l\Big)(Z_k) = \frac{\partial}{\partial t_j}(Z_k) - i \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t_j} M_l(Z_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_j}(x_k + i\varphi_k(x,t)) - i \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t_j}\delta_{kl} = i\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} - i\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_j Z_k = 0 \ , \quad \text{para } j = 1, \ldots, n \text{ e } k = 1, \ldots, m.$$

De tudo o feito na aplicação anterior temos as seguintes conclusões:

Proposição 3.80. *Sejam os campos M_k e L_j definidos nas equações (3.6) e (3.7) respectivamente, então temos as seguintes conclusões:*

a) Os campos $L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m$ geram $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$ numa vizinhança da origem.

b) $\mathcal{V} =< L_1, \ldots, L_n >$.

c) A base dual de $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m\}$ é $\{dt_1, \ldots, dt_n, dZ_1, \ldots, dZ_m\}$ (base de $\mathbb{C}T^*\Omega$).

d) Os campos $L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m$ comutam entre si.

e) Se $f \in C^1$, então

$$df = \sum_{j=1}^{n} L_j f dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k f dZ_k.$$

Demonstração. Mostremos a). Como sabemos, a matriz $\big[M_{kl}\big]_{m\times m}$ que define os campos M_k é invertível, então os campos $M_1, \ldots, M_m$ são l.i e por definição não dependem das variáveis $t_1, \ldots, t_n$ o que garante a independência linear com os campos $L_1, \ldots, L_n$. Segue-se que o conjunto $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m\}$ é linearmente independente em $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$, e $m + n = N$, ou seja, geram $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$ numa vizinhança da origem.

Para mostrar b). Pelo Corolário 3.79 os diferenciais $dZ_1, \ldots, dZ_m$ geram T' numa vizinhança da origem e

$$dZ_k(L_j) = L_j(Z_k) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n.$$

Portanto, $\{dZ_1, \ldots, dZ_m\}$ é base dual de $\{L_1, \ldots, L_n\}$, ou seja,

$$< L_1, \ldots, L_n >= (T')^{\perp} = (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}.$$

Para verificar $c)$ basta observar que

$$\begin{array}{lllll} dZ_j(M_l) & = & M_l(Z_j) & = & \delta_{lj} \quad j,l = 1, \ldots, m \\ dZ_j(L_k) & = & L_k(Z_j) & = & 0 \quad j = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n \\ dt_k(L_j) & = & L_j(t_k) & = & \delta_{jk} \quad j,k = 1, \ldots, n \\ dt_k(M_j) & = & M_j(t_k) & = & 0 \quad j = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Para mostrar $d)$ vamos usar o item $c)$ e o seguinte

$$\begin{array}{lllllllll} dt_l([L_j, L_k]) & = & [L_j, L_k](t_l) & = & L_j(L_k t_l) - L_k(L_j t_l) & = & L_j(\delta_{kl}) - L_k(\delta_{jl}) & = & 0 \\ dt_l([L_j, M_k]) & = & [L_j, M_k](t_l) & = & L_j(M_k t_l) - M_k(L_j t_l) & = & L_j(0) - M_k(\delta_{jl}) & = & 0 \\ dt_l([M_j, M_k]) & = & [M_j, M_k](t_l) & = & M_j(M_k t_l) - M_k(M_j t_l) & = & L_j(0) - L_k(0) & = & 0 \\ dZ_l([L_j, L_k]) & = & [L_j, L_k](Z_l) & = & L_j(L_k Z_l) - L_k(L_j Z_l) & = & L_j(0) - L_k(0) & = & 0 \\ dZ_l([L_j, M_k]) & = & [L_j, M_k](Z_l) & = & L_j(M_k Z_l) - M_k(L_j Z_l) & = & L_j(\delta_{kl}) - L_k(0) & = & 0 \\ dZ_l([M_j, M_k]) & = & [M_j, M_k](Z_l) & = & M_j(M_k Z_l) - M_k(M_j Z_l) & = & M_j(\delta_{kl}) - M_k(\delta_{jl}) & = & 0. \end{array}$$

Estas contas mostram que se $X, Y \in \{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m\}$, então $[X, Y] \perp \mathbb{C}T^*U$ onde U é uma vizinhança da origem. Logo $[X, Y] \in (\mathbb{C}T^*U)^{\perp} = \{0\}$, então $[X, Y] = 0$ portanto $L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m$ comutam entre si.

Finalmente para mostrar $e)$. Se $f \in C^1$, temos que $df \in \mathbb{C}T^*U$, então

$$df = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dt_j + \sum_{k=1}^{m} \beta_k dZ_k$$

mas

$$df(L_\nu) = L_\nu(f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dt_j(L_\nu) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k dZ_k(L_\nu) = \alpha_\nu$$

$$df(M_\nu) = M_\nu(f) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dt_j(M_\nu) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k dZ_k(M_\nu) = \beta_\nu.$$

Portanto temos que

$$df = \sum_{j=1}^{n} L_j f dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k f dZ_k.$$

□

Observação 3.81. *Se na aplicação anterior, nós consideramos apenas um campo vetorial L localmente integrável definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contém a origem, então usando (3.6) e (3.7) podemos considerar que L tem a forma seguinte*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde cada λ_k é dado por

$$\lambda_k(x,t) = -i \sum_{l=1}^{n} M_{kl}(x,t) \frac{\partial \varphi_l}{\partial t}(x,t).$$

3.5 Teorema de aproximação de Baouendi-Treves

Nesta seção vamos discutir um dos resultados importantes na teoria das estruturas localmente integráveis, o chamado Teorema de aproximação de Baouendi-Treves, bem como algumas de suas consequências. Neste trabalho somente vamos mostrar uma versão particular deste teorema que é o caso em que temos um campo L definido em um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$ e uma função suave Z.
Vamos começar enunciando a versão geral do teorema, para isso precisamos da seguinte definição. Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura formalmente integrável sobre uma variedade suave Ω de dimensão N.

Definição 3.82. *Se $W \subset \Omega$ um subconjunto aberto e se $u \in \mathcal{D}'(W)$ é uma distribuição sobre W, dizemos que u é uma solução homogênea de $\mathcal{L}$ e escrevemos $\mathcal{L}u = 0$, se*

$$Lu = 0 \qquad \text{sobre } U$$

para toda seção local L de $\mathcal{L}$ definida sobre o subconjunto aberto $U \subset W$.

Teorema 3.83. *(Teorema de aproximação de Baouendi-Treves)*
Suponha que $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável sobre uma variedade suave Ω de dimensão N e que sobre o aberto $W \subset \Omega$ existam funções de classe C^∞, $Z_1, \dots, Z_m$ tais que $dZ_1, \dots, dZ_m$ geram $\mathcal{L}^\perp$ sobre W. Seja $p \in W$, então existe uma vizinhança $U \subset W$ de p tal que

i) toda $u \in \mathcal{D}'(W)$ que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ em W é o limite em $\mathcal{D}'(U)$ de uma sequência de polinômios $\{P_j(Z_1, \dots, Z_m)\}$, ou seja,

$$u = \lim_{j \to \infty} P_j(Z_1, \dots, Z_m) \qquad \text{em } \mathcal{D}'(U).$$

ii) se $u \in C^k(W)$, a convergência ocorre na topologia de $C^k(U)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Demonstração. Para a demonstração deste teorema pode-se consultar [1] ou [3]. $\square$

Observação 3.84. *Desde que a fórmula de aproximação é de natureza local, será suficiente restringir nossa atenção a uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ definida em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ sobre o qual $\mathcal{L}^\perp$ é gerado pelos diferenciais $dZ_1, \ldots, dZ_m$ das funções $Z_j \in C^\infty(\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$, em todo ponto de Ω. Lembramos que se n é a dimensão de $\mathcal{L}$, então $N = n + m$.*

Exemplo 3.85. Se $\mathcal{L}$ é a estrutura localmente integrável gerada sobre um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ pelo operador de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad z = x + iy,$$

então a distribuição solução de $\bar{\partial}u = 0$ é uma função holomorfa e o teorema simplesmente afirma que, qualquer função holomorfa pode ser localmente aproximada por polinômios na variável complexa z.

Lema 3.86. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, então* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(\alpha x)^2}\alpha dx = \pi^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $y = \alpha x$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(\alpha x)^2}\alpha dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy$$

Agora se $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy$, então

$$I^2 = (\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy)(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}dz) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-y^2-z^2}dydz$$

tomando $y = r\cos\theta$ e $z = r\sin\theta$, vem que

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2} = \pi$$

por tanto $I = \pi^{\frac{1}{2}}$. $\square$

Seja L um campo localmente integrável definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ que contém a origem. Usando o Corolário 3.79, podemos assumir que existe uma função $Z(x,t)$ definida em uma vizinhança da origem, digamos $U = (-a, a) \times (-a, a)$ tal que

$$Z(x,t) = x + i\varphi(x,t) \tag{3.8}$$

com φ uma função suave a valores reais, satisfazendo

$$\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0. \tag{3.9}$$

Além disso, contraindo a vizinhança U se for necessário podemos assumir que

$$\mid \varphi_x(x,t) \mid \leq \frac{1}{2}, \quad \forall (x,t) \in U. \tag{3.10}$$

Considere agora a sequência de operadores seguinte

$$G_\tau : C^0(\overline{U}) \longrightarrow C^0(\mathbb{C} \times [-a,a]) \quad \text{ dada por}$$

$$G_\tau f(z,t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} e^{-\tau[z-Z(x',t)]^2} f(x',t) Z_x(x',t) dx' \ , \ \tau > 0.$$

Definimos então

$$G_\tau f(x,t) \doteq G_\tau f(Z(x,t),t),$$

onde $Z(x,t)$ é dada em (3.8).

Teorema 3.87. *(Versão do teorema de Stone Weierstrass)*
Suponha que $f \in C^0((-a,a) \times (-a,a))$ com supp$(f) \subseteq K \times (-a,a)$, onde $K \subset (-a,a)$ é compacto, então $G_\tau f(x,t) \to f$ uniformemente em $\overline{U}$, quando $\tau \to +\infty$.

Demonstração. Escrevemos

$$G_\tau f(x,t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} v(x',t) dx'$$

onde $v(x',t) = f(x',t) Z_x(x',t)$. Em seguida fazendo a mudança de variável $y = \sqrt{\tau}(x'-x)$ na integral acima obtemos

$$G_\tau f(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2} v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) dy.$$

Por outro lado pelo Lema 3.86 temos

$$f(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-[Z_x(x,t)y]^2} v(x,t) dy.$$

Logo,

$$G_\tau f(x,t) - f(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left[e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2} v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - e^{-[Z_x(x,t)y]^2} v(x,t) \right] dy \right)$$

daí somando e subtraindo $e^{-[Z_x(x,t)y]^2}v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)$ no integrando da integral acima obtemos

$$G_\tau f(x,t) - f(x,t) = \pi^{-\frac{1}{2}}(J_\tau - I_\tau)$$

onde

$$\begin{aligned} J_\tau &= \int_{\mathbb{R}} \Big[e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)y]^2} \Big] v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)dy \\ I_\tau &= \int_{\mathbb{R}} e^{-[Z_x(x,t)y]^2} \Big[v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) + v(x,t) \Big] dy \end{aligned}$$

Mostremos que $I_\tau \to 0$ quando $\tau \to +\infty$. De fato, notemos que

$$\begin{aligned} [Z_x(x,t)y]^2 &= [(1+i\varphi_x(x,t))y]^2 \\ &= [y+i\varphi_x(x,t)y]^2 \\ &= y^2 - (\varphi_x(x,t)y)^2 + 2iy^2\varphi_x(x,t). \end{aligned}$$

Como $\mid \varphi_x(x,t) \mid \leq \frac{1}{2}$, vem que

$$Re[(Z_x(x,t)y)^2] = y^2 - (\varphi_x(x,t)y)^2 \geq y^2 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{2}y^2.$$

Logo,

$$\big|I_\tau\big| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\big|v(x+x\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - v(x,t)\big|dy.$$

Tomando $M = \sup\limits_{\overline{U}} \mid v \mid$ e $R > 0$ temos que

$$\big|I_\tau\big| \leq 2M \int_{|y|\geq R} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy + \int_{|y|<R} e^{-\frac{1}{2}y^2}\big|v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - v(x,t)\big|dy.$$

Agora dado $\epsilon > 0$, considere $R > 0$ tal que $\displaystyle\int_{|y|\geq R} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy < \frac{\epsilon}{4M}$, o qual implica que $\displaystyle 2M\int_{|y|\geq R} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Como $v(.,t)$ é uniformemente contínua, existe $\tau_0 > 0$ tal que se $\tau \geq \tau_0$, então

$$\big|v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - v(x,t)\big| \leq \frac{\epsilon}{2C}\ , \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{U} \text{ e } \mid y \mid < R$$

onde $C = \displaystyle\int_{|y|\leq R} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$, daí segue que

$$\int_{|y|<R} e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)-v(x,t)\Big|dy \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, se $\tau \geq \tau_0$ temos

$$\Big|I_\tau\Big| < \epsilon\ , \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{U}. \tag{3.11}$$

Vamos estimar agora $|J_\tau|$. Para isto, escrevemos $J_\tau = J'_\tau + J''_\tau$, onde

$$\begin{aligned} J'_\tau &= \int_{|y|\leq R}\Big[e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2} - e^{-[z_x(x,t)y]^2}\Big]v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)dy \\ J''_\tau &= \int_{|y|>R}\Big[e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)y]^2}\Big]v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)dy, \end{aligned}$$

já vimos que $Re[(Z_x(x,t)y)^2] \geq \frac{1}{2}y^2$ e também observemos o seguinte

$$\begin{aligned} Re\Big[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)\Big]^2 &= Re\Big[i\varphi(x,t)-\frac{y}{\sqrt{\tau}}-i\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)\Big]^2 \\ &= (\frac{y}{\sqrt{\tau}})^2 - \Big[\varphi(x,t)-\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)\Big]^2 \\ &\geq \frac{y^2}{\tau} - \frac{1}{4}\frac{y^2}{\tau} = \frac{3}{4}\frac{y^2}{\tau} \geq \frac{1}{2}\frac{y^2}{\tau}, \end{aligned}$$

então

$$\Big|e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)]^2}\Big| = e^{-\tau Re(Z(x,t)-Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t))^2} \leq e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Portanto

$$|J''_\tau| \leq \int_{|y|\geq R} 2e^{-\frac{1}{2}y^2}dy.$$

Dado $\epsilon > 0$ tome $R > 0$ tal que $2\displaystyle\int_{|y|\geq R} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \leq \frac{\epsilon}{2M}$, vem que

$$|J''_\tau| \leq \frac{\epsilon}{2}\ , \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{U}. \tag{3.12}$$

Por outro lado, notemos que se $A \subset \mathbb{C}$ aberto e limitado, pela desigualdade do valor médio para $e^{-\xi^2}$, existe $c > 0$ tal que

$$| e^{-\xi_1^2} - e^{-\xi_2^2} |\leq c \mid \xi_1 - \xi_2 \mid , \quad \text{para todo } \xi_1, \xi_2 \in A.$$

Sejam $\xi_1 = \sqrt{\tau}\big[Z(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - Z(x,t)\big]$ e $\xi_2 = Z_x(x,t)y$ e como $| y |\leq R$ temos que

$$\big|\xi_1\big| \leq \big|y\big| + \sqrt{\tau}\big|\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - \varphi(x,t)\big| \leq R + \frac{\sqrt{\tau}}{2}\frac{|y|}{\sqrt{\tau}} \leq \frac{3}{2}R \ , \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{U}$$

e

$$\big|\xi_2\big| \leq \big|y\big| + \big|\varphi_x(x,t)\big|\big|y\big| \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R \ , \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{U}$$

daí segue que $\xi_1, \xi_2 \in \overline{B(0, \frac{3}{2}R)} = A$. Logo existe $c = c(R) > 0$ tal que se $|y| \leq R$ e $(x,t) \in \overline{U}$, temos

$$\big|e^{\xi_1} - e^{\xi_2}\big| \leq c\big|\xi_1 - \xi_2\big| = c(R)\sqrt{\tau}\big|\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - \varphi(x,t) - \varphi_x(x,t)\frac{y}{\sqrt{\tau}}\big|.$$

Por outro lado, pela fórmula de Taylor obtemos

$$\big|\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - \varphi(x,t) - \varphi_x(x,t)\frac{y}{\sqrt{\tau}}\big| \leq \tilde{c}\frac{|y|^2}{\tau} \ , \ \forall (x,t) \in \overline{U} \ , \ \forall \tau > 0 \text{ tal que } x+\frac{y}{\sqrt{\tau}} \in (-a,a).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\big|J_\tau'\big| &\leq c(R)\int_{|y|\leq R} \sqrt{\tau}\big|\varphi(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t) - \varphi(x,t) - \varphi_x(x,t)\frac{y}{\sqrt{\tau}}\big|\big|v(x+\frac{y}{\sqrt{\tau}},t)\big|dy \\
&\leq c(R)\tilde{c}\int_{|y|\leq R} M\frac{y^2}{\sqrt{\tau}}dy \ \leq \ M\tilde{c}(R)\int_{|y|\leq R}\frac{R^2}{\sqrt{\tau}}dy.
\end{aligned}$$

Agora escolha $\tau_0 \geq 1$ tal que, se $\tau \geq \tau_0$ então $M\tilde{c}(R)\frac{R^2}{\sqrt{\tau}} < \frac{\epsilon}{4R}$ e, portanto,

$$| J_\tau' | < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.13}$$

Logo de (3.11), (3.12) e (3.13) segue o resultado. □

Como tínhamos falado no início da seção, vamos mostrar uma versão particular do Teorema de aproximação, neste caso consideramos como antes um campo localmente integrável L definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, Z uma função suave e, além disso, a função u é somente contínua. Logo o Teorema de aproximação pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 3.88. *Seja* $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{Z_t}{Z_x}\dfrac{\partial}{\partial x}$ *um campo vetorial e* $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$ *uma função suave definidos em* $U = (-a,a) \times (-a,a)$, *com* $\varphi \in C^\infty(U)$ *a valores reais satisfazendo* $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi_x(0,0) = 0$ *e* $\mid \varphi_x(x,t) \mid < \frac{1}{2}$, *para todo* $(x,t) \in U$. *Dado* $p \in U$, *existem dois abertos* U_1, U_2 *com* $p \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset U$ *tal que se* $u \in C^0(U_2)$ *satisfaz* $Lu = 0$ *em* U_2 *no sentido das distribuições, então existe uma sequência de soluções polinomiais* $P_j(Z)$, $j = 1, 2, \ldots$ *tal que* $P_j(Z) \to u$ *uniformemente em* $\overline{U}_1$.

Demonstração. Inicialmente suponhamos que $u \in C_c^1(U)$. Seja $h \in C_c^\infty(-a,a)$ tal que $h \equiv 1$ em $(-a', a')$, $\frac{a}{2} < a' < a$, consideremos

$$G_\tau u(x,t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x',t) h(x') Z_x(x',t) dx'.$$

Vem do Teorema de Stone Weierstrass (Teorema 3.87) que $G_\tau u(x,t) \to u(x,t)$ uniformemente em $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \times (-a,a) = U_2$.
Vamos considerar agora o operador seguinte

$$E_\tau u(x,t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} u(x',0) h(x') Z_x(x',0) dx'$$

e a 1-forma dada por

$$\omega(x',t') = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') h(x') dZ.$$

Daí podemos escrever

$$G_\tau u(x,t) = \int_{\mathbb{R}\times\{t\}} \omega \quad \text{e} \quad E_\tau u(x,t) = \int_{\mathbb{R}\times\{0\}} \omega.$$

Pelo Teorema de Stokes vem que

$$G_\tau u(x,t) - E_\tau u(x,t) = \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} d\omega.$$

Agora notemos que se $v = e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') h(x') dZ$, então

$$d\omega(x',t') = (\frac{\tau}{\pi})^2 d(vdZ) = dv \wedge dZ = (Lvdt + MvdZ) \wedge dZ = Lvdt \wedge dZ$$

onde $M = \dfrac{1}{1+i\varphi_x}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Como o fator exponencial em v é uma função inteira, $LZ = 0$ e

$Lu = 0$ em U_2, obtemos que $G_\tau u(x,t) - E_\tau u(x,t) = R_\tau u(x,t)$, onde

$$R_\tau u(x,t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') L(h)(x',t') dt \wedge dZ. \tag{3.14}$$

Provemos que $R_\tau u \to 0$ uniformemente em $(-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}) \times (-T,T)$ quando $\tau \to +\infty$ e $T < a$, para T escolhido convenientemente.
Notemos que

$$Re[Z(x,t)-Z(x',t')]^2 = Re[x-x'+i(\varphi(x,t)-\varphi(x',t'))]^2 = \mid x-x' \mid^2 - \mid \varphi(x,t)-\varphi(x',t') \mid^2 .$$

Assim, temos o seguinte

$$\left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| = e^{\tau(|\varphi(x,t)-\varphi(x',t')|^2 - |x-x'|^2)}.$$

Por outro lado, existe $c = c(\varphi) > 0$ tal que $\mid \varphi(x',t) - \varphi(x',t') \mid < c \mid t - t' \mid$ e daí

$$\begin{aligned} \mid \varphi(x,t) - \varphi(x',t') \mid &\leq \mid \varphi(x,t) - \varphi(x',t) \mid + \mid \varphi(x',t) - \varphi(x',t') \mid \\ &\leq \frac{1}{2} \mid x - x' \mid + c \mid t - t' \mid \leq \frac{1}{2} \mid x - x' \mid + 2cT. \end{aligned}$$

A última desigualdade acima se satisfaz por que $t \in [0,t]$ e $\mid t' - t \mid \leq \mid t' \mid + \mid t \mid \leq 2T$.
Logo temos

$$\mid \varphi(x,t) - \varphi(x',t') \mid^2 \leq 2\Big(\frac{\mid x - x' \mid^2}{4} + 4c^2T^2 \Big) = \frac{\mid x - x' \mid^2}{2} + 8c^2T^2.$$

Como $Lh \equiv 0$ para $\mid x' \mid \leq \dfrac{a}{2}$, notemos que no integrando da expressão (3.14) temos que $\mid x' \mid > \dfrac{a}{2}$. Daí $\mid x - x' \mid \geq \mid x' \mid - \mid x \mid \geq \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{4} = \dfrac{a}{4}$, o qual implica que

$$\mid R_\tau u(x,t) \mid \leq c e^{\tau(8c^2T^2 - \frac{a^2}{32})}, \quad \text{para todo } (x,t) \in (-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}) \times (-T,T).$$

Agora escolha T suficientemente pequeno tal que $8c^2T^2 < \dfrac{a^2}{32 \times 33}$, o que vai implicar que

$$\mid R_\tau u(x,t) \mid \leq c e^{-\tau \frac{a^2}{33}}, \quad \text{para todo } (x,t) \in (-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}) \times (-T,T) = U_1,$$

o que mostra que $R_\tau u(x,t) \to 0$, quando $\tau \to +\infty$ em U_1. Portanto, $E_\tau u = G_\tau u - R_\tau u \to u$ uniformemente quando $\tau \to +\infty$ em U_1.

Temos provado que $R_\tau u(x,t) \to 0$ uniformemente quando $\tau \to +\infty$ em U_1, se $u \in C^0$.

Para concluirmos a demonstração mostraremos que vale a formula $G_\tau u - E_\tau u = R_\tau u$ em $\mathcal{D}'$ para $u \in C^0$. De fato, considere $\psi_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\epsilon^2}\psi(\dfrac{x}{\epsilon}, \dfrac{t}{\epsilon})$, com $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e seja $u_\epsilon(x,t) = u * \psi_\epsilon$, temos que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$. Logo, para cada $\tau > 0$ fixo aplicando o Teorema de Stokes temos

$$G_\tau u_\epsilon(x,t) - E_\tau u_\epsilon(x,t) = R_\tau u_\epsilon(x,t)$$

onde

$$\begin{aligned} R_\tau u_\epsilon(x,t) &= \int_{\mathbb{R}\times[0,t]} d\omega_\epsilon \qquad\qquad \text{e} \\ d\omega_\epsilon(x,t) &= (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u_\epsilon(x',t')h(x')dZ(x',t'). \end{aligned}$$

Portanto, se $v_\epsilon(x',t') = e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}u_\epsilon(x',t')h(x')$, vem que

$$\begin{aligned} d\omega_\epsilon(x',t') &= dv_\epsilon(x',t') \wedge dZ(x',t') \;=\; [Lv_\epsilon dt + Mv_\epsilon dZ] \wedge dZ \\ &= e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} Lu_\epsilon(x',t')h(x')dt \wedge dZ(x',t') \\ &\qquad + e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u_\epsilon(x',t')Lh(x')dt \wedge dZ(x',t') \end{aligned}$$

e como $u_\epsilon \to u$ uniformemente em Ω quando $\epsilon \to 0$ e $Lu_\epsilon \to Lu$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, obtemos que

$$R_\tau u_\epsilon \to R_\tau u \;;\; G_\tau u_\epsilon \to G_\tau u \;\text{ e }\; E_\tau u_\epsilon \to E_\tau u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Portanto

$$G_\tau u - E_\tau u = R_\tau u \;\text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)\;,\;\; \text{para todo } \tau > 0, \text{ e para todo } u \in C^0.$$

Por outro lado, como $R_\tau u \to 0$ e $G_\tau u \to u$ uniformemente em U_1 quando $\tau \to +\infty$, temos que $E_\tau u \to u$ uniformemente em U_1 quando $\tau \to +\infty$.

Agora sejam

$$F_j(z) = (\frac{j}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[z-Z(x',0)]^2} u(x',0)h(x')Z_x(x',t)dx'.$$

Note que F_j são funções inteiras em $\mathbb{C}$. Logo para cada j existe um polinômio $P_j(z)$ tal que

$$\| P_j - F_j \|_{C^0(\{z\,;\,|z|\le R\})} < \frac{1}{j}$$

onde R é escolhido de maneira que $Z(U_1) \subset \{z\,;\, |\, z\,| \leq R\}$. Daí temos que

$$\| f - P_j \circ Z \|_{C^0(\overline{U})} \leq \| f - F_j \circ Z \|_{C^0(\overline{U}_1)} + \| F_j \circ Z - P_j \circ Z \|_{C^0(\overline{U}_1)} \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

o qual prova o teorema. $\square$

Corolário 3.89. *Nas mesmas hipóteses que no Teorema de aproximação de Baouendi-Treves, existe U_0 vizinhança de p tal que se $u \in C^0(U)$ for uma solução de $Lu = 0$ tem-se $u(p_1) = u(p_2)$ quaisquer que sejam os pontos $p_1, p_2 \in U_0$ satisfazendo $Z(p_1) = Z(p_2)$.*

Demonstração. Como $Z(p_1) = Z(p_2)$, então $P(Z(p_1)) = P(Z(p_2))$, ou seja, $(P \circ Z)(p_1) = (P \circ Z)(p_2)$ para qualquer polinômio P em uma variável complexa. Logo pelo Teorema de aproximação de Bouendi-Treves temos que

$$u(p_1) = \lim_{j\to\infty} P_j(Z)(p_1) = \lim_{j\to\infty} P_j(Z)(p_2) = u(p_2).$$

$\square$

Corolário 3.90. *Nas mesmas hipóteses que no Teorema de aproximação de Baouendi-Treves, existe uma vizinhança V_0 de p_0 tal que se $u \in C^0(U)$ for uma solução de $Lu = 0$, existe $F : Z(V_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua e holomorfa no interior de $Z(V_0)$, tal que $u = F \circ Z$ sobre V_0.*

Demonstração. Tomemos V_0 como sendo qualquer vizinhança de p_0 com $\overline{V}_0 \subset U_1$ onde U_1 é a vizinhança dada pelo Teorema de aproximação. Logo, para cada $\xi \in Z(\overline{V}_0)$ definimos

$$F(\xi) = u(p) \quad \text{ se } Z(p) = \xi.$$

Temos que F é bem definida pelo corolário anterior. Mais ainda, F é holomorfa no interior de $Z(V_0)$ pois é o limite uniforme de funções inteiras.

Mostremos agora que F é contínua. De fato, seja (ξ_l) uma sequência em $Z(\overline{V}_0)$ com $\xi_l \to \xi^* \in Z(\overline{V}_0)$. Tomemos $(p_l) \subset \overline{V}_0$ sequência tal que $Z(p_l) = \xi_l$. Passando a uma subsequência se for necessário, podemos assumir que $p_l \to p^* \in \overline{V}_0$, portanto $u(p_l) = F(\xi_l) \to u(p^*)$, pois u é contínua.
Por outro lado $\xi_l = Z(p_l) \to Z(p^*)$ (pois Z é contínua) e $\xi_l \to \xi^*$, daí $Z(p^*) = \xi^*$ o que implica que $F(\xi^*) = u(p^*) = \lim_{l\to\infty} F(\xi_l)$. Portanto, F é contínua. $\square$

Uma aplicação do Teorema de aproximação de Baouendi-Treves tem a ver com a propagação de zeros de soluções homogêneas. Ou seja, dada uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ em uma variedade Ω de dimensão N e uma solução u de $\mathcal{L}u = 0$ a questão natural é: que condição deve satisfazer a solução u para concluir que u é identicamente zero?. A versão local da questão é: dado um ponto $p \in \Omega$, e uma vizinhança V de p, que condições garantem a existência de uma vizinhança $p \in U \subset V$ sobre a qual u zera? A resposta a esta questão é dada no Teorema 3.94 mas para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 3.91. *Seja $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada. Dizemos que Σ é maximal real com respeito a $\mathcal{L}$ se*

i) $dim \Sigma = m$.

ii) para todo $p \in \Sigma$ e qualquer seção L de $\mathcal{L}$ definida em uma vizinhança de p, temos que se $L = X + iY$ então $X_p \notin \mathbb{C}T_p\Sigma$ ou $Y_p \notin \mathbb{C}T_p\Sigma$.

Resumindo temos que $\mathbb{C}T_p\Omega = \mathbb{C}T_p\Sigma \oplus \mathcal{L}_p$, $\forall p \in \Sigma$.

Proposição 3.92. *Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável em Ω e $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade real maximal em relação a $\mathcal{L}$. Existe um sistema de coordenadas em torno da origem tal que $\mathcal{L}^{\perp} =< dZ_1, \dots, dZ_m >$ com $Z(x,t) = (Z_1(x,t), \dots, Z_m(x,t))$, $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$, $\varphi(0,0) = 0$, $d_x\varphi(0,0) = 0$ e $\Sigma = \{(x,0)\}$.*

Demonstração. Considere coordenadas $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) = (x,t)$ com $(x(p), t(p)) = (0,0)$ tal que $\mathcal{L}^{\perp}$ é gerado numa vizinhança de $(0,0)$ por $dZ_1, \dots, dZ_m$, onde $Z_j(x,t) = x_j + i\varphi_j(x,t)$, $j = 1, \dots, m$, com $\varphi(0,0) = 0$ e $d_x\varphi(0,0) = 0$ onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Daí temos que $ReL_j \mid_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial t_j}$. Como Σ é maximal real em relação a $\mathcal{L}$, vem que $\mathbb{C}T_{(0,0)}\Omega = \mathbb{C}T_{(0,0)}\Sigma \oplus < \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n} >$.
Considere

$$\begin{aligned} A = d\varphi(0,0) : \quad \mathbb{R}^{n+m} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (h,k) &\longmapsto A(h,k), \end{aligned}$$

então $A_t = d_t\varphi(0,0)$ e $A_x = d_x\varphi(0,0)$.
Vem das hipóteses que A_t é invertível e pelo Teorema da função implícita existe $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $W \subset \mathbb{R}^m$ com $(0,0) \in U$ e $0 \in W$ tal que para todo $x \in W$ existe um único $t = \tau(x)$ com $(x,t) = (x, \tau(x)) \in U$ e $\varphi(x, \tau(x)) = 0$. Além disso,

$$\tau \in C^1(W) \ , \ \ \tau(0) = 0 \quad \text{e} \quad \tau'(0) = -(A_t)^{-1}A_x = -(d_t\varphi(0,0))^{-1}(d_x\varphi(0,0)) = 0.$$

Portanto, localmente temos que $\Sigma = \{(x, \tau(x))\}$.
Agora considere o seguinte sistema de coordenadas $x' = x$ e $t' = t - \tau(x)$, então a expressão de Z nestas novas coordenadas é

$$Z'(x',t') = x' + i\varphi(x', t' + \tau(x)) = x' + i\varphi'(x',t')$$

com $\varphi'(0,0) = \varphi(0, 0 + \tau(0)) = \varphi(0,0) = 0$ e pela regra da cadeia temos $d_{x'}\varphi'(0,0) = 0$. nestas novas coordenadas temos localmente $\Sigma = \{(x', 0)\}$. $\square$

Observação 3.93. *Uma consequência da proposição anterior é que, se u é uma distribuição solução de $\mathcal{L}u = 0$ podemos sempre considerar sua restrição a Σ, $u \mid_\Sigma$, que é apenas o traço de u sobre Σ, $u(x, 0)$.*

Teorema 3.94. *Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável em uma variedade Ω de dimensão N e $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada real maximal com respeito a $\mathcal{L}$. Se $u \in C^0(\Omega)$ e satisfaz*

i) $\mathcal{L}u = 0$ em Ω.

ii) $u \mid_\Sigma = 0$.

então $u \equiv 0$ em uma vizinhança V de Σ.

Demonstração. É suficiente mostrar que qualquer ponto $p \in \Sigma$ está contido numa vizinhança U tal que $u \mid_U \equiv 0$.
Pela Proposição 3.92, dado $p \in \Sigma$, existem coordenadas especiais tais que $\Sigma = \{(x, 0)\}$ e aplicamos o Teorema de aproximação de Baouendi-Treves nesta vizinhança de $p = (0, 0)$, podemos encontrar abertos $U \subset W$, $0 \in U$ tal que W está contido na vizinhança de coordenadas iniciais e u é aproximado em U por $E_\tau u$ uniformemente quando $\tau \to +\infty$. Por outro lado, a fórmula que define $E_\tau u$ em W é a seguinte

$$E_\tau u(x, t) = (\frac{\tau}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{B_x(0,R)} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x', 0)h(x')dZ_x(x', 0)dx \quad , \quad \forall (x, t) \in W.$$

Mas $u(x', 0) \equiv 0$ em $\Sigma \cap W = B_x(0, R) \times \{0\}$, então $E_\tau u(x, t) \equiv 0$ em W e como $E_\tau u(x, t) \to u$ uniformemente em $U \subset W$ quando $\tau \to +\infty$, vem que $u \equiv 0$ em U. $\square$

Corolário 3.95. *Seja L um campo não singular em Ω tal que $\mathcal{L} =< L >$ é localmente integrável e seja $u \in C^0(\Omega)$ satisfazendo $Lu = 0$ em Ω, $X = ReL$ e p, q dois pontos em Ω. Assuma que γ é uma curva integral de X ligando p e q. Então se $p \in supp(u)$ temos $q \in supp(u)$.*

Demonstração. Se $X \equiv 0$ então temos que γ é constante logo $p = q$ e não há o que provar. Assumimos então que $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ é uma solução não constante de $\gamma'(s) = X(\gamma(s))$, $0 \leq s \leq 1$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = p$. Logo X não zera em uma vizinhança de γ. Denote por $K = supp(u)$ e suponhamos por contradição que $p \in K$ e $q \notin K$. Trocando p pelo primeiro ponto $\gamma(s)$ tal que $\gamma(s) \in K$, podemos assumir que p e q estão suficientemente próximos de modo que todos os pontos em γ entre p e q não estão em K. Ou seja, sem perda de generalidade podemos supor que estamos na seguinte situação

$$\begin{cases} \gamma(0) & = & q \\ \gamma(1) & = & p \\ \gamma(s) & \notin & K, \text{ para todo } 0 < s < 1. \end{cases}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Frobenius (Teorema 3.75), podemos encontrar coordenadas $(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1}$ apropriadas tal que localmente $\langle L \rangle = \langle \partial/\partial t \rangle$, $\mid x \mid< 1$, $\mid t \mid< 2$ e $p = (0,0)$.

i) $\gamma(s) = (s-1, 0, \ldots, 0)$; $q = \gamma(0) = (-1, 0, \ldots, 0)$.

ii) Para algum $a > 0$ a m-bola fechada dada por $\mid x \mid\leq a$ e $t = -1$ não encontra-se em K. Denotando esta bola por $\overline{\Sigma}_0$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}_0 &= \{(x,t)\,;\, \mid x \mid\leq a\,,\, t = -1\} \\ &= \{(x,t)\,;\, \mid x \mid< a\,,\, t = -1\} \cup \{(x,t)\,;\, \mid x \mid= a\,,\, t = -1\} \\ &= \Sigma_0 \cup \partial\Sigma_0. \end{aligned}$$

Considere agora a família a um parâmetro de subvariedades mergulhadas

$$\Sigma_\sigma = \{(x,t)\,;\, \mid x \mid< a\,,\, t = \sigma - 1 - \sigma\frac{\mid x \mid^2}{a^2}\}\,,\; 0 \leq \sigma \leq 1.$$

De $ii)$ temos que $\Sigma_0 \cap K = \emptyset$ e $(0,0) \in \Sigma_1 \cap K$. Logo existe $\sigma_0 \in (0,1]$ tal que $\Sigma_\sigma \cap K = \emptyset$ para $0 \leq \sigma < \sigma_0$ e

$$\Sigma_{\sigma_0} \cap K \neq \emptyset. \tag{3.15}$$

Notemos que Σ_σ são subvariedades reais maximais em relação a $\mathcal{L} = \langle L \rangle = \langle \partial/\partial t \rangle$. Assim temos que $u|_{\Sigma_\sigma} = 0$ para $0 < \sigma < \sigma_0$, (pois$\Sigma_\sigma \cap K = \emptyset$) e como a função $\sigma \longmapsto u|_{\Sigma_\sigma}$ é contínua, temos que

$$u|_{\Sigma_{\sigma_0}} = 0. \tag{3.16}$$

Logo, pelo Teorema 3.94, existe uma vizinhança de Σ_{σ_0} tal que $u \equiv 0$ nesta vizinhança, ou seja, $\Sigma_{\sigma_0} \cap K = \emptyset$ o que contradiz (3.15). $\square$

Capítulo

4

Campos de vetores localmente resolúveis

Neste capítulo vamos estudar de forma rápida uma importante classe de campos de vetores localmente integráveis, os chamados campos localmente resolúveis, além disso, introduziremos a conhecida condição (P) de Nirenberg-Treves, bem como a definição de órbitas de um campo vetorial no sentido de Sussmann. Primeiro fazemos o estudo para campos vetoriais definidos no plano e em seguida fazemos o estudo para campos vetoriais em várias variáveis. Para este capítulo nossas referências são [1], [3] e [14].

4.1 Campos de vetores no plano

Considere o campo definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (x,t) \in \Omega$$

Com A, B a valores complexos, $A, B \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$|A(x,t)| + |B(x,t)| > 0 \ , \ \text{ para todo } (x,t) \in \Omega. \tag{4.1}$$

Logo de (4.1) temos que A ou B nunca se anulam na vizinhança de um ponto em Ω. Assim podemos supor sem perda de generalidade que A não se anula em uma vizinhança de um ponto de Ω e multiplicamos L por A^{-1} para obter o campo $\tilde{L} = A^{-1}L$ que assume a forma seguinte

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{B}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Agora escrevendo $\tilde{B}(x,t) = \tilde{a}(x,t) + i\tilde{b}(x,t)$, com $\tilde{a}, \tilde{b}$ funções a valores reais e assuma que elas estão definidas em $(-\rho,\rho) \times (-\rho,\rho)$ com $\rho > 0$. Vamos dar o seguinte resultado

Lema 4.1. *Existem coordenadas locais em torno da origem $\xi = x$, $s = s(x,t)$, onde o campo $\tilde{L}$ assume a forma seguinte*

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + ib(\xi,s)\frac{\partial}{\partial \xi}$$

com $b(\xi,s)$ função suave a valores reais.

Demonstração. Considere o P.V.I de e.d.o

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \tilde{a}(x,t) & ; \quad x(0) = \xi \\ \\ \dfrac{dt}{ds} = 1 & ; \quad t(0) = 0 \end{cases}$$

com solução $(x(\xi,s), t(\xi,s))$ dada por

$$\begin{aligned} x(\xi,s) &= \xi + \int_0^s \tilde{a}(x(\xi,\sigma),\sigma)d\sigma \\ t(\xi,s) &= s. \end{aligned}$$

Observamos que $x(\xi,0) = \xi$, logo

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,0) = 1 \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi}(0,0) = 1,$$

e além disso,

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial s}(0,0) = 1,$$

assim o determinante jacobiano é

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}(0,0) & \dfrac{\partial x}{\partial s}(0,0) \\ \dfrac{\partial t}{\partial \xi}(0,0) & \dfrac{\partial t}{\partial s}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial s}(0,0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

garantindo que a aplicação $(\xi,s) \longrightarrow (x(\xi,s), t(\xi,s))$ é localmente uma mudança de variável. Ainda pela regra da cadeia vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \tilde{a}(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Portanto, nestas coordenadas temos

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\tilde{a}(x,t) + i\tilde{b}(x,t))\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{a}(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + i\tilde{b}(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\tilde{b}(x,t)}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial s} + ib\frac{\partial}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{L}$ tem a seguinte forma

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + ib\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

□

As reduções descritas acima mostram que, no estudo dos problemas locais para um campo de vetores no plano L com coeficientes suaves, podemos assumir sempre que L é da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.3}$$

com $b(x,t)$ função suave a valores reais definida para todo $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Vamos dar agora a noção de resolubilidade local de um campo vetorial L.

Definição 4.2. *Seja L um campo vetorial definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $p \in \Omega$. Dizemos que L é localmente resolúvel em p se existe uma vizinhança $U = U(p)$ tal que para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $Lu = f$ em U.*

Se L é localmente resolúvel em todo ponto $p \in \Omega$, dizemos que L é localmente resolúvel em Ω.

Observação 4.3. *Se na definição anterior a função u pertence a $C^\infty(U)$, dizemos que o campo L é localmente resolúvel em C^∞.*

Teorema 4.4. *Se L é localmente resolúvel em C^∞, então L é localmente integrável.*

Demonstração. Dado um ponto $p \in \Omega$, que podemos assumir que é a origem, gostaríamos de encontrar uma função suave Z, definida em uma vizinhança da origem, tal que nesta

vizinhança $LZ = 0$ e $dZ \neq 0$.
Seja $d(x,t) = i\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,t)$, então existe $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $Lu = d$ em um retângulo U centrado na origem.
Considere a 1-forma seguinte

$$\omega = ib(x,t)e^{-u}dt + e^{-u}dx.$$

Mostraremos que ω é fechada. De fato

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(ibe^{-u}) \wedge dt + d(e^{-u}) \wedge dx \\
&= (\frac{\partial}{\partial x}(ibe^{-u})dx + \frac{\partial}{\partial t}(ibe^{-u})dt) \wedge dt + (\frac{\partial}{\partial x}e^{-u}dx + \frac{\partial}{\partial t}e^{-u}dt) \wedge dx \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(ibe^{-u})dx \wedge dt + (-\frac{\partial}{\partial t}e^{-u})dx \wedge dt \\
&= [\frac{\partial}{\partial x}(ibe^{-u}) - \frac{\partial}{\partial t}(e^{-u})]dx \wedge dt,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e, por outro lado, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(ibe^{-u}) - \frac{\partial}{\partial t}(e^{-u}) = i\frac{\partial b}{\partial x}e^{-u} - ibe^{-u}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{-u}\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-u}(i\frac{\partial b}{\partial x} - Lu) = 0. \tag{4.5}$$

Logo de (4.4) e (4.5) concluímos que $d\omega = 0$, o qual implica que ω é fechada.

Daí como U é simplesmente conexo temos que ω é exata, ou seja, existe $Z \in C^\infty(U)$ tal que $dZ = \omega$. Então $dZ \neq 0$ em U e também

$$LZ = dZ(L) = \omega(L) = e^{-u}(ibdt - dx)(\frac{\partial}{\partial t} + ib\frac{\partial}{\partial x}) = e^{-u}(ib - ib) = 0.$$

Portanto, temos que existe $Z \in C^\infty(U)$ tal que $dZ \neq 0$ e $LZ = 0$. Isto é, L é localmente integrável. $\square$

Observação 4.5.

a) *Como $dZ = \omega$ então $Z_x \neq 0$ em U pois $Z_x dx + Z_t dt = -e^{-u}dx + ibe^{-u}dt$ e $e^{-u} \neq 0$. Logo, como $Z = ReZ + iImZ$ e $Z_x = ReZ_x + iImZ_x \neq 0$ em U, podemos supor que $ReZ_x \neq 0$ em U.*
Considere a seguinte mudança de coordenadas $\tilde{x} = ReZ$ e $\tilde{t} = t$, obtemos que

$$\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} ReZ_x & ReZ_t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ReZ_x \neq 0 \quad \textit{em } U.$$

Nestas novas coordenadas temos que

$$Z = \tilde{x} + i\varphi(\tilde{x}, \tilde{t}). \tag{4.6}$$

Logo

$$L = L(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + L(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

com $a(x,t)$ *função complexa. Além disso temos que*

$$LZ = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Z_t + a(x,t)Z_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x,t) = -\frac{Z_t}{Z_x},$$

portanto obtemos

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t}{Z_x}\frac{\partial}{\partial x}.$$

b) Suponha que $\varphi_t \neq 0$ *em* U *(*L *é elítico),* $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$ *e considere* $y = x$*,* $s = \varphi(x,t)$*. Logo temos que*

$$\frac{\partial(y,s)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_x & \varphi_t \end{vmatrix} = \varphi_t \neq 0 \quad \text{em } U.$$

Segue-se que a aplicação $(x,t) \longrightarrow (y,s)$ *é uma mudança de coordenadas em* U *e temos que*

$$Z = y + is \quad \text{e} \quad L = L(y)\frac{\partial}{\partial y} + L(s)\frac{\partial}{\partial s}.$$

Como $L(Z) = 0$ *então* $L(y + is) = 0$*, o qual implica que* $L(y) = -iL(s)$*. Portanto,* L *fica da seguinte forma*

$$L = -iLs\frac{\partial}{\partial y} + Ls\frac{\partial}{\partial s} = 2Ls(-i)\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial s}) = g\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Definição 4.6. *Dizemos que o operador* L *dado por (4.3) satisfaz a condição (P) em* $p_0 = (x_0, t_0)$ *se existe uma vizinhança* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *em* p_0 *tal que para todo* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *a função* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \ni t \longmapsto b(x,t)$ *não muda de sinal.*

Exemplo 4.7. Considere o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ dado por $L = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x}$. Neste caso $b(x,t) = b(t) = -t$.

Se $p = (x, 0)$, então a função $(-\delta, \delta) \ni t \longmapsto b(t) = -t$ muda de sinal. Portanto, L não satisfaz a condição (P) nos pontos da forma $p = (x, 0)$.

Se $p = (x, y)$, com $y \neq 0$, temos $(-\delta, \delta) \ni t \longmapsto b(t) = -t$ não muda de sinal. Portanto L satisfaz a condição (P) nos pontos da forma (x, y) com $y \neq 0$.

Exemplo 4.8. Considere o campo vetorial definido por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ix\frac{\partial}{\partial x},$$

neste caso $b(x,t) = b(x) = x$. Logo, temos que L satisfaz a condição (P) em todo $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.9. Seja o campo vetorial

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - ixt^2\frac{\partial}{\partial x}$$

aqui temos que $b(x,t) = -xt^2$ Logo, L satisfaz a condição (P) em todo $\mathbb{R}^2$.

Na Definição 4.6 assumimos que o campo vetorial L estava na forma especial (4.3), no entanto exigir que a função $t \longmapsto b(x,t)$ não mude de sinal é uma condição que não independe do sistema de coordenadas. Precisamos de uma formulação da condição (P) que independa do sistema de coordenadas em que o campo L é dado. Para isto precisamos da noção de órbitas de um conjunto de campos vetoriais reais suaves, tal definição é dada a seguir.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade paracompacta suave, seja D um conjunto de campos vetoriais reais suaves localmente definidos, isto é, cada X em D está definido em algum subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ e é suave neste conjunto. Assuma que a união dos domínios dos elementos de D é igual a $\mathcal{M}$.
Definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$ da seguinte forma: dois pontos p e q em $\mathcal{M}$ estão relacionados se existe uma curva $\gamma : [0,T] \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que

1) $\gamma(0) = p$ e $\gamma(T) = q$.

2) Existem $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ e campos $X_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tais que para cada i a restrição $\gamma : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \mathcal{M}$ é uma curva integral de X_i ou $-X_i$, isto é $\gamma'(t) = X_i(\gamma(t))$ ou $\gamma'(t) = -X_i(\gamma(t))$.

As classes de equivalência desta relação serão chamadas de órbitas de D no sentido se Sussmann.

Definição 4.10. *Seja $L = X + iY$ um campo vetorial complexo e X, Y as partes real e imaginária de L. Definimos as órbitas de Sussmann de L como sendo as órbitas de Sussmann do conjunto $D = \{X, Y\}$.*

Observação 4.11. *Tendo em mãos esta definição, o Corolário 3.95 implica que se uma órbita de L intersecta o suporte K de uma solução u da equação $Lu = 0$, esta deve estar inteiramente contida em K. O qual é equivalente a dizer que K é união de órbitas de L.*

Exemplo 4.12. Cosidere o seguinte campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ix\frac{\partial}{\partial x}.$$

Temos que as órbitas deste campo vetorial são: $\mathcal{O}_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0\}$, $\mathcal{O}_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, x = 0\}$ e $\mathcal{O}_3 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, x < 0\}$.

Exemplo 4.13. Considere agora o campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + it\frac{\partial}{\partial x}.$$

Neste caso temos uma única órbita $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$.

Observação 4.14. *Em [14] Sussmann mostrou que estas órbitas podem ser equipadas com uma topologia e uma estrutura diferenciável natural as quais as tornam subvariedades imersas de $\mathcal{M}$. Além disso, toda órbita é conexa.*

Para dar uma formulação da condição (P) independente do sistema de coordenadas escrevemos

$$L = X + iY = ReL + iImL$$

Temos que $X \wedge Y \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \bigwedge^2(T(\mathbb{R}^2)))$, como $\bigwedge^2(T(\mathbb{R}^2))$ tem uma seção global que não zera $e_1 \wedge e_2$ e como $dim \bigwedge^2(T(\mathbb{R}^2)) = 1$, temos que $X \wedge Y$ é múltiplo de $e_1 \wedge e_2$, ou seja, $X \wedge Y = \rho e_1 \wedge e_2$, $\rho \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Definição 4.15. *Dizemos que $X \wedge Y$ não muda de sinal em qualquer órbita de $\{X, Y\}$ quando $X \wedge Y = \rho e_1 \wedge e_2$ temos sempre que $\rho \geq 0$ ou $\rho \leq 0$ nas órbitas de $\{X, Y\}$.*

Considere agora um campo de vetores definido em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.7}$$

com $|A(x,t)| + |B(x,t)| > 0$, para todo $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $A, B \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$.

Definição 4.16. *Seja $L = X + iY = ReL + iImL$ como em (4.7), dizemos que L satisfaz a condição (P) em Ω se $X \wedge Y$ não muda de sinal em qualquer órbita de dimensão dois de L, isto é, em qualquer órbita de dimensão dois do par de vetores $\{X, Y\}$.*

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, coloque

$$Z(x,t) = x + i\varphi(x,t), \tag{4.8}$$

e considere o campo vetorial

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t}{Z_x}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.9}$$

Temos que $Z(x,t)$ é uma integral primeira global de L, pois $LZ = 0$ e $dZ \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Lema 4.17. *Sejam $Z(x,t)$ e L como em (4.8) e (4.9) respectivamente. Se L satisfaz a condição (P) em $\mathbb{R}^2$ então a função $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varphi(x,t)$ é monótona para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Temos que $L = X + iY$ onde $X = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\varphi_t\varphi_x}{1+\varphi_x^2}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = -\dfrac{\varphi_t}{1+\varphi_x^2}\dfrac{\partial}{\partial x}$, então

$$X \wedge Y = \frac{\varphi_t}{1+\varphi_x^2}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

Note que X e Y são linearmente dependentes em um ponto se e somente se φ_t zera neste ponto. Desta maneira as órbitas de dimensão um de L são linhas verticais $x =$ constante nas quais φ_t é identicamente igual a zero.

Como as órbitas de dimensão dois de L fazem fronteira retas com $0, 1$ ou 2 órbitas de dimensão um, vemos que cada órbita de dimensão dois Ω_j, $j = 1, 2$ é da forma $(a_j, b_j) \times \mathbb{R}$. Se L satisfaz a condição (P) então φ_t não muda de sinal em Ω_j, digamos que $\varphi_t \geq 0$ em Ω_j, então a função

$$\mathbb{R} \longmapsto \varphi(x,t)$$

é monótona crescente para todo $a_j \leq x \leq b_j$.

Se $x \notin (a_j, b_j)$ para qualquer j, segue que o ponto de coordenadas $(x, 0)$ pertence a uma órbita de dimensão um, então $\varphi_t(x,t) = 0$ com $-\infty < t < \infty$ e daí $t \longmapsto \varphi(x,t)$ é constante, isto mostra que $t \longmapsto \varphi(x,t)$ é monótona para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

4.2 Campos de vetores em várias variáveis

Agora considere o campo definido em um aberto Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{4.10}$$

onde $B_j(x,t) = a_j(x,t) + ib_j(x,t)$ com $a_j, b_j \in C^\infty(\Omega)$ a valores reais $j = 1, \ldots, n$.

Como no caso $n = 1$, existe um resultado similar ao lema 4.1.

Lema 4.18. *Existem coordenadas locais $\xi = x$, $s = s(x,t)$ definidas em uma vizinhança* *da origem tal que L assume a forma*

$$L = \frac{\partial}{\partial s} + i\sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(\xi, s)\frac{\partial}{\partial \xi_j} \tag{4.11}$$

com $\tilde{b}_j$ suave a valores reais, $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Considere o P.V.I seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{ds} & = \quad a_j(x,t) \quad ; \quad x_j(0) = \xi_j \ , \ j = 1, \ldots, n \\ \\ \dfrac{dt}{ds} & = \quad 1 \qquad\qquad ; \quad t(0) = 0 \end{cases}$$

com solução $(x(\xi, s), t(\xi, s))$ dada por

$$\begin{aligned} x_j(\xi, s) &= \xi_j + \int_0^s a_j(x(\xi, \sigma), \sigma)d\sigma \ , \ j = 1, \ldots, n \\ t(\xi, s) &= s. \end{aligned}$$

Temos que $x_j(\xi, 0) = \xi_j \ , \ j = 1, \ldots, n$, logo

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j}(0,0) = 1, \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial s} = 1,$$

então o determinante jacobiano fica

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n}(0,0) & \frac{\partial x_1}{\partial s}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n}(0,0) & \frac{\partial x_n}{\partial s}(0,0) \\ \frac{\partial t}{\partial \xi_1}(0,0) & \cdots & \frac{\partial t}{\partial \xi_n}(0,0) & \frac{\partial t}{\partial s}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \frac{\partial x_1}{\partial s}(0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{\partial x_n}{\partial s}(0,0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

o que garante que a aplicação $(\xi, s) \longrightarrow (x(\xi, s), t(\xi, s))$ é localmente uma mudança de variável. Ainda pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x,t)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial t}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4.12}$$

Como em uma vizinhança da origem temos que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

podemos isolar $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ em (4.12) e obter

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = c_j(x,t)\frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Portanto, nestas coordenadas obtemos L na forma desejada

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}(a_j(x,t) + b_j(x,t))\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i\sum_{j=1}^{n} b_j c_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial s} + i\sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \end{aligned}$$

$\square$

Como antes, escrevemos $L = X + iY$ com $X = ReL$ e $Y = ImL$ e nos referimos às órbitas do par de vetores reais $\{X, Y\}$ como as órbitas de L. Notemos que X e Y não zeram simultaneamente e daí L não tem órbitas de dimensão zero.

Seja Σ uma órbita de L de dimensão dois e assuma que Σ é orientável. Existe uma seção global que não se anula $\rho \in C^{\infty}(\Sigma, \bigwedge^2(T(\Sigma)))$. Ambos X e Y são tangente a Σ. Assim, eles podem ser considerados como seções do fibrado tangente $T(\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ que produz uma seção $X \wedge Y$ do fibrado $\bigwedge^2(T(\Sigma)) \longrightarrow \Sigma$. Logo, $X \wedge Y = b\rho$ onde b é uma função real suave definida em Σ.

Definição 4.19. *Se b não assume sinal oposto em Σ dizemos que $X \wedge Y$ não muda de sinal em Σ.*

Notemos que se ρ_1 é outra seção global que não zera em Σ de $\bigwedge^2(T(\Sigma)) \longrightarrow \Sigma$, então $\rho_1 = \lambda\rho$ com λ função real suave e $\lambda \neq 0$ em Σ. Como Σ é conexo então $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Isto mostra que a noção $X \wedge Y$ não muda de sinal em Σ é independente do gerador ρ.

Definição 4.20. *Dizemos que o campo $L = X + iY$ dado acima satisfaz a condição (P) em Ω se e somente se*

1) As órbitas de L em Ω tem dimensão no máximo dois.

2) As órbitas de dimensão dois de L são orientáveis e $X \wedge Y$ não muda de sinal em qualquer órbita de dimensão dois de L.

Proposição 4.21. *Seja L como em (4.10) satisfazendo a condição (P) em Ω e $h \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ uma função que não se anula. Então $L' = hL$ satisfaz a condição (P) em Ω.*

Demonstração. Escreva $h = \alpha + i\beta$ com $\alpha, \beta \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, então $L' = X' + iY'$ com $X' = \alpha X - \beta Y$ e $Y' = \alpha Y + \beta X$.
As órbitas de L e L' são idênticas porque ambos geram o mesmo fibrado. Então L' não tem órbitas de dimensão maior que dois. Logo, se Σ é uma órbita de L' de dimensão dois, como Σ também é uma órbita de L, temos que $X \wedge Y$ não muda de sinal sobre Σ e portanto $X' \wedge Y' = (\alpha^2 + \beta^2) X \wedge Y$ não muda de sinal sobre Σ, o qual implica que L' satisfaz a condição (P). $\square$

Se L é dado por (4.11), definido em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\} \times (-T, T)$, vamos descrever as órbitas de dimensão um e dois de L.
Como $X = \frac{\partial}{\partial t}$, as órbitas de X em Ω são os segmentos verticais $\{x_0\} \times (-T, T)$. Desta maneira, se (x_0, t_0) pertence a uma órbita Σ de L, segue que $\{x_0\} \times (-T, T) \subset \Sigma$ e isto implica que toda órbita de L de dimensão qualquer pode ser escrita como uma união de segmentos verticais.
Agora se Σ é uma órbita de dimensão um de L, então X e Y são linearmente dependentes em todos os pontos de Σ e, assim, $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ deve ser identicamente zero em Σ, o que implica que $\Sigma = \{x_0\} \times (-T, T)$ para algum $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\}$ tal que $b_j(x_0, t) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ e $|t| < T$.
Se Σ é uma órbita de dimensão maior ou igual a dois de L com $(x_0, t_0) \in \Sigma$, então existe $(x_0, t_1) \in \Sigma$ tal que $Y(x_0, t_1) \neq 0$ pois, caso contrário, $\Sigma = \{x_0\} \times (-T, T)$ o que não é possível pois a dimensão de Σ é maior ou igual a dois.
Considere a curva integral maximal γ em $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\}$ passando pelo ponto x_0 do campo $Y(x, t_1)$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\}$. Então $\gamma \times (-T, T)$ é um subconjunto fechado de Σ e também uma variedade de dimensão dois. Desta maneira se a dimensão de Σ é dois segue por conexidade que $\Sigma = \gamma \times (-T, T)$ e, em particular, toda órbita de dimensão dois de L é orientavel.
Observe que $Y(., t_1)$ não é identicamente zero em γ (caso contrario γ reduziria a um único ponto). Se $v(x) = Y(x, t_1)$, então $\rho = v \wedge \frac{\partial}{\partial t} \in \bigwedge^2(\Sigma)$ nunca zera.

Proposição 4.22. *Seja L dado por (4.11) em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\} \times (-T, T)$. Se L satisfaz a condição (P) em Ω, então para todo $x \in \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < r\}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ a função $(-T, T) \ni t \longmapsto \sum_{j=1}^n b_j(x, t)\xi_j$ não muda de sinal.*

Demonstração. Seja $Y(x,t) = (b_1(x,t),\dots,b_n(x,t))$, assuma que L satisfaz a condição (P) e sejam $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n\,;\,|x| < r\}$ e $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.
Se (x_0,t_0) pertence a uma órbita de dimensão um de L para algum $t_0 \in (-T,T)$ então temos que $Y(x_0,t) = 0$ em $|t| < T$ e obviamente $(-T,T) \ni t \longmapsto Y(x_0,t)\xi_0 = 0$ e não muda de sinal. Daí podemos supor que $Y(x_0,t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in (-T,T)$. Assim $(x_0,t_0) \in \Sigma$ onde Σ é uma órbita de dimensão dois no qual $X \wedge Y$ não muda de sinal, pois L satisfaz a codição (P).
Seja agora γ a curva integral de $v(x) = Y(x,t_0)$ em $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,|x| < r\}$ passando por x_0, temos que $\Sigma = \gamma \times (-T,T)$ e $\rho = \frac{\partial}{\partial t} \wedge v$ gera $\bigwedge^2(\Sigma)$ em todo ponto de Σ.
Seja $(x_0,t) \in \Sigma$. Como Y é um vetor horizontal tangente a $\gamma \times (-T,T)$ vemos que $Y(x_0,t) = \lambda(x_0,t)v(x_0)$, $t \in (-T,T)$. Além disso,

$$\begin{aligned} X \wedge Y(x_0,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \wedge (\lambda(x_0,t)v(x_0)) \\ &= \lambda(x_0,t)\frac{\partial}{\partial t} \wedge v(x_0) \\ &= \lambda(x_0,t)\rho(x_0,t) \end{aligned}$$

e como $X \wedge Y$ não muda de sinal, temos que $\lambda(x_0,t) \geq 0$ ou $\lambda(x_0,t) \leq 0$ em $(-T,T)$. Isto mostra que o vetor $(-T,T) \ni t \longmapsto Y(x_0,t)$, não muda de direção e sentido e, portanto, $(-T,T) \ni t \longmapsto Y(x_0,t)\xi_0$ não muda de sinal. $\square$

Observação 4.23. *Se L dado por (4.11) em $\Omega = B(0,r) \times (-T,T)$ satisfaz a condição (P) em Ω, vem da Proposição 4.22 que existe $v(x)$ vetor suave tal que*

$$\vec{b}(x,t) = (b_1(x,t),\dots,b_n(x,t)) = Y(x,t) = \lambda(x,t)v(x),$$

e para cada $x \in B(0,r)$,

$$\lambda(x,.) \geq 0 \quad ou \quad \lambda(x,.) \leq 0 \;\; em \;\; (-T,T).$$

Logo

$$\begin{aligned} \vec{b}(x,t) &= \lambda(x,t)v(x) \\ &= \lambda(x,t)\frac{v(x)}{|v(x)|}|v(x)| \\ &= sgn[\lambda(x,t)]\lambda(x,t)\frac{sgn[\lambda(x,t)]v(x)}{|v(x)|}|v(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= |\lambda(x,t)||v(x)|v(x)\\&= |\vec{b}(x,t)|v(x).\end{aligned}$$

Resumindo temos que se L satisfaz a condição (P), existe um vetor suave unitário $v(x)$ definido sobre $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\vec{b}(x,t) = |\vec{b}(x,t)|v(x)\,,\ \ x \in B(0,r)\,,\, t \in (-T,T).$$

Note que $v(x_0)$ pode ser definido arbitrariamente se $\vec{b}(x,t) = 0$ para todo t.

Sejam agora

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \vec{b}(x,t) = 0\,,\, |t| < 1\}$$

e

$$\rho(x) = \sup_{|t|\leq 1} |\vec{b}(x,t)|\,,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que $\mathcal{N}$ é precisamente o conjunto onde ρ zera.

Lema 4.24. *Sejam ρ e $\mathcal{N}$ definidos como acima. Então a função ρ é Lipschitziana e*

$$\| \nabla\rho \|_{L^\infty} \leq \| \nabla_x \vec{b} \|_{L^\infty}\ .$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, considere $t \in [-1,1]$ tal que $\rho(x) = |\vec{b}(x,t)|$. Logo

$$\begin{aligned}\rho(x) &= |\vec{b}(x,t)|\\&\leq |\vec{b}(x,t) - \vec{b}(y,t)| + |\vec{b}(y,t)|\\&\leq |\nabla_x\vec{b}(x,t)||x-y| + \rho(y)\end{aligned}$$

daí vem que

$$\rho(x) - \rho(y) \leq \| \nabla_x\vec{b}(x,t) \|_{L^\infty} |x-y|.$$

Trocando os papéis de x e y obtemos também que

$$\rho(y) - \rho(x) \leq \| \nabla_x\vec{b}(x,t) \|_{L^\infty} |x-y|.$$

Portanto obtemos que ρ é Lipschitziana, ou seja,

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \| \nabla_x\vec{b} \|_{L^\infty} |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Mais ainda, isto implica que

$$\| \nabla\rho \|_{L^\infty} \leq \| \nabla_x \vec{b} \|_{L^\infty}\ .$$

$\square$

Observação 4.25. *Sabemos que*

$$\vec{b}(x,t) = |\vec{b}(x,t)|v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $v(x)$ é vetor unitário, temos que para cada x existe $j = j(x)$ tal que $v_j(x) \neq 0$, podemos assumir sem perda de generalidade que $v_1(x) \neq 0$.
Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dy_1} &= \dfrac{v_j(x)}{v_1(x)}, \quad j = 1, \ldots, n. \\ x_j(0) &= y_j \end{cases}$$

Logo $x_1 = y_1$ e $x_j = x_j(y_1, \ldots, y_n)$ é uma mudança de variável em torno da origem, portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dy_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dy_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{v_2}{v_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{v_n}{v_1}\frac{\partial}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Obtemos que

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial t} + i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + i|\vec{b}(x,t)|\sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + i|\vec{b}(x,t)|v_1(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j(x)}{v_1(x)}\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + i|\vec{b}(x(y),t)|v_1(x)\frac{\partial}{\partial y_1}, \end{aligned}$$

daí segue que sobre as órbitas de dimensão dois o campo L fica da seguinte forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{b}_1(x(y),t)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Onde $\vec{b}_1(x(y),t) = |\vec{b}(x(y),t)|v_1(x)$.

Teorema 4.26. *Se L é localmente resolúvel em C^∞ então L é localmente integrável.*

Demonstração. Considere U_j a solução no sentido de série de potência formal do problema de Cauchy não característico seguinte

$$\begin{cases} LU_j &= 0 \\ U_j(x,0) &= x_j \ , \ j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Os coeficientes da série formal U_j correspondentes ao monômios que não contêm t são determinados pela condição inicial $U_j(x,0)$, isto é, eles são todos zero com exceção do coeficiente de x_j que é igual a 1. Os coeficientes dos monômios da forma $t^l x^\alpha$ são determinados de $LU_j = 0$ indutivamente em l.

Uma vez que as séries formais sejam obtidas, usando o Teorema de Borel, tomamos $Z_j^\sharp$ uma função suave que tem U_j como sua série de Taylor na origem. Por sua própria definição temos que $Z_1^\sharp, \ldots, Z_m^\sharp$ satisfazem $LZ_j^\sharp = O(|(x,t)|^k)$, $k = 0, 1, \ldots$ e $dZ_1^\sharp(0), \ldots, dZ_m^\sharp(0)$ são linearmente independentes.

Para obter as integrais primeiras exatas por correção de $Z_1^\sharp, \ldots, Z_m^\sharp$, devemos resolver as equações $Lu_j = LZ_j^\sharp = f_j$, $j = 1, \ldots, m$ numa vizinhança da origem e definimos $Z_j = Z_j^\sharp - u_j$. Claramente $LZ_j = 0$. Basta mostrar agora que $dZ_1(0), \ldots, dZ_m(0)$ são linearmente independentes. Isto será garantido se nós tomarmos $|du_j(0)|$ pequeno.

Seja K uma bola centrada na origem tal que $LC^\infty(K) = C^\infty(K)$ e seja $\mathcal{H}$ o subespaço de $C^\infty(K)$ tal que $Lh = 0$, $h \in C^\infty(K)$. Então L define uma função linear contínua e sobrejetora

$$L : \frac{C^\infty(K)}{\mathcal{H}} \longrightarrow C^\infty(K)$$

definida por $L\bar{f} = Lf$, a qual pelo Teorema da aplicação aberta (para espaços de Fréchet) tem uma inversa contínua

$$L^{-1} : C^\infty(K) \longrightarrow \frac{C^\infty(K)}{\mathcal{H}}.$$

Isto significa, em particular, que dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $k \in \mathbb{Z}^+$ tais que para toda $f \in C^\infty(K)$ tal que $\| D^\beta f \|_{L^\infty(K)} < \delta$, para todo $|\beta| \leq k$ existe $u \in C^\infty(K)$ tal que $Lu = f$ e $\| du \|_{L^\infty(K)} < \epsilon$.

Seja $\chi(x,t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $\chi(x,t) = 1$ em $B(0,1)$ e considere $f_{j,\rho}(x,t) = f_j(x,t)\chi(\rho x, \rho t)$ (observe que $|\rho \cdot (x,t)| < 1 \Leftrightarrow |(x,t)| < 1/\rho$).

Como f_j zera de ordem infinita na origem vemos que, escolhendo ρ suficientemente grande, $\| D^\beta f_{j,\rho} \|_{L^\infty} < \delta$ para todo $|\beta| \leq k$. Escolha agora u_j tal que $Lu_j = f_{j,\rho}$ e $\| du_j \|_{L^\infty(K)} < \epsilon$.

Como $f_{j,\rho} = f_j = LZ_j^\sharp$ em $B(0, 1/\rho)$ vemos que as funções $Z_j = Z_j^\sharp - u_j$, $j = 1, \ldots, m$ formam um conjunto completo de integrais primeiras em uma vizinhança da origem se ϵ é tomado suficientemente pequeno. $\square$

Capítulo

5

Teorema de Radó para campos vetoriais localmente resolúveis

Neste capítulo apresentamos de forma detalhada o resultado obtido por J.Hounie e J. Tavares em [7], isto é, vamos provar que todo campo vetorial com coeficientes suaves definidos em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que é localmente resolúvel, tem a propriedade de Radó. A prova deste resultado explora duas propriedades desta classe de campos vetoriais: o seu caráter essencialmente bidimensional (expresso pelo fato de que as órbitas têm dimensão no máximo dois) e a propriedade da integrabilidade local que permite a redução do problema à versão clássica do Teorema de Radó no plano. Uma outra observação a fazer é que neste capítulo assumimos que a condição (P) é condição necessária e suficiente para a resolubilidade local. Para a demonstração deste fato pode-se ver [1].

Iniciaremos nossa discussão deste capítulo com a seguinte definição.

Definição 5.1. *Seja L um campo vetorial definido em um aberto Ω de $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $u \in C^0(\Omega)$ é uma função de Radó para L se*

$$Lu = 0 \quad em \quad \Omega \setminus u^{-1}(0) \tag{5.1}$$

no sentido das distribuições. Se toda função de Radó para L é uma solução fraca de $Lu = 0$ sobre Ω (i.e. $\langle Lu, \varphi\rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$), dizemos que L tem a propriedade Radó. Ou seja o conjunto singular onde u zera e a equação é a priori não satisfeita pode ser removido e a equação $Lu = 0$ se satisfaz em todo Ω.

Daqui em diante vamos considerar L um campo vetorial definido em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Lema 5.2. *Seja L localmente integrável e u uma função de Radó para L. Então u é constante sobre as órbitas de L de dimensão um.*

Demonstração. Seja Σ uma órbita de L de dimensão um. Se u é identicamente zero sobre Σ então não temos nada a provar.
Considere um ponto $p \in \Sigma$ tal que $u(p) \neq 0$. Como L é localmente integrável, pelo Corolário 3.79 podemos escolher coordenadas locais (x,t) numa vizinhança de p tal que $x(p) = t(p) = 0$ e funções suaves

$$Z_j(x,t) = x_j + i\phi_j(x,t)\,,\ j = 1,\dots,n\,;\ |x| < 1, |t| < 1$$

com $\phi_j(0,0) = d_x\phi_j(0,0) = 0$ e $LZ_j = 0$.
Logo, pela Observação 3.81 podemos considerar que L é dado da seguinte forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

onde os coeficientes λ_j são determinados pelas equações $LZ_j = 0$, $j = 1,\dots,n$. Além disso, tendo presente o comentário feito antes da Proposição 4.22, vem que em nosso sistema de coordenadas locais a órbita Σ é dada por

$$\Sigma = \{0\} \times (-1,1) = \{(0,s)\,;\ -1 < s < 1\}.$$

Observe também que a curva integral de $X = \partial/\partial t$ que passa pela origem é um segmento vertical contido em Σ. Logo as equações $LZ_j = 0$ restritas a Σ significam que para cada j

$$\frac{\partial}{\partial s}Z_j(0,s) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial s}\phi_j(0,s) = 0\ ,\ \forall s \in (-1,1)\ \Rightarrow\ \phi_j(0,s) = Cte.$$

Mais ainda, essa constante é zero, pois $\phi_j(0,0) = 0$ para todo $j = 1,\dots,n$.
Escrevendo $Z = (Z_1,\dots,Z_n)$ e $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$, vem que se $q \in \Sigma$, isto é $q = (0,s)$ com $-1 < s < 1$, então

$$Z(q) = Z(0,s) = i\phi(0,s) = 0 = Z(0,0),$$

ou seja, q pertence a uma fibra de Z, o qual implica que Σ está contida em uma fibra de Z.

Por outro lado como $u(0,0) \neq 0$ e u é contínua então existe $\epsilon > 0$ tal que $u(x,t) \neq 0$

para $|x| < \epsilon$, $|t| < \epsilon$. Como u é uma função de Radó para L vem que

$$Lu = 0\ , \quad \text{para } |x| < \epsilon\,,\ |t| < \epsilon.$$

Usando o Corolário 3.89, corolário do teorema de aproximação, temos que u é constante sobre as fibras de Z. Em particular u é constante sobre Σ para $|s|$ pequeno, mas como Σ é conexo segue que u é constante sobre Σ. $\square$

Vamos fazer uma observação importante que usaremos depois na demonstração do Lema 5.6.

Observação 5.3. *Se $P(x, y, D_x)$ é um operador diferencial com coeficientes dependendo das variáveis $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, contendo derivadas apenas com relação a x. Se $u(x, y)$ é uma solução fraca contínua de $P(x, y, D_x)u = 0$ em $\mathbb{R}^{n+m}$ (i.e. $\langle Pu, \psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$), então $v(x) = u(x, y_0)$ é uma solução fraca de $P(x, y_0, D_x)v = 0$ em $\mathbb{R}^n$.*

De fato, considere a função $\psi(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$, com $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Assim, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ e

$$\langle P(x, y, D_x)u(x, y), \varphi(x)\phi(y)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{n+m}} u(x,y)P^t(x,y,D_x)[\varphi(x)\phi(y)]dxdy &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)\phi(y)P^t(x,y,D_x)[\varphi(x)]dxdy &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}^m}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)P^t(x,y,D_x)[\varphi(x)]dx\right\}\phi(y)dy &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Se escrevemos

$$H(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)P^t(x,y,D_x)[\varphi(x)]dx$$

e substituimos em (5.2) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(y)\phi(y)dy = 0\ , \quad \textit{para toda } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Como H é contínua usando a Observação 1.17 temos que $H(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$; em particular, $H(y_0) = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)P^t(x,y_0,D_x)[\varphi(x)]dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,y_0)P^t(x,y_0,D_x)[\varphi(x)]dx = 0 \quad \textit{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Portanto $v(x) = u(x, y_0)$ *é uma solução fraca de* $P(x, y_0, D_x)v = 0$ *em* $\mathbb{R}^n$.

5.1 O resultado principal

Nesta seção vamos mostrar o resultado principal deste trabalho que enunciamos a seguir

Teorema 5.4. *Seja* L *um campo vetorial definido em um subconjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *satifazendo a condição (P). Então* L *tem a propriedade Radó.*

Antes de provar o teorema vamos fazer algumas observações e lembrar alguns resultados do capítulo anterior. Introduzindo coordenadas (x, t) vamos escrever

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

com coeficiente complexos $A, B_1, \ldots, B_n \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$|A(x,t)| + \sum_{j=1}^{n} |B_j(x,t)| > 0\ , \quad \text{para todo } \ (x,t) \in \Omega.$$

Usando o Lema 4.18 podemos considerar o campo vetorial L da seguinte forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\ , \qquad |x| \leq 1\, , \, |t| \leq 1, \tag{5.3}$$

onde os coeficientes $b_j(x, t)$ são funções suaves a valores reais . Vamos denotar por $\vec{b}(x, t)$ o campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\vec{b}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\ , \qquad |x| \leq 1\, , \, |t| \leq 1.$$

Na Observação 4.23 vimos que se L satisfaz a condição (P), então existe um vetor unitário $\vec{v}(x)$ definido no $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\vec{b}(x,t) = |\vec{b}(x,t)|\vec{v}(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\, , \; |x| \leq 1, |t| \leq 1.$$

Seja agora

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, \vec{b}(x,t) = 0\, , \; |x| < 1, |t| < 1\}$$

e

$$\rho(x) = \sup_{|t|\leq 1} |\vec{b}(x,t)| \, , \qquad x \in \mathbb{R}^n \, , \, |x| < 1,$$

de modo que $\mathcal{N}$ é precisamente o conjunto onde ρ zera. Mostramos no Lema 4.24 que ρ é uma função Lipschitziana e $\| \nabla \rho \|_{L^\infty} \leq \| \nabla_x \vec{b} \|_{L^\infty}$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\| \nabla_x \vec{b} \|_{L^\infty} \leq 1$, obtemos a seguinte estimativa

$$|\rho(x) - \rho(x')| \leq |x - x'| \, , \qquad x, x' \in \mathbb{R}^n \, , \, |x|, |x'| < 1. \tag{5.4}$$

Para mostrar o Teorema 5.4, ou seja, para mostrar que $Lu = 0$ no sentido das distribuições em Ω, para toda função de Radó, vamos fixar um ponto $p \in \Omega$ que tomaremos como sendo a origem e mostrar que $Lu = 0$ no sentido das distribuições em uma vizinhança da origem, com L dado por (5.3). Mais precisamente, vamos fixar Q, o cubo unitário em $\mathbb{R}^{n+1}$ e mostrar que $Lu = 0$ no sentido das distribuições em Q, ou equivalentemente

$$\iint u(x,t) L^t \phi dx dt = \iint u(x,t) \chi(x) L^t \phi dx dt + \iint u(x,t)(1 - \chi(x)) L^t \phi dx dt = 0$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(Q)$, onde χ é a função característica do conjunto $\mathcal{N}$.
Vamos mostrar então que cada parcela da soma acima é zero.

Lema 5.5. *Sejam χ a função característica de $\mathcal{N}$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ suportada no cubo unitário Q. Assuma que a função contínua u satisfaz $Lu = 0$ onde $u \neq 0$, então*

$$\int \int u(x,t) \chi(x) L^t \phi dx dt = 0. \tag{5.5}$$

Demonstração. Se $x \in \mathcal{N}$, então $b(x,t) = 0$ para $|t| < 1$ logo o segmento $\{x\} \times (-1,1)$ está contido em uma órbita de L de dimensão um. Pelo Lema 5.2 temos que a função u restrita a este segmento é constante em t, ou seja

$$\{x\} \times (-1,1) \ni (x,t) \longmapsto u(x,t) = k_x.$$

Logo a função u restrita ao conjunto $\mathcal{N} \times (-1,1)$ é uma função que depende só de x.

Por outro lado o transposto de L é dado por

$$L^t = -\frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{j=1}^n b_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} + i \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j},$$

mas se $x \in \mathcal{N}$ então $\vec{b}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} = 0$. Logo L^t fica da seguinte forma

$$L^t = -\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}.$$

Podemos escrever $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, com

$$\mathcal{N}_1 = \{x \in \mathcal{N}\,;\, \nabla_x \vec{b}(x,t) \neq 0 \ \text{ para algum } t \in (-1,1)\}$$

e $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_1$. Mostremos que $\mathcal{N}_1$ tem medida zero. De fato, seja $x_0 \in \mathcal{N}_1$, então $\nabla_x \vec{b}(x_0,t_0) \neq 0$, para algum $t_0 \in (-1,1)$. Logo $(\partial b_j/\partial x_j)(x_0,t_0) \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$ e, além disso, $b_j(x_0,t_0) = 0$. Pelo Teorema da função implícita temos que existe $\epsilon > 0$ tal que o conjunto $\{x\,;\, b_j(x,t_0) = 0\} \cap \{|x - x_0| < \epsilon\}$ é uma hipersuperfície, assim $\rho(x) > 0$ q.s em $\{|x - x_0| < \epsilon\}$. Isto mostra que o conjunto

$$\{\rho \equiv 0\} \cap \{\nabla_x \vec{b}(x,t) \neq 0\} = \mathcal{N}_1$$

tem medida zero. Portanto $L^t = -\frac{\partial}{\partial t}$ sobre $\mathcal{N}_2 \times (-1,1)$. temos

$$\begin{aligned}\int\int_Q u(x,t)\chi(x)L^t\phi(x,t)dxdt &= \int_{\mathcal{N}}\int_{-1}^{1} u(x,t)L^t\phi(x,t)dxdt \\ &= -\int_{\mathcal{N}_2} u(x) \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)dt\right)}_{0} dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Isto mostra (5.5). □

Nosso seguinte passo é provar que

$$\iint u(x,t)(1 - \chi(x))L^t\phi dxdt = 0 \quad \text{para toda } \phi \in C_c^\infty(Q). \tag{5.6}$$

Se Q_1 é o cubo aberto unitário em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < 1\}$, vamos construir uma sequência de funções $\phi_k \in C_c^\infty(Q_1 \setminus \mathcal{N})$ tal que $\phi_k(x) = 1$ se $dist(x,\mathcal{N}) > 1/k$ e $|\nabla\phi_k(x)| \leq Ck$, onde $C > 0$ é uma constante independente de k. De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \varphi dx = 1$ e $supp(\varphi) \subseteq B(0,1)$, se $\epsilon > 0$, podemos considerar a seguinte função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon}) \ \text{ com } \ supp(\varphi_\epsilon) \subseteq B(0,\epsilon) \text{ e } \int \varphi_\epsilon dx = 1.$$

Considere também o seguinte

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{x \in Q_1\,;\, dist(x, \mathcal{N}) \leq \epsilon\} \quad \text{e} \quad \psi_\epsilon = \chi_{\mathcal{N}_\epsilon} * \varphi_{\frac{\epsilon}{2}}, \tag{5.7}$$

onde $\chi_{\mathcal{N}_\epsilon}$ é a função característica do conjunto $\mathcal{N}_\epsilon$. Mostremos que se $x \in \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{2}}$, então $\psi_\epsilon(x) = 1$. Para isto observe que se $x \in \mathcal{N}_{\frac{\epsilon}{2}}$ e $|y| < \epsilon/2$ então $x - y \in \mathcal{N}_\epsilon$ e assim $\chi_{\mathcal{N}_\epsilon}(x-y) = 1$. Logo temos

$$\psi_\epsilon(x) = (\chi_{\mathcal{N}_\epsilon} * \varphi_{\frac{\epsilon}{2}})(x) = \int_{|y|<\frac{\epsilon}{2}} \chi_{\mathcal{N}_\epsilon}(x-y)\varphi_{\frac{\epsilon}{2}}(y)dy = \int_{|y|<\frac{\epsilon}{2}} \varphi_{\frac{\epsilon}{2}}(y)dy = 1.$$

Tomemos agora a seguinte sequência de funções, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_k = 1 - \psi_{\frac{2}{k}},$$

onde fizemos $\epsilon = 2/k$ em (5.7). Pelo que foi mostrado antes temos que se $x \in \mathcal{N}_{\frac{1}{k}}$ então $\psi_{\frac{2}{k}}(x) = 1$ e, portanto, $\phi_k(x) = 0$.
Por outro lado se $x \notin supp(\psi_{\frac{2}{k}})$ (i.e. $dist(x, \mathcal{N}) > 1/k$) então

$$\phi_k(x) = 1 - \underbrace{\psi_{\frac{2}{k}}(x)}_{0} = 1.$$

Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $0 \leq \phi_k(x) \leq 1$, $\phi_k(x) \longrightarrow (1-\chi(x))$ quando $k \to \infty$ e

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_{\frac{2}{k}}(x)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{N}_{\frac{2}{k}}}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_{\frac{1}{k}}(x-y)dy\Big| \;=\; \Big|\int_{\mathcal{N}_{\frac{2}{k}} \cap B(0,\frac{1}{k})} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_{\frac{1}{k}}(x-y)dy\Big| \\
&\leq \int_{B(0,\frac{1}{k})} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_{\frac{1}{k}}(x-y)\Big|dy \;=\; \int_{B(0,\frac{1}{k})} \Big|k^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(k(x-y))\Big|dy \\
&\leq C_\varphi \int_{B(0,\frac{1}{k})} k^{n+1}dy \;=\; C'C_\varphi \frac{k^{n+1}}{k^n} \;=\; Ck.
\end{aligned}$$

Disto vem que

$$|\nabla\phi_k(x)| = |\nabla\psi_{\frac{2}{k}}(x)| \leq Ck,$$

onde a constante $C > 0$ é independente de k. Logo a sequência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é a sequência requerida. Agora para mostrar a igualdade (5.6), precisamos do seguinte lema.

Lema 5.6. *Para $k = 1, 2, \ldots$ temos que*

$$\int\int u(x,t)L^t(\phi_k\phi)dxdt = 0\,, \qquad \textit{para toda } \phi \in C_c^\infty(Q). \tag{5.8}$$

Nós deixamos a prova do Lema 5.6 para a próxima seção e vamos supor que (5.8) é satisfeita. Observe como $\phi_k \in C_c^\infty(Q_1 \backslash \mathcal{N})$ e $\phi \in C_c^\infty(Q)$ então $\phi_k\phi \in C_c^\infty(Q \backslash \mathcal{N} \times (-1,1))$, vamos mostrar que para cada $(x,t) \in Q \setminus \mathcal{N} \times (-1,1)$ temos

$$u(x,t)L^t(\phi_k\phi)(x,t) \longrightarrow u(x,t)(1-\chi(x))L^t(\phi)(x,t)\ , \ \ \text{quando } k \to \infty. \tag{5.9}$$

De fato, se $(x,t) \in Q \setminus \mathcal{N} \times (-1,1)$ então $\chi(x) = 0$. Logo, usando a expressão para o transposto de L temos

$$\begin{aligned} u(x,t)L^t(\phi_k\phi)(x,t) &= u(x,t)\Big[- L(\phi_k\phi)(x,t) + i\phi_k(x)\phi(x,t)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}\Big] \\ &= u(x,t)\Big[- \phi_k(x)L(\phi)(x,t) - \phi(x,t)L(\phi_k)(x,t) + \\ &\qquad\qquad i\phi_k(x)\phi(x,t)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}\Big] \end{aligned} \tag{5.10}$$

Como $\phi_k(x) \longrightarrow (1-\chi(x))$ quando $k \to \infty$, segue de (5.10) que

$$\phi_k(x)L(\phi)(x,t) \longrightarrow (1-\chi(x))L(\phi)(x,t), \tag{5.11}$$

e

$$\phi_k(x)\phi(x,t)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j} \longrightarrow (1-\chi(x))\phi(x,t)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j} \tag{5.12}$$

quando $k \to \infty$. Além disso, como $\phi_k(x) = 0$ se $x \in \mathcal{N}_{\frac{1}{k}}$ e $\phi_k(x) = 1$ se $x \notin supp(\psi_{\frac{2}{k}})$, segue que para cada $k \in \mathbb{N}$, $supp(\nabla\phi_k) \subset \{x \in Q_1\,;\, \frac{1}{k} \leq d(x,\mathcal{N}) \leq \frac{2}{k}\}$. Logo,

$$\phi(x,t)L(\phi_k)(x,t) = -i\phi(x,t)\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_j} = -i\phi(x,t)[\vec{b}(x,t)\cdot\nabla\phi_k(x)].$$

Se consideramos $x \in supp(\nabla\phi_k)$ e aplicamos limite quando $k \to \infty$ na última expressão acima obtemos que

$$\phi(x,t)L(\phi_k)(x,t) \longrightarrow 0. \tag{5.13}$$

Portanto, juntando (5.11), (5.12) e (5.13), obtemos (5.9).

Mostremos agora que $u(x,t)L^t(\phi_k\phi)$ é limitado. De fato,

$$\big|u(x,t)L^t(\phi_k\phi)\big| = \Big|u(x,t)\Big[-\frac{\partial}{\partial t}+i\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}+i\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}b_j(x,t)\Big](\phi_k\phi)\Big|$$

$$\begin{aligned}
&= \Bigg|u(x,t)\Bigg[-\phi_k(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}+i\phi_k(x)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x_j} \quad + \\
&\quad i\phi(x,t)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_j}+i\phi_k(x)\phi(x,t)\sum_{j=1}^n\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}\Bigg]\Bigg| \\
&\leq \Big|u(x,t)\Big|\Bigg[\Big|\phi_k(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\Big|+\Big|\phi_k(x)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x_j}\Big| \quad + \\
&\quad \Big|\phi(x,t)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_j}\Big|+\Big|\phi_k(x)\phi(x,t)\sum_{j=1}^n\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}\Big|\Bigg] \\
&\leq \Big|u(x,t)\Big|\Bigg[\Big|\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\Big|+\Big|\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x_j}\Big| \quad + \\
&\quad \Big|\phi(x,t)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x_j}\Big|+\Big|\phi(x,t)\sum_{j=1}^n\frac{\partial b_j(x,t)}{\partial x_j}\Big|\Bigg]. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Vamos ver o que acontece com a terceira parcela da expressão (5.14). Temos que $|\nabla\phi_k(x)| \leq Ck$ com $C > 0$ independente de k. Também como $\phi \in C_c^\infty(Q)$ vem que ela é limitada. Como $supp(\nabla\phi_k) \subset \{x \in Q_1\,;\, \frac{1}{k} \leq d(x,\mathcal{N}) \leq \frac{2}{k}\}$ e se consideramos $x \in supp(\nabla\phi_k)$ e $y \in \mathcal{N}$, obtemos

$$\rho(x) = \rho(x)-\rho(y) \leq |\rho(x)-\rho(y)| \underbrace{\leq}_{5.4} |x-y| \leq \frac{1}{k}.$$

Portanto disto obtemos o seguinte

$$|\phi(x,t)\sum_{j=1}^n b_j(x,t)\frac{\partial\phi_k}{\partial x_j}| = |\phi(x,t)\vec{b}(x,t)\cdot\nabla\phi_k(x)| \leq |\phi(x,t)|\rho(x)|\nabla\phi_k(x)| \leq Ck\frac{1}{k} = C.$$

Além disso, como as funções b_j, ϕ são de classe C^∞ então tanto elas quanto suas derivadas são limitadas e por ser u contínua, ela é limitada. Portanto, obtemos que a expressão (5.14) é limitada por uma constante $\tilde{C} > 0$ independente de k.

Resumindo temos que

$$u(x,t)L^t(\phi_k\phi)(x,t) \longrightarrow u(x,t)(1-\chi(x))L^t(\phi)(x,t) \quad \text{pontualmente}$$

e

$$|u(x,t)L^t(\phi_k\phi)(x,t)| \leq \tilde{C},$$

logo usando o Teorema da convergência dominada obtemos

$$\iint u(x,t)(1-\chi(x)L^t\phi dxdt = \lim_{k\to\infty}\iint u(x,t)L^t(\phi_k\phi)dxdt = 0.$$

Isto prova a igualdade (5.6). Finalmente juntando (5.5) e (5.6) obtemos que $Lu = 0$ no sentido das distribuições em Q.

5.2 Prova do Lema 5.6

Vamos começar a prova do Lema 5.6. Como $\phi_k\phi \in C_c^\infty(Q\setminus\mathcal{N}\times(-1,1))$, para mostrar a igualdade (5.8) é suficiente mostrarmos que os suportes de Lu e $\phi_k\phi$ são disjuntos, ou seja, vamos mostrar que $Lu = 0$ no sentido das distribuições em $Q\setminus(\mathcal{N}\times(-1,1))$ sob a hipotese que u é uma função de Radó. Seja $q \in Q\setminus\mathcal{N}\times(-1,1)$, então q pertence a uma órbita de dimensão dois de L em Q, se isto não acontece, como L só tem órbitas de dimensão um e dois, então q teria que estar em uma órbita de dimensão um de L em Q que está contida em $\mathcal{N}\times(-1,1)$, o que implicaria que $q \in \mathcal{N}\times(-1,1)$, que é uma contradição. Da Observação 4.25 vem que em uma vizinhança deste ponto, podemos escolher coordenandas tais que as órbitas de dimensão dois de L são dadas por $x_j = Cte$, para $j = 2, 3, \ldots, n$, isto é, nestas coordenadas o campo L tem a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} - ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x_1}\,, \quad |x| \leq a\,,\, |t| < 1,$$

com $b(x,t) \geq 0$. Além disso, satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Para todo } |x| \leq a \text{ a função } (-1,1) \ni t \to b(x,t) \text{ não é identicamente zero .} \tag{5.15}$$

Considerando $x_2, \ldots, x_n$ como parâmetros e, escrevendo x em lugar de x_1, podemos então começar com um campo de vetores L em duas variáveis

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

com $b(x,t) \geq 0$ definida em uma vizinhança de $\bar{\Omega} = [-a,a] \times [-T,T]$. Além disso, L satisfaz a condição (P) e pela Observação 5.3, u é ainda uma função de Radó para este campo, vamos assumir também que (5.15) é satisfeita.
Usando o fato que a condição (P) e equivalente à resolubilidade local de L em C^∞ e pelo Teorema 4.4, isto implica que L é localmente integrável, logo podemos construir uma função suave Z tal que

$$LZ = 0 \quad \text{e} \quad dZ \neq 0\ , \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega.$$

Agora nosso problema é reduzido a provar o seguinte

$$Lu = 0 \quad \text{no sentido das distribuições em } \Omega, \tag{5.16}$$

mas, neste caso, Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por $\Omega = (-a,a)\times(-T,T)$. Como falamos antes, como se trata de uma propriedade local, isto pode ser estudado na vizinhança de um determinado ponto $p \in \Omega$. Suponha que L é elítico no ponto $p \in \Omega$, então em coordenadas locais apropriadas temos que L é múltiplo do operador de Cauchy-Riemann (ver Observação 4.5), ou seja,

$$L = g\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{numa vizinhança de } p \ \ (g \neq 0)$$

e como $Lu = g\partial u/\partial \bar{z} = 0$ nos pontos onde $u \neq 0$ (pois u é uma função de Radó para L), aplicando o Teorema clássico de Radó (Teorema 2.19) vem que

$$Lu = 0 \quad \text{na vizinhança de } p.$$

Assuma agora que L não é elítico em p e, sem perda de generalidade, vamos supor que p é a origem. Ou seja, vamos assumir que $b(0,0) = 0$. Seja $[t_0, t_1]$ o subintervalo maximal fechado de $[-T,T]$ contendo a origem tal que $b(0,t) = 0$, para todo $t \in [t_0,t_1]$. Observe que este intervalo pode-se reduzir ao ponto $\{0\}$ mas pela propriedade (5.15), não pode ser igual a $[-T,T]$. Além disso, temos que $L = \partial/\partial t$ e Z_x é constante sobre $I = \{0\} \times [t_0,t_1]$. De fato, como $b(0,t)$ zera sobre I, $t_0 < 0 < t_1$ e $b \geq 0$, segue que $b_x(0,t)$ zera sobre I. Por outro lado, como $LZ = 0$, temos que

$$Z_t(x,t) - ib(x,t)Z_x(x,t) = 0. \tag{5.17}$$

Derivando a equação (5.17) em relação a x e fazendo $x = 0$, obtemos

$$0 = Z_{tx}(0,t) - i\,\underbrace{b_x(0,t)}_{0}\,Z_{xx}(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}(Z_x(0,t))\ , \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_1],$$

o qual implica que Z_x é constante sobre I.

Agora usando (ReZ, t) como novas coordenadas em uma vizinhança de I (da mesma forma como na Observação 4.5) podemos assumir, depois de redefinir a e T, que estamos na seguinte situação

i) $Z(x,t) = x + i\phi(x,t)$ onde $\phi(x,t)$ é uma função suave a valores reais definida para todo $(x,t) \in [-a,a] \times [-T,T]$;

ii) $|\phi_x(x,t)| < \frac{1}{2}$, para todo $(x,t) \in [-a,a] \times [-T,T]$;

iii) a função $[-T,T] \ni t \to \phi(x,t)$ é monótona não decrescente e não constante para qualquer $x \in [-a,a]$ e

iv) $L = \partial/\partial t - B(x,t)\partial/\partial x$, onde $B(x,t) = Z_t/Z_x = i\phi_t/(1 + i\phi_x)$.

O item *ii*) acima se satisfaz porque a função ϕ pode ser escolhida de tal forma que $\phi(0,0) = \phi_x(0,0) = 0$. Seja R um retângulo fechado, com lados paralelos aos eixos coordenados, contido em $[-a,a] \times [-T,T]$ e assuma que u satisfaz $Lu = 0$ em uma vizinhança de R, então pelo Teorema de aproximação de Baouendi-Treves (Teorema 3.88) temos que existe uma sequência de soluções polinomiais $\{P_j(Z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a u sobre R.

Para concluir a prova de 5.16 precisamos mostrar três lemas que é o que vamos fazer a seguir.

Lema 5.7. *A função u é constante sobre as fibras de Z. Além disso, podemos escrever $u = v \circ Z$ com $v \in C^0(Z(\bar{\Omega}))$ unicamente determinada.*

Demonstração. Seja $z_0 = x_0 + iy_0$ fixo e considere a fibra de Z seguinte

$$F = \{(x,t) \in \Omega\,;\, z(x,t) = z_0\} = \{(x_0,t) \in \Omega\,;\, \phi(x_0,t) = y_0\}.$$

Logo pelo item (iii) acima temos que a fibra de Z tem a seguinte forma

$$F = \{x\} \times [c,d] \text{ com } t \longrightarrow \phi(x,t) \text{ constante em } [c,d], \text{ para todo } x.$$

Em particular $L = \partial/\partial t$ sobre F, pois $\phi_t \equiv 0$ nesse conjunto. Então sobre o conjunto aberto $(-a,a) \times (c,d)$, o segmento $\{x\} \times (c,d)$ é uma órbita de dimensão um de L e segue do Lema 5.2 que u é constante sobre $\{x\} \times (c, d)$ e, como ela é contínua, segue que também é constante sobre F.

Por outro lado, para cada $\xi \in Z(\bar{\Omega})$ definimos a seguinte função

$$v(\xi) = u(p) \quad \text{ se } Z(p) = \xi.$$

Temos que v está bem definida pois u é constante sobre as fibras de Z.
Mostremos agora que v é contínua. De fato, seja $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $Z(\bar{\Omega})$ tal que

$$\xi_n \to \xi^* \in Z(\bar{\Omega}),$$

e tomemos uma sequência $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bar{\Omega}$ com $Z(p_n) = \xi_n$. Como $\bar{\Omega}$ é compacto, passando a uma subsequência se é necessário, podemos assumir que $p_n \to p^* \in \bar{\Omega}$. Logo, usando a continuidade de u e Z vem que

$$v(\xi_n) = u(p_n) \to u(p^*) \quad \text{ e } \quad \xi_n = Z(p_n) \to Z(p^*).$$

Então pela unicidade de limite temos $Z(p^*) = \xi^*$, o que implica que

$$v(\xi^*) = u(p^*) = \lim_{n\to\infty} v(\xi_n).$$

Portanto, v é contínua.

Para a unicidade considere $\tilde{v} \in C^0(Z(\bar{\Omega}))$ tal que $u = \tilde{v} \circ Z$ e seja $\xi \in Z(\bar{\Omega})$ com $Z(p) = \xi$. Assim,

$$\tilde{v}(\xi) = \tilde{v}(Z(p)) = u(p) = v(Z(p)) = v(\xi)$$

e, portanto, $\tilde{v} = v$. □

Lema 5.8. *A função v do Lema 5.7 é holomorfa sobre o conjunto aberto*

$$U = \{\zeta = x + iy\,;\, -a < x < a\,,\, \phi(x, -T) < y < \phi(x, T)\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema clássico de Radó (Teorema 2.19) só precisamos mostrar que v é holomorfa no conjunto $\tilde{U} = \{\zeta \in U\,;\, v(\zeta) \neq 0\}$. Seja

$$\zeta = x + i\phi(x, t) \in U \quad \text{ e } \quad v(\zeta) = u(x, t) = \lambda \neq 0.$$

Se $\phi_t(x, t) \neq 0$, então $\phi_t \neq 0$ em uma vizinhança de (x, t), pelo item b) da Observação 4.5

temos que

$$L = g\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \quad \text{com } g \neq 0.$$

Portanto, temos

$$Lu = g\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}u = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} = 0 \text{ numa vizinhança de } \zeta$$

o qual implica que v é holomorfa em $\tilde{U}$.

Suponha agora que $\phi_t(x,t) = 0$ e considere a fibra F de Z tal que $(x,t) \in F$. Logo como u é constante sobre F e $u(x,t) = \lambda$, vem que $u = \lambda$ sobre F e $u \neq 0$ em uma vizinhança de F. Considere um retângulo fechado R com $F \subset \overset{o}{R}$ tal que

$$Lu = 0 \quad \text{em uma vizinhança de } R.$$

Observe que a fibra F não toca $\partial\Omega$, pois se isso acontecer pode-se ter, por exemplo, que o ponto $\zeta = x + i\phi(x, -T) \in U$ o qual é absurdo. Logo como consequência do Teorema de aproximação de Baouendi-Treves (Corolário 3.90) temos que existe uma única função $\tilde{v} \in C^0(Z(R))$ e holomorfa no interior de $Z(R)$, tal que $u = \tilde{v} \circ Z$ sobre R. Agora como (x,t) esta no interior de R e a função $t \longrightarrow \phi(x,t)$ é monotona não decrescente vem que ζ esta no interior de $Z(R)$, além disso, como $Z(R) \subset Z(\bar{\Omega})$ e pela unicidade de $\tilde{v}$, temos que

$$\tilde{v} = v|_{Z(R)},$$

o qual mostra que v é holomorfa em ζ e como ζ foi tomado arbitrariamente vem que v é holomorfa em $\tilde{U}$. Isto mostra o lema. □

Lema 5.9. *$Lu = 0$ no sentido das distribuições em Ω.*

Demonstração. Pelos Lemas 5.7 e 5.8, temos que $u = v \circ Z$ com v contínua em $\overline{U}$ e holomorfa em U. Logo pelo Teorema de Mergelyan (Teorema 2.18) segue que existe uma sequência de polinômios $P_j(\zeta)$ tal que

$$P_j \longrightarrow v \quad \text{uniformemente sobre } \overline{U}.$$

Assim, a sequência de funções $u_j = P_j \circ Z$ converge uniformemente a u.
Por outro lado como $LZ = 0$ sobre Ω, então para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\langle Lu_j, \varphi \rangle = 0, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

daí vem que se $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L^t\varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u_j, L^t\varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle Lu_j, \varphi \rangle = 0.$$

Portanto, $Lu = 0$ no sentido das distribuições em Ω. Isto prova o lema. $\square$

Observação 5.10. *Observe que o Lema 5.9 implica o Lema 5.6, para mostrar isto considere $\varphi \in C_c^\infty(Q_{n-1})$ uma função nas variáveis $x_2, \ldots, x_n$ onde Q_{n-1} é o cubo unitário dado por $Q_{n-1} = \{x' = (x_2, \ldots, x_n)\,;\, |x'| < 1\}$. Pelo Lema 5.9 temos que*

$$\iint u(x,t) L^t \phi \, dx dt = 0 \ , \quad \textit{para toda } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{5.18}$$

Logo, se multiplicamos a expressão (5.18) pela φ e integramos em relação à variável x', obtemos

$$\int \varphi(x') \iint u(x,t) L^t \phi \, dx dt dx' = 0.$$

Agora, aplicando o Teorema de Fubini e observando que $\varphi L^t \phi = L^t(\varphi\phi)$, vem que

$$\iint u(x,t) L^t(\varphi\phi) d(x,x') dt = 0 \qquad \textit{com } \varphi\phi \in C_c^\infty(Q_{n-1}) \otimes C_c^\infty(\Omega) \tag{5.19}$$

onde $C_c^\infty(Q_{n-1}) \otimes C_c^\infty(\Omega)$ é o subespaço de $C_c^\infty(Q_{n-1} \times \Omega)$ formado por todas as funções $\psi(x', y)$ que podem ser escritas como somas finitas

$$\psi(x', y) = \sum \varphi_j(x') \phi(y) \ , \ \varphi_j \in C_c^\infty(Q_{n-1}) \, , \, \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Finalmente tendo que $C_c^\infty(Q_{n-1}) \otimes C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C_c^\infty(Q_{n-1} \times \Omega)$, o resultado segue de (5.19).

Referências Bibliográficas

[1] S. Berhanu, P. D. Cordaro, and J. Hounie. *An introduction to involutive structures*, volume 6 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[3] P. Cordaro. *Sistemas de Campos Vetoriais Complexos*. IMPA. Rio de Janeiro, 1986.

[4] I. Glicksberg. Maximal algebras and a theorem of Radó. *Pacific J. Math.*, 14:919–941, 1964.

[5] L. Hörmander. Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo)differential operators of principal type. *Ann. of Math. (2)*, 108(3):569–609, 1978.

[6] J. Hounie. *Teoria Elementar das Distribuições. 12º Colóquio Brasileiro de Matemática*. IMPA. Rio de Janeiro, 1979.

[7] J. Hounie and J. Tavares. Radó's theorem for locally solvable vector fields. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(3):829–836, 1993.

[8] R. Kaufman. A theorem of Radó. *Math. Ann.*, 169:282, 1967.

[9] L. Nirenberg and F. Treves. Solvability of a first order linear partial differential equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 16:331–351, 1963.

[10] J.-P. Rosay and E. L. Stout. Radó's theorem for CR-functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(4):1017–1026, 1989.

[11] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[12] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[13] E. L. Stout. A generalization of a theorem of Radó. *Math. Ann.*, 177:339–340, 1968.

[14] H. J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 180:171–188, 1973.

[15] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York, 1967.