Taxa de convergência de atratores de algumas equações
de reação-difusão perturbadas

Flank David Moraes Bezerra

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23/11/2009

Assinatura: _____

Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão perturbadas

*Flank David Moraes Bezerra*¹

Orientador: *Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho*²

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Novembro/2009

¹Suporte FAPESP Processo: 06/57231-0 e CAPES Processo: BEX 1356/08-9

²Universidade de São Paulo

Agradecimentos

A **Deus** que *ab initio* tem iluminado meus passos...

Aos meus pais **Maria José Morais Bezerra** e **Francisco De Paula Bezerra** pela educação. A motivação que encontro nos meus pais durante nossas conversas na varanda de casa é *sine qua non*. Com maior razão, este trabalho é dedicado a eles. Também agradeço aos meus irmãos **Paulo Morais Bezerra** e **Débora Morais Bezerra**, a minha querida **Jackelya Araujo da Silva** e demais familiares pelo apoio incondicional, eles quem *ab initio* acreditaram no meu trabalho.

Ao Prof. Dr. **Alexandre Nolasco de Carvalho** pela matemática que me foi apresentada e pela precisão de seus comentários durante o desenvolvimento deste trabalho, e ao Prof. Dr. **José Maria Arrieta Algarra** pelas orientações durante a minha estadia na Universidad Complutense de Madrid, Espanha. Deixar-lhes aqui registrado meus cordiais agradecimentos é um prazer.

Aos professores doutores **Claudianor Oliveira Alves**, **Daniel Cordeiro de Morais Filho**, **Fágner Dias Araruna**, **Hilkias Jordão de Souza**, **José Cloves Verde Saraiva**, **Luís Fernando Coelho Amaral**, **Marco Aurélio Soares Souto**, **Marcos Antônio Ferreira de Araújo**, **Maxwell Mariano de Barros** e **Nivaldo Costa Muniz** pelos ensinamentos e orientações;

Aos amigos **Kleyber Mota da Cunha** e **Suzete Maria Silva Afonso** pelos diálogos extremamente profícuos sobre $\text{\LaTeX}$, Matemática, Linux e Samba;

À **CAPES** e **FAPESP**³, agências responsáveis do pelo suporte financeiro do mesmo.

³FAPESP Processo: 06/57231-0 e CAPES Processo: BEX 1356/08-9

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica assintótica não linear de algumas equações parabólicas do tipo reação-difusão sob perturbações nos parâmetros e perturbações singulares no domínio do tipo *dumbbell*. Mais precisamente, trataremos dos atratores provenientes destes problemas, buscaremos compreender a dependência destes conjuntos assintóticos de estados em relação ao parâmetro, investigando a continuidade com taxa dos mesmos. O programa que executaremos para obtenção da taxa de continuidade dos atratores, bem como de toda a estrutura, mostra-nos fortes propriedades de dissipatividade exponencial de alguns semigrupos.

Abstract

In this work we study the asymptotic nonlinear dynamical of some reaction-diffusion parabolic equations under perturbations in parameter and singular perturbations in a dumbbell domain. More precisely, we treat of the attractors from these problems, we seek understand the dependence these asymptotic set of states in relationship the parameter, investigating continuity with rate. The program that we will follow to prove the continuity of the attractors with rate well as the entire structure, we show that these semigroups possess strong exponential dissipative properties.

Sumário

Introdução	13
1 Atratores globais para sistemas dinâmicos autônomos	19
1.1 Noções básicas	19
1.2 Semigrupos gradientes e <i>gradient-like</i>	27
1.3 Semicontinuidade inferior e superior de atratores	49
1.4 Taxa de convergência de atratores exponenciais	51
2 Convergência Compacta	53
2.1 Introdução	53
2.2 Convergência dos operadores resolventes	54
3 Um problema de reação-difusão com variação no coeficiente de difusão	61
3.1 Introdução	61
3.2 Estimativas do resolvente e taxa de convergência dos semigrupos	64
3.2.1 Estimativas do resolvente via coeficientes de difusão	64
3.2.2 Taxa de convergência dos semigrupos via coeficientes de difusão	76
3.2.3 Taxa de convergência dos resolventes e dos semigrupos para a linearização	78
3.3 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades instáveis	85
3.4 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa dos atratores	94
4 Um problema de reação-difusão com perturbação no domínio do tipo <i>dumbbell</i>	95
4.1 Introdução	95
4.2 A família de operadores A_ε^{-1} com $\varepsilon \in [0, 1]$	100
4.3 Continuidade das estruturas para a linearização	105
4.4 Estimativas do resolvente e taxa de convergência dos semigrupos	111
4.4.1 Taxa de convergência dos equilíbrios hiperbólicos e suas linearizações	116
4.4.2 Taxa de convergência dos semigrupos via medida de Lebesgue do canal	118
4.5 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades instáveis	124
4.6 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa dos atratores	132
4.7 Apêndice: Lemas Técnicos	133

Introdução

Em prosseguimento aos resultados obtidos nos últimos quarenta anos sobre sistemas dinâmicos dissipativos em espaços de dimensão infinita, neste trabalho investigaremos a continuidade com taxa de atratores autônomos de problemas gradientes (singularmente) perturbados.

Sistemas dinâmicos dissipativos em espaços de dimensão infinita são modelos para diversos problemas de Física Matemática, Biologia e Química e etc., de um modo geral estão relacionados a fenômenos evolutivos, e a compreensão desses fenômenos está intimamente ligada à sua previsibilidade ao longo do tempo. Os modelos sempre apresentam um certo grau de incerteza na determinação de seus parâmetros, de modo que se faz necessário determinar condições de estabilidade relativa a perturbações nos parâmetros do modelo proposto, bem como as taxas com que toda a estrutura varia. Relativamente ao parâmetro os atratores, conjuntos assintóticos de estados, também sofrem influência desta incerteza, em particular, estudaremos como estes se comportam em relação à alguma noção de continuidade no espaço de estados em questão.

Visando estes problemas de Aproximação, o que faremos no **primeiro momento**, é considerar o problema

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) = f(u^\varepsilon), & x \in \Omega, t > 0, \\ u^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (P_\varepsilon^1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ é um domínio limitado e suave, os coeficientes de difusão $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, são funções regulares com $a_\varepsilon \rightarrow a_0$ uniformemente em Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma não linearidade dissipativa. Provaremos a atração exponencial uniforme em ε dos atratores, e que a taxa de convergência de toda a estrutura do problema depende da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$, bem como a convergência dos atratores exponenciais.

Bem sucedida a resolução do problema anterior, no **segundo momento** manteremos fixos os parâmetros da equação e consideraremos uma perturbação singular *dumbbell-type* no domínio da forma

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f(u^\varepsilon), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (P_\varepsilon^2)$$

onde $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio *dumbbell-type*, i.e., Ω_ε , $\varepsilon \in (0, 1]$, consiste de dois domínios desconexos suaves e limitados, que denotaremos por Ω , ligados por um canal fino R_ε que degenera-se para um segmento de reta quando ε tende a zero, conforme a Figura 01 e a Figura 02 abaixo.

Passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o “domínio” limite consiste dos domínios Ω e um segmento de reta R_0 , o que constitui o “domínio” Ω_0 . A equação limite é

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \dot{v} - Lv + v = f(v), & s \in R_0, \\ v(0) = w(P_0), & v(1) = w(P_1), \end{cases} \quad (P_0^2)$$

onde w é uma função definida em Ω e v é uma função definida no segmento de reta R_0 . Além disso, L é um operador diferencial que depende da geometria do canal R_ε , mais precisamente, sobre como o canal R_ε colapsa para o segmento de reta R_0 .

Provaremos a atração exponencial uniforme em ε dos atratores, e que a taxa de convergência de toda a estrutura deste problema depende da medida de Lebesgue do canal fino R_ε , bem como a convergência dos atratores exponenciais. Este problema, em relação ao primeiro, apresenta uma dificuldade maior porque aqui há significativamente uma variação dos espaços de funções com os quais trabalharemos.

Figura 01: Domínio Dumbbell

Figura 02: “Domínio” Limite

Em espaços de funções apropriados $\mathcal{Z}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$, escreveremos os problemas (P_ε^1) e (P_ε^2) com $\varepsilon \in (0, 1]$ como uma equação semilinear abstrata da forma

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in \mathcal{Z}_\varepsilon \end{cases} \quad (AP_\varepsilon)$$

onde $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset \mathcal{Z}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{Z}_\varepsilon$ é um operador linear ilimitado. Também, escrevemos os problema (P_0^2) de maneira abstrata da forma

$$\begin{cases} u_t + A_0 u = f_0(u), \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{Z}_0 \end{cases} \quad (AP_0)$$

onde $A_0 : D(A_0) \subset \mathcal{Z}_0 \rightarrow \mathcal{Z}_0$ é um operador linear ilimitado.

O programa executaremos para provar a continuidade com taxa dos atratores está dividido em algumas etapas:

- (1) Buscaremos a taxa de convergência dos operadores resolventes, isto é, mostraremos a taxa com que A_ε^{-1} converge, num sentido, apropriado para A_0^{-1} quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Este é o ponto chave de toda a análise;
- (2) Mostraremos a taxa de convergência do operador $(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}$ num sentido apropriado para $(\lambda + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ com λ em um setor para qual temos estimativas uniformes em ε para o operador resolvente

$(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}$. Também mostraremos taxa de convergência dos resolventes de operadores da forma $A_\varepsilon + V_0$ e $A_\varepsilon + V_\varepsilon$, onde V_0 e V_ε são potenciais tais que V_ε converge para V_0 com taxa igual a obtida em (1);

(3) Com a convergência dos operadores resolventes das etapas anteriores extrairemos a taxa de convergência dos pontos de equilíbrio. Escreveremos os problemas estacionários como problemas de pontos fixos, isto é, u_ε é ponto de equilíbrio de (AP_ε) (respectivamente u_0 é um equilíbrio de (AP_0)) se $u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ (respectivamente $u_0 = A_0^{-1} f_0(u_0)$) e usaremos a informação obtida na etapa (1);

(4) Com a convergência dos operadores resolventes em (1), mostraremos a convergência com taxa dos semigrupos lineares $e^{-A_\varepsilon t}$ para $e^{-A_0 t}$. Notemos que há “perda” de informação na taxa obtida em comparação a que foi obtida para a diferença do A_ε^{-1} para o A_0^{-1} , em função do processo de interpolação considerado em nossas estimativas;

(5) Com a Fórmula de Variação das Constantes, mostraremos a convergência com taxa dos semigrupos não lineares $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ associados aos problemas (AP_ε) e (AP_0) em $\varepsilon = 0$. Observaremos que está “perda” na estimativa obtida em (4) é herdada aqui. E notaremos que, segundo o caminho que seguiremos, esta falta de otimização na taxa de convergência destas estruturas estará presente na estimativa de convergência das variedades instáveis locais e dos atratores;

(6) Mostraremos a atração exponencial uniforme em ε das variedades instáveis locais e a continuidade destas com taxa;

(7) Mostraremos a atração exponencial uniforme em ε e usaremos esta informação para obter a convergência de atratores com taxa.

Este programa é uma variação do que vêm sendo aplicado nos últimos anos por renomados pesquisadores para obtenção de semicontinuidade inferior e superior, e até mesmo, continuidade dos atratores, mas sem preocupações com taxa, bem como uniformidade em ε na análise assintótica das estruturas.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

O **Capítulo 1** é dedicado à Teoria dos sistemas dinâmicos contínuos autônomos. Apresentamos um apanhado de definições e resultados, dentre eles condições suficientes para existência de atratores. Também apresentamos uma introdução aos semigrupos gradiente e *gradient-like*. Concluimos o mesmo apresentando resultados sobre a noção de continuidade de atratores que consideraremos. Para mais detalhes sugerimos [8, 9, 14, 15, 31].

No **Capítulo 2** coletamos alguns resultados sobre a ferramenta basicamente abstrata que usaremos para comparar problemas lineares definidos em espaços diferentes. Para mais detalhes sugerimos [6, 12, 19, 26]. Este capítulo pode ser visto como uma introdução aos capítulos seguintes.

O **Capítulo 3** inicia a segunda parte do trabalho, o dedicaremos as aplicações, ele foi desenvolvido durante nosso Estágio de Doutorado Sanduíche na Universidad Complutense de Madrid, Espanha, sob orientação do Prof. Dr. José Maria Arrieta Algarra. Estudaremos a taxa de continuidade

da dinâmica assintótica do problema parabólico semilinear $u_t(x, t) - \operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u(x, t)) = f(u(x, t))$, $x \in \Omega_\varepsilon$, $t > 0$ com condições de fronteira homogênea de Dirichlet, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e os coeficientes de difusão $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções regulares, satisfazendo $a_\varepsilon \rightarrow a_0$ uniformemente em Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O problema de continuidade de atratores de equações de reação-difusão com variação no coeficiente de difusão foi recentemente estudado em [23], no entanto, sem preocupação com taxas de convergência e nem uniformidade em ε de atração dos atratores. Aqui, buscaremos compreender tal uniformidade em ε , bem como a convergência das estruturas considerando $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$ como parâmetro. Completando assim o referido trabalho.

O principal resultado deste capítulo, sem nos preocuparmos com a definição do espaço de funções mencionado, é o seguinte:

Teorema 0.1. *Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (AP_ε) com atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$. Suponhamos que existam $0 < \theta < 1/2$, $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt}(\|u - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}), \quad t \geq 1.$$

e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (AP_ε) com $\varepsilon = 0$ existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_^{1,0}, \dots, u_*^{n,0}\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, temos*

(i) O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_^{1,\varepsilon}, \dots, u_*^{n,\varepsilon}\}$ e*

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n W^u(u_*^{i,\varepsilon});$$

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado, existe $c = c(B) > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \operatorname{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}},$$

onde $\operatorname{dist}(X, Y) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ denota a semidistância de Hausdorff entre subconjuntos X, Y de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. O item (iii) nos diz que a continuidade com taxa dos atratores é obtida sob a noção de distância simétrica de Hausdorff, isto é, dados X, Y subconjuntos de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, a distância simétrica de Hausdorff entre X e Y é dada por $\operatorname{dist}_H(X, Y) := \operatorname{dist}(X, Y) + \operatorname{dist}(Y, X)$.

No **Capítulo 4** completamos o trabalho realizado na série *Dynamics in dumbbell domains* [19, 20, 21], onde os autores estudam a continuidade do conjunto dos equilíbrios, o problema limite e a continuidade

dos atratores, fazendo assim uma análise do comportamento da dinâmica assintótico não linear da equação de reação-difusão $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + u(x, t) = f(u(x, t))$, $x \in \Omega_\varepsilon$, $t > 0$ com condição de fronteira homogênea de Neumann, onde o domínio limitado e suave $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ da equação é uma perturbação singular do tipo *dumbbell* de um domínio Ω_ε constituído de dois domínios desconexos Ω conectados por um canal fino R_ε que se degenera a um segmento de reta (a situação limite) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, veja figura 02 acima. Aqui, usaremos o parâmetro ε para medir a espessura da seção transversal do canal fino R_ε usado para definir o *dumbbell* na situação inicial em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

Teorema 0.2. *Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (AP_ε) com atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$. Suponhamos que existam $0 < \theta < 1/2$, $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$ e $C > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^p(\Omega_\varepsilon))} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} (\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\theta \frac{N}{q}}), \quad t > 0 \\ \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} (\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\theta \frac{1}{q}}), \quad t > 0. \end{aligned}$$

onde $p > N$, e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (AP_0) existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_*^{1,0}, \dots, u_*^{n,0}\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, vale

(i) O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_*^{1,\varepsilon}, \dots, u_*^{n,\varepsilon}\}$ e

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n W^u(u_*^{i,\varepsilon});$$

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset U_\varepsilon^p$ limitado, existe $c = c(B) > 0$ tal que

$$(ii_1) \quad \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq c e^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1,$$

$$(ii_2) \quad \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq c e^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$(iii_1) \quad \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0) + \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(E_\varepsilon \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C \varepsilon^{\theta \frac{\rho N}{p(\rho+L)}},$$

$$(iii_2) \quad \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0) + \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(E_\varepsilon \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C \varepsilon^{\theta \frac{\rho}{p(\rho+L)}},$$

onde $\text{dist}^X(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X$ com $A, B \subset X$.

Nota-se que embora a Teoria de atratores globais para sistemas dinâmicos dissipativos seja em sua totalidade acessível, as aplicações são extremamente delicadas, os resultados de atração e convergências das variedades instáveis locais, bem como dos atratores requerem uma análise das propriedades espectrais dos operadores ilimitados em questão, que é indispensável, e se torna o ponto chave de todo o estudo.

Uma vez que, é conhecida a taxa de convergência dos atratores das equações de reação-difusão acima, o trabalho pode ser complementado buscando as estimativas ótimas para a convergência de atratores. Este problema pode exigir um uso de novas técnicas e isto reservaremos a trabalhos futuros.

Atratores globais para sistemas dinâmicos autônomos

1.1 Noções básicas

Nesta seção introduziremos a noção de atrator global para semigrupos não lineares (sistemas dinâmicos autônomos) dissipativos. No que segue (X, d) é um espaço métrico completo e $\mathcal{C}(X)$ é o conjunto das aplicações contínuas de X em si próprio.

Definição 1.1. *Um semigrupo não linear (sistema dinâmico autônomo) em $\mathcal{C}(X)$ é uma família de aplicações $\{T(t); t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ que verifica as propriedades:*

- (i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X ;
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geq 0$;
- (iii) A aplicação $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

No caso em que X é um espaço de Banach e $T(t)$ é linear, diz-se que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um *semigrupo linear fortemente contínuo* em $\mathcal{L}(X)$. Aqui, $\mathcal{L}(X)$ denota o conjunto dos operadores lineares limitados de X em si próprio com a topologia uniforme dos operadores. Se este é o caso, temos uma vasta literatura, sugerimos [7, 9, 10].

De volta à Teoria de atratores, seguimos com a definição de órbita.

Definição 1.2. *Por um ponto x em X , define-se a órbita positiva $\gamma^+(x)$ por x como sendo $\gamma^+(x) := \{T(t)x; t \geq 0\}$. Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^+(x) := \{T(t)x; t \geq s\}$ a órbita positiva por x no instante s .*

Uma *solução para trás* por $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $t \leq 0$ vale $T(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $0 \leq s \leq -t$. Uma *solução global* por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $T(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $s \geq 0$.

Caso X seja um espaço de Banach de dimensão infinita, *soluções para trás* ou *globais*, em geral, não existem e sua existência está condicionada à escolha de x . Além disso, quando uma *solução para trás* existe, ela pode não ser única, isto ocorre, pois $T(t)$ não é necessariamente injetivo para todo $t > 0$.

Definição 1.3. Se existir uma solução para trás por $x \in X$, então definimos a órbita negativa por x como sendo

$$\gamma^-(x) := \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$$H(t, x) = \{y \in X; \text{ existe uma solução para trás por } x, \text{ definida por } \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ com } \phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}.$$

Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^-(x) := \bigcup_{t \geq s} H(t, x)$ a órbita negativa por x no instante s .

Definição 1.4. A órbita completa por x (se existir órbita negativa por x) é definida por $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Para um subconjunto B de X , definamos as órbitas positiva, negativa e completa por B (se existir a órbita negativa para cada $x \in B$), respectivamente, como sendo

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \quad \text{e} \quad \gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

Fixado $s > 0$, também usaremos as notações

$$\gamma_s^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^+(x) \quad \text{e} \quad \gamma_s^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^-(x).$$

Definição 1.5. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito limitado, se $\gamma^+(B)$ for limitada sempre que B for um subconjunto limitado de X .

Definição 1.6. Seja B um subconjunto de X . Definimos os conjuntos ω -limite e α -limite de B , respectivamente, como sendo

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)}^1 \quad \text{e} \quad \alpha(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(B)}.$$

Em particular, os conjuntos ω -limite e α -limite de um ponto $x \in X$, respectivamente, são dados por

$$\omega(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(x)} \quad \text{e} \quad \alpha(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(x)}.$$

Os conjuntos α -limite e ω -limite de um ponto constituem as regiões do espaço onde “nascem” e “morrem” as órbitas deste ponto, respectivamente.

¹Se Ω é um subconjunto de X , então $\overline{\Omega}$ denota o seu fecho em X .

Vale notar a seguinte caracterização do conjunto ω –limite de um subconjunto B de X ,

$$\omega(B) = \{y \in X; \text{ existem seqüências } \{t_n\} \text{ em } [0, +\infty), t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } \{x_n\} \text{ em } B, \text{ com } y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n\}$$

Agora, definamos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo. Para isto, recordemos a definição da *semidistância de Hausdorff*, $\text{dist}(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X . A saber

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Observação 1.7. $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ não é simétrica e a igualdade $\text{dist}(A, B) = 0$ não implica que $A = B$. Se A é um subconjunto de B em X , então $\text{dist}(A, B) = 0$. A distância simétrica de Hausdorff, $\text{dist}_H(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X é definida por

$$\text{dist}_H(A, B) := \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, A).$$

Definição 1.8. Sejam A e B subconjuntos de X . Diremos que A atrai B sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Ou equivalentemente, para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon, B) > 0$ tal que $T(t)B$ está contido em $\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \cup_{x \in A} \{z \in X; d(z, x) < \varepsilon\}$ para todo $t \geq T$.

Se existir um $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, então diremos que A absorve B sob o semigrupo. Em particular, pela Observação 1.7, se A absorve B , então A atrai B .

Definição 1.9. Diremos que um subconjunto A de X é invariante (ou positivamente invariante ou negativamente invariante) com relação ao semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ quando para qualquer $x \in A$, existir uma órbita completa $\gamma(x)$ por x tal que $\gamma(x) \subset A$ (ou tal que $\gamma^+(x) \subset A$ ou tal que $\gamma^-(x) \subset A$).

Observação 1.10. Um subconjunto A de X é invariante sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ se, e somente se, $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.

Exemplo 1.11. Os conjuntos ω e α –limites de um subconjunto de X são invariantes.

Definição 1.12. Um equilíbrio (ponto de equilíbrio) para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \geq 0$. A aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto x^* \in X$ é dita uma solução estacionária ou solução de equilíbrio para o semigrupo.

Lema 1.13. Sejam K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}$ uma seqüência em X com $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K) = 0$. Então, $\{x_n\}$ possui uma subseqüência convergente. Se um conjunto compacto K atrai um conjunto compacto K_1 sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, então $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $d(x_n, K) = d(x_n, c_n)$ para algum $c_n \in K$. Existe uma subsequência $\{c_{n_j}\} \subset \{c_n\}$ com $c_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j}$, para algum $c_0 \in K$. Além disso, $\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, K) = 0$, onde

$$d(x_{n_j}, K) = d(x_{n_j}, c_{n_j}) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = c_0$, pois para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$d(x_{n_j}, c_0) \leq d(x_{n_j}, c_{n_j}) + d(c_{n_j}, c_0) = d(x_{n_j}, K) + d(c_{n_j}, c_0).$$

Quanto a segunda afirmação, tome $\{y_n\} \subset \gamma^+(K_1)$, onde $y_n = T(t_n)x_n$, $x_n \in K_1$. Pela compacidade de K_1 , existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$, $x \in K_1$. Se existir $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$, com $\lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j} = t$, então $\lim_{j \rightarrow \infty} T(t_{n_j})y = T(t)x$ para todo $y \in X$, o que implica, que $y_{n_j} = T(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para $T(t)x$ quando j tende ao infinito. Por outro lado, se $t_n \rightarrow \infty$, então usamos a primeira afirmação e concluímos que toda seqüência em $\gamma^+(K_1)$ possui uma subsequência convergente.

A compacidade de $\overline{\gamma^+(K_1)}$ implica que $\omega(K_1)$ é não vazio. Além disso, seja $x \in \omega(K_1)$, então existem $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\{x_n\}$ em K_1 tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$. Como K_1 é atraído por K e

$$d(x, K) \leq d(x, T(t_n)x_n) + d(T(t_n)x_n, K) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos que $x \in K$. □

Lema 1.14. *Seja B um subconjunto de X tal que $\omega(B)$ seja compacto e $\omega(B)$ atrai B , então $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Quanto ao conjunto α -limite, se $\alpha(B)$ for compacto e $\text{dist}(H(t, B), \alpha(B)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\alpha(B)$ será invariante. Além disso, se $H(t, B)$ for conexo para cada t , então assim será $\alpha(B)$.*

Demonstração. Caso $\omega(B) \neq \emptyset$, da continuidade de $T(t)$ e a da caracterização apresentada ao conjunto ω -limite, temos $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Resta-nos observar que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$, então existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$ e $\{x_n\}$ em B tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$. Ora, como $t_n \rightarrow \infty$, para cada $t > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n > n_0$. Com isso, para $n > n_0$ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)T(t_n - t)x_n$ e pela atração de B pelo compacto $\omega(B)$, o Lema 1.13 assegura que $T(t_n - t)x_n$ admite uma subsequência convergente (ainda denotada por $T(t_n - t)x_n$), isto é, existe $y \in \omega(B)$ tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n - t)x_n$, o que implica, $x = T(t)y$, isto é, $x \in T(t)\omega(B)$.

Agora, suponhamos que B seja conexo. Se $\omega(B)$ fosse desconexo, então poderíamos escrever $\omega(B)$ como a união de dois compactos disjuntos. Sejam K_1 e K_2 compactos, não vazios e disjuntos tais que $\omega(B) = K_1 \cup K_2$. Como $\omega(B)$ atrai B , para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B)) \text{ para todo } t \geq M.$$

Uma vez que, $\mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B)) = \mathcal{O}_\varepsilon(K_1) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(K_2)$ com $\mathcal{O}_\varepsilon(K_1) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(K_2) = \emptyset$, temos $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K_i)$ para algum $i \in \{1, 2\}$ para todo $t \geq M$. Ora, como $\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)} \subset \overline{\gamma_M^+(B)}$, concluímos que $\omega(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K_i)$. Logo, $\omega(B) \subset K_i$, ou seja, K_j ($j \neq i$ em $\{1, 2\}$) é vazio. $\square$

Lema 1.15. *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto para algum $s_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Se para algum $s_0 > 0$, $\gamma_{s_0}^-(B)$ é não vazio e $\overline{\gamma_{s_0}^-(B)}$ é compacto, então $\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. A família $\{\overline{\gamma_s^+(B)}; s \geq s_0\}$ é formada por conjuntos compactos, não vazios e verifica a propriedade da interseção finita, então $\omega(B)$ é não vazio e compacto. Suponha que $\omega(B)$ não atraia B , então existem $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n; n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$ e $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para algum $y \in \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Veja que $y \in \omega(B)$. Logo, existe $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, \omega(B)) < \varepsilon \text{ para todo } j \geq j_\varepsilon,$$

o que é absurdo. $\square$

Lema 1.16. *Suponha que $x \in X$ tal que exista uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ por x e tal que $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ seja compacto. Defina*

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X; \text{ existe uma seqüência } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ tal que } \phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\}.$$

Então, $\alpha_\phi(x)$ é não vazio, compacto e invariante.

Demonstração. Note que $\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi((-\infty, -t])}$, disto segue que $\alpha_\phi(x)$ é não vazio e compacto. Além disso, se $x \in \alpha_\phi(x)$, então existem seqüências $t_n \rightarrow \infty$ e $\phi(-t_n) \rightarrow x$. Com isso, pela continuidade de $T(t)$, obtemos $\phi(-t_n + t) = T(t)\phi(-t_n) \rightarrow T(t)x$, e portanto, $T(t)x \in \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, sejam $t > 0$ e $y \in \alpha_\phi(x)$, então existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ (suponha que $t_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que $\phi(-t_n) \rightarrow y$. Como $\{\phi(-t_n - t); t \geq 0\}$ é relativamente compacto, passando para subsequência se necessário, existe $x \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \rightarrow x$, e portanto, $x \in \alpha_\phi(x)$. O que implica $T(t)x = y$. $\square$

Definição 1.17. *Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito assintoticamente compacto, se para cada fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ com $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $K = K(B) \subset B$ que atrai B .*

Lema 1.18. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ assintoticamente compacto e B um subconjunto de X não vazio tal que $\gamma_{s_0}^+(B)$ é limitada para algum $s_0 > 0$. Então, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B .*

Demonstração. Como $T(t)\gamma_{s_0}^+(B) \subset \gamma_{s_0}^+(B)$ para todo $t \geq 0$, da continuidade de $T(t) : X \rightarrow X$, temos $\omega(B) \subset \overline{T(t)\gamma_{s_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Como $T(t)$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ que atrai $\gamma_{s_0}^+(B)$, *a fortiori*, atrai $\gamma_{s_0}^+(B)$. Portanto, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\overline{T(t)\gamma_{s_0}^+(B)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(K)$ para todo $t \geq t_n$. Assim, $\omega(B) \subset K$. Como $\omega(B)$ é fechado e K é compacto, temos a compacidade de $\omega(B)$.

Suponha que $\omega(B)$ não atraia B , então existem $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\text{dist}(T(t_n), \omega(B)) > \varepsilon$. Segue da compacidade de K e do Lema 1.13 que existem subsequências $\{x_{n_j}\}$ e $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Por conseguinte, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B , e usando o Lema 1.14 concluímos a invariância. $\square$

Definição 1.19. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito *condicionalmente eventualmente compacto*, se para qualquer conjunto limitado B em X tal que $T(t)B$ é limitado para algum $t \geq 0$, temos $\overline{T(t)B}$ compacto. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito *eventualmente compacto* se ele é condicionalmente eventualmente compacto e para cada conjunto limitado B em X , existe $t \geq 0$ tal que $T(t)B$ é um conjunto limitado.

Teorema 1.20. Todo semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.

Demonstração. Seja $B \subset X$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$. Como $\{T(t); t \geq 0\}$ condicionalmente eventualmente compacto, temos $\overline{\gamma_s^+(B)}$ compacto para todo $s \geq 0$. Assim, segue do Lema 1.15 que $\omega(B) \subset B$ é não vazio, compacto e atrai B . $\square$

Definição 1.21. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito *ponto dissipativo* (limitado dissipativo, compacto dissipativo, localmente compacto dissipativo) se existe um subconjunto limitado B em X que atrai pontos (subconjuntos limitados, conjuntos compactos, vizinhanças de conjuntos compactos) de X .

Definição 1.22. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é dito um *atrator global* para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, se ele é compacto, invariante, e atrai subconjuntos limitados de X .

Um atrator global se encontra dentro de um conjunto atraente B , e em geral, é muito menor que B e descreve o comportamento assintótico das soluções de uma maneira mais precisa. Um subconjunto B de X é dito *atraente* se ele é capaz de atrair todo subconjunto limitado de X sob o semigrupo em questão. Um atrator $\mathcal{A}$ para $\{T(t); t \geq 0\}$ é o *conjunto maximal limitado invariante* para $\{T(t); t \geq 0\}$, isto significa que, se C é limitado e $T(t)C = C$ para todo $t \geq 0$ então $C \subset \mathcal{A}$, isto implica em particular que o atrator global para $\{T(t); t \geq 0\}$ se existir é único.

A compacidade implica que o atrator é um subconjunto topologicamente pequeno de X . A propriedade de atrair subconjuntos limitados significa que todo o comportamento assintótico do sistema acontece

perto de $\mathcal{A}$ e não só dentro de B como na propriedade de atração. Finalmente a invariância é determinante, já que diz que toda a dinâmica sobre o atrator $\mathcal{A}$ é invariante, isto é, $\mathcal{A}$ trabalha como um objeto dinâmico independente.

Observação 1.23. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo. Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Segue da definição de atrator que através de cada ponto $x \in \mathcal{A}$ existe uma solução global limitada $\phi_x: \mathbb{R} \rightarrow X$. Reciprocamente, toda solução global limitada para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ possui seu traço contido no atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo. Tendo dito isto, concluímos que*

$$\mathcal{A} = \{x \in X; \text{ existe uma solução global limitada por } x\}.$$

Lema 1.24. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Suponha que para cada subconjunto compacto B de X existe um $s_B \geq 0$ tal que $\gamma_{s_B}^+(B)$ é limitado. Então, o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{T(t); t \geq 0\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto B não vazio, fechado e limitado que absorve pontos de X . Seja $U = \{x \in B; \gamma^+(x) \subset B\}$. Como U absorve pontos, temos U não vazio. Claramente, $\gamma^+(U) \subset U$, e portanto, é limitado e absorve pontos.

Também, sabemos que $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ e que $\{T(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K , com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U , e portanto, K atrai pontos de X . O conjunto K atrai a si próprio (pois ele atrai $\overline{U}$ e $K \subset U$), e portanto, segue do Lema 1.13 que $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. O Lema 1.15 implica que $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai K . Portanto, $\omega(K)$ atrai K que atrai pontos de X , e por conseguinte, $\omega(K)$ atrai pontos de X .

No que segue, mostraremos que existe uma vizinhança V de $\omega(K)$ tal que $\gamma_s^+(V)$ é limitado para algum $s \geq 0$. Se este não é o caso, existem seqüências $\{x_n\} \subset X$, com $x_n \rightarrow y$, onde $y \in \omega(K)$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado. Considere $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, portanto $\overline{A}$ é compacto e $\gamma_s^+(A)$ é não limitado para cada $s \geq 0$. Isto contradiz a hipótese de que existe um t_A tal que $\gamma_{t_A}(A)$ é limitado.

Sejam V uma vizinhança de $\omega(K)$ e $t_V \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como $\omega(K)$ atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $s_x > 0$ tais que $T(t)\mathcal{O}_x \subset \gamma_{t_V}^+(V)$ para $s > s_x$, isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para todo $x \in X$. Com isso, segue que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t); t \geq 0\}$ é dissipativo compacto. $\square$

Lema 1.25. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo em X e K subconjunto compacto de X . Se K atrai a si próprio sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, então $\omega(K) = \cap_{t \geq 0} T(t)K$.*

Demonstração. Seja $y \in \cap_{t \geq 0} T(t)K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $t_n > n$ tal que $y \in T(t_n)K$. Logo, existe $x_n \in K$ tal que $y = T(t_n)x_n$. Com esta escolha, temos $t_n \rightarrow \infty$ e $\{x_n\}$ em K tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$, ou seja, $y \in \omega(K)$. Por outro lado, sejam $y \in \omega(K)$ e $t \geq 0$, então existem seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$

tais que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n$. Pela compacidade de K , existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $x_{n_j} \rightarrow x$, $x \in K$. Com isso, temos $T(t_{n_j})x \rightarrow T(t)x$, e usando o fato de que

$$d(y, T(t)x) \leq d(y, T(t_{n_j})x_{n_j}) + d(T(t_{n_j})x_{n_j}, K) + d(T(t_{n_j})x, K) + d(T(t_{n_j})x, T(t)x).$$

Podemos concluir que $y = T(t)x$, de onde concluímos que $y \in T(t)K$. $\square$

Definição 1.26. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito eventualmente limitado, se para cada subconjunto limitado B de X existe $s_B \geq 0$ tal que $\gamma_{s_B}^+(B)$ um subconjunto limitado de X .

O próximo teorema caracteriza os semigrupos que possuem atrator global.

Teorema 1.27. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.

Demonstração. Segue do fato de que $\{T(t); t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo, assintoticamente compacto e do Lema 1.24 que o semigrupo é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X . Considere $B = \{x \in C; \gamma^+(x) \subset C\}$. Então, $T(t)\bar{B} \subset \bar{B}$ e, como $\{T(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto compacto $K \subset \bar{B}$ que atrai B e conseqüentemente K atrai subconjuntos compactos de X . O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai subconjuntos compactos de X .

Seja B um subconjunto limitado de X , como $\{T(t); t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.18 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Como $\omega(B)$ é compacto e invariante, temos $\omega(B) \subset \mathcal{A}$, por conseguinte, $\mathcal{A}$ atrai B .

Não é difícil ver que, se $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global, então o semigrupo é limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. $\square$

Teorema 1.28. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto para $t \geq t_0$. Então, o semigrupo possui um atrator global $\mathcal{A}$.

Demonstração. Pelos Teorema 1.20 e Teorema 1.27 é suficiente mostrarmos que órbitas positivas de conjuntos limitados são eventualmente limitadas. Dado um conjunto limitado B , segue do fato de $\{T(t); t \geq 0\}$ ser eventualmente compacto que existe $t_B \geq 0$, com $t_0 \leq t_B$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Portanto, necessitamos mostrar apenas que órbitas positivas de subconjuntos compactos de X são limitadas. Sejam K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Pela continuidade de $T(t)$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tal que $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_{B_0})B_0$. Existe $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_p}\}$ que cobre K . Seja $t = t(K) = \max\{t_{x_i}; 1 \leq i \leq p\}$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\tilde{K}_0 = \cup_{t=0}^{t(K_0)} T(t)K_0$. Claramente K_0 e $\tilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X . Com isso, segue que $T(t)B_0 \subset K_0$ para todo $t \geq t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X , temos $T(t)K \subset K_0$ para $t \geq t(K)$. $\square$

Teorema 1.29. *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo linear fortemente contínuo. Suponha que $T(t) = S(t) + K(t)$ com $S(t) : X \rightarrow X$ e $K(t) : X \rightarrow X$ operadores lineares, satisfazendo:*

- (i) *Para cada conjunto limitado B em X , existe $t_B \geq 0$ tal que $K(t)B$ é relativamente compacto para cada $t \geq t_B$;*
- (ii) *Para cada conjunto limitado B em X , existe $t_B \geq 0$ tal que $\sup_{x \in B} \|S(t)(x)\|_X := s_B(t) < \infty$ para todo $t \geq t_B$ e $s_B(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Então, $\{T(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se $\{T(t); t \geq 0\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então possui um atrator global.

Demonstração. Dados um conjunto fechado, limitado e não vazio B tal que $T(t)B \subset B$ e $\varepsilon > 0$, escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \geq t_B$ e $s_B(t_k) < \varepsilon/2$. Como $K(t_k)B$ é relativamente compacto, existem $N = N(k, B)$ em $\mathbb{N}$ e $y_1, \dots, y_N$ em $K(t_k)B$ tais que $K(t_k)B \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$. Com isso

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{T(t)B} \subset \overline{T(t_k)B} = \overline{S(t_k)B + K(t_k)B} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + \overline{\bigcup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)} \subset \bigcup_{i=1}^N \overline{B_{\varepsilon}(y_i)}.$$

Como ε é arbitrário, $\omega(B)$ é totalmente limitado, e portanto, relativamente compacto. Note que $\omega(B)$ é não vazio (para cada seqüência $\{x_j\}$ em B e $t_j \geq 0$ com $t_j \rightarrow \infty$ a seqüência $\{T(t_j)x_j\}$ é totalmente limitada, e portanto, possui uma subseqüência convergente). Agora, procedendo como na prova do Lema 1.15, concluímos que $\omega(B)$ atrai B e isto prova que o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se o semigrupo é eventualmente limitado e ponto dissipativo, ele possui atrator global, conforme o Teorema 1.27. $\square$

1.2 Semigrupos gradientes e gradient-like

Nesta seção consideraremos os semigrupos chamados gradientes, veremos que os atratores destes semigrupos podem ser caracterizados. Além disso, note que fortalecemos a definição dada em [14], para garantir que $\phi(\cdot)$ é um equilíbrio exigimos apenas que $V(\phi(\cdot))$ deva ser constante sobre intervalos semi-infinitos.

Definição 1.30. *Um semigrupo não linear $\{T(t); t \geq 0\}$ é dito gradiente, quando existe uma função contínua $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (i) *Para cada $x \in X$ a aplicação $t \in [0, +\infty) \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é não decrescente;*
- (ii) *Se x em X tal que existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $x = \phi(0)$ e existe um $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(t)) = V(x)$ para todo $t \geq t^*$ ou para todo $t \leq t^*$, então x é um ponto de equilíbrio para o semigrupo.*

A função $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função de Lyapunov* para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$.

Lema 1.31. Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente e $\mathcal{E}$ é o conjunto dos seus pontos de equilíbrios, então $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$ para cada $x \in X$. Se existe uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ por x , então $\alpha_\phi(x)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}$. Além disso, se $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ e toda solução estacionária é isolada, então estas existem em número finito e para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é unitário. Se $x \in \mathcal{A}$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global por x , então $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário.

Demonstração. Supondo $\omega(x) \neq \emptyset$, temos $V(T(t)x) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, para cada $y \in \omega(x)$ temos $V(T(t)y) = c = V(y)$ e da propriedade (ii) na definição de semigrupo gradiente, temos $y \in \mathcal{E}$. Supondo que existe uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ por x . Se $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$. Sendo $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, para cada $y \in \alpha_\phi(x)$ temos $V(T(t)y) = c = V(y)$ e $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{E}$ é finito porque $\mathcal{E}$ é discreto. Resta-nos mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. Como $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos e o conjunto das soluções estacionárias é finito, segue que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários. $\square$

A seguir apresentaremos a definição de conjunto instável ao qual nos referiremos como variedade instável.

Teorema 1.32. Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente que é eventualmente limitado, assintoticamente compacto e possui um conjunto limitado $\mathcal{E}$ de equilíbrios. Então, $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$, onde

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X; \text{ existe uma solução para trás } \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ por } y, \text{ com } \phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \mathcal{E}\}$$

é chamada a variedade instável do conjunto $\mathcal{E}$, e $\phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \mathcal{E}$ significa que $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t), \mathcal{E}) = 0$. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ é finito, então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(y_i^*)$, onde

$$W^u(y_i^*) := \{y \in X; \text{ existe uma solução para trás } \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ por } y, \text{ com } \phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} y_i^*\}$$

é chamada a variedade instável de y_i^* . Finalmente, se existe um conjunto conexo limitado que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é conexo.

Demonstração. Como $\{T(t); t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto para cada $x \in X$ o conjunto ω -limite $\omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai x , segundo o Lema 1.18. Sendo $\{T(t); t \geq 0\}$ gradiente, temos $\omega(x) \subset \mathcal{E}$, e como $\mathcal{E}$ é limitado $\{T(t); t \geq 0\}$ é ponto dissipativo. Logo, $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global, pelo Teorema 1.27.

Se $x \in \mathcal{A}$, então existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x . Como $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, pelo Lema 1.16 $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$. Do Lema 1.31, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$. Se

$x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por x e $\phi(t) \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Sendo $\phi(\mathbb{R})$ invariante, temos $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ e conseqüentemente $x \in \mathcal{A}$. Isto mostra que $W^u(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Pelo Lema 1.31, se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ então $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n W^u(y_i^*)$ e se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo limitado de X , o Lema 1.14 implica que $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

Teorema 1.33. *Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ seja um semigrupo gradiente que possui um atrator global $\mathcal{A}$ e um número finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E} = \{y_i^*; 1 \leq i \leq n\}$. Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov associada ao semigrupo e $V(\mathcal{E}) = \{n_1, \dots, n_p\}$, com $n_i < n_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$.*

Se $1 \leq j \leq p-1$ e $n_j \leq r < n_{j+1}$, então $X_r = \{z \in X; V(z) \leq r\}$ é positivamente invariante sob $\{T(t); t \geq 0\}$ e $\{T_r(t); t \geq 0\}$, a restrição de $\{T(t); t \geq 0\}$ a X_r , possui atrator global $A^{(j)}$ dada por

$$A^{(j)} = \bigcup \{W^u(y_\ell^*); V(y_\ell^*) \leq n_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leq n_j$ para todo $z \in A^{(j)}$, $n_1 = \min\{V(x); x \in X\}$ e $A^{(1)} = \{x^ \in \mathcal{E}; V(x^*) = n_1\}$ consiste de pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis, isto é, para cada $x^* \in A^{(1)}$ vale a propriedade: para cada $x^* \in A^{(1)}$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para cada $x \in B_{\delta'}(x^*)$, temos $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$, e existe uma vizinhança $\mathcal{O}_{x^*}$ de x^* tal que $T(t)x \rightarrow x^*$ para cada $x \in \mathcal{O}_{x^*}$.*

Demonstração. Note que X_r é invariante sob o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$. Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t); t \geq 0\}$ notemos que ele herda de $\{T(t); t \geq 0\}$ as propriedades exigidas, isto é, que as órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r(t); t \geq 0\}$ é ponto dissipativo e $\{T_r(t); t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, $\{T_r(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t); t \geq 0\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Agora, provaremos a última afirmação. Seja $\delta_0 = 1/2 \min\{d(x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathcal{A}_1, x^* \neq y^*\}$. Se existir um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ em X e $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ em $[0, +\infty)$ tais que $x_k \rightarrow x^*$ e $d(T(t_k)x_k, \mathcal{A}_1) \geq \delta$ devemos ter que $\{T(t_k)x_k; k \in \mathbb{N}\}$ possui uma subseqüência convergente. De fato, se $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ é limitada, segue da continuidade de $T(t_k)$ que $\{T(t_k)x_k; k \in \mathbb{N}\}$ possui uma subseqüência convergente e se $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ é ilimitada o resultado segue da compacidade assintótica do semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$. Denotando esta subseqüência por $\{T(t_k)x_k; k \in \mathbb{N}\}$ e seu limite por y . Segue imediato do fato de que $V(x_k) \rightarrow n_1$ que $V(y) = n_1 = V(T(t_k)y)$.

Portanto, $y \in \mathcal{A}_1$ e $d(y, \mathcal{A}_1) \geq \delta$ o que é absurdo. Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para cada $x \in B_{\delta'}(x^*)$, temos $\gamma^+(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente de equilíbrios estáveis. Para concluir necessitamos apenas observar que, para cada $x \in X$, temos $T(t)x \rightarrow x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$ quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

Em geral, não se espera que uma perturbação de um semigrupo não linear gradiente dará origem a um

novo semigrupo não linear gradiente, a principal dificuldade é provar que o problema perturbado possui uma função de Lyapunov.

Definição 1.34. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Suponha que o conjunto das soluções estacionárias $\mathcal{E}$ de $\{T(t); t \geq 0\}$ é finito, isto é, para algum $p \in \mathbb{N}$, temos $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$. Se $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^p W^u(y_i^*)$, então dizemos que $\mathcal{A}$ é um atrator gradient-like e que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo com atrator gradient-like.*

De acordo com o Teorema 1.32, um semigrupo gradiente com atrator global e um número finito de equilíbrios é um semigrupo com atrator *gradient-like*. Esta é essencialmente a classe dos semigrupos para o qual um conhecimento detalhado da estrutura do atrator está disponível na literatura. Uma perturbação de um semigrupo com atrator *gradient-like* pode possuir um atrator que não é *gradient-like*. Isto nos leva a questionar sobre quais propriedades dinâmicas dos semigrupos seguem que estes possuem atratores *gradient-like* e se estas são estáveis sob perturbações. Pelo que vimos, tais propriedades devem ser satisfeitas pelos semigrupos gradientes e suas perturbações.

Com isto em mente, apresentaremos a noção de semigrupo *gradient-like*. Provaremos que as propriedades definidas para semigrupos *gradient-like* são estáveis sob perturbações.

Definição 1.35. *Consideremos um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$. Seja*

$$2\delta_0 = \min_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} d(y_i^*, y_j^*) > 0.$$

Sejam $\varepsilon_0 < \delta_0$, $y^ \in \mathcal{E}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Uma ε -cadeia de y^* para y^* é um subconjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\}$ de $\mathcal{E}$, juntamente com $\{y_1, \dots, y_k\}$ subconjunto de pontos de X e constantes $\{t_1, s_1, \dots, t_k, s_k\}$, $0 < s_i < t_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, tais que $d(y_i, y_{\ell_i}^*) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq k+1$, $y^* = y_{\ell_1}^* = y_{\ell_{k+1}}^*$, $d(T(s_i)y_i, \mathcal{E}) > \varepsilon_0$ e $d(T(t_i)y_i, y_{\ell_{i+1}}^*) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq k$. Diremos que $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeia, se existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma ε -cadeia de y^* para y^* para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Figura 01: Exemplo de ε -cadeia com $p = 3$

Definição 1.36. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e suponha que ele possui um atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que $\{T(t); t \geq 0\}$ é semigrupo gradient-like se as seguintes condições são satisfeitas:

(g.1) Dada uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), y_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), y_j^*) = 0;$$

(g.2) O conjunto $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.

As condições (g.1) e (g.2) são responsáveis por importantes propriedades dinâmicas do semigrupo (veja os Lemas 1.37 e 1.38 abaixo). Claramente, de (g.1), temos $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^p W^u(y_i^*)$, isto é, um semigrupo gradient-like é um semigrupo com atrator gradient-like. Também, a hipótese (g.2) diz que nenhum número finito de órbitas pode produzir um contorno fechado.

Todo semigrupo gradiente é um semigrupo gradient-like. Segundo o Teorema 1.50 abaixo, os semigrupos gradient-like são estáveis sob perturbações, por isso, uma perturbação de um semigrupo gradiente é um semigrupo gradient-like. Por exemplo, na seção 5 em [3] são dados exemplos perturbações regulares de um semigrupo gradiente que produzem semigrupos com atrator gradient-like, para os quais não sabemos exibir a função de Lyapounov.

Por outro lado, um atrator pode exibir a estrutura definida pela união finita das variedades instáveis em torno dos pontos de equilíbrios e para $u_0 \in X$ seu conjunto omega limite não ser exatamente formado por um único ponto de equilíbrio y_i^* . Assim as propriedades (g.1) e (g.2) não são válidas.

Já mencionamos que uma perturbação de um semigrupo com atrator gradient-like pode possuir um atrator que não é gradient-like. No entanto, este pode se comportar semicontinuaamente superiormente e inferiormente, isto mostra que a classe dos semigrupos com atrator gradient-like é maior que a classe

dos semigrupos *gradient-like*. Disto, concluímos que a noção de semigrupo *gradient-like* é intermediária entre a de semigrupo gradiente e a de semigrupo com atrator *gradient-like*.

Os próximos lemas são de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria dos atratores de semigrupos *gradient-like*. O primeiro resultado afirma que dados um semigrupo *gradient-like* $\{T(t); t \geq 0\}$, um subconjunto limitado B de X e uma vizinhança $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ do conjunto dos equilíbrios $\mathcal{E}$, existe $T = T(B, \mathcal{O}(\mathcal{E})) > 0$ tal que todas as soluções passando por pontos de B , visitam $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ antes do instante T .

Lema 1.37. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e suponha que ele possui um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t); t \geq 0\}$ satisfaz (g.1), dados $0 < \delta < \delta_0$ e B um subconjunto limitado de X , existe $T = T(\delta, B) > 0$ tais que*

$$\{T(t)u_0; 0 \leq t \leq T\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq \emptyset \text{ para todo } u_0 \in B.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo, que exista uma seqüência u_k em B e uma seqüência de números $t_k > 0$ (com $t_k \rightarrow \infty$) tal que $\{T(t)u_k; 0 \leq t \leq 2t_k\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \emptyset$. Extraíndo subsequências, existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $T(t + t_k)u_k \rightarrow \xi(t)$ quando $k \rightarrow \infty$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Claramente, $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\xi(t) \notin \bigcup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz (g.1). $\square$

O próximo resultado afirma que dados um semigrupo *gradient-like* $\{T(t); t \geq 0\}$, uma vizinhança $\mathcal{O}_2(x^*)$ de ponto de equilíbrio x^* , existe uma outra vizinhança $\mathcal{O}_1(x^*)$ de x^* tal que, se uma solução passa por $\mathcal{O}_1(x^*)$ e sai de $\mathcal{O}_2(x^*)$, então ela nunca voltar para $\mathcal{O}_1(x^*)$.

Lema 1.38. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo *gradient-like*. Denote por $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ suas soluções estacionárias e por $\mathcal{A}$ seu atrator global. Então, dado $0 < \delta < \delta_0$, existe $\delta' > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $t_1 > 0$, $d(T(t_1)u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $d(T(t)u_0, y_i^*) > \delta'$ para todo $t \geq t_1$.*

Demonstração. Se para algum $1 \leq i \leq p$, existe uma subsequência u_k em X com $d(u_k, y_i^*) < 1/k$ e seqüências $s_k < t_k$ de números positivos tais que $d(T(s_k)u_k, y_i^*) \geq \delta$ e $d(T(t_k)u_k, y_i^*) < 1/k$, então isto contradiz (g.2). $\square$

Este último lema pode ser ilustrado na figura abaixo, onde $T(t')u_0$ denota um ponto interior da bola $B_{\delta'}(y_i^*)$ e $T(t'')u_0$ um ponto com $t'' > 0$ suficientemente grande.

Figura 02: Ilustração do Lema 1.41

Agora, provaremos que para um semigrupo *gradient-like*, o ω –limite de um ponto consiste exatamente de um ponto de equilíbrio. Notemos que a condição (g.1) é imposta apenas para soluções nos atratores.

Lema 1.39. *Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ seja um semigrupo gradient-like com um conjunto de equilíbrio $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Dado $u \in X$, existe y_j^* tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)u = y_j^*$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.38, dado $r \in \mathbb{N}$ não nulo, existe $r' \in \mathbb{N}$ tal que $d(v, y_i^*) < 1/r'$ e, para algum $t_r > 0$, $d(T(t_r)v, y_i^*) \geq 1/r$, então $d(T(t)v, y_i^*) > 1/r'$ para todo $t \geq t_r$. Por outro lado, segue do Lema 1.37 que, dado $r \in \mathbb{N}$ não nulo, existe $s_r > 0$ tal que para cada $v \in \gamma^+(u)$, temos

$$\{T(t)v; 0 \leq t \leq s_r\} \cap \bigcup_{i=1}^p B_{1/r'}(y_i^*) \neq \emptyset.$$

Segue do fato de que $\mathcal{E}$ é finito, que existe $y_j^* \in \mathcal{E}$ e para cada $r \in \mathbb{N}$ não nulo um $\ell_r \in \mathbb{N}$ tal que $T(\ell)u \in B_{1/r}(y_j^*)$ para todo $\ell \geq \ell_r$. $\square$

Antes de continuarmos com a análise dos atratores de semigrupos *gradient-like* sob perturbações, estabeleceremos a equivalência entre a condição (g.2) e a ausência de estruturas homoclínicas.

Proposição 1.40. *Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ seja um semigrupo assintoticamente compacto. Sejam $\{s_k\}$ e $\{t_k\}$ seqüências em $(-\infty, 0]$, com $s_k, t_k \rightarrow -\infty$ e $\{u_k\}$ uma seqüência limitada em X . Para*

$\mathbb{J}_k = \{t \in \mathbb{R}; -s_k \leq t \leq t_k\}$, define $\xi^k : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ por $\xi^k(t) = T(t + s_k)u_k$ para todo $t \in \mathbb{J}_k$. Se o conjunto $\{T(t)u_k(t); k \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq s_k + t_k\}$ é limitado, então existe uma solução global $y : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ e uma subsequência de $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (que ainda denotaremos por $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$) tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t) = y(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

A prova da proposição acima é imediata do Lema 1.46 abaixo, no caso particular em que a família de semigrupos independente de parâmetros.

Definição 1.41. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e suponha que ele possui um atrator global $\mathcal{A}$. Uma estrutura homoclínica em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow X; 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que considerando $y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*$, temos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_i}^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Figura 03: Exemplo de estrutura homoclínica

O próximo resultado relaciona (g.1) e (g.2) com a não existência de estruturas homoclínicas.

Lema 1.42. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ e um atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t); t \geq 0\}$ satisfaz (g.1), então (g.2) é satisfeito se, e somente se $\mathcal{A}$ não possui uma estrutura homoclínica.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A}$ possui uma estrutura homoclínica, não é difícil ver que as soluções estacionárias são cadeias recorrentes.

Por outro lado, se $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeia, então existem $\delta < \delta_0$, $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_{r+1}}^*\} \subset \mathcal{E}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, com $k > 1/\delta$, pontos $y_1^k, \dots, y_{r+1}^k$ e $s_1^k > t_1^k, \dots, s_r^k > t_r^k$ tais que

$$d(y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \frac{1}{k}, \quad d(T(t_i^k)y_i^k, \mathcal{E}) > \delta, \quad d(T(s_i^k)y_i^k, y_{\ell_{i+1}}^*) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Escolhendo $\ell_i^k > 0$ tal que $d(T(\ell_i^k)y_i^k, y_{\ell_i}^*) \geq \delta$ e $d(T(t)y_i^k, y_{\ell_i}^*) < \delta$ para todo $0 \leq t < \ell_i^k$. Segue que $\ell_i^k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Para $t \in [\ell_i^k, +\infty)$, seja $\xi^{i,k}(t) = T(\ell_i^k + t)y_i^k$. Segue da Proposição 1.40, a existência de soluções globais $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X$. Como cada $\xi^{(i)}$ deve convergir para uma solução estacionária quando $t \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$ e como $\xi^{(i)}(t) \in B_\delta(y_{\ell_i}^*)$ para todo $t < 0$, temos $\xi^{(i)}(t) \rightarrow y_{\ell_i}^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Podemos assumir que, entre $-\ell_k^i$ e $s_i^k - \ell_k^i$, a solução $\xi^{k,i}$ permanece longe de $\mathcal{E} \setminus \{y_{\ell_i}^*, y_{\ell_{i+1}}^*\}$, pois caso contrário, poderíamos inserir novos pontos nas ε -cadeias até que este fosse o caso. Consequentemente, $\xi^{(i)}(t) \rightarrow y_{\ell_{i+1}}^*$ quando $t \rightarrow \infty$.

O conjunto $\{y_{\ell_1}^*, \dots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e o conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X; 1 \leq i \leq k\}$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_i}^* \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k,$$

com $y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*$. Portanto, $\mathcal{A}$ possui uma estrutura homoclínica. $\square$

Corolário 1.43. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like e $\mathcal{A}$ é seu atrator, então existem pontos de equilíbrio y_α^* e y_ω^* tal que y_α^* possui uma variedade estável trivial em $\mathcal{A}$, isto é, $W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) = \{y_\alpha^*\}$, onde*

$$W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) := \{y \in \mathcal{A}; T(t)y \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} y_\alpha^*\}$$

e y_ω^ possui uma variedade instável trivial, isto é, $W^u(y_\omega^*) = \{y_\omega^*\}$.*

Demonstração. Segue a prova da existência do ponto de equilíbrio y_ω^* com uma variedade instável trivial. A existência de y_α^* similar. Se $\mathcal{E} = \{y_1^*, \dots, y_p^*\}$ é o conjunto dos equilíbrios de $\{T(t); t \geq 0\}$ e para cada y_i^* , existe uma solução global $\xi^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\xi^{(i)}(t) \rightarrow y_i^*$ quando t converge para $-\infty$. Não é difícil ver que, existe $1 \leq \ell \leq p$ tal que $\{y_1^*, \dots, y_\ell^*\}$ e $\{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\ell)}\}$ definem uma estrutura homoclínica e que isto contradiz (g.2). $\square$

Lema 1.44. *Considere uma família $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, de semigrupos em X . Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ é contínua em $\eta = 0$. Seja $x^{*,\eta}$ um ponto fixo de $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$ e suponha que $x^{*,\eta} \rightarrow x^{*,0}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Dados $s > 0$ e $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que $T_\eta(t)B_\delta(x^{*,\eta}) \subset B_\varepsilon(x^{*,\eta})$ para todos $0 \leq t \leq s$ e $\eta \leq \eta_0$.*

Demonstração. Se este não é o caso, existe uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \rightarrow 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $y_k \in B_{1/k}(x^{*,\eta_k})$ e $t_0 \geq 0$ e sequência $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, t_0]$ tais que $d(T_{\eta_k}(s_k)y_k, x^{*,\eta_k}) \geq \varepsilon_0$. Podemos assumir que $s_k \rightarrow s_0$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $s_0 \in [0, t_0]$. Portanto, $d(T_0(s_0)x^{*,0}, x^{*,0}) \geq \varepsilon_0$, o que é absurdo. $\square$

Definição 1.45. *Diremos que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ é coletivamente assintoticamente compacta se, dada uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \rightarrow 0$, uma sequência limitada $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X e uma sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números não negativos com $t_k \rightarrow \infty$, temos $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ relativamente compacta.*

Lema 1.46. *Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ seja coletivamente assintoticamente compacto. Seja $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $(0, 1]$ tal que $\eta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Suponha que exista uma seqüência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números não negativos, com $t_k \rightarrow \infty$ e seja o intervalo $\mathbb{J}_k := \{t \in \mathbb{R}; |t| \leq t_k\}$. Se para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \rightarrow X$ de $\{T_{\eta_k}(t); t \geq 0\}$ e $\cup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{J}_k)$ limitado, então existe uma subseqüência ainda denotada por ξ_{η_k} e uma solução global $y : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k}(t) = y(t)$$

uniformemente para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Como $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ é coletivamente assintoticamente compacto, existe uma subseqüência que ainda denotaremos por η_k e $y_0 \in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(0) \rightarrow y_0$. Seja $y : [0, +\infty) \rightarrow X$ uma solução de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ definida por $y(t) := T_0(t)y_0, t \geq 0$. Pelo que vimos, esta é uma solução limitada, e para t em subconjuntos compactos de $[0, +\infty)$, temos

$$\xi_{\eta_k}(t) = T_{\eta_k}(t)\xi_{\eta_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T_0(t)y_0 = y(t).$$

Procedendo analogamente, $\{\xi_{\eta_k}(-1)\}$ possui uma subseqüência $\xi_{\eta_k^1}(-1)$ com limite y_{-1} . Definindo $y(t) := T_0(t+1)y_{-1}, t \geq -1$, temos $y(0) = T_0(1)y_{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\eta_k^1}(1)\xi_{\eta_k^1}(-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^1}(0) = y_0$ e $y(t) = T_0(t+1)y_{-1}$ para todo $t \geq -1$. Disto, temos $y : [-1, \infty) \rightarrow X$ uma solução de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ com $y(-1) = y_{-1}, y(0) = y_0$, e para t em subconjuntos compactos de $[-1, +\infty)$, temos

$$\xi_{\eta_k^1}(t) = T_{\eta_k^1}(t+1)\xi_{\eta_k^1}(-1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T_0(t+1)y_{-1} = y(t).$$

Supondo que

(i.) Podemos obter uma subseqüência $\{\xi_{\eta_k^i}\}_{k \in \mathbb{N}}$ para $1 \leq i \leq m-1$ com a propriedade que $\{\eta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subseqüência de $\{\eta_k^{i-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e tal que $\xi_{\eta_k^i}(-i) \rightarrow y_{-i}, 1 \leq i \leq m-1$.

(ii.) Podemos definir $y(t)$ por $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k^i}(t) = y(t), -m+1 \leq t < 0$, e conseqüentemente $y : [-m+1, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ com $y(-i) = y_{-i}, 0 \leq i \leq m+1$ e $\xi_{\eta_k^i}(t)$ converge para $y(t)$ uniformemente para t em subconjuntos compactos de $[-m+1, +\infty)$.

Agora, construiremos $\{\eta_k^m\}_{k=1}^\infty$ uma subseqüência de $\{\eta_k^{m-1}\}_{k=1}^\infty$ tal que $\xi_{\eta_k^m}(-m)$ é convergente e y_{-m} é seu limite. Se definirmos $y(-m) = y_{-m}$, então $y : [-m, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ com $y(-i) = y_{-i}, 0 \leq i \leq m$ e $\xi_{\eta_k^m}(t)$ converge para $y(t)$ uniformemente para t em compactos de $[-m, +\infty)$. Com isto, podemos construir uma seqüência $\{\xi_{\eta_k^k}\}_{k=1}^\infty$ e uma solução $y : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ com $y(-i) = y_{-i}, i \in \mathbb{N}$ e tal que $\xi_{\eta_k^k}(t) \rightarrow y(t)$ uniformemente para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. $\square$

Corolário 1.47. *Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ seja coletivamente assintoticamente compacto. Seja $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $(0, 1]$ tal que $\eta_k \rightarrow 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\xi_{\eta_k} : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global de*

$\{T_{\eta_k}(t); t \geq 0\}$. Se $\cup_{k \in \mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(\mathbb{R})$ é limitada, para cada seqüência $\mathbf{s} = \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, $\{\xi_{\eta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência que denotaremos por $\{\xi_{\eta_k^s}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e uma solução global $y^s : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\eta_k}(t + s_k) = y^s(t)$$

uniformemente para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Lema 1.48. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacta. Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e p soluções estacionárias com p independente de η . Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$ o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$. Se $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ uniformemente para (t, u) em subconjuntos compactos de $[0, +\infty) \times X$ e $\{T_0(t); t \geq 0\}$ gradient-like, $0 < \delta < \delta_0$ e $B \subset X$ limitado, existe $T = T(\delta, B) > 0$ independente de $\eta \in [0, 1]$, tal que $\{T_\eta(t)u_0; 0 \leq t \leq T\} \cap \cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) \neq \emptyset$ para todo $u_0 \in B$.*

Demonstração. Suponha que existem $\delta > 0$, uma seqüência $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em B , uma seqüência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[0, 1]$ com $\eta_k \rightarrow 0$ e uma seqüência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ com $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\{T_{\eta_k}(t)u_k; 0 \leq t \leq 2t_k\} \cap \cup_{i=1}^p B_\delta(y_i^*) = \emptyset$. Tomando subseqüências, existe $v_0 \in X$ tal que $T_{\eta_k}(t_k)u_k \rightarrow v_0$. Do fato de que $T_\eta(t)$ convergir para $T_0(t)$ uniformemente em subconjuntos compactos de X , temos $T_{\eta_k}(r + t_k)u_k \rightarrow T_0(r)v_0$ para todo $r \geq 0$. Logo, existem r_0 e $y_j^* \in \mathcal{E}$ tais que $d(T_0(r)v_0, y_j^*) < \delta$ para todo $r \geq r_0$. $\square$

Lema 1.49. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compactos. Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e p soluções estacionárias com p independente de η , e $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ uniformemente para (t, u) em subconjuntos compactos de $[0, +\infty) \times X$. Denote por $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$ o conjunto das soluções estacionárias de $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$. Dado $0 < \delta < \delta_0$, existem $\eta_0 > 0$ e $\delta' > 0$ tais que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $d(u_0, y_i^*) < \delta'$ e, para algum $t_1 > 0$, $d(T_\eta(t_1)u_0, y_i^*) \geq \delta$, então $d(T_\eta(t)u_0, y_i^*) > \delta'$ para todos $t \geq t_1$ e $\eta \in [0, \eta_0]$.*

Demonstração. Suponha que exista $\delta > 0$ tal que para algum $1 \leq i \leq p$, existem seqüências u_k em X e $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \rightarrow 0$, onde $d(u_k, y_i^*) < 1/k$ e seqüências $t_k < s_k$ de números não negativos tais que $d(T_{\eta_k}(t_k)u_k, y_i^*) \geq \delta$ e $d(T_{\eta_k}(s_k)u_k, y_i^*) < 1/k$. A seguir, mostraremos que isto contradiz (g.2).

Note que t_k pode ser escolhido de tal forma que $T_{\eta_k}(t)u_k \in B_\delta(y_i^*)$ para todo $t < t_k$ e, do Lema 1.44, $t_k \rightarrow \infty$. Tomando subseqüências, podemos construir uma solução global $\xi_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ tal que $\xi_0(\ell) \rightarrow y_i^*$ quando $\ell \rightarrow -\infty$. Do fato de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ ser gradient-like, existe $y_j^* \in \mathcal{E}$, $y_j^* \neq y_i^*$ tal que $\xi_0(\ell) \rightarrow y_j^*$ quando $\ell \rightarrow \infty$.

Da definição de ξ_0 e do fato de que $\xi_0(\ell) \rightarrow y_j^*$ quando $\ell \rightarrow \infty$, para cada $k' \in \mathbb{N}$, existe $u_{k'} \in \xi_0(\mathbb{R})$, com $d(u_{k'}, y_j^*) < 1/k'$ e $t_{k'} > 0$ tal que $d(T_{\eta_{k'}}(t_{k'})u_{k'}, y_j^*) \geq \delta$. Procedendo exatamente como na etapa anterior, obtemos uma solução $\xi_1 : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ tal que $\xi_1(\ell) \rightarrow y_j^*$ quando $\ell \rightarrow -\infty$. Segue do fato de $\{T_0(t); t \geq 0\}$ ser gradient-like, que existe $y_r^* \in \mathcal{E}$, $y_r^* \notin \{y_i^*, y_j^*\}$ tal que $\xi_1(\ell) \rightarrow y_r^*$ quando $\ell \rightarrow \infty$. Continuando este procedimento obtemos uma contradição. $\square$

A grande vantagem dos semigrupos *gradient-like* sobre os semigrupos gradientes é sua estabilidade sob perturbações. Este fato nos permitirá dar uma caracterização dos atratores de semigrupos que são pequenas perturbações de semigrupos gradientes, tais semigrupos perturbados são capazes de fornecer uma caracterização do atrator do semigrupo não perturbado.

Teorema 1.50. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$ uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacta, tal que*

- (i) *Para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;*
- (ii) *$\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \rightarrow 0$ quando η tende a zero, $1 \leq i \leq p$. Adicionalmente, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que a única solução global contida em $B_\delta(y_i^{*,\eta})$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$;*
- (iii) *Existe $\delta > 0$ tal que, se uma solução $\xi^{(\eta)}: \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}_\eta$ tal que $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) \leq \delta$, para todo $t \geq t_0$ (ou para todo $t \leq t_0$), $t_0 \in \mathbb{R}$, então $\xi^{(\eta)}(t) \rightarrow y_i^{*,\eta}$ quando $t \rightarrow \infty$ (ou $\xi^{(\eta)}(t) \rightarrow y_i^{*,\eta}$ quando $t \rightarrow -\infty$);*
- (iv) *$d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ uniformemente para (t, u) em subconjuntos compactos de $[0, +\infty) \times X$;*
- (v) *$\{T_0(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like.*

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ é gradient-like.

Demonstração. Argumentaremos por contradição para provar que para todo η suficientemente pequeno, o semigrupo $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ satisfaz a propriedade: dada uma solução global $\xi^{(\eta)}: \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}_\eta$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0 \text{ para algum } 1 \leq i \leq p.$$

Primeiro, note que $y_i^{*,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} y_i^{*,0} =: y_i^*$ e que existe um $\delta > 0$ tal que, para η suficientemente pequeno, se uma solução $\xi^{(\eta)}: \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}_\eta$ satisfaz $d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) \leq \delta$ para todo $t \geq t_0$ e para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então $\xi^{(\eta)}(t) \rightarrow y_i^{*,\eta}$. Suponha que existe uma sequência $\eta_k \rightarrow 0$ e uma solução global correspondente $\xi^{(k)}$ in $\mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que

$$\sup_{t \geq s} d(\xi^{(k)}(t), \mathcal{E}_{\eta_k}) > \delta \text{ para todo } s > 0 \quad (1.1)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando subsequências $\xi^{(k)}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi^{(0)}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, onde $\xi^{(0)}$ é uma solução global em $\mathcal{A}_0$. Como $\xi^{(0)}(t) \rightarrow y_i^*$ quando $t \rightarrow \infty$ para algum $1 \leq i \leq p$, dado $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existem $t_r > 0$ e $k_r \in \mathbb{N}$ tais que $d(\xi^{(k)}(t_r), y_i^{*,\eta_k}) < \frac{1}{r}$ para todo $k \geq k_r$. De (1.1), existe $t'_r > t_r$ tal que $d(\xi^{(k_r)}(t), y_i^*) < \delta$ para todo $t \in [t_r, t'_r]$ e $d(\xi^{(k_r)}(t'_r), y_i^*) \geq \delta$.

Tomando subsequências, se necessário, seja $\xi^{(1)}(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \xi^{(k_r)}(t + t'_r)$. Então, como $t'_r - t_r \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$ e $t_r \rightarrow \infty$, $d(\xi^{(1)}(t), y_i^*) \leq \delta$ para todo $t < 0$ e conseqüentemente $\xi^{(1)}(t) \rightarrow y_i^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Além disso, $\xi^{(1)}(t) \rightarrow y_j^*$ quando $t \rightarrow \infty$ com $i \neq j$ por (g.1) para $\eta = 0$. Do fato de que $\xi^{(k_r)}(t) \rightarrow \xi^{(1)}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos, para cada $m \in \mathbb{N}$, existem um instante $t_m > 0$ e um índice $k_m \in \mathbb{N}$

tais que $d(\xi(t_m)^{k_m}, y_j^*) < 1/m$ para todo $r \geq k_m$. Ainda, de (1.1), existe $t'_m > t_m$ tal que $d(\xi^{k_m}(t), y_j^*) < \delta$ para todo $t \in [t_m, t'_m]$ e $d(\xi^{k_m}(t'_m), y_j^*) \geq \delta$. Procedendo exatamente como antes obtemos uma solução global $\xi^{(2)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\xi^{(2)}(t) \rightarrow y_\ell^*$ com $\ell \notin \{i, j\}$. Em um número finito de etapas obtemos uma contradição. Isto prova que existe $t_0 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leq \eta_0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_i^{*,\eta}) = 0.$$

Para provar que existe $\eta_1 > 0$ tal que, para toda solução global $\xi^{(\eta)}$ em $\mathcal{A}_\eta$ com $\eta \leq \eta_1$, temos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi^{(\eta)}(t), y_j^{*,\eta}) = 0,$$

procedemos exatamente como fizemos acima. Isto completa a prova de que, para todo η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ satisfaz (g.1).

Agora, provaremos que para todo η suficientemente pequeno, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ satisfaz (g.2). Suponha, por absurdo, que existe uma seqüência finita $y_1^*, \dots, y_{q+1}^*$ em $\mathcal{E}$, um $0 < \delta < \delta_0$, uma seqüência $\eta_k \rightarrow 0$, soluções globais $\xi^{k,i}$ em $\mathcal{A}_{\eta_k}$, e instantes $t_1^k > s_1^k, \dots, t_q^k > s_q^k$ tais que

$$d(\xi^{k,i}(0), y_i^*) < \frac{1}{k}, \quad d(\xi^{k,i}(s_i^k), \mathcal{E}) \geq \delta, \quad d(\xi^{k,i}(t_i^k), y_{i+1}^*) < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq q, \quad y_1^* = y_{q+1}^*.$$

Como foi feito na prova de (g.1), construímos uma estrutura homoclínica para $\{T_0(t); t \geq 0\}$. □

Corolário 1.51. *Sob as condições do Teorema 1.50, existe um $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^p W^u(y_i^{*,\eta}) \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

Observação 1.52. *Até este ponto não usamos a hiperbolicidade dos equilíbrios y_i^* , $1 \leq i \leq p$. Portanto, os resultados são válidos, em alguns casos sem a hiperbolicidade. Nas aplicações, a hiperbolicidade dos pontos de equilíbrios para $\{T_0(t); t \geq 0\}$ é usada para provar as condições (ii) e (iii).*

Podemos substituir o conjunto finito de equilíbrios por uma família de conjuntos disjuntos invariantes isolados, adaptando a definição de semigrupo *gradient-like*. As provas são similares.

A fim de obter existência de atratores globais exponenciais, isto é, atratores globais cuja atração dos mesmos é do tipo exponencial, seguiremos de perto o tratamento explorado em [5] e [15].

Definição 1.53. *Diremos $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ é uma família de conjuntos invariantes isolados, se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*) = \emptyset$, $1 \leq i, j \leq p$, Ξ_i^* é invariante e é o maior subconjunto invariante de $\mathcal{O}_\delta(\Xi_i^*) := \{z \in X; d(z, \Xi_i^*) < \delta\}$.*

Definição 1.54. *Diremos que a família $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ de conjuntos invariantes isolados atrai pontos de X se a união $\bigcup_{\Xi_i^* \in \mathcal{S}} \Xi_i^*$ atrai cada ponto de X .*

Consideremos $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família de conjuntos disjuntos invariantes isolados $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$.

Definição 1.55. *Sejam δ e $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ fixos. Para $\Xi^* \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, uma ε -cadeia de Ξ^* para Ξ^* é uma seqüência $\{\Xi_{\ell_1}^*, \dots, \Xi_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{S}$, uma seqüência de números reais $t_1, \kappa_1, \dots, t_k, \kappa_k$, com $t_i > \kappa_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, e uma seqüência de pontos u_i , $1 \leq i \leq k$, tal que $u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_i}^*)$, $T(\kappa_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\cup_{i=1}^k \Xi_{\ell_i}^*)$ e $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi_{\ell_{i+1}}^*)$, $1 \leq i \leq k$, com $\Xi^* = \Xi_{\ell_{k+1}}^* = \Xi_{\ell_1}^*$. Diremos que $\Xi^* \in \mathcal{S}$ uma cadeia recorrente, se existem $\varepsilon_0 \in (0, \delta)$ e ε -cadeia de Ξ^* para Ξ^* para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Definição 1.56. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo e $\mathcal{A}$ um atrator global para o semigrupo. Diremos que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado, se existe uma família $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ de conjuntos invariantes isolados em $\mathcal{A}$ tal que*

(gg.1) *Para cada solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$, existem $1 \leq i, j \leq p$ tais que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi_i^*) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \Xi_j^*) = 0.$$

(gg.2) *Os elementos de $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ não são recorrentes por cadeia.*

Apresentamos as noções de conjuntos instáveis e estáveis. Vale ressaltar que faremos referência a estes conjuntos por variedades instáveis e estáveis, respectivamente.

Definição 1.57. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo. A variedade instável de um conjunto invariante isolado Ξ^* dado por*

$$W^u(\Xi^*) = \{\zeta \in X; \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ com } \xi(0) = \zeta \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi^*) = 0\}.$$

A variedade estável de um conjunto invariante isolado Ξ^ para $\{T(t); t \geq 0\}$ é dado por*

$$W^s(\Xi^*) = \{\zeta \in X; \lim_{t \rightarrow +\infty} d(T(t)\zeta, \Xi^*) = 0\}.$$

A variedade instável local $W_{\text{loc}}^u(\Xi^)$ de Ξ^* é dada por, dado $\varepsilon > 0$,*

$$W_{\text{loc}}^u(\Xi^*) = \{\zeta \in W^u(\Xi^*) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi^*); \text{ existe uma solução global } \xi(t) \text{ tal que } \xi(0) = \zeta, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \Xi^*) = 0 \text{ e } \xi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Xi^*) \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Os próximos resultados podem ser encontrados em [5], onde os autores tratam de sistemas dinâmicos dissipativos em espaços métricos gerais e provam a existência de semigrupos com fortes propriedades exponenciais de dissipatividade, sob algumas condições, como por exemplo, a existência de variedades instáveis locais exponencialmente atradoras de conjuntos compactos invariantes.

Lema 1.58. Suponha que $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ seja uma família de conjuntos invariantes isolados que atraí pontos de X e para cada $\Xi_i^* \in \mathcal{S}$, existam constantes positivas C_0, ρ_0 e δ_0 tais que

$$d(T(t)u_0, W_{loc}^u(\Xi_i^*)) \leq C_0 e^{-\rho_0 t}, \quad (1.2)$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ e $\gamma_{[0,t]}(u_0) \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ para todo $t \geq 0$.

Então, $\{T(t); t \geq 0\}$ é exponencialmente ponto dissipativo.

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{S}$ atraí pontos, para cada $u \in X$, existem um compacto isolado invariante Ξ_j^* e $t_u > 0$ tais que $\gamma^+(T(t_u)u) \subset \mathcal{O}_{\delta_j}(\Xi_j^*)$ e, conseqüentemente

$$d(T(t)v, W_{loc}^u(\Xi_j^*)) \leq C_0 e^{-\rho_0(t-t_u)}, \quad t \geq t_u.$$

Tomando o subconjunto limitado $B = \bigcup_{j=1}^k W_{loc}^u(\Xi_j^*)$ de X , temos

$$d(T(t)v, B) \leq C_0 e^{\rho_0 t_u} e^{-\rho_0 t}, \quad t \geq t_u.$$

□

Lema 1.59. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e B subconjunto de X que atraí pontos. Então, dados $u_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $r_0 > 0$ e $T > 0$ tais que $\{T(t)x; t \in [0, T]\} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(B) \neq \emptyset$ para todo $x \in \gamma^+(B_{r_0}(u_0))$.

Demonstração. Suponha que existam $\varepsilon > 0$ e seqüências $\{u_n\} \subset \gamma^+(B_{\frac{1}{n}}(u_0))$, $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tais que $\{T(t)u_n; t \in [0, t_n]\} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(B) = \emptyset$. Conseqüentemente, existem $\varepsilon > 0$ e seqüências $y_n \subset \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(x_0)$, $\{\tau_n\} \subset [0, \infty)$ tais que $\{T(t)T(\tau_n)y_n; t \in [0, t_n]\} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(B) = \emptyset$. Pelas hipóteses, existem $t_0 \geq 0$ e uma subsequência de $\{T(t_0 + \tau_n)y_n\}$ (que denotaremos a mesma) convergente para algum $z_0 \in X$. Se $\{\tau_n\}$ é limitada a última afirmação vale porque y_n converge, por outro lado, se $\{\tau_n\}$ é ilimitada, isto é uma conseqüência da compacidade assintótica.

Isto implica que existe um $T > 0$ tal que $\{T(t)z_0; t \in [T, +\infty)\} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(B) = \emptyset$, o que contraria o fato de que B atraí pontos. □

Lema 1.60. Suponha que a variedade instável local $W_{loc}^u(\Xi^*)$ de um conjunto invariante isolado qualquer Ξ^* em uma dada família de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S}$ é relativamente compacta. Se $\gamma_{[\tau_1, \tau_2]}(v) \subset W_{loc}^u(\Xi^*)$ para alguns v, τ_1, τ_2 , então para cada $t \in [\tau_1, \tau_2]$ então existem pelo menos um ponto $w \in \overline{W_{loc}^u(\Xi^*)}$ tal que

$$d(T(t)v, w) = d(T(t)v, W_{loc}^u(\Xi^*)).$$

Em particular, a aplicação $\psi_{j, \tau_1, \tau_2} : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \overline{W_{loc}^u(\Xi^*)}$ pode ser escolhida, tal que

$$d(T(t)v, \psi_{j, \tau_1, \tau_2}(t)) = d(T(t)v, W_{loc}^u(\Xi^*)).$$

Demonstração. O resultado segue do fato de que, para cada $t \geq 0$, o valor de $d(T(t)v, W_{loc}^u(\Xi^*))$ pode ser aproximado de uma seqüência $\{d(T(t)v, v_n)\}$, onde $\{v_n\} \subset W_{loc}^u(\Xi^*)$. $\square$

Lema 1.61. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo gradient-like generalizado com um atrator global $\mathcal{A}$ e uma família de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{E} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ em $\mathcal{A}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se para algum $1 \leq i \leq p$, $d(u_0, \Xi_i^*) < \delta$ e, para algum $t_1 > 0$, $d(T(t_1)u_0, \Xi_i^*) \geq \varepsilon$, então $d(T(t)u_0, \Xi_i^*) > \delta$ para todo $t \geq t_1$.*

Demonstração. A prova deste resultado segue essencialmente da condição (gg.2). Suponha que existam um $\varepsilon > 0$, uma seqüência $\{u_n\}$ in X com $u_n \rightarrow \Xi_i^* \in \mathcal{S}$ quando $n \rightarrow \infty$, e seqüências $\{t_n\}$ e $\{\tau_n\}$ em $[0, \infty)$ com $\tau_n > t_n$, $d(T(t_n)x_n, \Xi_i^*) \geq \varepsilon$ e $d(T(\tau_n)x_n, \Xi_i^*) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, Ξ_i^* é uma cadeia recorrente relativa a $\mathcal{S}$, o que é absurdo. $\square$

Lema 1.62. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com uma família de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$ que atrai pontos de X , onde cada $\Xi_i^* \in \mathcal{S}$ verifica a propriedade (1.2) e que dado qualquer ponto v_0 , existe uma bola $\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0))$ é limitado e, para algumas constantes c_0 e $L_0 > 0$, temos*

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c_0 e^{L_0 t} d(w_1, w_2) \text{ para todos } w_1, w_2 \in \gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0)), t \geq 0. \quad (1.3)$$

Então, o conjunto $B = \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\overline{W_{loc}^u(\Xi_j^)})$ é limitado e dado qualquer $v_0 \in X$, existe $r > 0$ tais que a condição (α) abaixo é satisfeita.*

(α) Para qualquer $v \in \mathcal{O}_r(v_0)$, podemos construir uma aplicação $\tilde{u} : [0, +\infty) \rightarrow B$ com

$$d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq \tilde{c} e^{-\tilde{\gamma} t}, \quad t > 0.$$

onde $\tilde{c}$ e $\tilde{\gamma}$ são constantes que dependem somente de c, γ, L, T (assim, possivelmente de $\mathcal{O}_r(v_0)$), mas independente de v variando em $\mathcal{O}_r(v_0)$.

Demonstração. Fixado $x_0 \in X$. Primeiro, observe que temos constantes $c, L, r > 0$ tais que, para todos $w_1, w_2 \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0) \cup \bigcup_{j=1}^k \overline{W_{loc}^u(\Xi_j^*)})$ e para qualquer $t \geq 0$, temos

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c e^{L t} d(w_1, w_2). \quad (1.4)$$

Também, existem constantes $\delta, \gamma > 0$ e $c > 0$, sem perda de generalidade, podemos escolher as mesmas constantes acima, tais que

$$d(T(t)v, W_{loc}^u(\Xi_j^*)) \leq c e^{-\gamma t} \text{ para todo } j = 1, \dots, k, \quad (1.5)$$

sempre que $v \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*)}$, e por conseguinte, para todo $t \geq 0$ temos $\gamma_{[0,t]}^+(v) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi_j^*)}$.

Segue do Lema 1.61, que para todo δ suficientemente pequeno, existem $\delta' = \delta'(\delta) < \delta$ e $\eta_0 > 0$ tais que, se $v \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j^*)$, e para algum $t_1 > 0$

$$T(t_1)v \notin \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j^*),$$

então, para todo $t \geq t_1$, temos

$$T(t)v \notin \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_j^*).$$

Recorde, que pelo Lema 1.59, existem $r(\delta', v_0) > 0$ e $T = T(\delta', v_0)$ tais que, para todo $v \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))$, temos

$$T(t)v \in \mathcal{O}_{\delta'} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_{\delta'}(Y_j^*) \text{ para algum } t \leq T.$$

Assim, dado $v \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))$, existem seqüências $\{t_{i(j)}^-\}_{i=0}^m$, $\{t_{i(j)}^+\}_{i=0}^m$ e $\{\Xi_{i(j)}^*\}_{j=0}^m$ tais que $i(j) \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq j \leq m \leq k$,

$$t_{i(1)}^- \leq T, \quad 0 < t_{i(j)}^- - t_{i(j-1)}^+ \leq T, \quad 1 \leq j \leq m, \quad t_m^+ = +\infty$$

o que implica $T(t)v \in \mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_{i(j)}^*)$ para todo $t \in [t_{i(j)}^-, t_{i(j)}^+)$, $T(t_{i(j)}^+)v \in \overline{\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_{i(j)}^*)}$ e $j \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Aqui, enfatizamos o fato de que T não depende de $v \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))$, que $t_{i(j)}^-$ é o tempo em que $T(t)v$ entra em $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_{i(j)}^*)$ e $t_{i(j)}^+$ é (para $j < m$) o tempo em que $T(t)v$ sai de $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_{i(j)}^*)$ passando por sua fronteira e nunca mais retornando para $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_{i(j)}^*)$ e que $t_{i(j)}^\pm$ podem realmente depender de v . Também enfatizaremos que δ pode ser escolhido inicialmente tão pequeno quanto desejarmos, em particular, todas as bolas $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi_i^*)$, $i = 1, \dots, k$, são consideradas disjuntas.

Seguiremos próximo a “sombra” da órbita de um dado ponto em uma vizinhança de um conjunto compacto invariante $\Xi_j^* \in \mathcal{S}$ com o auxílio de uma certa função tomando valores no conjunto

$$B := \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\overline{W_{loc}^u(\Xi_j^*)}) \subset \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon_j}(\Xi_j^*)).$$

Uma vez que, os valores de ε_j podem ser escolhidos tão pequenos quanto desejarmos, concluiremos que B é um conjunto limitado.

Trabalharemos agora a fim de provar a condição (α) é satisfeita.

Escolhendo qualquer $v \in \mathcal{O}_r(v_0)$. Então, a órbita positiva através de v visita a vizinhança de algum dos conjuntos compactos invariantes que pertencem a $\mathcal{S}$. Enumeraremos tais conjuntos por $\Xi_1^*, \dots, \Xi_m^*$, onde $m \leq k$ é o número de elementos de $\mathcal{S}$ com uma vizinhança visitada pela órbita de v (veja acima). É verdade que essa enumeração, bem como o número m na realidade depende de v , no entanto, isto não diminui a generalidade da consideração.

No intervalo $[0, t_1^+]$ com auxílio do Lema 1.60 selecionamos uma aplicação ψ_{1, t_1^-, t_1^+} e para escolhas arbitrárias de $y_1^* \in \Xi_1^*$ definimos

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} y_1^*, & t \in [0, t_1^-), \\ \psi_{1, t_1^-, t_1^+}(t), & t \in [t_1^-, t_1^+]. \end{cases}$$

Pelas nossas hipótese, temos

$$\begin{aligned} d(T(t)v, \tilde{u}(t)) &\leq \sup_{w \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))} d(w, y_1^*) e^{\gamma T} e^{-\gamma t} =: \tilde{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad t \in [0, t_1^-), \\ d(T(t)v, \tilde{u}(t)) &\leq c e^{-\gamma(t-t_1^-)} \leq c e^{\gamma T} e^{-\gamma t} =: \hat{c}_1 e^{-\gamma t}, \quad t \in [t_1^-, t_1^+], \end{aligned}$$

e denotaremos o próximo

$$c_1 = \max\{\tilde{c}_1, \hat{c}_1\}, \quad t_0^+ := 0, \quad t_0^1 := t_1^+, \quad \eta_1 := \gamma.$$

Tendo feito isto, definimos passo a passo

$$\eta_j = \frac{\eta_{j-1}^2}{L + 2\eta_{j-1}} \quad \text{e} \quad t_j^0 = \min \left\{ \frac{L + 2\eta_{j-1}}{L + \eta_{j-1}} t_j^-, t_j^+ \right\}, \quad j = 2, \dots, m. \quad (1.6)$$

e extendemos $\tilde{u}$ para toda a semireta $[0, \infty)$ definindo

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} T(t - t_{j-1}^+) \tilde{u}(t_{j-1}^+), & t \in [t_{j-1}^+, t_j^-), \\ T(t - t_j^-) T(t_j^- - t_{j-1}^+) \tilde{u}(t_{j-1}^+), & t \in [t_j^-, t_j^0], \\ \psi_{j, t_j^-, t_j^+}(t), & t \in (t_j^0, t_j^+] \end{cases}$$

Mostraremos que, para cada $j = 2, \dots, m$, vale a seguinte afirmação: Se $d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq c_{j-1} e^{-\eta_{j-1}t}$ para $t \in [t_{j-2}^+, t_{j-1}^+]$ com algum $c_{j-1} > 0$, então, $d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq c_j e^{-\eta_j t}$ para $t \in [t_{j-1}^+, t_j^+]$ com algum $c_j > 0$, onde para $j = m$, temos $[t_{m-1}^+, t_m^+] := [t_{m-1}^+, \infty)$.

Finalmente, pelas nossas hipóteses, para todo $t \in [t_{j-1}^+, t_j^-]$, temos

$$\begin{aligned} d(T(t)v, \tilde{u}(t)) &\leq c e^{L(t-t_{j-1}^+)} d(T(t_{j-1}^+)v, \tilde{u}(t_{j-1}^+)) \\ &\stackrel{(i)}{\leq} c c_{j-1} e^{L(t-t_{j-1}^+) - \eta_{j-1} t_{j-1}^+} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Antes de prosseguirmos com as estimativas, note que se t_j^0 é considerado como um elemento variável do intervalo $(t_j^-, t_j^+]$, então as duas afirmações abaixo valem

$$\begin{aligned} d(T(t)v, \tilde{u}(t)) &\leq c e^{L(t-t_j^-)} d(T(t_j^-)v, T(t_j^- - t_{j-1}^+) \tilde{u}(t_{j-1}^+)) \\ &\stackrel{(1.7)}{\leq} c c_{j-1} e^{LT} e^{L(t-t_j^-) - \eta_{j-1} t_{j-1}^+} \leq c c_{j-1} e^{(L+\gamma)T} e^{L(t-t_j^-) - \eta_{j-1} t_j^-}, \quad t \in [t_j^-, t_j^0] \end{aligned} \quad (1.8)$$

e

$$d(T(t)v, \psi_{j, t_j^-, t_j^+}(t)) \leq c e^{-\gamma(t-t_j^-)} \leq c e^{-\eta_{j-1}(t-t_j^-)}, \quad t \in [t_j^-, t_j^+]. \quad (1.9)$$

Por (1.8) e (1.9), notemos que t_j^0 sempre se encontra no intervalo (t_j^-, t_j^+) e os expoentes do lado direito se tornam iguais. Com isso, sempre que $t_j^0 \in (t_j^-, t_j^+)$, temos

$$[L(t - t_j^-) - \eta_{j-1}t_j^-]_{|t=t_j^0} = [-\eta_{j-1}(t - t_j^-)]_{|t=t_j^0}.$$

De fato, podemos inferir que

$$L(t - t_j^-) - \eta_{j-1}t_j^- \leq -\eta_j t, \quad t \in [t_j^-, t_j^0]. \quad (1.10)$$

$$-\eta_{j-1}(t - t_j^-) \leq -\eta_j t, \quad t \in (t_j^0, t_j^+]. \quad (1.11)$$

Temos agora todas as ferramentas prontas para completar o processo de estimativa. Com efeito, a partir de (1.8) e (1.10) obtemos

$$d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T}e^{-\eta_j t}, \quad t \in [t_j^-, t_j^0]$$

onde (1.9) e (1.11) asseguram que

$$d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq ce^{-\eta_{j-1}(t-t_j^-)} \leq ce^{-\eta_j t}, \quad t \in (t_j^0, t_j^+]$$

Uma vez que, (1.7) estendemos para a estimativa

$$d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq cc_{j-1}e^{L(t-t_{j-1}^+) - \eta_{j-1}(t_{j-1}^+ - t + t)} \leq cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T}e^{-\eta_j t}, \quad t \in [t_{j-1}^+, t_j^-]. \quad (1.12)$$

Com isso,

$$d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq c_j e^{-\eta_j t}, \quad t \in [t_{j-1}^+, t_j^+], \quad c_j = \max\{c, cc_{j-1}e^{(L+\gamma)T}\}.$$

Agora, a prova da condição (α) está completa e o restante da prova do lema em questão, segue. Com efeito, de acordo com a condição (α) , para qualquer $v \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))$ temos uma aplicação $\tilde{u}$ com valores $\tilde{u}(t) \in B = \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\overline{W_{loc}^u(\Xi_j^*)}) \subset \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon_j}(\Xi_j^*))$. Assim, para cada $v \in \gamma^+(\mathcal{O}_r(v_0))$, temos

$$d(T(t)v, B) \leq d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq c_m e^{\eta_m t}, \quad t \geq 0$$

com c_m dependente de c, γ, L, T , mas não de $v \in \mathcal{O}_r(v_0)$. □

Observação 1.63. Com o processo usado acima para obtenção do expoente que define a atração exponencial, definido recurssivamente em (1.6), temos uma “perda” no valor do mesmo a cada interação, e isto resultará numa “perda” da taxa de atração dos atratores, conforme veremos nos resultados abaixo, veja o Corolário 1.64, o Lema 1.66, o Teorema 1.67 e o Teorema 1.68.

Corolário 1.64. *Nas condições do Lema 1.66, seja $B = \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\overline{W_{loc}^u(\Xi_j^*)})$. Então, dado qualquer conjunto compacto $K \subset X$, existem constantes $c_K, \eta_K > 0$ tais que a condição:*

(β) *Para algum conjunto aberto $\mathcal{O}(K)$ contendo K e para qualquer $v \in \mathcal{O}(K)$, temos*

$$\text{dist}(T(t)v, B) \leq c_K e^{-\eta_K t}, \quad t \geq 0 \quad (1.13)$$

é satisfeita.

Demonstração. Pelo Lema 1.66, dado $v_0 \in X$, existem $r_{v_0}, c_{v_0} > 0$ e $\eta_{v_0} > 0$ tais que, para cada $v \in \mathcal{O}_{r_{v_0}}(v_0)$ é possível escolher $\tilde{u} : [0, +\infty) \rightarrow B$ satisfazendo

$$d(T(t)v, B) \leq d(T(t)v, \tilde{u}(t)) \leq c_{v_0} e^{-\eta_{v_0} t}, \quad t \geq 0.$$

Se K é compacto, então $K \subset \bigcup_{n=1}^N \mathcal{O}_{r_{v_n}}(v_n) =: \mathcal{O}(K)$, onde $v_n \in K$ e r_{v_n} são escolhidos de acordo com o Lema 1.66 como mencionamos acima. Sejam

$$c_K := \max_{n=1, \dots, N} \{c_{v_n}\} \text{ e } \eta_K = \min_{n=1, \dots, N} \{\eta_{v_n}\}$$

do que foi dito acima, obtemos

$$d(T(t)v, B) \leq c_K e^{-\eta_K t}, \quad t \geq 0, \quad v \in \mathcal{O}(K). \quad (1.14)$$

□

Observemos que devido a [11] (veja também [22]), temos o seguinte resultado.

Proposição 1.65. *Suponha que $\mathcal{S}$ é uma família de subconjuntos de X e que $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo assintoticamente compacto que possui a propriedade de que existe um conjunto limitado B_0 em X que atrai cada elemento de $\mathcal{S}$. Então, existe um subconjunto compacto invariante J de X que atrai cada elemento de $\mathcal{S}$.*

Conseqüentemente,

Lema 1.66. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com uma família de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$ que atrai pontos de X , onde cada $\Xi_i^* \in \mathcal{S}$ verifica a propriedade (1.2) e que dado qualquer ponto v_0 , existe uma bola $\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0))$ é limitado e, para algumas constantes c_0 e $L_0 > 0$, temos*

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c_0 e^{L_0 t} d(w_1, w_2) \text{ para todos } w_1, w_2 \in \gamma^+(\mathcal{O}_{\varepsilon(v_0)}(v_0)), t \geq 0. \quad (1.15)$$

Então, o semigrupo é localmente compacto dissipativo. Em particular, existe um conjunto (maximal) compacto invariante J que atrai exponencialmente uma vizinhança de um conjunto compacto dado, isto é, dado $K \subset X$ existe um conjunto aberto $\mathcal{O}(K)$ contendo K tal que

$$\text{dist}(T(t)\mathcal{O}(K), J) \leq C e^{-\rho t}, \quad t > 0. \quad (1.16)$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.64 o semigrupo é localmente compacto dissipativo. Uma vez que ele também é assintoticamente compacto, pela Proposição 1.65 existe um conjunto (maximal) compacto invariante J que atrai vizinhanças de conjuntos compactos. Tal $\mathcal{A}$ é a união de soluções globais com traço relativamente compactos. Conseqüentemente, $\cup_{j=1}^k W_{loc}^u(\Xi_j^*) \subset J$ e então, pela compacidade e invariância de J , também

$$B = \bigcup_{j=1}^k \gamma^+(\overline{W_{loc}^u(\Xi_j^*)}) \subset J, \quad (1.17)$$

onde B é o mesmo da compacidade dissipativa local.

E pelo Corolário 1.64, obtemos constantes c_J e η_J e um aberto $\mathcal{O}(J)$ contendo J , tal que

$$d(T(t)v, J) \leq d(T(t)v, B) \leq c_J e^{-\eta_J t}, \quad t \geq 0, v \in \mathcal{O}(J). \quad (1.18)$$

Uma vez que, para cada K compacto, J atrai $\mathcal{O}(K)$, temos que dado um conjunto compacto K , existe t_K tal que $\gamma^+(T(t_K)\mathcal{O}(K)) \subset \mathcal{O}(J)$. Sejam $\rho = \frac{\eta_J}{2}$ e usando (1.18), para cada conjunto compacto K , obtemos

$$\text{dist}(T(t+t_K)\mathcal{O}(K), J) \leq c_J e^{-2\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (1.19)$$

Conseqüentemente, temos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\rho\tau} \text{dist}(T(\tau)\mathcal{O}(K), J) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} c_J e^{-\rho(\tau-t_K)} = 0. \quad (1.20)$$

Assim, cada $\mathcal{O}(K)$ é exponencialmente atraído por J com o mesmo expoente $\rho = \frac{\eta_J}{2}$. $\square$

Teorema 1.67. *Suponha que as seguintes condições são válidas:*

- (i) *O semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com órbitas limitadas de conjuntos limitados e com uma família finita de conjuntos disjuntos isolados invariantes $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$;*
- (ii) *A família de conjuntos invariantes isolados $\mathcal{S} = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\}$ atrai pontos de X ;*
- (iii) *O semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ satisfaz uma condição de Lipschitz da forma*

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c e^{Lt} d(w_1, w_2),$$

para todos $B \subset X$ limitado e $w_1, w_2 \in B$, onde $c, L > 0$;

- (iv) *Cada conjunto $\Xi_i^* \in \mathcal{S}$ verifica a propriedade (1.2).*

Então, o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo. De fato, existe um atrator global $\mathcal{A}$ que atrai exponencialmente, da seguinte forma, existem $\rho > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leq C e^{-\rho t}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Não é difícil ver que existe um atrator global $\mathcal{A}$ e que $J = \mathcal{A}$ já que estes dois conjuntos um atrai o outro. Dado um conjunto limitado B , existe $t_B \geq 0$ tal que $\gamma^+(T(t_B)B) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$, e de (1.19) obtemos de

$$\text{dist}(T(t + t_{\mathcal{A}})T(t_B)B, \mathcal{A}) \leq c_{\mathcal{A}} e^{-2\rho t}, \quad t \geq 0,$$

e então

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(\tau)B, \mathcal{A}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} c_{\mathcal{A}} e^{-\rho(\tau - 2t_{\mathcal{A}} - 2t_B)} = 0.$$

□

Para semigrupos compactos, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.68. *Suponha que $\{T(t); t \geq 0\}$ seja um semigrupo gradient-like generalizado, compacto para $t > t_0 \geq 0$ e que satisfaça a condição de Lipschitz (1.15). Suponha também que exista uma família finita $\mathcal{S}$ de conjuntos invariantes isolados que atrai ponto de X e que cada $\Xi_i^* \in \mathcal{S}$ verifica a propriedade (1.2). Então, $\{T(t); t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo. De fato, existe um atrator que atrai exponencialmente, da seguinte forma, existem $\rho > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leq Ce^{-\rho t}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.67 é suficiente notar que se o semigrupo é compacto para $t > t_0 \geq 0$ e ponto dissipativo, então órbitas de conjuntos limitados são limitas, e por conseguinte, existe um atrator global $\mathcal{A}$ que atrai exponencialmente subconjuntos limitados de X . □

Teorema 1.69. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$ uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compactos definidos em X . Suponha que*

- (i) *Para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;*
- (ii) *$\mathcal{A}_\eta$ possui um número finito de conjuntos invariantes isolados $S_\eta = \{\Xi_1^{*,\eta}, \dots, \Xi_p^{*,\eta}\}$, $\eta \in [0, 1]$, que se comportam semicontinua superiormente e inferiormente quando $\eta \rightarrow 0$, isto é,*

$$\sup_{1 \leq i \leq p} [\text{dist}(\Xi_i^{*,\eta}, \Xi_i^{*,0}) + \text{dist}(\Xi_i^{*,0}, \Xi_i^{*,\eta})] \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Adicionalmente, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que somente soluções globais contidas em $B_\delta(\Xi_i^{,\eta})$ estão em $\Xi_i^{*,\eta}$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$;*

- (iii) *$d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ para cada $t \geq 0$ e uniformemente em u em subconjuntos compactos de X ;*

(iv) *Existem $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tais que, se $\eta < \eta_0$, $\xi^{(\eta)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global em $\mathcal{A}_\eta$, e $d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_i^{*,\eta}) < \delta$ para todo $t \leq 0$ ($d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_i^{*,\eta}) < \delta$ para todo $t \geq 0$), então $d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_i^{*,\eta}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ ($d(\xi^{(\eta)}(t), \Xi_i^{*,\eta}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$);*

- (v) *$\{T_0(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente-like generalizado.*

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \leq \eta_0$, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente-like generalizado. Conseqüentemente, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^p W^u(\Xi_i^{*,\eta}) \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

Corolário 1.70. Assumindo as hipóteses do Teorema 1.69 e do Teorema 1.67 para cada $\eta \in [0, 1]$, para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe $\eta_0 > 0$ e uma constante $c(B) > 0$ tal que

$$d(T_\eta(t)u_0, \mathcal{A}_\eta) \leq c(B)e^{-Pt} \text{ para todos } u_0 \in B, \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1.$$

Conforme [1, 2, 6, 16] seguindo o projeto desenvolvido em [15] se assumirmos que $\{T_0(t); t \geq 0\}$ possui um atrator gradiente-like $\mathcal{A}_0$ e todas as soluções estacionárias são hiperbólicas, então $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator $\mathcal{A}_\eta$ e com uma propriedade de continuidade de semigrupos é possível mostrar que os atratores $\mathcal{A}_\eta$ comportam-se continuamente quando η tende a zero, isto é,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

De fato, este resultado de continuidade é provado para mostrar que os atratores para problemas perturbados contém (possivelmente estritamente) a união das variedades instáveis dos equilíbrios hiperbólicos, enquanto a parte restante do atrator para o problema perturbado (se ela existir) é pequena.

1.3 Semicontinuidade inferior e superior de atratores

Sejam Λ um espaço topológico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X . Recordemos a noção de continuidade para uma família qualquer de subconjuntos de um espaço métrico.

Definição 1.71. Por *semicontinuidade superior e inferior*, de uma família de conjuntos $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X , em $\lambda = \lambda_0$ entendemos o seguinte

- (i) Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é *semicontinua superiormente* em λ_0 se $\sup_{x_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda} d(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$;
- (ii) Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é *semicontinua inferiormente* em λ_0 se $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} d(x, \mathcal{A}_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$;
- (iii) Por fim, diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é *contínua* em λ_0 se for *semicontinua inferior e superiormente* em λ_0 .

Lema 1.72. Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .

- (i) Se toda seqüência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ possui uma subsequência com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é *semicontínua superiormente* em λ_0 .
- (ii) Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para cada $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ existe uma seqüência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$, que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é *semicontínua inferiormente* em λ_0 .

Demonstração. Prova de (i), se toda sequência $\{x_{\lambda_n}\}$, com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ possui uma subsequência com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ e existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$, com $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ tal que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_n}} d(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$. Assim, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos $d(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Isto contraria o fato de que $\{x_{\lambda_n}\}$ possui uma subsequência convergente para um elemento de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Prova de (ii), se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para cada $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ existe uma sequência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, que converge para x e $\{\mathcal{A}_{\lambda}\}$ não é semicontínua inferiormente em λ_0 , então existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ tal que $\sup_{x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}} \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq 3\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos $\text{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq 2\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto, podemos assumir que $\{x_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\text{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Com isso, existe uma sequência $y_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que $y_{\lambda_n} \rightarrow x$ e $\varepsilon \leq d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \leq d(x, y_{\lambda_n}) \rightarrow 0$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 1.73. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$ uma família de semigrupos em X . Suponhamos que $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ uniformemente para (t, u) em subconjuntos compactos de $[0, +\infty) \times X$. Se $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$ e $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ compacto, então a família $\{\mathcal{A}_\eta; \eta \in [0, 1]\}$ é semicontinua superiormente em $\eta = 0$.*

Demonstração. Consideremos as subsequências $\eta_k \rightarrow 0$, $\{u_{\eta_k}\}$, onde $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Como $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto em X , existe $u_0 \in X$ tal que u_{η_k} converge para u_0 quando k tende para o infinito.

A fim de mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$, provaremos que existe uma solução global limitada por u_0 . Da invariância dos atratores, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma solução global limitada $\psi^{(\eta_k)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ por u_{η_k} . Para cada $t \geq 0$, segue do fato de que $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ uniformemente para (t, u) em subconjuntos compactos de $[0, +\infty) \times X$, que

$$\psi^{(\eta_k)}(t) = T_{\eta_k}(t)\psi^{(\eta_k)}(0) = T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(t)u_0.$$

Agora, construiremos uma solução para trás por u_0 . Dado $n \in \mathbb{N}$, sem perda de generalidade suponhamos que $0 < \eta_k < \eta$. Se $t \in (-n, n+1]$, consideremos a sequência $\{\psi^{(\eta_k)}(-n)\}_k$ em $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$. Logo, existe $\tilde{\psi}^{(0)}(-n) \in X$ tal que $\{\psi^{(\eta_k)}(-n)\}_k$ converge para $\tilde{\psi}^{(0)}(-n)$ quando k tende ao infinito.

Portanto, para $t \in (-n, n+1]$, da continuidade da aplicação $\eta \in [0, 1] \mapsto T_\eta(t) \in \mathcal{C}(X)$, segue que

$$\psi^{\eta_k}(t) = \psi^{\eta_k}(t+n-n) = T_{\eta_k}(t+n)\psi^{\eta_k}(-n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_0(t+n)\tilde{\psi}^{(0)}(-n) := \tilde{\psi}^{(0)}(t).$$

Definindo

$$\psi^{(0)}(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0, & \text{se } t \geq 0, \\ \tilde{\psi}^{(0)}(t), & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

temos $\psi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global de $\{T_0(t); t \geq 0\}$. Como $\psi^{(0)} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é limitada, sua imagem deve estar contida em $\mathcal{A}_0$ e, em particular, $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Agora, o resultado segue do Lema 1.72. $\square$

Teorema 1.74. *Seja $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$ uma família de semigrupos em X . Suponhamos que,*

- (i) *para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;*
- (ii) *$\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \dots, y_p^{*,\eta}\}$ para todo $\eta \in [0, 1]$ e $\sup_{1 \leq i \leq p} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$;*
- (iii) *Existe um $\delta > 0$ tal que $\{W^u(y_j^{*,\eta}) \cap B_\delta(y_j^{*,0}); \eta \in [0, 1]\}$ é semicontinua inferiormente em $\eta = 0$;*
- (iv) *$d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ uniformemente em u em subconjuntos compactos de X , para cada $t \geq 0$.*
- (v) *Suponhamos que $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=1}^p W^u(y_j^{*,0})$.*

Então, a família $\{\mathcal{A}_\eta; \eta \in [0, 1]\}$ é semicontinua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Por (v), se $u_0 \in \mathcal{A}_0$ então existem uma solução global $\psi^{(0)}: \mathbb{R} \rightarrow X$ por u_0 ($\psi^{(0)}(0) = u_0$), $1 \leq \ell < p$ e $s \geq 0$ tais que $\psi^{(0)}(-s) \in W_{\text{loc}}^u(y_\ell^{*,0})$. Por (iii), existe uma solução global $\psi^{(\eta)}: \mathbb{R} \rightarrow X$ com $\psi^{(\eta)}(-s) \in W_{\text{loc}}^u(y_\ell^{*,\eta})$ tal que $\psi^{(\eta)}(-s) \rightarrow \psi^{(0)}(-s)$ quando η tende a zero. Segue de (i) e (iv) que

$$T_\eta(t)\psi^{(\eta)}(-s) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u_0.$$

O resultado agora, segue do Lema 1.72. □

Corolário 1.75. *Assumindo as hipóteses do Teorema 1.50 e do Teorema 1.74, concluímos que a família $\{\mathcal{A}_\eta; \eta \in [0, 1]\}$ é semicontinua inferiormente em $\eta = 0$ e existe $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{j=1}^p W^u(y_j^{*,\eta}) \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

1.4 Taxa de convergência de atratores exponenciais

Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo não linear com atrator global $\mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{A}$ um *atrator exponencial*, se existe $\rho > 0$ e para cada conjunto limitado $B \subset X$ uma constante $C(B) > 0$ tal que

$$\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leq C(B)e^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Mostraremos que se o atrator global de um semigrupo *gradient-like* que possui um número finito de soluções estacionárias, cada uma destas com variedade instável local atraindo exponencialmente, então o atrator global é exponencial.

Suponha que para cada conjunto limitado B , existem $c = c(B) > 0$ e $L > 0$ tais que

$$d(T(t)u, T(t)v) \leq ce^{Lt}d(u, v) \text{ para todos } u, v \in B, t \geq 0. \quad (1.21)$$

Nosso próximo resultado afirma que a atração exponencial uniforme garante que a taxa de convergência dos semigrupos não lineares determina a taxa de convergência dos atratores.

Teorema 1.76. *Suponha que $\{T_\eta(t); t \geq 0\}$ seja uma família de semigrupos possuindo atratores globais $\mathcal{A}_\eta$, $\eta \in [0, 1]$. Suponha que, existem $\eta_0 > 0$, $\rho > 0$ e um conjunto limitado $B_0 \supset \cup_{\eta \in [0, \eta_0]} \mathcal{A}_\eta$, tais que para cada $B \subset X$ limitado, existe uma constante $c = c(B) > 0$ tal que*

$$\text{dist}(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todos } \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1. \quad (1.22)$$

Suponha também que existem c e $L > 0$, tais que

$$d(T_\eta(t)u, T_0(t)v) \leq ce^{Lt}(d(u, v) + \eta) \text{ para todos } u, v \in B_0, \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1. \quad (1.23)$$

Então,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq \bar{c}\eta^{\frac{\rho}{\rho+L}} \text{ para algum } \bar{c} > 0.$$

Demonstração. Note que dado $\varepsilon > 0$, se $\frac{1}{\rho} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} \log c \leq t + 1$, então $\text{dist}(T_\eta(t)B_0, \mathcal{A}_\eta) < e^\rho \varepsilon$ para todo $\eta \in [0, \eta_0]$. Por (1.23), temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(T_\eta(t)B_0, T_0(t)B_0) &= \sup_{x \in B_0} \inf_{y \in B_0} d(T_\eta(t)x, T_0(t)y) \leq \sup_{x \in B_0} d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \leq c\eta e^{Lt} \\ \text{dist}(T_0(t)B_0, T_\eta(t)B_0) &= \sup_{x \in B_0} \inf_{y \in B_0} d(T_0(t)x, T_\eta(t)y) \leq \sup_{x \in B_0} d(T_0(t)x, T_\eta(t)x) \leq c\eta e^{Lt}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Note que, como $\mathcal{A}_\eta \subset B_0$ e $\mathcal{A}_0 \subset B_0$ temos $\mathcal{A}_\eta = T_\eta(t)\mathcal{A}_\eta \subset T_\eta(t)B_0$ e $\mathcal{A}_0 = T_0(t)\mathcal{A}_0 \subset T_0(t)B_0$. Se $t \geq 0$ é tal que $\frac{1}{\rho} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} \log c \in [t, t + 1)$, segue de (1.23) e (1.24) que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) &\leq \text{dist}(\mathcal{A}_\eta, T_\eta(t)B_0) + \text{dist}(T_\eta(t)B_0, T_0(t)B_0) + \text{dist}(T_0(t)B_0, \mathcal{A}_0) \\ &\leq \text{dist}(T_\eta(t)B_0, T_0(t)B_0) + e^\rho \varepsilon \leq ce^{Lt} \eta + e^\rho \varepsilon \leq c^{1+\frac{L}{\rho}} \varepsilon^{-\frac{L}{\rho}} \eta + e^\rho \varepsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) &\leq \text{dist}(\mathcal{A}_0, T_0(t)B_0) + \text{dist}(T_0(t)B_0, T_\eta(t)B_0) + \text{dist}(T_\eta(t)B_0, \mathcal{A}_\eta) \\ &\leq \text{dist}(T_0(t)B_0, T_\eta(t)B_0) + e^\rho \varepsilon \leq ce^{Lt} \eta + e^\rho \varepsilon \leq c^{1+\frac{L}{\rho}} \varepsilon^{-\frac{L}{\rho}} \eta + e^\rho \varepsilon. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se $t \geq 0$ é tal que $\frac{1}{\rho} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} \log c \in [t, t + 1)$, então

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq 2ce^{Lt} \eta + 2e^\rho \varepsilon \leq 2c^{1+\frac{L}{\rho}} \varepsilon^{-\frac{L}{\rho}} \eta + 2e^\rho \varepsilon.$$

Minimizando o lado direito da expressão acima para $\varepsilon \in (0, \infty)$ encontramos $\varepsilon = c \left(\frac{L}{\rho e^\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho+L}} \eta^{\frac{\rho}{\rho+L}}$.

Como o lado esquerdo da expressão acima independe de ε , temos

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq 2c \left[\left(\frac{L}{\rho e^\rho} \right)^{\frac{-L}{\rho+L}} + \left(\frac{Le^L}{\rho} \right)^{\frac{\rho}{\rho+L}} \right] \eta^{\frac{\rho}{\rho+L}}.$$

□

Convergência Compacta

2.1 Introdução

Este capítulo é dedicado a teoria que usaremos para comparar problemas lineares definidos em espaços diferentes. Estabeleceremos alguns resultados que são comuns às nossas aplicações, *a fortiori*, este capítulo pode ser visto como uma introdução aos capítulos seguintes.

Sejam $\{Z_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ uma família de espaços de Banach e $E_\varepsilon : Z_0 \rightarrow Z_\varepsilon$ operadores lineares com

$$\|E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|u\|_{Z_0} \text{ para todo } u \in Z_0.$$

Os operadores E_ε são chamados de extensões. Além disso, pelo Princípio da Limitação Uniforme Generalizado¹ (veja [13]), existem $\tilde{\varepsilon} > 0$ e $M > 0$ independente de ε tais que $\|E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \leq M\|u\|_{Z_0}$ para todo $u \in Z_0$ e $0 \leq \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$.

Definição 2.1. Diremos que uma família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ E -converge para u se $\|u_\varepsilon - E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se este for o caso, escreveremos $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Com esta noção de convergência introduzimos a noção de compacidade.

Definição 2.2. Diremos que uma seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $u_n \in Z_{\varepsilon_n}$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$ é pré-compacta se para cada subsequência $\{u_{n_k}\}$ existe uma subsequência $\{u_{n_{k'}}\}$ e um elemento $u \in Z_0$ tal que $u_{n_{k'}} \xrightarrow{E} u$. A família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ é dita pré-compacta se toda seqüência $\{u_{\varepsilon_n}\}$ em $\{u_\varepsilon\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ é pré-compacta.

Definição 2.3. Diremos que uma família de operadores $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ converge para $B_0 \in \mathcal{L}(Z_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, se $B_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{E} B_0 u$ sempre que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u \in X_0$. Se este for o caso, escreveremos $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$.

¹Princípio da Limitação Uniforme Generalizado: Sejam $\{X_0, X_i; i \in I\}$ uma família de espaços de Banach e $T_i \in \mathcal{L}(X_0, X_i)$ tais que para cada $x \in X_0$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_{X_i} < \infty$. Então $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X_0, X_i)} < \infty$.

Definição 2.4. Diremos que uma família de operadores compactos $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ converge compactamente para um operador compacto $B_0 \in \mathcal{L}(Z_0)$, se $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$ e para qualquer família limitada $\{u_\varepsilon \in Z_\varepsilon; \|u_\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} = 1\}_{\varepsilon \in (0,1]}$, a família $\{B_\varepsilon u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ pré-compacta. Neste caso, escreveremos $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0$.

Lema 2.5. Suponha que $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ convirja compactamente para B_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então,

- (i) $\|B_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq C$ para alguma constante $C > 0$, independente de ε ;
- (ii) Suponha que $N(I + B_0) = \{0\}$, então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|(I + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq M \text{ para todo } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Demonstração. (i) Suponhamos por absurdo que exista uma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u_{\varepsilon_n} \in Z_{\varepsilon_n}$ com $\|u_{\varepsilon_n}\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$ tais que $\|B_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}\|_{Z_{\varepsilon_n}} \rightarrow +\infty$. Mas, isto contradiz a convergência compacta de B_ε ; (ii) Como B_ε é compacta para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, segue das alternativas de Fredholm que $N(I + B_\varepsilon) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I + B_\varepsilon) = Z_\varepsilon$. Com isso, a estimativa em (ii) equivalente a dizer que

$$\|(I + B_\varepsilon)u_\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} \geq \frac{1}{M} \text{ para todos } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \text{ e } u_\varepsilon \in Z_\varepsilon \text{ com } \|u_\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} = 1.$$

Suponha que isto não valha, isto é, que existe uma seqüência $\{u_n\}$, com $u_n \in X$, $\|u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que $\|(I + B_{\varepsilon_n})u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} \rightarrow 0$. Já que $\{B_{\varepsilon_n} u_n\}$ possui uma subsequência convergente, que ainda denotaremos por $\{B_{\varepsilon_n} u_n\}$, para u , $\|u\|_{Z_0} = 1$, então $u_n + B_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow 0$ e $u_n \rightarrow -u$. Isto implica que $(I + B_0)u = 0$. $\square$

2.2 Convergência dos operadores resolventes

Em nossas aplicações veremos que os operadores B_ε serão inversos de certos operadores diferenciais A_ε . Assumiremos que dados os operadores $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$ vale

$$A_\varepsilon \text{ é fechado, possui resolvente compacto, } 0 \in \rho(A_\varepsilon), \varepsilon \in [0, 1] \text{ e } A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}. \quad (2.1)$$

Lema 2.6. Para qualquer $\mu \in \rho(-A_0)$, existe $\varepsilon_\mu > 0$ tal que $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$ e

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} < +\infty$$

Além disso, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Seja $\mu \in \rho(-A_0)$. Então, a igualdade $(\mu + A_0) = A_0(I + \mu A_0^{-1})$ implica a existência de $(I + \mu A_0^{-1})^{-1}$. Em particular, $N(I + \mu A_0^{-1}) = \{0\}$ e como μA_ε^{-1} converge compactamente para μA_0^{-1} , do Lema 2.5, existe $\varepsilon_\mu \in (0, \varepsilon_0]$ tais que $(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ está bem definida para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$, e é uniformemente limitado em ε . Assim, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1} A_\varepsilon^{-1}$ existe e além disso,

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} < +\infty.$$

A seguir, mostraremos que $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$. Seja $\|u^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} = 1$, então $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}w^\varepsilon$ com $w^\varepsilon = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}u^\varepsilon$ que é uniformemente limitada em ε . Portanto, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon$ possui uma subsequência convergente. Além disso, dado $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$, então $A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}u$. Agora, para qualquer subsequência de $\{(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon\}$ existem uma subsequência (que ainda denotaremos por $\{(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon\}$) e y tais que

$$z^\varepsilon = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon = (\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon \rightarrow y.$$

Com isso,

$$A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})z^\varepsilon \rightarrow (I + \mu A_0^{-1})y,$$

o que implica $y = (\mu + A_0)^{-1}u$. Em particular, y independe da subsequência escolhida. Logo, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon$ converge para $(\mu + A_0)^{-1}u$. Assim, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{E} (\mu + A_0)^{-1}u$. $\square$

Lema 2.7. Se μ_0 e δ forem escolhidos tais que $S_\delta := \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu - \mu_0| = \delta\}$ satisfazendo $\sigma(-A_0) \cap S_\delta = \emptyset$, então existe $\varepsilon_{S_\delta} > 0$ tal que $\sigma(-A_\varepsilon) \cap S_\delta = \emptyset$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$.

Demonstração. Suponha que não. Então, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\mu_n \in S_\delta$ (que podemos supor convergente a μ_0) e $u_{\varepsilon_n} \in Z_{\varepsilon_n}$, $\|u_{\varepsilon_n}\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$ tais que $u_{\varepsilon_n} - A_{\varepsilon_n}\lambda_n u_{\varepsilon_n} = 0$ ou seja, $\lambda_n(A_{\varepsilon_n})^{-1}u_{\varepsilon_n} = u_{\varepsilon_n}$. Segue da convergência compacta que u_{ε_n} possui subsequência convergente a $u \in Z_0$, $\|u\|_{Z_0} = 1$ e $A_0u = \lambda u$. $\square$

Considerando uma curva γ suave simples e fechada em $\rho(-A_0) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ em torno de $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$ orientada no sentido anti-horário, existe $\varepsilon_\gamma > 0$ tal que γ está em $\rho(-A_\varepsilon)$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\gamma]$. Defina a projeção espectral

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(\mu_0) : Z_\varepsilon &\rightarrow Z_\varepsilon \\ u &\mapsto Q_\varepsilon(\mu_0)u = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda + A_\varepsilon)^{-1} u d\lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

e o auto-espço generalizado associado a μ , $W(\mu, -A_\varepsilon) = Q_\varepsilon(\mu_0)Z_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\gamma]$.

Vale notar que, uma vez que, a projeção espectral $Q_\varepsilon(\mu_0)$ é um operador compacto, temos

$$\dim W(\mu, -A_\varepsilon) = \operatorname{rank}(Q_\varepsilon(\mu_0)) < \infty.$$

Teorema 2.8. As seguintes afirmações são válidas:

- (i) Para qualquer $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}$, com $\mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$;
- (ii) Se para alguma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$, com $\mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, então $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$;
- (iii) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dim W(\mu, -A_\varepsilon) = \dim W(\mu, -A_0)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;
- (iv) Para qualquer $u \in W(\mu_0, -A_0)$, existe uma seqüência $\{u^\varepsilon\}$, $u^\varepsilon \in W(\mu_0, -A_\varepsilon)$ tal que $u^\varepsilon \rightarrow u$ quando

$\varepsilon \rightarrow 0$;

(v) Para qualquer seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, a seqüência $\{u_n\}$, $u_n \in W(\mu, -A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$ com $\|u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$ possui uma subsequência convergente e qualquer ponto de acumulação desta seqüência pertence a $W(\mu_0, -A_0)$.

Demonstração. (i) Seja $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$ e considere $U = U(\mu_0, \delta) = \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$, onde δ escolhido tal que $U \cap \sigma(-A_0) = \{\mu_0\}$. Mostraremos que existe $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que $U \cap \sigma(-A_\varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Por um argumento análogo ao que foi usado no Lema 3.12, temos $\partial U \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, para algum $\varepsilon_0 > 0$ e os operadores $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ são uniformemente limitado em ε .

Suponha por absurdo que $U \subset \rho(-A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. A aplicação $U \ni \mu \mapsto (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ é analítica e limitada em ∂U . Assim, segue do Teorema do módulo máximo,² que

$$\|(I + \mu_0 A_\varepsilon^{-1})^{-1}\| \leq \max_{|\mu - \mu_0| = \delta} \|(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\| \leq \sup_{\substack{|\mu - \mu_0| = \delta \\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}} \|(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\| = C < \infty,$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto, para $u \in Z_\varepsilon$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$, obtemos

$$\|u\| = \|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})^{-1}(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u\| \leq C\|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u\|,$$

e então $\|(I + \mu_0 A_0^{-1})u\| \geq \frac{1}{C}\|u\|$ e $\mu_0 \in \rho(-A_0)$, o que é absurdo. Portanto, $U(\mu_0, \delta)$ contém pontos de $\sigma(-A_\varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno;

(ii) Considere uma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n})$ tal que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $\{u_n\} \subset Z_{\varepsilon_n}$ com $\|u_n\| = 1$ e $(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n = 0$. Então

$$\|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\| \leq \|(\mu_0 - \mu_n)A_{\varepsilon_n}^{-1}u_n\| + \|(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Uma vez que, $\{\mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1}; n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente compacta e $\|u_n\| = 1$, tomando subsequência se necessário, temos $\mu_0(A_{\varepsilon_n})^{-1}u_n \rightarrow v$, o que implica $u_n \rightarrow -v$ e $\|v\| = 1$. Portanto, $(I + \mu_0 A_0^{-1})v = 0$, $\|v\| = 1$, isto é, $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$.

(iii) Veremos que existe $\bar{\varepsilon}$ tal que $\text{rank}(Q_\varepsilon(\mu_0)) \geq \text{rank}(Q_0(\mu_0))$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base para $W(\mu_0, -A_0) = Q_0(\mu_0)Z_0$, então é fácil ver que, para ε suficientemente pequeno

$$\{Q_\varepsilon(\mu_0)v_1, \dots, Q_\varepsilon(\mu_0)v_k\}$$

é linearmente dependente em $W(\mu_0, A_\varepsilon) = Q_\varepsilon(\mu_0)Z_\varepsilon$.

Agora, suponhamos que para alguma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, temos $\text{rank}(Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)) > \text{rank}(Q_0(\mu_0))$. Então, pelo Lema IV.2.3 em [30] para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W(\mu_0, -A_{\varepsilon_n})$, $\|u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$ tal que $\text{dist}(u_n, W(\mu_0, A_0)) = \|u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$. Da convergência compacta podemos assumir que $Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n = u_n \rightarrow Q_0(\mu_0)u = u$, e então,

$$1 \leq \|u_n - Q_0(\mu_0)u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = \|Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n - Q_0(\mu_0)u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} \rightarrow 0$$

²Teorema do módulo máximo: Seja X um espaço de Banach complexo e Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e suponha que $\|f(\lambda)\|$ não é constante em Ω . Então, $\|f(\lambda)\|_X$ não pode atingir um máximo absoluto em nenhum ponto de Ω .

(iv) Seja $u \in W(\mu_0, -A_0)$ e $u^\varepsilon = Q_\varepsilon(\mu_0)u$. Já que $Q_\varepsilon(\mu_0)u \rightarrow Q_0(\mu_0)u$ e $u = Q_0(\mu_0)u$, temos $u^\varepsilon \rightarrow u$.

(v) Suponha que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e considere $\{u_n\} \subset Z_{\varepsilon_n}$, $u_n \in W(\mu_0, -A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_{Z_{\varepsilon_n}} = 1$. Já que $Q_\varepsilon(\mu_0)$ converge compactamente para $Q_0(\mu_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_n = Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n$ possui uma subsequência convergente $\{u_{n_k}\}$, ainda denotada por u_{n_k} , então em $Z_{\varepsilon_{n_k}}$, temos

$$u \leftarrow u_{n_k} = Q_{\varepsilon_{n_k}}(\mu_0)u_{n_k} \rightarrow Q_0(\mu_0)u \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

e $u \in W(\mu_0, -A_0)$. □

Proposição 2.9. *Seja K um subconjunto compacto de $\rho(-A_0)$. Então, existe $\varepsilon_K > 0$ tal que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_K]$ e*

$$\sup_{\substack{\mu \in K \\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_K]}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_0)} < +\infty. \quad (2.3)$$

Além disso, para qualquer $u \in Z_0$, temos

$$\sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}E_\varepsilon u - E_\varepsilon(\mu + A_0)^{-1}u\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.4)$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existam seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\mu_n \in K$ tal que $N(\mu_n + A_{\varepsilon_n}) \neq \{0\}$. Podemos assumir, tomando subsequências se necessário, que $\mu_n \rightarrow \mu \in K$. Como $\mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1}$ converge compactamente para μA_0^{-1} , temos uma contradição com o Lema 2.5. Assim, existe $\varepsilon_K > 0$ tal que $K \subset \rho(A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$.

A prova de (2.3) segue por um argumento de contradição, usando a compacidade de K e convergência compacta de A_ε^{-1} a A_0^{-1} . Para provar (2.4), suponhamos que existam $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $K \ni \mu_n \rightarrow \bar{\mu}$ e $\eta > 0$ tais que

$$\|(\mu_n - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u - E_{\varepsilon_n}(\mu_n - A_0)^{-1}u\|_{Z_{\varepsilon_n}} \geq \eta. \quad (2.5)$$

Usando o fato de que

$$(\mu_n - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u - (\bar{\mu} - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u = (\bar{\lambda} - \lambda)(\lambda_n - A_{\varepsilon_n})^{-1}(\bar{\mu} - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u,$$

temos

$$\|(\mu_n - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u - (\bar{\mu} - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u\|_{Z_{\varepsilon_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.6)$$

Pelo Lema 2.6, temos

$$\|(\mu_n - A_{\varepsilon_n})^{-1}E_{\varepsilon_n}u - E_{\varepsilon_n}(\bar{\mu} - A_0)^{-1}u\|_{Z_{\varepsilon_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.7)$$

e das propriedades de continuidade do operador resolvente,

$$\|(\mu_n - A_0)^{-1}u - (\bar{\mu} - A_0)^{-1}u\|_{Z_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.8)$$

agora (2.6), (2.7) e (2.8) estão em contradição com (2.5). □

Em nossas aplicações estaremos interessados em analisar o comportamento, em termos de convergência compacta, do espectro e etc., de operadores provenientes da linearização em torno de uma certa solução de equilíbrio de problemas não lineares. Para isto estudaremos o comportamento de operadores da forma $A_\varepsilon + V_\varepsilon$, onde $V_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$ é um operador limitado (uma multiplicação por um potencial).

Lema 2.10. *Considerando os operadores A_ε^{-1} , A_0^{-1} , V_ε e V_0 com $V_\varepsilon \xrightarrow{E} V_0$, temos*

$$A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1}V_0.$$

Demonstração. Note que $A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon(u_\varepsilon) = A_\varepsilon^{-1}(V_\varepsilon u_\varepsilon)$. Para provar isto, note que a limitação do operador garante que se u_ε uma seqüência limitada em Z_ε , então $V_\varepsilon u_\varepsilon$ também limitada em Z_ε , e portanto, pela compacidade de A_ε^{-1} , temos $A_\varepsilon^{-1}(V_\varepsilon u_\varepsilon)$ relativamente compacta. Além disso, se $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u$ em Z_ε , então $V_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{E} V_0 u$, e por conseguinte, $A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}V_0 u$, já que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{EE} A_0^{-1}$. $\square$

A seguir, suponhamos que

$$0 \notin \sigma(A_0 + V_0). \quad (2.9)$$

Não difícil ver que $A_0 + V_0$ possui resolvente compacto.

Proposição 2.11. *Nas condições do Lema 2.10 e assumindo a condição (2.9), existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(A_\varepsilon + V_\varepsilon)$, $\|(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq M$ independente de ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Além disso,*

$$(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0 + V_0)^{-1}.$$

Demonstração. Para provar o resultado, note que

$$(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} = (I + A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{-1},$$

como $-A_\varepsilon V_\varepsilon$ converge compactamente para $-A_0^{-1}V_0$ e $-A_\varepsilon^{-1}$ converge compactamente para $(-A_0)^{-1}$, e a limitação uniforme segue do Lema 2.5.

Para provar que $(A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (A_0 + V_0)^{-1}$, notemos que, para cada seqüência $u_\varepsilon \in Z_\varepsilon$ com $\|u_\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} = 1$, temos

$$v_\varepsilon = (A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon = (I + A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon$$

é uma seqüência limitada e que

$$v_\varepsilon = -A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon v_\varepsilon + A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon.$$

Tomando subsequências, podemos assumir que $\{A_\varepsilon^{-1}V_\varepsilon v_\varepsilon\}$ e $\{A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon\}$ são convergentes e segue que $\{v_\varepsilon\}$ possui uma subsequência convergente. Adicionalmente, se $\{u_\varepsilon\}$ é convergente para u , temos $\{v_\varepsilon\}$, a menos de subsequência, convergente para v que deve satisfazer

$$v = -A_0^{-1}V_0 v + A_0^{-1}u$$

e $v = (A_0 + V_0)^{-1}u$. Do fato de que o limite independe da subsequência, temos a convergência. $\square$

A seguir estabeleceremos algumas identidades do resolvente, que usaremos para transferir informação da convergência do resolvente de A_ε para a convergência do resolvente de $A_\varepsilon + V_0$. Uma vez que, nosso objetivo é explorar as taxas de convergência das estruturas provenientes de problemas de evolução, resultados como estes serão cruciais.

Lema 2.12. *Seja $M_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_0$, $\varepsilon \in [0, 1]$, um operador linear limitado tal que $M_\varepsilon E_\varepsilon = I$, o operador identidade em Z_0 . Se $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$ é um operador linear invertível tal que $(A_0 + V_0)$ e $(A_\varepsilon + V_0)$ são ambos invertíveis, então vale a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon &= \\ &= [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0](A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)[I - E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Demonstração. Primeiro, note que $(I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0)(I + A_\varepsilon^{-1}V_0) = I$, pois

$$\begin{aligned} I &= ((A_\varepsilon + V_0)^{-1}A_\varepsilon)((A_\varepsilon + V_0)^{-1}A_\varepsilon)^{-1} = (I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0)(A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon + V_0)) \\ &= (I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0)(I + A_\varepsilon^{-1}V_0). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que a identidade (2.10) é equivalente a identidade

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)(I - E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon) &= \\ &= (I + A_\varepsilon^{-1}V_0)((A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como $V_0(A_0 + V_0)^{-1} = I - A_0(A_0 + V_0)^{-1}$, expandindo o lado esquerdo de (2.11), temos

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)(I - E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon) &= \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon + E_\varepsilon A_0^{-1}(I - A_0(A_0 + V_0)^{-1})M_\varepsilon \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $A_\varepsilon^{-1} = (I + A_\varepsilon^{-1}V_0)(A_\varepsilon + V_0)^{-1}$ e expandindo o lado direito de (2.11), temos

$$(I + A_\varepsilon^{-1}V_0)((A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon) = A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon - A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon V_0(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon.$$

□

Lema 2.13. *Nas condições do Lema 2.12 a seguinte identidade é válida*

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon &= \\ &= [I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}V_0M_\varepsilon](A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)[I - V_0(A_\varepsilon + V_0)^{-1}]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demonstração. Como $(I - V_0(A_\varepsilon + V_0)^{-1})(I + V_0A_\varepsilon^{-1}) = I$, a identidade (2.12) é equivalente a identidade

$$\begin{aligned} ((A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon)(I + V_0A_\varepsilon^{-1}) &= \\ &= [I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}V_0M_\varepsilon](A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilonA_0^{-1}M_\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando o fato de que $A_\varepsilon^{-1} = (A_\varepsilon + V_0)^{-1}(I + V_0A_\varepsilon^{-1})$ e expandindo o lado esquerdo de (2.13), temos

$$((A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon)(I + V_0A_\varepsilon^{-1}) = A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilonV_0A_\varepsilon^{-1}.$$

Por outro lado, expandindo o lado direito de (2.13), temos

$$[I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}V_0M_\varepsilon](A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilonA_0^{-1}M_\varepsilon) = A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}V_0M_\varepsilonA_\varepsilon^{-1}.$$

□

Um problema de reação-difusão com variação no coeficiente de difusão

3.1 Introdução

Este capítulo inicia ao que chamamos de segunda parte do trabalho, o dedicamos às ilustrações dos resultados obtidos no primeiro capítulo referentes a taxa de convergência de atratores exponenciais. Analisaremos o comportamento assintótico de equações parabólicas semilineares que geram sistemas dinâmicos dissipativos. Provaremos que sob certas condições os atratores globais se comportam continuamente com taxa de convergência dependente de termos que aparecem explícitos nas equações e que definem o tipo perturbação que consideraremos.

Mais precisamente, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio limitado e suave e $\varepsilon \in [0, 1]$ um parâmetro. Considere a seguinte família de equações parabólicas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(x, t) - \operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x, t)) = f(u^\varepsilon(x, t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u^\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde os coeficientes de difusão $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções regulares satisfazendo

$$0 < m_0 \leq a_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon \text{ para todos } x \in \Omega \text{ e } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad (3.2)$$

onde $m_0, M_\varepsilon > 0$ e a não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 que verifica certas condições de crescimento e sinal que mencionaremos abaixo. O parâmetro ε é usado para indicar o fato de que $a_\varepsilon \rightarrow a_0$ uniformemente em Ω quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Adiantamos que a condição $N \geq 3$ não nos salva de nenhuma restrição aos nossos propósitos, a consideramos porque nos casos $N = 1, 2$ as imersões contínuas de Sobolev, em geral, são generosas e não apresentam grandes restrições.

Das propriedades de convergência da função a_ε com $\varepsilon \in (0, 1]$ é razoável termos no limite

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \operatorname{div}(a_0(x) \nabla u(x, t)) = f(u(x, t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

Além disso, para $\varepsilon \in [0, 1]$, em $L^2(\Omega)$ definimos $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) := \{u \in H^1(\Omega); -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u) \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

$$A_\varepsilon u := -\operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u), \quad u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon).$$

O operador A_ε é positivo, auto-adjunto e possui resolvente compacto, com $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Em particular, A_ε é um operador setorial em $L^2(\Omega)$. Portanto, podemos definir os espaços de potências fracionárias X_ε^α associados ao operador A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $\alpha \in [0, 1]$, e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} := \int_\Omega a_\varepsilon(x) \nabla \phi \nabla \psi dx$$

o qual fornece uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a norma usual. Observe que $X_0^{\frac{1}{2}}$ é um subespaço fechado de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, e se $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$, então $\|u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|u\|_{X_0^{\frac{1}{2}}}$.

Além disso, $-A_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$, gera um semigrupo analítico, que verifica a estimativa

$$\|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^\alpha, X_\varepsilon^\beta)} \leq C t^{\alpha-\beta} e^{-\omega t} \quad (3.4)$$

com constante C independente de ε . Mais ainda, denotaremos $X_\varepsilon^1 := \mathcal{D}(A_\varepsilon) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $X = L^2(\Omega)$ com o produto interno usual.

Lema 3.1 (Desigualdade do momento). *Sejam quais forem $\beta < \alpha < \gamma$, se $x \in \mathcal{D}(A_\varepsilon^\gamma)$, então vale a seguinte desigualdade*

$$\|A_\varepsilon^\alpha x\|_X \leq C \|A_\varepsilon^\gamma x\|^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}} \|A_\varepsilon^\beta x\|^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}$$

para alguma constante $C = C(\beta, \alpha, \gamma, \varepsilon) > 0$.

Demonstração. Veja [9] Teorema 1.4.3. □

Com isso, podemos reescrevermos os problemas (3.1) e (3.3) da seguinte forma abstrata

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Consideremos também uma *condição de crescimento* sobre a não linearidade:

Assumimos que para cada $\eta > 0$ existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que

$$|f(u) - f(v)| \leq C|u - v|(|u|^{\frac{4}{N-2}} + |v|^{\frac{4}{N-2}} + 1) \text{ para quaisquer } u, v \in \mathbb{R}.$$

Sob estas condições, o problema em questão, com $u_0 \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ está localmente bem posto em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Para obtermos que as soluções do problema em questão estão globalmente definidas e existência de atratores globais, assumiremos a seguinte *condição de dissipatividade* sobre a não linearidade:

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} < 0. \quad (3.6)$$

Para qualquer $u_0^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, a solução $u^\varepsilon(t, u_0^\varepsilon)$ de (3.5) começando em u_0^ε existe para todo $t \geq 0$. Portanto, podemos definir em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ o semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ associado a (3.5) por $T_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon = u^\varepsilon(t, u_0^\varepsilon)$, $t \geq 0$. Para simplificar a notação, denotaremos a solução $u^0(t, u_0^0)$ por $u(t, u_0)$.

Teorema 3.2. *O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ associado a (3.5), com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$, em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, se $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Além disso,*

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \sup_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

e

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \sup_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

A existência local segue de [17]. A existência de atratores globais, bem como a limitação uniforme em $L^\infty(\Omega)$ segue de [18]. A outra limitação uniforme segue usando a fórmula de variação das constantes. Com isso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é globalmente Lipschitz e globalmente limitada, bem como, suas derivada até segunda ordem. Diremos que $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ —converge para $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ se $\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O resultado principal deste capítulo mostra que os semigrupos não lineares associados aos problemas (3.1) com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ possuem atratores *gradient-like*, além de provar a atração exponencial dos mesmos uniforme em ε e a taxa de convergência destes atratores, cujo parâmetro aparece explicitamente na equação.

Teorema 3.3. *Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (3.1) com atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$. Suponhamos que existam $0 < \theta < 1/2$, $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|T_\varepsilon(t)u - T_0(t)v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt}(\|u - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}), \quad t \geq 1.$$

e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (3.3) existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_*^{1,0}, \dots, u_*^{n,0}\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

(i) *O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_*^{1,\varepsilon}, \dots, u_*^{n,\varepsilon}\}$ e*

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n W^u(u_*^{i,\varepsilon});$$

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado, existe $c = c(B) > 0$ tal que

$$\text{dist}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq ce^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}},$$

onde $\text{dist}_H(\cdot, \cdot)$ denota a distância simétrica de Hausdorff.

3.2 Estimativas do resolvente e taxa de convergência dos semigrupos

No que segue apresentaremos taxa de convergência dos resolventes, das projeções espectrais, dos semigrupos lineares mantendo como parâmetro a diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$, e por conseguinte, a convergência dos semigrupos não lineares via fórmula de variação das constantes.

Usaremos a ferramenta desenvolvida no segundo capítulo para comparar os problemas em questão. No entanto, sendo $X_0^{\frac{1}{2}}$ um subespaço fechado de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ temos uma situação mais simples, por exemplo, consideremos o operador identidade de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ restrito a $X_0^{\frac{1}{2}}$ como os operadores extensões.

3.2.1 Estimativas do resolvente via coeficientes de difusão

A partir deste momento nosso objetivo é mostrar que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e estimar a diferença em termos de $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$. Para este propósito e toda a análise da dinâmica da equação (3.1) o Lema Elíptico a seguir desempenha um papel chave.

Lema 3.4 (Lema Elíptico). *Para $f \in L^2(\Omega)$ com $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, seja u^ε solução do problema*

$$\begin{cases} -\text{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Então, existe uma constante $C > 0$ independente de f , tal que

$$\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty.$$

Demonstração. Seja $\phi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega a_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

e além disso, escrevendo

$$\lambda_\varepsilon := \frac{1}{2} \int_\Omega a_\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx - \int_\Omega f u^\varepsilon \, dx = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega a_\varepsilon |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx \right\}.$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) (\nabla u^\varepsilon - \nabla u) \nabla u^0 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u^0|^2 dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_0 |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u^0 dx - \int_{\Omega} f(u^\varepsilon - u) dx \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) (\nabla u^\varepsilon - \nabla u) \nabla u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0) |\nabla u^0|^2 dx - \\
&- \int_{\Omega} f(u^\varepsilon - u) dx \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) (\nabla u^\varepsilon - \nabla u) (\nabla u - \nabla u^\varepsilon + \nabla u^\varepsilon) dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u^\varepsilon - u) dx \\
&= \lambda_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon - \nabla u) dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u^\varepsilon - u) dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u^0|^2 dx. \quad (3.8)$$

Agora, note que

$$\lambda_\varepsilon - \lambda_0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u|^2 dx,$$

de onde concluímos que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon \leq \lambda_0$.

Observação 3.5. Para obter a estimativa $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon \leq \lambda_0$ (acima) é suficiente que a_ε convirja na topologia fraca* de $L^1(\Omega)$ e que a_ε seja uniformemente limitada em ε .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &:= \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_0(x) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_0(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_0 - a_\varepsilon)(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \\
&= \lambda_\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx.
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \lambda_\varepsilon - \lambda_0.$$

de onde concluímos que $\lambda_0 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon$, e portanto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0$.

Observação 3.6. Usando o fato de que $0 < m_0 \leq a_\varepsilon(x)$ para todos $x \in \Omega$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Obtemos,

$$m_0 \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u^\varepsilon\|_2^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon c}{2} \|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

de onde concluímos que $\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ para alguma constante $C > 0$.

Agora, reevendo a igualdade (3.8), temos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx = \lambda_0 - \lambda_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u|^2 dx.$$

Com isso, para alguma constante $C_2 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 &= \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} (a_0 - a_\varepsilon)(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} (a_\varepsilon - a_0)(x) (\nabla u^\varepsilon - \nabla u) (\nabla u^\varepsilon + \nabla u) dx \\ &\leq \|a_\varepsilon - a_0\|_{\infty} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_2 \|\nabla u^\varepsilon + \nabla u\|_2 \\ &\leq C_1 \|a_\varepsilon - a_0\|_{\infty} \|\nabla u^\varepsilon - \nabla u\|_2 \\ &= C_1 \|a_\varepsilon - a_0\|_{\infty} \|u^\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|a_\varepsilon - a_0\|_{\infty} \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_{\infty}$ para alguma constante $C > 0$. $\square$

Lema 3.7. A família de operadores $A_\varepsilon^{-1} : X \longrightarrow X$ com $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ converge compactamente para o operador $A_0^{-1} : X \longrightarrow X$.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que a família $\{A_\varepsilon^{-1}\}_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ é formada por operadores compactos (e a compacidade independe de ε). Seja $g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tal que $\|g_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Então, para $v^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} g_\varepsilon$, temos

$$\int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla v^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} g_\varepsilon v^\varepsilon dx.$$

Sabendo que $0 < m_0 \leq a_\varepsilon(x)$ para todos $x \in \Omega$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Seja c uma constante de imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, então segue da Desigualdade de Young, que

$$m_0 \|v^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) |\nabla v^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} g_\varepsilon v^\varepsilon dx \leq \frac{\|g_\varepsilon\|_2^2}{2\delta} + \frac{\delta c \|v^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{2} \leq \frac{1}{2\delta} + \frac{\delta c \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{2}.$$

Com isso,

$$\|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{(2m_0 - \delta c)\delta}, \quad \delta > 0,$$

e portanto, existe $c_1 > 0$ tal que

$$A_\varepsilon^{-1}(B_{L^2(\Omega)}(0, 1)) \subset B_{H_0^1(\Omega)}(0, c_1) \text{ seja qual for } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

onde $B_Y(0, r)$ denota a bola no espaço Y centrada na origem de raio r .

Logo, $A_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$, e como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacta, segue que A_ε^{-1} é um operador compacto de $L^2(\Omega)$ nele mesmo.

O Lema 3.4 assegura que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon^{-1}$, e portanto, a prova segue da compacidade coletiva. $\square$

Teorema 3.8. Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, o operador $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é setorial e

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\mu + \omega|} \text{ para cada } \mu \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

para alguma constante $M \geq 1$ independente de ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, onde $\Sigma_{-\omega, \phi} = \{\mu \in \mathbb{C}; |\arg(\mu + \omega)| < \pi - \phi\}$ é um setor com $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $\omega = \frac{m_0}{C}$, sendo C a constante proveniente da Desigualdade de Poincaré e m_0 proveniente de (3.2).

Demonstração. Para $\omega = \frac{m_0}{C}$, temos $\langle A_\varepsilon u, u \rangle \geq \omega \langle u, u \rangle$. Com isso, $-A_\varepsilon$ é dissipativo, satisfazendo $\langle -A_\varepsilon u, u \rangle \leq -\omega \langle u, u \rangle$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, $W(-A_\varepsilon) \subset (-\infty, -\omega]$, sendo

$$W(-A_\varepsilon) = \{\langle -A_\varepsilon u, u \rangle; u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon) \text{ e } \|u\|_2 = 1\}$$

a imagem numérica de $-A_\varepsilon$. Desta forma $\mathcal{R} := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\omega] \subset \mathbb{C} \setminus W(-A_\varepsilon)$ é aberto e conexo. Temos ainda que $0 \in \mathcal{R} \cap \rho(-A_\varepsilon)$. Logo, se $\mu \in \mathcal{R}$, então

$$\|(\mu - (-A_\varepsilon)^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon))}.$$

Logo, se $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $\mu \in \Sigma_{-\omega, \phi} := \{w \in \mathbb{C}; |\arg(w + \omega)| < \pi - \phi\}$, então

$$\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon)) \geq \text{dist}(\mu, (-\infty, -\omega]) = |\mu + \omega| \sin(\pi - \arg(\mu + \omega)) \geq |\mu + \omega| \sin \phi,$$

obtendo assim

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\mu + \omega|} \text{ para todo } \mu \in \Sigma_{-\omega, \phi},$$

em que $M = \frac{1}{\sin \phi}$ independente de ε . □

Observação 3.9. Note para uma translação do setor $\Sigma_{-\omega, \phi}$, teremos

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1 + |\mu|} \text{ para cada } \mu \in \Sigma_{-\frac{\omega}{2}, \phi},$$

para alguma constante $M \geq 1$ independente de ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Lema 3.10. Para qualquer $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, onde $\varepsilon_0 > 0$, temos

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

e conseqüentemente,

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} < \infty.$$

Demonstração. Já que, $A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})$, temos $\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Além disso, pela Lema 2.6 com $Z_\varepsilon = X$ seja qual for ε , temos $(\mu + A_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\mu + A_0)^{-1}$, conseqüentemente, pela Desigualdade do Momento, temos

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &= \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_X^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}u\|_X^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.11. *Se $\mu \in \rho(-A_0) \cap \rho(-A_\varepsilon)$, então*

$$(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1} = A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1}.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1} &= (\mu + A_\varepsilon)^{-1}[(\mu + A_0) - (\mu + A_\varepsilon)](\mu + A_0)^{-1} \\ &= (\mu + A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1}. \end{aligned}$$

□

No próximo resultado melhoramos a informação dada no Lema 2.6, mostrando que a convergência do resolvente é dada em termos da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$.

Lema 3.12. *Dado um subconjunto compacto K em $\rho(A_0)$, existe um $\varepsilon_K > 0$ tal que $K \subset \rho(A_\varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_K$ e*

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} < \infty.$$

Além disso, para $\mu \in \rho(-A_\varepsilon) \cap \rho(-A_0)$, teremos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty.$$

Demonstração. A primeira afirmação, foi pravadada na Proposição 2.9. Para provar a limitação uniforme, primeiro, note que $\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ e para isto, usamos um argumento por contradição, tomando seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\mu_n \in K$ com $\mu_n \rightarrow \mu \in K$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mu_n + A_{\varepsilon_n})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = +\infty$. Assim, obtemos uma contradição da convergência compacta de $\mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1}$ para μA_0^{-1} . A fim de obtermos a prova da primeira estimativa, note que usando o fato de que $0 \in \rho(A_\varepsilon)$ e identidade do resolvente,

temos $A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$, e aplicando a Desigualdade do Momento, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &= \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq C \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\mu \in K} \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\mu \in K} \|(I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para provar a segunda estimativa, note que pela Proposição 3.11, temos a identidade

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}] &= A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1}] \\ &= A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando a Observao 3.9, obtemos uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &= \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})A_0(\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|A_\varepsilon(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_0(\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema ser usado na análise do conjuntos dos pontos de equilíbrios do problema (3.1). Retomemos a não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com derivada até segunda ordem limitada.

Lema 3.13. *Sejam $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, uma função mensurável $\theta : \Omega \rightarrow [0, 1]$ e $\delta > 0$, então para quaisquer $u, v \in B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta) := \{u \in X_0^{\frac{1}{2}}; \|u - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} < \delta\}$, a função*

$$\begin{aligned} \gamma_\delta : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \gamma_\delta(x) := f'((1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) - f'(u_*(x)) \end{aligned}$$

verifica as propriedades: $\gamma_\delta \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma_\delta \in L^2(\Omega)$ com $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$, e portanto, $\gamma_\delta \in L^p(\Omega)$ com $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$ para $p \in [1, \infty)$.

Vale notar que a função γ_δ também depende das funções u e v .

Demonstração. Das propriedades da função f que $\gamma_\delta \in L^\infty(\Omega)$ e $\|\gamma_\delta\|_\infty \leq C$ com C independente de ε , e portanto, $\gamma_\delta \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$. Resta-nos mostrar que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$ para $p \in [2, \infty)$.

Para $p = 2$, note que pelo Teorema do valor médio, para cada $x \in \Omega$, existe $0 \leq \rho(x) \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f'((1-\theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) - f'(u_*(x))|^2 dx \\ &\leq L_{f'}^2 \int_{\Omega} |(1-\theta(x))u(x) - \theta(x)v(x) - u_*(x)|^2 dx \\ &= L_{f'}^2 \int_{\Omega} |(1-\theta(x))(u(x) - u_*(x)) - \theta(x)(v(x) - u_*(x))|^2 dx \\ &\leq L_{f'}^2 (\|(1-\theta)(u - u_*)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta(v - u_*)\|_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq 2L_{f'}^2 \delta^2, \end{aligned}$$

onde $L_{f'} = f''((1-\rho(x))((1-\theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) + \rho(x)u_*(x))$, e portanto, $\|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta$, $C > 0$, o que implica, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Agora, para $p > 2$, note que pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega} |\gamma_\delta(x)|^p dx = \int_{\Omega} |\gamma_\delta(x)|^{p-2} |\gamma_\delta(x)|^2 dx \leq \|\gamma_\delta\|_{\infty}^{p-2} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e portanto, $\|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\gamma_\delta\|_{\infty}^{\frac{p-2}{p}} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} \leq C \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}}$, e $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$. $\square$

Teorema 3.14. Se denotarmos por $f^e : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ o operador de Nemitskiĭ de f em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e tomando valores em X , isto é, $f^e(u)(x) = f(u(x))$, $x \in \Omega$, então f^e é um operador diferenciável à Fréchet. Além disso,

- (i) A aplicação derivada $(f^e)' : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)$ é contínua, e portanto, o operador de Nemitskiĭ $f^e : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é continuamente diferenciável;
- (ii) Se $\{u_*^\varepsilon\} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_*))$, então $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-1}$ converge compactamente para $f'(u_*)A_0^{-1}$.

Demonstração. De fato, fixado $x \in \Omega$, a derivada de Gâteaux de f^e em u , na direção de v , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^e}{\partial v}(u)(x) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^e(u + tv)(x) - f^e(u)(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u(x) + tv(x)) - f(u(x))}{t} \\ &= f'(u(x))v(x). \end{aligned}$$

A partir disto, analisaremos a diferenciabilidade (a Fréchet) da aplicação f^e em um ponto $v \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Usando o fato de que $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ com $n \geq 3$ e Desigualdade de Hölder com os índices conjugados $\frac{n}{2}$

e $\frac{n}{n-2}$, e pela Desigualdade do valor médio, para cada $x \in \Omega$ existem $0 < \theta(x), \rho(x) < 1$ tais que

$$\begin{aligned}
 \|f^e(u) - f^e(v) - (f')^e(u) \cdot (u - v)\|_X^2 &= \|f(u) - f(v) - f'(u) \cdot (u - v)\|_X^2 \\
 &= \int_{\Omega} |f(u(x)) - f(v(x)) - f'(u(x))(u(x) - v(x))|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} |\gamma_{u,v}(x)|^2 |u(x) - v(x)|^2 dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |\gamma_{u,v}(x)|^n dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\leq \|\gamma_{u,v}\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^2 \\
 &\leq C \|\gamma_{u,v}\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u - v\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}^2,
 \end{aligned}$$

onde $\gamma_{u,v}(x) = f'((1 - \theta(x))u(x) + \theta(x)v(x)) - f'(v(x))$ e $C > 0$.

Com isso, usando o Lema 3.13 com $u_* = u$, obtemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\|f^e(u) - f^e(v) - (f')^e(u) \cdot (u - v)\|_X}{\|u - v\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}} = 0$$

e portanto, o operador $f^e : X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é (Fréchet) diferenciável com $(f^e)'(u) = (f')^e(u)$, $u \in X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$.

(i) Além disso, note que a aplicação derivada $(f^e)' : X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}, X)$ é contínua. Com efeito, seja $\{u_*^{\varepsilon_n}\} X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$ -convergente para u_* , então

$$\begin{aligned}
 \|(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n}) - (f^e)'(u_*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X)} &= \sup_{\substack{u \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u\|=1}} \|[(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n}) - (f^e)'(u_*)]u\|_X \\
 &= \sup_{\substack{u \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u\|=1}} \left(\int_{\Omega} |(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n})u(x) - (f^e)'(u_*)u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

onde usando o fato de que para cada $x \in \Omega$, existe $0 < \theta(x) < 1$ e $X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, $n > 2$, pela Desigualdade de Hölder com os índices conjugados $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{n-2}$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n})u(x) - (f^e)'(u_*)u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n})u(x) - (f^e)'(u_*)|^2 |u(x)|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} |f''((1 - \theta(x))u_*^{\varepsilon_n}(x) + \theta(x)u_*(x))|^2 |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\
 &\leq C \int_{\Omega} |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^n dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &= C \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^2 \\
 &\leq C \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}^2,
 \end{aligned}$$

o que implica

$$\|(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n}) - (f^e)'(u_*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X)} \leq C \sup_{\substack{u \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u\|=1}} \left\{ \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^n(\Omega)} \|u\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \right\} \leq C \sup_{\substack{u \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u\|=1}} \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^n(\Omega)}.$$

Por outro lado, usando novamente a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^p dx &= \int_{\Omega} |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^{p-2} |u_*^{\varepsilon_n}(x) - u_*(x)|^2 dx \\ &\leq \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*(x)\|_{\infty}^{p-2} \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad p > 2, \end{aligned}$$

com o fato de $\{u_*^{\varepsilon_n}\} X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$ -convergir para $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, temos $\{u_*^{\varepsilon_n}\}$ convergente para u_* em $L^2(\Omega)$ e além disso, $\|u_*^{\varepsilon_n}\|_{\infty}, \|u_*\|_{\infty} \leq C$, para alguma constante $C > 0$, o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_*^{\varepsilon_n} - u_*\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad p > 2.$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f^e)'(u_*^{\varepsilon_n}) - (f^e)'(u_*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X)} = 0.$$

(ii) Por conseguinte, se $\{u_*^{\varepsilon}\} X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_*))$, então podemos mostrar que $f'(u_*^{\varepsilon})A_{\varepsilon}^{-1}$ converge compactamente para $f'(u_*)A_0^{-1}$, aqui cometemos um abuso de notação, uma vez que, denotamos por f o operador de Nemitskiĭ da função f em $X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ e tomando valores em X .

De fato, seja $u \in X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$, segue da convergência compacta $A_{\varepsilon}^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, que $A_{\varepsilon}^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}$, em particular, $A_{\varepsilon}^{-1}u \rightarrow A_0^{-1}u$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e portanto da continuidade da aplicação derivada $f' : X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}, X)$, obtemos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(u_*^{\varepsilon})A_{\varepsilon}^{-1}u = f'(u_*)A_0^{-1}u$.

Agora, seja $\{u^{\varepsilon}\} \in X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ com $\|u^{\varepsilon}\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} = 1$. Como $\{A_{\varepsilon}^{-1}u^{\varepsilon}\}$ é relativamente compacta, para cada seqüência $\{A_{\varepsilon_n}^{-1}u^{\varepsilon_n}\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ há uma subsequência $\{A_{\varepsilon_{n'}}^{-1}u^{\varepsilon_{n'}}\}$ e $y \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tal que $\lim_{n'} A_{\varepsilon_{n'}}^{-1}u^{\varepsilon_{n'}} = y$, e por conseguinte, $\lim_{n'} f'(u_*^{\varepsilon_{n'}})A_{\varepsilon_{n'}}^{-1}u^{\varepsilon_{n'}} = f'(u_*)y$, o que significa que $\{f'(u_*^{\varepsilon})A_{\varepsilon}^{-1}u^{\varepsilon}\}$ é relativamente compacta. $\square$

No que segue, assumiremos a função f nas condições do Teorema 3.14 e manteremos o abuso de notação, denotando por f o operador de Nemitskiĭ da função f em $X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ e tomando valores em X .

Definição 3.15. Uma medida de não compacidade β em um espaço métrico completo Y é uma função $\beta : 2^Y \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\beta(A) = 0$ se, e somente se, A é relativamente compacto;
- (ii) $\beta(A \cup B) = \max\{\beta(A), \beta(B)\}$;
- (iii) $\beta(A + B) \leq \beta(A) + \beta(B)$.

Lema 3.16. Para todo $0 < \theta < 1$, a família $\{A_\varepsilon^{-\theta}\}$ é coletivamente compacta e $A_\varepsilon^{-\theta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-\theta}$ em X . Além disso, se $\{u_*^\varepsilon\} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, então $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\theta}$ converge compactamente para $f'(u_*^0)A_0^{-\theta}$.

Demonstração. Sejam $\Sigma_{-\lambda, \phi}$ dado pela setorialidade do operador A_ε e Γ a fronteira de $\Sigma_{-\lambda, \phi}$. Como

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu,$$

segue que a integral acima é absolutamente uniformemente convergente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma]$. Logo, dada $\eta > 0$, podemos dividir o contorno $\Gamma = \Gamma_1^\eta \cup \Gamma_2^\eta$ de tal maneira que Γ_1^η seja limitada e a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\eta} \|\mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} d\mu \leq \eta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma].$$

Sobre Γ_1^η , reescrevemos a integral como

$$B_\varepsilon := \frac{A_\varepsilon^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^\eta} \mu^{-\theta} A_\varepsilon (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu,$$

e usando que $\|\mu^{-\theta} A_\varepsilon (\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_X = \|\mu^{-\theta} (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_X$ é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma]$ e também que $\{A_\varepsilon^{-1}; \varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma]\}$ é coletivamente compacta para garantir que $\{B_\varepsilon; \varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma]\}$ é coletivamente compacta. Seja $\beta : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ a medida de não compacidade de Kuratowski. Agora, tomando quaisquer seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}$, $u_n \in X$ com $\|u_n\|_X = 1$, obtemos

$$\beta(\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\}) \leq \beta(B_{\varepsilon_n}) + \beta\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\eta} \mu^{-\theta} (\mu + A_{\varepsilon_n})^{-1} d\mu \{u_n\}\right) \leq \eta.$$

Logo, dadas seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u_n \in X$ com $\|u_n\| = 1$, temos $\beta(\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\}) = 0$ e que $\{A_\varepsilon^{-\theta}; \varepsilon \in (0, \varepsilon_\gamma]\}$ é coletivamente compacta. Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{-\theta} (\mu + A_0)^{-1} d\mu = A_0^{-\theta}, \quad \mu \in \Gamma.$$

Quanto a convergência compacta de $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\theta}$ a $f'(u_*^0)A_0^{-\theta}$. Note que, do Teorema 3.14 e da segunda afirmação do lema, temos $f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\theta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f'(u_*^0)A_0^{-\theta}$, pois dado $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} \|f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\theta} u - f'(u_*^0)A_0^{-\theta} u\|_X &\leq \|f'(u_*^\varepsilon)(A_\varepsilon^{-\theta} u - A_0^{-\theta} u)\|_X + \|(f'(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^0))A_0^{-\theta} u\|_X \\ &\leq \|f'(u_*^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)} \|A_\varepsilon^{-\theta} u - A_0^{-\theta} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|(f'(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^0))A_0^{-\theta} u\|_X \\ &\leq C_1 \|A_\varepsilon^{-\theta} u - A_0^{-\theta} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|(f'(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^0))A_0^{-\theta} u\|_X, \end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ é obtida do Princípio da limitação uniforme generalizado.¹

Além disso, dada $\{u^\varepsilon\}$, $u^\varepsilon \in X$ com $\|u^\varepsilon\| = 1$, da compacidade coletiva de $\{A_\varepsilon^{-\theta}\}$, temos $\{A_\varepsilon^{-\theta} u^\varepsilon\}$ relativamente compacta, e conseqüentemente, $\{f'(u_*^\varepsilon)A_\varepsilon^{-\theta} u^\varepsilon\}$ relativamente compacta, pela continuidade da aplicação derivada $f' : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)$. $\square$

¹Princípio da limitação uniforme generalizado: Sejam $\{X_i, X_0\}$ uma família de espaços de Banach e $T_i \in \mathcal{L}(X_i, X_0)$ tais que para todo $x_i \in X_i$, $\sup_i \|T_i x_i\|_{X_i} < \infty$. Então, $\sup_i \|T_i\|_{\mathcal{L}(X_i, X_0)}$.

Lema 3.17. *Suponha que $\{u_*^\varepsilon\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e que $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_*))$. Então, para qualquer $0 \leq \theta < 1$, existe $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que*

$$\{(A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))^{-1}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

é coletivamente compacta, uniformemente limitada e $(A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - f'(u_^\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (A_0)^\theta (A_0 - f'(u_*))^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ fixado, r_1 e r_2 tais que $1 > \alpha + r_1 \leq \theta$ e $r_2 = 1 - \alpha - r_1$. Notemos que

$$(A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))^{-1} = (A_\varepsilon)^{-(\alpha+r_1-\theta)} (I - (A_\varepsilon)^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) (A_\varepsilon)^{-\alpha-r_1})^{-1} (A_\varepsilon)^{-r_2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{-(\alpha+r_1-\theta)} [I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}] A_\varepsilon^{-r_2} &= (A_\varepsilon)^\theta A_\varepsilon^{-\alpha-r_1} [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon)^{-\alpha-r_1}]^{-1} \\ &= (A_\varepsilon)^\theta [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}) A_\varepsilon^{\alpha+r_1}]^{-1} \\ &= (A_\varepsilon)^\theta [(A_\varepsilon^{r_2} - f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}) A_\varepsilon^{\alpha+r_1}]^{-1} \\ &= (A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon))^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\alpha + r_1 < 1$ e $r_2 < 1$, segue do Lema 3.16 que $\{(A_\varepsilon)^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) (A_\varepsilon)^{-\alpha-r_1}\}$ coletivamente compacta. Logo, $(I - A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\alpha-r_1})^{-1}$ é uniformemente limitado, pois $(A_\varepsilon^{-r_2} f'(u_*^\varepsilon) A_\varepsilon^{-\alpha-r_1})^{-1}$ converge compactamente para $(A_0^{-r_2} f'(u_*) A_0^{-\alpha-r_1})$. Por fim, sendo $\alpha + r_1 - \theta < 1$, o resultado segue. $\square$

Considerando o espaço $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ao invés de Z_ε no Lema 2.7, podemos considerar as projeções espectrais definidas em (2.2), e neste caso, temos

Proposição 3.18. $Q_\varepsilon(\mu_0) : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ converge compactamente para $Q_0(\mu_0) : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_0^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, $\|Q_\varepsilon(\mu_0) - Q_0(\mu_0)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$ para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Afirmamos que a convergência $Q_\varepsilon(\mu_0)u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Q_0(\mu_0)u$, onde $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, pode ser obtida em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e em termos da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$.

Note que

$$Q_\varepsilon(\mu_0) - Q_0(\mu_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda + A_0)^{-1}] d\lambda$$

e usando o Lema 3.12, obtemos

$$\begin{aligned} \|Q_\varepsilon(\mu_0) - Q_0(\mu_0)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda + A_0)^{-1}] d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C \int_\gamma \|(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} d\lambda \\ &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que A_ε^{-1} é um operador fechado, temos

$$Q_\varepsilon(\mu_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma A_\varepsilon^{-1} (\lambda A_\varepsilon^{-1} + I)^{-1} d\lambda = A_\varepsilon^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda A_\varepsilon^{-1} + I)^{-1} d\lambda$$

e usando o Lema 3.10, temos $\{\|(\lambda A_\varepsilon^{-1} + I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, $\lambda \in \gamma$, uniformemente limitado, e por conseguinte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda A_\varepsilon^{-1} + I)^{-1} d\lambda$$

é uniformemente limitando, e usando a convergência compacta $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, temos a convergência compacta de $Q_\varepsilon(\mu_0)$ a $Q_0(\mu_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Corolário 3.19. Se $\ker(\lambda_\varepsilon - A_\varepsilon) = R(Q_\varepsilon)$, $A_0 u = \lambda_0 u$ com $\|u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 1$ e $A_\varepsilon^{-1} Q_\varepsilon u = \lambda_\varepsilon Q_\varepsilon u$, então

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Usando o fato de que $A_0^{-1} Q_0 - A_\varepsilon^{-1} Q_\varepsilon = (A_0^{-1} - A_\varepsilon^{-1}) Q_0 - A_\varepsilon^{-1} (Q_0 - Q_\varepsilon)$, pelo Lema 2.5, Lema 3.4 e pela Proposição 3.18, temos

$$\begin{aligned} \|A_0^{-1} Q_0 u - A_\varepsilon^{-1} Q_\varepsilon u\|_X &\leq \|(A_0^{-1} - A_\varepsilon^{-1}) Q_0 u\|_X + \|A_\varepsilon^{-1} (Q_0 - Q_\varepsilon) u\|_X \\ &\leq \|(A_0^{-1} - A_\varepsilon^{-1}) Q_0 u\|_X + \|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|(Q_0 - Q_\varepsilon) u\|_X \\ &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Proposição 3.18 e a estimativa acima, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda_\varepsilon Q_0 u - \lambda_0 u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|\lambda_0 (Q_\varepsilon - Q_0) u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\lambda_\varepsilon Q_0 u - \lambda_0 Q_\varepsilon u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &= |\lambda_0| \|(Q_\varepsilon - Q_0) u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + |\lambda_\varepsilon \lambda_0| \left\| \frac{1}{\lambda_0} Q_0 u - \frac{1}{\lambda_\varepsilon} Q_\varepsilon u \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &= |\lambda_0| \|(Q_\varepsilon - Q_0) u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + |\lambda_\varepsilon \lambda_0| \|A_0^{-1} Q_0 u - A_\varepsilon^{-1} Q_\varepsilon u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C |\lambda_\varepsilon \lambda_0| \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty, \end{aligned}$$

e portanto, como $\|u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 1$, concluímos que

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| = \|(\lambda_\varepsilon - \lambda_0) u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \|\lambda_\varepsilon Q_0 u - \lambda_0 u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty.$$

$\square$

3.2.2 Taxa de convergência dos semigrupos via coeficientes de difusão

No que segue, estudaremos a taxa de convergência dos semigrupos lineares, em função da convergência uniforme de a_ε para a_0 em Ω .

Teorema 3.20. *Seja $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Então, existem constantes $\alpha < 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C e^{\alpha(1-2\theta)t} \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-\theta}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Considerando o semigrupo linear

$$e^{-A_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\mu t} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

onde Γ é a fronteira do setor $\Sigma_{-\omega, \phi} = \{\mu \in \mathbb{C}; |\arg(\mu + \omega)| \leq \phi\}$ com $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ orientada de maneira que a parte imaginária de μ cresça quando μ percorre Γ .

Segue de (3.4) a estimativa

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} + \|e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq M e^{\alpha t} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |e^{\mu t}| \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} |d\mu| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{\operatorname{Re} \mu t} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} - (\mu + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} |d\mu|. \end{aligned}$$

Com isso, usando o Lema 3.12, temos

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty t^{-1}. \quad (3.10)$$

Interpolando as expressões (3.9) e (3.10) com $1 - 2\theta$ e 2θ , respectivamente, obtemos

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C e^{\alpha(1-2\theta)t} \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-\theta}.$$

□

Teorema 3.21. *Sejam u^ε e u contínuos em $X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}$, então existem constantes c e $L > 0$ tais que*

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq c e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-\theta} (\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}), \quad t > 0.$$

Demonstração. Considerando $t \in (0, \tau)$ e a fórmula de variação das constantes, que define o semigrupo não linear

$$T_\varepsilon(t)u^\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t} u^\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) ds, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

temos

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_0 t}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - e^{-A_0(t-s)}f(T_0(s)u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds,$$

onde

$$\|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_0 t}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_\varepsilon t}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|e^{-A_\varepsilon t}u - e^{-A_0 t}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Com isso, usando o Teorema 3.20, obtemos a seguinte estimativa

$$\|e^{-A_\varepsilon t}u^\varepsilon - e^{-A_0 t}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Mt^{-\frac{1}{2}-\theta}\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + Ce^{\alpha(1-2\theta)t}\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - e^{-A_0(t-s)}f(T_0(s)u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds &\leq \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}[f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - f(T_0(s)u)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &+ \int_0^t \|[e^{-A_\varepsilon(t-s)} - e^{-A_0(t-s)}]f(T_0(s)u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.20 e pela estimativa (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}f(T_\varepsilon(s)u^\varepsilon) - e^{-A_0(t-s)}f(T_0(s)u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds &\leq ML_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &+ C_0\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{\alpha(1-2\theta)(t-s)} ds, \end{aligned}$$

a integral que aparece na segunda parcela da expressão acima, merece atenção especial. Vejamos, escrevendo $y = -\alpha(1-2\theta)(t-s)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{\alpha(1-2\theta)(t-s)} ds &= \frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}-\theta}(1-2\theta)^{\frac{1}{2}-\theta}} \int_0^{-\alpha(1-2\theta)t} y^{-\theta} e^{-y} dy \\ &\leq \frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}-\theta}(1-2\theta)^{\frac{1}{2}-\theta}} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}-\theta} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}-\theta}(1-2\theta)^{\frac{1}{2}-\theta}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\theta\right). \end{aligned}$$

Usando a expressão obtida para a diferença dos semigrupos lineares (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Mt^{-\frac{1}{2}-\theta}\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_1\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}t^{-\frac{1}{2}-\theta} + C_2\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \\ &+ ML_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C(\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta})t^{-\frac{1}{2}-\theta}e^{-\alpha\delta t} + \\ &+ ML_f \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$.

Logo, multiplicando a expressão acima por $e^{\alpha\delta t}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha\delta t} \|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C(\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta})t^{-\frac{1}{2}-\theta} + \\ &+ \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{\alpha\delta t} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C(\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta})t^{-\frac{1}{2}-\theta} + \\ &+ \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{\alpha\delta s} \|T_\varepsilon(s)u^\varepsilon - T_0(s)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo

$$\phi_\varepsilon(t) := e^{\alpha\delta t} \|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_\varepsilon := \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} \text{ e } b := ML_f$$

reescrevemos a última desigualdade da seguinte forma

$$\phi_\varepsilon(t) \leq \alpha_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-\theta} + b \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds$$

e usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\phi_\varepsilon(t) \leq C\alpha_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-\theta},$$

ou seja, escrevendo $L = -\alpha\delta > 0$, temos

$$\|T_\varepsilon(t)u^\varepsilon - T_0(t)u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq Ce^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-\theta} (\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}).$$

□

Observação 3.22. *Uma pergunta natural é se este resultado pode ser melhorado para $\theta = \frac{1}{2}$. Adiantamos que neste caso o argumento acima não convém, uma vez que, podemos não ter a convergência de algumas das integrais acima. Mais detalhes reservaremos a trabalhos futuros.*

3.2.3 Taxa de convergência dos resolventes e dos semigrupos para a linearização

Assumiremos que todos os equilíbrios de (3.3) são hiperbólicos, uma vez que, necessitaremos da estabilidade dos mesmos por perturbações. Provaremos a continuidade dos conjuntos de equilíbrios de (3.1) em $\varepsilon = 0$ e a atração exponencial das variedades instáveis uniforme em ε .

Definição 3.23. *As soluções de equilíbrio de (3.5), para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ são aquelas independentes do tempo, isto é, são as soluções do problema elíptico*

$$A_\varepsilon u - f(u) = 0. \tag{3.12}$$

Denotaremos por $\mathcal{E}_\varepsilon$ o conjunto das soluções de (3.12) para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Proposição 3.24. *A família $\{\mathcal{E}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é semicontinua superiormente em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Note que $\mathcal{E}_\varepsilon \subset \mathcal{A}_\varepsilon$, e portanto, pelo Teorema 3.2, $\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \{\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}; u^\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon\} < \infty$. O que implica, que para cada seqüência de neste conjunto, existem uma subseqüência $\{u^{\varepsilon_n}\} \subset \{u^\varepsilon\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ tais que $\{u^{\varepsilon_n}\}$ converge fracamente para u em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e fortemente em X . Agora, usando o fato de que a aplicação $f : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é limitada, o conjunto $\{f(u^\varepsilon) \in X; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é limitado em X , e pelo Teorema 3.7, a família $\{A_\varepsilon^{-1}f(u^\varepsilon) \in X; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é relativamente compacta em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, o que implica, que cada seqüência neste conjunto admite uma subseqüência $\{A_{\varepsilon_n}^{-1}f(u^{\varepsilon_n}) \in X; 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_0\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tais que $A_{\varepsilon_n}^{-1}f(u^{\varepsilon_n})$ converge para u_0 em $X_0^{\frac{1}{2}}$.

Tomando a subseqüência $\{u^{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}; 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_0\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, temos u^{ε_n} convergindo para u em X e $u^{\varepsilon_n} = A_{\varepsilon_n}^{-1}f(u^{\varepsilon_n})$ convergindo para u_0 em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, o que implica, $u = u_0$. Além disso, pela continuidade da f , temos $f(u^{\varepsilon_n}) \rightarrow f(u)$ em X , o que implica, $A_{\varepsilon_n}^{-1}f(u^{\varepsilon_n}) \rightarrow A_0^{-1}f(u)$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, ou seja, $u = A_0^{-1}f(u)$, $u \in \mathcal{E}_0$. $\square$

Definição 3.25. *Uma solução de equilíbrio u^* de (3.3) diz-se hiperbólica se $\sigma(A_0 - f'(u_*))$, o espectro do operador $A_0 - f'(u^*)$, for disjunto do eixo imaginário.*

Proposição 3.26. *Se todas as soluções de equilíbrio de (3.3) são isolados, então estas existem em um número finito. Qualquer solução de equilíbrio hiperbólica de (3.3) é isolada.*

Demonstração. Já que A_0 possui resolvente compacto, segue que $\mathcal{E}_0$ é compacto em $X_0^{\frac{1}{2}}$, e portanto, os pontos de equilíbrio de (3.3) existem em um número finito, do contrário, existiria uma seqüência convergente em $\mathcal{E}_0$ para algum ponto de $\mathcal{E}_0$. Com isso, necessitamos apenas provar que as soluções de equilíbrio hiperbólicas de (3.3) são isolados. Note que $u \in \mathcal{E}_0$ se, e somente se, u é um ponto fixo da aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : X_0^{\frac{1}{2}} &\rightarrow X_0^{\frac{1}{2}} \\ u &\mapsto \Psi(u) := (A_0 - f'(u_*))^{-1}(f(u) - f'(u_*)u). \end{aligned}$$

Afirmamos que existe um $\delta > 0$ tal que Ψ é uma contração de $\overline{B}_\delta(u_*)$ em si mesma, onde $\overline{B}_\delta(u_*) := \{u \in X_0^{\frac{1}{2}}; \|u - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$. Assim, obtemos que u_* é o único elemento em $\overline{B}_\delta(u_*) \cap \mathcal{E}_0$, e portanto, isolado. Com efeito, sejam $\delta > 0$ e $u, v \in \overline{B}_\delta(u_*)$, usando o Lema 3.13, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_0 - f'(u_*))^{-1}[f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)]\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \\ &= \|A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - f'(u_*))^{-1}[f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)]\|_X \\ &= \|A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - f'(u_*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)\|_X \\ &\leq C \|f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)\|_X. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\|f(u) - f(v) - f'(u_*)(u - v)\|_X^2 &= \int_{\Omega} |f(u(x)) - f(v(x)) - f'(u_*(x))(u(x) - v(x))|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |[f'((1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) - f'(u_*(x))](u(x) - v(x))|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |\gamma_{\delta}(x)|^2 |u(x) - v(x)|^2 dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |\gamma_{\delta}(x)|^n \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |u(x) - v(x)|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&= \|\gamma_{\delta}\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2
\end{aligned}$$

e retomando o raciocínio acima usando o Lema 3.13, obtemos

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq \|\gamma_{\delta}\|_{L^n(\Omega)} \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C\delta \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C\delta \|u - v\|_{X_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)}.$$

Assim, escolhendo δ tal que $C\delta < \frac{1}{2}$, obtemos que Ψ é uma contração. Notemos ainda que se $v \in \overline{B}_{\delta}(u_*)$, então $\|\Psi(v) - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} = \|\Psi(v) - \Psi(u_*)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq c\|v - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} < \delta$, para alguma constante $0 \leq c < 1$, o que mostra que $\Psi(\overline{B}_{\delta}(u_*)) \subset \overline{B}_{\delta}(u_*)$, ou seja, que Ψ possui um único ponto fixo em $\overline{B}_{\delta}(u_*)$. $\square$

Para obter a convergência dos pontos de equilíbrio com taxa, usaremos o Lema 2.12 e o Lema 3.4. De fato, usaremos o seguinte corolário do Lema 2.12.

Lema 3.27. *O operador $A_{\varepsilon} + V_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, verifica a identidade*

$$(A_{\varepsilon} + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} = [I - (A_{\varepsilon} + V_0)^{-1}V_0](A_{\varepsilon}^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]. \quad (3.13)$$

Demonstração. Basta usar o Lema 2.12 com $E_{\varepsilon} = M_{\varepsilon} = I$ em X . $\square$

Teorema 3.28. *Suponha que u_* seja uma solução de equilíbrio hiperbólica de (3.3) e que $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_*))$. Então, existem $\overline{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ tais que o problema (3.1) possui exatamente uma única solução de equilíbrio u_*^{ε} em $\overline{B}_{\delta}(u_*) := \{u \in X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}; \|u - u_*\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$ para $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$. Além disso, $\|u_*^{\varepsilon} - u_*\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} \leq C\|a_{\varepsilon} - a_0\|_{\infty}$ para alguma constante $C > 0$.*

Demonstração. Também trataremos este resultado como um problema de ponto fixo. Note que do Lema 3.12 e do Lema 3.17, e da hiperbolicidade de u_* segue que $\sigma(A_{\varepsilon} - f'(u_*))$ é disjunto do eixo imaginário, em particular existe $(A_{\varepsilon} - f'(u_*))^{-1}$. Usando o Lema 3.17 com $\theta = \frac{1}{2}$ obtemos $M > 0$ tal que

$$\|(A_{\varepsilon} - f'(u_*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}})} \leq M \text{ para todo } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Se u^{ε} uma solução de equilíbrio de (3.12), então

$$0 = (A_{\varepsilon} - f'(u_*))[u^{\varepsilon} + (A_{\varepsilon} - f'(u_*))^{-1}(f'(u_*)u^{\varepsilon} - f(u^{\varepsilon}))].$$

Para mostrar que u^ε é uma solução de (3.12) mostraremos equivalentemente que u^ε é um ponto fixo da aplicação

$$\Psi_\varepsilon(u^\varepsilon) := (A_\varepsilon - f'(u_*))^{-1}(f(u^\varepsilon) - f'(u_*)u^\varepsilon).$$

Como $A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon - f'(u_*))^{-1}$ converge compactamente para $A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - f'(u_*))^{-1}$, veja o Lema 3.17,

$$\Psi_\varepsilon(u_*) = (A_\varepsilon - f'(u_*))^{-1}(A_0 - f'(u_*))u_* \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (A_0 - f'(u_*))^{-1}(A_0 - f'(u_*))u_* = u_* \text{ em } X_0^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

Agora, provaremos que existem $\delta > 0$ (independente de ε) e $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tais que Ψ_ε é uma contração de $\bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*) = \{u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; \|u^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta\}$ em si próprio, uniformemente em $(0, \bar{\varepsilon}]$. Primeiro, veremos que Ψ_ε uma contração. Para isto, sejam u^ε e v^ε em $\bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$ e note que

$$\begin{aligned} \|\Psi_\varepsilon(u^\varepsilon) - \Psi_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_\varepsilon - f'(u_*))^{-1}[f(u^\varepsilon) - f(v^\varepsilon) - f'(u_*)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|(A_\varepsilon - f'(u_*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \|f(u^\varepsilon) - f(v^\varepsilon) - f'(u_*)(u^\varepsilon - v^\varepsilon)\|_X \end{aligned}$$

e usando o Lema 3.13 e o Teorema 3.14, obtemos

$$\|\Psi_\varepsilon(u^\varepsilon) - \Psi_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\delta \|u - v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, escolhendo δ tal que $C\delta < \frac{1}{2}$, obtemos que Ψ_ε é uma contração.

Para mostrar que $\Psi_\varepsilon(\bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)) \subset \bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$, observe que, se $u^\varepsilon \in \bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$, então

$$\|\Psi_\varepsilon(u^\varepsilon) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \|u^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\Psi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

De (3.14) segue que existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\|\Psi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\delta}{2}$, e para qualquer $u^\varepsilon \in \bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$, temos

$$\|\Psi_\varepsilon(u^\varepsilon) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta.$$

Assim, $\Psi_\varepsilon : \bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*) \rightarrow \bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$ é uma contração, seja qual for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, então existe um único ponto fixo de Ψ_ε em $\bar{B}_\delta^\varepsilon(u_*)$, o qual chamaremos de u_*^ε .

Finalmente, veremos que $u_*^\varepsilon \rightarrow u_*$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em termos da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$. De fato, como $-\operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u_*^\varepsilon) = f(u_*^\varepsilon)$ e $-\operatorname{div}(a_0(x)\nabla u_*) = f(u_*)$, temos

$$-\operatorname{div}(a_0\nabla u_*) + f'(u_*)u_* = f(u_*) + f'(u_*)u_* \quad (3.15)$$

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon\nabla u_*^\varepsilon) + f'(u_*)u_*^\varepsilon = f(u_*^\varepsilon) + f'(u_*)u_*^\varepsilon. \quad (3.16)$$

e definindo os operadores $L_0 : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$, $L_0\psi = -\operatorname{div}(a_0\nabla\psi) + f'(u_*)\psi$ e $L_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$, $L_\varepsilon\psi = -\operatorname{div}(a_\varepsilon\nabla\psi) + f'(u_*)\psi$, obtemos $u_* = L_0^{-1}[f(u_*) + f'(u_*)u_*]$ e $u_*^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1}[f(u_*^\varepsilon) + f'(u_*)u_*^\varepsilon]$. Assim, escrevendo $V_0 = f'(u_*)$ e $z_*^\varepsilon = f(u_*^\varepsilon) - f(u_*) + V_0(u_*^\varepsilon - u_*)$, temos

$$\begin{aligned} \|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})[f(u_*^\varepsilon) + V_0u_*^\varepsilon] + L_0^{-1}[f(u_*^\varepsilon) - f(u_*) + V_0(u_*^\varepsilon - u_*)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &= \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})[f(u_*^\varepsilon) + V_0u_*^\varepsilon] + A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}[f(u_*^\varepsilon) - f(u_*) + V_0(u_*^\varepsilon - u_*)]\|_X \\ &\leq \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \|f(u_*^\varepsilon) + V_0u_*^\varepsilon\|_X + \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}z_*^\varepsilon\|_X. \end{aligned}$$

Além disso, usando a identidade (3.13) com o potencial $V_0 = f'(u_*)$, obtemos

$$A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}] = [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0]A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}].$$

Afirmção: Seja $f_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ com $\|f_\varepsilon\|_2 \leq 1$. Então

$$\|(A_\varepsilon + V_0)^{-1}f_\varepsilon - (A_0 + V_0)^{-1}f_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \quad (3.17)$$

onde $C > 0$ depende de $\|(A_0 + V_0)^{-1}\|_{L^2(\Omega)}$ e de $\|V_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, mas não depende de ε ou de f_ε .

Prova da afirmação: Note que, usando o Lema 3.17, obtemos

$$\begin{aligned} \|(A_\varepsilon + V_0)^{-1}f_\varepsilon - (A_0 + V_0)^{-1}f_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}]f_\varepsilon\|_X \\ &\leq \| [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0]A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]f_\varepsilon \|_X \\ &\leq \|I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} \| [I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]f_\varepsilon \|_X \\ &\leq \|I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \| [I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \|_{\mathcal{L}(X)} \end{aligned}$$

e usando o Lema 3.4, obtemos $C > 0$ dependendo de $\|V_0\|_\infty$ tal que

$$\|(A_\varepsilon + V_0)^{-1}f_\varepsilon - (A_0 + V_0)^{-1}f_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty.$$

Por outro lado, como $z_*^\varepsilon = f(u_*^\varepsilon) - f(u_*) + V_0(u_*^\varepsilon - u_*)$ e o operador $f : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é diferenciável, conforme o Teorema 3.14, temos

$$\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}z_*^\varepsilon\|_X \leq \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|z_*^\varepsilon\|_X \leq C\|z_*^\varepsilon\|_X \leq \frac{1}{2}\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \text{ para todo } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

uma vez que,

$$\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_0^{-\frac{1}{2}}A_0^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A_0^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_0^{\frac{1}{2}})}$$

é uniformemente limitado, conforme o Lema 3.17. Com isso, pelo Teorema 3.14, obtemos

$$\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f(u_*^\varepsilon) + V_0u_*^\varepsilon\|_X \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty + \frac{1}{2}\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e

$$\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C(\|f(u_*^\varepsilon)\|_X + \|V_0u_*^\varepsilon\|_X) \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty,$$

o que implica,

$$\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty.$$

□

Seja $\mathcal{C}_\varepsilon = \{u_*^{1,\varepsilon}, \dots, u_*^{m,\varepsilon}\}$ com $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ o conjunto das soluções de equilíbrio de (3.1). Supondo que $\mathcal{C}_0 = \{u_*^1, \dots, u_*^m\}$, o conjunto das soluções de equilíbrio de (3.3), seja formado apenas por soluções de equilíbrio hiperbólicas.

Escrevendo $V_\varepsilon = -f'(u_*^\varepsilon)$ com $u_*^\varepsilon \in \mathcal{C}_\varepsilon$, $\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon + V_\varepsilon$ e $B_\varepsilon = V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Com esta notação, segue do Teorema 3.14 que $V_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ converge para $V_0 : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ fortemente e em norma.

Lema 3.29. *A família de operadores $B_\varepsilon : X \rightarrow X$ com $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ converge compactamente para o operador $B_0 : X \rightarrow X$.*

Demonstração. Seja $u \in X$, segue do Lema 3.4, que $A_\varepsilon^{-1}u \rightarrow A_0^{-1}u$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Logo, segue do Teorema 3.14 que $B_\varepsilon u \rightarrow B_0 u$ em X (em termos da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$). De fato, pelos Teorema 3.14 e Teorema 3.28,

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon u - B_0 u\|_X &= \|V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}u - V_0 A_0^{-1}u\|_X \\ &\leq \|V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)} \|A_\varepsilon^{-1}u - A_0^{-1}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|(V_\varepsilon - V_0)A_\varepsilon^{-1}u\|_X \\ &\leq \|V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)} \|A_\varepsilon^{-1}u - A_0^{-1}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|V_\varepsilon - V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X)} \|A_\varepsilon^{-1}u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Além disso, seja $\{u^\varepsilon\}$ em X limitada, então fixada uma seqüência em $\{u^\varepsilon\}$, extraímos uma subsequência $\{u^{\varepsilon_n}\}$ e $u \in X$ tal que $\{u^{\varepsilon_n}\}$ conjirva para u fracamente em X , e por conseguinte, $A_{\varepsilon_n}^{-1}u^{\varepsilon_n}$ converge para $A_0^{-1}u$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Segue do Teorema 3.14 que $B_{\varepsilon_n}u^{\varepsilon_n} = V_{\varepsilon_n}A_{\varepsilon_n}^{-1}u^{\varepsilon_n}$ converge para $B_0u = V_0A_0^{-1}u$. $\square$

Proposição 3.30. *A seguinte identidade é válida,*

$$\bar{A}_\varepsilon^{-1} - \bar{A}_0^{-1} = (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1} - A_\varepsilon^{-1}(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}.$$

Demonstração. Para provar este resultado, note que

$$(I + B_\varepsilon)^{-1} - (I + B_0)^{-1} = (I + B_0)^{-1}[(I + B_0) - (I + B_\varepsilon)](I + B_\varepsilon)^{-1} = (I + B_0)^{-1}(B_0 - B_\varepsilon)(I + B_\varepsilon)^{-1}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \bar{A}_\varepsilon^{-1} - \bar{A}_0^{-1} &= (A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1}[(I + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1})^{-1} - (I + V_0 A_0^{-1})] + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + V_0 A_0^{-1}) \\ &= A_\varepsilon^{-1}[(I + B_\varepsilon)^{-1} - (I + B_0)^{-1}] + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0^{-1}) \\ &= A_\varepsilon^{-1}(I + B_0)^{-1}(B_0 - B_\varepsilon)(I + B_\varepsilon)^{-1} + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0^{-1}). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.31. *Suponha que $0 \notin \sigma(\bar{A}_0)$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(\bar{A}_\varepsilon)$. Além disso, $\bar{A}_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} \bar{A}_0^{-1}$.*

Demonstração. Para provar o resultado, note que

$$\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon + V_\varepsilon = (I + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1})A_\varepsilon = (I + B_\varepsilon)A_\varepsilon$$

e pelo Lema 2.5, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(\bar{A}_\varepsilon)$. Além disso, para provar $\bar{A}_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} \bar{A}_0^{-1}$, note que para cada seqüência em $\{u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ com $\{\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\}$ uniformemente limitada, temos $\{(I + B_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon\}$ uniformemente limitada, pelo Lema 2.5. Escrevendo $v^\varepsilon = (I + B_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon$, pelo argumento anterior existe uma seqüência $\{v^{\varepsilon_n}\}$ que converge para $v \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, e por conseguinte, $A_\varepsilon^{-1}v^{\varepsilon_n}$ converge para $A_0^{-1}v$ fortemente em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, ou seja, para cada seqüência em $\{u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ com $\{\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\}$ uniformemente limitada, existe uma subseqüência $\{u^{\varepsilon_n}\}$ e $u = A_0^{-1}v$ tal que $A_{\varepsilon_n}u^{\varepsilon_n}$ converge para u em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Resta-nos observar que para cada $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos $\bar{A}_\varepsilon^{-1}u \rightarrow \bar{A}_0^{-1}u$ em X (em termos da diferença $\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$). Para isto, usamos a identidade em (3.30), o Lema 2.5 e o Lema 3.29,

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_\varepsilon^{-1} - \bar{A}_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + \\ &\quad + \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)}\|(I + B_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} + \\ &\quad + \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq C_1\|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} + C_2\|B_\varepsilon - B_0\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Com o resultado acima, obtemos os mesmos resultados do Lema 3.10 e do Lema 3.12, definimos, $\bar{Q}_\varepsilon^+$, a projeção espectral determinada pela parte do espectro do operador $\bar{A}_\varepsilon$ situada direita do eixo imaginário, e o operador $\tilde{A}_\varepsilon$ sendo a restrição de $\bar{A}_\varepsilon$ ao núcleo de $\bar{Q}_\varepsilon^+$. Com isso, o Teorema 2.8 é válido com $\bar{A}_\varepsilon$ e da convergência compacta do resolvente do $\bar{A}_\varepsilon$, obtemos um resultado análogo ao Teorema 3.20 para $e^{\tilde{A}_\varepsilon t}$.

Lema 3.32. *Dado um subconjunto compacto K em $\rho(\bar{A}_0)$, existe um $\varepsilon_K > 0$ tal que $K \subset \rho(\bar{A}_\varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_K$ e*

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} < \infty.$$

Alm disso, $(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + \bar{A}_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ com

$$\|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1} - (\mu + \bar{A}_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty, \quad C > 0.$$

Considerando uma curva γ suave simples e fechada em $\rho(\bar{A}_0) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ em torno de $\mu_0 \in \sigma(\bar{A}_0)$ orientada no sentido anti-horário, existe $\varepsilon_\gamma > 0$ tal que γ está em $\rho(\bar{A}_\varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\gamma$.

Defina a projeção espectral

$$\begin{aligned}\overline{Q}_\varepsilon^+(\mu_0) : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \overline{Q}_\varepsilon^+(\mu_0)u = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda + \overline{A}_\varepsilon)^{-1} u d\lambda\end{aligned}$$

e o auto-espço generalizado associado a μ , $W(\mu, -\overline{A}_\varepsilon) = \overline{Q}_\varepsilon^+(\mu_0)X$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_\gamma$. Além disso,

$$\dim W(\mu, -\overline{A}_\varepsilon) = \text{rank}(\overline{Q}_\varepsilon^+(\mu_0)) < \infty.$$

Teorema 3.33. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i.) Para qualquer $\mu_0 \in \sigma(-\overline{A}_0)$, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}$, com $\mu_n \in \sigma(-\overline{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$;
- (ii.) Se para alguma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$, com $\mu_n \in \sigma(-\overline{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, então $\mu_0 \in \sigma(-\overline{A}_0)$;
- (iii.) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dim W(\mu, -\overline{A}_\varepsilon) = \dim W(\mu, -\overline{A}_0)$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$;
- (iv.) Para qualquer $u \in W(\mu_0, -\overline{A}_0)$, existe uma seqüência $\{u^\varepsilon\}$, $u^\varepsilon \in W(\mu_0, -\overline{A}_\varepsilon)$ tal que $u^\varepsilon \rightarrow u$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (v.) Para qualquer seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, a seqüência $\{u_n\}$, $u_n \in W(\mu, -\overline{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$ com $\|u_n\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 1$ possui uma subseqüência convergente e qualquer ponto de acumulação desta seqüência pertence a $W(\mu_0, -\overline{A}_0)$.

Teorema 3.34. *Seja $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Então, existem constantes $\alpha < 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C e^{\alpha(1-2\theta)t} \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-\theta}.$$

3.3 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades instáveis

Vale ressaltar que existem $\beta > 0$ e $M \geq 1$ tais que, para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos

$$\|e^{-\overline{A}_\varepsilon t} Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\beta t}, \quad t \leq 0$$

e

$$\|e^{-\overline{A}_\varepsilon t} (I - Q_\varepsilon^+)\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq M t^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t}, \quad t > 0.$$

Se u_* é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.3) e $\{u_*^\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ uma família de soluções de equilíbrio de (3.1) com $\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$ para algum $C > 0$.

Em uma vizinhança da solução de equilíbrio u_*^ε , reescreveremos o problema (3.1) como

$$w_t^\varepsilon + \overline{A}_\varepsilon w^\varepsilon = f(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)w^\varepsilon, \quad (3.18)$$

onde $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_*^\varepsilon$ e $\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon - f'(u_*^\varepsilon)$.

Isto produz uma decomposição de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, onde $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, e por conseguinte, da solução w^ε de (4.55): $w^\varepsilon = v^\varepsilon + z^\varepsilon$, com $v^\varepsilon = \bar{Q}_\varepsilon^+ w^\varepsilon$ e $z^\varepsilon = (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) w^\varepsilon$. Portanto, já que $\bar{Q}_\varepsilon^+$ e $(I - \bar{Q}_\varepsilon^+)$ comutam com $\bar{A}_\varepsilon$, temos

$$v_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon v^\varepsilon = \bar{Q}_\varepsilon^+ [f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)],$$

e

$$z_t^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon z^\varepsilon = (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) [f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)].$$

Escrevendo

$$H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) := \bar{Q}_\varepsilon^+ [f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)]$$

e

$$G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) := (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) [f(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)]$$

disto resulta que $H_\varepsilon(0,0) = 0 = G_\varepsilon(0,0)$. Além disso, H_ε e G_ε são continuamente diferenciáveis e dado $\rho > 0$, existem $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_\rho > 0$ e $\delta = \delta_\rho > 0$ tais que se $\|v\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta$ e $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, então

$$\|H_\varepsilon(v, z)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho \text{ e } \|G_\varepsilon(v, z)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho; \quad (3.19)$$

$$\|H_\varepsilon(v, z) - H_\varepsilon(\bar{v}, \bar{z})\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho (\|v - \bar{v}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z - \bar{z}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}); \quad (3.20)$$

$$\|G_\varepsilon(v, z) - G_\varepsilon(\bar{v}, \bar{z})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho (\|v - \bar{v}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z - \bar{z}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}). \quad (3.21)$$

Definindo os operadores $B_\varepsilon := \bar{A}_\varepsilon \bar{Q}_\varepsilon^+$ e $\tilde{A}_\varepsilon := \bar{A}_\varepsilon (I - \bar{Q}_\varepsilon^+)$, reescrevemos a equação (4.55) como o sistema acoplado

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \\ z_t^\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon z^\varepsilon = G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon). \end{cases} \quad (3.22)$$

Teorema 3.35. *Seja u_* um equilíbrio hiperbólico de (3.3). Então, pela Proposição 3.28, existem $\bar{\delta} > 0$ e $\bar{\varepsilon}_0 > 0$ tais que existe uma única $u_*^\varepsilon \in \mathcal{C}_\varepsilon$ com $\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \bar{\delta}$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Para $D > 0$, $\Delta > 0$ e $0 < \vartheta < 1$ dados, seja $\rho_0 > 0$ tal que para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, valha*

$$\begin{aligned} \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &\leq D, & \rho M^2 (1 + \Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &\leq \Delta \\ \frac{\beta}{2} &\leq 2\beta - \rho M (1 + \Delta) \leq 2\beta, & \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M (1 + \Delta)}{2\beta - \rho M (1 + \Delta)}\right] &\leq \vartheta < 1 \\ \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &+ \left[\rho^2 M^2 \beta^{-1} (1 + \Delta) (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para a escolha de ρ acima, suponha H_ε e G_ε satisfazendo as condições acima para todo $(v, z) \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \times (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Então, existe $s_\varepsilon^* : \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - \bar{Q}_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ tal que

$$\|s_\varepsilon^*\| := \sup_{v \in \bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|s_\varepsilon^*(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq D, \quad \|s_\varepsilon^*(v) - s_\varepsilon^*(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$$

e a variedade instável de u_*^ε é dada como sendo o gráfico da aplicação s_ε^* ,

$$W_\varepsilon^u = W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon) := \{(v, z) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; z = s_\varepsilon^*(v), v \in \overline{Q_\varepsilon^+} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}.$$

Além disso, existem $\rho_1 > 0$ e $M \geq 1$ independentes de ε tais que

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \quad (3.23)$$

durante o período em que a órbita $(v^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ permanecer na vizinhança de u_*^ε

Vale notar que, para $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$ e $C > 0$, independente de ε , temos

$$\|s_\varepsilon^* - s_0^*\| \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}.$$

Demonstração. Primeiro provaremos a existência da variedade instável, para tisto usaremos o Teorema do ponto fixo de Banach para contrações. Sejam $s_\varepsilon : \overline{Q_\varepsilon^+} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ uma aplicação contínua satisfazendo $\|s\| \leq D$ e $\|s(v) - s(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\overline{Q_\varepsilon^+} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ e $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, s_\varepsilon)$ uma solução de

$$\begin{cases} \dot{v}^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)), & t < \tau \\ v^\varepsilon(\tau) = \eta. \end{cases} \quad (3.24)$$

Também, considere o conjunto

$$\Sigma = \left\{ s : \overline{Q_\varepsilon^+} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; \|s\| \leq D \text{ e } \|s(v) - s(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\overline{Q_\varepsilon^+} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Não é difícil ver que $(\Sigma, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo.

Sejam $s_\varepsilon \in \Sigma$, v^ε solução de (3.24) e a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ s_\varepsilon &\mapsto \Psi(s_\varepsilon) := \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s))) ds. \end{aligned}$$

Note que, de (3.19), temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(s_\varepsilon)(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s)))\|_X ds \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} ds \\ &\leq \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq D \end{aligned}$$

e que, sempre que $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^r$ e $s_\varepsilon, \tilde{s}_\varepsilon \in \Sigma$, e considerando $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, s_\varepsilon)$ e $\tilde{v}^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\eta}, \tilde{s}_\varepsilon)$

$$v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t) = e^{-B_\varepsilon(t-\tau)}(\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^t e^{-B_\varepsilon(t-s)} [H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)) - H_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon))] ds.$$

Com isso, usando (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\|v^\varepsilon(t) - \bar{v}^\varepsilon(t)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} \|H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)) - H_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon))\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \rho \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} (\|v^\varepsilon(s) - \bar{v}^\varepsilon(s)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) ds \\
&\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \rho \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} ((1+\Delta) \|v^\varepsilon(s) - \bar{v}^\varepsilon(s)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}) ds \\
&\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \rho (1+\Delta) \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} \|v^\varepsilon(s) - \bar{v}^\varepsilon(s)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ M \rho \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\| \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} ds.
\end{aligned}$$

Definindo a função $\phi(t) = e^{-\beta(t-\tau)} \|v^\varepsilon(t) - \bar{v}^\varepsilon(t)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\phi(t) \leq M \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \rho \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\| \int_\tau^t e^{\beta(t-s)} ds + M \rho (1+\Delta) \int_\tau^t \phi(s) ds.$$

e usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v^\varepsilon(t) - \bar{v}^\varepsilon(t)\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} e^{[\rho M(1+\Delta) - \beta](\tau-t)} + \\
&+ \rho M \beta^{-1} [1 - e^{\beta(t-\tau)}] \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\| e^{[\rho M(1+\Delta) - \beta](\tau-t)} \\
&\leq \left(M \|\eta - \bar{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \frac{\rho M}{\beta} \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon)\| \right) e^{[\rho M(1+\Delta) - \beta](\tau-t)}.
\end{aligned}$$

e usando (3.21), segue que

$$\begin{aligned}
\|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)) - G_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon))\|_X ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} [(1+\Delta) \|v^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|s_\varepsilon - \bar{s}_\varepsilon\|] ds.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo as estimativas obtidas para $\|v^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \|s_\varepsilon - \bar{s}_\varepsilon\| + \\
&+ \rho M^2(1+\Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Definindo as constantes

$$\begin{aligned}
I_s(\varepsilon) &:= \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \\
I_\eta(\varepsilon) &:= \rho M^2(1+\Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dado $\vartheta < 1$, existe ρ_0 tal que, para $\rho \leq \rho_0$, $I_s(\varepsilon) \leq \vartheta$ e $I_\eta(\varepsilon) \leq \Delta$ e

$$\|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\bar{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \vartheta \|s_\varepsilon - \bar{s}_\varepsilon\|. \quad (3.25)$$

Disto, concluímos que $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é uma contração. Logo, existe um único ponto fixo $s_\varepsilon^* = \Psi(s_\varepsilon^*)$ em Σ .

Agora, provaremos que $W^u(u_\varepsilon^*) = \{(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)); v \in \overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}$ uma variedade invariante para (3.22). Seja $(v_0^\varepsilon, z_0^\varepsilon) \in W^u(u_\varepsilon^*)$, $z_0^\varepsilon = s_\varepsilon^*(v_0^\varepsilon)$. Denote por $v_\varepsilon^*(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) \\ v^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.26)$$

Isto define uma curva $(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) \in W^u(u_\varepsilon^*)$, $t \in \mathbb{R}$. Contudo a única solução da equação

$$z_t^\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon z^\varepsilon = G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$

$$z_\varepsilon^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s))) ds = s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)).$$

Portanto, $(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$ é uma solução de (3.22) passando por $(v_0^\varepsilon, z_0^\varepsilon)$, o que prova a invariância.

Agora, mostraremos que a variedade instável é exponencialmente atratora uniforme em ε . A seguir provaremos que $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostrar que existe $\rho_1 > 0$, independente de ε , tal que

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Quando $t_0 \rightarrow -\infty$, obtemos $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $\xi^\varepsilon(t) = z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ e $y(s, t)$, $s \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} y^\varepsilon + B_\varepsilon y^\varepsilon = H_\varepsilon(y^\varepsilon, s_\varepsilon^*(y^\varepsilon)), & s \leq t \\ y^\varepsilon(t, t) = v^\varepsilon(t). \end{cases} \quad (3.27)$$

A figura abaixo ilustra o que ocorre numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico.

Figura 04: Variedade Instável.

Assim, usando (3.20), temos

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \left\| \int_t^s e^{-B_\varepsilon(s-\theta)} [H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(v^\varepsilon(\theta), z^\varepsilon(\theta))] d\theta \right\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \rho M \int_s^t e^{\beta(s-\theta)} \left[(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(\theta)) - z^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta \\ &\leq \rho M \int_s^t e^{\beta(s-\theta)} \left[(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Se $\phi^\varepsilon(t) = e^{-\beta s} \|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, então

$$\phi^\varepsilon(s) \leq \rho M(1 + \Delta) \int_s^t \phi^\varepsilon(\theta) d\theta + \rho M \int_s^t e^{-\beta \theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta, \quad s \leq t.$$

e da Desigualdade de Gronwall, segue que

$$\|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho M \int_r^t e^{-(\beta - \rho M(1 + \Delta))(\theta - s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta, \quad s \leq t. \quad (3.28)$$

Seja agora $s \leq t_0 \leq t$. Então, usando (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|e^{-B_\varepsilon(s - t_0)}[y^\varepsilon(t_0, t) - v(t_0)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ \left\| \int_{t_0}^s e^{-B_\varepsilon(s - \theta)} [H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t_0), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t_0)))] d\theta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \rho M^2 e^{\beta(s - t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1 + \Delta))(\theta - t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta + \\ &+ \rho M \int_{t_0}^t e^{\beta(s - \theta)} (1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - y^\varepsilon(\theta, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta. \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho M^2 \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1 + \Delta))(\theta - r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta. \quad (3.29)$$

Vamos agora estimar $\xi(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \xi^\varepsilon(t) &- e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - t_0)} \xi^\varepsilon(t_0) = z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - t_0)} [z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))] \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) ds - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) + e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - t_0)} s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - s)} G_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))) ds + \\ &+ e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t_0 - s)} G_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t_0), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t_0))) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - s)} [G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) - G_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t)))] ds - \\ &- \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - s)} [G_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))) - G_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t_0), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t_0)))] ds. \end{aligned}$$

Assim, usando (3.21), (4.64) e (4.65), temos

$$\begin{aligned} \|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t - t_0)} \xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t - s)} [\|v^\varepsilon(s) - y^\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z^\varepsilon(s) - s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}] ds + \\ &+ \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t - s)} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t - s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \rho M(1 + \Delta) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t - s)} \|v^\varepsilon(s) - y^\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &+ \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t - s)} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

De onde segue que,

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ \rho^2 M^2 (1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)} \int_s^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta ds + \\
&+ \rho^2 M^3 (1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta ds \\
&\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ \rho^2 M^2 (1+\Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_{t_0}^\theta e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta))s} ds d\theta \\
&\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ \rho^2 M^2 (1+\Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_{t_0}^\theta e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta))s} ds d\theta + \\
&+ \rho^2 M^3 (1+\Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_{t_0}^\theta e^{(2\beta-\rho M(1+\Delta))s} ds d\theta,
\end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ \frac{\rho^2 M^3 (1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} e^{-\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
e^{\beta(t-t_0)} \|\xi^\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\
&+ \frac{\rho^2 M^3 (1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \int_{t_0}^t e^{-(2\beta-\rho M(1+\Delta))(s-t_0)} e^{\beta(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+\Delta)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Gronwall, segue ainda que

$$\|\xi^\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} e^{-\rho_1(t-t_0)} \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (3.30)$$

onde

$$\rho_1 = \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+\Delta)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] > 0$$

onde ρ_1 independe de ε , uma vez que, β, M, ρ e Δ independem de ε para $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Ou seja,

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Logo, note que fazendo $t \rightarrow -\infty$, temos $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com um abuso de notação, acabamos de provar que para cada vizinhança $B(u_\varepsilon^*, \delta)$, $\delta < \bar{\delta}$ de u_ε^* , se $u^\varepsilon \in B(u_\varepsilon^*, \delta)$, então existem $\rho_1 > 0$ e $M > 0$, independentes de ε , tais que

$$d(T_\varepsilon(t)u^\varepsilon, W^u(u_\varepsilon^*)) \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \quad (3.31)$$

durante o tempo em que a órbita $T_\varepsilon(t)u^\varepsilon$ de u^ε , permanece em $B(u_\varepsilon^*, \delta)$.

Mostraremos, por fim, a taxa de continuidade dos pontos fixos s_ε^* em $\varepsilon = 0$, a saber

$$|||s_\varepsilon^* - s_0^*||| := \sup_{\eta \in B_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(0, R)} \|s_\varepsilon^*(\eta) - s_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|^{2\theta}, \quad C > 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - s_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-\tilde{A}_0(\tau-s)} G_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0)) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} G_0(v^0, s_0^*(v^0)) - e^{-\tilde{A}_0(\tau-s)} G_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Denotando as três integrais por I_1 , I_2 e I_3 , respectivamente,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{-\infty}^{\tau} M e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \rho [(1+\Delta) \|v^\varepsilon - v^0\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + |||s_\varepsilon^* - s_0^*|||] ds \\ &\leq \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) |||s_\varepsilon^* - s_0^*||| + \rho M (1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v^\varepsilon(s) - v^0(s)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$I_2 \leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0)) - G_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_X ds \quad (3.32)$$

onde somando e subtraindo a expresso $(I - Q_\varepsilon^+)[f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)]$ na diferença $G_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0)) - G_0(v^0, s_0^*(v^0))$, obtemos

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0)) - G_0(v^0, s_0^*(v^0)) &= (I - Q_\varepsilon^+)[f(v^0 + s^0 + u_\varepsilon^*) - f(u_*) - f'(u_\varepsilon^*)(v^0 + s^0)] - \\ &\quad - (I - Q_\varepsilon^+)[f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)] + \\ &\quad + (I - Q_\varepsilon^+)[f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)] - \\ &\quad - (I - Q_0^+)[f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)] \\ &= (I - Q_\varepsilon^+)h_\varepsilon + (Q_0^+ - Q_\varepsilon^+)[f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)], \end{aligned}$$

onde

$$h_\varepsilon = f(v^0 + s^0 + u_\varepsilon^*) - f(v^0 + s^0 + u_*) - f(u_\varepsilon^*) - f(u_*) - [f'(u_\varepsilon^*) - f'(u_*)(v^0 + s^0)].$$

De volta a integral em (3.32) e usando o fato de que

$$\int_0^t (t-s)^{-\theta} e^{\alpha(1-\theta)(t-s)} ds \leq \frac{1}{\alpha^{1-\theta}(\theta-1)^{1-\theta}} \Gamma(1-\theta) \quad (3.33)$$

para algum $\alpha < 0$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}$, obtemos $I_2 \leq C_1 \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty$ para alguma constante $C_1 > 0$. Além disso, segue do Teorema 3.20 e da estimativa (3.33) que $I_3 \leq C_2 \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}$ para alguma constante $C_2 > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - s_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \\ &+ \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v^\varepsilon(s) - v^0(s)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, uniformemente para η em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}'$. O que implica,

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - s_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \\ &+ \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v^\varepsilon(s) - v^0(s)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

uniformemente para η em subconjuntos limitados de $\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Assim, é suficiente estimar $\|v^\varepsilon(s) - v^0(s)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Uma vez que $\|\eta\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq R$, com um argumento do tipo acima, temos

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-B_\varepsilon(t-\tau)} \eta - e^{-B_0(t-\tau)} \eta\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ \int_t^\tau \|e^{-B_\varepsilon(t-s)} H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-B_\varepsilon(t-s)} H_\varepsilon(v^\varepsilon, s_0^*(v^0))\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &+ \int_t^\tau \|e^{-B_\varepsilon(t-s)} H_\varepsilon(v^0, s_0^*(v^0)) - e^{-B_\varepsilon(t-s)} H_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \\ &+ \int_t^\tau \|e^{-B_\varepsilon(t-s)} H_0(v^0, s_0^*(v^0)) - e^{-B_0(t-s)} H_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \rho M (1 + \Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v^\varepsilon - v^0\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = e^{\beta(\tau-t)} \|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Então,

$$\phi(t) \leq C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)} ds \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \rho M (1 + \Delta) \int_t^\tau \phi(s) ds,$$

e obtemos

$$\|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\overline{Q}_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \left[C \|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \beta^{-1} \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| \right] e^{[\rho M (1 + \Delta) - \beta](\tau-t)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|s_\varepsilon^*(\eta) - s_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \\
&+ \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{[-2\beta + \rho M(1+\Delta)](\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} ds [o(1) + \rho M \beta^{-1} \|s_\varepsilon^* - s_0^*\|] \\
&\leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|s_\varepsilon^* - s_0^*\| + \\
&+ \left[\rho M(1+\Delta)(2\beta - \rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \rho M \beta^{-1} \right] \|s_\varepsilon^* - s_0^*\|.
\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}
\|s_\varepsilon^* - s_0^*\| &\leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta} + \\
&+ \left\{ \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \left[\rho^2 M^2 \beta^{-1} (1+\Delta)(2\beta - \rho M(1+\Delta))^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \|s_\varepsilon^* - s_0^*\|,
\end{aligned}$$

e portanto, $\|s_\varepsilon^* - s_0^*\| \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{2\theta}$ para alguma constante $C > 0$. $\square$

Observação 3.36. Para os nossos propósitos observar a dependência continua dos pontos fixos s_ε^* é desnecessária, no entanto a fizemos, a fim de tornar explícita a taxa com que ocorre a continuidade das variedades instáveis. Veremos que obtida a taxa de convergência dos atratores, veremos que esta taxa de aproximação das variedades instáveis é melhor.

3.4 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa dos atratores

Nesta seção provaremos o Teorema 3.3, principal resultado deste capítulo.

Prova do Teorema 2.3. Usando o Teorema 3.21, o item (i) segue do Teorema 3.28. O item (ii) segue da caracterização dos atratores obtida no item (i) do Teorema 1.67, Teorema 1.68 e do Teorema 3.35, pois

$$\text{dist}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq ce^{-\rho_1 t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

onde $c > 0$ e $\rho_1 > 0$ independentem de ε .

Por fim, o item (iii) segue dos itens (i), (ii) e usando o Teorema 1.76 do Capítulo 1, onde obtemos

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C\|a_\varepsilon - a_0\|_\infty^{\frac{2\theta\rho_1}{\rho_1+L}}, \quad 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon},$$

para alguma constante $C > 0$ independente de ε , também temos $L > 0$ independente de ε . $\square$

Um problema de reação-difusão com perturbação no domínio do tipo *dumbbell*

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a dinâmica não linear de problemas de reação-difusão da forma

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon(x, t) - \Delta u^\varepsilon(x, t) + u^\varepsilon(x, t) = f(u^\varepsilon(x, t)), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.1)$$

em domínios singularmente perturbados *dumbbell-type* $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Consideremos o domínio *dumbbell-type*, isto é, Ω_ε consiste de dois domínios, que denotaremos por Ω , ligados por um canal fino R_ε que degenera-se para um segmento de reta quando ε tende a zero, denotamos por P_0 e P_1 os pontos onde o segmento de reta toca os domínios Ω , conforme as figuras 05 e 06 abaixo. Mostraremos a atração exponencial uniforme em ε dos atratores, além da taxa de convergência dos mesmos em função da medida de Lebesgue da secção transversal do canal R_ε . A variação nos espaços de funções com os quais trabalharemos será usada para definir o nosso parâmetro.

A continuidade dos atratores de (4.1) foi estudada na série *Dynamics in dumbbell domains*, veja [19, 20, 21]. Neste trabalho refinamos os resultados obtidos nos trabalhos citados, extraíndo a taxa com que ocorre a continuidade dos atratores exponenciais provenientes das equações (4.1). Para isto, assumiremos que a não linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica uma *condição de dissipatividade* do tipo

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} < 0. \quad (4.2)$$

Sob a condição (4.2) a equação (4.1) possui um atrator $\mathcal{A}_\varepsilon \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Por outro lado, passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o “domínio” limite consiste dos domínios Ω e um segmento de reta R_0 , o que constitui o “domínio” Ω_0 . A equação limite é

$$\begin{cases} w_t(x,t) - \Delta w(x,t) + w(x,t) = f(w(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \dot{v}(s) - Lv(s) + v(s) = f(v(s)), & s \in R_0, \\ v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde w é uma função que definida em Ω e v função definida no segmento de reta R_0 . Além disso, L é um operador diferencial que depende da geometria do canal R_ε , mais precisamente, sobre como o canal R_ε colapsa para o segmento de reta R_0 .

Figura 01: Domínio Dumbbell

Figura 02: “Domínio” Limite

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, se o canal $R_\varepsilon = \{(s,y); 0 < s < 1, 0 < y < \varepsilon g(s)\}$, então $Lv = \frac{1}{g}(gv_s)_s$. Ainda, este sistema possui um atrator $\mathcal{A}_0$ em $H^1(\Omega) \times H^1(R_0)$. Estamos interessados na relação que há entre os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$ e $\mathcal{A}_0$, e a medida do canal R_ε .

Definição 4.1 (Definição do domínio). *Um domínio do tipo dumbbell é constituído de domínios fixos, ambos denotados por Ω , ligados por um canal R_ε que colapsa a um segmento de reta quando ε tende a zero, o canal não necessariamente é cilíndrico, mas o consideraremos contido em um. A fim de descrever tais domínios, introduziremos alguma terminologia.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$ um domínio fixo limitado e suave tal que existe um $l > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \Omega \cap \{(s,x'); s^2 + |x'|^2 < l^2\} &= \{(s,x'); s^2 + |x'|^2 < l^2, s < 0\}, \\ \Omega \cap \{(s,x'); (s-1)^2 + |x'|^2 < l^2\} &= \{(s,x'); (s-1)^2 + |x'|^2 < l^2, s > 1\}, \\ \Omega \cap \{(s,x'); 0 < s < 1, |x'| < l\} &= \emptyset, \end{aligned}$$

com $\{(0,x'); |x'| < l\} \cup \{(1,x'); |x'| < l\} \subset \partial\Omega$. Aqui, estamos usando a notação $\mathbb{R}^N \ni x = (s,x')$, com $s \in \mathbb{R}$, $x' = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$.

O canal que consideraremos definido por $R_\varepsilon = \{(s,\varepsilon x'); (s,x') \in R_1\}$, onde R_1 definido por

$$R_1 = \{(s,x'); 0 \leq s \leq 1, x' \in \Gamma_1^s\}$$

e para todo $0 \leq s \leq 1$, Γ_1^s difeomorfo a bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$. Isto é, assumiremos que para cada $s \in [0, 1]$, existe um difeomorfismo de classe C^1 $L_s : B(0, 1) \rightarrow \Gamma_1^s$. Além disso, consideraremos o difeomorfismo de classe C^1

$$\begin{aligned} L : (0, 1) \times B(0, 1) &\rightarrow R_1 \\ (s, z) &\mapsto L(s, z) := (s, L_s(z)). \end{aligned}$$

Figura 08: Domínio *dumbbell* com um conexo Ω .

Note que a função

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto g(s) := |\Gamma_1^s| \end{aligned}$$

onde $|\Gamma_1^s|$ denota a medida de Lebesgue $(N-1)$ -dimensional do conjunto Γ_1^s . Da suavidade de R_1 , podemos assumir que g é uma função suave. Em particular, existem $d_0, d_1 > 0$ tais que $d_0 \leq g(s) \leq d_1$ para todo $s \in [0, 1]$. Mais ainda, fixado $\epsilon > 0$, $g(s) = \epsilon^{1-N} |\Gamma_\epsilon^s|$ para todo $0 \leq s \leq 1$ e o canal R_ϵ colapsa para o segmento de reta $R_0 = \{(s, 0); 0 \leq s \leq 1\}$.

Observação 4.2. Muitas classes importantes de canais são tais que as seções transversais Γ_1^s são discos centrados na origem de raio $r(s)$, isto é,

$$R_1 := \{(s, x'); |x'| < r(s), 0 \leq s \leq 1\}.$$

Para estes canais $g(s) = \omega_{N-1} r(s)^{N-1}$, onde ω_{N-1} é a medida de Lebesgue da bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$.

O domínio *dumbbell* será o domínio $\Omega_\epsilon = \Omega \cup R_\epsilon$ para $\epsilon \in (0, 1]$. Observe que não especificamos qualquer propriedade de conexidade de Ω , poderemos ter a situação descrita na Fig's. 06 ou 08.

Com estas considerações, definimos os espaços de funções nos quais trabalharemos. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço U_ϵ^p com $\epsilon > 0$ é o espaço $L^p(\Omega_\epsilon)$ munido da norma

$$\|\cdot\|_{U_\epsilon^p} := \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon^{\frac{1-N}{p}} \|\cdot\|_{L^p(R_\epsilon)}$$

e denotaremos por $U_0^p = L^p(\Omega) \oplus L_g^p(0, 1)$, onde $L_g^p(0, 1)$ o espaço $L^p(0, 1)$ com a norma

$$\|u\|_{L_g^p(0,1)} := \left(\int_0^1 g(s) |u(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, $\|(w, v)\|_{U_0^p} := \|w\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L_g^p(0,1)}$.

Também, consideraremos o espaço $H_\varepsilon^1 = H^1(\Omega) \oplus H^1(R_\varepsilon)$ com a norma

$$\|\cdot\|_{H_\varepsilon^1} := \|\cdot\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \|\cdot\|_{H^1(R_\varepsilon)}.$$

Como as soluções do problema (4.1) estão definidas em espaços diferentes, recorreremos ao mecanismo dado em [6] para comparar funções definidas nos “domínios” Ω_0 e Ω_ε . O operador extensão que consideraremos é dado por

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : U_0^p &\rightarrow U_\varepsilon^p \\ (w, v) &\mapsto E_\varepsilon(w, v)(x) := \begin{cases} w(x), & x \in \Omega \\ v(s), & x = (s, y) \in R_\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Com isso, escreveremos o problema (4.1) como uma equação semilinear abstrata da forma

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = f(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \in U_\varepsilon^p \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$, $1 \leq p < \infty$ é um operador linear ilimitado. Também, escrevemos o problema (4.3) de maneira abstrata da forma

$$\begin{cases} u_t + A_0 u = f(u), \\ u(0) = u_0 \in U_0^p \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $A_0 : D(A_0) \subset U_0^p \rightarrow U_0^p$ é um operador linear ilimitado.

Nosso objetivo é investigar a taxa com que ocorre a continuidade de toda a estrutura de (4.4) em função da medida de Lebesgue do canal R_ε . Para isto seguiremos o seguinte programa:

(1) Mostraremos que fixados $p > N$ e $2 \leq q < \infty$, existe uma constante $C > 0$ independente de ε , tal que

$$\|A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), U_\varepsilon^q)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \quad \text{e} \quad \|A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}}$$

onde M_ε é o operador projeção, conforme a Definição 4.67.

Com (1), se $p > N$, então concluímos $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$. Isto será realizado na seção 4.2.

(2) Consideraremos potenciais $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $V_0 = (V_\Omega, V_{R_0}) \in U_0^\infty$ com $|V_\varepsilon|, |V_{R_0}| \leq a$, $a > 0$ e tal que para $N < q < \infty$, temos

$$\|V_\varepsilon - E_\varepsilon V_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{\frac{N}{q}}$$

e considerando $W_\varepsilon = V_\varepsilon + a$, $W_0 = V_0 + a$, $\Lambda_\varepsilon = A_\varepsilon + W_\varepsilon$ e $\Lambda_0 = A_0 + W_0$, para $p, q > N$, teremos

$$\|\Lambda_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon \Lambda_0^{-1} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \quad \text{e} \quad \|\Lambda_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon \Lambda_0^{-1} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}}$$

onde $C > 0$ é independente de ε . Com isso, encontraremos estimativas para os operadores $(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}$ e $(\lambda + \Lambda_0)^{-1}$ com λ num setor conveniente. Isto será realizado na seção 4.2.

(3) A seguir, na seção 4.2, mostraremos a taxa de convergência dos pontos de equilíbrios dos problemas (4.4) e (4.5). Se u_0^* é um equilíbrio hiperbólico de (4.5) e u_ε^* de (4.4), então sob certas condições, mostraremos que

$$\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \quad \text{e} \quad \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^q} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}}.$$

(4) Mostraremos que a taxa de convergência dos semigrupos lineares é dada pela medida de Lebesgue do canal. Para $0 \leq \gamma < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p, q > N$, $0 < \theta < 1$ e $t > 0$, teremos

$$\begin{aligned} \|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{N}{q}}, \\ \|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta}{q}}. \end{aligned}$$

Continuando, o resultado principal deste capítulo mostra que o semigrupo não linear associado ao problema (4.4) com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ possui atrator *gradient-like*, além de provar a atração exponencial dos mesmos uniforme em ε e a taxa de convergência.

Teorema 4.3. *Seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ o semigrupo gradiente não linear associado ao problema (4.4) com atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$. Suponhamos que existam $0 < \theta < 1/2$, $\varepsilon_0 > 0$, $L > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$ e $C > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^p(\Omega_\varepsilon))} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} (\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\frac{\theta}{q}}), \quad t > 0 \\ \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} &\leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} (\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\frac{\theta}{q}}) \quad t > 0. \end{aligned}$$

onde $p > N$, e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (4.5) existam em número finito $\mathcal{E}_0 = \{u_*^{1,0}, \dots, u_*^{n,0}\}$ e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

(i) O semigrupo $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrios $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_*^{1,\varepsilon}, \dots, u_*^{n,\varepsilon}\}$ e

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n W^u(u_*^{i,\varepsilon});$$

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset U_\varepsilon^p$ limitado, existe $c = c(B) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (ii_1) \quad \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) &\leq c e^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1, \\ (ii_2) \quad \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) &\leq c e^{-\rho t} \text{ para todo } t \geq 1; \end{aligned}$$

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (iii_1) \quad \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0) + \text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(E_\varepsilon \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) &\leq C \varepsilon^{\theta \frac{\rho N}{\rho + L}}, \\ (iii_2) \quad \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0) + \text{dist}^{U_\varepsilon^p}(E_\varepsilon \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) &\leq C \varepsilon^{\theta \frac{\rho}{\rho + L}}, \end{aligned}$$

onde $\text{dist}^X(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X$ com $A, B \subset X$ é a semidistância de Hausdorff.

4.2 A família de operadores A_ε^{-1} com $\varepsilon \in [0, 1]$

Para $\varepsilon \in (0, 1]$, o espaço U_ε^p é equivalente a $L^p(\Omega_\varepsilon)$. Além disso, temos

Lema 4.4. *Para qualquer operador linear $J : L^p(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^p(\Omega_\varepsilon)$, temos*

$$\|J\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq \|J\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), U_\varepsilon^p)} \leq \varepsilon^{\frac{-N+1}{p}} \|J\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))}.$$

Demonstração. Segue do fato de que $\|\cdot\|_{U_\varepsilon^p} \leq \varepsilon^{\frac{-N+1}{p}} \|\cdot\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$. □

O problema (4.1) pode ser escrito como uma equação semilinear abstrata da forma (4.4), onde $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$, $1 \leq p < \infty$ é um operador linear definido por

$$D(A_\varepsilon) := \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega_\varepsilon); \Delta u \in U_\varepsilon^p, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega_\varepsilon \right\},$$

$$A_\varepsilon u := -\Delta u + u, \quad u \in D(A_\varepsilon),$$

o qual possui resolvente compacto, com $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Em particular, A_ε é um operador setorial em U_ε^p e verifica a seguinte estimativa

$$\|(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{C}{|\lambda| + 1} \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\theta, \quad (4.6)$$

onde $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\}$, $0 < \theta < \pi/2$ e C é uma constante que não depende de ε .

Quanto ao problema (4.3), o mesmo pode ser escrito de maneira abstrata da forma (4.5), onde $A_0 : D(A_0) \subset U_0^p \rightarrow U_0^p$ é o operador linear limitado definido por

$$D(A_0) := \{(w, v) \in U_0^p; w \in D(\Delta_N^\Omega), (gv')' \in L^p(0, 1), v(0) = w(P_0), v(1) = w(P_1)\},$$

$$A_0(w, v) := \left(-\Delta w + w, -\frac{1}{g}(gv')' + v \right), \quad (w, v) \in D(A_0),$$

onde Δ_N^Ω é o operador laplaciano com condição de fronteira homogênea de Neumann em $L^p(\Omega)$ com $D(\Delta_N^\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega); \partial u / \partial n = 0 \text{ em } \Omega\}$. Note que, para $p > \frac{N}{2}$, temos $D(\Delta_N^\Omega)$ continuamente imerso em $C(\overline{\Omega})$. Neste caso, as funções em $D(\Delta_N^\Omega)$ possuem traço em P_0 e P_1 bem definidos.

O operador A_0 gera um semigrupo $T(t)$ em U_0^p com a propriedade que $t \mapsto T(t)(w, v)$ é contínua em $t = 0$ para dados (w, v) suaves, mas pode não ser contínua em $t = 0$ para $(w, v) \in U_0^p$ qualquer. Na verdade, temos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} \leq Ct^{-1+\alpha}$$

para algum $0 < \alpha < 1$ dependendo de p e N , e a singularidade em $t = 0$ não pode ser evitada. De fato, considerando

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda + A_0)^{-1} d\lambda, \quad (4.7)$$

onde Γ é a fronteira de Σ_θ , orientada de tal maneira que a parte imaginária não decresce. Note que a integral (4.7) converge na topologia uniforme dos operadores de $\mathcal{L}(U_0^p)$ para todo $t > 0$, pois

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\cos \theta |\lambda| t} \|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} d|\lambda| \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\cos \theta |\lambda| t} \frac{1}{|\lambda|^{\alpha+1}} d|\lambda| \\ &\leq \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\cos \theta |\mu|} \frac{1}{|\mu|^{\alpha+1}} d|\mu| \leq Ct^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Em [20] há um exemplo de uma condição inicial $(w_0, v_0) \in U_0^p$ com $\|T(t)(w_0, v_0)\|_{U_0^p} \geq Ct^{-\delta}$ quando $t \rightarrow 0$ para algum $\delta > 0$. Este comportamento singular em $t = 0$ para um dado geral é consequência de uma deficiência na estimativa do resolvente.

Considere um potencial complexo $V_0 = (V_\Omega, V_{R_0}) \in U_0^\infty$. Escreveremos V_0 para $E_\varepsilon V_0 \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Considere também o operador em $\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))$ e em $\mathcal{L}(U_0^p)$ que é a multiplicação pelo potencial V_0 . Denotaremos este operador ainda por V_0 , isto é, $V_0(u_\varepsilon) \equiv (E_\varepsilon V_0)u_\varepsilon \equiv V_0 u_\varepsilon$ e $V_0(w, v) = (V_\Omega w, V_{R_0} v)$. Suponha que $\operatorname{Re} \sigma(A_0 + V_0) > \delta > 0$. Tal consideração é feita, a fim de, enunciarmos um resultado mais geral que os nossos propósitos iniciais, mas que será útil no futuro.

Proposição 4.5. *O operador $A_0 + V_0 : D(A_0 + V_0) \subset U_0^p \rightarrow U_0^p$ é densamente definido, fechado e possui resolvente compacto. Além disso, $\rho(A_0 + V_0) \supset \Sigma_\theta$ e para $p \geq q > \frac{N}{2}$, temos*

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A_0 + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^q, U_0^p)} &\leq \frac{C}{|\lambda|^{\alpha+1}}; \\ \|(\lambda + A_0 + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^\infty)} &\leq \frac{C}{|\lambda|+1} \end{aligned}$$

para cada $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2q} - \frac{1}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) < 1$ e $\lambda \in \Sigma_\theta$.

Demonstração. Sejam $(w, v) \in U_0^p$ e $(w_n, v_n) \in C_0^\infty(\Omega) \oplus C_0^\infty(0, 1)$ com $(w_n, v_n) \rightarrow (w, v)$ em U_0^p , então $(w_n, v_n) \in D(A_0 + V_0)$ e o resultado segue; Sejam $(w_n, v_n) \in D(A_0 + V_0)$ com $(w_n, v_n) \rightarrow (w, v)$ e $(A_0 + V_0)(w_n, v_n) \rightarrow (\phi, \psi)$. Usando o fato de que Δ_N^Ω é um operador fechado em $L^p(\Omega)$ e $Lv = -\frac{1}{g}(gv)'$ com condição de fronteira homogênea de Dirichlet em $s = 0$ e $s = 1$ é um operador fechado em $L_g^p(0, 1)$, temos $A_0 + V_0$ fechado em U_0^p ; Já que $D(A_0 + V_0) \subset W^{2,p}(\Omega) \oplus W^{2,p}(0, 1) \hookrightarrow L^p(\Omega) \oplus L_g^p(0, 1)$ e a imersão $W^{2,p}(\Omega) \oplus W^{2,p}(0, 1) \hookrightarrow L^p(\Omega) \oplus L_g^p(0, 1)$ é compacta, segue que $A_0 + V_0$ possui resolvente compacto.

Agora, seja $(f, h) \in U_0^p$. Resolver a equação $(w, v) = (A_0 + V_0 + \lambda)^{-1}(f, h)$ é equivalente a resolver $(A_0 + V_0 + \lambda)(w, v) = (f, h)$, que é equivalente a encontrar (w, v) tal que $-\Delta w + V_\Omega w + \lambda w = f$ em Ω com $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega$, e $-\frac{1}{g}(gv)' + V_{R_0} v + \lambda v = h$ em $(0, 1)$ com $v(0) = w(P_0)$ e $v(1) = w(P_1)$.

Usando as estimativas para operador laplaciano com condição de fronteira homogênea de Neumann, para $\lambda \in \Sigma_\theta$, temos

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+1}} \|f\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|w\|_{H^{r,q}(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{r}{2}+1}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

onde recordamos que $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\}$.

Considerando agora a mudança de variáveis $z = v - \xi$, onde ξ verifica $-\frac{1}{g}(g\xi')' = 0$, $s \in (0, 1)$ com $\xi(0) = w(P_0)$ e $\xi(1) = w(P_1)$, temos

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gz')' + V(x)z + \lambda z = h - \xi - \lambda \xi, & s \in (0, 1), \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Note que, se $A_g : D(A_g) \subset L_g^p(0, 1) \rightarrow L_g^p(0, 1)$ é o operador dado por $D(A_g) = \{z \in L_g^p(0, 1); (gz')' \in L_g^p(0, 1); z(0) = z(1) = 0\}$ e $A_g z = -\frac{1}{g}(gz')' + V(x)z$ para todo $z \in D(A_g)$, temos a seguinte estimativa

$$\|(A_g + \lambda)^{-1}y\|_{L_g^p(0,1)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}+1} \|h - (\lambda + 1)\xi\|_{L_g^p(0,1)}.$$

Fazendo $y = h - (\lambda + 1)\xi$, obtemos

$$\|z\|_{L_g^p(0,1)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}+1} \|h\|_{L_g^p(0,1)} + \tilde{C}|\lambda|^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|\xi\|_{L_g^p(0,1)}.$$

Portanto, para $v = z + \xi$, temos

$$\|v\|_{L_g^p(0,1)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}+1} \|h\|_{L_g^p(0,1)} + \tilde{C}|\lambda|^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|\xi\|_{L_g^p(0,1)} + \|\xi\|_{L_g^p(0,1)}.$$

Mas, note que $\|\xi\|_{L_g^p(0,1)} \leq C\|\xi\|_{L_g^p(0,1)} \leq C(|w(P_0)| + |w(P_1)|) \leq C\|w\|_{C^0(\overline{\Omega})}$, e usando a imersão $W^{r,q}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ para qualquer $r > \frac{N}{q}$, temos $\|\xi\|_{L_g^p(0,1)} \leq C\|\xi\|_{L_g^p(0,1)} \leq C\|w\|_{W^{r,q}(\Omega)}$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_g^p(0,1)} &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}+1} \|h\|_{L_g^p(0,1)} + (\tilde{C}+1)|\lambda|^{\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|w\|_{W^{r,q}(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}+1} \|h\|_{L_g^p(0,1)} + \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-r)}+1} \|f\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.6. Devemos mencionar que A_0 não é setorial. Seu espectro é todo real, e portanto, está contido em um setor, mas a estimativa do resolvente

$$\|(\lambda + A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^p)} \leq \frac{C}{|\lambda + a|}$$

não é satisfeita.

Agora, considere o problema elíptico não linear associado ao problema (4.1)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.9)$$

definido no domínio *dumbbell* Ω_ε com f satisfazendo as seguintes condições

- (i.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 ,
- (ii.) $|f(u)| + |f'(u)| + |f''(u)| \leq C_1$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Denotaremos por $\mathcal{E}_\varepsilon$ o conjunto das soluções do problema (4.9). Sob as condições acima na não linearidade f , o conjunto $\mathcal{E}_\varepsilon$ é limitado em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ uniformemente para $\varepsilon \in (0, 1]$. O problema limite de (4.9) quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é o seguinte

$$\begin{cases} -\Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ -\frac{1}{g}(gv_s)_s + v = f(v), & s \in (0, 1), \\ v(0) = w(P_0), & v(1) = w(P_1). \end{cases} \quad (4.10)$$

Uma solução da equação limite possui duas componentes (w, v) . A primeira está definida em Ω e a segunda em $(0, 1)$, ou equivalente, no segmento de reta R_0 . Note que a função w independe de v , mas v depende de w . Portanto, para resolver (4.10) primeiro encontramos uma solução w do problema

$$\begin{cases} -\Delta w + w = f(w), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

Toda solução de (4.11) é suficientemente regular. Em particular, ela é $C^0(\overline{\Omega})$ e faz sentido considerar o traço de w em P_0 e P_1 . Uma vez que, isto é obtido, resolvemos o problema não linear

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gv_s)_s + v = f(v), & s \in (0, 1), \\ v(0) = w(P_0), & v(1) = w(P_1). \end{cases} \quad (4.12)$$

Segue abaixo um dos principais resultados do programa que executamos para mostrar a convergência com taxa dos atratores.

Proposição 4.7 (Lema Elíptico - *Dumbbell*). *Para cada $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ com $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$, sejam u_ε a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.13)$$

e $(w_\varepsilon, v_\varepsilon)$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w + w = f_\varepsilon, & x \in \Omega \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ -\frac{1}{g}(gv_s)_s + v = M_\varepsilon f_\varepsilon, & s \in (0, 1) \\ v(0) = w(P_0), & v(1) = w(P_1). \end{cases} \quad (4.14)$$

então, para $p > N$ e $2 \leq q < \infty$, existe uma constante $C > 0$, independente de ε , tal que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C. \quad (4.15)$$

Além disso, existe $C > 0$ independente de ε e f_ε , tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{2}}; \\ (ii) \quad & \|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}; \\ (iii) \quad & \|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^q} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Demonstração. A limitação (4.15) será provada no Lema 4.53, ver Apêndice. A estimativa (i) será provada no Lema 4.50, ver Apêndice. Observe que, em particular, da estimativa (i), temos

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \quad (4.16)$$

Pela estimativa (4.15), para $p > N/2$, temos

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \quad (4.17)$$

Se $p > N/2$, então pela Proposição 4.5, temos $\|A_0^{-1}M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(0,1)} \leq C\|M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega) \oplus L^p(0,1)}$ e

$$\|E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \quad (4.18)$$

usando (4.17) e (4.18), obtemos

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \quad (4.19)$$

Para $q \geq 2$, a estimativa (ii) segue de (4.16) e (4.19) e de interpolação. A estimativa (iii) segue diretamente do Lema 4.4 e da estimativa (ii). $\square$

Observação 4.8. A estimativa (ii) do Lema Elíptico 4.7 nos diz que a taxa de aproximação que obtivemos é melhor no domínio Ω do que a obtida no canal R_ε .

Proposição 4.9. Seja $p > N$ e considere uma seqüência $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ com $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Existe uma subsequência que ainda denotaremos por ε e $(f, h) \in U_0^p$ tal que, se $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é a solução de (4.9) com f_ε , $w \in H^1(\Omega)$ é a solução de (4.11) com f , e $v \in H^1(0, 1)$ é a solução de (4.12) com h e w . Então,

- (1) $\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^q} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $1 \leq q < \infty$;
- (2) Se $p > N$ e $\|f_\varepsilon - E_\varepsilon(f, h)\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então temos (1) para toda a seqüência.

Demonstração. Se $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$, então pelo Lema 4.51 podemos obter uma subsequência, que ainda denotaremos por ε e $(f, h) \in U_0^p$, tal que se u_ε e (w, v) são dados por (4.13) e (4.14), então o Lema 4.52 válido. Com isso,

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^2} \leq \|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{H_\varepsilon^1} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^1} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Uma vez que, pelo Lema 4.53, temos $\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, interpolando estas estimativas com (4.20), obtemos

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^q} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 1 \leq q < \infty.$$

A afirmação (2) segue usando a afirmação (1), o Lema 4.51 e um argumento por contradição. $\square$

Noutras palavras, a Proposição 4.7 juntamente com a Proposição 4.9 mostram que se $p > N$, então $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ com taxa definida pela medida do canal.

4.3 Continuidade das estruturas para a linearização

Considerando na família de espaços de Banach U_ε^p a seguinte família de problemas não lineares

$$A_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon^e u_\varepsilon = 0, \quad (4.21)$$

onde, $p > N$ e $f_\varepsilon^e : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$ é o operador de Nemitskiĭ de f em U_ε^p , isto é, $f_\varepsilon^e(u_\varepsilon)(x) = f(u_\varepsilon(x))$, $x \in \Omega_\varepsilon$. Com um abuso de notação, nos referiremos ao operador de Nemitskiĭ de f_ε em U_ε^p apenas por f_ε . O operador $f_\varepsilon^e : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$ é limitado e é uma aplicação diferenciável para $\varepsilon \in [0, 1]$. Seja $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_\varepsilon^*; A_\varepsilon u_\varepsilon^* + f_\varepsilon(u_\varepsilon^*) = 0\}$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Além disso, temos

Observação 4.10. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada com derivadas até segunda ordem limitada. Podemos mostrar que se denotarmos por $f_\varepsilon : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$, $p > N$, o operador de Nemitskii de f em U_ε^p , então a condição:*

$$A_\varepsilon \text{ é fechado, com resolvente compacto, } 0 \in \rho(A_\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1} \text{ e } A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(\cdot) \xrightarrow{CC} A_0^{-1} f_0(\cdot). \quad (4.22)$$

é satisfeita.

De fato, supondo que $U_\varepsilon^p \ni u_\varepsilon \xrightarrow{E} u \in U_0^p$. Então, com um argumento análogo ao do Lema 3.13 e do Teorema 3.14, concluímos que

$$\|f_\varepsilon^e(u_\varepsilon) - E_\varepsilon f_0^e(u)\|_{U_\varepsilon^p} = \|f_\varepsilon^e(u_\varepsilon) - f_\varepsilon^e(E_\varepsilon u)\|_{U_\varepsilon^p} \leq L \|u_\varepsilon - E_\varepsilon u\|_{U_\varepsilon^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.23)$$

E a condição (4.22) agora segue da convergência compacta $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, do fato de que f_ε^e é uniformemente limitado para $\varepsilon \in [0, 1]$ e de (4.23).

Teorema 4.11. *Se u_0^* é uma solução de*

$$A_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \quad (4.24)$$

com $\varepsilon = 0$ que satisfaz $0 \notin \sigma(A_0 + f'_0(u_0^))$, então u_0^* é um ponto de equilíbrio isolado com $|\text{ind}(u_0^*, I + A_0^{-1} f'_0(u_0^*))| = 1$, isto é, o índice de u_0^* relativamente a aplicação $I + A_0^{-1} f'_0(\cdot)$ possui módulo igual a 1.*

Demonstração. A seguir, se U denota um espaço de Banach real, $\mathcal{O} \subset U$ um aberto, $\mathcal{K}(\mathcal{O})$ o conjunto das aplicações compactas de $\mathcal{O}$ em U e $(I - F, \mathcal{O}, u)$ uma terna admissível, isto é, se $\mathcal{O} \subset U$ é um aberto limitado, $F \in \mathcal{K}(\mathcal{O})$ e $u \notin (I - F)(\partial \mathcal{O})$. Denotaremos por $d(I - F, \mathcal{O}, u)$ o grau de Leray-Schauder de $I - F$ em u em relação a $\mathcal{O}$.

Seja $F : \mathcal{O} \subset U \rightarrow U$ uma aplicação compacta, $u \in \mathcal{O}$ e $\varepsilon_0 > 0$. Se para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $(I - F, B_U(u; \varepsilon), u)$ uma tripla admissível¹ e $d(I - F, B_U(u; \varepsilon), u)$ independe de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, diremos que este valor comum é o índice de u relativamente a aplicação $I - F$, o qual denotaremos por $\text{ind}(u, I - F)$.

Note que u_0^* é uma solução de equilíbrio de (4.24) com $\varepsilon = 0$ se, e somente se, este é um ponto fixo do operador compacto $-A_0^{-1} f_0(\cdot) : U_0^p \rightarrow U_0^p$. Também, $0 \notin \sigma(A_0 + f'_0(u_0^*))$ se e somente se, $1 \notin \sigma(-A_0^{-1} f'_0(u_0^*))$. Segue que existe uma constante $\eta > 0$ tal que $\|v + A_0^{-1} f'_0(u_0^*)v\|_{U_0^p} \geq 2\eta \|v\|_{U_0^p}$. Se definirmos $w_0(u_0^*, v) = A_0^{-1} f_0(u_0^* + v) - A_0^{-1} f_0(u_0^*) - A_0^{-1} f'_0(u_0^*)v$, então pela diferenciabilidade de f_0 , temos

$$\frac{\|w_0(u_0^*, v)\|_{U_0}}{\|v\|_{U_0^p}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0.$$

Em particular, existe $r > 0$ tal que $\|w_0(u_0^*, v)\|_{U_0^p} \leq \eta \|v\|_{U_0^p}$ para $\|v\|_{U_0^p} \leq r$. Então, para todo $\|u_0^* - u\|_{U_0^p} \leq r$, temos

$$\|u + A_0^{-1} f_0(u)\|_{U_0^p} \geq \eta \|u - u_0^*\|_{U_0^p}.$$

Assim, u_0^* é um equilíbrio isolado. A prova de que $|\text{ind}(u_0^*, I + A_0^{-1} f'_0(u_0^*))| = 1$ segue como uma consequência do Teorema 21.6 de [24]. $\square$

Corolário 4.12. *Se u_0^* é uma solução hiperbólica de (4.3) com $\varepsilon = 0$, então u_0^* é um equilíbrio isolado e $|\text{ind}(u_0^*, I + A_0^{-1} f'_0(u_0^*))| = 1$.*

Proposição 4.13. *Se todos os pontos de $\mathcal{E}_0$ são isolados, então existe apenas um número finito destes. Se $0 \notin \sigma(A_0 + f'_0(u_0^*))$ para cada $u_0^* \in \mathcal{E}_0$, então $\mathcal{E}_0$ é um conjunto finito com um número ímpar de elementos.*

Demonstração. Note todas as soluções de (4.24) com $\varepsilon = 0$ satisfazem

$$u + A_0^{-1} f_0(u) = 0. \quad (4.25)$$

¹ $B_U(u; \varepsilon)$ denota a bola em U de raio ε e centro u

Se considerarmos a bola de raio maior que $\|A_0^{-1}\|K$, com $K = \sup\{\|f_0(u)\|_{U_0^p}; u \in U_0^p\}$, então o operador $-A_0^{-1}f(\cdot)$ aplica a bola $B_{U_0^p}(0; \|A_0^{-1}\|K)$ em si própria. Pelo Teorema do fixo de Schauder $d(I + A_0^{-1}f(\cdot), B_{U_0^p}(0; \|A_0^{-1}\|K), 0) = 1$ e existe pelo menos um ponto fixo u_0^* para $-A_0^{-1}f(\cdot)$ na bola $B(0; \|A_0^{-1}\|K)$, isto é,

$$u_0^* + A_0^{-1}f_0(u_0^*) = 0 \text{ com } u_0^* \in B(0; \|A_0^{-1}\|K).$$

Já que o operador $-A_0^{-1}f(\cdot) : U_0^p \rightarrow U_0^p$ é compacto, o conjunto $\mathcal{E}_0 = \{u; A_0 u + f_0(u) = 0\}$ é compacto em U_0^p . Além disso, pelo Teorema 4.11 qualquer ponto fixo u_0^* é isolado. A finitude de $\mathcal{E}_0$ segue por argumentos de compacidade. Agora, pelo Teorema 20.6 de [24], temos

$$1 = d(I + A_0^{-1}f(\cdot), B_{U_0^p}(0, \|A_0^{-1}\|K), 0) = \sum_{i=1}^j \text{ind}(u_i^*, I + A_0^{-1}f(\cdot))$$

e portanto, o número $j = 2k + 1$ para algum inteiro $k \geq 0$. $\square$

Proposição 4.14. *Suponha que valha a condição (4.22) e que o problema (4.24) com $f_\varepsilon : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$ uma aplicação limitada e diferenciável para $\varepsilon \in [0, 1]$, possua soluções $\{u_\varepsilon^*\}$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Então, tomando subsequências se necessário, existe uma solução u_0^* do problema (4.24) com $\varepsilon = 0$ tal que $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Basta escrever o problema (4.24) da forma $u_\varepsilon = -A_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon u_\varepsilon$ e usar a condição (4.22). $\square$

Proposição 4.15. *Suponha que valha a condição (4.22) e que u_0^* seja uma solução hiperbólica de (4.24) com $\varepsilon = 0$. Então, existem ε_0 e $\delta > 0$ tais que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, a equação (4.24) possui pelo menos uma solução u_ε^* em $B_{U_\varepsilon^p}(E_\varepsilon u_0^*; \delta)$. Além disso, $\|u_\varepsilon - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Como no Corolário 4.12 existe uma bola $B(u_0^*; \delta)$ tal que não existe outro ponto fixo exceto u_0^* e nós obtemos $d(I + A_0^{-1}f(\cdot), B(0; \|A_0^{-1}\|K), 0) = 1$ e portanto, existe pelo menos um ponto fixo u_ε^* em qualquer bola $B(E_\varepsilon u_0^*; \delta)$, para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ para algum $\varepsilon_0 > 0$. $\square$

Gostaríamos de impor condições sobre a não linearidade f_ε que garantam que para uma solução de equilíbrio hiperbólica fixada u_0^* da equação limite, temos somente uma solução próxima u_ε^* da equação perturbada. Para isto defina

$$w_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = A_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(u_\varepsilon^* + v) - A_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(u_\varepsilon^*) - A_\varepsilon^{-1}f'_\varepsilon(u_\varepsilon^*)v.$$

Considere a seguinte condição:

A hipótese (4.22) é válida, e se u_ε^* são as soluções de equilíbrio com $u_\varepsilon^* \xrightarrow{E} u_0^*$ em U_ε^p , então (4.26)

$$A_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(u_\varepsilon^*) \xrightarrow{CC} A_0^{-1}f'_0(u_0^*) \text{ e } \frac{\|w_\varepsilon(u_\varepsilon^*, v)\|_{U_\varepsilon^p}}{\|v\|_{U_\varepsilon^p}} = o(1) \text{ se } \|v\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } \varepsilon.$$

Observação 4.16. Nas condições da Observação 4.10, mostraremos que a condição (4.26) é válida. Note que se $u_\varepsilon^* \xrightarrow{E} u_0^*$ em U_ε^p e se, definirmos $V_\varepsilon = f'(u_\varepsilon^*)$, $V_0 = f'(u_0)$, temos $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $V_0 \in L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(0, 1)$. Além disso, $V_\varepsilon \xrightarrow{E} V_0$. Também,

$$A_\varepsilon^{-1} f'(u_\varepsilon^*) \xrightarrow{CC} A_0^{-1} f'(u_0^*).$$

Agora, provaremos que para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, obtemos

$$\|w_\varepsilon(u_\varepsilon, v)\|_{U_\varepsilon^p} \leq C \|v\|_{U_\varepsilon^p}^{\frac{p}{q}}$$

para qualquer $N < q < p$, onde C é uma constante independente de ε . Para provar a estimativa acima, note que pelo Lema 4.53, para cada $N < q$ existe uma constante C , independente de ε , tal que

$$\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq C.$$

Por interpolação, se $N < q < p$, então $\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, U_\varepsilon^p)} \leq C$. Portanto, se $N < q < p$, então

$$\|A_\varepsilon^{-1}[f_\varepsilon^e(u_\varepsilon + v)f_\varepsilon^e(u_\varepsilon) - (f^e)'(u_\varepsilon)v]\|_{U_\varepsilon^p} \leq C \|f'(u_\varepsilon(x) + \theta(x)v(x)) - f'(u_\varepsilon(x))\|_{U_\varepsilon^r} \|v(x)\|_{U_\varepsilon^p}$$

com $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Note que, para todo $v \in U_\varepsilon^p$,

$$\|f'(u_\varepsilon(x) + \theta(x)v(x)) - f'(u_\varepsilon(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \text{ e } \|f'(u_\varepsilon(x) + \theta(x)v(x)) - f'(u_\varepsilon(x))\|_{U_\varepsilon^p} \leq C \|v\|_{U_\varepsilon^p},$$

e interpolando, temos

$$\|f'(u_\varepsilon(x) + \theta(x)v(x)) - f'(u_\varepsilon(x))\|_{U_\varepsilon^p} \leq C \|v\|_{U_\varepsilon^p}^{\frac{p}{r}} \leq C \|v\|_{U_\varepsilon^p}^{\frac{p-q}{q}}.$$

Teorema 4.17. Suponha (4.26) e seja u_0^* uma solução de (4.24) com $\varepsilon = 0$ satisfaça $0 \notin \sigma(A_0 + f'_0(u_0^*))$. Então, existe $\delta > 0$ tal que (4.24) possui uma única solução u_ε^* tal que $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} < \delta$.

Se, para toda solução u_0^* de (4.24) com $\varepsilon = 0$, $0 \notin \sigma(A_0 + f'_0(u_0^*))$ então, pela Proposição 4.13 o problema (4.24) com $\varepsilon = 0$ possui um número finito n_0 de soluções $u_1^*, \dots, u_{n_0}^*$. Neste caso, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (4.24) possui um número finito n_0 de soluções $u_{\varepsilon,1}^*, \dots, u_{\varepsilon,n_0}^*$ com $u_{\varepsilon,i}^*$ E -convergente para $u_{0,i}^*$ em U_ε^p .

Se, além disso, u_0^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico, então u_ε^* também é hiperbólico. Em particular, a variedade instável linear de u_ε^* E -converge para a variedade instável linear de u_0^* em U_ε^p .

Demonstração. Note que u_ε^* é uma solução de (4.24) se, e somente se, é um ponto fixo do operador compacto $-A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(\cdot) : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$. Com isso, existe um $\varepsilon_0 > 0$ e $\eta > 0$ (independente de $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$) tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \notin \sigma(A_\varepsilon + f'_\varepsilon(u_\varepsilon^*))$ e $\|(I + A_\varepsilon^{-1} f'_\varepsilon(u_\varepsilon^*))v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \geq 2\eta \|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}$. Escrevemos

$$\frac{\|w_\varepsilon(u_\varepsilon^*, v_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^p}}{\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}} \leq h(\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p})$$

onde $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser tomada contínua com $h(0) = 0$. Portanto, existe um $\delta > 0$ (independe de ε) tal que $\|w_\varepsilon(u_\varepsilon^*, v_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^p} \leq \eta \|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}$ para $\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 2\delta$. Então, para $\|u_\varepsilon^* - u_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 2\delta$, temos

$$\|u_\varepsilon + A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^p} \geq \eta \|u_\varepsilon^* - u_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}.$$

Assim, u_ε^* é a única solução de (4.24) em $B(u_\varepsilon^*; 2\delta)$. Isto juntamente com o fato de que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u_0^*$ em U_ε^p implica o resultado. $\square$

Teorema 4.18. *Seja $p > N$. Então,*

(i) *Para qualquer seqüência $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, existe uma subsequência, que também denotaremos por ε e $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ tal que*

$$\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

(ii) *Para qualquer ponto de equilíbrio $u_0^* \in \mathcal{E}_0$, existe $\eta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que existe um somente um equilíbrio $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$ tal que*

$$\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \leq \eta \text{ para todo } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (4.27)$$

Além disso, as convergências em (i) são satisfeitas.

Em particular, se cada equilíbrio do problema limite é hiperbólico, então temos somente um número finito destes, isto é, $\mathcal{E}_0 = \{u_0^1, \dots, u_0^m\}$ e existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^m\}$ e $u_\varepsilon^i \rightarrow u_0^i$ no sentido descrito em (i). Além disso, o número de equilíbrios, m , é ímpar.

Demonstração. Usando o Princípio do Máximo, podemos obter que o conjunto dos pontos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$ é limitado em $L^\infty(\Omega)$ com cota independente de ε . Analogamente, o conjunto dos equilíbrios do problema limite também é uniformemente limitado.

Note que, se $p > N$ então temos a convergência compacta de A_ε^{-1} a A_0^{-1} . Além disso, como esta mostrado na Observação 4.10 a condição (4.22) também é satisfeita. Aplicando a Proposição 4.14 mostramos $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se denotarmos agora por $f_\varepsilon^* = f(u_\varepsilon^*) \in U_\varepsilon^p$ e $f_0^* = f(u_0^*) \in U_0^p$, pela continuidade de f , temos $\|f_\varepsilon^* - E_\varepsilon f_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Aplicando a Proposição 4.7 e levando em conta que $u_\varepsilon^* = A_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon^*$, $u_0^* = A_0^{-1} f_0^*$ provamos a parte (i) do teorema.

Pela Observação 4.16, a hipótese (4.26) é satisfeita e a prova de (ii) segue do Teorema 4.17. $\square$

Observação 4.19. *Um ponto de equilíbrio do problema limite $u_0^* = (w_0, v_0) \in \mathcal{E}_0$ é hiperbólico se a linearização de (4.4) não possui autovalores no eixo imaginário. Observe que λ é autovalor da linearização se temos uma solução (w, v) não identicamente nula, tal que*

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \phi - f'(w_0)\phi = \lambda \phi, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega \\ -\frac{1}{g}(gv_s)_s + \psi - f'(v_0)\psi = \lambda \psi, & s \in (0, 1) \\ \psi(0) = \phi(0), \quad \psi(1) = \phi(1). \end{cases} \quad (4.28)$$

De (4.28) podemos ver todos os autovalores são reais, embora o operador obtido pela linearização não seja auto-adjunto e $\lambda = 0$ não é autovalor de (4.28). Se $\lambda = 0$ não é um autovalor de $-\Delta\phi + \phi - f'(w_0)\phi = \lambda\phi$ em Ω com condição de fronteira homogênea de Neumann, nem um autovalor do operador $-\frac{1}{g}(gv_s)_s + \psi - f'(v_0)\psi = \lambda\psi$ em $(0, 1)$ com condição de fronteira homogênea de Dirichlet.

Teorema 4.20. Nas condições do Teorema 4.18, sejam $\{u_\varepsilon^*\}$ equilíbrios de (4.1) e $u_0^* = (w_0, v_0)$ um equilíbrio de (4.4) satisfazendo a condição (i) do Teorema 4.18. Seja $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ o conjunto dos autovalores (ordenados e contando suas multiplicidades) da linearização em torno de u_ε^* , isto é, os autovalores de

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\varepsilon + \phi_\varepsilon - f'(w_\varepsilon)\phi_\varepsilon = \lambda\phi_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.29)$$

e por $\{\phi_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ o conjunto ortonormal das autofunções correspondentes. Também, denote por $\{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ o conjunto dos autovalores de (4.28) (ordenados e contando suas multiplicidades algébricas), e denote por $\{\phi_n^0\}_{n=1}^\infty$ um conjunto das autofunções generalizadas correspondentes. Então, temos λ_n^ε convergindo para λ_n^0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $n = 1, 2, \dots$

Também, se n é tal que $\lambda_n^0 < \lambda_{n+1}^0$, e definindo

$$W_n^0 = \text{span}[\phi_1^0, \dots, \phi_n^0] \quad e \quad W_n^\varepsilon = \text{span}[\phi_1^\varepsilon, \dots, \phi_n^\varepsilon],$$

então

$$\text{dist}_H^{U_\varepsilon^p}(W_n^\varepsilon, E_\varepsilon W_n^0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad e \quad \text{dist}_H^{H_\varepsilon^1}(W_n^\varepsilon, E_\varepsilon W_n^0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.30)$$

Em particular, se u_0^* ponto de equilíbrio hiperbólico do problema limite e u_ε^* uma seqüência de pontos de equilíbrios tal que $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^p} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então para ε suficientemente pequeno, u_ε^* também hiperbólico e sua variedade instável linearizada converge no sentido (4.30) para a variedade instável linearizada de u_0^* . Em particular, a dimensão da variedade de instável de u_ε^* e de u_0^* coincide.

Observação 4.21. Em relação a (4.30), a distância simétrica de Hausdorff de dois subespaços é calculada usando as bolas unitárias, isto é, se W_1 e W_2 são dois subespaços do espaço de Banach U , então

$$\text{dist}_H^U(W_1, W_2) := \sup_{x \in B_{W_1}} \inf_{y \in B_{W_2}} \|x - y\|_U + \sup_{x \in B_{W_2}} \inf_{y \in B_{W_1}} \|x - y\|_U,$$

onde B_{W_1} e B_{W_2} são as bolas unitárias de W_1 e W_2 , respectivamente.

Demonstração. Pelo Teorema 4.20, temos uma seqüência de equilíbrios u_ε^* que E -converge para $u_0^* = (w_0, v_0)$ em U_ε^p satisfazendo a condição (i) do Teorema 4.18. Além disso, se definimos $V_\varepsilon = f'(u_\varepsilon^*) + M$ e $V_0 = f'(u_0^*) + M$, para alguma constante M suficientemente grande tal que $f'(u_0^*) + M \geq 0$, então a tese do Lema 2.10 valhe. Além disso, já que $f'(u_0^*) + M \geq 0$, temos $0 \notin \sigma(A_0 + V_0)$.

Portanto, pela Proposição 2.6 que em particular implica que a convergência espectral para os operadores $A_\varepsilon + f'(u_\varepsilon^*) + M$ e $A_0 + f'(u_0^*) + M$ dada pelo Teorema 2.8. Já que o efeito da constante M nos operadores acima é de um *shift* no espectro, mostramos que os resultados do Teorema 2.8 são válidos para os operadores $A_\varepsilon + f'(u_\varepsilon^*)$ e $A_0 + f'(u_0^*)$. Em particular, obtemos a convergência dos autovalores e das projeções espectrais em U_ε^p . $\square$

4.4 Estimativas do resolvente e taxa de convergência dos semigrupos

Retomemos a um potencial complexo $V_0 = (V_\Omega, V_{R_0}) \in U_0^\infty$, e escrevendo V_0 para $E_\varepsilon V_0 \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ consideremos o operador em $\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))$ e em $\mathcal{L}(U_0^p)$ que é a multiplicação pelo potencial V_0 , onde $V_0(u_\varepsilon) \equiv (E_\varepsilon V_0)u_\varepsilon \equiv V_0 u_\varepsilon$ e $V_0(w, v) = (V_\Omega w, V_{R_0} v)$. Suponhondo que $\operatorname{Re} \sigma(A_0 + V_0) > \delta > 0$. Para qualquer $0 < \varepsilon \leq 1$, o operador $A_\varepsilon + V_0$ é setorial em U_ε^p e vale a seguinte estimativa.

$$\|(\lambda + A_\varepsilon + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{C}{|\lambda| + 1} \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\theta, \quad (4.31)$$

onde $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e C é uma constante que não depende de ε , mas depende de p e não é limitada para $p = +\infty$. Esta estimativa segue do fato de que a localização da imagem numérica do plano complexo independe de ε .

Além disso, segue de (4.31) e do Lema 4.4, que para todo $\lambda \in \Sigma_\theta$, temos

$$\|(\lambda + A_\varepsilon + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq \|(\lambda + A_\varepsilon + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), U_\varepsilon^p)} \leq C \frac{\varepsilon^{\frac{-N+1}{p}}}{|\lambda| + 1} \quad (4.32)$$

A fim de obter a convergência do resolvente de $A_\varepsilon + V_0$ usaremos fortemente o resultado anterior e a seguinte estimativa uniforme em ε .

Lema 4.22. *Se V_0 é tal que $A_0 + V_0$ é invertível, então para cada $p > N/2$, existe uma constante C , independente de ε , tal que*

$$\|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C \quad (4.33)$$

e

$$\|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq C. \quad (4.34)$$

Demonstração. A estimativa (4.33) segue diretamente do fato de que $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_0^p, U_\varepsilon^p)} = \|M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_0^p)} = 1$ e da primeira estimativa da Proposição 4.5. Para provar a estimativa (4.34) procedemos da seguinte

maneira, dado $f_\varepsilon \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon = (w_\varepsilon, v_\varepsilon) = (A_0 + V_0^{-1})M_\varepsilon f_\varepsilon$, temos

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + w_\varepsilon + V_\Omega(x)w_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{1}{g}(g(v_\varepsilon)_s)_s + v_\varepsilon + V_{R_0}(s)v_\varepsilon = M_\varepsilon f_\varepsilon, & s \in (0, 1) \\ v_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(P_0), & v_\varepsilon(1) = w_\varepsilon(P_1). \end{cases} \quad (4.35)$$

Mostraremos que $\|E_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$, onde $\|E_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{-N+1}{p}}\|E_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)}$. Já que $p > \frac{N}{2}$, temos

$$\|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \text{ e } \|w_\varepsilon\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}$$

Em particular, $|w_\varepsilon(P_0)| + |w_\varepsilon(P_1)| \leq C\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}$.

Por outro lado, considerando a mudança de variáveis $\tilde{v}_\varepsilon = v_\varepsilon - z_\varepsilon$, onde

$$\begin{cases} \frac{1}{g}(g(z_\varepsilon)_s)_s = 0, & s \in (0, 1) \\ z_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(P_0), & z_\varepsilon(1) = w_\varepsilon(P_1). \end{cases} \quad (4.36)$$

de onde concluímos que $\tilde{v}_\varepsilon(0) = \tilde{v}_\varepsilon(1) = 0$.

Logo, usando o fato de que $\|M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L_g^p(0,1)} \leq \varepsilon^{\frac{N-1}{p}}\|f_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)}$ e $\|E_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)} = \varepsilon^{\frac{N-1}{p}}\|v_\varepsilon\|_{L_g^p(0,1)}$, temos

$$\begin{aligned} \|E_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{\frac{N-1}{p}}(\|z_\varepsilon\|_{L_g^p(0,1)} + \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L_g^p(0,1)}) \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N-1}{p}}(|w_\varepsilon(P_0)| + |w_\varepsilon(P_1)|) + C\varepsilon^{\frac{N-1}{p}}\|M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L_g^p(0,1)} \\ &\leq C(|w_\varepsilon(P_0)| + |w_\varepsilon(P_1)|) + C\|f_\varepsilon\|_{L^p(R_\varepsilon)} \\ &\leq C\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

□

Provaremos agora o principal resultado desta subseção.

Proposição 4.23. *Se $p, q > N$ e $(A_0 + V_0) : D(A_0) \subset U_0^p \rightarrow U_0^p$ possui inversa limitada, então*

$$\|(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{N/q}, \quad (4.37)$$

e

$$\|(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q)} \leq C\varepsilon^{1/q}, \quad (4.38)$$

onde C depende de $\|(A_0 + V_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_0^p)}$ e $\|V_0\|_{L^\infty}$, mas não de ε .

Demonstração. Sabemos que se $(A_0 + V_0)$ é invertível, então $(A_\varepsilon + V_0)$ é invertível para ε suficientemente pequeno. Portanto, a estimativa (4.38) faz sentido. Na identidade (2.10) adicionando e subtraindo o termo $E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon V_0[A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon + V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon]$, temos

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon + V_0)^{-1} &= E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon = \\ &= [-(A_\varepsilon + V_0)^{-1} + E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon]V_0(A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)[I - V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon] + \\ &+ [I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon V_0](A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)[I - V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon]. \end{aligned}$$

Primeiro, estimaremos

$$\Theta_\varepsilon = [-(A_\varepsilon + V_0)^{-1} + E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon]V_0(A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)[I - V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon].$$

Note que, da Proposição 4.7, temos

$$\|A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}.$$

Uma vez que,

$$\|V_0\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\|V_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \text{ e } \|V_0\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C\|V_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}.$$

segue de (4.33) que

$$\|\Theta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{1/p} \|(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))},$$

onde $C = C(\|V_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)})$ independente de ε . Escolhendo ε_0 tal que $C\varepsilon^{1/p} \leq 1/2$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$\begin{aligned} \|(A_\varepsilon + V_0)^{-1} &- E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^p(\Omega_\varepsilon))} \\ &\leq 2\|(I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon V_0)(A_\varepsilon - E_\varepsilon A_0^{-1}M_\varepsilon)(I - V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))}. \end{aligned}$$

Agora, de (4.33) e (4.34) existe uma constante C , independente de ε , tal que

$$\begin{aligned} \|(I - V_0 E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} &\leq 1 + C\|V_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \\ \|(I - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}V_0 M_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} &\leq 1 + C\|V_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Assim, usando a estimativa (ii) da Proposição 4.7, obtemos $C > 0$ tal que

$$\|(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{N/q}.$$

□

Agora, estudaremos as propriedades de convergência de operadores resolventes $(A_\varepsilon + W_\varepsilon)^{-1}$, onde W_ε converge para W_0 em algum sentido específico. Necessitamos realizar este estudo porque desejamos comparar os operadores resolventes da linearização em torno de um equilíbrio.

Tendo isto mente, consideremos os potenciais a seguir.

(H) $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $V_0 = (V_\Omega, V_{R_0}) \in U_0^\infty$ dois pontenciais que satisfazem $|V_\varepsilon|, |V_0| \leq a$ para alguma constante $a > 0$ e tais que para $N < q < \infty$, temos

$$\|V_\varepsilon - E_\varepsilon V_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}. \quad (4.39)$$

Denotando $W_\varepsilon = V_\varepsilon + a$, $W_0 = V_0 + a = (V_\Omega + a, V_{R_0} + a)$, tal que W_ε e W_0 são operadores positivos que satisfazem uma condição do tipo (4.39), substituindo V_ε por W_ε e V_0 por W_0 .

Com esta notação e escrevendo $\Lambda_\varepsilon = A_\varepsilon + W_\varepsilon$, o operador Λ_ε é setorial em U_ε^p e verifica a estimativa

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{C}{|\lambda| + 1} \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\theta \quad (4.40)$$

onde $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $C > 0$, independe de ε .

Lema 4.24. Para todo $\lambda \in \Sigma_\theta$, temos

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq \|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), U_\varepsilon^p)} \leq C \frac{\varepsilon^{-N+1}}{|\lambda| + 1}. \quad (4.41)$$

Demonstração. Segue imediatamente de (4.40) e do Lema 4.4. $\square$

Lema 4.25. Existe $C > 0$ tal que, para todo $\lambda \in \Sigma_\theta$, $p \geq q > \frac{N}{2}$ e $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) < 1$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, U_\varepsilon^p)} \leq \frac{C}{|\lambda|^\alpha + 1}, \\ (ii) \quad & \|E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(C(\overline{\Omega}_\varepsilon), L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{C}{|\lambda| + 1}, \\ (iii) \quad & \|E_\varepsilon\lambda(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(C(\overline{\Omega}_\varepsilon), U_\varepsilon^p)} \leq C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que não depende de ε .

Demonstração. Isto segue do fato de que estimativas similares valem para o operador $A_0 + V_0$. $\square$

Proposição 4.26. Para $p, q > N$ e $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$, existe $C > 0$, independente de ε e f_ε , tal que

$$\|\Lambda_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon - E_\varepsilon\Lambda_0^{-1}M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \quad (4.42)$$

Demonstração. Sejam $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ e $u_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon = (A_\varepsilon + W_\varepsilon)^{-1}f_\varepsilon$. Considere a função auxiliar $\tilde{u}_\varepsilon = (A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}f_\varepsilon$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + W_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon + W_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.44)$$

Note que $|\bar{u}_\varepsilon| \leq \tilde{u}_\varepsilon$, onde

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_\varepsilon + \bar{u}_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.45)$$

Aplicando o Lema 4.53, segue que

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\bar{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}, \text{ para } p > N/2,$$

Agora, observe que

$$u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon = -(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}(W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0)(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) - (A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}(W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0)\tilde{u}_\varepsilon.$$

Com isso, considerando r e r' índices conjugados com $rq < q$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}(W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0)\|_{L^{r'q}(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^{rq}(\Omega_\varepsilon)} + \\ &\quad + C\|(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} \|W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C\|(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^{r'q}(\Omega_\varepsilon))} \|W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0\|_{L^{r'q}(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} + \\ &\quad + C\|(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} \|W_\varepsilon - E_\varepsilon W_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N}{r'q}} \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} + C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon^{\frac{N}{r'q}} < 1/2$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, temos

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}.$$

Considerando $u_0 = (A_0 + W_0)M_\varepsilon f_\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} + \|\tilde{u}_\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \|(A_\varepsilon + E_\varepsilon W_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + W_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Proposição 4.23, existe $C > 0$, independente de ε com

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p},$$

□

Proposição 4.27. Para $p, q > N$, existem $C = C(\theta) > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que para cada $\lambda \in \Sigma_\theta$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2p} < 1$, temos

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha})\varepsilon^{\frac{N}{q}}$$

e

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha})\varepsilon^{\frac{1}{q}},$$

onde $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| \leq \pi - \theta\}$, para $0 < \theta < \pi/2$.

Demonstração. Pelo Lema 2.12 substituindo A_ε por Λ_ε e λ por V_0 , temos

$$\begin{aligned} \|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \\ \leq \|I + \lambda(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} \|\Lambda_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon\Lambda_0M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \|I - E_\varepsilon\lambda(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que os espectros dos operadores Λ_ε e Λ_0 são subconjuntos de $[1 + \infty)$. Portanto, se $\lambda \in \Sigma_\theta$, então ambos $(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}$ e $(\lambda + \Lambda_0)^{-1}$ fazem perfeito sentido para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Usando a estimativa setorial (4.40) e a estimativa (i) do Lema 4.25, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega_\varepsilon))} &\leq C \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\theta, \\ \|E_\varepsilon\lambda(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} &\leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha}) \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_\theta, \end{aligned}$$

com $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2p}$. Com isso, usando (4.42), concluímos que

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha})\varepsilon^{\frac{N}{q}}.$$

□

Observação 4.28. A Proposição 4.27 é válida para o operador A_ε , em vez de Λ_ε , isto é, com $W_\varepsilon = W_0 = 0$.

Corolário 4.29. Nas condições da Proposição 4.27, temos a estimativa

$$\|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha}).$$

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} \|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} &\leq \|(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} + \|E_\varepsilon(\lambda + \Lambda_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \\ &\leq C(1 + |\lambda|^{1-\alpha})\varepsilon^{\frac{1}{q}} + \frac{C}{|\lambda|^\alpha + 1} \leq C(1 + |\lambda|^\alpha). \end{aligned}$$

□

4.4.1 Taxa de convergência dos equilíbrios hiperbólicos e suas linearizações

A partir de agora, dedicaremos-nos a obter as taxas de convergência dos equilíbrios hiperbólicos, além de ser interessante por si só, mostram que se considerarmos os potenciais $V_\varepsilon = -f'(u_\varepsilon^*)$, $V_0 = -f'(u_0^*)$, então a hipótese (H) satisfeita com $a = \sup\{|f'(s)|; s \in \mathbb{R}\}$. Isto irá assegurar que todos os resultados das subseções anteriores são satisfeitos para os operadores $\Lambda_\varepsilon = A_\varepsilon - f'(u_\varepsilon^*) + a$ e $\Lambda_0 = A_0 - f'(u_0^*) + a$.

Proposição 4.30. Sejam u_0^* um equilíbrio hiperbólico de (4.10) e u_ε^* uma seqüência de pontos de equilíbrios hiperbólicos de (4.9), satisfazendo que u_ε^* E-converge para u_0^* em U_ε^q . Então, para $q > N$, temos

$$\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \text{ e } \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^q} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}},$$

onde $C > 0$ independe de ε .

Demonstração. Seja $u_0^* = (w_0^*, v_0^*)$ um equilíbrio hiperbólico para (4.10) com $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^q} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Escrevendo $V_0(x) = -f'(u_0^*)$, temos

$$u_\varepsilon^* = (A_\varepsilon + V_0)^{-1}(f(u_\varepsilon^*) + V_0 u_\varepsilon^*) \quad \text{e} \quad u_0^* = (A_0 + V_0)^{-1}(f(u_0^*) + V_0 u_0^*)$$

Tomando a norma em $L^q(\Omega_\varepsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} &= \|(A_\varepsilon + V_0)^{-1}(f(u_\varepsilon^*) + V_0 u_\varepsilon^*) - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}(f(u_0^*) + V_0 u_0^*)\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon](f(u_\varepsilon^*) + V_0 u_\varepsilon^*)\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\quad + \|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon[f(u_\varepsilon^*) - V_0 u_\varepsilon^* - E_\varepsilon(f(u_0^*) + V_0 u_0^*)]\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} \|f(u_\varepsilon^*) + V_0 u_\varepsilon^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\quad + \|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon[f(u_\varepsilon^*) - E_\varepsilon f(u_0^*) - V_0(u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*)]\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} + \|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon z_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $z_\varepsilon = f(u_\varepsilon^*) - E_\varepsilon f(u_0^*) - V_0(u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*)$, onde usamos a limitação de f' e o fato de que u_ε^* é uniformemente limitado em ε na norma do sup.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(x)| &= |f(u_\varepsilon^*(x)) - f(u_0^*(x)) + f'(E_\varepsilon u_0^*(x))(u_\varepsilon^*(x) - E_\varepsilon u_0^*(x))| \\ &\leq |[f'(\xi_\varepsilon^*(x)) - f'(E_\varepsilon u_0^*(x))](u_\varepsilon^*(x) - E_\varepsilon u_0^*(x))|, \end{aligned}$$

onde $\xi_\varepsilon^*(x) = \theta(x)u_\varepsilon^*(x) + (1 - \theta(x))E_\varepsilon u_0^*(x)$ e $0 \leq \theta(x) \leq 1$, $x \in \Omega_\varepsilon$. O que implica,

$$\|z_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}, \quad 1 \leq r \leq +\infty.$$

Também,

$$\|z_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \|f'(\xi_\varepsilon^*) - f'(E_\varepsilon u_0^*)\|_{L^s(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^t(\Omega_\varepsilon)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}.$$

Mas,

$$\|f'(\xi_\varepsilon^*) - f'(E_\varepsilon u_0^*)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C \text{ e } \|f'(\xi_\varepsilon^*) - f'(E_\varepsilon u_0^*)\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\xi_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Portanto, usando interpolação, temos $\|f'(\xi_\varepsilon^*) - f'(E_\varepsilon u_0^*)\|_{L^s(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{1}{s}}$. Assim,

$$\|z_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{1}{s}} \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^t(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^t(\Omega_\varepsilon)}^{1+\frac{1}{s}}.$$

Com isso, da segunda estimativa do Lema 4.22, temos

$$\|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon z_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|z_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \text{ para algum } r < q.$$

Portanto, escolhendo $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q}$ ($t = q$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q} > 0$), temos

$$\|E_\varepsilon(A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon z_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|z_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)}^{1+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}.$$

O que implica,

$$\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}} + C\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)}^{1+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}.$$

Já que $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$ (pois $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{U_\varepsilon^q} \rightarrow 0$), concluímos que $\|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}$. $\square$

Corolário 4.31. *Nas condições da Proposição 4.30, se denotarmos $V_\varepsilon = -f'(u_\varepsilon^*)$, $V_0 = -f'(u_0^*)$ e $a = \sup\{|f'(s)|; s \in \mathbb{R}\}$, então a hipótese (H) é satisfeita. Portanto, todos os resultados acima (desta seção) quando os potenciais são dados por $V_\varepsilon = -f'(u_\varepsilon^*)$ e $V_0 = -f'(u_0^*)$.*

Demonstração. Já que $E_\varepsilon f'(u_0^*)(x) = f'(E_\varepsilon u_0^*)(x)$, temos

$$\|V_\varepsilon - E_\varepsilon V_0\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} = \|f'(u_\varepsilon^*) - E_\varepsilon f'(u_0^*)\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_\varepsilon^* - E_\varepsilon u_0^*\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{q}}.$$

$\square$

4.4.2 Taxa de convergência dos semigrupos via medida de Lebesgue do canal

A fim de estudar as propriedades de convergência dos semigrupos lineares gerados pelos operadores $A_\varepsilon + V_\varepsilon$, $A_0 + V_0$, onde V_ε e V_0 satisfazem a condição (H). Sejam $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| \leq \pi - \theta\}$, $0 < \theta < 1/2$ e Γ a fronteira de Σ_θ orientada tal que a parte imaginária cresce quando λ varia em Γ .

Consideremos, o semigrupo gerado por Λ_0 , dado por

$$e^{-\Lambda_0 t} := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda + \Lambda_0)^{-1} d\lambda, t > 0.$$

Então, $e^{-\Lambda_0 t}$ satisfaz a propriedade de semigrupo, mas a continuidade falha em $t = 0$ para dados que não são suficientemente suaves. No entanto, algumas das propriedades dos semigrupos analíticos são válidas para dados suficientemente regulares. Diremos que $\{e^{-\Lambda_0 t}; t \geq 0\}$ é o semigrupo gerado por $-\Lambda_0$ e não faremos qualquer alusão a continuidade.

A seguir, estudaremos a singularidade do semigrupo $\{E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon; t > 0\}$ em $t = 0$, em $\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)$.

Lema 4.32. *Para qualquer $p \geq q > \frac{N}{2}$ e para $0 < \alpha < 1 - \frac{N}{2q} - \frac{1}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$, existe uma constante $C > 0$, independente de ε tal que*

$$\|E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, U_\varepsilon^p)} \leq C t^{\alpha-1}, t > 0, \quad (4.46)$$

e

$$\|E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, U_\varepsilon^q)} \leq C, t > 0. \quad (4.47)$$

Segue do Lema 4.24 que Λ_ε gera um semigrupo analítico $\{e^{-\Lambda_\varepsilon t}; t \geq 0\}$ em U_ε^p dado por

$$e^{-\Lambda_\varepsilon t} := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} d\lambda, t > 0,$$

onde $\Gamma \subset \rho(-\Lambda_\varepsilon)$ a fronteira de Σ_θ orientada tal que a parte imaginária cresça quando λ percorre Γ . Note que Γ é independente de ε . Segue de (4.40) e do Lema 4.24 as estimativas

$$\begin{aligned} \|e^{-\Lambda_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} &\leq C\varepsilon^{\frac{-N+1}{p}}, t \geq 0, \\ \|e^{-\Lambda_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))} &\leq C, t \geq 0, \\ \|e^{-\Lambda_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, U_\varepsilon^p)} &\leq C, t \geq 0, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ independe de ε . O semigrupo linear $e^{-\Lambda_\varepsilon t}$ é limitado em $\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon))$ uniformemente em ε .

Proposição 4.33. *Existem constantes $\gamma > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p, q > N$ e $0 < \theta < 1$ tais que*

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}}, t > 0, \quad (4.48)$$

e

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C e^{\beta t} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta}{q}}, t > 0. \quad (4.49)$$

Demonstração. Observe que $e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t} M_\varepsilon = e^{at} (e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon)$, e que é suficiente estimar a diferença $e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon$.

Já que

$$e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{\lambda t} [(\lambda + \Lambda_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon (\lambda + \Lambda_0)^{-1} M_\varepsilon] d\lambda$$

segue da Proposição 4.27 que

$$\|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{C}{2\pi} \int_\Gamma e^{\lambda t} (1 + |\lambda|^{1-\alpha}) d\lambda \varepsilon^{\frac{N}{q}} \leq C t^{-(2-\alpha)} \varepsilon^{\frac{N}{q}}. \quad (4.50)$$

Por outro lado, por comparação (usando o Princípio do Máximo), temos

$$\|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq \|e^{-\Lambda_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, L^\infty(\Omega_\varepsilon))} + \|E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq C.$$

Notando que $\|\cdot\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}$ para alguma constante $C > 0$ independente de ε , segue que

$$\|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^\infty, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C. \quad (4.51)$$

Por interpolação, usado (4.50) e (4.51)

$$\|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^{\bar{p}}, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C t^{-\theta(2-\alpha)} \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}},$$

onde $p \leq \bar{p} < \infty$ e $0 < \theta < 1$. Tomando θ pequeno tal que $\theta(2-\alpha) < 1$, temos

$$\|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^{\bar{p}}, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}}, \gamma < 1.$$

Portanto,

$$\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} = e^{at} \|e^{-\Lambda_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-\Lambda_0 t} M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C e^{bt} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}}, \quad t > 0.$$

A prova de (4.49) segue de um argumento similar. $\square$

Consideremos agora um número real b com a propriedade que existe um $\delta > 0$, tal que $[b - \delta, b + \delta] \cap \sigma(-(A_0 + V_0)) = \emptyset$. Com isso, o espectro do operador $-(A_0 + V_0)$, que é todo real, está dividido em duas partes, σ_0^+ que está acima de $b + \delta$ e é um conjunto finito e σ_0^- que está abaixo de $b - \delta$ e é um conjunto infinito (uma sequência que converge para $-\infty$). Pela continuidade do espectro de $-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno $[b - \delta, b + \delta] \cap \sigma(-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)) = \emptyset$ e o espectro de $-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)$ que real está dividido em duas partes, σ_ε^+ que está acima de $b + \delta$ e é um conjunto finito, e σ_ε^- que está abaixo de $b - \delta$ e é um conjunto infinito. Além disso, podemos escolher uma curva fechada fixa $\Gamma_b^+ \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq b + \delta\}$ em torno de σ_ε^+ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ para algum ε_0 pequeno, e denotaremos por $\Gamma_b^+ \subset \{z \in \mathbb{C}; \arg(z - (b - \delta)) = \pi - \theta\}$ para algum $0 < \theta < \pi/2$.

Usaremos a projeção espectral abaixo para decompor o espaço U_ε^p

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^+ : U_\varepsilon^p &\rightarrow U_\varepsilon^p \\ z &\mapsto Q_\varepsilon^+ = Q(\sigma_\varepsilon^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b^+} (\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} z d\lambda. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Proposição 4.34. Para $p, q > N$, existem $C > 0$, $\gamma < 1$, independente de ε e $0 < \theta < 1$ tais que

- (i) $\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} (I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C e^{bt} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}}, \quad t > 0$
- (ii) $\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} (I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C e^{bt} t^{-\gamma} \varepsilon^{\frac{\theta}{q}}, \quad t > 0$
- (iii) $\|E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C e^{bt} t^{-\gamma}, \quad t > 0$
- (iv) $\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} (I - Q_\varepsilon^+)\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq C e^{bt} t^{-\gamma}, \quad t > 0$

Demonstração. Basta mostrar as estimativas (i), (iii) e (iv). Temos,

$$e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b^-} e^{\lambda t} (\lambda + A_0 + V_0)^{-1} d\lambda.$$

Note que

$$\|E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_b^-} \frac{|e^{\lambda t}|}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}} d\lambda \leq C e^{bt} t^{-\alpha}$$

o que mostra a estimativa (iii) com $\gamma = \alpha$.

De maneira similar, temos

$$e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} (I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t} (I - Q_0^+) M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b^-} e^{\lambda t} [(\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon (\lambda + A_0 + V_0)^{-1} M_\varepsilon] d\lambda.$$

Assim, aplicando a Proposição 4.27, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}(I-Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}(I-Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \\
\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_b^-} |e^{\lambda t}| \|(\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} - E_\varepsilon(\lambda + A_0 + V_0)^{-1}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), L^q(\Omega_\varepsilon))} d\lambda \\
\leq C \int_{\Gamma_b^-} |e^{\lambda t}| (1 + |\lambda|^{1-\alpha}) d\lambda \varepsilon^{\frac{N}{q}} \leq C e^{bt} t^{-(2-\alpha)} \varepsilon^{\frac{N}{q}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}(I-Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}(I-Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C e^{bt} t^{-(2-\alpha)} \varepsilon^{\frac{N}{q}}. \quad (4.53)$$

Esta estimativa não mostra a proposição já que $2 - \alpha > 1$. Necessitamos de um argumento de interpolação para concluir a estimativa correta. Para isto, note que $Q_\varepsilon^+ : U_\varepsilon^p \rightarrow U_\varepsilon^p$ satisfaz $\|Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C$ independente de ε . Para isto, observe que

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b^+} (\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} d\lambda.$$

Aplicando agora a Proposição 4.27, obtemos

$$\|(\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C,$$

para $\lambda \in \Gamma_b^-$ e com C independente de ε . Desta última expressão e usando a limitação de Γ_b^- , obtemos $\|Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)} \leq C$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Além disso, para o semigrupo limite e para $0 < t \leq 1$, obtemos

$$\|E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}(I-Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C t^{-\alpha}.$$

Portanto, para $0 < t \leq 1$, usando a limitação dada na Proposição 4.33, obtemos

$$\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}(I-Q_\varepsilon^+)\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq \|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} (1 + \|Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)})$$

e

$$\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t} - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} + \|E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C(t^{-\gamma} + t^{-\alpha+1}),$$

Portanto, para $0 < t \leq 1$, temos

$$\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}(I-Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}(I-Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq C t^{-\bar{\gamma}}, \quad \bar{\gamma} = \max\{\gamma, 1 - \alpha\}. \quad (4.54)$$

Interpolando as estimativas em (4.53) e (4.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\|e^{-(A_\varepsilon+V_\varepsilon)t}(I-Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0+V_0)t}(I-Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} &\leq C t^{-(2-\alpha)\theta} \varepsilon^{\frac{N}{q}} C t^{-\bar{\gamma}(1-\theta)} \\
&\leq C t^{-(2-\alpha)\theta - (1-\theta)\bar{\gamma}} \varepsilon^{\frac{N}{q}},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $e^{bt} \leq C$ para $0 \leq t \leq 1$. Escolhendo $\theta > 0$ pequeno suficiente para que $(2 - \alpha)\theta + (1 - \theta)\bar{\gamma} < 1$, obtemos a estimativa para $0 < t \leq 1$.

Agora, para $t \geq 1$, temos

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t}(I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-(A_0 + V_0)t}(I - Q_0^+)M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq Ce^{bt}\varepsilon^{\theta\frac{N}{q}}$$

Com as estimativas acima, provamos (i). □

Corolário 4.35. Para o caso em que $V_\varepsilon = V_0 \equiv 0$ e com $b \in (-1, 0)$ um número fixo, temos $Q_\varepsilon^+ \equiv 0$ para ε pequeno, temos

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega_\varepsilon), L^q(\Omega_\varepsilon))} \leq Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\theta\frac{N}{q}}, \quad t > 0,$$

e

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_\varepsilon^q)} \leq Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\theta\frac{1}{q}}, \quad t > 0.$$

Observação 4.36. Observe que podemos considerar o caso onde $V_0 = -f'(u_0^*)$, $V_\varepsilon = -f'(u_\varepsilon^*)$ com u_0^* e u_ε^* equilíbrios hiperbólicos satisfazendo u_ε^* convergindo para u_0^* . Neste caso, sempre podemos aplicar a Proposição 4.34 com $b < 0$.

Proposição 4.37. Existem constantes $C \geq 1$ e $\beta > 0$ tais que

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t}Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq Ce^{\beta t}, \quad t \geq 0,$$

e

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t}Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, U_\varepsilon^p)} \leq Ce^{\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Observe que usando o fato de que Γ_b^+ é limitada, temos

$$\|e^{-(A_\varepsilon + V_\varepsilon)t}Q_\varepsilon^+\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, L^p(\Omega_\varepsilon))} \leq \int_{\Gamma_b^+} \|e^{\lambda t}(\lambda + A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^q, L^p(\Omega_\varepsilon))} d\lambda \leq C \int_{\Gamma_b^+} |e^{\lambda t}| d\lambda \leq Ce^{\beta t}.$$

□

Agora, trataremos dos semigrupos não lineares, seja $\{T_\varepsilon(t); t \geq 0\}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, o semigrupo não linear é associado ao problema (4.4) dado pela Fórmula de variação das constantes

$$T_\varepsilon(t)u_\varepsilon = e^{-A_\varepsilon t}u_\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}f_\varepsilon(T_\varepsilon(s)u_\varepsilon)ds.$$

Proposição 4.38. Sejam u_ε e v_ε contidos em um limitado K de U_ε^p . Então, existem $0 \leq \gamma < 1$, $L > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq Ce^{Lt}(\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\theta\frac{N}{p}})$$

e

$$\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq Ce^{Lt}(\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\theta\frac{1}{p}})$$

para todo $t \geq 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, onde $0 < \theta < 1$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t}u_\varepsilon - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}f_\varepsilon(T_\varepsilon(s)u_\varepsilon) - E_\varepsilon e^{-A_0(t-s)}f_0(T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \end{aligned}$$

onde

$$\|e^{-A_\varepsilon t}u_\varepsilon - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \|e^{-A_\varepsilon t}v_\varepsilon - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Com isso, aplicando o Corolário 4.35, segue que

$$\|e^{-A_\varepsilon t}u_\varepsilon - E_\varepsilon e^{-A_0 t}M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq Ct^{-\gamma}e^{bt}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}}\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}.$$

Usando o termo $e^{-A_\varepsilon t}E_\varepsilon f_0(T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)$ e a identidade $E_\varepsilon f_0(u) = f_\varepsilon(E_\varepsilon u)$, temos

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq Ct^{-\gamma}e^{bt}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}}\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \\ &+ \int_0^t \|[e^{-A_\varepsilon(t-s)} - E_\varepsilon e^{-A_0(t-s)}M_\varepsilon]E_\varepsilon f_0(T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\ &+ \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}[f_\varepsilon(T_\varepsilon(s)u_\varepsilon) - E_\varepsilon f_0(T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)]\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\ &= Ct^{-\gamma}e^{bt}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}}\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \\ &+ \int_0^t \|[e^{-A_\varepsilon(t-s)} - E_\varepsilon e^{-A_0(t-s)}M_\varepsilon]f_\varepsilon(E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\ &+ \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)}[f_\varepsilon(T_\varepsilon(s)u_\varepsilon) - f_\varepsilon(E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)]\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\ &\leq Ct^{-\gamma}e^{bt}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ce^{bt}t^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}}\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \\ &+ C\varepsilon^{\frac{\theta}{q}}e^{bt} \int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-bs}\|f_\varepsilon(E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\ &+ CL_{f_\varepsilon}e^{bt} \int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-bs}\|T_\varepsilon(s)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds, \end{aligned}$$

onde L_{f_ε} é a constante Lipschitz da f_ε .

Ou seja,

$$\begin{aligned} e^{-bt}\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq Ct^{-\gamma}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ct^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}}\|v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \\ &+ C\varepsilon^{\frac{\theta}{q}} \int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-bs}\|f_\varepsilon(E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon)\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\ &+ CL_{f_\varepsilon} \int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-bs}\|T_\varepsilon(s)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds. \end{aligned}$$

Pela limitação da aplicação f_ε e do conjunto $K \subset U_\varepsilon^p$, e usando a função gama, como no Capítulo 3, temos

$$\begin{aligned} e^{-bt}\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq Ct^{-\gamma}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + Ct^{-\gamma}\varepsilon^{\frac{\theta}{p}} + \\ &+ CL_{f_\varepsilon} \int_0^t (t-s)^{-\gamma}e^{-bs}\|T_\varepsilon(s)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(s)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds. \end{aligned}$$

Com isso, escrevendo $\alpha_\varepsilon = C\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + C\varepsilon^{\theta\frac{N}{p}}$, $\phi_\varepsilon(t) = e^{-bt}\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}$ e $\beta = CL_{f_\varepsilon}$, podemos reescrever a desigualdade acima, como

$$\phi_\varepsilon(t) \leq \alpha_\varepsilon t^{-\gamma} + \beta \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \phi_\varepsilon(s) ds$$

e aplicando a Desigualdade de Gronwall, obtemos $C = C(L_{f_\varepsilon}) > 0$, tal que $\phi_\varepsilon(t) \leq C\alpha_\varepsilon t^{-\gamma}$.

Noutras palavras, para todo $t > 0$ com $L = b > 0$, temos

$$\|T_\varepsilon(t)u_\varepsilon - E_\varepsilon T_0(t)M_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq Ce^{Lt}t^{-\gamma}(\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} + \varepsilon^{\theta\frac{N}{p}}).$$

□

Observação 4.39. Uma vez que, $0 < \theta < 1$, neste momento cabe reever a Observação 3.22.

4.5 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa das variedades invariantes

Já sabemos que se todos os equilíbrios de (4.5), que é a versão abstrata de (4.3), são hiperbólicos então todos estes são isolados e existem em um número finito, digamos $\mathcal{E}_0 = \{u_0^1, \dots, u_0^m\}$. Neste caso, sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o conjuntos dos equilíbrios de (4.4), que é a versão abstrata de (4.1), $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^m\}$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $u_\varepsilon^i \xrightarrow{E} u_0^i$ para $1 \leq i \leq m$.

Em uma vizinhança da solução de equilíbrio u_*^ε , reescreveremos o problema (4.4) como

$$w_t^\varepsilon + A_\varepsilon w^\varepsilon - f'_\varepsilon(u_*^\varepsilon)w^\varepsilon = f(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)w^\varepsilon, \quad (4.55)$$

onde $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_*^\varepsilon$ e a partir de agora, denotaremos $V_0 = -f'(u_*)$ e $V_\varepsilon = -f'(u_*^\varepsilon)$.

Decompondo (4.55) com auxílio da projeção Q_ε^+ dada em (4.52) com $b = 0$ denotando por $\tilde{A}_\varepsilon$ a restrição da projeção de $A_\varepsilon + V_\varepsilon$ ao núcleo de Q_ε^+ , por B_ε a restrição de $A_\varepsilon + V_\varepsilon$ a imagem de Q_ε^+ e fazendo $v = Q_\varepsilon^+ w$, $z = (I - Q_\varepsilon^+)w$ reescreveremos o problema (4.55) como um sistema acoplado

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \\ z_t^\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon z^\varepsilon = (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \end{cases} \quad (4.56)$$

onde $F_\varepsilon(0, 0) = 0$ e $F'_\varepsilon(0, 0) = 0$.

Procedendo como (4.16), dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $(v, z) \in B_\delta(0, 0)$ e $\varepsilon \in (0, 1]$, temos

$$\|F_\varepsilon(v, z)\|_{U_\varepsilon^q} < \rho, \quad (4.57)$$

$$\|F_\varepsilon(v, z) - F_\varepsilon(\tilde{v}, \tilde{z})\|_{U_\varepsilon^q} < \rho(\|v - \tilde{v}\|_{U_\varepsilon^p} + \|z - \tilde{z}\|_{U_\varepsilon^p}), \quad (4.58)$$

Uma vez que, estamos interessados no comportamento da solução próxima de $(0, 0)$ cortamos F_ε fora da bola $B_\delta(0, 0)$ tal que (4.57) e (4.58) sejam satisfeitos globalmente.

Lema 4.40. Considerando o operador linear $J_\varepsilon : Q_0^+ U_0^p \rightarrow Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p$ dado por $J_\varepsilon := Q_\varepsilon^+ E_\varepsilon$ é um isomorfismo, e sua inversa $J_\varepsilon^{-1} : Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p \rightarrow Q_0^+ U_0^p$ satisfaz

$$\|J_\varepsilon^{-1} - Q_0^+ M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p, Q_0^+ U_0^p)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.59)$$

Com isso, note que $Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p$ e $Q_\varepsilon^+ E_\varepsilon Q_0^+ U_0^p$ são isomorfos.

Demonstração. Como $Q_0^+ U_0^p$ possui dimensão finita, basta provar que a independência linear é invariante por J . Seja $\{u_j; j = 1, \dots, n\}$ um conjunto l.i e digamos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon Q_\varepsilon^+ E_\varepsilon u_i = 0$ com $\|(\alpha_1^\varepsilon, \dots, \alpha_n^\varepsilon)\| = 1$, passando o limite em $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon Q_\varepsilon^+ E_\varepsilon u_i = 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos $\sum_{i=1}^n \alpha_i^0 u_i = 0$ e devemos ter $\|(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)\| = 1$, o que é absurdo. Com isso, concluímos que J é injetivo.

Afirmamos que $\|J_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_0^p)}$ é uniformemente limitado em ε . Digamos que não, então existem $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_{\varepsilon_n}\}$ em $U_{\varepsilon_n}^p$ com $\|u_{\varepsilon_n}^p\| = 1$ tais que $\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p} \rightarrow +\infty$. Como

$$\frac{1}{\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p}} u_{\varepsilon_n} = J_{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p}} J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n} \right)$$

e $\left\{ \frac{1}{\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p}} J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n} \right\}$ em $Q_0^+ U_0^p$ possui uma subsequência convergente, isto é, existe $u \in Q_0^+ U_0^p$ limite desta subsequência com $\|u\| = 1$. Mas, por outro lado, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$0 \leftarrow J_{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p}} J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n} \right) = Q_{\varepsilon_n}^+ E_{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{\|J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n}\|_{U_0^p}} J_{\varepsilon_n}^{-1} u_{\varepsilon_n} \right) \rightarrow Q_0^+ u = u.$$

Logo, para qualquer $u_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p$, temos

$$J_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon - Q_0^+ M_\varepsilon u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1} [Q_\varepsilon^+ - Q_\varepsilon^+ E_\varepsilon M_\varepsilon] u_\varepsilon = (Q_\varepsilon - E_\varepsilon Q_0^+ M_\varepsilon) (I - E_\varepsilon Q_0^+ M_\varepsilon) u_\varepsilon$$

e usando o fato de $Q_\varepsilon \rightarrow E_\varepsilon Q_0^+ M_\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em $\mathcal{L}(U_\varepsilon^p)$, temos o resultado. $\square$

Pela compacidade Q_0^+ possui rank finito, isto é, $Q_0^+ U_0^p$ é um $\mathbb{R}^r$, o Lema 4.40 nos garante que $Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p$ herda esta propriedade. Portanto, no que segue usamos, com abuso de notação, o fato de que $Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p = \mathbb{R}^r$.

Teorema 4.41. Seja u_* um equilíbrio hiperbólico de (4.5). Então, sabemos que existe uma única $u_*^\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon$ suficientemente próxima de u_* para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Para $D > 0$, $\Delta > 0$ e $0 < \vartheta < 1$ dados, seja $\rho_0 > 0$

tal que para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, valha

$$\rho M b^{1-\gamma} \Gamma(1-\gamma) \leq D, \quad \frac{\rho M^2 (1+\Delta) \Gamma(1-\gamma)}{(b - \rho M (1+\Delta))^{1-\gamma}} \leq \Delta$$

$$\frac{b}{2} \leq b - \rho M (1+\Delta) \leq b, \quad \rho M \Gamma(1-\gamma) \left[b^{-1+\gamma} + \frac{\rho M (1+\Delta)}{b(b - \rho M (1+\Delta))^{1-\gamma}} \right] \leq \vartheta < 1,$$

$$\text{e } \rho M b^{\gamma+1} \Gamma(1-\gamma) + [\rho^2 M^2 b^{-1} (1+\Delta) (b + \rho M (1+\Delta))^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma)] \leq \frac{1}{2}.$$

Então, existem $s_\varepsilon^* : \mathbb{R}^r \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+)U_\varepsilon^p$ tal que

$$\begin{aligned} |||s_\varepsilon^*|||_{L^p(\Omega_\varepsilon)} : &= \sup_{v \in \mathbb{R}^r} \|s_\varepsilon^*(v)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq D, \quad \|s_\varepsilon^*(v) - s_\varepsilon^*(\tilde{v})\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^r} \\ |||s_\varepsilon^*|||_{U_\varepsilon^p} : &= \sup_{v \in \mathbb{R}^r} \|s_\varepsilon^*(v)\|_{U_\varepsilon^p} \leq D, \quad \|s_\varepsilon^*(v) - s_\varepsilon^*(\tilde{v})\|_{U_\varepsilon^p} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^r} \end{aligned}$$

e a variedade instável de u_*^ε é dada como sendo o gráfico da aplicação s_ε^* , por

$$W_\varepsilon^u = W_\varepsilon^u(u_*^\varepsilon) := \{(v, z) \in U_\varepsilon^p; z = s_\varepsilon^*(v), v \in \mathbb{R}^r\}.$$

Além disso, existem $\rho_1 > 0$ e $\tilde{M} \geq 1$ independentes de ε tais que

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{M}(t - t_0)^{-\gamma} e^{-\rho_1(t - t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

durante o período em que a órbita $(v^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$ permanecer na vizinhança de u_*^ε

Por conseguinte, existe $C > 0$, tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, teremos

$$|||s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*|||_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\theta \frac{N}{q}} \quad e \quad |||s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*|||_{U_\varepsilon^p} \leq C\varepsilon^{\theta \frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Sejam $s_\varepsilon : \mathbb{R}^r \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+)U_\varepsilon^p$ uma aplicação contínua satisfazendo $|||s_\varepsilon|||_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq D$ e $\|s_\varepsilon(v) - s_\varepsilon(\tilde{v})\|_{U_\varepsilon^p} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^r}$ e $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, s_\varepsilon)$ uma solução de

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)), & t < \tau \\ v^\varepsilon(\tau) = \eta. \end{cases} \quad (4.60)$$

Também, considere o conjunto

$$\Sigma = \{s : Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+)U_\varepsilon^p; |||s|||_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq D \text{ e } \|s(v) - s(\tilde{v})\|_{U_\varepsilon^p} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^r}\}.$$

Não é difícil ver que $(\Sigma, |||\cdot|||_{L^p(\Omega_\varepsilon)})$ é um espaço métrico completo.

Sejam $s_\varepsilon \in \Sigma$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ s_\varepsilon &\mapsto \Psi(s_\varepsilon)\eta := \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s))) ds, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Note que, de (4.57), temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(s_\varepsilon)(\cdot)\|_{U_\varepsilon^p} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s)))\|_{U_\varepsilon^p} ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - s)^{-\gamma} e^{-b(\tau-s)} \|(I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), s_\varepsilon(v^\varepsilon(s)))\|_{U_\varepsilon^p} ds \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - s)^{-\gamma} e^{-b(\tau-s)} ds \leq D. \end{aligned}$$

Usando (4.58), e considerando $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^r$, $s_\varepsilon, \tilde{s}_\varepsilon \in \Sigma$, e $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, s_\varepsilon)$ e $\tilde{v}^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\eta}, \tilde{s}_\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{U_\varepsilon^p} &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\gamma} e^{-b(\tau-s)} \|F_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon)) - F_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon))\|_{U_\varepsilon^p} ds \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\gamma} e^{-b(\tau-s)} [\|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^r} + \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] ds \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-b(\tau-s)} [(1+\Delta)\|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^r} + \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] ds, \end{aligned}$$

onde

$$v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t) = e^{-B_\varepsilon(t-\tau)}(\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^t e^{-B_\varepsilon(t-s)} [Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon, s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon))] ds.$$

Com isso, por (4.58), obtemos

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^r} &\leq M e^{b(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + M \rho \int_{\tau}^t e^{b(t-s)} (\|v^\varepsilon(s) - \tilde{v}^\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^r} + \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}) ds \\ &\leq M e^{b(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + M \rho \int_{\tau}^t e^{b(t-s)} ((1+\Delta)\|v^\varepsilon(s) - \tilde{v}^\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^r} + \|s_\varepsilon(v^\varepsilon) - \tilde{s}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}) ds \\ &\leq M e^{b(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + M \rho (1+\Delta) \int_{\tau}^t e^{b(t-s)} \|v^\varepsilon(s) - \tilde{v}^\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^r} ds + \\ &\quad + M \rho \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \int_{\tau}^t e^{b(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Definindo a função $\phi(t) = e^{-b(t-\tau)} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{Q_\varepsilon^+ U_\varepsilon^p}$, temos

$$\phi(t) \leq M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + M \rho \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} ds + M \rho (1+\Delta) \int_{\tau}^t \phi(s) ds.$$

e usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^r} &\leq M e^{b(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} e^{[\rho M(1+\Delta) - \beta](\tau-t)} + \\ &\quad + \rho M b^{-1} [1 - e^{b(t-\tau)}] \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} e^{[\rho M(1+\Delta) - b](\tau-t)} \\ &\leq [M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + \rho M b^{-1} \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] e^{[\rho M(1+\Delta) - b](\tau-t)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{U_\varepsilon^p} &\leq \rho M \Gamma(1-\gamma) \left[b^{-1+\gamma} + \frac{\rho M(1+\Delta)}{b(b - \rho M(1+\Delta))^{1-\gamma}} \right] \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \\ &\quad + \frac{\rho M^2(1+\Delta)\Gamma(1-\gamma)}{(b - \rho M(1+\Delta))^{1-\gamma}} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} I_s(\varepsilon) &:= \rho M \Gamma(1-\gamma) \left[b^{-1+\gamma} + \frac{\rho M(1+\Delta)}{b(b - \rho M(1+\Delta))^{1-\gamma}} \right] \\ I_\eta(\varepsilon) &:= \frac{\rho M^2(1+\Delta)\Gamma(1-\gamma)}{(b - \rho M(1+\Delta))^{1-\gamma}}. \end{aligned}$$

Dado $\vartheta < 1$, existe ρ_0 tal que, para $\rho \leq \rho_0$, $I_s(\varepsilon) \leq \vartheta$ e $I_\eta(\varepsilon) \leq \Delta$ e

$$\|\Psi(s_\varepsilon)(\eta) - \Psi(\tilde{s}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{U_\varepsilon^p} \leq \Delta \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^r} + \vartheta \|s_\varepsilon - \tilde{s}_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}. \quad (4.61)$$

Segue que $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é uma contração. Portanto, existe um único ponto fixo $s_\varepsilon^* = \Psi(s_\varepsilon^*)$ em Σ .

Agora, provaremos que $W_\varepsilon^u = \{(v, s_\varepsilon^*(v)); v \in \mathbb{R}^r\}$ é uma variedade invariante para (3.22). Seja $(v_0^\varepsilon, z_0^\varepsilon) \in W_\varepsilon^u$, $z_0^\varepsilon = s_\varepsilon^*(v_0^\varepsilon)$. Denote por $v_\varepsilon^*(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon = Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) \\ v^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.62)$$

Isto define uma curva $(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) \in W_\varepsilon^u$, $t \in \mathbb{R}$. Contudo a única solução da equação

$$z_t^\varepsilon + \tilde{A}_\varepsilon z^\varepsilon = (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$

$$z_\varepsilon^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s))) ds = s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)).$$

Portanto, $(v_\varepsilon^*(t), s_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$ uma solução de (3.22) passando por $(v_0^\varepsilon, z_0^\varepsilon)$, o que prova a invariância.

Agora, mostraremos que a variedade instável é exponencialmente atratora. A seguir, provaremos que $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é mostrar que existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{M}(t - t_0)^{-\gamma} e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Note que, para $t \geq t_0 + 1$, temos

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{M} e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}.$$

Quando $t_0 \rightarrow -\infty$, obtemos $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $\xi^\varepsilon(t) = z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ e $y(s, t)$, $s \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} y^\varepsilon + B_\varepsilon y^\varepsilon = Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(y^\varepsilon, s_\varepsilon^*(y^\varepsilon)), & s \leq t \\ y^\varepsilon(t, t) = v^\varepsilon(t). \end{cases} \quad (4.63)$$

Assim, por (4.58), obtemos

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{U_\varepsilon^p} &\leq M \int_t^s e^{b(s-\theta)} \|Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t)) - z^\varepsilon(\theta))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta \\ &\leq \rho M \int_s^t e^{b(s-\theta)} [(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{U_\varepsilon^p} + \|s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(\theta)) - z^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] d\theta \\ &= \rho M \int_s^t e^{b(s-\theta)} [(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{U_\varepsilon^p} + \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] d\theta. \end{aligned}$$

Se $\phi^\varepsilon(t) = e^{-bs} \|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{U_\varepsilon^p}$, então

$$\phi^\varepsilon(s) \leq \rho M(1 + \Delta) \int_s^t \phi^\varepsilon(\theta) d\theta + \rho M \int_s^t e^{-b\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta, \quad s \leq t.$$

e da Desigualdade de Gronwall, segue que

$$\|y^\varepsilon(s, t) - v^\varepsilon(s)\|_{U_\varepsilon^p} \leq \rho M \int_r^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))(\theta-s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta, \quad s \leq t. \quad (4.64)$$

Seja agora $s \leq t_0 \leq t$. Então, por (4.58), temos

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{U_\varepsilon^p} &\leq \|e^{-B_\varepsilon(s-t_0)}[y^\varepsilon(t_0, t) - v(t_0)]\|_{U_\varepsilon^p} + \\ &+ \int_{t_0}^s \|e^{-B_\varepsilon(s-\theta)}[Q_\varepsilon^+ F_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t) - y^\varepsilon(\theta, t_0), s_\varepsilon^*((y^\varepsilon(\theta, t) - y^\varepsilon(\theta, t_0))))]\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta \\ &\leq \rho M^2 e^{b(s-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta + \\ &+ \rho M \int_{t_0}^t e^{b(s-\theta)} (1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - y^\varepsilon(\theta, t_0)\|_{U_\varepsilon^p} d\theta. \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{U_\varepsilon^p} \leq \rho M^2 \int_{t_0}^t e^{-(\beta-\rho M(1+\Delta))(\theta-r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta. \quad (4.65)$$

Vamos agora estimar $\xi^\varepsilon(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \xi^\varepsilon(t) &- e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)} \xi^\varepsilon(t_0) = \\ &= z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)} [z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))] \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) ds - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) + e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)} s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))) ds + \\ &+ e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)} \int_{-\infty}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t_0-s)} (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t_0), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t_0))) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} [(I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(v^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) - (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t)))] ds - \\ &- \int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-s)} [(I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))) - (I - Q_\varepsilon^+) F_\varepsilon(y^\varepsilon(s, t_0), s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t_0)))] ds. \end{aligned}$$

Assim, usando (4.64) e (4.65), temos

$$\begin{aligned} \|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\tilde{A}_\varepsilon(t-t_0)} \xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \rho M \int_{t_0}^t (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} [\|v^\varepsilon(s) - y^\varepsilon(s, t)\|_{U_\varepsilon^p} + \|z^\varepsilon(s) - s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] ds + \\ &+ \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{U_\varepsilon^p} ds \\ &\leq \rho M(t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} [\|v^\varepsilon(s) - y^\varepsilon(s, t)\|_{U_\varepsilon^p} + \|z^\varepsilon(s) - s_\varepsilon^*(y^\varepsilon(s, t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}] ds + \\ &+ \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} \|y^\varepsilon(s, t) - y^\varepsilon(s, t_0)\|_{U_\varepsilon^p} ds. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\bar{A}_\varepsilon(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \rho M(t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\
&+ \rho M(1+\Delta) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} \|v^\varepsilon(s) - y^\varepsilon(s,t)\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\
&+ \rho M(1+\Delta)(t-t_0)^{-\gamma} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-b(t-s)} \|y^\varepsilon(s,t) - y^\varepsilon(s,t_0)\|_{U_\varepsilon^p} ds \\
&\leq \rho M(t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\
&+ \rho^2 M^2(1+\Delta)(t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} \int_s^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))(\theta-s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta ds + \\
&+ \rho^2 M^3(1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))(\theta-s)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta ds.
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\bar{A}_\varepsilon(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \rho M(t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\
&+ \rho^2 M^2(1+\Delta)(t-t_0)^{-\gamma} e^{-bt} \int_{t_0}^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \int_{t_0}^\theta e^{(2b-\rho M(1+\Delta))s} ds d\theta + \\
&+ \rho^2 M^3(1+\Delta) e^{-bt} \int_{t_0}^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \int_{-\infty}^{t_0} (t-s)^{-\gamma} e^{(2b-\rho M(1+\Delta))s} ds d\theta,
\end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\bar{A}_\varepsilon(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)}{2b-\rho M(1+\Delta)} \right] (t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-b(t-s)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\
&+ \frac{\rho^2 M^3(1+\Delta)}{2b-\rho M(1+\Delta)} e^{-b(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(b-\rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} d\theta,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
e^{b(t-t_0)} \|\xi^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)}{2b-\rho M(1+\Delta)} \right] (t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{b(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\
&+ \frac{\rho^2 M^3(1+\Delta)}{2b-\rho M(1+\Delta)} \int_{t_0}^t e^{-(2b-\rho M(1+\Delta))(s-t_0)} e^{b(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2b-\rho M(1+\Delta)} \right] (t-t_0)^{-\gamma} \int_{t_0}^t e^{b(s-t_0)} \|\xi^\varepsilon(s)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Gronwall, segue ainda que

$$\|\xi^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{M}(t-t_0)^{-\gamma} \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} e^{-v(t-t_0)} \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (4.66)$$

onde

$$v = b - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2b-\rho M(1+\Delta)} \right] > 0.$$

onde v independe de ε .

Ou seja,

$$\|z^\varepsilon(t) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq M(t - t_0)^{-\gamma} e^{-v(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Logo, $z^\varepsilon(t) = s_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mostraremos, por fim, que os pontos fixos s_ε^* dependem continuamente de ε em $\varepsilon = 0$, ou seja, se $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ tal que a variedade instável é dada pelo gráfico de s_ε^* , $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ mostraremos que

$$\|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} := \sup_{\eta \in B_{\mathbb{R}^r}(0, R)} \|s_\varepsilon^*(\eta) - E_\varepsilon s_0^*(\eta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N}{p}},$$

onde $B_{\mathbb{R}^r}(0, R)$ denota a bola em $\mathbb{R}^r$ centrada na origem e de raio R , para alguma constante $C > 0$.

Portanto, usando as estimativas (i) e (iii) da Proposição 4.34, temos

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - E_\varepsilon s_0^*(\eta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)}(I - Q_\varepsilon^+)F_\varepsilon(v^\varepsilon, s_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - E_\varepsilon e^{-\tilde{A}_0(\tau-s)}(I - Q_0^+)F_0(v^0, s_0^*(v^0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)}(I - Q_\varepsilon^+)[F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - E_\varepsilon F_0(v_0, s_0^*(v_0))]\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\ &+ \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)}(I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-\tilde{A}_0(\tau-s)}(I - Q_0^+)M_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} E_\varepsilon F_0(v_0, s_0^*(v_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)}(I - Q_\varepsilon^+)[F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - F_\varepsilon(E_\varepsilon(v_0, s_0^*(v_0)))]\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds + \\ &+ \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{-\tilde{A}_\varepsilon(\tau-s)}(I - Q_\varepsilon^+) - E_\varepsilon e^{-\tilde{A}_0(\tau-s)}(I - Q_0^+)M_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} E_\varepsilon F_0(v_0, s_0^*(v_0))\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} e^{b(\tau-s)}(\tau-s)^{-\gamma} \|F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - F_\varepsilon(E_\varepsilon(v_0, s_0^*(v_0)))\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\ &+ M\varepsilon^{\frac{N}{p}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{b(\tau-s)} \|F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{C(\overline{\Omega_\varepsilon})} ds \\ &\leq \rho M b^{-1} \varepsilon^{\frac{N}{p}} + \rho M \beta^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-b(\tau-s)}(\tau-s)^{-\gamma} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r} ds. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente estimar $\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r}$. Pela estimativa 4.48 da Proposição 4.33, temos

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r} &\leq \int_t^\tau \|e^{-B_\varepsilon(t-s)} - E_\varepsilon e^{-B_0(t-s)}M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^p(\Omega_\varepsilon))} \|F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\ &+ \int_t^\tau \|e^{-B_\varepsilon(t-s)}\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, L^p(\Omega_\varepsilon))} \|F_\varepsilon(v_\varepsilon, s_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - F_\varepsilon(E_\varepsilon(v_0, s_0^*(v_0)))\|_{U_\varepsilon^p} ds + \\ &\leq \rho C b^{-1} e^{b(t-\tau)} (\varepsilon^{\frac{N}{q}} + \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}) + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{b(t-s)} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r} ds \end{aligned}$$

e escrevendo $\phi_\varepsilon(t) = e^{-b(t-\tau)} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r}$, $\alpha_\varepsilon = \rho C b^{-1} (\varepsilon^{\frac{N}{q}} + \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)})$ e $\beta = \rho M(1+\Delta)$, temos

$$\phi_\varepsilon(t) \leq \alpha_\varepsilon + \beta \int_t^\tau \phi_\varepsilon(s) ds$$

e pela Desigualdade de Gronwall, obtemos $C > 0$ tal que $\phi_\varepsilon(t) \leq C\alpha_\varepsilon e^{\beta(t-\tau)}$. Noutras palavras,

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^r} \leq \rho C b^{-1} (\varepsilon^{\frac{\theta N}{p}} + \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}) e^{-[b+\rho C(1+\Delta)](\tau-t)},$$

o que mostra, que

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - E_\varepsilon s_0^*(\eta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq \rho M b^{-1} \varepsilon^{\frac{\theta N}{p}} + \rho M b^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ \rho^2 M (1+\Delta) b^{-1} \varepsilon^{\frac{\theta N}{p}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-[b+\rho C(1+\Delta)](\tau-s)} (\tau-s)^{-\gamma} ds + \\ &+ \rho^2 M (1+\Delta) b^{-1} \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-[b+\rho C(1+\Delta)](\tau-s)} (\tau-s)^{-\gamma} ds, \end{aligned}$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-[b+\rho C(1+\Delta)](\tau-s)} (\tau-s)^{-\gamma} ds = \frac{1}{[b+\rho C(1+\Delta)]^{1-\gamma}} \Gamma(1-\gamma).$$

Com isso, existe $C = C(\gamma) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|s_\varepsilon^*(\eta) - E_\varepsilon s_0^*(\eta)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} &\leq C \rho^2 M (1+\Delta) b^{-1} \varepsilon^{\frac{\theta N}{p}} + \\ &+ C \rho M b^{\gamma+1} \Gamma(1-\gamma) + [\rho^2 M^2 b^{-1} (1+\Delta) (b+\rho M(1+\Delta))^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma)] \|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, existe $C > 0$, independente de ε tal que

$$\|s_\varepsilon^* - E_\varepsilon s_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{\theta N}{q}}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Um argumento do tipo *ipsis literis* pode ser usado quando o espaço considerado para se obter as taxas for o U_ε^p . Uma vez que, como vimos acima, todos os resultados usados sobre estimativas e aproximação dos semigrupos lineares possuem um análogo se este for o caso. $\square$

4.6 Atração exponencial uniforme e convergência com taxa dos atratores

Nesta seção provaremos o Teorema 4.3, principal resultado deste capítulo.

Prova do Teorema 2.3. Usando a Proposição 4.38, o item (i) segue da Proposição 4.30. O item (ii) segue da caracterização dos atratores obtida no item (i) do Teorema 1.67, Teorema 1.68 e do Teorema 4.41, pois

$$\text{dist}^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(T_\varepsilon(t)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq c e^{-\rho_1 t} \text{ para todo } t \geq 1;$$

onde $c > 0$ e $\rho_1 > 0$ independem de ε . Por fim, o item (iii₁) segue diretamente do Teorema 1.76 do Capítulo 1, onde obtemos

$$\text{dist}_H^{L^p(\Omega_\varepsilon)}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0) \leq C \varepsilon^{\frac{\theta \rho_1 N}{p(\rho_1+L)}}, \quad 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon},$$

para alguma constante $C > 0$ independente de ε .

O mesmo argumento usado em acima para obter (iii₁) aplicado à diferença $\text{dist}_H^{U_\varepsilon^p}(\mathcal{A}_\varepsilon, E_\varepsilon \mathcal{A}_0)$ nos fornece a estimativa (iii₂) com $\rho = \rho_1$. $\square$

4.7 Apêndice: Lemas Técnicos

Dedicamos esta última seção aos resultados auxiliares para a compreensão do programa executado acima. Uma vez que, usamos o tratamento explorado em [12, 19, 26] para comparar problemas lineares definidos em espaços diferentes, vale notar que

$$\|E_\varepsilon u\|_{U_\varepsilon^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|u\|_{U_0^p} \text{ para todo } u \in U_0^p.$$

De fato, isto segue do lema seguinte.

Proposição 4.42. *O operador extensão $E_\varepsilon : U_0^p \rightarrow U_\varepsilon^p$ é linear limitado com*

$$\|E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^p} = \|(w, v)\|_{U_0^p} \text{ para todo } (w, v) \in U_0^p.$$

Demonstração. Seja $(w, v) \in U_0^p$, então, se $x = (s, y)$ com $s \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, usando o fato de que $|\Gamma_s^\varepsilon| = \varepsilon^{N-1}g(s)$, temos

$$\begin{aligned} \|E_\varepsilon(w, v)\|_{U_\varepsilon^p} &= \left(\int_{\Omega} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \left(\int_0^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |v(s)|^p dy ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} |\Gamma_\varepsilon^s| |v(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 g(s) |v(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = \|(w, v)\|_{U_0^p}. \end{aligned}$$

□

Para comparar as funções de U_ε^p a U_0^p , definimos o operador projeção

$$\begin{aligned} M_\varepsilon : U_\varepsilon^p &\longrightarrow U_0^p \\ \psi_\varepsilon &\longmapsto M_\varepsilon(\psi_\varepsilon) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x), & x \in \Omega \\ T_\varepsilon^s \psi_\varepsilon, & s \in (0, 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde

$$T_\varepsilon^s \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^s|} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \psi_\varepsilon(s, y) dy, \quad \Gamma_\varepsilon^s = \{y; (s, y) \in R_\varepsilon\}.$$

Segue do teorema de Tonelli-Fubini e da Desigualdade de Hölder que o operador M_ε está bem definido. Além disso, $M_\varepsilon E_\varepsilon = I$, onde I denota o operador identidade em U_0^p .

Proposição 4.43. *A projeção $M_\varepsilon : U_\varepsilon^p \longrightarrow U_0^p$ é um operador limitado com norma $\|M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(U_\varepsilon^p, U_0^p)} \leq 1$.*

Demonstração. Seja $\phi_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$, então, se $x = (s, y)$ com $s \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, usando o fato de que $|\Gamma_s^\varepsilon| = \varepsilon^{N-1}g(s)$ e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|M_\varepsilon \phi_\varepsilon\|_{U_0^p} &= \left(\int_\Omega |\phi_\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 g(s) \left| \frac{1}{|\Gamma_s^\varepsilon|} \int_{\Gamma_s^\varepsilon} \phi_\varepsilon(s, y) dy \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega |\phi_\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \left(\int_0^1 \frac{1}{|\Gamma_s^\varepsilon|^{p-1}} \left| \int_{\Gamma_s^\varepsilon} \phi_\varepsilon(s, y) dy \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |\phi_\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \left(\int_0^1 \int_{\Gamma_s^\varepsilon} |\phi_\varepsilon(s, y)|^p dy ds \right)^{\frac{1}{p}} = \|\phi_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.44. *Existe uma constante positiva C tal que, para todo $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, temos*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 = \|\phi_\varepsilon - E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \|E_\varepsilon M_\varepsilon \psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \\ (ii) \quad & \|E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \|\phi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &= \int_{R_\varepsilon} |\phi_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &= \int_{R_\varepsilon} |E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x)|^2 dx + 2 \int_{R_\varepsilon} (\phi_\varepsilon - E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon) E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(x) dx + \int_{R_\varepsilon} |E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

E a identidade (i) segue do seguinte fato

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} (\phi_\varepsilon - E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon) E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(x) dx &= \int_0^1 \int_{\Gamma_s^\varepsilon} (\phi_\varepsilon - E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon) E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(s, y) ds dy \\ &= \int_0^1 M_\varepsilon \psi_\varepsilon(x) \left\{ \int_{\Gamma_s^\varepsilon} [\phi_\varepsilon(x) - E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon(x)] \right\} ds = 0. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\|E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 = \int_{R_\varepsilon} |(E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(x)|^2 dx = \int_0^1 \int_{\Gamma_s^\varepsilon} |(E_\varepsilon M_\varepsilon \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)(s, y)|^2 ds dy.$$

Da caracterização variacional dos autovalores do laplaciano de Neumann em Γ_ε^s , temos

$$\lambda_2(\Gamma_\varepsilon^2) = \min \left\{ \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\nabla \phi(x)|^2 dx}{\int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\phi(x)|^2 dx}; \phi \in H^1(\Gamma_\varepsilon^s), \phi \neq 0, \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \phi(x) dx = 0 \right\}.$$

e tomando $\phi = M_\varepsilon \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon$, temos

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^s} |(M_\varepsilon \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_2(\Gamma_\varepsilon^s)} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y}(x) \right|^2 dx.$$

Além disso, $\lambda_2(\Gamma_\varepsilon^s) = \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_2(\Gamma_1^s)$, onde $\lambda_2(\Gamma_1^s)$ é o segundo autovalor do laplaciano de Neumann em Γ_1^s . Com isso,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^s} |(M_\varepsilon \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2(\Gamma_1^s)} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y}(x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y}(x) \right|^2 dx$$

onde usamos o fato de que a função $s \in [0, 1] \mapsto \lambda_2(\Gamma_1^s) \in (0, +\infty)$ contínua, e portanto atinge seu mínimo em um valor positivo, isto é,

$$m := \min_{0 \leq s \leq 1} \lambda_2(\Gamma_1^s) = \lambda_2(\Gamma_1^{\bar{x}}) > 0, \bar{x} \in [0, 1],$$

de onde temos $C := \frac{1}{m} \geq \frac{1}{\lambda_2(\Gamma_1^s)}$. Agora, integrando de 0 a 1, segue a desigualdade (ii). $\square$

Observação 4.45. O operador E_ε não preserva continuidade das aplicações em U_0^p . Quando necessária for tal propriedade, consideramos o operador extensão: se $\mathcal{C} = \{(w, v) \in C(\overline{\Omega}) \oplus C(0, 1); w(P_0) = v(0) \text{ e } w(P_1) = v(1)\}$, então

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\mathcal{C} : \mathcal{C} &\longrightarrow C(\overline{\Omega}_\varepsilon) \\ (w, v) &\longmapsto E_\varepsilon^\mathcal{C}(w, v)(x) = \begin{cases} w(x), & x \in \Omega \\ \tilde{v}(x), & x = (s, y) \in R_\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\tilde{v}(x) = v(s) + h_\varepsilon(s)(w(0, y) - v(0)) + h_\varepsilon(1 - s)(w(1, y) - v(1))$ e $h_\varepsilon(s) = h(\frac{s}{\varepsilon})$, sendo

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\longrightarrow [0, 1] \\ h(s) &\longmapsto h(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, 1/4] \\ 0, & s \geq 3/4. \end{cases} \end{aligned}$$

uma função de classe C^∞ que verifica $|h'(s)| \leq C$ para todo $s \in [0, +\infty)$.

Além disso, note que

$$E_\varepsilon^\mathcal{C}(w, v)|_\Omega = E_\varepsilon(w, v) \text{ para todo } (w, v) \in C(\overline{\Omega}) \oplus C(0, 1). \quad (4.68)$$

Abaixo estimamos a diferença entre este operador e o operador extensão E_ε .

Lema 4.46. Sejam os operadores E_ε e $E_\varepsilon^\mathcal{C}$. Se $(w, v) \in \mathcal{C}$ com $(w, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \oplus C^1([0, 1])$, então

- (i) $\|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\mathcal{C})(w, v)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{N+2}{2}} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})},$
- (ii) $\|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\mathcal{C})(w, v)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(R_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{N}{2}} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})},$
- (iii) $|||E_\varepsilon^\mathcal{C}(w, v)|||_{L^2(R_\varepsilon)}^2 - |||E_\varepsilon(w, v)|||_{L^2(R_\varepsilon)}^2| \leq C \varepsilon^{N+1} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|v\|_{C(0,1)},$
- (iv) $|||\nabla E_\varepsilon^\mathcal{C}(w, v)|||_{L^2(R_\varepsilon)}^2 - |||\nabla E_\varepsilon(w, v)|||_{L^2(R_\varepsilon)}^2| \leq C \varepsilon^N \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|v\|_{C^1(0,1)}.$

Demonstração. Seja $(w, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \oplus C(0, 1)$. Segue de (4.68) que

$$\begin{aligned} \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \\ &= \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

necessitamos estimar $\|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2$. Sendo $v(0) = w(0, 0)$, $v(1) = w(1, 0)$ e $|\Gamma_\varepsilon^s| \leq C\varepsilon^{N-1}$, temos

$$\begin{aligned} \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &= \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |h_\varepsilon(s)|^2 |(w(0, y) - w(0, 0))|^2 dy ds + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |h_\varepsilon(1-s)|^2 |(w(1, y) - w(1, 0))|^2 dy ds \\ &\leq C_1 \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |y|^2 \left(\sup_{y \in \Gamma_\varepsilon^s} \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right)^2 dy ds + C_1 \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |y|^2 \left(\sup_{y \in \Gamma_\varepsilon^s} \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right)^2 dy ds \\ &\leq 2C_1 \left(\int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \right) |y|^2 dy ds \|w\|_{C^1(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^{N+2} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2. \end{aligned}$$

Para mostrar (ii), por (4.68) é suficiente estimar $\|\nabla(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(R_\varepsilon)}$. Como $h'_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1} h'(s/\varepsilon)$ e $\int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} dy ds = O(\varepsilon^N)$, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(R_\varepsilon)} &= \\ &= \int_0^\varepsilon |h'_\varepsilon(s)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |w(0, y) - v(0)|^2 dy ds + \int_0^\varepsilon |h'_\varepsilon(s)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\nabla_y w(0, y)|^2 dy ds + \\ &+ \int_{1-\varepsilon}^1 |h'_\varepsilon(1-s)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |w(1, y) - v(1)|^2 dy ds + \int_{1-\varepsilon}^1 |h'_\varepsilon(1-s)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\nabla_y w(1, y)|^2 dy ds \\ &\leq C_1 \varepsilon^{-2} \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |y|^2 dy ds \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 + \tilde{C}_1 \varepsilon^{-2} \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} dy ds \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 + \\ &+ C_1 \varepsilon^{-2} \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |y|^2 dy ds \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 + \tilde{C}_1 \varepsilon^{-2} \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^s} dy ds \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 \\ &\leq 2C_1 \varepsilon^N \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 + 2\tilde{C}_1 \varepsilon^N \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2 \leq C\varepsilon^N \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}^2. \end{aligned}$$

Para mostrar (iii) note que

$$\begin{aligned} \|E_\varepsilon^\varepsilon(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &= \|\nabla E_\varepsilon^\varepsilon(w, v) - \nabla E_\varepsilon(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \|\nabla E_\varepsilon(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \\ &+ 2(\nabla E_\varepsilon^\varepsilon(w, v) - \nabla E_\varepsilon(w, v), \nabla E_\varepsilon(w, v))_{L^2(R_\varepsilon)} \end{aligned}$$

onde usando o fato do conjunto $\tilde{R}_\varepsilon = \{(s, y) \in R_\varepsilon; 0 < s < \varepsilon, 1 - \varepsilon < s < 1\}$ possui medida de ordem ε^N .

Com isso, temos

$$\begin{aligned} |(E_\varepsilon^\varepsilon(w, v) - E_\varepsilon(w, v), E_\varepsilon(w, v))_{L^2(R_\varepsilon)}| &\leq \|(E_\varepsilon - E_\varepsilon^\varepsilon)(w, v)\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|E_\varepsilon(w, v)\|_{L^2(\tilde{R}_\varepsilon)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N+2}{2}} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \varepsilon^{\frac{N}{2}} \|v\|_{C(0,1)} \leq C\varepsilon^{N+1} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|v\|_{C(0,1)} \end{aligned}$$

A fim de mostrar (iv), veja que

$$\begin{aligned} \|\nabla E_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(w, v)\|_{L^2(R_{\varepsilon})}^2 &= \|\nabla E_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(w, v) - \nabla E_{\varepsilon}(w, v)\|_{L^2(R_{\varepsilon})}^2 + \|\nabla E_{\varepsilon}(w, v)\|_{L^2(R_{\varepsilon})}^2 + \\ &+ 2(\nabla E_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(w, v) - \nabla E_{\varepsilon}(w, v), \nabla E_{\varepsilon}(w, v))_{L^2(R_{\varepsilon})}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |(\nabla E_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(w, v) - \nabla E_{\varepsilon}(w, v), \nabla E_{\varepsilon}(w, v))_{L^2(R_{\varepsilon})}| &\leq \left\| \frac{\partial E_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(w, v)}{\partial s} - \frac{\partial E_{\varepsilon}(w, v)}{\partial s} \right\|_{L^2(R_{\varepsilon})} \left\| \frac{\partial E_{\varepsilon}(w, v)}{\partial s} \right\|_{L^2(\tilde{R}_{\varepsilon})} \\ &\leq C\varepsilon^N \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})} \|v\|_{C^1(0,1)}. \end{aligned}$$

□

No que segue introduziremos alguma notação, a fim de enunciar alguns lemas técnicos: denote por $P_0 = (0, \mathbf{0})$, $P_1 = (1, \mathbf{0})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N-1}$, P um ponto genérico do $\mathbb{R}^N$, $B_{\rho}^l(p) := B(p, 1) \setminus \overline{B(p, \rho)}$ para $0 < \rho < l$, $D_{\rho}^L := B(p_0, \rho) \cap \Omega$, $D_{\rho}^R := B(p_1, \rho) \cap \Omega$ para $0 < \rho \leq l$, $S_{\rho}^L := B_{\rho}^l(p_0) \cap \Omega$, $S_{\rho}^R := B_{\rho}^l(p_1) \cap \Omega$, $\tilde{\Omega}^L := \Omega \setminus \overline{B(p_0, l)}$ e $\tilde{\Omega}^R := \Omega \setminus \overline{B(p_1, l)}$.

Para uma função ψ_{ε} definida em Ω_{ε} , escrevemos

$$\hat{T}_{\rho}^0 \psi_{\varepsilon} = \frac{1}{|\hat{\Gamma}_{\rho}^0|} \int_{\hat{\Gamma}_{\rho}^0} \psi_{\varepsilon}(x) dx \quad \text{e} \quad \hat{T}_{\rho}^1 \psi_{\varepsilon} = \frac{1}{|\hat{\Gamma}_{\rho}^1|} \int_{\hat{\Gamma}_{\rho}^1} \psi_{\varepsilon}(x) dx,$$

onde $\hat{\Gamma}_{\rho}^0 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^N; |s|^2 + |y|^2 = \rho, s < 0\}$ e $\hat{\Gamma}_{\rho}^1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^N; |s-1|^2 + |y|^2 = \rho, s > 1\}$.

Lema 4.47. *Sejam $r \geq 1$ e $\psi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$. Então, existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que*

$$|T_{\varepsilon}^0 \psi - \hat{T}_{\varepsilon r}^0 \psi_{\varepsilon}| \leq C(N) \varepsilon^{\frac{-N+2}{2}} \|\nabla \psi_{\varepsilon}\|_{D_{\varepsilon r}^L} \quad \text{e} \quad |T_{\varepsilon}^0 \psi - \hat{T}_{\varepsilon r}^0 \psi_{\varepsilon}| \leq C(N) \varepsilon^{\frac{-N+2}{2}} \|\nabla \psi_{\varepsilon}\|_{D_{\varepsilon r}^R}.$$

Demonstração. Veja [19] lema A.5. □

Lema 4.48. *Existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que, se $\phi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$, então*

$$(T_{\varepsilon}^0 \psi_{\varepsilon} - \hat{T}_{\varepsilon r}^0 \psi_{\varepsilon})^2 + (T_{\varepsilon}^1 \psi_{\varepsilon} - \hat{T}_{\varepsilon r}^1 \psi_{\varepsilon})^2 \leq \begin{cases} C(2) |\ln \varepsilon| \|\psi_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N = 2 \\ C(N) \varepsilon^{2-N} \|\psi_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N > 2. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [19] lema A.6. □

Lema 4.49. *Existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que, se $\psi_{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$, então*

$$|T_{\varepsilon}^0 \psi_{\varepsilon}| + |T_{\varepsilon}^1 \psi_{\varepsilon}| \leq \begin{cases} C(2) |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|\psi_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N = 2 \\ C(N) \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \|\psi_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N > 2. \end{cases}$$

Demonstração. A prova segue do lema anterior e do fato de que $|\hat{T}_r^0 \psi_{\varepsilon}| + |\hat{T}_r^1 \psi_{\varepsilon}| \leq C \|\psi_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}$. □

Lema 4.50. *Seja $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ com $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Seja $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ a solução de (4.9) com f_ε , $w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ a solução de (4.11) com f_ε , e $v_\varepsilon \in H^1(0, 1)$ a solução de (4.12) com $M_\varepsilon f_\varepsilon$ e w_ε . Se $p > N$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & \text{para } N = 2 \\ C\varepsilon^N, & \text{para } N > 2. \end{cases}$$

Demonstração. Como $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$, temos $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$, o que implica que, como $p > N$, $w_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ e $\|w_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C$ com alguma constante C independente de ε . Com um argumento similar de regularidade, podemos mostrar que $v_\varepsilon \in C^1([0, 1])$ e $\|v_\varepsilon\|_{C^1([0, 1])} \leq C$ com C independente de ε .

As soluções dos problemas (4.9), (4.11) e (4.12) podem ser obtidas por processo de minimização. Isto é, definindo

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &= \min_{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla \phi|^2 + \phi^2)(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \phi(x) dx \right\} \\ \mu_\varepsilon &= \min_{\phi \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 + \phi^2)(x) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon \phi(x) dx \right\} \\ \tau_\varepsilon &= \min_{\substack{\phi \in H^1(0, 1) \\ \phi(0) = w_\varepsilon(R_0), \phi(1) = w_\varepsilon(p_1)}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (g|\phi'|^2 + g\phi^2)(s) ds - \int_0^1 g\phi(s) ds \right\} \end{aligned}$$

os valores λ_ε , μ_ε e τ_ε são atingidos em u_ε , w_ε e v_ε , respectivamente, e somente nestes.

A seguir, estabeleceremos algumas relações entre λ_ε , μ_ε e τ_ε . Se considerarmos a função $\phi_\varepsilon(x) = E_\varepsilon^\varepsilon(w_\varepsilon, v_\varepsilon)$ e denotarmos por $\tilde{v}_\varepsilon$ a componente de ϕ_ε em R_ε , obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w_\varepsilon|^2 + w_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon w_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 + \tilde{v}_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon dx \\ &= \mu_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 - \tilde{v}_\varepsilon^2)(x) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Agora, note que do Lema 4.46, temos

$$\frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 - \tilde{v}_\varepsilon^2)(x) dx \leq \varepsilon^{N-1} \frac{1}{2} \int_0^1 (g(s)|v'_\varepsilon|^2 + g(s)v_\varepsilon^2) ds + C\varepsilon^N,$$

onde usamos que $\|w_\varepsilon\|_{C^1(\Omega)}$ e $\|v_\varepsilon\|_{C^1(0, 1)}$ são uniformemente limitados. Além disso,

$$\int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon(x) dx = \varepsilon^{N-1} \int_0^1 g(s) M_\varepsilon(f_\varepsilon) v_\varepsilon(x) dx + \int_{\tilde{R}_\varepsilon} M_\varepsilon(f_\varepsilon) (\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) dx.$$

Mas,

$$\left| \int_{\tilde{R}_\varepsilon} M_\varepsilon(f_\varepsilon) (\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) dx \right| \leq \|M_\varepsilon f_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{R}_\varepsilon)} \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{R}_\varepsilon)} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{R}_\varepsilon)} \varepsilon^{\frac{N+2}{2}} \|w_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega})}$$

e pela Desigualdade de Hölder,

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{R}_\varepsilon)} |\tilde{R}_\varepsilon|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \leq \varepsilon^{-\frac{N-1}{p}} \|f_\varepsilon\|_{L^p(\tilde{R}_\varepsilon)} \varepsilon^{\frac{N-1}{p}} (\varepsilon^N)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \leq C \varepsilon^{\frac{N}{2} - \frac{1}{p}}.$$

O que implica

$$\left| \int_{\tilde{R}_\varepsilon} M_\varepsilon(f_\varepsilon)(\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon)(x) dx \right| \leq C\varepsilon^{N+1-\frac{1}{p}}.$$

Em particular, obtemos uma cota superior para λ_ε

$$\lambda_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + C\varepsilon^N. \quad (4.69)$$

Por outro lado,

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx,$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w_\varepsilon|^2 + w_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon w_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon - \nabla w_\varepsilon|^2 + (u_\varepsilon - w_\varepsilon)^2) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon|^2 dx + (u_\varepsilon - v_\varepsilon)^2) dx + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2) dx + \\ &+ \int_{R_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon dx + \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) v_\varepsilon dx - \\ &- \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon v_\varepsilon dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon (u_\varepsilon - v_\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon dx &= \int_{R_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial s} \right) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial s} dx \\ &= \int_{R_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial M_\varepsilon u_\varepsilon}{\partial s} \right) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial s} dx + \int_{R_\varepsilon} \left(\frac{\partial M_\varepsilon u_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial s} \right) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial s} dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Primeiro, analisaremos I_1 . Observe que com a mudança de variáveis $y = \varepsilon L_s(z)$, temos

$$\frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^s|} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} u_\varepsilon(s, y) dy = \int_{B(0,1)} u_\varepsilon(s, \varepsilon L_s(z)) \frac{1}{|\Gamma_1^s|} J_{L_s}(z) dz.$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{dM_\varepsilon u_\varepsilon}{ds}(s) &= \int_{B(0,1)} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}(s, \varepsilon L_s(z)) \frac{J_{L_s}}{|\Gamma_1^s|} + \int_{B(0,1)} \nabla_y(s, \varepsilon L_s(z)) \varepsilon \frac{\partial}{\partial s}(L_s(z)) \frac{J_{L_s}(z)}{|\Gamma_1^s|} dz + \\ &+ \int_{B(0,1)} u_\varepsilon(s, \varepsilon L_s(z)) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{J_{L_s}(z)}{|\Gamma_1^s|} \right) dz \\ &= K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned}$$

Desfazendo a mudança de variáveis em K_1 , temos

$$K_1 = \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}(s, y) dy.$$

Além disso, usando o fato de que $\|\frac{\partial L_s(z)}{\partial s}\| \leq C$ e desfazendo a mudança de variáveis, temos

$$|K_2| \leq C\varepsilon \int_{B(0,1)} |\nabla_y u_\varepsilon(s, L_s(z))| J_{L_s}(z) dz \leq C \frac{\varepsilon}{|\Gamma_\varepsilon^s|} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\nabla_y u_\varepsilon(s, y)| dy.$$

Agora

$$K_3 = \int_{B(0,1)} (u_\varepsilon(s, L_s(z)) - (M_\varepsilon u_\varepsilon)(s)) \frac{\partial(J_{L_s}/|\Gamma_1^s|)}{\partial s}(z) dz + (M_\varepsilon u_\varepsilon)(s) \int_{B(0,1)} \frac{\partial(J_{L_s}/|\Gamma_1^s|)}{\partial s}(z) dz.$$

Mas,

$$\int_{B(0,1)} \frac{\partial(J_{L_s}/|\Gamma_1^s|)}{\partial s}(z) dz = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{|\Gamma_1^s|} \int_{B(0,1)} J_{L_s}(z) dz \right) = 0$$

porque $\int_{B(0,1)} J_{L_s}(z) dz = |\Gamma_1^s|$.

Similarmente, desfazendo a mudança de variáveis e usando o fato de que $|\frac{\partial(J_{L_s}(z)/|\Gamma_1^s|)}{\partial s}|$, temos

$$|K_3| \leq C \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^s|} \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |u_\varepsilon(s, y) - M_\varepsilon u_\varepsilon(s)| dy.$$

Com isso,

$$|\frac{dM_\varepsilon u_\varepsilon}{ds} - M_\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} \right)| \leq C \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^s|} \left(|u_\varepsilon(s, y) - M_\varepsilon u_\varepsilon(s)| dy + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^s} |\nabla_y u_\varepsilon(s, y)| dy \right).$$

Agora,

$$|I_1| \leq C\varepsilon \|v'_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} + C \|v'_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}$$

e pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}$$

o que implica que

$$|I_1| \leq C\varepsilon \|v'_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}.$$

Mas, obviamente temos estimativas uniformes de $\|v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)}$. Portanto,

$$|I_1| \leq C\varepsilon + \frac{1}{4} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2.$$

Por outro lado, observe que

$$I_2 = - \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) v_\varepsilon dx + \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) f_\varepsilon dx + \int_{R_\varepsilon} (M_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) f_\varepsilon dx + \varepsilon^{N-2} [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)(g(s)v'_\varepsilon)]_0^1.$$

Disto, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2|) dx &= \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx = \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2|) - \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon|^2 + (u_\varepsilon - v_\varepsilon)^2) dx + \\ &+ \int_{R_\varepsilon} (M_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) f_\varepsilon dx + \varepsilon^N [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)(g(s)v'_\varepsilon)]_0^1 + I_1, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_\varepsilon} (M_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) f_\varepsilon dx \right| &\leq \left| \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon) f_\varepsilon dx \right| \leq \|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)} \|f_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)} (\varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)}) \\ &\leq C\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{4} \|\nabla u - \nabla v_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \|f_\varepsilon\|_{L(R_\varepsilon)} \leq C$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\varepsilon^N [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)(g(s)v'_\varepsilon)]_0^1| &\leq C\varepsilon^{N-1} (|T_\varepsilon^1(u_\varepsilon) - v_\varepsilon(1)| + |T_\varepsilon^0(u_\varepsilon) - v_\varepsilon(0)|) \|v_\varepsilon\|_{C^1(0,1)} \\ &\leq C\varepsilon^{N-1} (|T_\varepsilon^1(u_\varepsilon - w_\varepsilon)| + |T_\varepsilon^1(u_\varepsilon) - v_\varepsilon(1)| + |T_\varepsilon^0(u_\varepsilon - w_\varepsilon)|) \|v_\varepsilon\|_{C^1(0,1)} + \\ &+ |T_\varepsilon^0(u_\varepsilon) - v_\varepsilon(0)| \|v_\varepsilon\|_{C^1(0,1)} \end{aligned}$$

onde usando o fato de que $v_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(0,0)$ e $v_\varepsilon(1) = w_\varepsilon(1,0)$, temos

$$|T_\varepsilon^1(u_\varepsilon - w_\varepsilon)| = \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^0|} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon^0} (w_\varepsilon(0,y) - w_\varepsilon(0,0)) dy \right| \leq \frac{C}{|\Gamma_\varepsilon^0|} \int_{\Gamma_\varepsilon^0} |y| dy \|w_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega}_0)} \leq C\varepsilon \|w_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega}_0)}$$

e analogamente,

$$|T_\varepsilon^0(u_\varepsilon - w_\varepsilon)| \leq C\varepsilon \|w_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega}_0)}.$$

Com isso, usando o fato de $\|v_\varepsilon\|_{C^1(0,1)}, \|w_\varepsilon\|_{C^1(0,1)} \leq C$, temos

$$\begin{aligned} |\varepsilon^N [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)(g(s)v'_\varepsilon)]_0^1| &\leq C(N)\varepsilon^{N-1} (|T_\varepsilon^1(u_\varepsilon - w_\varepsilon)| + |T_\varepsilon^0(u_\varepsilon - w_\varepsilon)|) + C\varepsilon^N \\ &\leq C(\Theta_N(\varepsilon))^{\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + C\varepsilon^N, \end{aligned}$$

onde

$$\Theta_N(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & \text{para } N = 2 \\ \varepsilon^N, & \text{para } N > 2 \end{cases}$$

e portanto,

$$|\varepsilon^N [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon)(g(s)v'_\varepsilon)]_0^1| \leq C\Theta_N(\varepsilon) + \frac{1}{4} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

onde usamos o fato de que $\Theta_N(\varepsilon) \geq \varepsilon^N$.

Assim,

$$\lambda_\varepsilon \geq \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 - C(N)\Theta_N(\varepsilon).$$

O que implica

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 \leq C(N)\Theta_N(\varepsilon).$$

□

Lema 4.51. *Seja $\{f_\varepsilon\}$ uma seqüência tal que $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ e $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$ com p e p' índices conjugados. Então, existem funções $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L_g^p(0,1)$ tais que*

$$\int_\Omega f_\varepsilon w_\varepsilon dx \rightarrow \int_\Omega f w dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon w_\varepsilon dx \rightarrow \int_0^1 g(s)h(s)v(s)ds$$

sempre que $\|w_\varepsilon - w\|_{L^{p'}(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \|w_\varepsilon - w\|_{L^{p'}(R_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Note que $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$ significa que

$$\int_\Omega |f|^p dx + \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \int_{R_\varepsilon} |f_\varepsilon|^p dx \leq 1.$$

Disto, segue que existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_\varepsilon \rightarrow f$ fracamente em $L^p(\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega f_\varepsilon w_\varepsilon dx \rightarrow \int_\Omega f w dx$$

sempre que $\|w_\varepsilon - w\|_{L^{p'}(\Omega)} \rightarrow 0$. Também, escrevendo $x = (s, y)$ com $s \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $\varepsilon \tilde{y} = y$, temos

$$\frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \int_{R_\varepsilon} |f_\varepsilon|^p dx \leq \int_{R_1} |\tilde{f}_\varepsilon(s, \tilde{y})|^p ds d\tilde{y} \leq 1,$$

onde $\tilde{f}_\varepsilon(s, \tilde{y}) = f_\varepsilon(s, \varepsilon \tilde{y})$. Assim, existe $\tilde{h} \in L^p(R_1)$ tal que $\tilde{f}_\varepsilon \rightarrow \tilde{h}$ fracamente em $L^p(R_1)$. A seguir, mostraremos que $\tilde{h}$ independe de y . Note que, se $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(R_1)$, então

$$\int_{R_1} \tilde{f}_\varepsilon(s, \tilde{y}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}_i}(s, \tilde{y}) ds d\tilde{y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} \int_{R_1} f_\varepsilon(s, y) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(s, y) ds dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Segue que para todo $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(R_1)$,

$$\int_{R_1} \tilde{h} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}_i} dx = 0.$$

Portanto, $\tilde{h}(s, y) = g(s)h(s)$ para algum $h \in L^2(0,1)$. Além disso, se $\varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(R_\varepsilon)} \rightarrow 0$, então

$$\frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon w_\varepsilon dx \rightarrow \int_0^1 g(s)h(s)v(s)ds.$$

□

Lema 4.52. *Seja $p > N$ e considere uma seqüência $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ com $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$. Seja $(f, h) \in L^p(\Omega) \times L_g^p(0,1)$ tal que $f_\varepsilon \rightarrow (f, h)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ fracamente no sentido do Lema 4.51. Então,*

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon(w, v)\|_{H_\varepsilon^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

onde $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é a solução de (4.9) com f_ε , $w \in H^1(\Omega)$ é a solução de (4.11) com f , e $v \in H^1(0,1)$ é a solução de (4.12) com h e w .

Demonstração. Sejam $w_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ a solução de (4.11) com f_ε , e $v \in H^1(0,1)$ a solução de (4.12) com $M_\varepsilon f_\varepsilon$ e w_ε , e levando em conta que $p > N \geq 2$ e $f_\varepsilon \rightarrow f$ fracamente em $L^p(\Omega)$, facilmente obtemos $\|w_\varepsilon - w\|_{C(\overline{\Omega})} \rightarrow 0$ e $\|w_\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. O que implica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Além disso, já que $w_\varepsilon \rightarrow w$ em $C(\overline{\Omega})$ e $M_\varepsilon f_\varepsilon \rightarrow h$ fracamente em $L_g^p(0,1)$, temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon - v\|_{H^1(0,1)} = 0$, o que implica que, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-N} \|v_\varepsilon - v\|_{H^1(R_\varepsilon)} = 0$.

Portanto, com esta última afirmação, obtemos

$$\varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \|u_\varepsilon - v\|_{H^1(R_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{\frac{1-N}{2}} (\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - v\|_{H^1(R_\varepsilon)}) \rightarrow 0.$$

□

Lema 4.53. *Existe uma constante $C > 0$ independente de ε tal que para todo $f_\varepsilon \in U_\varepsilon^p$ com $p > N/2$ e $\|f_\varepsilon\|_{U_\varepsilon^p} \leq 1$ se u_ε é a solução de (4.9), então*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C.$$

Demonstração. Defina as funções u_ε^1 e u_ε^2 as soluções dos seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon^1 + u_\varepsilon^1 = f_\varepsilon|_{R_\varepsilon} & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (4.70)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon^2 + u_\varepsilon^2 = f_\varepsilon|_\Omega & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.71)$$

Dividiremos a prova em quatro etapas. Na etapa 1, basta mostrar que para cada conjunto compacto $K \subset \overline{\Omega} \setminus \{p_0, p_1\}$ existe uma constante $C > 0$ independente de ε tal que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq \|u_\varepsilon^1\|_{L^\infty(K)} + \|u_\varepsilon^2\|_{L^\infty(K)} \leq C$$

e isto segue usando funções cortes e argumentos de *bootstrap*.

Na etapa 2 basta mostrar que existe uma constante C independente de ε tal que

$$\|u_\varepsilon^1\|_{L^\infty(R_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1-N}{p}} \|f\|_{L^p(R_\varepsilon)} \leq \|f\|_{U_\varepsilon^p}$$

e isto segue usando a etapa 1, o item (iii) do Lema B.1 de [18] e Lema 5.1 de [25].

Na etapa 3 basta mostrar que existe uma constante C independente de ε tal que

$$\|u_\varepsilon^2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

e isto segue usando o item (iii) do Lema B.1 de [18] e Lema 5.1 de [25].

E na etapa 4, mostraremos que $\|u_\varepsilon^1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ e $\|u_\varepsilon^2\|_{L^\infty(R_\varepsilon)} \leq C$. Observe que pelo princípio da máxima $\|u_\varepsilon^1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon^1\|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon^1 \cup \Gamma_\varepsilon^0)}$ e $\|u_\varepsilon^2\|_{L^\infty(R_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon^2\|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon^1 \cup \Gamma_\varepsilon^0)}$ e ambos são uniformemente limitados em ε pelas etapas anteriores. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. N. Carvalho and J. A. Langa, *Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds*. Journal of Differential Equations, 233 622-653, 2007.
- [2] A. N. Carvalho, J. A. Langa and J. C. Robinson, *Lower semicontinuity of attractors for non-gradient dynamical systems*. Notas do ICMC/USP - Série Matemática, 271.
- [3] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson and A. Suarez, *Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system*, Journal of Differential Equations, 236, 570-603, 2007.
- [4] A. N. Carvalho and J. M. Arrieta, *Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations*. Transactions of the american mathematical society, volume 352, number 1, pages 285-310, 1999.
- [5] A. N. Carvalho and J. W. Cholewa, *Exponentially dissipative semigroups in metric spaces with applications to differential equations*. In press.
- [6] A. N. Carvalho and S. Piskarev, *A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 27 (7-8) 785-829, 2006.
- [7] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Studies in Mathematics and its applications, North Holland, vol. 25, 1992.
- [9] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [10] D. Henry, *Semigroups*, Handwritten Notes. IME-USP, São Paulo SP, Brasil, 1981. Disponível em <http://www.ime.usp.br/map/danielhenry>.
- [11] G. Cooperman, α -condensing maps and dissipative systems, Ph.D. Thesis, Brown University, Providence, R.I., 1978.

- [12] G. J. L. Cruz, *Comportamento assintótico de problemas parabólicos em domínios tipo dumbell*, Tese de doutorado, ICMC-USP, 2003. Disponível em <http://www.icmc.usp.br/teses>.
- [13] G. Vainikko, *Aproximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)*, Nonlinear Analysis, Methods and applications, 2, no. 6, 647-687, 1978.
- [14] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25**, American Mathematical Society, 1989.
- [15] J. K. Hale and G. Raugel, *Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. 154 (4), 281-326, 1989.
- [16] J. M. Arrieta and A. N. Carvalho, *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain*, Journal Differential Equations **199** (1) 143–178, 2004.
- [17] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho and A. Rodríguez-Bernal, *Parabolic problems with boundary conditions and critical nonlinearities*, Journal Differential Equations **156** (1) 376–406, 1999.
- [18] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho and A. Rodríguez-Bernal, *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds*, Communications in Partial Differential Equations **25** (1 & 2) 1–37, 2000.
- [19] J. M. Arrieta, A.N. Carvalho, A.N. and G. Lozada-Cruz, *Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria*, Journal of Differential Equations, **231**, 551-597 (2006).
- [20] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho and G. Lozada-Cruz, *Dynamics in Dumbbell Domains II: The Limiting Problem*, Journal of Differential Equations, 2009.
- [21] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho and G. Lozada-Cruz, *Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors*, Journal of Differential Equations, 2009.
- [22] J. W. Cholewa, J. K. Hale, *Some counterexamples in dissipative systems*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 7 (2000), 159-176.
- [23] K. Schiabel-Silva, *Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares com difusibilidade grande localizada*, Tese de doutorado, ICMC-USP, 2006. Disponível em <http://www.icmc.usp.br/teses>.
- [24] M. A. Krasnosel'skii and P. P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis* (Translated from the Russian by C. C. Fenske), Grundlehren Math. Wiss. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 263, Springer, Berlin, 1984.

- [25] O. Ladyzenskaya and N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.
- [26] R. P. da Silva, *Semicontinuidade Inferior de Atratores para Problemas Parabólicos em Domínios Finos*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2007. Disponível em <http://www.icmc.usp.br/teses>.
- [27] R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics 898 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.
- [28] R. Temam, *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York.
- [29] S. M. Bruschi, A. N. Carvalho, J. W. Cholewa and T. Dłotko, *Uniform exponential dychotomy and continuity of attractors for singularly perturbed damped wave equations*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 18, N^o 3, July 2006.
- [30] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- [31] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Colloquium Publications **49**, American Mathematical Society, 2002.