Prescrição de singularidades analíticas de
soluções de uma classe de campos vetoriais
no toro

Andreza Cristina Beezão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Prescrição de singularidades analíticas de soluções de uma classe de campos vetoriais no toro

Andreza Cristina Beezão

Orientador: *Prof. Dr. Sérgio Luís Zani*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Maio/2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B414p Beezão, Andreza Cristina
Prescrição de singularidades analíticas de soluções
de uma classe de campos vetoriais no toro / Andreza
Cristina Beezão; orientador Sérgio Luís Zani -- São
Carlos, 2011.
79 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Hipoeliticidade analítica global. 2. Solução
singular. 3. Suporte singular analítico. I. Zani,
Sérgio Luís, orient. II. Título.

*À minha
família tão
querida.*

- Quanto tempo demora? - perguntou ele.

- Não sei. Um pouco.

Sohrab deu de ombros e voltou a sorrir, desta vez era um sorriso mais largo.

- Não tem importância. Posso esperar. É que nem maçã ácida.

- Maçã ácida?

- Um dia, quando eu era bem pequenininho mesmo, trepei em uma árvore e comi uma daquelas maçãs verdes, ácidas. Minha barriga inchou e ficou dura feito um tambor. Doeu à beça. A mãe disse que, se eu tivesse esperado as maçãs amadurecerem, não teria ficado doente. Agora, quando quero alguma coisa de verdade tento lembrar do que ela disse sobre as maçãs.

O Caçador de Pipas - Khaled Hosseini

Que o breve

seja de um longo pensar.

Que o longo

seja de um curto sentir.

Que tudo seja leve

de tal forma que o tempo

nunca leve.

Alice Ruiz

Agradecimentos

A Deus, pela vida, por ser meu refúgio e por me ensinar a ter fé.

Aos meus amados pais, Pedro e Zilda, aos meus irmãos, Adriana e Adilson, ao meu cunhado, Rogério e à minha sobrinha, Gabriela, pelo amor constante, pela educação, pela confiança, pelo exemplo de pessoas íntegras que são, pela dedicação e pelo esforço para a concretização deste sonho e, entre muitas outras coisas, pelo incentivo e pela compreensão - algumas vezes silenciosos e mesmo assim tão fortes - que tanto me impulsionaram, em todos os momentos e fases da minha vida. Aos meus padrinhos, Ludovico e Marli, Osvaldo (in memoriam) e Nilce e ao Pe. Márcio, pelo carinho, pelos conselhos tão valiosos e por se fazerem sempre presentes, de alguma forma. Sem vocês, “a vida é um pátio vazio”.

Aos meus queridos amigos Adriana Philippsen, Carlos Siqueira, Gisele Philippsen, Nelson Silva, Rafael Gonzalez, Vinicius Laass e Willian Oliveira, pelo afeto, pelas alegrias, pelas conversas - monólogos meus, na maioria das vezes! -, pelo aprendizado e por serem uma extensão da minha família. Agradeço também aos meus colegas e amigos, essenciais, Alex Rezende, Ananda Siani, Ana Braguini, Ana Padovez, Apoenã Passamani, Cleiton Silva, Flávio Pires, Greciane Buosi, Guilherme Pimentel, Henry Gullo, José Luiz Fonseca, Larissa Braguini, Letícia Curti, Marcos Cascone, Northon Canevari, Renato Fehlberg, Thaís Dalbelo e Thaís Maciel, pelo carinho e pela companhia maravilhosa. “Os amigos são a família que nos permitem escolher”.

Ao professor Sérgio Luís Zani, pela disponibilidade revelada ao longo destes três anos, entre Iniciação Científica e Mestrado, e pela competência e serenidade que dedicou na orientação e preparação deste trabalho.

À professora Janete Crema, pela ótima orientação de Iniciação Científica durante a graduação e pelo incentivo constante.

A todos meus mestres, da pré-escola à pós-graduação, que além do conhecimento, me deixaram lições para a vida e inspiração profissional e pessoal; em especial, cito Denise de Mattos, Durval Pereira Filho, Evany Brasil (in memoriam) e Irene Onnis.

Ao ICMC, pela infraestrutura e pela excelência dos seus cursos de graduação e pós-graduação, por me possibilitar uma formação sólida e contribuir para o meu aperfeiçoamento acadêmico e profissional.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Por fim, minha gratidão a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Seja $L \doteq \partial_t + (a(t) + ib(t))\partial_x$ um operador diferencial parcial agindo em distribuições definidas no toro bidimensional $\mathbb{T}^2$, onde $a, b : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções analíticas reais. Suponhamos que L não é globalmente analítico hipoelítico e b não é uma função identicamente nula.

O objetivo principal deste trabalho é o estudo das soluções singulares de L , através da natureza e da localização das suas singularidades. Com este intuito, primeiramente abordaremos a teoria das séries parciais de Fourier, que nos permitem relacionar o comportamento assintótico dos coeficientes parciais de Fourier de um dado objeto com a regularidade do mesmo.

Abstract

Let $L \doteq \partial_t + (a(t) + ib(t))\partial_x$ be a partial differential operator acting on distributions on the two-torus $\mathbb{T}^2$, where $a, b : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ are real analytic functions. Assume that L is not a globally analytic hypoelliptic operator and b is not identically zero.

The main goal of this work is the study of the singular solutions of L , by means of the nature and localization of their singularities. To this end, we first study the theory of partial Fourier series, which are a useful tool to analyze the regularity of a given distribution.

Introdução

Dizemos que um operador diferencial parcial L é globalmente analítico hipoelítico (GAH) no toro $\mathbb{T}^2$ quando as condições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ implicarem que $u \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, e entendemos por uma solução singular de L uma distribuição não-analítica $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$.

Consideremos $L \doteq \partial_t + (a(t) + ib(t))\partial_x$ um operador diferencial parcial agindo no espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ das distribuições definidas no toro bidimensional $\mathbb{T}^2$, onde $a, b : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções analíticas reais. A hipoeliticidade analítica global de L foi completamente estudada em [4], sendo apresentada uma condição necessária e suficiente para que este operador do tipo tubo seja GAH. Em particular, provou-se que se $b \neq 0$, então L é GAH se, e somente se, a função b não muda de sinal, ou equivalentemente, nenhuma primitiva de b definida em $\mathbb{R}$ possui extremo local. O método aplicado em [4] não fornece todas as soluções singulares de L . Vejamos duas situações. Seja B uma primitiva de b em $\mathbb{R}$ e suponhamos que a origem seja um ponto de mínimo local de B . Se $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ são pontos de máximo local de $B|_{[0, 2\pi]}$ tais que $B(t_1) < B(t_2)$, então a solução singular obtida em [4] é analítica real em $t = t_1$. Similarmente, se $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$ são pontos de máximo global de $B|_{[0, 2\pi]}$, então a solução singular obtida em [4] não é analítica real em ambos os pontos $(t_1, 0)$ and $(t_2, 0)$.

Notemos que segue de [14] e [6] que se $t \in \mathbb{T}^1$ não é um extremo local de uma primitiva real B de b , então toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ satisfazendo $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ é, necessariamente, analítica real em (t, x) , para todo $x \in \mathbb{T}^1$. Dessa forma, se u tem uma singularidade analítica em (t, x) , então, necessariamente, t é um ponto de extremo local de B . Neste trabalho, conforme feito em [5], descreveremos a natureza e a localização das singularidades das soluções singulares de L no caso em que b muda de sinal. Mais precisamente, entre outros resultados, mostraremos que quando b muda de sinal, dado qualquer subconjunto Σ de um conjunto de extremos locais de primitivas locais de b , então existe uma solução singular de L cuja t - projeção do suporte singular analítico é o conjunto Σ ; além

disso, dados $\tau \in \Sigma$ e $F \subset \mathbb{T}^1$ um subconjunto fechado, existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \{\tau\} \times F$.

No Capítulo 1, definiremos o espaço das funções testes T -periódicas, $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, e o espaço das distribuições T -periódicas, $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que existe um homeomorfismo linear entre $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e um subespaço vetorial e topológico das distribuições usuais, a saber, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); u = u_{Tm}, \forall m \in \mathbb{Z}^n\}$. Observaremos que $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ admite uma estrutura algébrica, quando munido das operações T -convolução e adição. Por fim, enunciaremos o Método da fase estacionária, muito útil na demonstração principal desta dissertação.

No Capítulo 2, estudaremos parte da teoria das séries parciais de Fourier. Veremos que os espaços $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ são caracterizados através do comportamento assintótico dos coeficientes parciais de Fourier dos seus respectivos elementos.

No Capítulo 3, apresentaremos a definição de uma função analítica real de várias variáveis e algumas propriedades, com o propósito de caracterizarmos, quando periódicas, tais funções por meio do decrescimento exponencial e uniforme dos seus coeficientes parciais de Fourier.

No Capítulo 4, nos dedicaremos ao estudo das singularidades das soluções singulares do operador L e à demonstração do Teorema 4.15. Este resultado pode ser considerado o “centro” deste trabalho, pois nos permite construir soluções com singularidades prescritas e, a partir disso, obtermos uma sequência de teoremas conclusivos acerca de características como a localização e a natureza de tais singularidades.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Definições e Notações	1
1.2	Funções Testes Periódicas	3
1.3	Distribuições Periódicas	7
1.3.1	Operações com Distribuições Periódicas	14
1.4	A álgebra $(\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n), +, *)$	18
1.5	O Método da Fase Estacionária	21
1.6	Convergência em Subconjuntos Compactos de $\mathbb{C}$	22
2	Séries de Fourier	25
2.1	Série de Fourier em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$	25
2.2	Série de Fourier em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$	29
2.3	Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$	35
2.4	Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$	42
3	Funções Analíticas Reais em $\mathbb{R}^n$	47
3.1	Série de Potências de Várias Variáveis	47
3.2	Funções Analíticas Reais	49
4	Prescrevendo Singularidades Analíticas de Soluções de $L = \partial_t + c(t)\partial_x$	55
4.1	Resultados Fundamentais	56
4.2	Demonstração do Teorema Principal	68
4.2.1	O caso $b_0 \neq 0$	68
4.2.2	O caso $b_0 = 0$	77
	Referências	81
	Índice Remissivo	83

Preliminares

Neste capítulo, definiremos o espaço das funções testes periódicas, $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, e o espaço $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ das distribuições periódicas, isto é, funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Veremos, também, propriedades resultantes da introdução de noções de convergência nesses espaços.

Mostraremos um teorema que permite enxergarmos $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ como um sub-espaço vetorial e topológico das distribuições usuais, a saber, $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); u = u_{Tm}, \forall m \in \mathbb{Z}^n\}$. Além disso, observaremos que $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ admite uma estrutura algébrica, quando munido das operações T-convolução e adição.

Por fim, enunciaremos o Método da Fase estacionária e resultados acerca da convergência em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, necessários nas demonstrações dos Teoremas 4.15 e 3.6, respectivamente.

Os estudos que originaram este texto foram realizados de acordo a bibliografia, por isso omitiremos algumas definições e demonstrações com o objetivo de tornar o texto mais sucinto.

1.1 Definições e Notações

Definição 1.1 *Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Dizemos que α é um multi-índice quando $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Definição 1.2 *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos*

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$|x|^\alpha = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}$$

$$\begin{aligned}
(x)_\alpha &= \prod_{j=1}^n (x_j)_{\alpha_j} = \prod_{j=1}^n (x_j(x_j - 1) \cdots (x_j - \alpha_j + 1)) \\
\partial^\alpha &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \\
D^\alpha &= \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}.
\end{aligned}$$

Definição 1.3 *Seja*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } \phi \text{ tem suporte compacto} \right\},$$

em que o suporte de ϕ , denotado por $S(\phi)$, é o fecho do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) \neq 0\}$.

Definição 1.4 *Seja $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\phi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando*

- i) *existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S(\phi_n) \subseteq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
- ii) *$D^\alpha \phi_n$ converge uniformemente a zero quando $n \rightarrow \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Definição 1.5 *Seja $u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Dizemos que u é contínuo quando $\phi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica que $\langle u, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.*

Denotamos por

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}; u \text{ é linear e contínuo} \right\}$$

o espaço das distribuições usuais em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.6 *Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, o suporte singular de u , denotado por $SS(u)$, é a interseção de todos os subconjuntos fechados de Ω fora dos quais $u \in C^\infty$, isto é,*

$$SS(u) = \overline{\{V \subset \Omega; u \in \mathcal{D}'(V) \setminus C^\infty(V)\}}.$$

Quando dizemos que $u \in C^\infty(U)$, $U \subset \Omega$ um subconjunto aberto, nos referimos ao fato de u coincidir com uma função $f \in C^\infty(U)$ no seguinte sentido:

$$\langle u, \theta \rangle = \langle f, \theta \rangle = \int_U f \theta,$$

para toda $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $S(\theta) \subset U$.

1.2 Funções Testes Periódicas

Definição 1.7 *Sejam $T > 0$ e $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Definimos*

$$\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ \theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \theta(x) = \theta(x - Tm), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

o espaço (vetorial) das funções testes periódicas.

Definição 1.8 *Dizemos que uma sequência $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\theta_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, converge em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, se existir $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $D^\alpha \theta_j$ converge uniformemente para $D^\alpha \theta$ em $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Observemos que $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ é um espaço metrizável, através da métrica

$$d(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(\theta - \phi)}{2^k(1 + p_k(\theta - \phi))},$$

sendo

$$p_k(\theta) = \sup \{ |D^\alpha \theta(x)|; x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k \}$$

é uma seminorma.

Teorema 1.9 *Seja $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Então θ_j converge para θ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $p_k(\theta_j - \theta) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Supondo que $\theta_j \rightarrow \theta$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, para $k \in \mathbb{N}$ fixado e dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 > 0$ tal que, se $j \geq j_0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$|D^\alpha \theta_j(x) - D^\alpha \theta(x)| < \varepsilon,$$

para todo $|\alpha| \leq k$. Segue então que, se $j \geq j_0$,

$$p_k(\theta_j - \theta) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha \theta_j(x) - D^\alpha \theta(x)| \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, se $p_k(\theta_j - \theta) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, então para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$, segue que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_j(x) - D^\alpha \theta(x)| \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\beta| \leq k}} |D^\beta \theta_j(x) - D^\beta \theta(x)| = p_k(\theta_j - \theta) \rightarrow 0.$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, notemos que a série $\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$ está bem definida, pois como ϕ tem suporte compacto, em cada ponto do seu domínio, θ será uma soma finita. De fato, existe uma constante $C > 0$ tal que $\phi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x| \geq C$. Dessa forma, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| \leq a$, para algum $a > 0$, segue que

$$\phi(x - Tm) \neq 0 \Rightarrow |x - Tm| < C \Rightarrow |x_i - Tm_i| < C, \quad i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$$

$$-C < Tm_i - x_i < C, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Como $-a \leq x_i \leq a$, então $-C - a \leq -C + x_i < Tm_i < C + a$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Assim, $|m_i| \leq (C + a)T^{-1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, portanto $|m| \leq n(C + a)T^{-1}$. Como há apenas um número finito de n -uplas $m \in \mathbb{Z}^n$ satisfazendo essa última condição, podemos escrever

$$\theta(x) = \phi(x - Tm_1) + \dots + \phi(x - Tm_k),$$

para algum $k = k(a) \in \mathbb{N}$ conveniente e para todo x tal que $|x| \leq a$.

Proposição 1.10 *Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definamos*

$$\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm).$$

Então $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Conforme observamos acima, θ está bem definida.

Mostremos, agora, que $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Tomando $m \in \mathbb{Z}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \theta(x - Tm) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm - Tk) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - T(m + k)) = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tl) = \theta(x). \end{aligned}$$

Além disso, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_0| < a$, para algum $a > 0$, temos

$$\theta(x) = \phi(x - Tm_1) + \dots + \phi(x - Tm_k), \quad |x| < a,$$

donde segue que θ é infinitamente diferenciável em x_0 e

$$D^\alpha \theta(x_0) = D^\alpha \phi(x_0 - Tm_1) + \dots + D^\alpha \phi(x_0 - Tm_k).$$

Portanto, podemos escrever

$$D^\alpha \theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(x - Tm)$$

e concluímos que $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. □

Proposição 1.11 *Seja $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que ϕ_j converge para ϕ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então a sequência $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, onde $\theta_j(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_j(x - Tm) \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, converge para $\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Sabemos que $D^\alpha \phi_j$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, e que existe $a > 0$ tal que $S(\phi_j) \subset B[0, a]$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\varepsilon > 0$. Como $D^\alpha(\phi_j - \phi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe uma quantidade finita de inteiros $m_1, \dots, m_{k_1}$ tais que, para $x \in [0, T]^n$, temos

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm) = D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_1) + \dots + D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_{k_1}).$$

Mas $\phi_j(x) = 0$ se $x \notin B[0, a]$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Assim, se $\phi_j(x - Tm) \neq 0$, então $|x - Tm| \leq a$ e isto implica que

$$x_i - a \leq Tm_i \leq a + x_i.$$

Como $x \in [0, T]^n$, segue que $-a - T \leq -a \leq Tm_i$ e $x_i \leq a + T$, logo $|m_i| \leq \frac{a}{T} + 1$.

Uma vez que a independe de $j \in \mathbb{N}$, concluímos que só existe um número finito, digamos k , de índices $m \in \mathbb{Z}^n$ satisfazendo $\phi_j(x - Tm) \neq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm) &= D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_1) + \dots \\ &\quad \dots + D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_k), \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0, T]^n$.

Como $D^\alpha \phi_j$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_0$ implica que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{k}.$$

Portanto, se $j \geq j_0$ e $x \in [0, T]^n$, então

$$\begin{aligned} |D^\alpha \theta_j(x) - D^\alpha \theta(x)| &= |D^\alpha(\theta_j - \theta)(x)| = \left| D^\alpha \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi_j - \phi)(x - Tm) \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm) \right| = |D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_1) + \dots + D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_k)| \leq \\ &\leq |D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_1)| + \dots + |D^\alpha(\phi_j - \phi)(x - Tm_k)| \leq \frac{\varepsilon}{k} + \dots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela T-periodicidade de θ , segue o resultado. $\square$

Definição 1.12 Denotaremos por

$$\mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n); \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

o conjunto das funções unitárias.

Observação 1.13 Dada $\xi \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$, então $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha \xi(x - Tm) = D^\alpha \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = D^\alpha 1 = 0.$$

Proposição 1.14 Seja ξ uma função unitária. Se $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para θ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então $(\xi\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para $(\xi\theta)$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sabemos que $S(\xi\theta_j) \subset S(\xi)$, logo $S(\xi\theta_j)$ é compacto, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, segue da Regra de Leibniz que

$$D^\alpha(\xi\theta_j) = \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\beta!} D^\gamma \xi D^\beta \theta_j \longrightarrow \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\beta!} D^\gamma \xi D^\beta \theta = D^\alpha(\xi\theta)$$

uniformemente, pois θ_j converge para θ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. $\square$

O resultado seguinte mostra que toda função $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita da forma $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$, onde $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.15 A aplicação

$$\begin{aligned} F : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \\ \phi &\longmapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(\cdot - Tm) \end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Demonstração: Dada $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, basta tomarmos $\xi \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$ arbitrária e definirmos $\phi = \xi\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} (F\phi)(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm)\theta(x - Tm) = \\ &= \theta(x) \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = \theta(x). \end{aligned}$$

Logo, $F\phi = \theta$.

□

Na Teoria de distribuições, frequentemente precisamos substituir uma função suave θ por uma função teste ψ . Isto é feito através da multiplicação de θ por uma *função de corte*, garantida pelo teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [10, p. 25-26].

Teorema 1.16 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e K um subconjunto compacto. Então, existe $\phi \in C_c^\infty(X)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança de K .*

1.3 Distribuições Periódicas

Definição 1.17 *Um funcional linear $f : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito contínuo (ou sequencialmente contínuo) se, para toda sequência $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, temos $f(\theta_j) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$ quando $j \rightarrow \infty$.*

Definição 1.18 *O espaço vetorial*

$$\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ f : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é linear e contínuo} \right\}$$

é chamado de espaço das distribuições periódicas.

Se $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, usaremos a seguinte notação: $(f, \theta) = f(\theta)$.

Teorema 1.19 *Seja $f : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:*

- (1) *f é contínuo;*
- (2) *existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$(1.20) \quad |(f, \theta)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta(x)|,$$

para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Suponhamos que (1.20) seja válida.

Tomando $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, segue que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_j(x)|$ tende a zero, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, logo

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_j(x)| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Usando a desigualdade (1.20), concluímos a continuidade do funcional f .

Suponhamos, agora, que f é contínuo e que a afirmativa (1.20) é falsa. Com isso, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{\theta}_m \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(1.21) \quad |(f, \tilde{\theta}_m)| > m \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \tilde{\theta}_m(x)|.$$

Definindo $\theta_m = \frac{\tilde{\theta}_m}{|(f, \tilde{\theta}_m)|}$ e dividindo a desigualdade (1.21) pelo fator $|(f, \tilde{\theta}_m)|$, temos

$$|(f, \theta_m)| = 1 > m \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_m(x)|,$$

donde

$$0 < \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_m(x)| < \frac{1}{m}.$$

Portanto, θ_m converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, mas $(f, \theta_m) = 1$ não converge a zero em $\mathbb{C}$, contrariando a hipótese e provando o teorema. $\square$

Definição 1.22 *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $(f_n)_n$ é convergente em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ se existe $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que a sequência de números complexos (f_n, θ) converge para (f, θ) , para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.*

É conveniente notarmos que, de acordo com a Definição 1.18, uma distribuição periódica não é uma distribuição usual em $\mathbb{R}^n$, pertencente a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de modo que $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ são espaços distintos. Denotemos por $\langle u, \phi \rangle$ uma distribuição usual aplicada em uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para diferenciar da notação (f, θ) usada no caso de uma distribuição periódica.

O próximo teorema mostra, porém, que $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ pode ser “colocado” linear e continuamente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, no sentido de que existe um homeomorfismo linear entre $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e um subespaço vetorial e topológico de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a saber,

$$\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); u = u_{Tm}, \forall m \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

sendo $\langle u_{Tm}, \phi \rangle = \langle u, \phi_{-Tm} \rangle$ e $\phi_{Tm}(x) = \phi(x - Tm)$.

Teorema 1.23 *Existe um homeomorfismo linear*

$$A : \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, consideremos

$$\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \in \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n).$$

Definamos $u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle u, \phi \rangle = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) = (f, \theta)$$

e mostremos que $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Linearidade: Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \langle u, \phi + \psi \rangle &= \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi + \psi)_{Tm} \right) = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) + \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi_{Tm} \right) = \\ &= \langle u, \phi \rangle + \langle u, \psi \rangle \end{aligned}$$

e

$$\langle u\lambda\phi \rangle = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\lambda\phi)_{Tm} \right) = \left(f, \lambda \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) = \lambda \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) = \lambda \langle u, \phi \rangle.$$

Continuidade: Seja $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 1.11, $\theta_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi_j)_{Tm}$ converge para $\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 0_{Tm} = 0$ em $\mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$. Desse modo, $\langle u, \phi_j \rangle = (f, \theta_j)$ converge para 0 em $\mathbb{C}$ e temos $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Periodicidade: Dados $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{Z}^n$, então

$$\begin{aligned} \langle u_{Tm}, \phi \rangle &= \langle u, \phi_{-Tm} \rangle = \left(f, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\phi_{-Tm})_{Tk} \right) = \\ &= \left(f, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi_{T(k-m)} \right) = \left(f, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tk} \right) = \langle u, \phi \rangle, \end{aligned}$$

isto é, $u_{Tm} = u$.

Portanto, $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Seja

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto u = A(f), \end{aligned}$$

em que $\langle u, \phi \rangle = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos que A é linear e contínuo.

Linearidade: Dados $f, g \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \langle A(f+g), \phi \rangle &= (f+g, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}) = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) + \left(g, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) = \\ &= \langle A(f), \phi \rangle + \langle A(g), \phi \rangle = \langle A(f) + A(g), \phi \rangle \end{aligned}$$

e

$$\langle A(\lambda f), \phi \rangle = \langle \lambda f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle = \lambda \langle f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle = \lambda \langle A(f), \phi \rangle = \langle \lambda A(f), \phi \rangle.$$

Continuidade: Seja $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $f_j \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Dada $\phi \in C_c^\infty$, temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A(f_j), \phi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(f_j, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \right) = 0,$$

logo $A(f_j)$ tende a zero em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, a partir de $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, definiremos uma única distribuição T-periódica, $f = H(u)$, de maneira que esta aplicação seja a inversa de A .

Seja $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$. Para cada $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, definamos

$$\begin{aligned} f_\xi : \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \langle u, \xi \theta \rangle \end{aligned}$$

e mostremos que $f_\xi \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Linearidade: Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\theta, \beta \in \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, temos

$$f_\xi(\theta + \beta) = \langle u, \xi(\theta + \beta) \rangle = \langle u, \xi\theta + \xi\beta \rangle = \langle u, \xi\theta \rangle + \langle u, \xi\beta \rangle = f_\xi(\theta) + f_\xi(\beta).$$

e

$$f_\xi(\lambda\theta) = \langle u, \xi(\lambda\theta) \rangle = \langle u, \xi\lambda\theta \rangle = \langle \lambda u, \xi\theta \rangle = \lambda \langle u, \xi\theta \rangle = \lambda f_\xi(\theta).$$

Continuidade: Seja $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\theta_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Conforme a Proposição 1.14, $(\xi\theta_j)$ tende a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, como $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, temos $f_\xi(\theta_j) = \langle u, \xi\theta_j \rangle \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

Logo, $f_\xi \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Vejamos, agora, que a definição de f_ξ independe da escolha de ξ , ou seja, se $\xi, \eta \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$, então $f_\xi = f_\eta$. Antes, contudo, mostremos que

$$(1.24) \quad u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm}.$$

Tomando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \langle u - \sum_{|m| \leq k} (u\eta)_{Tm}, \phi \rangle &= \langle u, \phi \rangle - \langle \sum_{|m| \leq k} u_{Tm} \eta_{Tm}, \phi \rangle = \\ &= \langle u, \phi \rangle - \langle u, \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm} \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle - \langle u, \phi \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm} \rangle \end{aligned}$$

e, como $\psi_k \doteq \phi \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm}$ converge para $\phi \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \eta_{Tm} = \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\langle u, \phi \rangle - \langle u, \phi \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm} \rangle \text{ tende a zero em } C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ainda, como

$$\langle \sum_{|m| \leq k} (u\eta)_{Tm}, \phi \rangle = \sum_{|m| \leq k} \langle (u\eta)_{Tm}, \phi \rangle,$$

temos

$$\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm}, \phi \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle (u\eta)_{Tm}, \phi \rangle.$$

Provemos, então, que $f_\xi = f_\eta$. Dada $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, seja $\phi = (\xi\theta)$ e usando a igualdade (1.24), obtemos

$$f_\xi(\theta) = \langle u, \xi\theta \rangle = \langle \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm}, \xi\theta \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u\eta, (\xi\theta)_{-Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u\eta, \theta \xi_{-Tm} \rangle =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \eta \theta \xi_{-Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u \xi_{-Tm}, \eta \theta \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle (u \xi)_{-Tm}, \eta \theta \rangle = \langle u, \eta \theta \rangle = f_\eta(\theta).$$

Com isso, passaremos a escrever somente $f = f_\xi$.

Definamos

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto H(u), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} H(u) : \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \langle u, \xi \theta \rangle = f_\xi(\theta), \end{aligned}$$

$\xi \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$.

Linearidade: Dados $u, v \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, para toda $\theta \in \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} (H(u+v), \theta) &= \langle u+v, \xi \theta \rangle = \langle u, \xi \theta \rangle + \langle v, \xi \theta \rangle = \\ &= (H(u), \theta) + (H(v), \theta) = (H(u) + H(v), \theta) \end{aligned}$$

e

$$(H(\lambda u), \theta) = \langle \lambda u, \xi \theta \rangle = \lambda \langle u, \xi \theta \rangle = (\lambda H(u), \theta).$$

Continuidade: Seja $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $u_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Para $\theta \in \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$, temos $(H(u_j), \theta) = \langle u_j, \xi \theta \rangle \rightarrow 0$. Portanto, $H(u_j) \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Afirmamos que H é a inversa de A . Com efeito, sejam $u \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathcal{U}_T(\mathbb{R}^n)$. Observemos que se $\alpha > 0$ é tal que $S(\xi) \subset B[0, \alpha]$, então

$$\psi(x) = \xi(x) \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi \phi_{Tm}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi \xi_{-Tm})_{Tm}(x) = 0$$

para $|x| > \alpha$ e, se $|x| \leq \alpha$, então

$$\psi(x) = \xi(x)(\phi(x - Tm_1) + \cdots + \phi(x - Tm_k)),$$

para certos $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}^n$.

Deste modo, a série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi \phi_{Tm} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi \xi_{-Tm})_{Tm}$$

é finita, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Tendo em vista isso, segue que

$$\begin{aligned}
\langle A(H(u)), \phi \rangle &= (H(u), \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}) = \langle u, \xi \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle = \\
&= \langle u, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi \xi_{-Tm})_{Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u, (\phi \xi_{-Tm})_{Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \phi \xi_{-Tm} \rangle = \\
&\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u \xi_{-Tm}, \phi \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle (u \xi)_{-Tm}, \phi \rangle = \langle \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u \xi)_{-Tm}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle,
\end{aligned}$$

onde as duas últimas igualdades são válidas em virtude da observação feita antes de demonstrarmos que $f_\xi = f_\eta$.

Agora, para $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$(H(A(f)), \theta) = \langle A(f), \xi \theta \rangle = \left(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\xi \theta)_{Tm} \right) = \left(f, \theta \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi_{Tm} \right) = (f, \theta).$$

Portanto, $H = A^{-1}$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Exemplo 1.25 *Toda função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \in L^1([0, T]^n)$, que satisfaz $\varphi(x) = \varphi(x - Tm)$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, origina uma distribuição periódica $f_\varphi : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. De fato, para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, definamos*

$$(f_\varphi, \theta) = \int_{[0, T]^n} \varphi \theta.$$

A linearidade de f_φ segue da linearidade da integral. A continuidade de f_φ , por sua vez, segue da desigualdade

$$\left| \int_{[0, T]^n} \varphi \theta_j \right| \leq \sup_{x \in [0, T]^n} |\theta_j(x)| \int_{[0, T]^n} |\varphi|.$$

Exemplo 1.26 *Consideremos*

$$\begin{aligned}
\delta : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\
\theta &\mapsto \theta(0).
\end{aligned}$$

e verifiquemos que δ é uma distribuição periódica.

Linearidade: Dados $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\delta(\theta_1 + \theta_2) = (\theta_1 + \theta_2)(0) = \theta_1(0) + \theta_2(0) = \delta(\theta_1) + \delta(\theta_2)$$

e

$$\delta(\lambda\theta_1) = \lambda\theta_1(0) = \lambda\delta(\theta_1).$$

Continuidade: Dada $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\theta_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então $\delta(\theta_j) = \theta_j(0) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Logo, $\delta \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Conforme o Teorema 1.23, vejamos qual o correspondente de δ , $A(\delta)$, em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que tal correspondente, digamos $A(\delta) = \tilde{\delta}$, é definido como

$$\langle \tilde{\delta}, \phi \rangle = (\delta, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\delta, \phi_{Tm}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(Tm),$$

lembrando que essa soma é finita para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A distribuição $\tilde{\delta}$ é chamada de distribuição delta de Dirac T -periódica, ou delta de Dirac concentrada em (Tm) , $m \in \mathbb{Z}^n$.

1.3.1 Operações com Distribuições Periódicas

Neste tópico, apresentaremos algumas operações permitidas a elementos de $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, cujas demonstrações podem ser verificadas nas bibliografias [15] ou [11].

Sejam $f, g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Adição

Definimos

$$\begin{aligned} f + g : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (f, \theta) + (g, \theta). \end{aligned}$$

Multiplicação por $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$

Definimos

$$\begin{aligned} \phi f : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (f, \phi\theta). \end{aligned}$$

Translação

Dado $h \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\begin{aligned} f_h : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (f, \theta_{-h}), \end{aligned}$$

sendo $\theta_h(x) = \theta(x - h)$.

Reflexão

Definimos

$$\begin{aligned} \check{f} : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (f, \check{\theta}), \end{aligned}$$

sendo $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$.

Derivação de uma distribuição $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$

Dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e uma função teste $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, temos

$$D^\alpha \theta = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|} \theta}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Podemos estender o conceito de derivada de uma função teste, de modo que toda distribuição periódica possua uma derivada que também é uma distribuição periódica. Para cada $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos

$$\begin{aligned} D^\alpha f : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta). \end{aligned}$$

Considerando

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto D^\alpha f, \end{aligned}$$

vemos que o operador D^α é linear, contínuo e satisfaz

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \theta) &= \int_{\prod_{j=1}^n [a_j, a_j + T]} D^\alpha f(x) \theta(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\prod_{j=1}^n [a_j, a_j + T]} f(x) D^\alpha \theta(x) dx = \\ &= \int_{\prod_{j=1}^n [a_j, a_j + T]} f(x) (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta(x) dx = (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta), \end{aligned}$$

o que torna mais claro o uso do fator $(-1)^{|\alpha|}$ acima.

O próximo teorema nos garante que $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ é denso no espaço das funções contínuas e T -periódicas.

Teorema 1.27 *Consideremos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi = 1$, $\phi \geq 0$ e $S(\phi) \subset [0, T]^n$ e definamos*

$$\theta_\varepsilon \doteq \varepsilon^{-n} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \phi\left(\frac{\mathbf{x} - T\mathbf{m}}{\varepsilon}\right),$$

sendo $\theta_\varepsilon \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $0 < \varepsilon < 1$.

Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e T -periódica, então

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) \doteq \int_{[0, T]^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \theta_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

pertence a $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração: Se $\mathbf{x} \in [0, T]^n$, então para todo $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, existe $m_i \neq 0$ satisfazendo

$$-\frac{Tm_i}{\varepsilon} \leq \frac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq \frac{T(1 - m_i)}{\varepsilon}.$$

Se $m_i \geq 1$, então $\frac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq 0$ e, dessa forma, $\phi\left(\frac{\mathbf{x} - T\mathbf{m}}{\varepsilon}\right) = 0$.

Se $m_i \leq -1$, então $-\frac{Tm_i}{\varepsilon} \geq \frac{T}{\varepsilon} \geq T$ e, assim, $\phi\left(\frac{\mathbf{x} - T\mathbf{m}}{\varepsilon}\right) = 0$.

Portanto, $\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$, se $\mathbf{x} \in [0, T]^n$.

Agora,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \int_{[0, T]^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \theta_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \varepsilon^{-n} \int_{[0, T]^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi\left(\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{[0, T\varepsilon^{-1}]^n} f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{[0, T]^n} f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) \phi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{u}, \end{aligned}$$

pois $S(\phi) \subset [0, T]^n \subset [0, T\varepsilon^{-1}]^n$.

A igualdade

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \phi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{y}$$

nos permite escrever

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{K_x} f(y) \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy,$$

em que K_x é um conjunto compacto definido por

$$K_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \ 0 \leq \frac{x_i - y_i}{\varepsilon} \leq T, \ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Sejam $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Como ϕ é uma função lipschitziana, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left| \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x'-y}{\varepsilon}\right) \right| dy \leq \\ &\leq \varepsilon^{-n} \sup |f(u)| \int_{K_x \cup K_{x'}} \left| \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x'-y}{\varepsilon}\right) \right| dy \leq \\ &\leq C \varepsilon^{-n-1} m(K_x \cup K_{x'}) \sup |f(u)| |x - x'| \leq \\ &\leq 2C \varepsilon^{-n-1} \varepsilon^n T^n \sup |f(u)| |x - x'| = 2C \varepsilon^{-1} T^n \sup |f(u)| |x - x'| \end{aligned}$$

pois $m(K_x) = m(K_{x'}) = \varepsilon^n T^n$. Logo, f_ε é contínua.

Para provarmos que f_ε é diferenciável qualquer número de vezes, basta derivarmos, sob o sinal de integração, a função ϕ na expressão de f_ε usada acima, e repetirmos o procedimento usando $D^\alpha \phi$ ao invés de ϕ .

Agora,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{[0,T]^n} f(x) \phi(z) dz - \int_{[0,T]^n} f(x - \varepsilon z) \phi(z) dz \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,T]^n} |f(x) - f(x - \varepsilon z)| \phi(z) dz \leq \sup_{z \in [0,T]^n} |f(x) - f(x - \varepsilon z)|. \end{aligned}$$

Por hipótese, f é contínua e periódica, então é uniformemente contínua. Assim, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta,$$

para todos x e y .

Como $z \in [0, T]^n$, $|z| \leq \sqrt{n}T$ e, para todos $0 < \varepsilon < (\sqrt{n}T)^{-1}\delta$ e $x \in \mathbb{R}^n$, vale $|x - (x - \varepsilon z)| = \varepsilon|z| < \delta$. Desse modo, $|f(x) - f(x - \varepsilon z)| < \eta$ e segue que $\sup_{z \in [0,T]^n} |f(x) - f(x - \varepsilon z)| \leq \eta$, donde concluímos que $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

□

Vejamos, agora, que se a derivada de uma distribuição periódica é uma função contínua, então essa distribuição corresponde a uma função derivável.

Teorema 1.28 *Sejam f e g funções contínuas e periódicas em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$ no sentido de distribuições periódicas. Então, f é diferenciável com relação a x_j e $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$ no sentido clássico, ou seja, como funções.*

Demonstração: Usando a notação do teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} f_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right) dy = \\ &= -\varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} f(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right) dy = -\varepsilon^{-n} \langle f, \frac{\partial}{\partial y_j} \phi\left(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\right) \rangle = \\ &= \varepsilon^{-n} \langle \frac{\partial}{\partial y_j} f, \phi\left(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\right) \rangle = \varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} g(y) \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = g_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Assim, como $f_\varepsilon \rightarrow f$ e $g_\varepsilon \rightarrow g$ uniformemente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$.

□

1.4 A álgebra $(\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n), +, *)$

Definição 1.29 *Sejam $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução de f por θ como a função $(f * \theta) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(f * \theta)(a) = (f, \check{\theta}_a)$, sendo $\check{\theta}_a(x) = \theta(a - x)$.*

Exemplo 1.30 *Tomando $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e δ a distribuição delta de Dirac, então*

$$(\delta * \theta)(a) = (\delta, \check{\theta}_a) = \check{\theta}_a(0) = \theta(a),$$

isto é, $\delta * \theta = \theta$.

Exemplo 1.31 *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Temos*

$$\begin{aligned} (D^\alpha \delta * \theta)(a) &= (D^\alpha \delta, \check{\theta}_a) = (\delta, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \check{\theta}_a) = \\ &= (\delta, (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta_a) = D^\alpha \theta(a) \end{aligned}$$

e, portanto, $D^\alpha \delta * \theta = D^\alpha \theta$.

Observemos que, do Exemplo 1.30 e da última igualdade, obtemos

$$(1.32) \quad D^\alpha (\delta * \theta) = D^\alpha \delta * \theta = \delta * D^\alpha \theta.$$

Isso pode ser generalizado para o caso das distribuições $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, conforme o

Teorema 1.33 *Sejam $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Então $(f * \theta) \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e*

$$D^\alpha(f * \theta) = D^\alpha f * \theta = f * D^\alpha \theta.$$

Teorema 1.34 *Dadas $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta, \rho \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(f * \theta) * \rho = f * (\theta * \rho).$$

Teorema 1.35 *Seja $F: \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo tal que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, satisfaz*

$$F(\theta)(x - h) = F(\theta_h)(x).$$

Então existe uma única $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(\theta) = f * \theta$, para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Definamos

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (F(\check{\theta}))(0). \end{aligned}$$

A linearidade de f é imediata.

Continuidade: Seja $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\theta_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Então, pela continuidade de F , $F(\check{\theta}_j) \rightarrow 0$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e, consequentemente, $(F(\check{\theta}_j))(0) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Logo, $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Notemos, agora, que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ vale

$$(F * (\theta))(h) = (F(\theta))_{-h}(0) = (F(\theta_{-h}))(0) = (f, \check{\theta}_h) = (f * \theta)(h).$$

Unicidade: Sejam $f, g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tais que $F(\theta) = f * \theta = g * \theta$, para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Então

$$(f, \theta) = (f * \check{\theta})(0) = (g * \check{\theta})(0) = (g, \theta)$$

e, com isso, obtemos $f = g$. □

Definição 1.36 *Sejam $f, g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Definimos $h = f * g$ como sendo a única distribuição periódica tal que*

$$f * (g * \theta) = h * \theta,$$

para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

A distribuição h é chamada T-convolução de f por g .

Observemos que, como

$$\begin{aligned} F: \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \\ \theta &\mapsto f * (g * \theta) \end{aligned}$$

é linear, contínuo e comuta com as translações T_h , segundo o Teorema 1.35 a definição anterior é possível.

A seguir, enunciamos algumas propriedades da T-convolução.

Lema 1.37 *Consideremos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, $\phi \geq 0$ e $S(\phi) \subset [0, T]^n$. Seja também $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(\frac{x - Tm}{\varepsilon})$, com $0 < \varepsilon < 1$.*

Se $\psi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então $\psi * \theta_\varepsilon \rightarrow \psi$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lema 1.38 *Sejam $f, g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Então $f = g$ se, e somente se, $f * \theta = g * \theta$, para toda $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.39 *Dadas $f, g, h \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, então*

- (1) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- (2) $f * g = g * f$ e
- (3) $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$.

Exemplo 1.40 *Dadas $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$(f * \delta, \theta) = (f * \delta * \check{\theta})(0) = (f * \check{\theta})(0) = (f, \theta).$$

Logo, $f * \delta = f$.

Exemplo 1.41 *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$D^\alpha f = D^\alpha(f * \delta) = D^\alpha f * \delta = f * D^\alpha \delta.$$

Exemplo 1.42 *Seja $P(D) \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes. Se $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\begin{aligned} P(D)u &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha u * D^\alpha \delta = \sum_{|\alpha| \leq m} u * (c_\alpha D^\alpha \delta) = \\ &= u * \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta \right) = u * (P(D)\delta). \end{aligned}$$

Assim, toda equação diferencial parcial linear a coeficientes constantes, $P(D)u = f$, sendo $u, f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, pode ser expressa como uma equação de T-convolução $u * u_0 = f$, $u_0 \doteq P(D)\delta$.

O espaço vetorial $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, munido das operações T-convolução e adição, admite uma estrutura algébrica, comutativa, cujo elemento neutro é a distribuição δ , em relação à T-convolução.

Os teoremas seguintes nos apresentam uma condição necessária e suficiente para que possamos encontrar $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * u = g$, em que f, g são distribuições periódicas conhecidas anteriormente.

Antes disso, definamos o inverso, segundo a T-convolução, de um elemento de $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.43 Dizemos que $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ é invertível quando existe $g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $f * g = g * f = \delta$. A distribuição g é chamada inversa de f .

Teorema 1.44 Seja $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Se f possuir inversa, então esta é única.

Denotemos por f^{-1} a inversa de f , quando esta existir.

Existem elementos de $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ que não possuem inversa, como é o caso de qualquer $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. De fato, como visto no Teorema 1.33, $f * \theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, para toda $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, todavia $\delta \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ [15, p. 45].

Teorema 1.45 Seja $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Uma condição necessária e suficiente para que a equação $f * u = g$ tenha uma solução em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, para cada $g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, é que exista f^{-1} . Neste caso, a solução é única e dada por $f^{-1} * g$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Existe $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * u = \delta$ e, desse modo, $u = f^{-1}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que exista f^{-1} e tomemos $u = f^{-1} * g$. Então $f * u = f * (f^{-1} * g) = (f * f^{-1}) * g = \delta * g = g$.

Caso $f * v = g$, então

$$v = \delta * v = (f^{-1} * f) * v = f^{-1} * (f * v) = f^{-1} * g = u$$

e concluímos a unicidade da solução. □

1.5 O Método da Fase Estacionária

Aplicaremos este método no estudo do comportamento assintótico de uma função do tipo

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} g(z) e^{\lambda f(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

sendo γ é um caminho no plano e f e g são funções holomorfas num domínio complexo contendo γ .

Proposição 1.46 (*Método da Fase estacionária*) *Consideremos a integral*

$$I(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} g(t) e^{i\lambda f(t)} dt,$$

em que f e g são funções analíticas reais a uma variável tais que f assume valores reais, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$. Então, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$I(\lambda) = \frac{g(0)}{\sqrt{-f''(0)}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} (1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1})) + \mathcal{O}(e^{-c\lambda}),$$

sendo $c > 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$.

Esta proposição e, conseqüentemente, sua demonstração, são deduzidas através de uma sequência de resultados, entre estes o Lema de Morse holomorfo, os quais podem ser analisados em detalhes nas bibliografias [13] ou [1].

1.6 Convergência em Subconjuntos Compactos de $\mathbb{C}$

Nesta seção, estudaremos a noção de convergência uniforme em subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$, conforme [7, p. 142-143], observando que os resultados podem ser estendidos para o caso de várias variáveis complexas.

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto. Denotamos

$$\mathcal{C}(D) \doteq \{f : D \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(D) \doteq \{f : D \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}$$

Definição 1.47 *Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{C}(D)$, converge uniformemente em subconjuntos compactos se, para todo $K \subset D$ compacto, a sequência de restrições $(f_n|_K)_n$ é uniformemente convergente.*

Observação 1.48 *Sabemos que o limite de uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas é uma função contínua. Assim, se a sequência de funções $f_n \in \mathcal{C}(D)$ é uniformemente convergente para f em compactos de D , então a restrição $f|_K$ é contínua, para todo $K \subset D$ compacto. Como todo ponto de D possui uma vizinhança compacta contida em D , logo a função limite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ é contínua em D .*

Proposição 1.49 *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{C}(D)$. Então, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em compactos de D se, e somente se, $(f_{n|_\Sigma})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, para todo disco compacto $\Sigma \subset D$.*

Demonstração: Todo compacto $K \subset D$ pode ser coberto por um número finito de discos compactos contidos em D .

□

Teorema 1.50 *Dada uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{H}(D)$, uniformemente convergente em subconjuntos compactos de D , então a função limite f é holomorfa em D , isto é, $f \in \mathcal{H}(D)$.*

Séries de Fourier

Apresentaremos, neste capítulo, a noção de série de Fourier para uma distribuição periódica e, assim como em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, veremos que toda distribuição periódica possui série de Fourier que converge para a mesma.

Mostraremos que os espaços $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ podem ser caracterizados, isomorficamente, através do comportamento assintótico dos coeficientes de Fourier de seus elementos. Mais precisamente, toda função teste periódica $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita através de uma série de Fourier cujos coeficientes formam uma sequência de decrescimento rápido, e toda distribuição periódica $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ pode ser representada por uma série trigonométrica cujos coeficientes de Fourier constituem uma sequência de crescimento lento.

Por último, estudaremos o conceito de série parcial de Fourier de funções testes e distribuições, bem como propriedades do decaimento dos coeficientes parciais de Fourier de tais objetos.

2.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.1 *Uma sequência numérica $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é dita rapidamente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existir $C > 0$ tal que*

$$|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Denotamos o espaço das sequências de decrescimento rápido por $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

Equivalentemente, $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente se, e somente se, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, existir $C > 0$ satisfazendo $|c_m| \leq C(1 + |m|)^{-k}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. Com efeito, se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existir $C > 0$ tal que

$$|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k}, \quad m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

então, se $m \neq 0$, $1 + |m| \leq 2|m|$ e segue que $|c_m| \leq C|m|^{-k} \leq 2^k C(1 + |m|)^{-k} \doteq M(1 + |m|)^{-k}$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, onde denotamos $M \doteq \max\{2^k C, |C|\}$.

Agora, se para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existir $C > 0$ tal que $|c_m| \leq C(1 + |m|)^{-k}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, então, como $(1 + |m|)^{-k} \leq |m|^{-k}$, obtemos

$$|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Teorema 2.2 *Seja $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma sequência rapidamente decrescente. Então a função*

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m$$

pertence a $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, sendo $e_m(x) = e^{i\omega m x} = e^{i\omega(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Consideremos $s_p(x) = \sum_{|m| \leq p} c_m e_m(x)$.

Como $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ decresce rapidamente, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $M_1 > 0$ tal que

$$|c_m e_m(x)| = |c_m| < \frac{M_1}{(1 + |m|)^{n+1}},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. Pelo critério de Weierstrass, s_p é uniformemente convergente e temos a continuidade de $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m(x)$. Notemos, também, que f é periódica.

Ainda,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} s_p(x) = \sum_{|m| \leq p} i\omega m_j c_m e_m(x).$$

Novamente, existe $M_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |i\omega m_j c_m e_m(x)| &= \omega |m_j| |c_m| \leq \omega(1 + |m|) |c_m| \leq \\ &\leq (1 + |m|) M_2 (1 + |m|)^{-n-2} = M_2 (1 + |m|)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Logo, $g_j(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_j} s_p(x)$ é contínua, devido à convergência uniforme.

Sejam $x, h \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = x + th$.

Então

$$\begin{aligned} s_p(x+h) - s_p(x) &= s_p(\gamma(1)) - s_p(\gamma(0)) = \int_0^1 (s_p \circ \gamma)'(t) dt = \\ &= \int_0^1 \langle \text{grad } s_p(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle \text{grad } s_p(x+th), h \rangle dt, \end{aligned}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Definamos $g = (g_1, \dots, g_n)$. Quando $p \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \langle g(x+th), h \rangle dt = \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 g_j(x+th) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n h_j g_j(x) + \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 (g_j(x+th) - g_j(x)) dt. \end{aligned}$$

Agora, se $h \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|^{-1} \left| \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 (g_j(x+th) - g_j(x)) dt \right| &\leq \sum_{j=1}^n |h_j| \|h\|^{-1} \max |g_j(x+th) - g_j(x)| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \max_t |g_j(x+th) - g_j(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$.

Então, f é diferenciável e $\text{grad } f(x) = g(x)$, donde concluímos que $f \in C^1$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$.

Usando indução, concluímos o teorema. □

Definição 2.3 *Sejam $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{Z}^n$. Definimos o m -ésimo coeficiente de Fourier de ϕ como*

$$c_m(\phi) = T^{-n} \int_{[0,T]^n} \phi(x) e_{-m}(x) dx.$$

Teorema 2.4 *Seja $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$c_m(\phi) = T^{-n} \int_{[0,T]^n} \phi(x) e_{-m}(x) dx$$

forma uma sequência rapidamente decrescente e

$$\phi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(\phi) e_m(x).$$

Demonstração: Primeiramente, provemos que $m^\alpha c_m(\phi) = \omega^{-|\alpha|} c_m(D^\alpha \phi)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. De fato, como

$$D^\alpha e_{-m}(x) = \frac{1}{i^{|\alpha|}} (-i\omega)^{|\alpha|} m^\alpha e_{-m}(x) = (-1)^{|\alpha|} \omega^{|\alpha|} m^\alpha e_{-m}(x),$$

então

$$\begin{aligned} T^n m^\alpha c_m(\phi) &= \int_{[0, T]^n} m^\alpha e_{-m}(x) \phi(x) dx = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\omega^{|\alpha|}} \int_{[0, T]^n} D^\alpha e_{-m}(x) \phi(x) dx = \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|}}{\omega^{|\alpha|}} \int_{[0, T]^n} D^\alpha e_{-m}(x) \phi(x) dx = \frac{T^n}{\omega^{|\alpha|}} c_m(D^\alpha \phi). \end{aligned}$$

Para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos

$$|m|^\ell = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} |m^\alpha|,$$

$m \in \mathbb{Z}^n$ e, aplicando a fórmula anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |m|^\ell |c_m(\phi)| &= \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} |m^\alpha c_m(\phi)| = \\ &= \omega^{-\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} |c_m(D^\alpha \phi)| = \omega^{-\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} \left| \int_{[0, T]^n} D^\alpha \phi(x) e_{-m}(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} \omega^{-|\alpha|} \sup_{z \in [0, T]^n} |D^\alpha \phi(z)| T^n m([0, T]^n) \doteq M, \end{aligned}$$

sendo M uma constante independente de m .

Considerando $\psi \doteq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(\phi) e_m$, o teorema anterior nos garante que $\psi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Ainda,

$$\begin{aligned} c_m(\psi) &= T^{-n} \int_{[0, T]^n} \psi(x) e^{-i\omega m x} dx = T^{-n} \int_{[0, T]^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell(\phi) e^{i\omega(m-\ell)x} dx = \\ &= T^{-n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell \int_{[0, T]^n} x e^{i\omega(m-\ell)x} dx = \frac{c_m(\phi)}{T^n} \int_{[0, T]^n} dx = c_m(\phi). \end{aligned}$$

Deste modo, se $c_m(\phi) = c_m(\psi)$ implicar em $\phi = \psi$, o teorema estará demonstrado. □

Essa questão é abordada no lema seguinte, cuja demonstração pode ser vista em [15, p. 53-59].

Lema 2.5 (Unicidade) *Seja $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $c_m(\phi) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. Então $\phi = 0$.*

Os Teoremas 2.2 e 2.4 ilustram um isomorfismo entre $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$ e $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. De fato, definamos

$$\begin{aligned} A : s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n) \\ c = (c_m) &\mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m. \end{aligned}$$

A linearidade de A é imediata. A sobrejetividade resulta do Teorema 2.4 e, quanto à injetividade, basta observarmos que se $A(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m = 0$, então, para todo $\ell \in \mathbb{Z}^n$, temos

$$0 = \frac{1}{T^n} \int_{[0, T]^n} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m \right) e_{-\ell} = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m \int_{[0, T]^n} e_{m-\ell} = c_\ell.$$

2.2 Série de Fourier em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.6 *Seja $(f_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma sequência em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f_m$ é convergente em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ quando a sequência $s_\ell = \sum_{|m| \leq \ell} f_m$ for convergente em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.*

A seguir, veremos que é possível derivar, termo a termo, séries convergentes em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.7 *Seja $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f_m \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Então $D^\alpha f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha f_m$.*

Demonstração: Dados $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, sabemos que $D^\alpha \theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\ell \geq \ell_0$, vale

$$\left| \left(f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m, (-1)^\alpha D^\alpha \theta \right) \right| < \varepsilon.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \left| \left(D^\alpha f - \sum_{|m| \leq \ell} D^\alpha f_m, \theta \right) \right| &= \left| \left(D^\alpha \left(f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m \right), \theta \right) \right| = \\ &= \left| \left(f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m, (-1)^\alpha D^\alpha \theta \right) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definição 2.8 Uma sequência numérica $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é dita de crescimento lento se existirem constantes $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|c_m| \leq M|m|^k$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Denotamos o espaço das sequências de crescimento lento por $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

Tal definição é equivalente a existirem constantes $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|c_m| \leq M(1 + |m|)^k$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

De fato, se M e k satisfazem a definição, então

$$|c_m| \leq M|m|^k \leq M(1 + |m|)^k \leq M'(1 + |m|)^k,$$

onde $M' = \max\{M, |c_0|\}$.

Assim, se existem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|c_m| \leq M(1 + |m|)^k$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, então

$$|c_m| \leq M(1 + |m|)^k \leq M(|m| + |m|)^k = 2^k M|m|^k.$$

Algumas bibliografias denominam as sequências de crescimento lento como sequências de crescimento moderado ou sequências temperadas. No capítulo final, no qual estudaremos o artigo [5], usaremos esta última nomenclatura.

Mostraremos que é possível identificar o espaço das distribuições periódicas com o espaço das sequências de crescimento lento, similar ao que fizemos na seção anterior para o caso das funções testes, o espaço $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Antes disso, baseados em [15, p. 60-62], observamos que apesar de $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ não ser um espaço metrizável, apresenta propriedades semelhantes a de espaços métricos completos, no seguinte sentido:

Teorema 2.9 Seja $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo: dados $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j, k \geq j_0$ implica em $|(f_j - f_k, \theta)| < \varepsilon$.

Então $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $(f_j, \theta) \rightarrow (f, \theta)$, para cada $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.10 Sejam $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{Z}^n$. Definimos o m -ésimo coeficiente de Fourier de f como

$$c_m(f) = \frac{1}{T^n}(f, e_{-m}).$$

Teorema 2.11 Seja $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma sequência de crescimento lento. Então a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m(x)$ é convergente em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Ainda, se

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m,$$

então

$$c_m = \frac{1}{T^n} (f, e_{-m}) = c_m(f).$$

Demonstração: O raciocínio desta prova consiste em mostrar que as somas parciais da série trigonométrica $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m(x)$ formam uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, logo convergente, pelo teorema anterior.

Seja $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$. Para cada $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, temos

$$\begin{aligned} m_j(e_m, \theta) &= \int_{[0, T]^n} m_j e_m(x) \theta(x) dx = \omega^{-1} \int_{[0, T]^n} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_m(x)) \theta(x) dx = \\ &= -\omega^{-1} \int_{[0, T]^n} e_m(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \theta(x) dx, \end{aligned}$$

ou seja, $m_j(e_m, \theta) = \omega^{-1} (\frac{\partial}{\partial x_j} e_m, \theta) = -\omega^{-1} (e_m, \frac{\partial}{\partial x_j} \theta)$.

Usando indução sobre $|\alpha|$, vemos que

$$m^\alpha(e_m, \theta) = \omega^{-|\alpha|} (D^\alpha e_m, \theta) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\omega^{|\alpha|}} (e_m, D^\alpha \theta)$$

e, como $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ cresce lentamente, existem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|c_m| \leq M|m|^k$, $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Assim,

$$\begin{aligned} |m|^{k+n+1} |(e_m, \theta)| &= \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} |m^\alpha| |(e_m, \theta)| = \\ &= \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \frac{1}{\omega^{|\alpha|}} |(e_m, D^\alpha \theta)| \leq \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \frac{1}{\omega^{|\alpha|}} \int_{[0, T]^n} |e_m(x) D^\alpha \theta(x)| dx = \\ &= \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \frac{1}{\omega^{|\alpha|}} \int_{[0, T]^n} |D^\alpha \theta(x)| dx = C. \end{aligned}$$

Observemos que C não depende de m . Além disso, se $\theta_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ quando $j \rightarrow \infty$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $|m|^{k+n+1} |(e_m, \theta_j)| \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow 0$. Portanto, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, temos

$$|c_m(e_m, \theta)| = |c_m| |(e_m, \theta)| \leq M|m|^k \frac{C}{|m|^{k+n+1}} = \frac{MC}{|m|^{n+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Consideremos a reduzida

$$s_j(x) = \sum_{|m| \leq j} c_m e_m(x).$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned} |(s_{j+p} - s_j, \theta)| &= \left| \left(\sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} c_m e_m, \theta \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} |c_m(e_m, \theta)| \leq MC \sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} \frac{1}{|m|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Como a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|m|^{n+1}}$ é convergente, $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, conforme o Teorema 2.9, existe $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m.$$

Por fim,

$$\frac{1}{T^n}(f, e_{-m}) = \frac{1}{T^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell \int_{[0, T]^n} e^{i\omega(\ell-m)x} dx$$

e

$$\int_{[0, T]^n} e^{i\omega(\ell-m)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell \neq m \\ T^n, & \text{se } \ell = m \end{cases},$$

$$\text{logo } c_m = \frac{1}{T^n}(f, e_m).$$

□

Este teorema significa que toda série trigonométrica com coeficientes de crescimento lento é convergente em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$. Reciprocamente, veremos no próximo resultado que toda distribuição periódica pode ser representada através de uma série trigonométrica cujos coeficientes formam uma sequência de crescimento lento.

Teorema 2.12 *Dada $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, então $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é uma sequência de crescimento lento e*

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) e_m.$$

Demonstração: Como $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, sabemos que existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} |c_m(f)| &= \frac{1}{T^n} |(f, e_{-m})| \leq \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha e_m(x)| = \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\omega^{|\alpha|} m^\alpha e_m(x)| = \\ &= \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\omega^{|\alpha|} m^\alpha| \leq \frac{C \max\{1, \omega^k\}}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |m^\alpha| \leq \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |m|)^{|\alpha|} \leq C'' (1 + |m|)^k, \end{aligned}$$

para $C', C'' > 0$ convenientes e para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

Portanto, $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}^n}$ cresce lentamente e, pelo teorema anterior, existe $g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $g = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) e_m$.

Resta-nos mostrar que $g = f$ e, para isto, mostremos primeiramente que $\delta = T^{-n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e_m$. De fato, para cada $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} e_m - \delta, \theta \right) &= \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0, T]^n} e_m(x) \theta(x) dx - \theta(0) = \\ &= \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0, T]^n} e_m(x) \theta(x) dx - \frac{\theta(0)}{T^n} \int_{[0, T]^n} e_m(x) dx = \\ &= \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0, T]^n} e_m(x) (\theta(x) - \theta(0)) dx = \sum_{|m| \leq j} c_m(\theta - \theta(0)) = \\ &\sum_{|m| \leq j} c_m(\theta - \theta(0)) e_m(0) \rightarrow (\theta - \theta(0))(0) = \theta(0) - \theta(0) = 0 \end{aligned}$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Daí, usando a continuidade sequencial em cada variável da T -convolução, obtemos

$$\begin{aligned} (f, \theta) &= (f * \delta, \theta) = \left(\frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f * e_m, \theta \right) = \left(\frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (f, (\check{e}_m)_a), \theta(a) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (f, e_{-m}) e_m(a), \theta(a) \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) e_m(a), \theta(a) \right) = (g, \theta), \end{aligned}$$

logo, $f = g$.

□

Estes dois últimos teoremas mostram que é possível estabelecer um isomorfismo entre $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$ e $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$.

Definamos

$$B : s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n) \\ c = (c_m) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m.$$

A linearidade de B é trivial. A sobrejetividade decorre do último teorema pois, para cada $f \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, basta tomarmos $c = (c_m(f))$ e teremos $B(c) = f$. Para verificarmos a injetividade, notemos que se $B(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m = 0$, então pelo Teorema 2.11 temos $c_m = (0, e_{-m}) = 0$, isto é, $c = 0$.

Teorema 2.13 *Dadas $f, g \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(f * g) = T^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) c_m(g) e_m.$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} c_m(f * g) &= \frac{1}{T^n} (f * g, e_{-m}) = \frac{1}{T^n} (f * g * e_m)(0) = \frac{1}{T^n} (f * (g * e_m))(0) = \\ &= \frac{1}{T^n} (f(x), (g * e_m)^\sim(x)) = \frac{1}{T^n} (f(x), (g * e_m)(-x)) = \\ &= \frac{1}{T^n} (f(x), (g(a), e_m(-x - a))) = \frac{1}{T^n} (f(x), (g(a), e_{-m}(a)) e_{-m}(x)) = \\ &= \frac{1}{T^n} (f(x), e_{-m}(x)) (g(a), e_{-m}(a)) = T^n c_m(f) c_m(g) \end{aligned}$$

e, com isso,

$$(f * g) = T^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) c_m(g) e_m.$$

□

Este resultado é importante para a solução de equações do tipo $u * f = g$, em que f, g são conhecidas e f é fixa. Com efeito, pelo teorema segue que

$$T^n c_m(u) c_m(f) = c_m(g)$$

e, se f for “regular”, obtemos

$$c_m(u) = \frac{c_m(g)}{T^n c_m(f)},$$

de modo que a solução u pode ser encontrada diretamente através dos coeficientes de Fourier de f e g .

2.3 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$

Sejam $p, q, n \in \mathbb{N}$ tais que $n = p + q$ e consideremos a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$.

Escrevemos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Dada $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, veremos que existe uma maneira natural de se considerar a série de Fourier de ϕ com relação a apenas uma destas variáveis. Mais precisamente, objetivamos mostrar que toda $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ possui série parcial de Fourier convergindo para a mesma e seus coeficientes são caracterizados por funções em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$ que decaem uniformemente como sequências de decréscimo rápido.

Seja $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi^x : \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto \phi(x, y). \end{aligned}$$

Notemos que $\psi^x \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^q)$ e, por isso,

$$\phi(x, y) = \psi^x(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} c_m(\psi^x) e_m(y),$$

em que

$$c_m(\psi^x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \psi^x(y) e_{-m}(y) dy = \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy.$$

Definição 2.14 *Seja $\phi_m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\phi_m(x) = c_m(\psi^x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy.$$

Dizemos que $\phi_m(x)$ é o m -ésimo coeficiente parcial de Fourier da série parcial de Fourier

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x) e_m(y).$$

Teorema 2.15 *Dada ϕ_m como acima, então $\phi_m \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, para todo $m \in \mathbb{Z}^q$.*

Demonstração: Sabemos que ϕ_m é T -periódica e que

$$\phi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x) e_m(y).$$

Mostremos que ϕ_m é contínua. De fato, se $x_j \rightarrow x_0$ em $\mathbb{R}^p$, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi(x_j, y) e_{-m}(y) = \phi(x_0, y) e_{-m}(y)$$

e, como $\phi(x_j, y) e_{-m}(y)$ é mensurável e $|\phi(x_j, y) e_{-m}(y)| = |\phi(x_j, y)| \leq C$ (em que C não depende de j , pois ϕ é limitada), pelo Teorema da Convergência dominada segue que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_m(x_j) &= \frac{1}{T^q} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[0, T]^q} \phi(x_j, y) e_{-m}(y) dy = \\ &= \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \phi(x_0, y) e_{-m}(y) dy = \phi_m(x_0). \end{aligned}$$

Para verificarmos que ϕ_m é de classe C^1 , tomemos uma sequência $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$, onde $h_j \in \mathbb{R}^*$ e $h_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\phi(x + h_j e_k, y) - \phi(x, y)}{h_j} e_{-m}(y) = \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x, y) e_{-m}(y).$$

Além disso,

$$\left| \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x_k} e_{-m}(y) \right| = \left| \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x_k} \right| \leq C$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ e, deste modo, a sequência

$$\frac{\phi(x + h_j e_k, y) - \phi(x, y)}{h_j} e_{-m}(y)$$

também é limitada para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.

Novamente, o Teorema da Convergência dominada nos garante que

$$\begin{aligned} &\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\phi_m(x + h_j e_k) - \phi_m(x)}{h_j} = \\ &= \frac{1}{T^q} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[0, T]^q} \frac{\phi_m(x + h_j e_k, y) - \phi_m(x, y)}{h_j} e_{-m}(y) dy = \\ &= \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \phi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy.$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x, y)$ é contínua, usando o mesmo raciocínio da prova da continuidade de ϕ_m , concluímos que $\frac{\partial}{\partial x_k} \phi_m(x)$ é contínua, logo $\phi_m \in C^1(\mathbb{R}^p)$.

Suponhamos que $\phi_m \in C^k$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^p$ tal que $|\alpha| = k$, temos

$$\partial^\alpha \phi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, t^q]} \partial^{(\alpha, 0)} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \psi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, t^q]} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(x, y) e_{-m}(y) dy,$$

logo $\psi_m \in C^1$ e, uma vez que $\frac{\partial}{\partial x_k} \psi_m = \partial^{(\alpha + e_k)} \phi_m$, $e_k \in \mathbb{N}^p$, segue que $\phi_m \in C^{k+1}$.

Por indução, chegamos a $\phi_m \in \mathcal{P}^T(\mathbb{R}^p)$.

□

Teorema 2.16 *Seja $(\phi_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma sequência de funções em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$ tal que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e cada $N \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ satisfazendo*

$$|D^\alpha \phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1 + |m|)^N},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ e todo $x \in \mathbb{R}^p$.

Então, a função $\psi : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x) e_m(y)$$

está bem definida e pertence a $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Primeiramente, ψ está bem definida, já que $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x) e_m(y)$ é convergente para cada $x \in \mathbb{R}^p$. Seja

$$\begin{aligned} \psi^x : \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto \psi(x, y). \end{aligned}$$

Notemos que $\psi^x \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^q)$, pois dado $N \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ tal que

$$|c_m(\psi^x)| = |\phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1 + |m|)^N}.$$

Mostremos que ψ é contínua. Tomando $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} |\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)| &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (\phi_m(x) e_m(y) - \phi_m(x_0) e_m(y_0)) \right| = \\ &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (\phi_m(x) - \phi_m(x_0)) e_m(y) + \phi_m(x_0) (e_m(y) - e_m(y_0)) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_0)| + \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_0)(e_m(y) - e_m(y_0)) \right| = \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_0)| + |\psi^{x_0}(y) - \psi^{x_0}(y_0)|.
\end{aligned}$$

Como existe $C_{q+1} > 0$ tal que

$$|\phi_m(x) - \phi_m(x_0)| \leq \frac{C_{q+1}}{(1 + |m|)^{q+1}}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, a função $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_0)|$ é contínua. Assim, pela continuidade de ψ^{x_0} , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|(x, y)| < \delta$ implica que

$$|\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_0)| + |\psi^{x_0}(y) - \psi^{x_0}(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vejamos agora que $\psi \in \mathbb{C}^1$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(x_0 + he_j, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{h} - \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_0) e_m(y_0) \right| = \\
&= \left| \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_0 + he_j) e_m(y_0) - \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_0) e_m(y_0)}{h} - \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_0) e_m(y_0) \right| = \\
&= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left(\frac{\phi_m(x_0 + he_j) - \phi_m(x_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_0) \right) e_m(y_0) \right| \leq \\
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\phi_m(x_0 + he_j) - \phi_m(x_0)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_0) \right| = \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}(x_0 + \xi_m e_j) - \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}(x_0) \right| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j) \right| |\xi_m|,
\end{aligned}$$

sendo $|\zeta_m| < |\xi_m| < |h|$.

Como existe $C_q > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j) \right| \leq \frac{C_q}{(1 + |m|)^{q+1}}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, então dado $\varepsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \left(C_q \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1 + |m|)^{q+1}} \right)^{-1} \varepsilon.$$

Se $|h| \leq \delta$, então $|\xi_m| < \delta$ e

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j) \right| |\xi_m| &< \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j) \right| \delta \leq \\ &\leq C_q \delta \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1 + |m|)^{q+1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x_0, y_0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_0) e_m(y_0).$$

Como

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x) e_m(y) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x) \right| \leq \frac{C_{q+1}}{(1 + |m|)^{q+1}}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, segue que $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ é contínua, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0, y_0 + h e_j) - \psi(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{x_0}(y_0 + h e_j) - \psi_{x_0}(y_0)}{h} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \psi_{x_0}(y_0) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_0) e_m(y) \right) \Big|_{y=y_0} = i\omega \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} m_j \phi_m(x_0) e_m(y_0) \end{aligned}$$

e

$$|m_j \phi_m(x_0) e_m(y_0)| = |m_j \phi_m(x_0)| \leq \frac{E}{(1 + |m|)^{q+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}^q,$$

para algum $E > 0$ conveniente.

Mostremos, por indução sobre a ordem das derivadas, que $\psi \in C^\infty$. Suponhamos que $\partial^{(\alpha, \beta)}$ é contínua e que

$$\partial^{(\alpha, \beta)} \psi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x) (i\omega m)^\beta e_m(y).$$

Definindo $\alpha_j \doteq \alpha + e_j$ e $\alpha_{jj} \doteq \alpha_j + e_j$, temos

$$\begin{aligned}
& |h|^{-1} \left| \partial^{(\alpha, \beta)} \psi(x_0 + h e_j, y_0) - \partial^{(\alpha, \beta)} \psi(x_0, y_0) - \right. \\
& \quad \left. - |h| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_0) (i\omega m)^\beta e_m(y_0) \right| = \\
& = \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (|h|^{-1} (\partial^\alpha \phi_m(x_0 + h e_j) - \partial^\alpha \phi_m(x_0)) - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_0)) (i\omega m)^\beta e_m(y_0) \right| \leq \\
& \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| |h|^{-1} (\partial^\alpha \phi_m(x_0 + h e_j) - \partial^\alpha \phi_m(x_0)) - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_0) \right| |(i\omega m)^\beta| = \\
& = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |(\partial^{\alpha_j} \phi_m(x_0 + \xi_m e_j) - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_0))| |(i\omega m)^\beta| = \\
& = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j)| |\xi_m| |(i\omega m)^\beta|,
\end{aligned}$$

sendo $|\zeta_m| < |\xi_m| < |h|$. Como existe $D > 0$ tal que

$$|\partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_0 + \xi_m e_j)| |(i\omega m)^\beta| \leq \frac{D}{(1 + |m|)^{q+1}}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, tomemos, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\delta = \varepsilon (D \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1 + |m|)^{q+1}})^{-1}.$$

Então, se h é tal que $|h| < \delta$, obtemos

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_0 + \zeta_m e_j)| |\xi_m| |(i\omega m)^\beta| < \varepsilon.$$

Com isso,

$$\partial^{(\alpha_j, \beta)} \psi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^{\alpha_j} \phi_m e_m(y) (i\omega m)^\beta$$

e como

$$|\partial^{\alpha_j} \phi_m(x) e_m(y) (i\omega m)^\beta| = |\partial^{\alpha_j} \phi_m(x) (i\omega m)^\beta| \leq \frac{D}{(1 + |m|)^{q+1}}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, concluímos que $\partial^{(\alpha_j, \beta)} \psi$ é contínua.

Agora, definindo $\beta_j \doteq \beta + e_j$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [\partial^{(\alpha, \beta)} \psi(x_0, y_0 + h e_j) - \partial^{(\alpha, \beta)} \psi(x_0, y_0)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_0) (i\omega m)^\beta e_m(y_0) (e_m(e_j) - 1) = \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_0) (i\omega m)^\beta (i\omega m_j) e_m(y_0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_0) (i\omega m)^{\beta_j} e_m(y_0),
\end{aligned}$$

logo, $\partial^{(\alpha, \beta_j)} \psi$ existe e é contínua.

Por fim, a periodicidade de ψ é imediata.

□

Teorema 2.17 *Dada $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\phi(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x) e_m(y),$$

em que

$$\phi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p).$$

Além disto, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^p$, existe $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha \phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1 + |m|)^k},$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ e todo $x \in \mathbb{R}^p$.

Demonstração: Resta mostrarmos a última parte do teorema.

Preliminarmente, dados $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $\beta \in \mathbb{N}^q$, vemos que

$$\begin{aligned}
T^q |m^\beta D^\alpha \phi_m(x)| &= \left| \int_{[0, T]^q} D^{(\alpha, 0)} \phi(x, y) m^\beta e_{-m}(y) dy \right| = \\
&= \frac{1}{\omega^{|\beta|}} \left| \int_{[0, T]^q} D^{(\alpha, 0)} \phi(x, y) D^{(0, \beta)} e_{-m}(y) dy \right| = \\
&= \frac{1}{\omega^{|\beta|}} \left| \int_{[0, T]^q} D^{(\alpha, \beta)} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy \right|.
\end{aligned}$$

Daí, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
|m|^k |D^\alpha \phi_m(x)| &= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} |m^\beta| |D^\alpha \phi_m(x)| = \sum_{|\beta|=k} \left| \frac{k!}{\beta!} m^\beta D^\alpha \phi_m(x) \right| = \\
&= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \frac{1}{\omega^{|\beta|}} \left| \frac{1}{T^q} \int_{[0, T]^q} D^{(\alpha, \beta)} \phi(x, y) e_{-m}(y) dy \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\omega^k} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n} |D^{(\alpha,\beta)} \phi(x,y)| = C(k, \phi).$$

Observando que $C(k, \phi)$ independe de $m \in \mathbb{Z}^q$ e de $x \in \mathbb{R}^p$, segue que $|D^\alpha \phi_m(x)| \leq C|m|^{-k}$, $m \neq 0$, equivalente a $|D^\alpha \phi_m(x)| \leq \frac{C}{1+|m|^k}$, para todo $m \in \mathbb{Z}^q$.

Daí, se $\phi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, então $C(k, \phi_j) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$. □

2.4 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$

Seja $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q)$, $p + q = n$. Analogamente ao que fizemos na seção anterior, exibiremos aqui uma sequência de distribuições $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$, em que $u_m \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p)$ são os coeficientes parciais de Fourier de u , satisfazendo

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m.$$

Para cada $\gamma \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, definamos

$$\begin{aligned} v_\gamma : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^q) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto (u, \gamma \otimes \theta), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \gamma \otimes \theta : \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \gamma(x)\theta(y). \end{aligned}$$

Teorema 2.18 *Dada $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q)$, então $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m$, em que $u_m \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p)$ é dada por $(u_m, \gamma) = c_m(v_\gamma)$ e*

$$c_m(v_\gamma) = \frac{1}{T^q} (u, \gamma \otimes e_{-m}), \gamma \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p).$$

Ainda, para cada $\gamma \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, $((u_m, \gamma))_m$ é uma sequência de crescimento lento.

Demonstração: Provemos que $v_\gamma \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^q)$.

Linearidade: Dados $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^q)$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$v_\gamma(a_1\theta_1 + a_2\theta_2) = (u, \gamma \otimes (a_1\theta_1 + a_2\theta_2)) = (u, a_1\gamma \otimes \theta_1 + a_2\gamma \otimes \theta_2) =$$

$$= a_1(u, \gamma \otimes \theta_1) + a_2(u, \gamma \otimes \theta_2) = a_1 v_\gamma(\theta_1) + a_2 v_\gamma(\theta_2).$$

Continuidade: Dada $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\theta_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, então para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$, temos

$$\begin{aligned} |D^{(\alpha, \beta)}(\gamma \otimes \theta_j)(x, y)| &= |D^{(\alpha, \beta)}\gamma(x)\theta_j(y)| = \\ &= |D^\alpha\gamma(x)D^\beta\theta_j(y)| \leq \sup |D^\alpha\gamma(x)| \sup |D^\beta\theta_j(y)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente. Logo, $v_\gamma(\theta_j) = (u, \gamma \otimes \theta_j) \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$ quando $j \rightarrow \infty$ e $v_\gamma \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^q)$.

Desta forma, $v_\gamma = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} c_m(v_\gamma) e_m$, sendo

$$c_m(v_\gamma) = \frac{1}{T^q}(v_\gamma, e_{-m}) = \frac{1}{T^q}(u, \gamma \otimes e_{-m}).$$

Definamos, para $m \in \mathbb{Z}^q$,

$$\begin{aligned} u_m : \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto c_m(v_\gamma). \end{aligned}$$

Linearidade: Dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} u_m(a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2) &= \frac{1}{T^q}(u, (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2) \otimes e_{-m}) = \\ &= \frac{a_1}{T^q}(u, \gamma_1 \otimes e_{-m}) + \frac{a_2}{T^q}(u, \gamma_2 \otimes e_{-m}) = a_1 u_m(\gamma_1) + a_2 u_m(\gamma_2). \end{aligned}$$

Continuidade: Dada $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\gamma_j \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, uma sequência que converge para zero em $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$. Então, para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$ e para cada $m \in \mathbb{Z}^q$, vale

$$\begin{aligned} |D^{(\alpha, \beta)}\gamma_j \otimes e_{-m}(x, y)| &= |D^\alpha\gamma_j(x)D^\beta e_{-m}(y)| \leq \\ &\leq \sup |D^\beta e_{-m}(y)| \sup |D^\alpha\gamma_j(x)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente. Portanto,

$$u_m(\gamma_j) = \frac{1}{T^q}(u, \gamma_j \otimes e_{-m}) \rightarrow 0$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Assim, $u_m \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^q$, e podemos escrever

$$v_\gamma = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (u_m, \gamma) e_m$$

tal que

$$(u, \gamma \otimes \theta) = (v_\gamma(\theta)) = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (u_m, \gamma) e_m, \theta \right).$$

Notemos que esta expressão já é suficiente para que u fique bem definida, bastando tomar $\gamma(x) = e_{-m_1}(x)$ e $\theta(y) = e_{-m_2}(y)$, onde $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^n$, $m_1 \in \mathbb{Z}^p$ e $m_2 \in \mathbb{Z}^q$, donde segue que

$$c_m(u) = (u, \gamma \otimes \theta).$$

Estudemos o crescimento da sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$. Como $u \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^{p+q})$, existem $C_0 > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $\gamma \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$, temos

$$\begin{aligned} |(u_m, \gamma)| &= \frac{1}{T^q} |(u, \gamma \otimes e_{-m})| \leq C_0 \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq k_0} |D^{(\alpha, \beta)}(\gamma(x) e_{-m}(y))| = \\ &= C_0 \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq k_0} \sup |D^\alpha \gamma(x) (-i\omega m) D^\beta e_{-m}(y)| = C_0 \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq k_0} \sup |D^\alpha \gamma(x)| |(\omega m)^\beta|. \end{aligned}$$

Então, para algum $C_1 > 0$,

$$|(u_m, \gamma)| \leq C_1 p_{k_0}(\gamma) (1 + |m|)^{k_0},$$

sendo

$$p_{k_0}(\gamma) = \sum_{|\alpha| \leq k_0} \sup |D^\alpha \gamma|.$$

□

Teorema 2.19 *Seja $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^p)$ satisfazendo a seguinte condição: existem $C > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|(u_m, \phi)| \leq C p_{k_0}(\phi) (1 + |m|)^{k_0},$$

para toda $\phi \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^p)$ e todo $m \in \mathbb{Z}^q$.

$$\text{Então } u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m \in \mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^{p+q}).$$

Demonstração: Para cada $\theta \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}^{p+q})$, consideremos a sequência

$$\begin{aligned} s_j &= \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (u_m(x) e_m(y), \theta(x, y)) = \\ &= \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} \left(u_m(x), \int_{[0, T]^q} \theta(x, y) e_{-m}(y) dy \right) = \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (u_m(x), \theta_m(x)). \end{aligned}$$

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, temos

$$|s_{j+\ell} - s_j| \leq \sum_{\substack{j < |m| \leq j+\ell \\ m \in \mathbb{Z}^q}} |(u_m, \theta_m)| \leq C \sum_{\substack{j < |m| \leq j+\ell \\ m \in \mathbb{Z}^q}} p_{k_0}(\theta_m)(1 + |m|)^{k_0}$$

e, como $(\theta_m)_m$ é uma sequência rapidamente decrescente, segue que

$$\begin{aligned} p_{k_0}(\theta_m) &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq k_0 \\ \alpha \in \mathbb{N}^p}} \sup |D^\alpha \theta_m(x)| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{|\alpha| \leq k_0 \\ \alpha \in \mathbb{N}^p}} C_\alpha (1 + |m|)^{-k_0 - q - 1} \leq C' (1 + |m|)^{-k_0 - q - 1}, \end{aligned}$$

em que $C' = \max_{|\alpha| \leq k_0} C_\alpha$ e os C_α 's são dados pelo Teorema 2.16.

Sendo assim,

$$|s_{j+p} - s_j| \leq CC' \sum_{\substack{j < |m| \leq j+p \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (1 + |m|)^{-q-1} \rightarrow 0$$

quando $j \rightarrow \infty$, portanto $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m$ pertence a $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^{p+q})$.

□

Funções Analíticas Reais em $\mathbb{R}^n$

3.1 Série de Potências de Várias Variáveis

Como visto anteriormente, o espaço vetorial das funções testes T-periódicas, $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^n)$, é constituído por funções cujos coeficientes parciais de Fourier têm decaimento rápido, assim como o espaço vetorial $\mathcal{P}'_T(\mathbb{R}^n)$ é dado por distribuições T-periódicas cujos coeficientes parciais de Fourier possuem crescimento lento. Neste capítulo, por meio do conceito de série de potências de várias variáveis, apresentaremos uma caracterização de distribuições T-periódicas analíticas reais através do comportamento assintótico dos seus coeficientes parciais de Fourier.

Definição 3.1 *Sejam $c \in \mathbb{R}^n$ e $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, uma sequência indexada em $\mathbb{N}^n$. Uma série de potências de n variáveis é uma expressão da forma*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x - c)^\alpha$$

e dizemos que tal série converge em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quando o conjunto

$$S(x_0) = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha : \Lambda \subset \mathbb{N}^n, \Lambda \text{ é finito} \right\}$$

é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2 *Seja $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x - c)^\alpha$ uma série de potências convergente em x_0 . Então há um único $\ell \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $m \geq N$ implica que*

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| < \varepsilon.$$

Demonstração: Notemos que

$$s_m \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha.$$

Seja $\gamma = \sup S(x_0)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ tal que

$$\gamma - \varepsilon < \sum_{\alpha \in \Lambda} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha \leq \gamma.$$

Definamos $N_1 \doteq \max\{|\alpha|; \alpha \in \Lambda\}$. Se $m \geq N_1$, temos

$$\gamma - \varepsilon < \sum_{\alpha \in \Lambda} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha \leq \gamma$$

e, caso $p > m \geq N_1$, segue que

$$\begin{aligned} |s_p - s_m| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha \right| = \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^p \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha \right| \leq \sum_{k=m+1}^p \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha - \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha < \gamma - (\gamma - \varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que $(s_m)_m$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, logo há um único $\ell \in \mathbb{R}^n$ de modo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$ implica que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| < \varepsilon.$$

□

Escreveremos $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha = \ell$, quando tal série for convergente.

Teorema 3.3 *Seja $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x - c)^\alpha$ uma série de potências convergente em x_0 . Então, há um único $\ell \in \mathbb{R}^n$ de modo que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ é um conjunto finito e $\{\alpha : |\alpha| \leq N\} \subset \Lambda$, então*

$$\left| \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| < \varepsilon.$$

Demonstração: Conforme o teorema anterior, existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ de modo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 > 0$ tal que $m \geq N_1$ implica que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando γ como na última demonstração e usando a definição de supremo, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N_2$ implica em

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha \leq \gamma.$$

Definamos $N \doteq \max\{N_1, N_2\}$ e consideremos Λ um conjunto finito tal que $\{\alpha; |\alpha| \leq N\} \subset \Lambda$.

Seja $M \doteq \max\{|\alpha|; \alpha \in \Lambda\} \geq N$. Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell + \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ |\alpha| > N}} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (x_0 - c)^\alpha - \ell \right| + \sum_{N < |\alpha| \leq M} |a_\alpha| |x_0 - c|^\alpha < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para verificarmos a unicidade de ℓ , basta notarmos que caso existisse ℓ_1 com tal propriedade, então ℓ_1 satisfazeria as condições do Teorema 3.2 e teríamos $\ell_1 = \ell$.

□

3.2 Funções Analíticas Reais

Definição 3.4 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto. Dizemos que f é analítica real se, para cada $x_0 \in U$, existe um conjunto aberto $V \subset U$, contendo x_0 , no qual f pode ser representada por uma série de potências de várias variáveis. O conjunto de tais funções será denotado por $C^\omega(U)$.*

Proposição 3.5 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto. Então f é analítica real se, e somente se, existem um aberto $W \subset \mathbb{C}^n$, com $U \subset W$, e uma função holomorfa (complexa) $F : W \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F|_U = f$.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Sendo f analítica real, para todo $c \in U$ existe uma bola $B_{\mathbb{R}^n}(c, r_c)$ tal que

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(c)(x - c)^\alpha,$$

para todo $x \in B_{\mathbb{R}^n}(c, r_c)$.

Dado $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $z \in B_{\mathbb{C}^n}(c; r_c)$, podemos dizer que a série $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(c)(z - c)^\alpha$ converge em $\mathbb{C}^n$, conforme a

Definição 3.1.

Definamos $W \doteq \bigcup_{c \in U} B_{\mathbb{C}^n}(c; r_c)$. A fim de definirmos F em $z \in W$, tomemos $c \in U$ tal que $z \in B_{\mathbb{C}^n}(c; r_c)$ e consideremos

$$F(z) \doteq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(c)(z - c)^\alpha.$$

Afirmamos que F está bem definida. Com efeito, sejam c_1, c_2 tais que $z \in I \doteq B_{\mathbb{C}^n}(c_1; r_{c_1}) \cap B_{\mathbb{C}^n}(c_2; r_{c_2})$ e definamos

$$F_{c_1}(z) \doteq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(c_1)(z - c_1)^\alpha, \quad z \in B_{\mathbb{C}^n}(c_1; r_{c_1})$$

e

$$F_{c_2}(z) \doteq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(c_2)(z - c_2)^\alpha, \quad z \in B_{\mathbb{C}^n}(c_2; r_{c_2}).$$

Como $z \in I$, tomando $\tilde{F}_{c_1}(z_1) = F_{c_1}(z_1, \dots, z_n)$ e $\tilde{F}_{c_2}(z_2) = F_{c_2}(z_1, \dots, z_n)$, temos $\tilde{F}_{c_1}$ e $\tilde{F}_{c_2}$ funções analíticas em $I \cap \mathbb{C}$ e que coincidem em $I \cap \mathbb{R}$, logo $\tilde{F}_{c_1} = \tilde{F}_{c_2}$ em $I \cap \mathbb{C}$. Com isso, segue que $F_{c_1} = F_{c_2}$ em I , como queríamos.

Ainda, F é holomorfa e $F|_U = f$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que existam um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{C}^n$, com $U \subset W$, e uma função holomorfa $F : W \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $F|_U = f$. Assim, f é representada por uma série de potências em U e, portanto, é uma função analítica real. $\square$

O principal artigo no qual baseamos este trabalho, [5], trata de funções testes, funções analíticas reais e distribuições definidas no toro $\mathbb{T}^2$. De modo a ficarmos de acordo com a notação lá utilizada, mudaremos a notação referente a funções e distribuições periódicas. Mais geralmente, veremos que $C^\infty(\mathbb{T}^n) \simeq C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \simeq \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e passaremos a escrever $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ ao invés de $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ ao invés de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e definamos sobre $\mathbb{R}^n$ a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Segundo $\sim$, temos $\mathbb{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\sim} = \frac{\mathbb{R}^n}{2\pi\mathbb{Z}^n}$ o toro n -dimensional.

Assim, dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periódica, temos que f induz uma função $\tilde{f} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta, ou seja, $f(x) = (\tilde{f} \circ \Pi)(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \Pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathbb{T}^n & & \end{array}$$

Como Π é uma submersão sobrejetiva, então $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{T}^n)$.

Usando este mesmo raciocínio, podemos provar que $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \simeq \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

O próximo resultado, desenvolvido em [3], sustenta toda a demonstração de nosso objetivo principal nessa dissertação. Da mesma forma como obtivemos caracterizações de funções $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ através de seus coeficientes de Fourier, o teorema abaixo identifica funções $\mathbb{T}$ -periódicas analíticas reais com coeficientes parciais de Fourier que decaem uniformemente e exponencialmente.

Teorema 3.6 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q)$ dada por sua série parcial de Fourier*

$$f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^q} f_\ell e^{i\ell x}.$$

Então $f \in C^\omega(\mathbb{T}^p \times \mathbb{T}^q)$ se, e somente se, $f_\ell \in C^\omega(\mathbb{T}^p)$, para todo $\ell \in \mathbb{Z}^q$, e existem $C, \varepsilon, \delta > 0$ satisfazendo

$$(3.7) \quad |f_\ell(t + is)| \leq \frac{C}{e^{\delta|\ell|}},$$

para todo $(t + is) \in (\mathbb{R}^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]^p) \subset \mathbb{C}^p$.

Demonstração: Por simplicidade, suponhamos que $p = q = 1$.

($\Rightarrow$) Pela Proposição 3.5, existem $\varepsilon, \delta > 0$ de modo que f se estende a uma função holomorfa (complexa) na vizinhança

$$V_{\varepsilon, \delta}(t, x) = \{(t + is, x + iy); t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, s \in [-\varepsilon, \varepsilon], y \in [-\delta, \delta]\}.$$

Como f é de fato uma função integrável, temos

$$f_\ell(t) = \int_0^{2\pi} f(t, x) e^{-i\ell x} dx$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$.

Uma vez que a analiticidade do integrando é preservada pela integral, obtemos

$$(3.8) \quad f_\ell(t + is) = \int_0^{2\pi} f(t + is, x) e^{-i\ell x} dx,$$

logo cada f_ℓ está bem definida em $\mathbb{R} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{C}^p$ e se estende holomorficamente nesta região, isto é, $f_\ell \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$ para todo $\ell \in \mathbb{Z}$.

Usaremos o Teorema de Cauchy para deformar o caminho de integração em (3.8). Mais precisamente, para cada $\ell \in \{1, 2, \dots\}$, analisaremos a integral da função $f(\cdot, z) e^{-i\ell z}$, $z = x + iy$, ao longo do bordo do retângulo de vértices $0, 2\pi, 2\pi - i\delta$ e $-i\delta$.

Como o integrando é 2π -periódico na variável x , definindo $F_{\mathbb{C}}(z) \doteq f(\cdot, z) e^{-i\ell z}$ e $h(z) \doteq F_{\mathbb{C}}(z + 2\pi) - F_{\mathbb{C}}(z)$, segue que h é uma função analítica que se anula na reta $\mathbb{R}$ e, portanto, $h(z) \equiv 0$ em $\mathbb{C}$. Com isso, concluímos que as integrais sobre os segmentos verticais do retângulo acima se anulam.

Pelo Teorema da independência dos caminhos, temos

$$\begin{aligned} f_\ell(t + is) &= \int_0^{2\pi} f(t + is, x) e^{-i\ell x} dx = \int_{-i\delta}^{2\pi - i\delta} f(t + is, x) e^{-i\ell x} dx = \\ &= e^{-\ell\delta} \int_0^{2\pi} f(t + is, x - i\delta) e^{-i\ell x} dx, \end{aligned}$$

logo

$$(3.9) \quad |f_\ell(t + is)| \leq e^{-|\ell|\delta} \max_{\substack{|s| \leq \varepsilon \\ |y| \leq \delta \\ x \in [0, 2\pi]}} \{|f(t + is, x + iy)|; t \in \mathbb{T}^1\}.$$

Para $\ell \in \{-1, -2, \dots\}$ o raciocínio é similar e consiste em deformar o caminho de integração através do retângulo de vértices $0, 2\pi, 2\pi + i\delta$ e $i\delta$, obtendo a mesma estimativa.

Por último, para o caso $\ell = 0$, temos

$$f_0(t + is) = \int_0^{2\pi} f(t + is, x) dx \leq 2\pi \max_{\substack{(t, x) \in \mathbb{T}^2 \\ |s| \leq \varepsilon}} \{|f(t + is, x)|\}.$$

Assim, obtemos a desigualdade

$$|f_\ell(t + is)| \leq \frac{C}{e^{\delta|\ell|}},$$

para todo $t \in \mathbb{T}^1$, $|s| \leq \varepsilon$ e todo $\ell \in \mathbb{Z}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $f_\ell \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$, para cada $\ell \in \mathbb{Z}$, e que existam constantes $C, \delta, \varepsilon > 0$ de modo que (3.7) seja válida.

O caso em que $s = 0$ é claro, pois como $|f_\ell(t)| \leq Ce^{-\delta|\ell|}$ para todo $t \in \mathbb{T}^1$ e todo $\ell \in \mathbb{Z}$, então a sequência $(f_\ell(t))_{\ell \in \mathbb{Z}}$ cresce lentamente, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e obtemos a convergência

$$(3.10) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell(t) e^{i\ell x},$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{T}^2$.

Antes de analisarmos o caso em que $s \neq 0$, observemos que

$$\begin{aligned} |f_\ell(t + is) e^{i\ell(x+iy)}| &= |f_\ell(t + is)| |e^{\ell y}| = |f_\ell(t + is)| e^{\ell y} \leq \\ &\leq \frac{C}{e^{|\ell|\delta}} e^{\ell y} \leq \frac{C}{e^{|\ell|\delta}} e^{\ell \tilde{\delta}} = C e^{|\ell|(\tilde{\delta} - \delta)}, \end{aligned}$$

sendo $\ell \in \mathbb{Z}$, $|s| \leq \varepsilon$ e $|y| \leq \tilde{\delta}$, de forma que $0 < \tilde{\delta} < \delta$.

Afirmamos que a série de funções holomorfas

$$(3.11) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell(t + is) e^{i\ell(x+iy)}$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos da região aberta

$$A_{\varepsilon, \delta} = \{(t + is, x + iy); (t, x) \in \mathbb{T}^2, |s| < \varepsilon, |y| < \delta\}$$

e seu limite é uma função holomorfa em $A_{\varepsilon, \delta}$.

De fato, sejam

$$s_m(t + is, x + iy) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\ell| \leq m} f_\ell(t + is) e^{i\ell(x+iy)}$$

as somas reduzidas da série (3.11), lembrando que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(t + is, x + iy) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_\ell(t + is) e^{i\ell(x+iy)}.$$

Tomemos $K \subset A_{\varepsilon, \delta} \subset \mathbb{C}$ um disco compacto arbitrário contendo $(t+is, x+iy)$ e provemos que $(s_m(t+is, x+iy))_{|K|_m}$ é uniformemente convergente. Denotando

$$K \doteq \{(t+i\alpha, x+i\beta); (t, x) \in \mathbb{T}^2, |\alpha|, |\beta| \leq \gamma, \gamma < \min\{\varepsilon, \delta\}\},$$

temos

$$|f_\ell(t+is)e^{i\ell(x+iy)}| \leq Ce^{-|\ell|\delta}e^{|\ell|\gamma} \leq Ce^{|\ell|(\theta-\delta)},$$

onde $\ell \in \mathbb{Z}$, $|s| \leq \gamma$, $|y| \leq \theta$ e $0 < \theta < \gamma < \delta$.

Como a série $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{(\theta-\delta)|\ell|}$ converge, o critério de Cauchy para séries convergentes nos garante que, para todo $\tau > 0$, existe $|\ell_0| \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{|\ell|=m+1}^{m+p} e^{(\theta-\delta)|\ell|} < \tau$ para todo $m > |\ell_0|$ e todo $p \in \mathbb{N}$, donde obtemos

$$\begin{aligned} & |s_{m+p}(t+is, x+iy) - s_m(t+is, x+iy)| = \\ & = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{|\ell|=m+1}^{m+p} f_\ell(t+is)e^{i\ell(x+iy)} \right| \leq \frac{C}{2\pi} \sum_{|\ell|=m+1}^{m+p} (e^{(\theta-\delta)})^{|\ell|} < \frac{C}{2\pi} \tau, \end{aligned}$$

ou seja, $(s_m(t+is, x+iy))_{|K|_m}$ é uma sequência de Cauchy, logo uniformemente convergente em K .

Sendo assim, a série (3.11) converge uniformemente em compactos de $A_{\varepsilon, \delta}$ e, conforme o Teorema 1.50, a função limite $f(t+is, x+iy)$ é holomorfa na região complexa $A_{\varepsilon, \delta}$, ou seja, $f \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$.

□

Prescrevendo Singularidades Analíticas de Soluções de $L = \partial_t + c(t)\partial_x$

Definição 4.1 *Dado um operador $L : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, uma solução singular de L é um elemento $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \setminus C^\omega(\Omega)$ tal que $Lu \in C^\omega(\Omega)$.*

Definição 4.2 *Um operador $L : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, é dito globalmente analítico hipoelítico (GAH) quando, para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Lu \in C^\omega(\Omega)$ implica que $u \in C^\omega(\Omega)$.*

Em outras palavras, isto significa que L é GAH quando $L^{-1}(C^\omega(\Omega)) \subset C^\omega(\Omega)$, onde $L^{-1}(C^\omega(\Omega))$ é a imagem inversa, por L , da classe das funções analíticas reais. Desse modo, se L não é GAH, então L possui pelo menos uma solução singular u .

Seja $c = a + ib$, onde $a, b : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções analíticas reais, e consideremos o operador

$$(4.3) \quad L = \partial_t + c(t)\partial_x$$

agindo em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$.

O artigo [4] nos apresenta uma condição necessária e suficiente para que este operador do tipo tubo seja GAH. Mais precisamente, temos o

Teorema 4.4 *Seja $L : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ dado por $L = \partial_t + c(t)\partial_x$, com $c(t) \doteq a(t) + ib(t) \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$ e $a, b : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Então L é globalmente analítico hipoelítico se, e somente se,*

- (1) *b não muda de sinal;*
- (2) *se b é identicamente nula, então o número real*

$$a_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} a(t) dt$$

é irracional e não é exponencial Liouville.

Observemos que um número irracional α_0 é dito *exponencial Liouville* quando existe $\varepsilon > 0$ tal que a desigualdade $|\alpha_0 - p/q| \leq e^{-\varepsilon q}$ possui infinitas soluções racionais p/q , $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \geq 1$.

Este resultado trata da hipoeliticidade analítica global do operador L , portanto de suas possíveis soluções singulares, contudo não produz todas essas soluções. Nosso objetivo principal nesta dissertação, conforme feito no artigo [5], é aplicarmos o teorema anterior ao caso em que $b \neq 0$ e L não é GAH e estudarmos as soluções singulares de L , por exemplo, através de características como a natureza e a localização das suas singularidades.

Neste capítulo, usaremos a notação $\hat{v}(n)$ para o n -ésimo coeficiente parcial de Fourier de uma distribuição v .

4.1 Resultados Fundamentais

A seguir, provaremos que dado um subconjunto fechado e não-vazio $F \subset \mathbb{T}^1$, podemos encontrar $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $SS_A(v) = F$ e $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}(n)e^{inx}$. Esta é a versão 1-dimensional periódica do Teorema 8.4.14 da referência [10] e será usada na demonstração do Teorema 4.17.

Lema 4.5 *Seja $F \subset \mathbb{T}^1$ um subconjunto fechado e não-vazio. Então existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $SS_A(v) = F$ e $\hat{v}(n) = 0$ para $n \leq 0$, isto é, v pode ser escrita como*

$$(4.6) \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Demonstração: Seja $f(z) = z + (1-z)\text{Log}(1-z)$, em que $\text{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z)$ é um ramo do logaritmo complexo definido em $\Omega \doteq \mathbb{C} \setminus \{z \doteq x + iy \in \mathbb{C}; x \geq 1 \text{ e } y = 0\}$.

Afirmamos que

$$(4.7) \quad f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} z^n, \quad |z| \leq 1.$$

De fato, como $\text{Log}(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $|z| < 1$, segue que

$$\begin{aligned}
f(z) &= z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + z \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{z^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)},
\end{aligned}$$

para todo z tal que $|z| < 1$. Ainda, o Teste de Weierstrass nos diz que a série

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ é uniformemente convergente, logo

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Omega}} f(z) &= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Omega}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Omega}} z^n = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Omega}} f(z) = 1$ e obtemos (4.7).

Tomando $M \doteq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, vemos claramente que $|f(z)| \leq M$ no disco unitário fechado $\bar{D}$.

Consideremos $\{z_k\}_k \subset F$ um subconjunto (no máximo) enumerável e denso em F tal que $z_k \neq z_l$ se $k \neq l$. Como os pontos do círculo unitário $\mathbb{T}^1$ podem ser escritos da forma e^{ip} , $p \in [0, 2\pi)$, denotemos $z_k = e^{ix_k}$, sendo $x_k \in [0, 2\pi)$.

Seja

$$(4.8) \quad u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} f(ze^{-ix_k}); \quad z \in \bar{D}.$$

Denotando $f_k(z) = \frac{1}{3^k} f(ze^{-ix_k})$, temos $u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, em que $z \in \bar{D}$ e $(f_k(z))_z$ forma uma sequência de funções holomorfas e uniformemente convergente em compactos de D . Portanto, segue do Teorema 1.50 que $u \in \mathcal{H}(D)$. Além disso, como f é representada por uma série de potências em $\bar{D}$, então u é contínua em $\bar{D}$, logo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$. Em particular, $v = \flat(u)$, o valor de fronteira de u dado por

$$(4.9) \quad v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} f(ze^{-ix_k}); \quad z \in \mathbb{T}^1,$$

define um elemento em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ e pode ser escrito como $v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, uma vez que

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} z^n e^{-inx_k} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} e^{-inx_k} \right) z^n = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \bar{D}. \end{aligned}$$

Usando a analiticidade (portanto, diferenciabilidade) de f e u em D , chegamos a

$$(4.10) \quad u''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})}, \quad z \in D.$$

Para cada $l \geq 1$, reescrevamos

$$u''(z) = \sum_{k=1}^{(l-1)} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})} + \frac{e^{-2ix_l}}{3^l(1 - ze^{-ix_l})} + R(z),$$

sendo,

$$|R(z)| \doteq \left| \sum_{k=(l+1)}^{\infty} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^l}, \quad |z| < 1.$$

Considerando $z = te^{ix_l}$, $t \in [0, 1)$, temos

$$\left| \frac{e^{-2ix_l}}{3^l(1 - ze^{-ix_l})} \right| = \frac{1}{3^l} \cdot \frac{1}{1 - t}$$

e

$$(4.11) \quad \left| \sum_{k=l}^{\infty} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})} \right| \geq \frac{1}{2 \cdot 3^l} \cdot \frac{1}{1 - |z|},$$

logo uma soma ilimitada quando $z \rightarrow z_l$ ao longo do raio tz_l , isto é, $t \rightarrow 1$.

Caso u pudesse ser estendida analiticamente em uma vizinhança V_{z_l} de z_l , claro que u'' também o poderia e teríamos

$$u''(z) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})} + \frac{e^{-2ix_l}}{3^l(1 - ze^{-ix_l})} + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})}$$

analítica, para todo $z \in V_{z_l}$. Todavia, pela analiticidade de $\sum_{k=1}^{l-1} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})}$, concluiríamos que

$$u''(z) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})} = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{e^{-2ix_k}}{3^k(1 - ze^{-ix_k})}$$

é analítica, o que não ocorre. Desse modo, como u não pode ser estendida holomorficamente em vizinhanças de z_l , segue a inclusão $F \subset SS_A(v)$.

Por outro lado, sejam $\alpha \doteq e^{i\xi} \in \mathbb{T}^1 \setminus F$ e $S \doteq \{re^{ix}; |r-1| < \varepsilon \text{ e } |x-\xi| < \varepsilon\}$, onde $\alpha \in S$ e $\bar{S} \cap F = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$.

Definamos $D_1 \doteq \{z; |z| \leq 1 + \varepsilon\} \setminus e^{-i\xi}S$. Como $D_1 \subset \Omega$ é compacto, existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C$, para todo $z \in D_1$, portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} |f(ze^{-ix_k})| \leq \frac{C}{2},$$

para todo $z \in S$, particularmente, donde segue que v é analítica na vizinhança S de α e $SS_A(v) \subset F$.

□

Acima, tratamos apenas de frequências positivas para construir a distribuição $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $SS_A(v) = F$ e $\hat{v}(n) = 0$ para $n \leq 0$. Um resultado análogo para frequências negativas é enunciado da forma

Lema 4.12 *Seja $F \subset \mathbb{T}^1$ um subconjunto fechado e não-vazio. Então existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $SS_A(v) = F$ e $\hat{v}(n) = 0$ para $n \geq 1$, ou seja, v pode ser escrita como*

$$(4.13) \quad v(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx}.$$

Suponhamos que L não é GAH e $b \neq 0$; equivalentemente, b muda de sinal. Seja $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de b . Como os zeros de uma função analítica não identicamente nula são isolados e $[0, 2\pi]$ é um conjunto compacto, existem $r \in \mathbb{Z}_+$ e pontos $\{t_0, \dots, t_r\}$ tais que $t_r - t_0 < 2\pi$, $t_0 < \dots < t_r$ e qualquer ponto de máximo local de B é da forma $(t_k + 2j\pi)$, para algum $k \in \{0, \dots, r\}$

e algum $j \in \mathbb{Z}$. Similarmente, obtemos pontos de mínimo local de B , digamos $\{s_0, \dots, s_r\}$, satisfazendo

$$(4.14) \quad s_0 < t_0 < \dots < s_r < t_r < s_{r+1} \doteq s_0 + 2\pi < t_{r+1} \doteq t_0 + 2\pi.$$

O próximo teorema pode ser considerado o “núcleo” deste trabalho, pois, ao invés de apenas garantirmos a existência de soluções singulares $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ do operador $L = \partial_t + c(t)\partial_x$, construiremos soluções com singularidades prescritas. Por ora, apenas enunciaremos tal resultado, deixando a sua demonstração para a parte final deste capítulo.

Teorema 4.15 *Suponhamos que b muda de sinal. Seja $t_* \in \{t_0, \dots, t_r\}$. Então existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \{(t_*, 0)\}$. Mais precisamente, u pode ser escolhida de forma que*

$$(4.16) \quad u(t_*, x) = \delta_+(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}.$$

Teorema 4.17 *Suponhamos que b muda de sinal. Seja $t_* \in \{t_0, \dots, t_r\}$. Dada uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que v_n é temperada em $n \in \mathbb{Z}$, mas não exponencialmente decrescente quando $n \rightarrow +\infty$, embora exponencialmente decrescente na direção oposta, então existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $\hat{v}(t_*, n) = v_n$, $Lv \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(v) = \{t_*\} \times SS_A(\tilde{v})$, sendo $\tilde{v}(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{inx}$.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.15, existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $SS_A(u) = \{(t_*, 0)\}$ e $u(t_*, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}$.

Definamos

$$(4.18) \quad v(t, x) = \sum_{n=-\infty}^0 v_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}(t, n) v_n e^{inx}.$$

Temos claramente que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $\hat{v}(t_*, n) = v_n$, pois $\hat{u}(t_*, n) = 1$ para todo $n \geq 1$. Além disso, como $\{v_n\}_n$ não decai exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, então $v \notin C^\omega(\mathbb{T}^2)$.

Aplicando o operador $L = \partial_t + c(t)\partial_x$ à distribuição v e usando o Teorema 2.7, obtemos a expressão

$$(4.19) \quad Lv = \sum_{n=-\infty}^0 c(t) v_n i n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \partial_t \hat{u}(t, n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c(t) v_n \hat{u}(t, n) i n e^{inx}$$

e, da mesma maneira,

$$Lu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\partial_t \hat{u}(t, n) + c(t) \hat{u}(t, n) i n) e^{inx},$$

em que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$. Pelo Teorema 3.6, sabemos que os coeficientes $\widehat{Lu}(t, n)$ possuem decaimento exponencial e uniforme em uma vizinhança complexa de t e $\widehat{Lu}(t, n) \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Quando multiplicamos o fator v_n pelos coeficientes $(\partial_t \hat{u}(t, n))_{n \geq 1}$ e $(inc(t) \hat{u}(t, n))_{n \geq 1}$ de Lu , mantemos a analiticidade e o decaimento exponencial uniforme das parcelas $(v_n \partial_t \hat{u}(t, n))_{n \geq 1}$ e $(inv_n c(t) \hat{u}(t, n))_{n \geq 1}$ de coeficientes de Lv . Quanto ao termo $\sum_{n=-\infty}^0 c(t) v_n i n e^{inx}$, basta observarmos que a função c é limitada e $(v_n i n)_{n \leq -1}$ decai exponencialmente, pelo decaimento de $\{v_n\}_n$ quando $n \rightarrow -\infty$.

Por fim, a afirmativa acerca do suporte singular analítico de v é trivial e segue imediatamente do fato de que $v(t_*, x) = \tilde{v}(x)$. □

Teorema 4.20 *Suponhamos que b muda de sinal. Sejam $t_* \in \{t_0, \dots, t_r\}$ e $F \subset \mathbb{T}^1$ um subconjunto fechado e não-vazio. Então, existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lv \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(v) = \{t_*\} \times F$. Ainda, $\hat{v}(t_*, n)$ é temperada em $n \in \mathbb{Z}$ e decai exponencialmente quando $n \rightarrow -\infty$.*

Demonstração: O Lema 4.5 nos garante a existência de $v_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $SS_A(v_0) = F$ e $v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_0(n) e^{inx}$. Definindo

$$v_n = \begin{cases} \hat{v}_0(n), & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases},$$

temos uma sequência de funções temperadas em $n \in \mathbb{Z}$, com decaimento exponencial quando $n \rightarrow -\infty$, porém que não decai exponencialmente na direção oposta, caso contrário teríamos $v_0 \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$.

Nestas condições, o resultado segue imediatamente do teorema anterior. □

Os Teoremas 4.15, 4.17 e 4.20 abordaram o caso em que $t_* \in \{t_0, \dots, t_r\}$. A seguir, enunciaremos resultados análogos para os mínimos locais $s_* \in \{s_0, \dots, s_r\}$ da primitiva B de b , porém, agora, as singularidades da solução singular do operador L serão devidas às frequências negativas $n \leq -1$.

Teorema 4.21 *Suponhamos que b muda de sinal. Seja $s_* \in \{s_0, \dots, s_r\}$. Então existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \{(s_*, 0)\}$. Mais precisamente, u pode ser escolhida de forma que*

$$(4.22) \quad u(s_*, x) = \delta_-(x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{inx}.$$

Teorema 4.23 *Suponhamos que b muda de sinal. Seja $s_* \in \{s_0, \dots, s_r\}$. Dada uma sequência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que w_n é temperada em $n \in \mathbb{Z}$, mas não exponencialmente decrescente quando $n \rightarrow -\infty$, embora exponencialmente decrescente na direção oposta, então existe $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $\hat{w}(s_*, n) = w_n$, $Lw \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(w) = \{s_*\} \times SS_A(\tilde{w})$, sendo $\tilde{w}(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n e^{inx}$.*

Teorema 4.24 *Suponhamos que b muda de sinal. Sejam $s_* \in \{s_0, \dots, s_r\}$ e $F \subset \mathbb{T}^1$ um subconjunto fechado e não-vazio. Então, existe $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lw \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(w) = \{s_*\} \times F$. Ainda, $\hat{w}(s_*, n)$ é temperada em $n \in \mathbb{Z}$ e decai exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$.*

Antes de prosseguirmos, precisamos do seguinte lema técnico:

Lema 4.25 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $A_n = (a_{ij}(n))_{k \times k}$ tal que $a_{ii}(n) = 1$ e, para $i \neq j$, $a_{ij}(n)$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \pm\infty$. Se $B_n = (b_l(n))_{k \times 1}$ é uma matriz cujas entradas são temperadas em $|n|$, então a equação $A_n X_n = B_n$ tem, para todo $|n|$ suficientemente grande, uma única solução. Além disso, as entradas da solução X_n são temperadas em $|n|$.*

Demonstração: Escrevendo a equação $A_n X_n = B_n$ na forma de sistema, obtemos

$$(4.26) \quad \begin{cases} x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n) = b_1(n) \\ a_{21}(n)x_1(n) + x_2(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n) = b_2(n) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \cdots + x_k(n) = b_k(n). \end{cases}$$

Temos $\det A_n = (1 + \delta_n)$, onde δ_n é o resultado de somas de multiplicações entre as entradas de A_n que não pertencem à diagonal principal, donde segue que $(\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ decai exponencialmente quando $n \rightarrow \pm\infty$.

Quanto à unicidade da solução de $A_n X_n = B_n$, basta provarmos que $\det A_n \neq 0$, equivalentemente $\delta_n \neq -1$, para $|n|$ suficientemente grande. Com efeito, o

decaimento exponencial de $(\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nos garante que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\delta_n| < \varepsilon$ para todo n tal que $|n| \geq n_0$; tomando $\varepsilon = 1$, temos $-1 < \delta_n < 1$, ou seja, $\det A_n \neq 0$ para $|n|$ suficientemente grande.

Ainda, para cada $l \in \{1, \dots, k\}$ temos

$$|x_l(n)| \leq |b_l(n)| + |a_{l1}(n)||x_1(n)| + \dots + |a_{l(l-1)}(n)||x_{l-1}(n)| + \\ |a_{l(l+1)}(n)||x_{l+1}(n)| + \dots + |a_{lk}(n)||x_k(n)|,$$

o que implica que as entradas da solução X_n formam uma sequência temperada em $|n|$. □

Os dois próximos teoremas nos dão uma abordagem mais completa dos resultados anteriores. Por exemplo, se $b \neq 0$ e tomamos $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva analítica real de b e Σ um subconjunto não-vazio de extremos locais de B em $[0, 2\pi)$, provaremos que existe uma solução singular u de L tal que $SS_A(u) = \Sigma \times \{0\}$.

Teorema 4.27 *Suponhamos que b muda de sinal. Seja $(u_j(n))_n$, $j \in \{0, \dots, 2r+1\}$, temperada em $n \in \mathbb{Z}$ e tal que $u_j(n)$ decai exponencialmente quando $n \rightarrow -\infty$, para $j \in \{0, \dots, r\}$, e $u_j(n)$ decai exponencialmente quando $n \rightarrow +\infty$, para $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$.*

Então existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\hat{u}(t_j, n) = u_j(n)$ para $j \in \{0, \dots, r\}$ e $\hat{u}(s_{j-r}, n) = u_j(n)$ para $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Mais ainda,

$$SS_A(u) \subset \left\{ \left(\bigcup_{j=0}^r \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r+1} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \right\},$$

sendo $\tilde{u}_j(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_j(n) e^{inx}$, $j \in \{0, \dots, 2r+1\}$.

Em particular, se I é o conjunto de índices $j \in \{0, \dots, r\}$ tal que $u_j(n)$ não decai exponencialmente quando $n \rightarrow +\infty$ e J é o conjunto de índices $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$ tal que $u_j(n)$ não decai exponencialmente quando $n \rightarrow -\infty$, então

$$SS_A(u) = \left\{ \left(\bigcup_{j \in I} \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \right\}.$$

Demonstração: Para cada $j \in \{0, \dots, r\}$, aplicamos o Teorema 4.15 e obtemos $v_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lv_j \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $SS_A(v_j) = \{(t_j, 0)\}$, $\hat{v}_j(t_j, n) = 1$ para todo

$n \geq 1$, $\widehat{v}_j(t_j, n)$ decai exponencialmente quando $n \rightarrow -\infty$ e, para $t \neq t_j$, $\widehat{v}_j(t, n)$ é exponencialmente decrescente quando $|n| \rightarrow \infty$.

Da mesma forma, para cada $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$, existem $w_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tais que $Lw_j \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $SS_A(w_j) = \{(s_j, 0)\}$, $\widehat{w}_j(s_{j-r}, n) = 1$ para todo $n \leq -1$, $\widehat{w}_j(s_{j-r}, n)$ decai exponencialmente com $n \rightarrow +\infty$ e, para $t \neq s_{j-r}$, $\widehat{w}_j(t, n)$ é exponencialmente decrescente com $|n| \rightarrow \infty$.

Sejam $A_n = (a_{ij}(n))$ a matriz quadrada de ordem $(2r+1)$ dada por

$$(4.28) \quad a_{ij}(n) = \begin{cases} \widehat{v}_i(t_j, n), & i, j \in \{0, \dots, r\} \\ \widehat{v}_i(s_{j-r}, n), & i \in \{0, \dots, r\}, j \in \{r+1, \dots, 2r+1\} \\ \widehat{w}_i(t_j, n), & i \in \{r+1, \dots, 2r+1\}, j \in \{0, \dots, r\} \\ \widehat{w}_i(s_{j-r}, n), & i, j \in \{r+1, \dots, 2r+1\} \end{cases}$$

e $B_n = (b_{il}(n)) = (u_i(n))$ uma matriz de ordem $(2r+1) \times 1$. Conforme o Lema 4.25, seja $X_n = (\alpha_{il}(n))$ a solução de $A_n X_n = B_n$, para todo $|n| > n_0$ e algum n_0 suficientemente grande.

Assim, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ com coeficientes de Fourier dados por

$$(4.29) \quad \widehat{v}(t, n) = \sum_{i=0}^r \alpha_{i1}(n) \widehat{v}_i(t, n) + \sum_{i=r+1}^{2r+1} \alpha_{i1}(n) \widehat{w}_i(t, n)$$

satisfaz $Lv \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\widehat{v}(t_j, n) = u_j(n)$ para $j \in \{0, \dots, r\}$ e $\widehat{v}(s_{j-r}, n) = u_j(n)$ para $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$, para $|n| > n_0$, conforme as equações em (4.28).

Definamos

$$z_j = \begin{cases} e^{it_j}, & j \in \{0, \dots, r\} \\ e^{is_{j-r}}, & j \in \{r+1, \dots, 2r+1\} \end{cases}$$

e, usando o método de interpolação polinomial para $|n| \leq n_0$, seja $p_n(z)$ um polinômio tal que $p_n(z_j) = u_j(n)$, onde $j \in \{0, \dots, 2r+1\}$.

Tomando

$$(4.30) \quad u(t, x) = v(t, x) + \sum_{|n| \leq n_0} p_n(e^{it}) e^{inx},$$

segue que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, pois $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $\sum_{|n| \leq n_0} p_n(e^{it}) e^{inx}$ é uma soma finita

de funções localmente integráveis, $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{u}(t_j, n) = u_j(n)$ para $j \in \{0, \dots, r\}$ e $\widehat{u}(s_{j-r}, n) = u_j(n)$ para $j \in \{r+1, \dots, 2r+1\}$.

Como $SS_A(v_j) = \{t_j, 0\}$ e $SS_A(w_j) = \{s_j, 0\}$, então

$$SS_A(u) \subset \left\{ \left(\bigcup_{j=0}^r \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r+1} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \right\}$$

para todo $j \in \{0, \dots, 2r+1\}$. Portanto, pela forma como definimos os conjuntos I e J, concluimos que

$$(SS_A(u))^c \subset \left\{ \left(\bigcup_{j=0}^r \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r+1} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j) \right) \right\}^c,$$

demonstrando o teorema. □

Finalmente, pelo que estudamos nos Teoremas 4.20 e 4.24, obtemos o

Teorema 4.31 *Suponhamos que b muda de sinal. Então, dados $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \{t_0, \dots, t_r, s_1, \dots, s_r\}$ e subconjuntos fechados não-vazios $F_j \subset \mathbb{T}^1$, com $j \in \{1, \dots, k\}$, existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \bigcup_{j=1}^k \{p_j\} \times F_j$.*

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 4.15, precisamos do

Lema 4.32 *Sejam $c = a + ib$ uma função contínua definida em um intervalo limitado J , onde a e b são funções a valores reais e b possui somente zeros isolados. Seja $C = A + iB$, onde A e B são primitivas de a e b , respectivamente. Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas definidas em J , $t_0 \in J$ e definamos*

$$(4.33) \quad t_1 \doteq \inf\{t \in J; B \text{ é não decrescente em } [t, t_0]\}$$

e

$$(4.34) \quad t_2 \doteq \sup\{t \in J; B \text{ é não crescente em } [t_0, t]\}.$$

Então, todas as soluções da EDO

$$(4.35) \quad \frac{d}{dt} v_n(t) + \text{inc}(t) v_n(t) = f_n(t)$$

satisfazem as seguintes condições:

(1) Se $(v_n(t_0))_n$ é temperada em n e $(f_n(t))_n$ é temperada em n uniformemente em t , então $(v_n(t))_n$ é temperada em n uniformemente em $[t_1, t_2] \cap J$.

(2) Se $(v_n(t_0))_n$ é exponencialmente decrescente em n e $(f_n(t))_n$ é exponencialmente decrescente em n uniformemente em t , então $(v_n(t))_n$ é exponencialmente decrescente em n uniformemente em $[t_1, t_2] \cap J$.

(3) Suponhamos que t_0 não é um ponto de mínimo de b . Se $(v_n(t_0))_n$ é temperada em n e $(f_n(t))_n$ é exponencialmente decrescente em n uniformemente em t , então, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $(v_n(t))_n$ é exponencialmente decrescente em n uniformemente em

$$([t_1, t_2] \cap J) \setminus (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

Demonstração: As soluções da EDO (4.35) são da forma

$$(4.36) \quad v_n(t) = e^{-in(C(t)-C(t_0))}v_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-in(C(t)-C(s))}f_n(s)ds, \quad t \in J.$$

Notemos que, dado $t \in [t_1, t_2] \cap J$, então $B(t) \leq B(s)$ sempre que $s \in [t, t_0] \cap J$ ou $s \in [t_0, t] \cap J$.

Primeiramente, provemos as afirmativas (1) e (2). Para $t \in J$, temos

$$\begin{aligned} |v_n(t)| &\leq |e^{-in(C(t)-C(t_0))}v_n(t_0)| + \int_{t_0}^t |e^{-in(C(t)-C(s))}f_n(s)|ds = \\ &|e^{n(B(t)-B(t_0))}v_n(t_0)| + \int_{t_0}^t |e^{n(B(t)-B(s))}f_n(s)|ds, \end{aligned}$$

logo

$$(4.37) \quad |v_n(t)| \leq |v_n(t_0)| + l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)|$$

para todo $t \in [t_1, t_2] \cap J$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde $l(J) < \infty$ é o comprimento do intervalo limitado J . A partir disto, concluímos que $(v_n(t))_n$ é temperada em n uniformemente em $t \in [t_1, t_2] \cap J$ no caso (1) e $(v_n(t))_n$ decai exponencialmente em n uniformemente em $t \in [t_1, t_2] \cap J$ no caso (2).

Provemos a afirmativa (3). Como B é não-decrescente em $[t_1, t_0] \cap J$ e não-crescente em $[t_0, t_2] \cap J$ e b possui apenas zeros isolados, segue que B é estritamente crescente em $[t_1, t_0] \cap J$ e estritamente decrescente em $[t_0, t_2] \cap J$, desde que tais intervalos não sejam vazios. Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ de modo que

$J \setminus (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $(t_0 - \varepsilon) \in J$, então $\eta_1 \doteq B(t_0) - B(t_0 - \varepsilon) > 0$ e temos

$$|v_n(t)| \leq e^{n(B(t) - B(t_0))} |v_n(t_0)| + l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)| \leq e^{-n\eta_1} |v_n(t_0)| + l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)|,$$

para todo $t \in J \cap [t_1, t_0 - \varepsilon]$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente, se $(t_0 + \varepsilon) \in J$, então $\eta_2 \doteq B(t_0) - B(t_0 + \varepsilon) > 0$ e temos

$$|v_n(t)| \leq e^{n(B(t) - B(t_0))} |v_n(t_0)| + l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)| \leq e^{-n\eta_2} |v_n(t_0)| + l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)|,$$

para todo $t \in J \cap [t_0 + \varepsilon, t_2]$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, como $(e^{-n\eta_j} |v_n(t_0)|)_n$ é exponencialmente decrescente em n , para $j = 1, 2$, segue o resultado. □

Observação 4.38 *No lema anterior, se t_1 é um ponto interior de J e f_n e v_n satisfazem as hipóteses em (2) (respectivamente, em (3)), então $(v_n(t))_n$ é exponencialmente decrescente em n e de forma uniforme em um intervalo ligeiramente maior, digamos $[s_1, t_2] \cap J$ (respectivamente, em um conjunto ligeiramente maior, $([s_1, t_2] \cap J) \setminus (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$), contendo t_1 em seu interior. De fato, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(e^{n\varepsilon_1} f_n(t))_n$ permanece exponencialmente decrescente em n uniformemente em t . Portanto, se $s_1 < t_1$ é tal que $B(t) - B(s) \leq \varepsilon_1$ para todos $s, t \in [s_1, t_1] \cap J$, temos*

$$|e^{n(B(t) - B(t_0))}| = |e^{n(B(t) - B(t_1) + B(t_1) - B(t_0))}| = |e^{n(B(t) - B(t_1))}| |e^{n(B(t_1) - B(t_0))}| \leq e^{n\varepsilon_1},$$

donde

$$|v_n(t)| \leq e^{n\varepsilon_1} |v_n(t_0)| + e^{n\varepsilon_1} l(J) \sup_{s \in J} |f_n(s)|.$$

Além disso, analisamos o caso em que $n \in \mathbb{N}$, porém o resultado é similar quando $n < 0$ e definimos

$$t_1 \doteq \inf\{t \in J; B \text{ é não crescente em } [t, t_0]\}$$

e

$$t_2 \doteq \sup\{t \in J; B \text{ é não decrescente em } [t_0, t]\}.$$

4.2 Demonstração do Teorema Principal

Conforme enunciado anteriormente, o Teorema 4.15 supõe que L não é GAH, $b \neq 0$ e $t_* \in \{t_0, \dots, t_r\}$, onde $\{t_0, \dots, t_r\}$ são pontos de máximo local da primitiva B de b .

Reordenando e transladando as singularidades, podemos assumir que $t_* = t_0 = 0$. Além disso, também podemos supor que $A(0) = B(0) = 0$.

Definimos $c_0 \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(t)dt$, a média da função c , $a_0 \doteq \operatorname{Re}(c_0)$ e $b_0 \doteq \operatorname{Im}(c_0)$.

Dividiremos esta demonstração em dois casos, $b_0 \neq 0$ e $b_0 = 0$.

4.2.1 O caso $b_0 \neq 0$

Provaremos apenas o caso em que $b_0 < 0$, pois o raciocínio para demonstrar o caso em que $b_0 > 0$ é similar. Além disso, mostraremos o caso em que $r \geq 1$ e, adiante, veremos que o caso em que $r = 0$ segue como consequência.

Como pretendemos construir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, então devemos ter

$$(4.39) \quad \partial_t \hat{u}(t, n) + c(t)in\hat{u}(t, n) = \hat{f}(t, n), \quad n \geq 1.$$

Tratando-se de uma EDO de 1ª ordem, a equação (4.39) tem, para cada $t' \in \mathbb{R}$, solução dada por

$$(4.40) \quad \hat{u}(t, n) = e^{-in(C(t)-C(t'))}\hat{u}(t', n) + \int_{t'}^t e^{in(C(s)-C(t))}\hat{f}(s, n)ds.$$

Como $\hat{u}(2\pi, n) = \hat{u}(0, n)$, então

$$\hat{u}(0, n) = \frac{1}{e^{inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)}\hat{f}(s, n)ds$$

e, substituindo em (4.40), obtemos

$$(4.41) \quad \hat{u}(t, n) = e^{-inC(t)} \left(\int_0^t e^{inC(s)}\hat{f}(s, n)ds + \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)}\hat{f}(s, n)ds \right).$$

Idealmente, gostaríamos de construir $(\hat{u}(t, n))_n$ temperada em n uniformemente em t e tal que

$$(4.42) \quad \hat{u}(t_0, n) = 1, \quad \hat{u}(t_1, n) = \hat{u}(t_2, n) = \cdots = \hat{u}(t_r, n) = 0,$$

porém, quanto às expressões (4.42), obteremos apenas o decaimento uniformemente exponencial das sequências $(\hat{u}(t_j, n))_n$ quando $n \rightarrow \infty$, para $j \in \{1, \dots, r\}$.

Assim, usando as equações (4.42), (4.41) e (4.40), vemos que a distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ procurada deve satisfazer as seguintes condições:

$$(4.43) \quad \int_0^{t_1} e^{inC(s)} \hat{f}(s, n) ds = -1;$$

$$(4.44) \quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{inC(s)} \hat{f}(s, n) ds = 0, \quad k \in \{2, \dots, r\}$$

e

$$(4.45) \quad \int_{t_r}^{2\pi} e^{in(C(s)-C(2\pi))} \hat{f}(s, n) ds = 1.$$

Como objetivamos mostrar que $Lu = f \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, necessariamente $\hat{f}(\cdot, n)$ deve ser uma função analítica. Primeiramente, procederemos aproximando $\hat{f}(\cdot, n)$ por uma função contínua por partes, ou seja, definiremos $v_n(t)$ como o membro direito da equação (4.41), substituindo $\hat{f}(\cdot, n)$ por g_n dada por

$$(4.46) \quad g_n(t) \doteq e^{in(\psi(t)+i\phi(t))} (C_n \chi_{[0, t_1)} + D_n \chi_{[t_r, 2\pi)}),$$

em que

$$\phi(t) \doteq K(1 - \cos(t - s_1))(1 - \cos(t - s_{r+1})),$$

$$\psi(t) \doteq \begin{cases} \alpha_0 t - A(t) + \frac{\alpha_0}{2} \sin(2t - s_1 - s_{r+1}), & s_{r+1} - s_1 = \pi; \\ \alpha_0 t - A(t) - \frac{\alpha_0}{\cos(\frac{s_{r+1}-s_1}{2})} \sin(t - \frac{s_1+s_{r+1}}{2}), & s_{r+1} - s_1 \neq \pi \end{cases}$$

e as constantes K , C_n e D_n serão determinadas adiante.

Notemos que $A(t) - \alpha_0 t$ define um elemento em $C^\omega(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$, conforme a Proposição 3.5.

Pela maneira como definimos g_n , devemos ter

$$(4.47) \quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{inC(s)} g_n(s) ds = 0, \quad k \in \{2, \dots, r\};$$

$$(4.48) \quad C_n \int_0^{t_1} e^{in(C(s)+\psi(s)+i\phi(s))} ds = -1$$

e

$$(4.49) \quad D_n \int_{t_r}^{2\pi} e^{in(C(s)+\psi(s)+i\phi(s)-C(2\pi))} ds = 1.$$

Pretendemos, também, que as constantes C_n e D_n formem sequências exponencialmente decrescentes quando $n \rightarrow \infty$. Para demonstrar tal comportamento assintótico para as constantes C_n , aplicaremos, a seguir, o Método da Fase estacionária.

Definindo

$$\begin{aligned} \beta(s) &= -i(A(s) + iB(s) + \psi(s)) + \psi(s) - B(s_1) + i(A(s_1) + \psi(s_1)) = \\ &= B(s) + \phi(s) - i(A(s) + \psi(s)) - B(s_1) + i(A(s_1) + \psi(s_1)), \end{aligned}$$

temos $\beta(s_1) = 0$. Além disso, como $\beta \in C^\omega(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$, β possui uma extensão holomorfa em uma vizinhança complexa

$$V_\delta \doteq \{z = x + iy; |x - s_1| < \delta \text{ e } |y| < \delta\}$$

de s_1 , digamos

$$\tilde{\beta}(z) = B(z) + \phi(z) - i(A(z) + \psi(z)) - B(s_1) + i(A(s_1) + \psi(s_1)).$$

Notemos que

$$\tilde{\beta}'(s_1) = b(s_1) + \phi'(s_1) - i(a(s_1) + \psi'(s_1)) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}''(s_1) &= b'(s_1) + \phi''(s_1) - i(a'(s_1) + \psi''(s_1)) = \\ &= b'(s_1) + K(1 - \cos(s_1 - s_{r+1})) - i(a'(s_1) + \psi''(s_1)). \end{aligned}$$

Tomando $K > 0$ suficientemente grande, temos $\tilde{\beta}''(s_1) \neq 0$, pois $b'(s_1) + K(1 - \cos(s_1 - s_{r+1})) = 0$ se, e somente se, $\cos(s_1 - s_{r+1}) = 1 + b'(s_1)/K$, sendo $b'(s_1) = B''(s_1) \geq 0$. Assim, concluímos que $\tilde{\beta}'$ não é uma função identicamente nula e, portanto, possui apenas zeros isolados. Seja, então, $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que s_1 seja o único ponto crítico de $\tilde{\beta}$ em V_δ .

Se $t \in I_\delta \doteq [s_1 - \delta, s_1 + \delta] = \bar{V}_\delta \cap \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{Re}(\tilde{\beta}(t)) = B(t) + \phi(t) - B(s_1) \geq B(t) - B(s_1) \geq 0,$$

pois s_1 é ponto de mínimo global de B em I_δ . Daí, fazendo $0 < \delta < \frac{(s_{r+1} - s_1)}{2}$, obtemos $\phi(t) > 0$ em $I_\delta \setminus \{s_1\}$ e $\phi(s_1) = 0$, isto é, $\operatorname{Re}(\tilde{\beta}(t)) > 0$ em $I_\delta \setminus \{s_1\}$ e $\operatorname{Re}(\tilde{\beta}(s_1)) = 0$.

Nestas condições, podemos aplicar a Proposição 1.46, donde obtemos

$$(4.50) \quad \int_{I_\delta} e^{-n\beta(s)} ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tilde{\beta}''(0)n}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

Considerando

$$\eta \doteq K(1 - \cos \delta) \min\{1 - \cos(s_1 - s_{r+1} - \delta), 1 - \cos(s_1 - s_{r+1} + \delta)\},$$

temos $\eta > 0$ e, para todo $t \in [0, t_1] \setminus I_\delta$, $\operatorname{Re} \tilde{\beta}(t) \geq \phi(t) \geq \eta$, logo

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0, t_1] \setminus I_\delta} e^{-n\beta(s)} ds \right| &\leq \int_{[0, t_1] \setminus I_\delta} |e^{-n(B(s) + \phi(s) - B(s_1))}| ds = \\ &\int_{[0, t_1] \setminus I_\delta} |e^{-n\operatorname{Re}(\tilde{\beta}(s))}| ds \leq \int_{[0, t_1] \setminus I_\delta} e^{-n\eta} ds < 2\pi e^{-n\eta}, \end{aligned}$$

ou seja

$$(4.51) \quad \left| \int_{[0, t_1] \setminus I_\delta} e^{-n\beta(s)} ds \right| < 2\pi e^{-n\eta}.$$

Portanto, como

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} e^{in(C(s) + \psi(s) + i\phi(s))} ds &= \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-n(B(s_1) - i(A(s_1) + \psi(s_1)))} (\tilde{\beta}''(0))^{-1/2} n^{-1/2} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) \end{aligned}$$

tem crescimento exponencial quando $n \rightarrow \infty$ e $B(s_1) < 0$, concluímos que $(C_n)_n$ decresce uniformemente exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$.

O raciocínio para demonstrar tal decaimento para a sequência $(D_n)_n$ é análogo, pois basta definirmos

$$\theta(s) = -i(A(s) + iB(s) + \psi(s) - C(2\pi)) + \phi(s) - B(s_{r+1}) + i(A(s_{r+1}) + \psi(s_{r+1}) - C(2\pi))$$

tal que $\theta(s_{r+1}) = 0$ e tomarmos uma extensão holomorfa de θ em uma vizinhança complexa

$$V_\rho \doteq \{z = x + iy ; |x - s_{r+1}| < \rho \text{ e } |y| < \rho\}$$

de s_{r+1} , digamos

$$\tilde{\theta}(z) = -i(A(z) + iB(z) + \psi(z) - C(2\pi)) + \phi(z) - B(s_{r+1}) + i(A(s_{r+1}) + \psi(s_{r+1}) - C(2\pi)).$$

Nesta próxima etapa, aproximaremos $\hat{f}(\cdot, n)$ por meio de uma função suave, denotada por $h_n(\cdot)$.

Para tanto, começaremos definindo

$$(4.52) \quad h_{1,n}(t) \doteq C_n \chi_1(t) e^{in(\psi(t) + i\phi(t))},$$

em que χ_1 é uma função 2π -periódica suave tal que

- (i) $0 \leq \chi_1 \leq 1$
- (ii) $\chi_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [t_1, 2\pi]; \\ 1, & \text{se } t \in J_1 \doteq [s_1 - \delta_1, s_1 + \delta_1] \subset I_\delta. \end{cases}$

Vemos claramente que

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{inC(s)} h_{1,n}(s) ds = 0, \quad k \in \{2, \dots, r\}$$

e

$$D_n \int_{t_r}^{2\pi} e^{in(C(s) - C(2\pi))} h_{1,n}(s) ds = 0,$$

então concluímos das equações (4.48) e (4.49) que as constantes C_n e D_n realmente satisfazem

$$C_n \int_0^{t_1} e^{in(C(s) + \psi(s) + i\phi(s))} ds = -1$$

e

$$D_n \int_{t_r}^{2\pi} e^{in(C(s)+\psi(s)+i\phi(s)-C(2\pi))} ds = 1.$$

Ainda, sendo

$$\alpha_n \doteq \int_0^{t_1} e^{inC(s)} (h_{1,n} - g_n(s)) ds = C_n \int_0^{t_1} e^{in(C(s)+\psi(s)+i\phi(s))} (\chi_1(s) - 1) ds,$$

obtemos

$$(4.53) \quad \alpha_n - 1 = \int_0^{t_1} e^{inC(s)} h_{1,n}(s) ds,$$

com

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &\leq |C_n| \int_{[0,t_1] \setminus J_1} |e^{in(C(s)+\psi(s)+i\phi(s))}| ds = \\ &= |C_n| \int_{[0,t_1] \setminus J_1} e^{-n\phi(s)} ds = |C_n| \left(\int_{[0,t_1] \setminus I_\delta} e^{-n\phi(s)} ds + \int_{I_\delta \setminus J_1} e^{-n\phi(s)} ds \right) \leq \\ &\leq |C_n| \left(\int_{[0,t_1] \setminus I_\delta} e^{-n\phi(s)} ds + \int_{I_\delta} e^{-n\phi(s)} ds \right) \leq \\ &\leq |C_n| \left(\int_{[0,t_1] \setminus I_\delta} e^{-n(\beta(s))} ds + \int_{I_\delta} e^{-n\beta(s)} ds \right) \leq \\ &\leq \frac{|C_n| 2\pi}{e^{n\eta}} + \frac{|C_n| \sqrt{2\pi}}{\sqrt{n\tilde{\beta}''(0)}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})), \end{aligned}$$

ou seja, $(\alpha_n)_n$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$.

Denotando $\lambda_n \doteq (1 - \alpha_n)$, vemos que $|\lambda_n|$ é limitada inferior e superiormente por constantes positivas e podemos reescrever a equação (4.53) como

$$(4.54) \quad \int_0^{t_1} e^{inC(s)} h_{1,n}(s) ds = -\lambda_n.$$

Da mesma maneira, definindo

$$(4.55) \quad h_{r,n}(t) \doteq D_n \chi_r(t) e^{in(\psi(t)+i\phi(t))},$$

em que χ_r é uma função 2π -periódica suave tal que

(i) $0 \leq \chi_r \leq 1$
(ii) $\chi_r(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, t_r]; \\ 1, & \text{se } t \in J_{r+1} \doteq [s_{r+1} - \theta_{r+1}, s_{r+1} + \theta_{r+1}], \end{cases}$
temos

$$(4.56) \quad \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{inC(s)} h_{r,n}(s) ds = 0, \quad k \in \{1, \dots, r\}$$

e $(D_n)_n$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em $\mathbb{T}^1$.

Daí, tomando

$$\mu_n \doteq \int_{t_r}^{2\pi} e^{in(C(s)-C(2\pi))} h_{r,n}(s) ds,$$

concluimos que $|\mu_n|$ é limitado inferior e superiormente por constante positivas.

Seja

$$(4.57) \quad h_n(t) \doteq \frac{h_{1,n}(t)}{\lambda_n} + \frac{h_{r,n}(t)}{\mu_n}.$$

É fácil ver que as equações (4.43), (4.44) e (4.45) são satisfeitas quando substituimos $\hat{f}(\cdot, n)$ por h_n ; além do mais, temos

$$|h_n| \leq \frac{|h_{1,n}|}{|\lambda|} + \frac{|h_{r,n}|}{|\mu_n|} \leq \frac{|h_{1,n}|}{C_{\lambda_n}} + \frac{|h_{r,n}|}{C_{\mu_n}} \leq C(|h_{1,n}| + |h_{r,n}|),$$

com C_{λ_n} e C_{μ_n} constantes positivas que majoram λ_n e μ_n , respectivamente, e $C \doteq (\min\{C_{\lambda_n}, C_{\mu_n}\})^{-1} > 0$.

Assim,

$$(4.58) \quad |h_n| \leq Ce^{-n\phi}(|C_n| + |D_n|) < C(|C_n| + |D_n|),$$

donde segue que $(h_n)_n$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em $\mathbb{T}_1$.

Sejam $m \doteq \min_{[0, 2\pi]} B$ e $M \doteq \max_{[0, 2\pi]} B$; $M > 0$. Fixemos $\sigma > M - m > -m$ e, para $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\tilde{f}_n$ a soma parcial da série de Fourier de h_n satisfazendo

$$(4.59) \quad \|\tilde{f}_n - h_n\|_{C^0} \leq e^{-\sigma n}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $|\tilde{f}_n(t)| \leq |\tilde{f}_n(t) - h_n(t)| + |h_n(t)|$, logo, pela equação (4.59) e pelo decaimento uniformemente exponencial de $(h_n)_n$ quando $n \rightarrow \infty$,

existe $\sigma' > 0$ tal que $|\tilde{f}_n(t)| < e^{-\sigma'n}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, particularmente, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Além disso, como $\tilde{f}_n$ é analítica, existe uma função holomorfa (complexa) $\widetilde{F}_n$ que estende $\tilde{f}_n$, logo temos $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\widetilde{F}_n(t)| < e^{-\sigma'n}$. Portanto, para

cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\delta_t > 0$ de modo que $|\widetilde{F}_n(t + i\tau)| \leq e^{-\sigma'n}$ para todo $(t + i\tau) \in B_{\mathbb{C}}(t; \delta_t) \doteq \{s + i\tau; \max\{|s - t|, |\tau|\} < \delta_t\}$. Tomando $B_{\mathbb{C}}(t^1; \delta_{t^1}), \dots, B_{\mathbb{C}}(t^p; \delta_{t^p})$ uma subcobertura finita de $[0, 2\pi]$ formada por tais bolas, existe $\delta > 0$ tal que $|\widetilde{F}_n(t + i\tau)| < e^{-\delta n}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ e todo $\tau \in (-\delta, \delta)$, donde concluímos que $\tilde{f}_n$ decresce uniformemente exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$.

Definamos, agora, $\widetilde{u}_n(t)$ como o membro direito da equação (4.41), substituindo $\hat{f}(\cdot, n)$ por $\tilde{f}_n(\cdot)$, ou seja

$$(4.60) \quad \widetilde{u}_n(t) \doteq e^{-inC(t)} \left(\int_0^t e^{inC(s)} \tilde{f}_n(s) ds + \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)} \tilde{f}_n(s) ds \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n(t_0) &= \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)} \tilde{f}_n(s) ds = \\ &= \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)} [\tilde{f}_n(s) - h_n(s)] ds + 1 \doteq 1 + \gamma_n, \end{aligned}$$

e como supomos que $b_0 < 0$ e $\sigma > -m$, temos

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \left| \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \right| \int_0^{2\pi} e^{-nB(s)} |\tilde{f}_n(s) - h_n(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{e^{-2\pi mb_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-nm} e^{-n\sigma} ds \leq \frac{2\pi}{e^{-2\pi b_0} - 1} e^{-n(m+\sigma)}, \end{aligned}$$

logo $(\gamma_n)_n$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$.

Além disso, para $k \in \{1, \dots, r\}$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n(t_k) &= e^{-inC(t_k)} \left(\int_0^{t_k} e^{inC(s)} (\tilde{f}_n(s) - h_n(s)) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{inC(s)} (\tilde{f}_n(s) - h_n(s)) ds \right), \end{aligned}$$

então

$$|\widetilde{u}_n(t_k)| \leq \frac{2\pi}{1 - e^{2\pi b_0}} e^{n(M-m-\sigma)}$$

e vemos que $(\widetilde{u}_n(t_k))_n$ decresce exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, para todo $k \in \{1, \dots, r\}$, pois $n(M - m - \sigma) < 0$.

Para cada $n \geq 1$, definamos $f_n \doteq \widetilde{f}_n(1 + \gamma_n)^{-1}$. Como $|f_n(t)| \leq |\widetilde{f}_n(t)|$, segue que $(f_n(t))_n$ decresce uniformemente exponencialmente quando $n \rightarrow \infty$, portanto a série

$$(4.61) \quad f(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) e^{inx}$$

define uma função analítica real em $\mathbb{T}^2$, cujos coeficientes parciais de Fourier são $\widehat{f}(t, n) = f_n(t)$.

Dessa forma, se

$$(4.62) \quad u_n(t) \doteq e^{-inC(t)} \left(\int_0^t e^{inC(s)} \frac{\widetilde{f}_n(s)}{(1 + \gamma_n)} ds + \frac{1}{e^{2\pi inc_0} - 1} \int_0^t e^{inC(s)} \frac{\widetilde{f}_n(s)}{(1 + \gamma_n)} ds \right),$$

então $u_n(t_0) = 1$ e $(u_n(t_k))_n$ possui decaimento uniformemente exponencial quando $n \rightarrow \infty$, para todo $k \in \{1, \dots, r\}$, uma vez que $|u_n(t_k)| \leq |1 + \gamma_n|^{-1} |\widetilde{u}_n(t_k)|$.

O Lema 4.32, item (2), nos garante que toda solução da EDO (4.35), digamos

$$(4.63) \quad u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e^{inx},$$

define um elemento em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$; mais ainda, o item (3) nos dá a inclusão $SS_A(u) \subset \{t_0\} \times \mathbb{T}^1$ e, como $u(t_0, x) = \delta_+(x)$, obtemos $SS_A(u) = \{(t_0, 0)\}$. Finalmente, os coeficientes parciais de Fourier de u , denotados por $\widehat{u}(t, n) = u_n(t)$, de fato satisfazem a expressão (4.39), provando que $Lu = f$ e concluindo a prova para o caso em que $r \geq 1$.

Analisemos o caso em que $r = 0$.

Das equações (4.43), (4.44) e (4.45), surgiu a necessidade de definirmos a função g_n , contínua por partes, por meio das funções $\chi_{[0, t_1)}$ e $\chi_{[t_r, 2\pi)}$. Neste caso, como a única singularidade é $t_* = t_0 = 0$, não precisamos de tais aproximações, basta definirmos

$$g_n(t) \doteq C_n e^{in(\psi(t) + i\phi(t))},$$

onde agora temos

$$\psi(t) = \alpha_0 t - A(t) - \alpha_0 \sin(t - s_1) \quad \text{e} \quad \phi(t) = K(1 - \cos(t - s_1)),$$

cujas constantes K e C_n são determinadas de forma similar ao que fizemos no caso anterior.

Assim, considerando $\hat{f}(t, n) = g_n(t) = h_n(t)$, obtemos $\hat{u}(0, n) = 1$ e

$$C_n \int_0^{2\pi} e^{inC(s)} \hat{f}(s, n) ds = -1$$

e a conclusão segue como no caso em que $r \geq 1$.

4.2.2 O caso $b_0 = 0$

Dividiremos esta prova em três situações, conforme α_0 , lembrando que

$$\alpha_0 = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s) ds.$$

Caso 1 : $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Notemos que

$$d_n \doteq e^{2\pi i n \alpha_0} - 1 = e^{2\pi i n a_0} - 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad |d_n| \leq 2.$$

Dessa forma, a única diferença com relação ao caso em que $b_0 \neq 0$ trata-se de que, ao invés de (4.59), definimos $\tilde{f}_n$ satisfazendo

$$\|\tilde{f}_n - h_n\|_{C^0} \leq e^{-n\sigma} |d_n|,$$

a fim de obtermos

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |e^{2\pi i n \alpha_0} - 1|^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-nB(s)} |\tilde{f}_n(s) - h_n(s)| ds \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} e^{-nm} e^{-n\sigma} ds \leq 2\pi e^{-n(m+\sigma)} \end{aligned}$$

e, portanto, o decrescimento uniformemente exponencial de $(\gamma_n)_n$ quando $n \rightarrow \infty$.

O restante segue como no caso $b_0 \neq 0$.

Caso 2 : $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$.

Seguindo a demonstração do caso em que $b_0 \neq 0$, deparamos com o fato de que $e^{2\pi i n \alpha_0} - 1 = e^{2\pi i n a_0} - 1 = 0$, logo $(e^{2\pi i n \alpha_0} - 1)^{-1}$ não está definido.

A fim de contornarmos este problema, substituímos a condição (4.41) por

$$(4.64) \quad \hat{u}(t, n) = \int_0^t e^{in(C(s)-C(t))} \hat{f}(t, n) ds + e^{-inC(t)},$$

notando que $e^{\pm inC(t)} \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$.

Definindo $\tilde{f}_n$ conforme (4.59) e

$$u_n(t) = \int_0^t e^{in(C(s)-C(t))} f_n(s) ds + e^{-inC(t)},$$

em que $f_n \doteq \tilde{f}_n$, temos $u_n(0) = 1$ e

$$\begin{aligned} u_n(t_k) &= e^{-inC(t_k)} \left(\int_0^{t_k} e^{inC(s)} f_n(s) ds + 1 \right) = \\ &= e^{-inC(t_k)} \int_0^{t_k} e^{inC(s)} (f_n(s) - h_n(s)) ds, \end{aligned}$$

portanto $|u_n(t_k)| \leq 2\pi e^{n(M-m-\sigma)}$. Nestas condições, os casos anteriores inferem o restante da prova.

Caso 3: $a_0 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Denotemos $a_0 \doteq p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $\text{m.d.c.}\{p, q\} = 1$.

Sejam $\mathcal{A} \doteq \{nq; n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{B} \doteq \mathbb{N} \setminus \mathcal{A}$.

Definamos f_n e u_n como nos casos anteriores, porém com $a_0 = q$, e consideremos

$$(4.65) \quad \tilde{f}_n \doteq \begin{cases} f_n, & n \in \mathcal{A} \\ 0, & n \in \mathcal{B} \end{cases} \quad \text{e} \quad \widetilde{u}_n \doteq \begin{cases} u_n, & n \in \mathcal{A} \\ 0, & n \in \mathcal{B} \end{cases}.$$

Então $(\partial_t + inC')\widetilde{u}_n = \tilde{f}_n$, satisfazendo a equação (4.39), e

$$U_0(t, x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{u}_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathcal{A}} u_n(t) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{nq}(t) e^{inqx}$$

define um elemento em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $LU_0 \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(U_0) = \{(t_0, 0)\}$.

Observemos que, se $n \in \mathcal{B}$, então $e^{2\pi inc_0} = e^{2\pi inp/q} \neq 1$. Assim, usando o caso $b_0 \neq 0$ apenas para as frequências $n \in \mathcal{B}$, obtemos $U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, $LU_1 \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$, $SS_A(U_1) = \{t_0, 0\}$ e tal que

$$\widehat{U}_1(t, n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{B} \\ 0, & n \in \mathcal{A} \end{cases}.$$

Por fim, tomando $U \doteq U_0 + U_1$, obtemos uma solução singular do operador L satisfazendo $U(0, x) = \delta_+(x)$.

Isto completa a prova do Teorema 4.15.

□

Referências

1. AVILA, L. - *Sobre Singularidades Analíticas de Soluções de uma Classe de Campos Vetoriais no Toro* - Dissertação de Mestrado, ICMC/USP, São Carlos, (2009).
2. BARROS-NETO, J. - *An Introduction to the Theory of Distributions* - Marcel Dekker, INC, New York, (1973).
3. BERGAMASCO, A. - *Hipoeliticidade Global para algumas Classes de Operadores* - Tese de Livre Docência, ICMC/USP, São Carlos, (1989).
4. BERGAMASCO, A. - *Remarks about Global Analytic Hipoellipticity* - Trans. Amer. Math. Soc., 351, 4113-4123, (1999).
5. BERGAMASCO, A. E ZANI, S. - *Prescribing Analytic Singularities for Solutions of a Class of Vector Fields on the Torus* - Trans. Amer. Math. Soc., 357, 4159-4174, (2005).
6. BAOUENDI, M. S. E TRÈVES, F. - *A Microlocal Version of Bochner's Tube Theorem* - Indiana Univ. Math. J., 31 (6), 885-895, (1982).
7. CARTAN, H. - *Elementary Theory of Analytic Functions of one or several Complex Variables* - Dover Publications, INC, New York, (1985).
8. COLWELL, P. - *Introdução às Variáveis Complexas* - Edgard Blücher Ltda, São Paulo, (1976).
9. FRIEDLANDER, F. G. - *Introduction to the Theory of Distributions* - Cambridge, New York, (1982).
10. HÖRMANDER, L. - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I - Distribution Theory and Fourier Analysis* - Springer, New York.
11. HOUNIE, J. - *Teoria Elementar das Distribuições* - 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
12. KRANTZ, S. G. - *A Primer of Real Analytic Functions* - Basel: Birkhäuser Verlag, Boston, (1992).
13. SJÖSTRAND, J. - *Singularités Analytiques Microlocales* - Astérisque, 95, 1-166, Soc. Math. France, Paris, (1982).
14. TRÈVES, F. - *Analytic Hipoelliptic Partial Differential Equations of Principal Type* - Comm. Pure Appl. Math., 24, 537-570, (1971).
15. ZANI, S. - *Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem* - Dissertação de Mestrado, ICMC/USP, São Carlos, (1988).

Índice Remissivo

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 2
- C^ω , 49
- T-convolução, 18
- $U_T(\mathbb{R}^n)$, 6
- $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 9
- $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 7
- $\mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, 3
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 2
- $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$, 30
- $s'(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C}) \simeq \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 34
- $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C}) \simeq \mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, 29
- $s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$, 25
- Álgebra $(\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n), *, +)$, 18
- Convergência
 - em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 8
 - em $\mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, 3
 - em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 2
 - em subconjuntos compactos, 22
- Delta de Dirac, δ , 13
- Distribuição periódica, 7
- Função
 - analítica real, 49
 - de corte, 7
 - teste, 3
 - unitária, 6
- Hipoeliticidade analítica global, 55
- Método da Fase estacionária, 22
- Série convergente em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 29
- Série de Fourier
 - em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 29
 - em $\mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, 25
- Série parcial de Fourier
 - em $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, 42
 - em $\mathcal{D}_T(\mathbb{R}^n)$, 35
- Sequência
 - de crescimento lento, 30
 - de decrescimento rápido, 25
 - temperada, 30
- Solução singular, 55
- Suporte, 2
- Suporte singular, 2