Estados de equilíbrio para fluxos singular-hiperbólicos e
transformações de tipo Lorenz

Juliano Gonçalves Oler

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 17 de Junho de 2009

Assinatura: _____

Estados de equilíbrio para fluxos singular-hiperbólicos e transformações de tipo Lorenz¹

Juliano Gonçalves Oler

Orientador: *Prof. Dr. Ali Tahzibi*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos

Agosto/2009

¹Projeto financiado pela CAPES

*A Deus, aos
meus pais Anísio
e Nair, a minha
irmã Fabiana, a
minha namorada
Helga, aos meus
irmãos
acadêmicos
Marcus Bronzi e
Fernando
Micena, dedico
com muito amor,
carinho e
gratidão.*

Agradecimentos

Agradeço profundamente:

A Deus, que por intermédio do Senhor Jesus me fortaleceu, me capacitou em sabedoria, me abençoou com saúde e entusiasmo durante todo o período do doutorado. Meu Senhor deixo aqui minha eterna gratidão, porque só o Senhor saber o quão grande são as minhas limitações.

Ao Prof. Dr. Ali Tahzibi, por sua valiosa orientação, paciência, dedicação, entusiasmo, pelas oportunidades proporcionadas e por sua grande amizade sem a qual não teria aprendido a me guiar pelas estradas numéricas da matemática. Ali, meu muito obrigado seu entusiasmo e sinceridade foram fundamentais para o meu crescimento.

Ao Prof. Dr. Krerley Oliveira, pelo empenho, pela motivação, pelas valiosas sugestões que fortaleceram este trabalho em suas fases finais e pela hospitalidade no período em que estive na Universidade Federal de Alagoas.

Ao Prof. Dr. Enoch Apaza, por sua grandiosa paciência e por todas as valiosas conversas no período em que estive no ICMC-USP e, posteriormente, nos estudos desenvolvidos junto a Universidade Federal de Alagoas. Enoch ressalto aqui minha sincera amizade e gratidão.

Ao Prof. Dr. Daniel Smania, pela gentileza no atendimento em todos os momentos em que na porta de sua sala eu bati, pelas preciosas conversas informais e por todas as sugestões. Daniel, muito obrigado.

Ao Prof. Dr. Marcelo Saia, por todos os esclarecimentos, orientações e por todas as tardes de Futebol.

A Profa. Dra. Angela Maria Sitta, por toda a formação acadêmica desde os primeiros projetos de iniciação científica até o mestrado e por ter sido a maior incentivadora para o meu ingresso no curso de doutorado em matemática.

Aos irmãos acadêmicos Marcus Bronzi e Fernando Micena, pelo direcionamento durante os meus primeiros passos na teoria de Sistemas Dinâmicos, pelas conversas, pelos seminários, pelas idéias e pela agradável caminhada. Meus amigos muito obrigado gostaria de enfatizar aqui, que muito devo a vocês.

Aos companheiros das salas 4-230, 4-232 e 4-227: Ubarana, Luizão, Ursão, Kleyber, Pimenta, Thiago, Everaldo, Márcio Fenille, Edinho, Andréa, Miriam, Patrícia, Luciene, Tatiana, pelo agradável convívio e por todas as divertidas conversas.

A todos os funcionários do ICMC, que direta e indiretamente me auxiliaram durante todo este período. Gostaria de destacar, Roberto, Dornelas, Camilo e Jô.

Aos funcionários da biblioteca do ICMC, pela prontidão no atendimento e empenho em facilitar os nossos estudos nas buscas de textos, livros e artigos.

Aos professores, alunos e funcionários da UFAL, pela hospitalidade e carinho.

Ao Jamil, grande amigo desde a graduação que nunca mediu esforços para tornar fácil minha estada em São Carlos, pelas valiosas conversas e pelo incentivo. Corão, muito obrigado.

Aos companheiros de Republica: Jamil, Ursão, Luizão, Marcão, Pimenta, Fabrício, Yuri, Flank, Mário, pelo agradável convívio e pelas quartas de futebol e muita "gordureira". Amigos, um grande abraço.

Aos Professores Nivaldo, Benito e Lisandro que sempre me auxiliaram durante todas as fases do doutorado.

Aos meus pais, Anísio, Nair pela confiança, pelo amor e carinho, vocês são os pilares de sustentação do meu caráter e personalidade. Através de vocês, creio que Deus me amava, bem antes de eu existir. Porque, pais como vocês só podem existir pelo grandioso amor de Deus. Pai, Mãe, de todas as escolas que frequentei, de todos os cursos que fui aprovado, de todas as graduações que obtive e que ainda vou obter, vocês sempre serão os maiores de todos os meus ensinamentos.

A minha irmã, Fabiana, por todo o carinho, por todo o zelo e por sempre se preocupar comigo. Fabiana, agradeço grandiosamente a Deus por você ser minha irmã. Você é muito importante na minha vida.

A minha namorada Helga, por todo incentivo, por toda compreensão nos momentos que não podemos estar juntos, pelo seu carinho o qual sempre fortaleceu-me nos momentos difíceis e por sempre ter orado por minha vida. Linda, agradeço muito a Deus por ter a sua companhia, lhe agradeço com muito amor, beijos.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho tratamos o assunto de existência e unicidade de estados de equilíbrio para uma classe importante de fluxos e aplicações com singularidades. Mostramos a existência de estados de equilíbrio para potenciais contínuos no contexto de fluxos singular-hiperbólicos, em particular fluxos de Lorenz.

Demonstramos um critério para unicidade de estados de equilíbrio para aplicações unidimensionais do tipo Lorenz. Utilizando o critério, provamos que potenciais Hölder por partes com único estado de equilíbrio formam um conjunto aberto na topologia $\mathcal{C}^0$ e que a unicidade ainda é garantida para potenciais próximos a uma constante $K_0 \in \mathbb{R}$.

Abstract

In this work we deal with the existence and uniqueness of equilibrium states for an important class of flows and transformations with singularities. In the context of singular-hyperbolic flows, we show the existence of equilibrium states for continuous potentials. In particular, this shows the existence of equilibrium states for Lorenz-like flows.

We prove a criterium for the uniqueness of the equilibrium states of one-dimensional Lorenz-like applications. Using such criterium, we prove that piecewise Hölder continuous potentials with unique equilibrium states form an open in the $\mathcal{C}^0$ topology and that the uniqueness is still guaranteed to a potential close to a constant $K_0 \in \mathbb{R}$.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Medidas Invariantes	3
1.2 Entropia Métrica	5
1.2.1 Entropia Métrica de uma Transformação que Preserva Medida	5
1.2.2 Entropia Métrica e Entropia Topológica para Fluxos Expansivos e Fluxos de Suspensão	6
1.3 Princípio Variacional	7
1.3.1 Princípio Variacional para Aplicações Contínuas	8
1.3.2 Princípio Variacional para Aplicações Contínuas sobre Espaços Métricos Não Compactos	9
1.3.3 Princípio Variacional para Aplicações Expansoras por Partes	13
1.3.4 Princípio Variacional para Fluxos Contínuos	14
1.4 h -expansividade	20
1.5 Modelo Geométrico para as Equações de Lorenz	21
1.6 Atrator Singular-Hiperbólico	25
2 Resultados Conhecidos sobre Estados de Equilíbrio	27
2.1 Estados de Equilíbrio sobre Espaços Métricos Não Compactos	27
2.2 Estados de Equilíbrio para Aplicações Expansoras por Partes	28
2.3 Estados de Equilíbrio para Fluxos Contínuos	29

2.4	Estados de Equilíbrio para um Atrator Singular-hiperbólico	30
3	Novos Resultados sobre Estados de Equilíbrio	33
3.1	Existência de Estados de Equilíbrio para um Conjunto Singular-Hiperbólico .	33
3.2	Critério para Existência e Unicidade de Estados de Equilíbrio para uma Aplicação Tipo Lorenz	33
3.3	Generecidade dos Potencias com Único Estado de Equilíbrio para uma Aplicação tipo Lorenz	35
4	Prova do Teorema 3.1.1	37
5	Prova do Teorema 3.2.1	41
6	Prova dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2	49
6.1	Prova do Teorema 3.3.1	49
6.2	Prova do Teorema 3.3.2	53
	Referências Bibliográficas	58
	Índice Remissivo	64

Introdução

A teoria desenvolvida para Sistemas Dinâmicos uniformemente hiperbólicos foi introduzida por Smale ([Sma67]) em meados dos anos 60 e se tornou a base do desenvolvimento da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais. No entanto, esta teoria deixa de fora grande famílias de sistemas que não seguem os pressupostos básicos de hiperbolicidade uniforme. Os exemplos de maior representatividade de tais sistemas são indiscutivelmente a aplicação de Hénon ([Hén76]), para o caso em que o tempo é discreto e do fluxo de Lorenz ([Lor63]) para o caso de tempo contínuo.

As propriedades indicadas pelo fluxo das equações Lorenz levaram a busca de uma extensão da noção de hiperbolicidade uniforme, englobando tempos contínuos de sistemas apresentando equilíbrios sendo acumulados em órbitas periódicas de uma forma robusta. Isso levou ao conceito de conjuntos singular-hiperbólicos ([MPP98, MPP04]). A noção de atrator singular hiperbólico é motivada pela construção do chamado modelo geométrico clássico de Lorenz ([Guc76, ABS82, Wil77]).

Por outro lado, a teoria de estados de equilíbrio em sistemas dinâmicos diferenciáveis foi introduzida pelos trabalhos pioneiros de Sinai, Ruelle e Bowen ([Sin72, BR75, Bow08, Rue76]). Para difeomorfismos e fluxos uniformemente hiperbólicos os autores provaram que todo potencial Hölder contínuo admite um único estado de equilíbrio em cada peça básica do conjunto não errante. A estratégia usada para provar este resultado notável é semi-conjugar a dinâmica a um deslocamento (shift) de tipo finito via partições de Markov.

Em [Bow75], R. Bowen mostra que para um homeomorfismo expansivo satisfazendo a propriedade de especificação sobre um espaço métrico compacto e funções contínuas satisfazendo certas condições de crescimento possuem um único estado de equilíbrio.

Em [Fra77], E. Franco mostra o mesmo resultado para fluxos $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ satisfazendo a propriedade de especificação sobre um espaço métrico compacto e expansivo, isto é, X satisfazendo a condição: cada $\gamma > 0$, existe um $\eta > 0$, tal que se

$$d(X_t(x), X_{s(t)}(y)) < \eta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

um par de pontos $x, y \in M$ e uma função contínua $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $s(0) = 0$, implica que $y = X_u(x)$, para algum $u \in [-\gamma, \gamma]$.

Importantes dificuldades surgem quando se tenta estender a teoria para um contexto de hiperbolicidade não uniforme e apesar de um progresso significativo por diversos autores uma visão global permanece ainda longe de ser obtida. Por um lado, a existência de partições de Markov geradoras só são conhecidas em poucas situações e geralmente tais partições são pelo menos enumeráveis. Além disso, estados de equilíbrio podem não existir quando o sistema apresenta pontos críticos, singularidades ou descontinuidades, veja ([Buz01, PP84]).

No Capítulo 1, listamos alguns resultados básicos da Teoria Ergódica necessários para uma boa compreensão de todo o decorrer do texto. Nesta parte do texto, recordamos o Princípio Variacional para aplicações contínuas sob um espaço métrico compacto e a mesma definição para espaços não compactos é lembrada. Quando a dinâmica é expansora por partes tal conceito é enunciado e estudado com mais detalhes nos capítulos futuros. O Princípio Variacional para fluxos contínuos também é lembrado e detalhado. Na parte final deste capítulo, estudando o Modelo Geométrico para as Equações de Lorenz definimos paralelamente a aplicação de Lorenz unidimensional e finalizamos definindo o conceito de Atrator Singular-Hiperbólico.

No Capítulo 2, damos uma visão geral do estudo existente sobre estados de equilíbrios nos contextos mencionados no Capítulo 1. Recordamos por exemplo, através do trabalho de Pesin e Pitskel ([PP84]), como encontrar medidas de equilíbrio quando o domínio onde a dinâmica está definida não é compacto. Quando o espaço de fase da dinâmica não é compacto medidas de equilíbrio podem não existir, como mostra o exemplo da Seção 1.3.2 do Capítulo 1. Vale ressaltar aqui, que medidas de equilíbrio podem não existir no caso compacto também. Resultados para fluxos contínuos sobre um espaço métrico compacto também são lembrados. Mencionamos os problemas enfrentados quando o fluxo estudado possui singularidades e finalizamos o capítulo com resultados para aplicações expansoras por partes.

No Capítulo 3, encontram-se listados todos os resultados originais que esta tese apresenta. Enunciamos um teorema que garante a existência de estados de equilíbrio para potenciais contínuos no contexto envolvendo fluxos singulares-hiperbólicos e como consequência imediata deste resultado temos o mesmo para o Atrator de Lorenz Geométrico. No contexto unidimensional, temos um resultado que caracteriza a pressão de um potencial ϕ Hölder por partes em $\mathcal{P}$, sendo $\mathcal{P}$ a partição natural dinamicamente gerada pela aplicação de tipo Lorenz. Sob a hipótese de que $P_{top}(\phi, L) > P_{top}(\phi, L, \partial\mathcal{P})$ o nosso resultado garante existência e unicidade de estados de equilíbrio para uma aplicação Lorenz-like. Finalizamos este capítulo, enunciando um resultado que mostra que o conjunto dos potenciais que possuem um único estado de equilíbrio é aberto na topologia $\mathcal{C}^0$ e que a unicidade ainda é garantida para potenciais próximos a uma constante $K_0 \in \mathbb{R}$.

Os Capítulos 3, 4 e 5, são destinados as provas dos resultados mencionados no Capítulo 3.

Preliminares

Neste capítulo, relembramos os conceitos básicos da Teoria Ergódica. Para maiores detalhes sobre aos resultados aqui mencionados, o leitor pode consultar [Kel98] e [Wal82].

1.1 Medidas Invariantes

Considere $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Uma transformação $T : M \rightarrow M$ é *mensurável* se $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Dizemos que uma medida μ é *T-invariante* se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

A próxima proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [Oli05], caracteriza quando uma medida é invariante. A saber,

Proposição 1.1.1. Sejam $T : M \rightarrow M$ uma transformação e μ uma medida. Então, T preserva a medida μ se, e somente, se para toda função integrável, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi \circ f \, d\mu.$$

Os resultados que seguem garantem em que condições temos medidas invariantes.

Para um espaço métrico compacto M , denotamos por $\mathfrak{M}(M)$, o conjunto das medidas de probabilidades e por $\mathfrak{M}_T(M)$ o conjunto das medidas de probabilidade T -invariante sobre a σ -álgebra de Borel de M . Introduzimos em $\mathfrak{M}(M)$ uma topologia que o torna um espaço métrico compacto. Pela compacidade de M podemos encontrar uma seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, densa na bola unitária de $\mathcal{C}(M)$ (espaço das funções contínuas de M em M), com a norma do supremo. Para

maiores detalhes sobre esta construção, veja [Rud87]. Assim sendo, podemos definir a seguinte função distância

$$d^*(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| \int s_k d\mu - \int s_k d\nu \right|.$$

A função distância definida anteriormente é uma métrica em $\mathfrak{M}(M)$. A topologia gerada pela métrica d^* é chamada de *topologia fraca**. Para maiores informações sobre esta topologia, veja [Oli05]. A convergência das medidas na topologia fraca* é caracterizada pelo próximo lema.

Lema 1.1.1. Uma seqüência de medidas de probabilidades $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathfrak{M}(M)$ na topologia fraca* para $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ se, e somente se, $\int \psi d\mu_n \rightarrow \int \psi d\mu$, para toda função contínua $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

O resultado seguinte mostra como relacionar a convergência de uma seqüência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na topologia fraca* com a medida de conjuntos fechados e abertos.

Corolário 1.1.1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ na topologia fraca*, então

- i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$, $\forall F \subset M$, fechado;
- ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$, $\forall A \subset M$, aberto.

Com os conceitos introduzidos até o prezado momento temos condições de descrever com exatidão a estrutura topológica do espaço de medidas $\mathfrak{M}(M)$.

Teorema 1.1.1. $(\mathfrak{M}(M), d^*)$ é um espaço métrico compacto e convexo.

Ressaltamos aqui, que a prova dos resultados enunciados anteriormente podem ser encontrados em [Oli05].

Diante desse contexto, o Teorema de Krylov-Bogolubov caracteriza a existência de medidas invariantes. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [Wal82]. Precisamente, o teorema nos diz que:

Teorema 1.1.2 (Krylov-Bogolubov). Se M é um espaço métrico compacto e $T : M \rightarrow M$ é uma transformação contínua, então T possui ao menos uma probabilidade invariante.

Considere agora uma transformação que preserva medida em $(M, \mathcal{A}, \mu)$. Observe, que se $T^{-1}(A) = A$, para $A \in \mathcal{A}$, então $T^{-1}(M \setminus A) = M \setminus A$. Assim sendo, podemos estudar T , analisando duas transformações mais simples, $T|_A$ e $T|_{M \setminus A}$. Com isso se $0 < \mu(A) < 1$, então podemos simplificar o estudo de T .

Esse fato sugere estudar transformações que não podem ser decompostas como acima e de tentar expressar qualquer transformação que preserva medida em termos dessas peças indecomponíveis. Esse contexto sugere a seguinte definição.

Uma medida de probabilidade invariante μ , para a transformação $T : M \rightarrow M$, é *ergódica* se $T^{-1}(A) = A$, então $\mu(A)\mu(A^c) = 0$, para todo boreliano A .

1.2 Entropia Métrica

1.2.1 Entropia Métrica de uma Transformação que Preserva Medida

Para um estudo detalhado desta seção, veja [Mañ83], [Wal75] e [PY98]. Durante toda esta seção convencionamos que $(M, \mathcal{A}, \mu)$ representa um espaço de probabilidade, sendo M um espaço métrico compacto.

Uma *partição* $\mathcal{P}$ de $(M, \mathcal{A}, \mu)$ é uma família de subconjuntos em $\mathcal{A}$, com medidas não nulas, tais que

$$P_1, P_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu(P_1 \cap P_2) = 0,$$

$$\mu(M - \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = 0.$$

Considere $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições de um espaço métrico compacto M . Definimos a *entropia da partição $\mathcal{P}$ com respeito à medida μ* , por

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log(\mu(P))$$

e, o *refinamento* de $\mathcal{P}$ com relação a $\mathcal{Q}$, por

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P} \text{ e } Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Seja $T : M \rightarrow M$ uma transformação que preserva medida. A *entropia métrica de T com respeito a partição $\mathcal{P}$* é definida pelo limite

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P} \vee T^{-1}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee T^{-(n-1)}(\mathcal{P})).$$

A *entropia métrica de T com respeito à medida μ* é definida por

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}: \text{finita}} \{h_\mu(T, \mathcal{P})\}.$$

Considere T uma transformação invertível que preserva medida no espaço $(M, \mathcal{A}, \mu)$. Uma partição com entropia métrica finita $\mathcal{P}$ de $(M, \mathcal{A}, \mu)$ é *T -geradora*, se

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n(\mathcal{P}) = \mathcal{A} \pmod{\mu}.$$

O próximo resultado nos dá uma condição suficiente para o cálculo da entropia métrica.

Teorema 1.2.1 (Kolmogorov-Sinai). Se $\mathcal{P}$ é uma partição T -geradora, então

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P}).$$

1.2.2 Entropia Métrica e Entropia Topológica para Fluxos Expansivos e Fluxos de Suspensão

Todos os resultados desta seção podem ser encontrados mais detalhadamente no trabalho de Sun e Vargas ([SV99]). Nesse trabalho os autores introduzem um novo conceito de entropia métrica e topológica para fluxos contínuos sob um espaço métrico compacto, estabelecendo um interessante paralelo com os conceitos usualmente já conhecidos da literatura.

Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo contínuo em M . Para $t \in \mathbb{R}$, $X_t : M \rightarrow M$, denota o homeomorfismo dado por $X_t(x) = X(t, x)$.

Uma medida de probabilidade de Borel é chamada X_t -invariante se para todo conjunto de Borel B , temos que $\mu(X_t(B)) = \mu(B)$ e μ é chamada X -invariante se é X_t -invariante, para todo t .

Uma medida de probabilidade X_t -invariante é *ergódica* se todo conjunto de Borel X_t -invariante tem medida 0 ou 1. Uma probabilidade X -invariante é chamada *ergódica* se todo conjunto de Borel X_t -invariante para todo t tem medida 0 ou 1.

O conjunto de todas as medidas de probabilidade ergódicas X_t -invariantes e X -invariantes são denotados respectivamente por $\mathcal{E}_{X_t}$ e $\mathcal{E}_X$.

Dado um intervalo fechado I que contém zero, uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma reparametrização se α é um homeomorfismo crescente sobre a imagem e $\alpha(0) = 0$.

O conjunto de todas as reparametrizações é denotado por $Rep(I)$. Dado um fluxo X sobre M , $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, definimos

$$B = B(x, t, \epsilon, X) = \{y \in M : \text{existe } \alpha \in Rep[0, t], \text{ com, } d(X_{\alpha(s)}x, X_sy) < \epsilon, 0 \leq s \leq t\}$$

e chamamos B de (t, ϵ, X) -bola. Note, que as (t, ϵ, X) -bolas são conjuntos abertos.

Os autores introduziram o seguinte conceito de entropia métrica para fluxos.

Definição 1.2.1. Sejam X um fluxo sobre M , $\mu \in \mathcal{E}_\phi$ e $\delta \in (0, 1)$. Considere $N(\delta, t, \epsilon, X)$ o menor número de (t, ϵ, X) -bolas necessárias para cobrir um conjunto cuja μ -probabilidade é maior do que $1 - \delta$. Então, a entropia métrica de X é definida por

$$e_\mu(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(N(\delta, t, \epsilon, X)).$$

O limite acima não depende da escolha de δ , para maiores detalhes veja [Bil78] e [Kat80].

A entropia topológica de X , denotada por $e(X)$, é definida por

$$e(X) = \sup\{e_\mu(X) : \mu \in \mathcal{E}_X\}.$$

Definição 1.2.2. Sejam $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ e $Y : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ fluxos sobre espaços métricos compactos com medidas de probabilidades invariantes ergódicas μ e ν respectivamente. Dizemos que (M, X, μ) é equivalente em média a (W, Y, ν) se existe um homeomorfismo $P : M \rightarrow W$ preservando medida e uma aplicação contínua $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- (i) $\sigma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente, para todo $x \in M$;
- (ii) $\sigma_x(s+t) = \sigma_x(s) + \sigma_{X_s(x)}(t)$, para todo $x \in M$ e $s, t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $P \circ X_t(x) = Y_{\sigma_x(t)} \circ P(x)$, para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$.

A aplicação contínua σ é chamada de *cociclo* de X . Se X, Y são fluxos topologicamente conjugados dizemos que Y é *uma mudança de tempo generalizada* de X se existe um homeomorfismo $P : M \rightarrow W$ e uma aplicação σ como acima.

O próximo resultado afirma que a entropia métrica definida anteriormente é invariante por equivalência em medida.

Teorema 1.2.2 ([SV99]). Sejam (M, X, μ) e (W, Y, ν) fluxos equivalentes em medidas com μ, ν medidas ergódicas. Então, $e_\mu(X) = 0$ se, e somente se, $e_\nu(Y) = 0$ e $e_\mu(X) = \infty$ se, e somente se, $e_\nu(Y) = \infty$.

Dado um fluxo X denotamos respectivamente por $h_\mu(X_t)$ e $h(X_t)$ a entropia métrica e entropia topológica usuais do homeomorfismo X_t . O próximo teorema relaciona as entropias definidas acima com os conceitos usualmente já conhecidos.

Teorema 1.2.3 ([SV99]). Se X é um fluxo contínuo como acima que possui uma medida de probabilidade invariante ergódica μ , então $e_\mu(X) \leq h_\mu(X_1)$. Se X não tem pontos fixos, então a igualdade acontece.

Os resultados correspondentes são obtidos para entropia topológica.

Teorema 1.2.4 ([SV99]). Sejam X, Y dois fluxos sobre um espaço métrico compacto. Se esses fluxos são uma mudança de tempo generalizada um do outro, então

- (i) $e(X) = 0$ se, e somente se, $e(Y) = 0$ e $e(X) = \infty$ se, e somente se, $e(Y) = \infty$;
- (ii) $e(X) \leq h(X_1)$ e a igualdade ocorre, quando X não tem pontos fixos.

Dado um fluxo expansivo X podemos definir um fluxo de suspensão simbólica que denotamos aqui por $\tilde{X}$, veja [BW72a] para uma definição mais detalhada. No teorema a seguir os autores respondem uma questão proposta por Bowen e Walters em [BW72a].

Teorema 1.2.5 ([SV99]). Seja X um fluxo expansivo sem pontos fixos e considere $\tilde{X}$ um fluxo de suspensão para X , então $h(X_1) = h(\tilde{X}_1)$

1.3 Princípio Variacional

Na teoria de sistemas dinâmicos o chamado Formalismo Termodinâmico o qual foi originalmente desenvolvido pelos físicos teóricos, tornou-se uma ferramenta poderosa nas últimas três décadas. O principal ingrediente deste contexto é o princípio variacional para pressão topológica. Nesta seção enunciamos em linhas gerais o princípio variacional em diversos contextos.

1.3.1 Princípio Variacional para Aplicações Contínuas

A noção de pressão topológica foi introduzida por Ruelle em [Rue73]. No contexto de espaços métricos compactos para homeomorfismos expansivos. No mesmo trabalho o autor formulou um princípio variacional para pressão topológica. Uma prova completa do princípio variacional, no caso mais geral, foi dada posteriormente por Walters em [Wal75]. Os principais resultados desse trabalho estão listados em linhas gerais nesta seção.

Seja M um espaço métrico compacto. Para $\epsilon > 0$ e um inteiro positivo n , um subconjunto $E \subset M$ é chamado (n, ϵ) -separado se para todo $x, y \in E$ e $x \neq y$, implica que $d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$, para algum $k \in [0, n]$. Note que se E é um conjunto (n, ϵ) -separado máximo e $B_x(\epsilon, n) = \{y \in M : d(f^k(y), f^k(x)) \leq \epsilon, 0 \leq k \leq n-1\}$, então $M = \bigcup_{x \in E} B_x(\epsilon, n)$. Assim sendo, definimos

$$Z_n(f, \phi, \epsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) \right)} : E \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado máximo} \right\},$$

$$P(f, \phi, \epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(f, \phi, \epsilon)$$

e

$$P(f, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(f, \phi, \epsilon).$$

Observação 1.3.1. Para simplificar a notação podemos introduzir a definição de conjunto (n, ϵ) -separado para um difeomorfismo f (respectivamente, para o fluxo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$) através da distância $d_n^f(x, y) = \sup_{0 \leq j < n-1} d(f^j(x), f^j(y))$, (respectivamente, $d_T^X(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} d(X_t(x), X_t(y))$), da seguinte forma: um conjunto $S \subset M$ é (n, ϵ) -separado por f (respectivamente X) se $d_n^f(x, y) > \epsilon$ (respectivamente $d_T^X(x, y) > \epsilon$), para todo $x, y \in S$, tal que $x \neq y$.

Assim sendo, pela continuidade do fluxo X e da compacidade de M , para todo $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ($\delta \rightarrow 0$, sempre que $\epsilon \rightarrow 0$), tal que se $d(x, y) \leq \delta$, então $\max_{0 \leq t \leq 1} d(X_t(x), X_t(y)) < \epsilon$. Isso implica que toda bola de raio ϵ , na métrica d_T^X , contém uma bola de raio δ , na métrica $d_{[T]}^{X_1}$, sendo $[T]$ a parte inteira de $T \in \mathbb{R}$ e X_1 o tempo 1 do fluxo.

Walters em [Wal75] provou o seguinte princípio variacional:

Teorema 1.3.1 ([Wal75]). Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \rightarrow M$, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas. Então,

$$P(f, \phi) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_f(M)} \left(h_\mu(f) + \int \phi d\mu \right).$$

Dado um conjunto f -invariante, $Z \subset M$, chamamos uma medida μ_φ de *estado de equilíbrio* sobre Z com relação a função potencial φ se $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}_f(Z)$ e satisfaz a igualdade

$$P_Z(\varphi) = h_{\mu_\varphi}(f) + \int_Z d\mu_\varphi.$$

1.3.2 Princípio Variacional para Aplicações Contínuas sobre Espaços Métricos Não Compactos

Como foi mencionado na seção anterior o princípio variacional sob espaços métricos compactos foi completamente estudado por Walters em [Wal75]. Para um subconjunto não compacto de um espaço métrico compacto Bowen em [Bow73] introduziu a noção de pressão topológica, provando um correspondente princípio variacional.

Nesta seção, enunciamos em linhas gerais o conceito de pressão topológica e o princípio variacional para subconjuntos não compactos estudados por Pesin e Pitskel em [PP84]. A vantagem de se estudar os resultados de Pesin e Pitskel está no fato de podermos usá-los em aplicações com descontinuidades.

Vale ressaltar que todos os conceitos enunciados nesta parte do texto podem ser encontrados em sua plenitude nos trabalhos [PP84] e [Pes97].

Sejam M um espaço métrico compacto, $Z \subseteq Q \subset M$ e $f : Q \rightarrow Q$ uma aplicação contínua.

Considere $\mathcal{U}$ uma cobertura finita de M . Denote, por $\mathcal{W}_m(\mathcal{U})$ o conjunto de todas as seqüências $\underline{U} = \{U_{i_0}U_{i_1} \cdots U_{i_{m-1}} : U_{i_j} \in \mathcal{U}\}$ de comprimento $m = m(\underline{U})$. Para um função contínua ϕ sobre M definimos os conjuntos

$$Z(\underline{U}) = \{x \in Z : f^k(x) \in U_{i_k}, k = 0, \dots, m-1\},$$

$$S_m\phi(\underline{U}) = \sup\left\{\sum_{k=0}^{m-1} \phi(f^k(x)) : x \in Z(\underline{U})\right\}.$$

Se $Z(\underline{U}) = \emptyset$, então convencionamos que $S_m\phi(\underline{U}) = -\infty$. Defina $\mathcal{W}(\mathcal{U}) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{W}_m(\mathcal{U})$.

Dizemos que $\Gamma \subset \mathcal{W}(\mathcal{U})$ cobre Z se $Z \subset \bigcup_{\underline{U} \in \Gamma} Z(\underline{U})$.

Se, Γ cobre $Z \subset M$, então

$$M(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi, N) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{U})} \left\{ \sum_{\underline{U} \in \Gamma} e^{(-\lambda m(\underline{U}) + S_m(\underline{U})\phi(\underline{U}))} : m(\underline{U}) \geq N \right\}.$$

Observe que a função $M(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi, N)$ é decrescente a medida que N aumenta. Esse fato garante a existência do limite

$$m(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} M(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi, N).$$

Para $Z \subset M$ fixado, a função $m(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi)$, tem a seguinte propriedade:

$$\exists \lambda_0 : \begin{cases} m(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi) = 0, & \forall \lambda > \lambda_0, \\ m(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi) = \infty, & \forall \lambda < \lambda_0. \end{cases}$$

Seja

$$P_Z(\mathcal{U}, \phi) = \inf\{\lambda : m(\mathcal{U}, \lambda, Z, \phi) = 0\}.$$

Quando Q é compacto a definição dada por Pesin e Pitskel coincide com a definição clássica de pressão topológica dada por Bowen em [Bow08].

Proposição 1.3.1 ([PP84]). O seguinte limite existe:

$$P_Z(\phi) = \lim_{\text{diam}(\mathcal{U}) \rightarrow 0} P(\mathcal{U}, \phi).$$

Denote respectivamente $\mathfrak{M}(M)$, $\mathfrak{M}_f(M)$ e $\mathfrak{M}_f(Q)$ pelo conjunto das medidas de Borel normalizadas sobre M , o conjunto das medidas $\mu \in \mathfrak{M}(M)$ f -invariante, o conjunto das medidas $\mu \in \mathfrak{M}_f(M)$, tais que $\mu(Q) = 1$, μ é ergódica e $f|_Q$ invariante.

Tome $x \in Q$ e, considere a sequência de medidas normalizadas

$$\mu_{x,n} = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{f^k(x)},$$

sendo μ_y a medida de Dirac no ponto y .

Seja $V(x)$ o conjunto de todas as medidas limites na topologia fraca* em M das seqüências $\mu_{x,n}$. Observe que $V(x) \subset \mathfrak{M}_f(M)$.

Teorema 1.3.2 ([PP84]). Suponha que para cada $x \in Q$, a intersecção $V(x) \cap \mathfrak{M}_f(Q) \neq \emptyset$. Então,

$$P_Q(\phi) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_f(Q)} \left(h_\mu(f|_Q) + \int_M \phi d\mu \right). \quad (1.1)$$

Seja φ uma função contínua sobre M . A medida μ_φ é um *estado de equilíbrio* para a função φ sobre Q se $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}_f(Q)$ e

$$h_{\mu_\varphi}(f|_Q) + \int_M \phi d\mu_\varphi = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_f(Q)} \left(h_\mu(f|_Q) + \int_Q \phi d\mu \right). \quad (1.2)$$

Fora do contexto compacto sérios problemas podem surgir ao estudarmos a existência de estados de equilíbrios para um dado potencial.

A seguir, damos um exemplo de um conjunto Q que não satisfaz a condição do Teorema 1.3.2 e que a igualdade (1.1) não é válida para $\phi = 0$. Nesse caso, notamos a não existência de estados de equilíbrio para o potencial $\phi = 0$. Observamos que o exemplo em detalhes pode ser encontrado em [PP84].

Seja (Σ_2, σ) um shift completo formado por seqüências bi-infinitas de dois símbolos 0 e 1 (shift de Bernoulli clássico). Defina o conjunto $A = \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_\sigma(\Sigma_2)} G_\mu$, sendo G_μ o conjunto de todos os pontos típicos para a medida μ e $Q = \Sigma_2 \setminus A$.

Note que

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}_\sigma(Q)} (h_\mu(\sigma|_Q)) = 0. \quad (1.3)$$

Considere agora a medida de Bernoulli μ , tal que

$$\mu(C_0) = p \quad \text{e} \quad \mu(C_1) = q,$$

sendo $C_0 = \{\omega = (\omega_n) : \omega_0 = 0\}$, $C_1 = \{\omega = (\omega_n) : \omega_0 = 1\}$, $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$ e $p \neq q$.

Além disso,

$$|h_\mu(\sigma) - \log(2)| \leq \delta, \quad \text{com } \delta \ll 1.$$

Formamos a seguinte partição dos números inteiros em dois subconjuntos Q_1 e Q_2 :

$$\begin{cases} k \in Q_1, \text{ se } (2n)! \leq |k| \leq (2n+1)!, \text{ para algum } n \geq 1; \\ Q_2 \text{ é o complemento de } Q_1. \end{cases}$$

Agora defina o homeomorfismo $\Psi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ pela relação

$$(\Psi(\omega))_n = \begin{cases} \omega_n & , \quad n \in Q_1 \\ \omega_n + 1 \pmod{2} & , \quad n \in Q_2. \end{cases}$$

Considere o conjunto $Z = \Psi(G_\mu)$.

Lema 1.3.1 ([PP84]). O conjunto Z definido anteriormente satisfaz a relação $Z \subset Q$.

Demonstração. Seja χ a função característica do conjunto $\{\omega : \omega_0 = 1\} \subset \Sigma_2$. Considere $\omega \in Z$. Então, pelo Teorema de Birkhoff e da definição da medida e do homeomorfismo Ψ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{i=0}^{(2n+1)!} \chi(\sigma^i(\omega)) = p,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^{(2n)!} \chi(\sigma^i(\omega)) = q.$$

Como $p \neq q$, a seqüência $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\sigma^i(\omega))$ não possui limite quando $n \rightarrow \infty$, o que mostra que $\omega \in Q$ e, portanto, prova o Lema. $\square$

Prosseguindo denote por ξ a partição de Σ_2 com dois elementos $A_1 = \{\omega : \omega_0 = 0\}$ e $A_2 = \{\omega : \omega_0 = 1\}$.

Fixe $m > 0$ e defina $\eta_m = \bigvee_{j=-m}^m \sigma^j(\xi)$ e $\xi_n = \bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^j(\eta_m)$

Lema 1.3.2 ([PP84]). Para μ -quase todo $\omega \in G_\mu$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \log(\mu(C_{\xi_n}(\Psi(\omega)))) \right) = h_\mu(\sigma), \quad (1.4)$$

sendo $C_{\xi_n}(\Psi(\omega))$ o elemento de ξ_n que contém $\Psi(\omega)$.

Demonstração. Temos que

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \log(\mu(C_{\xi_n}(\Psi(\omega)))) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \log \left(\prod_{j=-m}^{m+n-1} \mu(C_{\sigma^j(\xi)}(\Psi(\omega))) \right) \right) = I_1 + I_2,$$

sendo

$$I_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{|Q(i, m, n)|}{n} \cdot \frac{1}{|Q(i, m, n)|} \sum_{j \in Q(i, m, n)} \log(\mu(C_{\sigma^j(\xi)}(\Psi(\omega)))) \right),$$

com $Q(i, m, n) = Q_i \cap [-m, m+n-1]$, $i = 1, 2$, e $|A|$ denota o número de elementos do conjunto A .

Aplicando a Lei Forte dos Grandes Números para o shift de Bernoulli, temos que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{|Q(i, m, n)|} \sum_{j \in Q(i, m, n)} \log(\mu(C_{\sigma^j(\xi)}(\Psi(\omega)))) \right),$$

converge para o seu valor esperado que é $h_\mu(\sigma)$.

Como as involuções $0 \mapsto 1$ e $1 \mapsto 0$, levam a medida μ sobre uma medida de Bernoulli com a mesma entropia métrica, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{|Q(i, m, n)|} \sum_{j \in Q(i, m, n)} \log(\mu(C_{\sigma^j(\xi)}(\Psi(\omega)))) \right) = h_\mu(\sigma).$$

Assim sendo, obtemos $I = h_\mu(\sigma)$, o que demonstra o lema. $\square$

Para finalizar,

Lema 1.3.3 ([PP84]). $P_Z(0) = \log(2)$.

Demonstração. Fixe $m > 0$ e considere a partição η_m que é também uma cobertura finita de Σ_2 . Segue do Lema 1.3.2 que para todo $\gamma > 0$ existe um conjunto $D \subset G_\mu$ e um número $N > 0$, tal que $\mu(D) > 1 - \gamma$ e para cada $x \in D$ e $n \geq N$

$$\mu(\mathcal{C}_{(\eta_m)_n}) \leq \exp(-n(h_\mu(\sigma) - \gamma)). \quad (1.5)$$

Fixe $n \geq N$ e escolha $\Gamma_n \subset \mathcal{W}(\eta_m)$, tal que

$$\left| M(\eta_m, \lambda, Z, 0, n) - \sum_{\underline{U} \in \Gamma_n} \exp(-\lambda n) \right| \leq \gamma,$$

Γ_n cobrindo Z . Defina $\Gamma_{n,l} = \{\underline{U} \in \Gamma_n : m(\underline{U}) = l\}$, K_l é o número de elementos em $\Gamma_{n,l}$ e $E_l = \bigcup_{\underline{U} \in \Gamma_{n,l}} Z(\underline{U})$. Como, $Z(\underline{U}') \cap Z(\underline{U}'') = \emptyset$, para cada $\underline{U}', \underline{U}'' \in \Gamma_{n,l}$, com $\underline{U}' \neq \underline{U}''$, segue da desigualdade (1.5) que

$$K_l = \frac{\mu(E_l \cap D)}{\exp(-l(h_\mu(\sigma) - \gamma))}.$$

Logo, para $\lambda < h_\mu(\sigma) - \gamma$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{U} \in \Gamma_n} \exp(-\lambda n) &= \sum_{l=n}^{\infty} \exp(-\lambda l) K_l \\ &\geq \sum_{l=n}^{\infty} \mu(E_l \cap D) \exp[(-\lambda + h_\mu(\sigma) - \gamma)l] \\ &\geq (1 - \gamma) \exp[(-\lambda + h_\mu(\sigma) - \gamma)n]. \end{aligned}$$

Agora quando $n \rightarrow \infty$, temos que $m(\eta_m, \lambda, Z, 0) = \infty$ e, assim,

$$P_Z(\eta_m, 0) \geq h_\mu(\sigma) - \gamma \geq \log(2) - \delta - \gamma. \quad (1.6)$$

Como $\text{diam}(\eta_m) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$, segue da desigualdade (1.6) que

$$P_Z(0) \geq \log(2) - \delta - \gamma.$$

Uma vez que δ e γ são escolhidos arbitrariamente e $P_Z(0) \leq P_{\Sigma_2}(0) = \log(2)$, temos

$$\log(2) = P_{\Sigma_2}(0) \geq P_Q(0) \geq P_Z(0) = \log(2).$$

□

Concluindo, segue de (1.3) e do Lema 1.3.3 que

$$\sup_{\mu \in M_\sigma(Q)} (h_\mu(\sigma|_Q)) = 0 \neq \log(2) = P_Z(0)$$

e, portanto, $\phi = 0$, não possui estados de equilíbrio.

1.3.3 Princípio Variacional para Aplicações Expansoras por Partes

Nesta seção, enunciamos em linhas gerais a construção do princípio variacional para uma aplicação expansora por partes com relação a um potencial Hölder contínuo por partes. Para um estudo mais detalhado, veja [BS03].

Uma *aplicação expansora por partes* $(M, \mathcal{P}, T)$ é um espaço métrico compacto localmente conexo M com uma partição finita $\mathcal{P}$, que é simplesmente uma coleção de subconjuntos abertos não vazios de M , dois a dois disjuntos, com união densa e uma aplicação $T : \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A \rightarrow M$, tal que para cada $A \in \mathcal{P}$ a restrição $T|_A$ pode ser estendida a um homeomorfismo expansor entre uma vizinhança de $\overline{A}$ e uma vizinhança de $\overline{T(A)}$.

O *bordo da partição* $\mathcal{P}$ é definido por $\partial\mathcal{P} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} \partial A$.

Denotamos, por $\mathcal{P}_0^{n-1}$ a coleção dos n -cilindros, isto é, o conjunto das intersecções não vazias de tamanho n , $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(A_{n-1})$, com A_i elementos da partição $\mathcal{P}$.

Um *potencial Hölder contínuo por partes* é uma aplicação $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a restrição de ϕ a cada elemento de $\mathcal{P}$ é Hölder-contínua, isto é, para todo x, y em algum elemento de $\mathcal{P}$, temos

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq Kd(x, y)^\alpha,$$

para algum $\alpha > 0$, $K < \infty$.

A *pressão topológica de um subconjunto* $S \subset M$, não necessariamente invariante, é definida por

$$P_{top}(\phi, S, T) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{A \in \mathcal{P}_0^{n-1} \\ S \cap \overline{A} \neq \emptyset}} \sup_{x \in A} e^{S_n \phi(x)} \right), \quad (1.7)$$

sendo $S_n \phi(x) = \phi(x) + \phi(T(x)) + \dots + \phi(T^{n-1}(x))$.

A *pressão topológica* de T , é dada por $P_{top}(\phi, T) = P_{top}(M, T)$. A *pressão métrica* de $\mu \in \mathfrak{M}_T(M)$, é dada por

$$P_\mu(\phi, T) = h_\mu(T) + \int \phi \, d\mu.$$

Nesse contexto, temos os autores provam seguinte resultado:

Teorema 1.3.3 ([BS03]). Seja $(M, \mathcal{P}, T)$ uma aplicação expansora por partes, com um potencial Hölder contínuo por partes ϕ . Assuma que

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}, T) < P_{top}(\phi, T).$$

Então, o princípio variacional é verificado, mais precisamente,

$$P_{top}(\phi, T) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_T(M)} \{P_\mu(\phi, T)\}$$

e o supremo é realizado por pelo menos um medida $\mu \in \mathfrak{M}_T(M)$.

1.3.4 Princípio Variacional para Fluxos Contínuos

Nesta parte do trabalho descrevemos com detalhes a caracterização do princípio variacional para um fluxo contínuo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ como sendo o princípio variacional do tempo

1 desse fluxo. Todos os resultados aqui enunciados podem ser encontrados em [Fra77] e em [Wal75].

O próximo passo agora é relembrarmos a definição de pressão topológica para um fluxo contínuo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, sobre uma variedade compacta M e uma função contínua $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Um conjunto $E \subset M$ é (t, ϵ) -separado para um fluxo X se, para cada $x, y \in E$, $x \neq y$, implica $d(X_s(x), X_s(y)) > \epsilon$, para algum $s \in [0, t]$.

Dessa forma, definimos

$$Z_t(X, \phi, \epsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\int_0^t \phi(X_s(x)) ds} : E \text{ é } (t, \epsilon)\text{-separado maximal} \right\},$$

$$P(X, \phi, \epsilon) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_t(X, \phi, \epsilon)$$

e

$$P(X, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(X, \phi, \epsilon).$$

Além disso, consideraremos

$$\phi_t(x) = \int_0^t \phi(X_s(x)) ds,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para o fluxo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ denotamos por $\mathfrak{M}_X(M)$ o conjunto das *medidas de probabilidade borelinas invariantes*, para X , isto é, $\mathfrak{M}_X(M) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{M}_{X_t}(M)$.

Claramente, temos $\mathfrak{M}_X(M) \subset \mathfrak{M}_{X_t}(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado. Em particular $\mathfrak{M}_X(M) \subset \mathfrak{M}_{X_1}(M)$.

Lema 1.3.4.

$$i) \quad P(X, \phi) = P(X_1, \phi_1);$$

$$ii) \quad \text{Seja } \mathfrak{M}_X(M) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{M}_{X_t}(M). \text{ Para cada } \mu \in \mathfrak{M}_X(M), \text{ temos que}$$

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi_1 \, d\mu.$$

Demonstração. $i)$ Note que para cada inteiro positivo n , obtemos que

$$\int_0^n \phi(X_s(x)) ds = \int_0^1 \phi(X_s(x)) ds + \int_1^2 \phi(X_s(x)) ds + \cdots + \int_{n-1}^n \phi(X_s(x)) ds.$$

Por mudança de coordenadas, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_0^n \phi(X_s(x))ds &= \int_0^1 \phi(X_s(x))ds + \cdots + \int_0^1 \phi(X_{s+n-1}(x))ds \\
 &= \int_0^1 \phi(X_s(x))ds + \cdots + \int_0^1 \phi(X_s(X_{n-1}(x)))ds \\
 &= \int_0^1 \phi(X_s(x))ds + \cdots + \int_0^1 \phi(X_s(\underbrace{X_1 + \cdots + 1}_{(n-1) \text{ vezes}}(x)))ds.
 \end{aligned}$$

Como $X_{t+s} = X_t \circ X_s$, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_0^n \phi(X_s(x))ds &= \int_0^1 \phi(X_s(x))ds + \cdots + \int_0^1 \phi(X_s(\underbrace{X_1 \circ \cdots \circ X_1}_{(n-1)\text{vezes}}(x)))ds \\
 &= \int_0^1 \phi(X_s(x))ds + \cdots + \int_0^1 \phi(X_s(X_1^{n-1}x))ds \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \phi(X_s(X_1^k(x)))ds = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_1(X_1^k(x)).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, para cada inteiro positivo n , segue que

$$\int_0^n \phi(X^s(x))ds = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_1(X_1^k(x)). \quad (1.8)$$

Por outro lado, segue da Observação 1.3.1

$$\begin{aligned}
 Z_n(X, \phi, \epsilon) &= \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \int_0^n \phi(X^s(x))ds : E \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado para } X \right\} \\
 &\stackrel{(1.8)}{=} \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} \phi_1(X_1^k(x)) : E \text{ é } (n, \delta(\epsilon))\text{-separado para } X_1 \right\} \\
 &= Z_n(X_1, \phi_1, \delta = \delta(\epsilon)).
 \end{aligned}$$

O que implica que

$$Z_n(X_1, \phi_1, \delta) = Z_n(X, \phi, \epsilon). \quad (1.9)$$

Como para cada $t > 0$, existe um inteiro positivo n_t , tal que $n_t - 1 \leq t \leq n_t$, tem-se que

$$Z_{n_t-1}(X, \phi, \epsilon) \leq Z_t(X, \phi, \epsilon) \leq Z_{n_t}(X, \phi, \epsilon),$$

logo basta observar que se E_{n_t-1} , E_t e E_{n_t} são conjuntos $(n_t - 1, \epsilon)$, (t, ϵ) e (n_t, ϵ) separados respectivamente, então $E_{n_t-1} \subset E_t \subset E_{n_t}$.

Assim sendo, segue de (1.9), que

$$Z_{n_t-1}(X_1, \phi_1, \delta) \leq Z_t(X, \phi, \epsilon) \leq Z_{n_t}(X_1, \phi_1, \delta). \quad (1.10)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} P(X_1, \phi_1, \delta) &= \limsup_{(n_t-1) \rightarrow \infty} \frac{1}{(n_t-1)} \log Z_{n_t-1}(X, \phi_1, \delta) \\ &\stackrel{(1.10)}{\leq} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_t(X, \phi, \epsilon) \\ &= P(X, \phi, \epsilon). \end{aligned}$$

Assim,

$$P(X_1, \phi_1, \delta) \leq P(X, \phi, \epsilon). \quad (1.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(X, \phi, \epsilon) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_t(X, \phi, \epsilon) \\ &\stackrel{(1.10)}{\leq} \limsup_{n_t \rightarrow \infty} \frac{1}{n_t} \log Z_{n_t}(X, \phi, \delta) \\ &= P(X_1, \phi_1, \delta). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(X, \phi, \epsilon) \leq P(X_1, \phi_1, \delta). \quad (1.12)$$

Assim sendo, de (1.11) e (1.12)

$$P(X_1, \phi_1, \epsilon) = P(X, \phi, \delta).$$

Assim,

$$P(X, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(X, \phi, \epsilon) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(X_1, \phi, \delta) = P(X_1, \phi),$$

note que estamos novamente utilizando a Observação 1.3.1 para garantir que $\delta \rightarrow 0$, sempre que $\epsilon \rightarrow 0$.

Portanto, concluímos que

$$P(X, \phi) = P(X_1, \phi).$$

ii) Considere $\mu \in \mathfrak{M}_X(M) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathfrak{M}_{X_t}(M)$. Como $\mathfrak{M}_X(M) \subset \mathfrak{M}_{X_1}(M)$, segue que

$$\begin{aligned} \int \phi_1 d\mu &= \int \left(\int_0^1 \phi(X_s(x)) ds \right) d\mu = \int_0^1 \left(\int \phi(X_s(x)) d\mu \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(\int (\phi \circ X_s)(x) d\mu \right) ds = \int_0^1 \left(\int \phi d\mu \right) ds \\ &= \left(\int \phi d\mu \right) \left(\int_0^1 ds \right) = \int \phi d\mu. \end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade estamos usando o Teorema de Fubini e na quarta igualdade utilizamos o fato de que μ é uma medida invariante para o fluxo.

Logo,

$$\int \phi d\mu = \int \phi_1 d\mu.$$

Verificados os itens (i) e (ii), concluímos a demonstração do Lema 1.3.4. $\square$

O próximo resultado é uma ferramenta útil para relacionarmos a existência de estados de equilíbrio para potenciais ϕ_1 , intrínsecos ao tempo 1 do fluxo, com a existência de estados de equilíbrios para os potenciais ϕ ligados ao fluxo propriamente dito.

Teorema 1.3.4 ([Wal75]). Sejam $X = \{X_t : M \rightarrow M\}_{t \in \mathbb{R}}$ um grupo de homeomorfismos de M a 1-parâmetro e $\phi \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. Defina $\phi_t(x) = \int_0^t \phi(X_s(x)) ds$. Se $\mathfrak{M}_X(M)$ denota as medidas invariantes de probabilidade de Borel para o fluxo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, então

$$\begin{aligned} P(X_t, \phi_t) &= \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_X(M)} \left(h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu \right) \\ &= \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_X(M)} \left(h_\mu(X_t) + t \left(\int \phi d\mu \right) \right). \end{aligned}$$

Além disso, $P(X_t, \phi_t) = |t|P(X_1, \phi_1)$.

Demonstração. Para $t \in \mathbb{R}$ fixado, obtemos pelo Teorema 1.3.1,

$$\begin{aligned} P(X_t, \phi_t) &= \sup_{\mathfrak{M}_{X_t}(M)} [h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu] \\ &\geq \sup_{\mathfrak{M}_X(M)} [h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu]. \end{aligned}$$

Defina $\mathbb{E}_{X_t}(M)$ como sendo o conjunto das medidas ergódicas de $\mathfrak{M}_{X_t}(M)$. O conjunto $\mathbb{E}_{X_t}(M)$ é a coleção de pontos extremos de $\mathfrak{M}_{X_t}(M)$ e, portanto,

$$P(X_t, \phi_t) = \sup_{\mathbb{E}_{X_t}(M)} [h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu].$$

Seja $\mu \in \mathbb{E}_{X_t}(M)$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, $\mu \circ X_{-s}$ é também um elemento de $\mathbb{E}_{X_t}(M)$ e, obtemos, que $h_\mu(X_t) = h_{\mu \circ X_{-s}}(X_t)$.

Considere $\tilde{\mu} = \frac{1}{t} \int_0^t \mu \circ X_{-s} ds \in \mathfrak{M}_X(M)$. Por 9.8 de [Roh67],

$$h_{\tilde{\mu}}(X_t) = \frac{1}{t} \int_0^t h_{\mu \circ X_{-s}}(X_t) ds = h_\mu(X_t).$$

Note que $t \int \phi d\tilde{\mu} = \int \phi_t d\mu = \int \phi_t d\tilde{\mu}$ e, assim,

$$\begin{aligned} P(X_t, \phi_t) &= \sup_{\mathfrak{M}_X(M)} [h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu] \\ &= \sup_{\mathfrak{M}_X(M)} [h_\mu(X_t) + t \int \phi d\mu]. \end{aligned}$$

Se $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned} P(X_t, \phi_t) &= \sup_{\mathfrak{M}_X(M)} [h_\mu(X_t) + \int \phi_t d\mu] \\ &= t \sup_{\mathfrak{M}_X(M)} [h_\mu(X_1) + \int \phi_1 d\mu] \\ &= tP(X_1, \phi_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $t < 0$, então

$$\begin{aligned} P(X_t, \phi_t) &= P(X_{-t}, \phi_{-t}) \\ &= -tP(X_{-1}, \phi_{-1}) \\ &= -tP(X_1, \phi_1). \end{aligned}$$

□

Aplicando o Teorema 1.3.4, para $t = 1$, obtemos

$$P(X_1, \phi_1) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_X(M)} \left(h_\mu(X_1) + \int \phi d\mu \right). \quad (1.13)$$

Dessa forma, segue do Lema 1.3.4 e de (1.13), que

$$P(X, \phi) = P(X_1, \phi_1) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_X(M)} \left(h_\mu(X_1) + \int \phi d\mu \right).$$

Logo, com as informações acima enunciadas temos condições de definir quando uma medida $\mu \in \mathfrak{M}_X(M)$ é um estado de equilíbrio para um fluxo X .

Definição 1.3.1. Um estado de equilíbrio para ϕ , com respeito ao fluxo X , é uma medida $\mu \in \mathfrak{M}_X(M)$, tal que

$$h_\mu(X_1) + \int \phi d\mu = P(X, \phi).$$

1.4 h -expansividade

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação uniformemente contínua sobre o espaço métrico M . Para cada $E, F \subset M$ dizemos que E é (n, δ) -gerado por F , com respeito a f , se para cada $y \in F$, existe um $x \in E$, tal que

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Definimos $r_n(F, \delta) = r_n(F, \delta, f)$ como sendo o *mínimo da cardinalidade* de um conjunto (n, δ) -gerado por F . Se K é um subconjunto compacto de M , então a continuidade uniforme de f , garante que $r_n(K, \delta) < \infty$. Para $K \subset M$ compacto, definimos

$$\bar{r}_f(K, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log(r_n(K, \delta))$$

e

$$h(f, K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{r}_f(K, \delta).$$

Note que $\bar{r}_f(K, \delta)$ decresce quando δ aumenta. Sejam

$$\Phi_\epsilon(x) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(B_\epsilon(f^n(x))) = \{y : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \text{ para } n \geq 0\}$$

e

$$h_f^*(\epsilon) = \sup_{x \in M} h(f, \Phi_\epsilon(x)).$$

A aplicação f é chamada *h -expansiva* se existe ϵ , tal que $h_f^*(\epsilon) = 0$. Se ϵ é tal que $h_f^*(\epsilon) = 0$, então dizemos que ϵ é uma *constante de h -expansividade* para f .

No caso em que f é um homeomorfismo definimos o conjunto

$$\Gamma_\epsilon(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(B_\epsilon(f^n(x)))$$

e

$$h_{f, \text{homeo}}^*(\epsilon) = \sup_{x \in M} h(f, \Gamma_\epsilon(x)).$$

Observação 1.4.1. Quando M é compacto a definição de h -expansividade é na realidade equivalente à definição para o caso em que f não é um homeomorfismo. Mais precisamente, $h_f^*(\epsilon) = h_{f, \text{homeo}}^*(\epsilon)$, sempre que M for compacto.

Lema 1.4.1 ([Bow72a]). Seja $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo contínuo sobre M . Suponha que existam $\epsilon > 0$ e $s > 0$, tais que

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(x, X) &= \{y : d(X_t(x), X_t(y)) \leq \epsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\} \\ &\subset X_{[-s, s]}(x) = \{X_r(x) : |r| \leq s\}. \end{aligned}$$

Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos que X_t é h -expansivo.

Teorema 1.4.1 ([Bow72a]). Seja M um espaço métrico compacto de dimensão finita. Considere $\mathcal{P}$ uma partição de Borel de M com $\text{diam}(\mathcal{P}) \leq \epsilon$. Então,

$$h_\mu(f) \leq h_\mu(f, \mathcal{P}) + h_f^*(\epsilon),$$

para toda medida de Borel f -invariante normalizada μ . Além disso, se ϵ é a constante de h -expansividade para f , então $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$.

1.5 Modelo Geométrico para as Equações de Lorenz

Nesta seção, descrevemos rapidamente a construção do *Modelo Geométrico* para as equações de Lorenz. Consequentemente definimos a aplicação unidimensional de Lorenz, a qual chamaremos *aplicação de tipo Lorenz*, enunciando suas propriedades mais relevantes. Os resultados aqui mencionados podem ser encontrados em sua plenitude em [Rob99].

Guckenheimer em ([Guc76]) introduziu o *modelo geométrico para as equações de Lorenz* que é compatível com integração numérica das atuais equações. Esse modelo foi analisado por Williams ([Wil77], [Wil79a], [Wil79b]), Guckenheimer and Williams ([GW79]), Rand ([Ran78]) e Robinson ([Rob89], [Rob92]). Veja, Sparrow ([Spa82]), Guckenheimer e Holmes ([GH90]), para um estudo completo do modelo mencionado nesta seção.

Para entendermos o modelo, primeiro consideramos o fluxo das equações de Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}, \end{cases}$$

numa vizinhança da origem. Pelo Teorema de Hartman-Grobman, as equações são conjugadas por um difeomorfismo às equações linearizadas numa vizinhança da origem dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = -by \\ \dot{z} = -cz, \end{cases} \quad (1.14)$$

com $a = \lambda_u \approx 11.83$, $b = -\lambda_{ss} \approx 22.83$ e $c = -\lambda_s \approx 2,66$. A conjugação diferenciável segue por um resultado de Sternberg ([Ste58]), veja também Hartman ([Har64]). Assim sendo, $0 < a < b < c$. As soluções das equações linearizadas são dadas por

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at} \\ y(t) = y_0 e^{-bt} \\ z(t) = z_0 e^{-ct}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Queremos estudar as soluções à medida que as órbitas do fluxo passam perto do ponto singular, ou seja, a partir do momento em que $z(t)$ é igual a algum z_0 fixado, até o momento em que $x(t)$ seja igual a algum $\pm x$ fixado.

Considere as seções

$$\Sigma = \{(x, y, z_0) : |x|, |y| \leq A\}, \quad (1.16)$$

$$\Sigma' = \Sigma \setminus \{(x, y, z_0) : x = 0\} \quad (1.17)$$

e

$$S^\pm = \{(\pm x, y, z) : |y|, |z| \leq \beta\}. \quad (1.18)$$

Então, para $(x, y, z_0) \in \Sigma'$, o tempo τ , tal que $X_\tau(x, y, z_0) \in S = S^+ \cup S^-$ é determinado por

$$e^{a\tau} |x| = x_1 \iff e^\tau = \left(\frac{x_1}{|x|} \right)^{\frac{1}{a}}. \quad (1.19)$$

À aplicação de Poincaré, $P_1 : \Sigma' \rightarrow S$, é dada por

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= (y(\tau), z(\tau)) \\ &= (e^{-b\tau} y, e^{-c\tau} z_0) \\ &= (yx^{\frac{b}{a}} x_1^{-\frac{b}{a}}, x^{\frac{c}{a}} z_0 x_1^{-\frac{c}{a}}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Note que se $x > 0$, então $P_1(x, y) \in S^+$ e se $x < 0$, então $P_1(x, y) \in S^-$. Os autovalores da aplicação P_1 , no ponto fixo, são os mesmos que os autovalores das equações do Lorenz original, a saber,

$$\frac{b}{a} = \left| \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_u} \right| \approx 1.93 > 1 \text{ e } \frac{c}{a} = \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_u} \right| \approx 0.23 < 1.$$

Logo, a região quadrada $\{(x, y, z_0) : 0 < x \leq A, |y| \leq A\}$ em Σ' é levada para um região nos moldes de um cúspide em S^+ . Veja a figura 1.1.

Figura 1.1: Fluxo numa vizinhança do ponto fixo.

O modelo geométrico assume que a aplicação de Poincaré P_2 de $S^\pm$ volta para Σ levando linhas horizontais, $z = z_1$, em linhas $x = x_1$. Essa compatibilidade garante que há um conjunto considerável de direções contrativas. Mais especificamente, assumimos que

$$D(P_2)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Seja $P = P_1 \circ P_2$. Então, $P : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ e a imagem de Σ' por P é representada pela figura 1.2.

Figura 1.2: Imagem de Σ' pela aplicação de Poincaré.

À aplicação P_1 leva um segmento de linha, com os mesmos valores de x , para um segmento de linha, com os mesmos valores de z e à aplicação P_2 leva um segmento de linha, com os mesmos valores de z , de volta a um segmento com os mesmos valores de x . Assim sendo, a aplicação P é da forma

$$P(x, y) = (L(x), g(x, y)). \quad (1.22)$$

Para um ponto x_0 fixado a aplicação $g(x_0, y)$ é uma contração na direção do eixo y , isto é,

$$|g(x_0, y_1) - g(x_0, y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2|, \quad (1.23)$$

para $0 < \mu < 1$ e $|L'(x)| \geq \sqrt{2} > 1$, para todo x com $|x| \leq A$.

Assim, a aplicação de Poincaré tem uma decomposição hiperbólica $E_p^u \oplus E_p^s$, com $E_p^s = \{(0, v_2)\}$ e E_p^u .

Isso ocorre, devido à forma da aplicação de Poincaré, que tem uma folheação estável invariante $W^s(q, P)$, composta de curvas com valores constantes de x sobre Σ .

Os segmentos de linha $W^s(q, P)$, para $q \in \Sigma'$ são tomados sobre outro segmento dessa linha, a saber $W^s(P(q), P)$, com provavelmente um valor diferente de x . Construimos classes de equivalência com os pontos de Σ que se situam sobre o mesmo segmento de linha $W^s(q, P)$.

Colapsando classes de equivalência em pontos, obtemos a aplicação $\pi : \Sigma \rightarrow [-A, A]$. Na situação acima $\pi(q)$ nos dá apenas a coordenada x do ponto q , isso porque P leva classes de equivalência em classes de equivalência.

Consequentemente, P e π induzem uma aplicação $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Esta descrição da aplicação L representa a mesma função onde escrevemos $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$. Veja a figura (1.3).

As propriedades da aplicação L são descritas, mais especificamente, a seguir:

- (i) A simetria da equação diferencial, implica que $L(-x) = -L(x)$;
- (ii) A aplicação L tem uma única descontinuidade em $x = 0$;
- (iii) $L(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} L(x) = A$, $L(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = -A$ e $\lim_{x \rightarrow 0} L'(x) = \infty$. Também, temos que $0 < L^2(A) < L(A) < A$ e, portanto, $0 > L^2(-A) > L(-A) > -A$.

- (iv) Cada um dos dois ramos da aplicação inversa de f estende-se para uma função de classe $C^{1+\rho}$, para algum $\rho > 0$, sobre $[L(-A), A]$ ou $[-A, L(A)]$ e se g denota qualquer ramo inverso ramo inverso da aplicação L , então $g'(x) \leq \lambda < 1$.

Figura 1.3: Aplicação tipo Lorenz como quociente da aplicação de primeiro retorno

As propriedades de L são obtidas principalmente da forma da aplicação de Poincaré do fluxo passando pela singularidade.

Definição 1.5.1. A aplicação L satisfazendo as propriedades (i)-(vi) é chamada de aplicação *tipo Lorenz*.

Exemplo 1.5.1. Toda β -transformação $T(x) = \beta x + \alpha \bmod(1)$, com $\alpha \geq 0$, $\beta + \alpha \leq 2$ e $1 < \beta \leq 2$ é uma aplicação tipo Lorenz com inclinação constante igual a β . Veja figura 1.4.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e, considere, $g : I \rightarrow I$ uma aplicação contínua. Dizemos, que g é *localmente eventualmente sobrejetiva*, ou simplesmente *LEO* (*locally eventually onto*), se para todo intervalo aberto, não vazio, $K \subset I$, existe $n > 0$, tal que $I \subset g^n(K)$. Para um prova do próximo resultado, veja [Rob99].

Figura 1.4: β -transformação $T(x) = \beta x + \alpha \bmod(1)$

Teorema 1.5.1. Assuma que $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ satisfaz as hipóteses (i) – (iv) dadas a cima. Então, L é LEO sobre o intervalo $(-A, A)$.

1.6 Atrator Singular-Hiperbólico

Todos os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [APPV09].

Em toda esta seção, M é uma variedade 3-dimensional compacta sem bordo e $\mathfrak{X}^1(M)$ é o conjunto dos campos de vetores de classe $\mathcal{C}^1$ sobre M , com a topologia $\mathcal{C}^1$.

Fixamos uma estrutura Riemanniana diferenciável sobre M e uma forma de volume normalizada m que chamamos medida de Lebesgue. Escrevemos além disso, $dist$ para a distância induzida sobre M . Dado $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ se $x \in M$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então $X_{[a, b]}(x) = \{X_t(x), a \leq t \leq b\}$.

Seja Λ um conjunto compacto invariante de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Dizemos que Λ é *isolado* se existe um conjunto aberto $U \supset \Lambda$, tal que $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$.

Se U definido acima pode ser escolhido de forma que $X_t(U) \subset U$ para $t > 0$, dizemos que Λ é um *conjunto captador*.

A *bacia topológica* de um conjunto captador Λ é definida por

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} dist(X_t(x), \Lambda) = 0\}.$$

Dizemos que um conjunto captador Λ é *transitivo* se Λ coincide com o conjunto ω -limite de uma X -órbita regular.

Um *atrator* é um conjunto captador transitivo e um *repulsor* é um atrator para o campo $-X$. Um atrator ou repulsor é *próprio* se não é a própria variedade.

Um conjunto invariante de X é *não trivial* se não é uma órbita periódica e, também, não é uma singularidade.

Seja Λ um conjunto compacto invariante de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$. Dizemos que Λ tem uma (c, λ) -*decomposição dominada* se o fibrado sobre Λ pode ser escrito como uma

soma contínua DX_t -invariante de sub-fibrados

$$T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2,$$

tal que para cada $t > 0$ e cada $x \in \Lambda$, temos

$$\|DX_t|_{E_x^1}\| \cdot \|DX_{-t}|_{E_{X_t(x)}^2}\| < c\lambda^t. \quad (1.24)$$

Salientamos aqui, que apenas estamos estudando fluxos em dimensão 3. No que segue, o primeiro sub-fibrado E^1 será uni-dimensional e a direção do fluxo está contido no segundo sub-fibrado E^2 que chamamos de *direção central* e é denotada, por E^{cu} .

Dizemos que um subconjunto $\Lambda \in M$ é *parcialmente hiperbólico* se Λ tem um (c, λ) -decomposição dominada para algum $c > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$, tais que o sub-fibrado $E^1 = E^s$ é uniformemente contrator, isto é, para cada $t > 0$ e para cada $x \in \Lambda$, temos

$$\|DX_t|_{E_x^s}\| < c\lambda^t.$$

Para $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos $J_t^c(x)$ como sendo o valor absoluto do determinante da aplicação linear

$$DX_t|_{E_x^{cu}} : E_x^{cu} \rightarrow E_{X_t(x)}^{cu}.$$

Dizemos que o sub-fibrado E_Λ^{cu} de um conjunto invariante parcialmente hiperbólico Λ *expande volume* se $J_t^c(x) \geq ce^{-\lambda t}$, para cada $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$. Nesse caso, dizemos que E_Λ^{cu} (c, λ) -*expande volume*, para indicar a dependência de c, λ .

Seja Λ um conjunto compacto invariante de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ com singularidades. Dizemos que Λ é um conjunto *singular-hiperbólico* de X se todas as singularidades de Λ são hiperbólicas e Λ é parcialmente hiperbólico com direção central expandindo volume.

O fluxo singular-hiperbólico é *sensível às condições iniciais* se existe um $\delta > 0$, tal que para todo $x \in M$ e para toda vizinhança N de x , existe um $y \in N$ e $t \geq 0$, tal que $\text{dist}(X_t(x), X_t(y)) > \delta$. Nesse contexto, os autores trabalham com uma propriedade mais forte chamada de *expansividade*.

Seja $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Defina,

$$\mathcal{K} = \{h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(\mathbb{R}), h(s) > h(t), \forall s > t\}.$$

Dizemos que um fluxo é $\mathcal{K}$ -*expansivo* sobre Λ se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que para $x, y \in \Lambda$ e $h \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$d(X_t(x), X_{h(t)}(y)) \leq \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

então podemos encontrar $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $X_{h(t_0)}(y) \in X_{[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]}(x)$.

Dizemos que um conjunto *compacto invariante* Λ é $\mathcal{K}$ -*expansivo* se a restrição de X_t a Λ é um fluxo expansivo. Em [APPV09], os autores mostram que todo atrator singular-hiperbólico é $\mathcal{K}$ -expansivo. A saber,

Teorema 1.6.1 ([APPV09]). Seja Λ um atrator singular-hiperbólico de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Então, Λ é $\mathcal{K}$ -expansivo.

Resultados Conhecidos sobre Estados de Equilíbrio

Neste capítulo descrevemos alguns resultados existentes sobre estados de equilíbrios nos contextos introduzidos na seção anterior. Recordamos por exemplo, como encontrar medidas de equilíbrio, quando o domínio onde a dinâmica está definida não é compacto. Resultados para fluxos contínuos sobre um espaço métrico compacto, também são lembrados. Mencionamos o que ocorre quando um fluxo possui singularidades e finalizamos o capítulo com resultados para aplicações expansoras por partes.

2.1 Estados de Equilíbrio sobre Espaços Métricos Não Compactos

Seja M um espaço métrico compacto. Considere $Q \subset M$ geralmente um subconjunto não compacto e $f : Q \rightarrow Q$ uma aplicação contínua. De um modo geral, não está sendo assumido que a aplicação f possa ser estendida para uma aplicação contínua de M o que permite estudar o caso de aplicações descontínuas sobre o conjunto M considerando $Q = M \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(Z)$ e, tomando, Z como sendo o conjunto dos pontos de descontinuidade da aplicação f .

Em particular, os autores em [PP84] provam o princípio variacional para aplicações unidimensionais com descontinuidades como por exemplo, a aplicação unidimensional tipo Lorenz.

Formalmente, seja $M = [0, 1]$ e considere $D = \{d_l\}_{l=0}^q$, tal que D defina uma partição do segmento M em pontos $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_q = 1$.

Considere $I_l = (d_{l-1}, d_l)$ e defina o seguinte conjunto

$$\mathcal{R} = \{x \in M : f^n(x) \in D, \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

Note que, à aplicação f é contínua sobre o conjunto não compacto $Q = M \setminus \mathcal{R}$.

Adicionalmente, suponha que à aplicação $f : M \setminus D \rightarrow M$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) A aplicação f é contínua e monótona sobre cada intervalo I_l e, assim, estende-se a uma aplicação contínua de I_l sobre M ;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow d_l^-} f(x) = f(d_l^-) \neq f(d_l^+) = \lim_{x \rightarrow d_l^+} f(x)$, $l = 1, \dots, q-1$;
- (iii) O conjunto $\mathcal{R}$ é denso.

Nesse contexto, o seguinte resultado é obtido pelos autores:

Teorema 2.1.1 ([PP84]). Suponha que f satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) mencionadas anteriormente. Se φ é um potencial contínuo e limitado, tal que

$$\sup(\varphi) - \inf(\varphi) \leq P_Q(0), \quad (2.1)$$

então para a função φ a igualdade (1.1) é verdadeira e, existe, uma medida $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}_f(M)$ satisfazendo (1.2).

Observamos aqui que o resultado provado por Pesin e Pitskel garante apenas a existência de estados de equilíbrio para potenciais satisfazendo a condição 2.1, mas não nos dá nenhuma informação de como podemos analisar a unicidade.

No Capítulo 3, enunciamos um resultado que enfraquece um pouco a Condição 2.1 e nos permite mostrar a existência e unicidade de estados de equilíbrio para aplicações tipo Lorenz com relação a potenciais Hölder contínuos por partes.

2.2 Estados de Equilíbrio para Aplicações Expansoras por Partes

Em [BS03] Buzzi e Sarig mostram que para uma certa classe de potenciais sobre um shift de Markov enumerável topologicamente transitivo, a existência e unicidade de estados de equilíbrio é garantida. Utilizando, um teorema de isomorfismo, os autores identificam uma aplicação expansora por partes T com um shift de Markov. Formalmente falando, os autores provam:

Teorema 2.2.1 ([BS03]). Seja $(M, \mathcal{P}, T)$ uma aplicação expansora por partes com um potencial Hölder contínuo por partes ϕ . Assuma que,

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}, T) < P_{top}(\phi, T).$$

Então,

- (i) existe um número finito de estados de equilíbrios ergódicos;
- (ii) se, adicionalmente, T é fortemente transitiva, no sentido que para todo conjunto aberto não-vazio U , $\bigcup_{k \geq 0} T^k(U) \supseteq T(M)$, então existe um único estado de equilíbrio para o potencial ϕ .

2.3 Estados de Equilíbrio para Fluxos Contínuos

Ernesto Franco em [Fra77] mostrou que um fluxo contínuo e expansivo (definição introduzida por [BW72b]) satisfazendo a propriedade de especificação sobre um espaço métrico compacto M de dimensão finita e potenciais satisfazendo certas condições de crescimento, possui um único estado de equilíbrio. Mais precisamente, o contexto estudado é o seguinte:

Seja $C = ((\mathbb{R}, 0), (\mathbb{R}, 0))$ o conjunto de todas as aplicações contínuas $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $h(0) = 0$. Um fluxo $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é *expansivo* se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $x, y \in M$ e para alguma $h \in C$, temos

$$d(X_t(x), X_{s(t)}(y)) \leq \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

então $y = X_{[-\epsilon, \epsilon]}(x)$.

Seja, $CO_\delta^*(t)$ o conjunto dos pontos periódicos para o fluxo, com algum período no intervalo $[t - \delta, t + \delta]$.

Definição 2.3.1. Um fluxo X satisfaz a *propriedade de especificação*, se para cada $\epsilon > 0$, existe um L_ϵ , tal que a seguinte afirmação é verdadeira: se $z_0, \dots, z_n \in M$ e $t_0, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ satisfazem $t_{i+1} \geq t_i + L_\epsilon$, então existe um ponto $y \in CO_{n\epsilon}^*(t_{n+1} - t_0)$, tal que

$$d(X_{t+s(t)}(y), X_{t-t_i}(z_i)) < \epsilon$$

para $t \in [t_i, t_{i+1} - L_\epsilon]$, sendo $s(t)$ uma função passo, constante sobre $[t_i, t_{i+1}]$, com $s([t_0, t_1]) = 0$ e

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_{i+1}(z_0, \dots, z_{i+1}) = s([t_{i+1}, t_{i+2})) - s([t_i, t_{i+1})),$$

satisfazendo $|\epsilon_{i+1}| < \epsilon$.

Seja Λ_H um conjunto hiperbólico. Dizemos que Λ_H é *C-denso* se para cada $p \in \text{Per}(\Lambda_H)$, p é um ponto periódico tipo sela e $\Lambda_H = \overline{W_X^u(p)}$, sendo $W_X^u(p)$ a variedade instável do ponto p pelo fluxo X .

Observamos aqui que um fluxo Axioma A $\mathcal{C}$ -denso é um exemplo de um fluxo que é expansivo e satisfaz a propriedade de especificação (veja [Bow72c] e a prova de (1.1) em [Bow72b]).

Dizemos que $\phi \in \text{Var}(X)$ quando existe $K > 0$ e $\epsilon > 0$, tais que $d(X_s(x), X_s(y)) \leq \epsilon$, para todo $s \in [0, t]$ implica que

$$\left| \int_0^t \phi(X_s(x)) ds - \int_0^t \phi(X_s(y)) ds \right| < K.$$

O resultado mostrado por Franco é descrito pelo próximo teorema.

Teorema 2.3.1 ([Fra77]). Se $\phi \in \text{Var}(X)$ e X um fluxo expansivo satisfazendo a propriedade de especificação sobre um espaço métrico compacto de dimensão finita M , então existe um único estado de equilíbrio para $\phi \in \text{Var}(X)$.

Observamos aqui que este resultado foi mostrado inicialmente por Rufus Bowen [Bow75], para homeomorfismos expansivos satisfazendo especificação sobre um espaço métrico compacto e potenciais contínuos satisfazendo certas condições de crescimento.

2.4 Estados de Equilíbrio para um Atrator Singular-hiperbólico

No contexto singular-hiperbólico a pergunta natural a se fazer é se para obtermos existência e unicidade de estados de equilíbrio para potenciais contínuos, as mesmas técnicas utilizadas por Franco em [Fra77] podem ser utilizadas, mais precisamente, se o Teorema 2.3.1 é válido quando X for um atrator singular-hiperbólico. Temos alguns problemas ao tratarmos o caso singular-hiperbólico utilizando as técnicas já vistas em [Fra77], a saber:

1. A definição de expansividade para fluxos dada na Seção 2.3 foi introduzida por Bowen e Walters em [BW72b] e será chamada agora de C -expansividade. A primeira dificuldade a ser destacada é que pontos singulares de um fluxo C -expansivo são isolados (veja [BW72a], Proposição 1) o que implica que o atrator de Lorenz e o modelo Lorenz geométrico não são C -expansivos.
2. Um segundo problema é que não sabemos se um fluxo singular-hiperbólico satisfaz a propriedade de especificação.
3. Uma terceira questão a ser ressaltar é que se X é um fluxo $\mathcal{K}$ -expansivo e satisfaz a propriedade de especificação, então é possível mostrarmos a existência e unicidade estados de equilíbrio?

No Capítulo 3 enunciamos um resultado que dá uma resposta positiva quanto a existência de estados de equilíbrios para um fluxo singular-hiperbólico, com respeito a potenciais contínuos. A unicidade é um problema ainda em aberto .

Uma probabilidade invariante μ é uma *medida física* para o fluxo X_t , $t \in \mathbb{R}$, se o conjunto $B(\mu)$ dos pontos $z \in M$, satisfazendo

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(X_t(z)) dt = \int \phi d\mu, \text{ para toda função contínua } \phi : M \rightarrow \mathbb{R},$$

tem medida de Lebesgue positiva, isto é, $m(B(\mu)) > 0$.

Visando o estudo sobre estados de equilíbrios em [APPV09] os autores mostram o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1 ([APPV09]). Se Λ é um atrator singular-hiperbólico para um fluxo X_t tri-dimensional de classe $\mathcal{C}^2$, então a medida física μ suportada em Λ satisfaz a Fórmula da Entropia

$$h_\mu(X_1) = \int \log \|\det(DX_1)|_{F_Z}\| d\mu(z).$$

Isso mostra que μ é um estado de equilíbrio para o potencial $-\log \|\det(DX_1)\|$, com respeito ao difeomorfismo X_1 .

Novos Resultados sobre Estados de Equilíbrio

3.1 Existência de Estados de Equilíbrio para um Conjunto Singular-Hiperbólico

Como mencionamos no Capítulo 2, Seção 2.4 o próximo resultado garante a existência de estados de equilíbrios para fluxos singular-hiperbólicos, com respeito a potenciais contínuos. A saber, provamos os seguintes resultados:

Teorema 3.1.1. Seja $\Lambda \subset M$ um atrator singular-hiperbólico para um campo de vetores X e considere $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial contínuo. Então, ϕ possui uma medida de equilíbrio.

Corolário 3.1.1. O atrator de Lorenz geométrico possui pelo menos um estado de equilíbrio para todo potencial contínuo $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2 Critério para Existência e Unicidade de Estados de Equilíbrio para uma Aplicação Tipo Lorenz

Como definido no Capítulo 1, Seção 1.5, a aplicação tipo Lorenz satisfaz as seguintes propriedades:

- (L.i) A simetria da equação diferencial, implica que $L(-x) = -L(x)$;
- (L.ii) A aplicação L tem uma única descontinuidade em $x = 0$. Além disso, $L(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} L(x) = A$, $L(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = -A$ e $\lim_{x \rightarrow 0} L'(x) = \infty$. Também, temos que $0 < L^2(A) < L(A) < A$ e, portanto, $0 > L^2(-A) > L(-A) > -A$.
- (L.iii) Cada um dos ramos da aplicação inversa de L estende-se para uma função de classe $C^{1+\rho}$, para algum $\rho > 0$, sobre $[L(-A), A]$ ou $[-A, L(A)]$ e se g denota qualquer ramo inverso da aplicação L , então $g'(x) \leq \lambda < 1$.

Definição 3.2.1. A partição $\mathcal{P}(L) = \{\mathcal{P}_1 = (-A, 0), \mathcal{P}_2 = (0, A)\}$ é chamada *partição natural* da aplicação L e a terna $([-A, A], \mathcal{P}(L), L)$ é denominada *aplicação expansora* por partes tipo Lorenz.

O *bordo* da partição $\mathcal{P}(L)$ é definida por

$$\partial\mathcal{P}(L) = \left(\bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(L)} \partial\mathcal{P} \right) = \{-A, 0, A\}.$$

O conjunto $\mathcal{P}^{n-1}$ denota a coleção dos n -cilindros, isto é, as intersecções não vazias $C_{n-1} = \mathcal{P}_0 \cap L^{-1}(\mathcal{P}_1) \cap \dots \cap L^{-(n-1)}(\mathcal{P}_{n-1})$ sendo os $\mathcal{P}_i$ elementos de partição $\mathcal{P}(L)$.

Um *potencial Hölder contínuo por partes* é uma aplicação $\phi : [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a restrição de ϕ sobre cada elemento da partição $\mathcal{P}(L)$ é Hölder-contínuo, isto é, para todo x, y no mesmo elemento da partição $\mathcal{P}(L)$,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x, y|^\alpha, \quad (3.1)$$

para algum $\alpha > 0$, $K < \infty$.

A *pressão de um subconjunto* $S \subset [-A, A]$ é definida por

$$P_{top}(\phi, S, L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1} \\ S \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \sup_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \phi(x)} \right), \quad (3.2)$$

onde $S_n \phi(x) = \phi(x) + \phi(L(x)) + \dots + \phi(L^{n-1}(x))$. A *pressão topológica* de L é definida por $P(\phi, L) = P_{top}(\phi, [-A, A], L)$.

Como a aplicação tipo Lorenz L é descontínua em $x = 0$ devemos considerar $\partial\mathcal{P}(L) = \{-A = L(0^+), 0^-, 0^+, A = L(0^-)\}$ com a convenção $L^i(0^+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} L^i(x)$ e $L^i(0^-) := \lim_{x \rightarrow 0^-} L^i(x)$.

Assim sendo, podemos definir $S_n \phi(c^+) := \lim_{x \rightarrow 0^-} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^{i+1}(x))$ e

$S_n \phi(c^-) := \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^{i+1}(x))$. Além disso, adotamos $\phi(0^+) = \phi(0^-) = \phi(0) = 0$.

Neste contexto provamos o seguinte critério:

Teorema 3.2.1. Sejam $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ a aplicação tipo Lorenz introduzida anteriormente e ϕ é um potencial contínuo em $[-A, A]$ e Hölder contínuo por partes em $\mathcal{P}(L)$. Suponha que

$$\max\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\right\} < P_{top}(\phi, L)$$

sendo $c^+ = L(-A)$ e $c^- = L(A)$. Então, ϕ admite um único estado de equilíbrio.

3.3 Generecidade dos Potencias com Único Estado de Equilíbrio para uma Aplicação tipo Lorenz

Seja $\mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$ o espaço, dos potenciais de classe $\mathcal{C}^0$ em um intervalo compacto $[-A, A]$. Dois potenciais $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$ estão próximos se os potenciais estiverem próximos em todos os pontos de $[-A, A]$.

Temos em $\mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$, uma estrutura natural de espaço vetorial: $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$, $(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$, para $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $\phi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$, definimos

$$\|\phi\|_0 = \sup_{x \in [-A, A]} \{\|\phi(x)\|\}.$$

Observe que os axiomas de norma são facilmente verificados. Assim sendo, para cada $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$, temos que

$$d_0(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_0 = \sup_{x \in [-A, A]} \{\|\phi(x) - \psi(x)\|\}$$

é uma métrica em $\mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$. O par $(\mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R}), d_0)$ é um espaço métrico.

Uma bola aberta de centro ϕ e raio ϵ é definida por

$$\mathcal{B}_\epsilon(\phi) = \{\psi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R}) : d_0(\phi, \psi) < \epsilon\}.$$

Teorema 3.3.1. Se L é uma aplicação tipo Lorenz, então o conjunto dos potenciais contínuos Hölder por partes em $\mathcal{P}(L)$ com um único estado de equilíbrio é aberto em $\mathcal{C}^0([-A, A])$ na topologia $\mathcal{C}^0$.

Definição 3.3.1. Uma transformação tipo Lorenz é *fortemente recorrente aos repulsores* se $\forall p \in Per(L)$, $\exists n_i \rightarrow \infty$, tal que $L^{n_i}(c^+)$ ou $L^{n_i}(c^-)$ tem densidade 1 próximo de p , isto é,

$$\forall p \in I, \limsup_{n_i \rightarrow \infty} \#\{j \leq n_i, L^j(c^\pm) \in I\} = 1.$$

Dizemos que uma aplicação tipo Lorenz L é *admissível* se não é fortemente recorrente aos repulsores.

Nesse contexto, provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2. Seja L uma aplicação tipo Lorenz admissível, então para todo $K_0 \in \mathbb{R}$ existe uma seqüência de potenciais $\Phi_\epsilon \rightarrow K_0$, tal que Φ_ϵ e toda pequena $\mathcal{C}^0$ -perturbação de Φ_ϵ possui um único estado de equilíbrio.

Prova do Teorema 3.1.1

O primeiro passo para provarmos o Teorema 3.1.1 é mostrarmos que todo fluxo singular-hiperbólico é h -expansivo. Descrevemos este resultado precisamente pelo Lema 4.0.1.

Lema 4.0.1. Suponha que X_t seja um fluxo contínuo sobre um atrator singular-hiperbólico $\Lambda \subset M$. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, X_t é h -expansivo.

Demonstração. Pelo Teorema 1.6.1 Λ é $\mathcal{K}$ -expansivo, isto é, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que para $x, y \in \Lambda$ e para $h \in \mathcal{K}$ (por um instante tome $h = id$), temos que se

$$d(X_t(x), X_t(y)) < \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

então existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $X_{t_0}(y) \in X_{[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]}(x)$.

Assim, concluímos que

$$y \in \{X_r(x) : |r| \leq \epsilon\},$$

sempre que

$$d(X_t(x), X_t(y)) < \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\Phi_\delta(x, X) = \{y : d(X_t(x), X_t(y)) \leq \delta, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

$$\subset X_{[-\epsilon, \epsilon]}(x) = \{X_r(x) : |r| \leq \epsilon\}.$$

Portanto, pelo Lema (1.4.1), obtemos que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ é h -expansivo. □

Observação 4.0.1. Como consequência imediata do Lema 4.0.1, obtemos que X_1 (o tempo 1 do fluxo X_t) é h -expansivo.

Prova do Teorema 3.1.1. Segue da Observação 4.0.1, que X_1 é um difeomorfismo h -expansivo. Seja $\epsilon > 0$ uma constante de h -expansividade de X_1 e considere $\mu \in \mathfrak{M}_X(M)$ fixada. Como Λ é compacto podemos encontrar uma partição $\mathcal{P}$ de Λ , tal que $\text{diam}(\mathcal{P}) < \epsilon$ e $\mu(\partial P) = 0$, para cada $P \subset \mathcal{P}$.

Assim sendo, obtemos pelo Teorema 1.4.1 que

$$h_\mu(X_1) = h_\mu(X_1, \mathcal{P}). \quad (4.1)$$

Por outro lado, recordando que $H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log(\mu(P))$, segue que a função $\mu \mapsto H_\mu(\mathcal{P})$ é contínua em μ .

Dessa forma, obtemos que aplicação dada por

$$\mu \mapsto h_\mu(X_1, \mathcal{P}) = \inf \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^{(n)}), \quad (4.2)$$

sendo $\mathcal{P}^{(n)} = \{P_{i_0} \cap \dots \cap X_1^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}}), \text{ para cada } n \geq 1\}$ é semi-contínua superiormente em μ . Agora, segue de (4.1) e (4.2) que a aplicação

$$\mu \mapsto h_\mu(X_1)$$

é semi-contínua superiormente em μ .

Consequentemente, a aplicação

$$\mu \mapsto h_\mu(X_1) + \int \phi_1 d\mu,$$

também é semi-contínua superiormente em μ , visto que a aplicação $\mu \mapsto \int \phi_1 d\mu$ é contínua em $\mathfrak{M}_X(M)$.

Sendo Λ compacto segue que a aplicação $\mu \mapsto h_\mu(X_1) + \int \phi_1 d\mu$ possui um ponto de máximo que será denotado por $\mu_{\text{máx}}$.

Do Teorema 1.3.1, temos que

$$P(X_1, \phi_1) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_{X_1}(M)} \left(h_\mu(X_1) + \int \phi_1 d\mu \right)$$

Assim sendo,

$$P(X_1, \phi_1) = h_{\mu_{\text{máx}}}(X_1) + \int \phi_1 d\mu_{\text{máx}}.$$

Por outro lado, temos pelo Lema (1.3.4) item (i) que

$$P(X, \phi) = P(X_1, \phi_1).$$

Dessa forma,

$$P(X, \phi) = h_{\mu_{\text{máx}}}(X_1) + \int \phi_1 d\mu_{\text{máx}}.$$

Além disso, pelo item (ii) do Lema (1.3.4), obtemos

$$P(X, \phi) = h_{\mu_{\text{máx}}}(X_1) + \int \phi \, d\mu_{\text{máx}},$$

uma vez que

$$\int \phi \, d\mu_{\text{máx}} = \int \phi_1 \, d\mu_{\text{máx}}.$$

Dessa forma,

$$P(X, \phi) = h_{\mu_{\text{máx}}}(X_1) + \int \phi \, d\mu_{\text{máx}}.$$

Portanto, $\mu_{\text{máx}}$ é um estado de equilíbrio para o fluxo singular-hiperbólico $X|_{\Lambda}$.

□

Demonstração do Corolário 3.1.1. Como o atrator de Lorenz geométrico é um conjunto parcialmente hiperbólico com direção central expandindo volume, segue pelo Teorema (1.6.1) que o atrator de Lorenz geométrico é singular-hiperbólico.

Dessa forma, segue do Teorema 3.1.1, que o fluxo geométrico de Lorenz possui pelo menos um estado de equilíbrio.

□

Prova do Teorema 3.2.1

Para provar o Teorema 3.2.1 primeiramente calculamos a pressão do bordo da partição natural da aplicação tipo Lorenz, mais precisamente, provamos a seguinte resultado:

Proposição 5.0.1. Seja $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ a aplicação tipo Lorenz introduzida anteriormente. Se ϕ é um potencial contínuo em $[-A, A]$ Hölder por partes em $\mathcal{P}(L)$, então

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\}.$$

Antes de provar a Proposição 5.0.1, vejamos como utilizamos este resultado para provarmos o Teorema 3.2.1.

Prova do Teorema 3.2.1. Assuma por um momento que a Proposição 5.0.1 é verdadeira. Nesse caso, temos que se $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ é a aplicação tipo Lorenz, então segue da Proposição 5.0.1 que

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\}.$$

Por hipótese, temos

$$\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\} < P_{top}(\phi, L),$$

o que implica que

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\} < P_{top}(\phi, L).$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.5.1 a aplicação tipo Lorenz é L.E.O e, portanto, aplicando o Teorema 2.2.1 item (ii) finalizamos a prova do Teorema 3.2.1 . $\square$

Nosso objetivo agora é provarmos a Proposição 5.0.1. A prova será dividida em alguns Lemas.

Lema 5.0.2. Seja L uma aplicação tipo Lorenz e considere $C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}$ um cilindro de geração n . Então, para todo $x, y \in C_{n-1}$ e $\phi : [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo por partes sobre $\mathcal{P}(L)$ existe $\theta > 0$, tal que

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq \theta. \quad (5.1)$$

Demonstração. Pela α -Hölder continuidade do potencial ϕ concluímos que

$$\begin{aligned} |S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(x)) - \phi(L^i(y)) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\phi(L^i(x)) - \phi(L^i(y))| \\ &\leq K \sum_{i=0}^{n-1} |L^i(x) - L^i(y)|^\alpha \\ &\leq K(2A)^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda^\alpha)^i, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade é obtida através do Teorema do Valor Médio juntamente com a contração uniforme dos ramos inversos de L pela taxa mínima de $\lambda < 1$ (Propriedade L.3 na definição da aplicação tipo Lorenz).

Como $\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^\alpha)^i$ é uma série geométrica com razão $\lambda^\alpha < 1$, temos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda^\alpha)^i = \frac{1}{1 - \lambda^\alpha}.$$

Logo,

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq \frac{K(2A)^\alpha}{1 - \lambda^\alpha}.$$

Portanto,

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq \theta.$$

sendo $\theta = \frac{K(2A)^\alpha}{1 - \lambda^\alpha}$. $\square$

Corolário 5.0.1. Sob as condições do Lema 5.0.2, se $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathcal{C}_n}$, então existe $\theta > 0$, tal que

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq \theta. \quad (5.2)$$

Demonstração. Como $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathcal{C}_n}$, segue que $\bar{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ e $\bar{y} = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$, com $x_m, y_m \in \mathcal{C}_n$.

Assim sendo, segue que

$$\begin{aligned} |S_n\phi(\bar{x}) - S_n\phi(\bar{y})| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(\bar{x})) - \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(\bar{y})) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m)) - \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(\lim_{m \rightarrow \infty} y_m)) \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(x_m)) - \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(y_m)) \right| \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (|S_n\phi(x_m) - S_n\phi(y_m)|) \\ &\leq \theta, \end{aligned}$$

sendo que na terceira igualdade estamos utilizando a continuidade das aplicações ϕ e L em $\mathcal{C}_n$ e na última desigualdade estamos usando o Lema 5.0.2. $\square$

Lema 5.0.3. Seja L a aplicação tipo Lorenz e considere $\phi : [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial contínuo e Hölder por partes em $\mathcal{P}(L)$. Se $L(0^-) = A$, então $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(A)$. As mesmas conclusões são obtidas para $L(0^+) = -A$.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} S_n\phi(0^-) &= \phi(0^-) + \phi(L(0^-)) + \cdots + \phi(L^{n-1}(0^-)) \\ &= \phi(L(0^-)) + \cdots + \phi(L^{n-2}(L(0^-))) \\ &= \phi(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x)) + \cdots + \phi(L^{n-2}(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x))) \\ &= \phi(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x)) + \cdots + \phi(\lim_{x \rightarrow 0^-} L^{n-1}(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [\phi(L(x)) + \cdots + \phi(L^{n-1}(x))], \end{aligned}$$

o que implica que

$$S_n\phi(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\phi(L(x)) + \cdots + \phi(L^{n-1}(x))]. \quad (5.3)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 S_n\phi(A) &= \phi(A) + \phi(L(A)) + \cdots + \phi(L^{n-1}(A)) \\
 &= \phi\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x)\right) + \cdots + \phi\left(L^{n-1}\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x)\right)\right) \\
 &= \phi\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x)\right) + \cdots + \phi\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} L^n(x)\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [\phi(L(x)) + \cdots + \phi(L^n(x))],
 \end{aligned}$$

o que implica que

$$S_n\phi(A) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\phi(L(x)) + \cdots + \phi(L^n(x))]. \quad (5.4)$$

Observe que de (5.3) e (5.4), segue que

$$S_n\phi(A) = S_n\phi(0^-) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi(L^n(x)). \quad (5.5)$$

Dessa forma,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0^-) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{n} \phi(L^n(x)) \right]. \quad (5.6)$$

Vamos agora estudar o terceiro limite na igualdade (5.6). Como o potencial ϕ é contínuo em $[-A, A]$, segue que $\|\phi(L^n(x))\| \leq K$, $\forall x \in [-A, A] \setminus \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que

$$-\frac{K}{n} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{n} \phi(L^n(x)) \leq \frac{K}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{n} \phi(L^n(x)) \right] = 0. \quad (5.7)$$

Portanto, substituindo a igualdade (5.7) na igualdade (5.6), temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0^-).$$

□

Observação 5.0.2. Note que sendo L a aplicação tipo Lorenz, temos que $L(-A) = c^+$ e que $L(A) = c^-$. Recordemos que $x = 0$ é a única descontinuidade da aplicação L . Pela dinâmica da aplicação L , segue que $L^2(0^+) = c^+$ (respectivamente, $L^2(0^-) = c^-$), uma vez que $L^2(0^+) = L(L(0^+)) = L(-A) = c^+$ (respectivamente, $L^2(0^-) = L(L(0^-)) = L(A) = c^-$). Assim sendo, aplicando o Lema (5.0.3) obtemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(c^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(-A)$ (respectivamente $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(c^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(A)$).

Demonstração da Proposição 5.0.1. Considere $C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}$. Pela definição de pressão topológica, temos que

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &= \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}: \\ \partial\mathcal{P}(L) \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \sup_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \phi(x)} \right) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}: \\ \partial\mathcal{P}(L) \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \sup_{x \in \overline{C_{n-1}}} e^{S_n \phi(x)} \right). \end{aligned}$$

Agora segue da dinâmica da aplicação L que para cada $C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}$, tal que $\partial\mathcal{P}(L) \cap C_{n-1} \neq \emptyset$, temos que ou C_{n-1} está à direita de 0, isto é, C_{n-1} é um intervalo da forma $(0^+, \cdot)$ ou C_{n-1} está à esquerda de 0, isto é, C_{n-1} um intervalo da forma $(\cdot, 0^-)$ como mostra a figura 5.1.

Figura 5.1: Dinâmica dos intervalos de $\mathcal{P}(L)$.

Assim sendo, pela definição da partição $\mathcal{P}(L)$ e utilizando as propriedades da aplicação tipo Lorenz, temos que

$$\partial\mathcal{P}(L) = \{L(0^+), 0^-, 0^+, L(0^-)\},$$

considerando o fato que a dinâmica não esta definida em $x = 0$.

Seja $\{b_1 = -A, b_2 = 0^-, b_3 = 0^+, b_4 = A\}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, no máximo quatro cilindros $\mathcal{C}_n$ intersectam $\mathcal{P}(L)$. Denotamos por $\mathcal{C}_{n-1}^i$ o cilindro $\mathcal{C}_{n-1}^i \in \mathcal{P}^{n-1}$, tal que $b_i \in \partial\mathcal{C}_{n-1}^i$.

Dessa forma,

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 \sup_{x \in \overline{C_{n-1}^i}} e^{S_n \phi(x)} \right). \quad (5.8)$$

Como $b_i \in \overline{C_{n-1}^i}$ segue do Corolário (5.0.1) que

$$S_n \phi(x) \leq S_n \phi(b_i) + \theta, \quad \forall x \in \overline{C_{n-1}^i}. \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) na desigualdade (5.8), obtemos

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 e^{S_n \phi(b_i) + \theta} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^\theta \sum_{i=1}^4 e^{S_n \phi(b_i)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(e^\theta) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 e^{S_n \phi(b_i)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=0}^4 e^{S_n \phi(b_i)} \right). \end{aligned}$$

Defina

$$c_n = \max_{1 \leq i \leq 4} \{S_n \phi(b_i)\}.$$

Note que

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 e^{c_n} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(4e^{c_n}) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq 4} \{S_n \phi(b_i)\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(b_i) \right\}. \end{aligned}$$

Como consequência da Observação 5.0.2, obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(L^2(0^-)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+).$$

Utilizando novamente a Observação 5.0.2, obtemos a mesma seqüência de igualdades substituindo 0^+ por 0^- e c^+ por c^- . Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &\leq \max_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(b_i) \right\} = \\ &= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) \leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \right\}. \quad (5.10)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &= \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1} : \\ \partial\mathcal{P}(L) \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \sup_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \phi(x)} \right) \geq \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1} : \\ \partial\mathcal{P}(L) \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \inf_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \phi(x)} \right) \geq \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1} : \\ \partial\mathcal{P}(L) \cap \overline{C_{n-1}} \neq \emptyset}} \inf_{x \in \overline{C_{n-1}}} e^{S_n \phi(x)} \right) \geq \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \log \sum_{i=1}^4 \inf_{x \in \overline{C_n^i}} e^{S_n \phi(x)}. \end{aligned}$$

Utilizando novamente o Corolário 5.0.1, segue que

$$S_n \phi(x) - \theta \leq S_n \phi(b_i), \quad \forall x \in \overline{C_{n-1}}. \quad (5.11)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 \inf_{x \in \overline{\mathcal{C}_n^i}} e^{S_n \phi(b_i) - \theta} \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 \inf_{x \in \overline{\mathcal{C}_n^i}} e^{S_n \phi(b_i)} \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 e^{S_n \phi(b_i)} \right) \\
&\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{S_n \phi(b_1)} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{S_n \phi(c^+)} \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{S_n \phi(c^+)} \right).$$

Pelos mesmos argumentos, obtemos que

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{S_n \phi(c^-)} \right).$$

Logo,

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) \geq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \right\}. \quad (5.12)$$

Portanto, de (5.10) e de (5.12),

$$P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \right\}. \quad (5.13)$$

□

Prova dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2

6.1 Prova do Teorema 3.3.1

Para provar o Teorema 3.3.1 em $\mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$ definimos o seguinte subconjunto:

$$J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) = \{\phi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R}) : \phi \text{ é Hölder contínua em } \mathcal{P}(L)\}.$$

Como vimos anteriormente se o potencial $\phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$ e $P_{top}(\phi, \partial\mathcal{P}(L), L) < P_{top}(\phi, L)$, mais precisamente, se verificarmos que

$$\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\} < P_{top}(\phi, L),$$

então ϕ possui um único estado de equilíbrio.

Definição 6.1.1. Se $\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)\} < P_{top}(\phi, L)$, então dizemos que ϕ satisfaz a propriedade $\mathcal{H}$. Além disso, definimos

$$\mathbb{H} = \{\phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : \phi \text{ satisfaz a propriedade } \mathcal{H}\}.$$

O principal objetivo desta seção é explorarmos as propriedades topológicas do conjunto $\mathbb{H}$. Mais precisamente, mostraremos que o conjunto $\mathbb{H}$ é aberto em $J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$ na topologia $\mathcal{C}^0$ e, consequentemente, demonstraremos o Teorema 3.3.1. A prova será dividida em alguns lemas.

Lema 6.1.1. Seja $P_{top}(\cdot, L) : \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\phi \mapsto P_{top}(\phi, L)$. Então, para cada $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0([-A, A])$, obtemos

$$|P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| \leq \|\phi - \psi\|_0,$$

ou seja, $P_{top}(\cdot, L)$ é uma função Lipschitz.

Demonstração. Dado $\phi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$, defina

$$\phi_n(\mathcal{C}_{n-1}) := \sup_{x \in \mathcal{C}_{n-1}} e^{S_n \phi(x)}$$

e

$$S_n(\phi) = \sum_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \phi_n(\mathcal{C}_{n-1}).$$

Pela definição da pressão topológica, segue que

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi, L) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \sup_{x \in \mathcal{C}_{n-1}} e^{S_n \phi(x)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\phi). \end{aligned}$$

Assim, para $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0([-A, A], \mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} |P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| &= \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\phi) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\psi) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\log S(\phi) - \log S(\psi)| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \frac{S(\phi)}{S(\psi)} \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\frac{\sum_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \phi_n(\mathcal{C}_{n-1})}{\sum_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \psi_n(\mathcal{C}_{n-1})} \right) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left[\frac{\phi_n(\mathcal{C}_{n-1})}{\psi_n(\mathcal{C}_{n-1})} \right] \right) \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{\mathcal{C}_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left[\frac{\sup_{x \in \mathcal{C}_{n-1}} e^{S_n \phi(x)}}{\sup_{x \in \mathcal{C}_{n-1}} e^{S_n \psi(x)}} \right] \right) \right|. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$|P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \frac{\sup_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \phi(x)}}{\sup_{x \in C_{n-1}} e^{S_n \psi(x)}} \right) \right|. \quad (6.1)$$

Para a seqüência da demonstração utilizaremos a seguinte desigualdade:

$$\frac{\sup(A_j)}{\sup(B_j)} \leq \sup\left(\frac{A_j}{B_j}\right), \quad (6.2)$$

onde (A_j) e (B_j) são coleções de números reais positivos.

Aplicando a desigualdade (6.2) na desigualdade (6.1), obtemos

$$\begin{aligned} & |P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| \leq \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left[\sup_{x \in C_{n-1}} \left\{ \frac{e^{S_n \phi(x)}}{e^{S_n \psi(x)}} \right\} \right] \right) \right| \\ & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left[\sup_{x \in C_{n-1}} \left\{ e^{S_n \phi(x) - S_n \psi(x)} \right\} \right] \right) \right|. \end{aligned}$$

Por outro lado para todo $x \in C_n$, temos que

$$\begin{aligned} S_n \phi(x) - S_n \psi(x) &= (\phi(x) - \psi(x)) + \cdots + (\phi(L^{n-1}(x)) - \psi(L^{n-1}(x))) \\ &\leq \|\phi - \psi\|_0 + \cdots + \|\phi - \psi\|_0 = \\ &= n\|\phi - \psi\|_0. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & |P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| \leq \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\max_{C_{n-1} \in \mathcal{P}^{n-1}} \left[\sup_{x \in C_{n-1}} \left\{ e^{n\|\phi - \psi\|_0} \right\} \right] \right) \right| \\ & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(e^{n\|\phi - \psi\|_0} \right) \right| = \|\phi - \psi\|_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$|P_{top}(\phi, L) - P_{top}(\psi, L)| \leq \|\phi - \psi\|_0$$

e, portanto, concluímos assim a demonstração do lema. $\square$

Lema 6.1.2. *Os funcionais $\hat{P}_+ : C^0([-A, A], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\phi \mapsto \hat{P}_+(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)$ e $\hat{P}_- : C^0([-A, A], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\phi \mapsto \hat{P}_-(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-)$ são contínuos.*

Demonstração. A prova do lema será feita para o funcional $\hat{P}_+$, por razões claras o caso $\hat{P}_-$ é análogo. Mostraremos primeiramente, que o funcional $\hat{P}_+$ é Lipschitz e, como consequência, obtemos a continuidade de $\hat{P}_+$.

De fato,

$$\begin{aligned} |\hat{P}_+(\phi) - \hat{P}_+(\psi)| &= \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \psi(c^+) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |(S_n \phi(c^+) - S_n \psi(c^+))|, \end{aligned}$$

o que implica que

$$|\hat{P}_+(\phi) - \hat{P}_+(\psi)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |(S_n \phi(c^+) - S_n \psi(c^+))|. \quad (6.3)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} S_n \phi(c^+) &= S_n \phi(L(A)) = S_n \phi(L(\lim_{x \rightarrow 0^-} L(x))) = S_n \phi(\lim_{x \rightarrow 0^-} L^2(x)) \\ &= \phi(\lim_{x \rightarrow 0^-} L^2(x)) + \dots + \phi(L^{n-1}(\lim_{x \rightarrow 0^-} L^2(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sum_{i=2}^{n+1} \phi(L^i(x)) \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |S_n \phi(c^+) - S_n \psi(c^+)| &= \left| \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sum_{i=2}^n \phi(L^i(x)) \right) - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sum_{i=2}^n \phi(L^i(y)) \right) \right| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sum_{i=2}^n |\phi(L^i(x)) - \psi(L^i(x))| \right) \\ &= n \|\phi - \psi\|_0, \end{aligned}$$

onde concluímos que

$$|S_n \phi(c^+) - S_n \psi(c^+)| \leq n \|\phi - \psi\|_0. \quad (6.4)$$

Dessa forma, segue de (6.3) e (6.4) que

$$|\hat{P}_+(\phi) - \hat{P}_+(\psi)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} n \|\phi - \psi\|_0 \right) \leq \|\phi - \psi\|_0,$$

o que demonstra o Lema 6.1.2. □

Proposição 6.1.1. *O conjunto $\mathbb{H}$ é aberto em $\mathcal{C}^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$.*

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{ \phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : \phi \text{ satisfaz a propriedade } \mathcal{H} \} \\ &= \left\{ \phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : P_{top}(\phi, L) > \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^-), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \right\} \right\} \\ &= \mathbb{H}_+ \cap \mathbb{H}_-, \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbb{H}_{\pm} = \left\{ \phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : P_{top}(\phi, L) > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^{\pm}) \right\}.$$

Para provarmos que $\mathbb{H}$ é aberto em $\mathcal{C}^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$ é suficiente mostrarmos que $\mathbb{H}_+$ e $\mathbb{H}_-$ são abertos em $\mathcal{C}^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$. Mostraremos inicialmente que $\mathbb{H}_+$ é aberto.

Considerando $M^+(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+)$, defina $\tilde{P} : J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{P}(\phi) = P_{top}(\phi, L) - M^+(\phi)$.

Note que $\tilde{P}$ é um funcional contínuo, uma vez que $P_{top}(\cdot, L)$ é um funcional contínuo pelo Lema 6.1.1 e a continuidade do funcional $M^+(\cdot)$ é garantida pelo Lema 6.1.2.

Além disso,

$$\mathbb{H}_+ = \{ \phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : P_{top}(\phi, L) > M^+(\phi) \}. \quad (6.5)$$

Por outro lado, sendo $A = (0, \infty)$, obtemos

$$\tilde{P}^{-1}(A) = \{ \phi \in J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R}) : P_{top}(\phi, L) > M^+(\phi) \}. \quad (6.6)$$

Agora de (6.5) e (6.6), segue que $\mathbb{H} = \tilde{P}^{-1}(A)$ e, portanto, concluímos que $\mathbb{H}$ é um conjunto aberto de $J^0(\mathcal{P}(L), \mathbb{R})$. Analogamente, provamos que $\mathbb{H}_-$ é aberto.

Portanto, como $\mathbb{H}$ é uma intersecção finita de conjuntos abertos concluímos que $\mathbb{H}$ é aberto em $\mathcal{C}^0([-A, A])$. $\square$

6.2 Prova do Teorema 3.3.2

O próximo passo agora, é provarmos o Teorema 3.3.2. Antes de provarmos o teorema necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 6.2.1 ([BS03]). Considere uma aplicação expansora por partes τ , juntamente com um potencial uniformemente contínuo por partes ϕ . Seja, μ uma medida de probabilidade invariante e ergódica. Se $\mu(S) > 0$, então $P_\mu(\phi, \tau) \leq P_{top}(\phi, S, \tau)$, sendo $P_\mu(\phi, \tau) = h_\mu(\tau) + \int \phi d\mu$.

Corolário 6.2.1. Seja $L : [-A, A] \setminus \{0\} \rightarrow [-A, A]$ a aplicação Lorenz-like. Se ϕ é um potencial Hölder contínuo por partes, então

$$P_{top}(\phi, L) \geq \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_L([-A, A])} \{h_\mu(L) + \int \phi d\mu\}.$$

Demonstração. Observe que se ϕ é um potencial Hölder contínuo por partes, então ϕ é um potencial uniformemente contínuo por partes.

Assim sendo, como $\mu([-A, A]) = 1$, para toda medida $\mu \in \mathfrak{M}_L([-A, A])$, segue da Proposição 6.2.1 que

$$P_\mu(\phi, L) \leq P_{top}(\phi, X, L) = P_{top}(\phi, L).$$

Portanto, concluímos que

$$P_{top}(\phi, L) \geq \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_L([-A, A])} (P_\mu(\phi, L)).$$

□

Observação 6.2.1. Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, definida por $\beta(t) = \exp[(t+2)(t+1)]^{-1}$, para $-2 < t < -1$ e $\beta(t) = 0$ para os demais valores de t .

Seja $b = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s) ds = \int_{-1}^{-2} \beta(s) ds$. A integral indefinida $\gamma(t) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^t \beta(s) ds$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, tal que $0 \leq \gamma \leq 1$ e $\gamma(t) = 1$ para $t \geq -1$. Além disso, γ cresce de 0 para 1 quando t varia de -2 a -1.

Definimos finalmente $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(x) = \gamma(-|x|)$.

Observação 6.2.2. Seja $p \in [-A, A]$ um ponto periódico de período N . Defina, a medida

$$\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{L^i(p)}, \text{ sendo } \delta_x(J) = 1, \text{ se } x \in J \text{ e } \delta_x(J) = 0, \text{ se } x \notin J.$$

Note que,

$$\int \phi d\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \phi(L^i(p)),$$

sendo $\phi : [-A, A] \rightarrow [-A, A]$ um potencial dado.

Observação 6.2.3. Considerando $\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{L^i(p)}$, com $f^N(p) = p$, obtemos $h_{\mu_0}(L) = 0$.

Demonstração do Teorema 3.3.2. Seja $\phi = K_0$, sendo $K_0 \in \mathbb{R}$. Como L é admissível, considere p um ponto periódico de período N satisfazendo a Definição 3.3.1 e defina

$$\mathcal{O}(p) = \{p, L(p), \dots, L^{N-1}(p)\}.$$

O nosso objetivo é perturbar o potencial ϕ de modo a obter que pressão total do sistema seja estritamente maior que a pressão do bordo da partição natural de L . Seguindo os passos da Observação 6.2.1 definimos a seguinte perturbação de ϕ sob a órbita de p : Fixe $\epsilon > 0$. Para $\delta < \frac{1}{10} \min\{|x - y| : x, y \in \mathcal{O}(p)\}$ e $0 \leq i \leq N - 1$ defina a função auxiliar

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon,i} : [-A, A] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_{\epsilon,i}(x) = \epsilon \varphi\left(\frac{2(x - L^i(p))}{\delta}\right) + K_0 = \begin{cases} K_0 + \epsilon & , \quad |x - L^i(p)| \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & , \quad |x - L^i(p)| \geq \delta, \end{cases} \end{aligned}$$

sendo φ a aplicação definida na Observação 6.2.1.

Agora, definimos a seguinte perturbação para potencial inicial ϕ :

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon &: [-A, A] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Phi_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{\epsilon,i}(x). \end{aligned}$$

Note que para cada $x \in [-A, A]$ a aplicação Φ_ϵ acrescenta ϵ ao potencial ϕ em cada elemento da órbita de p , como mostra a figura 6.1. Além disso, $\Phi_\epsilon \rightarrow K_0$ sempre que $\epsilon \rightarrow 0$.

Observe que

$$\begin{aligned} S_N \Phi_\epsilon(p) &= \Phi_\epsilon(p) + \Phi_\epsilon(L(p)) + \cdots + \Phi_\epsilon(L^{N-1}(p)) \\ &= (K_0 + \epsilon) + (K_0 + \epsilon) + \cdots + (K_0 + \epsilon) \\ &= N(K_0 + \epsilon), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{1}{N} S_N \Phi_\epsilon(p) = K_0 + \epsilon. \quad (6.7)$$

Defina agora $\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{(L^i(p))}$, sendo N o período de p e δ_x é a medida suportada no ponto x . Observe que $\mu_0 \in \mathfrak{M}_L([-A, A])$.

Assim sendo, temos que

$$\begin{aligned}
P_{top}(\Phi_\epsilon, L) &\stackrel{\text{Corolário 6.2.1}}{\geq} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_L([-A, A])} \left\{ h_\mu(L) + \int \Phi_\epsilon d\mu \right\} \\
&\stackrel{\mu_0 \in \mathfrak{M}_L([-A, A])}{\geq} h_{\mu_0}(L) + \int \Phi_\epsilon d\mu_0 \\
&\stackrel{\text{Observação 6.2.3}}{=} 0 + \int \Phi_\epsilon d\mu_0 \\
&\stackrel{\text{Observação 6.2.2}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_\epsilon(L^i p) \\
&= \frac{1}{N} S_N \Phi_\epsilon(p) \\
&\stackrel{\text{Igualdade (6.7)}}{=} K_0 + \epsilon
\end{aligned}$$

o que implica que

$$P_{top}(\Phi_\epsilon, L) \geq K_0 + \epsilon. \quad (6.8)$$

Por outro lado, como Φ_ϵ é um potencial Hölder contínuo, segue pela Proposição 5.0.1 que

$$\begin{aligned}
P_{top}(\Phi_\epsilon, \partial\mathcal{P}(L), L) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \Phi_\epsilon(c^+) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(c^+) \\
&= K_0,
\end{aligned}$$

sendo que na segunda igualdade estamos o fato de L ser admissível juntamente com a definição da perturbação $\Phi_\epsilon = K_0 + \epsilon$.

Assim sendo, obtemos

$$P_{top}(\Phi_\epsilon, \partial\mathcal{P}(L), L) = K_0. \quad (6.9)$$

Portanto, de (6.8) e (6.9) obtemos

$$P_{top}(\Phi_\epsilon, L) \geq K_0 + \epsilon > K_0 = P_{top}(\Phi_\epsilon, \partial\mathcal{P}(L), L),$$

concluindo assim, a prova do Teorema 3.3.2.

□

Referências Bibliográficas

- [ABS82] V. S. Afraïmovich, V. V. Bykov, and L. P. Shil'nikov, *On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **44** (1982), 150–212. MR MR656286 (84a:58058)
- [APPV09] V. Araujo, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, and M. Viana, *Singular-hyperbolic attractors are chaotic*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 5, 2431–2485.
- [Bau04] S. Bautista, *The geometric Lorenz attractor is a homoclinic class*, Bol. Mat. (N.S.) **11** (2004), no. 1, 69–78.
- [Bil78] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1978, Reprint of the 1965 original.
- [Bow72a] R. Bowen, *Entropy-expansive maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 323–331.
- [Bow72b] ———, *The equidistribution of closed geodesics*, Amer. J. Math. **94** (1972), 413–423.
- [Bow72c] ———, *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1–30.
- [Bow73] ———, *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 125–136.
- [Bow08] ———, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, revised ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 2008, With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.
- [Bow75] ———, *Some systems with unique equilibrium states*, Math. Systems Theory **8** (1974/75), no. 3, 193–202.
- [BR75] R. Bowen and D. Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 181–202.

- [BS03] J. Buzzi and O. Sarig, *Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 5, 1383–1400.
- [Buz01] J. Buzzi, *No or infinitely many a.c.i.p. for piecewise expanding C^r maps in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **222** (2001), no. 3, 495–501.
- [BW72a] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations **12** (1972), 180–193.
- [BW72b] ———, *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations **12** (1972), 180–193.
- [Fra77] E. Franco, *Flows with unique equilibrium states*, Amer. J. Math. **99** (1977), no. 3, 486–514.
- [GH90] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1990, Revised and corrected reprint of the 1983 original.
- [Gle90] P. Glendinning, *Topological conjugation of Lorenz maps by β -transformations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), no. 2, 401–413.
- [Guc76] J. Guckenheimer, *A strange, strange attractor, the Hopf Bifurcation and Applications by Marsden and Mcracken*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.
- [GW79] J. Guckenheimer and R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1979), no. 50, 59–72.
- [Har64] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [Hén76] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. **50** (1976), no. 1, 69–77.
- [Kat80] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 51, 137–173.
- [Kel98] G. Keller, *Equilibrium states in ergodic theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Kom84] M. Komuro, *Expansive properties of Lorenz attractors*, The theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems (Kyoto, 1984), World Sci. Publishing, Singapore, 1984, pp. 4–26.
- [Lor63] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci. (1963), 130–141.

- [Mañ83] R. Mañé, *Introdução à teoria ergódica*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 14, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1983.
- [MPP98] C. A. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals, *On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 1, 81–86.
- [MPP04] C. A. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals, *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 2, 375–432.
- [Ohn80] T. Ohno, *A weak equivalence and topological entropy*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16** (1980), no. 1, 289–298.
- [Oli05] K. Oliveira, *Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005, 25o Colóquio Brasileiro de Matemática. [25th Brazilian Mathematics Colloquium].
- [Par66] W. Parry, *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 368–378.
- [Pes97] Y. B. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1997, Contemporary views and applications.
- [PP84] Ya. B. Pesin and B. S. Pitskel', *Topological pressure and the variational principle for noncompact sets*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), no. 4, 50–63, 96. MR MR775933 (86i:28031)
- [PY98] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical systems and ergodic theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Ran78] D. Rand, *The topological classification of Lorenz attractors*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **83** (1978), no. 3, 451–460.
- [Rob89] C. Robinson, *Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type*, Nonlinearity **2** (1989), no. 4, 495–518.
- [Rob92] ———, *Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type. II*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), no. 5, 1255–1268.
- [Rob99] ———, *Dynamical systems*, second ed., Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, Stability, symbolic dynamics, and chaos.

- [Roh67] V. A. Rohlin, *Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure*, Uspehi Mat. Nauk **22** (1967), no. 5 (137), 3–56.
- [Rud87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [Rue73] D. Ruelle, *Statistical mechanics on a compact set with Z^v action satisfying expansiveness and specification*, Trans. Amer. Math. Soc. **187** (1973), 237–251. MR MR0417391 (54 #5441)
- [Rue76] ———, *A measure associated with axiom-A attractors*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 3, 619–654.
- [Sin72] Ja. G. Sinaĭ, *Gibbs measures in ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk **27** (1972), no. 4(166), 21–64.
- [Sma67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.
- [Spa82] C. Sparrow, *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, Applied Mathematical Sciences, vol. 41, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Ste58] S. Sternberg, *On the structure of local homeomorphisms of euclidean n -space. II.*, Amer. J. Math. **80** (1958), 623–631.
- [SV99] W. Sun and E. Vargas, *Entropy of flows, revisited*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **30** (1999), no. 3, 315–333.
- [Wal75] P. Walters, *A variational principle for the pressure of continuous transformations*, Amer. J. Math. **97** (1975), no. 4, 937–971.
- [Wal82] ———, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Wil77] R. F. Williams, *The structure of Lorenz attractors*, Turbulence Seminar (Univ. Calif., Berkeley, Calif., 1976/1977), Springer, Berlin, 1977, pp. 94–112. Lecture Notes in Math., Vol. 615.
- [Wil79a] ———, *The bifurcation space of the Lorenz attractor*, Bifurcation theory and applications in scientific disciplines (Papers, Conf., New York, 1977), Ann. New York Acad. Sci., vol. 316, New York Acad. Sci., New York, 1979, pp. 393–399.
- [Wil79b] ———, *The structure of Lorenz attractors*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1979), no. 50, 73–99.

Índice Remissivo

- (c, λ) -decomposição dominada, 25
- (t, ϵ, X) -bola, 6
- $\mathcal{C}$ -densidade, 29

- Aplicação h -expansiva, 20
- Aplicação expansora por partes, 13
- Aplicação expansora por partes tipo Lorenz, 34
- Aplicação LEO, 24
- Aplicação tipo Lorenz, 24
- Atrator, 25
- Atrator próprio, 25

- Bacia topológica, 25
- Bordo de uma partição, 14

- Cociclo, 7
- Conjunto (n, δ) -gerado, 20
- Conjunto (n, ϵ) -separado para um fluxo, 15
- Conjunto $\mathcal{K}$ -expansivo para um fluxo singular-hiperbólico, 26
- Conjunto captador, 25
- Conjunto dos cilindros de uma partição, 14
- Conjunto isolado, 25
- Conjunto não trivial, 25
- Conjunto parcialmente hiperbólico, 26
- Conjunto singular-hiperbólico, 26
- Conjunto transitivo, 25
- Constante de h -expansividade, 20

- Entropia métrica de uma partição, 5
- Entropia métrica de uma transformação, 5
- Entropia métrica de uma transformação com respeito a uma partição, 5
- Entropia métrica SV, 6
- Entropia topológica SV, 6
- Estado de Equilíbrio para aplicações contínuas, 9
- Exemplo de um potencial que não possui estados de equilíbrio, 10
- Expansividade para um fluxo contínuo sem singularidades, 29
- Expansividade para um fluxo singular-hiperbólico, 26

- Fluxo contínuo, 6
- Fluxos equivalentes em medida, 6

- Mínimo da cardinalidade de um conjunto (n, δ) -gerado, 20
- Medida ergódica, 4
- Medida Ergódica para um fluxo, 6
- Medida física para um fluxo, 30
- Medida invariante, 3
- Medida invariante para fluxos, 6
- Mudança de tempo generalizada, 7

- Partição de um espaço de medida, 5
- Partição geradora, 5

- Potencial com variação limitada para um fluxo, 15
- Potencial Hölder por partes, 14
- Pressão métrica de uma aplicação expansora por parte, 14
- Pressão topológica de um conjunto não necessariamente invariante para uma aplicação expansora por partes, 14
- Pressão topológica de uma aplicação expansora por parte, 14
- Pressão topológica para aplicações contínuas, 8
- Pressão topológica para espaços não compactos, 10
- Pressão topológica para um fluxo, 15
- Princípio Variacional para aplicações contínuas, 8
- Princípio variacional para espaços não compactos, 10
- Princípio variacional para fluxos, 19
- Propriedade $\mathcal{H}$, 49
- Propriedade de especificação, 29
- Refinamento de uma partição, 5
- Relação entre conjuntos (n, ϵ) -separados para homeomorfismos e fluxos, 8
- Repulsor próprio, 25
- Sensibilidade às condições iniciais, 26
- Sub-fibrado que expande volume, 26
- Teorema de Kolmogorov-Sinai, 5
- Teorema de Krylov-Bogolubov, 4
- Topologia fraca*, 4
- Transformação mensurável, 3