SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito.....19/3/99

Assinatura:.....

Os Duais de Hipersuperfícies Genéricas

José Carlos de Souza Junior ¹

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área de Matemática".

USP - São Carlos

Abril - 1999

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

Aos meus pais José Carlos e Elvira

À minha irmã Maria Cláudia

Agradecimentos

Antes de mais nada agradeço a DEUS por ter me dado esta oportunidade.

À toda a minha família por sempre terem dado o seu apoio e em especial aos meus queridos pais.

À minha orientadora, Maria Aparecida Soares Ruas os meus mais sinceros agradecimentos, por ter acreditado no meu trabalho desde o segundo ano da minha graduação e principalmente pela participação efetiva na realização deste projeto de mestrado.

A todos os colegas e funcionários do ICMC-USP.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

À FAPESP

Resumo

Neste trabalho estudamos os contatos genéricos de superfícies com famílias de hiperplanos e utilizamos os resultados para descrever os duais destas superfícies e as singularidades da aplicação de Gauss.

Apresentamos duas abordagens para este estudo: o estudo dos teoremas de genericidade para famílias de funções altura definidas em hipersuperfícies em espaços euclidianos, e os correspondentes resultados para hipersuperfícies projetivas. A interpretação geométrica das singularidades destas famílias é discutida nos casos especiais de curvas planas, superfícies em $\mathbb{R}^3$ e superfícies em $\mathbb{P}^3$. Como aplicação, descrevemos os conjuntos duais nestas dimensões e estudamos as cúspides da aplicação de Gauss projetiva.

Abstract

In this work we study the generic contacts of hypersurfaces with families of hyperplanes and we use these results to describe the duals of these surfaces and the singularities of the Gauss map.

We discuss the genericity theorems for the family of height functions of embeddings of hypersurfaces in euclidian spaces and the corresponding results for projective hypersurfaces. The geometric interpretations of the singularities of these families are presented for the cases of plane curves, surfaces in $\mathbb{R}^3$ and projective hypersurfaces in $\mathbb{P}^3$. As final example, we study the cusps of the projective Gauss map.

Sumário

1	Material Introdutório	1
1.1	Germes e jatos	1
1.2	Equivalência de germes e jatos	3
1.3	Desdobramentos versais	6
1.4	Transversalidade e genericidade	7
1.5	Classificação de singularidades	9
1.6	Classificação dos germes de funções	13
1.6.1	Singularidades de Morse e Lema da Decomposição	13
1.6.2	Singularidades de corank 1	15
1.6.3	Singularidades de corank 2	16
1.6.4	Singularidades simples	18

1.6.5	Classificação dos germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$	20
2	Duais de hipersuperfícies genéricas em $\mathbb{R}^n$	25
2.1	A família de funções altura	26
2.2	Curvas planas	30
2.3	Superfícies em $\mathbb{R}^3$	32
3	Duais de hipersuperfícies projetivas	39
3.1	A família de funções altura: definições básicas e resultados preliminares	41
3.2	O teorema de genericidade local	46
3.3	O teorema de genericidade multilocal	53
3.4	Considerações finais	65
A	Geometria Algébrica Projetiva	69
A.1	O Espaço Projetivo e as Variedades Projetivas	69
A.2	Correspondência entre Ideais Projetivos e Vari- edades Projetivas	75
A.3	A Geometria das Hipersuperfícies Quádricas	87

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar os contatos genéricos de hipersuperfícies com famílias de hiperplanos e utilizar os resultados para descrever os duais destas superfícies e as singularidades da aplicação de Gauss.

Este estudo é apresentado em duas abordagens: no contexto de subvariedades em espaços euclidianos $\mathbb{R}^{n+1}$ e para hipersuperfícies projetivas em $\mathbb{P}^{n+1}$. A primeira situação tem sido amplamente estudada do ponto de vista da Teoria de Singularidades. O resultado clássico de Looijenga estabelece que para um conjunto residual de mergulhos de subvariedades de dimensão menor ou igual a 5, as singularidades da família de funções altura são localmente versais. No trabalho, discutimos este teorema e a interpretação geométrica das singularidades da família para curvas planas e superfícies em $\mathbb{R}^3$. Os correspondentes teoremas de genericidade para hipersuperfícies projetivas são menos conhecidos e a sua discussão detalhada é a principal parte do trabalho.

No capítulo 1, abordamos noções e resultados básicos da teoria de singularidades, como por exemplo, os conceitos de transversalidade e genericidade, métodos de classificação de singularidades e a classificação dos germes simples de funções.

No capítulo 2, estudamos a família de funções altura definida em subvariedades do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Apresentamos o Teorema de Genericidade de Looijenga, e discutimos a maneira de aplicar este resultado ao estudo dos contatos de uma subvariedade genericamente mergulhada com a família de hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$. Também analisamos a relação entre as singularidades da família de funções altura, a geometria do conjunto dual das hipersuperfícies afins e as singularidades da aplicação normal de Gauss.

A interpretação geométrica das singularidades da família de funções altura é discutida nos casos especiais de curvas em $\mathbb{R}^2$ e superfícies em $\mathbb{R}^3$. As singulari-

dades dos conjuntos duais e da aplicação de Gauss são apresentadas.

O capítulo 3 contém a principal parte do trabalho. Nele apresentamos um estudo detalhado dos teoremas 3.2.1, 3.3.1 e 3.3.2, os quais correspondem respectivamente aos teoremas 2.4, 2.8 e 2.10 do artigo “The Duals of Generic Hypersurface”, de J. W. Bruce [13], referentes aos contatos genéricos de hipersuperfícies algébricas reais e complexas com famílias de hiperplanos em $\mathbb{P}^{n+1}$. Como aplicação vimos alguns resultados relacionados com as cúspides da aplicação de Gauss projetiva.

O trabalho contém também um apêndice com uma apresentação dos resultados básicos da geometria algébrica projetiva, incluindo em especial um estudo das hipersuperfícies quádras. A leitura deste apêndice não é essencial para a compreensão do trabalho, mas pode ser útil para uma iniciação à geometria algébrica projetiva.

Capítulo 1

Material Introdutório

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos em teoria de singularidades que serão necessários para os capítulos seguintes do trabalho. Começaremos apresentando um breve relato sobre germes e jatos, passando então a descrever $\mathcal{A}$ -equivalência entre germes. Em seguida voltamos nossa atenção às deformações versais de um germe, e à questão de genericidade. Finalizando, falamos um pouco sobre classificação de singularidades.

1.1 Germes e jatos

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações diferenciáveis definidas em uma vizinhança aberta U_1 de x . Dizemos que f e g são equivalentes e escrevemos $f \sim g$ se existir uma vizinhança $U \ni x$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $f|U = g|U$, ou seja, se f e g coincidem numa vizinhança U de x . Esta relação de equivalência e suas classes de equivalência são chamadas *germes de aplicações diferenciáveis* de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x ,

e os elementos de uma classe são chamados representantes do germe. Se f e g são representantes do mesmo germe então devemos ter $f(x) = g(x)$ e, portanto qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em x , digamos y . É comum usar-se a notação $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ para indicar um germe de aplicação.

Consideremos, em particular, os germes em x de aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Usando as operações da meta $\mathbb{R}$, podemos somar e multiplicar tais aplicações e, assim, vemos que o conjunto de seus germes em x adquire uma estrutura de um anel que denotaremos por $\mathcal{E}_x$. Este anel tem um ideal $\mathcal{M}_x$ constituído pelos germes de funções $\phi : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}, 0$, ou seja, funções ϕ com $\phi(x) = 0$. Este ideal é um ideal maximal. Na verdade $\mathcal{M}_x$ é o único ideal maximal de $\mathcal{E}_x$ que é, portanto um anel local. Dado um germe de aplicação $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ teremos $f = (f_1, \dots, f_p)$ com o $\mathcal{E}_x$ -módulo (livre) $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_x \times \dots \times \mathcal{E}_x$ (p cópias). Desta forma, os espaços de germes podem ser identificados com espaços lineares, e considerando-os como variedades podemos identificá-los com seus próprios espaços tangentes.

Vamos agora introduzir uma outra relação de equivalência entre aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações definidas em uma vizinhança U de x . Dizemos que f e g têm o mesmo k -jato em x se $f(x) = g(x)$ e para algum sistema local de coordenadas em $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) \in \mathbb{R}^p$ todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ das componentes de f e g coincidem em x . Observe que esta definição depende apenas do germe de f e g . Fixando $x \in \mathbb{R}^n, y = f(x) \in \mathbb{R}^p$ e coordenadas locais em $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$, segue que o k -jato de f é determinado pelos termos de grau $\leq k$ nas expansões de Taylor das componentes de f com respeito a estas coordenadas. Estes são os k -jatos de aplicações $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$. O conjunto de todos tais k -jatos denota-se por $J^k(n, p)$ o qual é um espaço vetorial de dimensão $p\binom{n+k}{k} - 1$. O conjunto $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de todos os k -jatos (em todos os pontos) de todas as aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um fibrado sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com fibra $J^k(n, p)$. Dada então uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos definida uma aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa

o k -jato de f em x , $j^k f(x)$. Esta aplicação é chamada *aplicação k -jato*.

No caso particular em que $p = 1$ pode-se mostrar que as derivadas parciais de ordem $\leq k$ de $\phi \in \mathcal{E}_x$ se anulam em x se e somente se, $\phi \in \mathcal{M}_x^{k+1}$. Assim, podemos identificar o espaço dos k -jatos em x de aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ com o espaço

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}}$$

Logo, no caso geral, tem-se

$$J^k(n, p) = \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}} \times \dots \times \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}} \text{ (p cópias)}$$

1.2 Equivalência de germes e jatos

As relações de equivalência fundamentais para o problema de classificação de germes são a $\mathcal{K}$ - e a $\mathcal{A}$ - equivalência, onde $\mathcal{K}$ denota o grupo de contato e $\mathcal{A}$ é o subgrupo de $\mathcal{K}$ de mudanças de coordenadas na fonte e na meta do germe. É este último grupo que nos interessa no momento e é sobre ele que discutiremos a seguir.

Seja $\mathcal{R} = \text{Diff}(\mathbb{R}^n, x)$ o grupo de germes de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^n, x$ (ou seja, $\phi \in \mathcal{R}$ é uma mudança de coordenadas locais). Este grupo age sobre $\mathcal{E}_x^p$ por composição à direita:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ (\phi, f) &\mapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Assim, dizemos que os germes $f, g : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ são $\mathcal{R}$ - equivalentes, e escrevemos $f \sim_{\mathcal{R}} g$, se existir $\phi \in \mathcal{R}$ tal que $f = g \circ \phi^{-1}$.

Da mesma forma, o grupo $\mathcal{L} = \text{Diff}(\mathbb{R}^p, y)$ age sobre $\mathcal{E}_x^p$, agora por composição à esquerda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ (\psi, f) &\mapsto \psi \circ f,\end{aligned}$$

e dizemos que dois germes $f, g : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ são $\mathcal{L}$ -equivalentes, e escrevemos $f \sim_{\mathcal{L}} g$ se existir $\psi \in \mathcal{L}$ tal que $f = \psi \circ g$. A $\mathcal{R}$ -equivalência (resp. $\mathcal{L}$ -equivalência) é também chamada equivalência à direita (resp. à esquerda), daí o uso da letra $\mathcal{R}$ (abreviação de *right* em inglês) (resp. $\mathcal{L}$ (abreviação de *left* em inglês)). O grupo $\mathcal{A}$ de mudanças de coordenadas na fonte e na meta é então definido pelo produto $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ e este grupo age sobre $\mathcal{E}_x^p$ por composição à direita e à esquerda da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ ((\phi, \psi), f) &\mapsto \psi \circ f \circ \phi^{-1}\end{aligned}$$

Definimos então a seguinte relação de equivalência, chamada de $\mathcal{A}$ -equivalência (ou equivalência à esquerda e à direita). Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_x^p$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes (ou equivalentes à esquerda e à direita) se existir $(h, k) \in \mathcal{A}$, ou seja, germes de difeomorfismos $h \in \mathcal{R}$ e $k \in \mathcal{L}$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p\end{array}$$

Passamos agora a descrever o espaço tangente à ação do grupo $\mathcal{A}$. Para isto vamos descrever separadamente os espaços tangentes às ações dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$. Começamos com o grupo $\mathcal{R}$. Vamos trabalhar aqui com a fonte e a meta fixas digamos $x = 0$ e $y = 0$. Neste caso, usamos a notação $\mathcal{E}_n$ ao invés de $\mathcal{E}_x$ para indicar o anel dos germes de funções $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_n$ para o respectivo ideal maximal. Dado então um germe $f \in \mathcal{E}_n$ seja $\theta(f)$ o conjunto de todos os germes na origem de campos de vetores ao longo de f , isto é de germes de aplicações ζ (como no diagrama abaixo)

com $\Pi_p \circ \zeta = f$:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{Tf} & T(\mathbb{R}^p) \\ \downarrow \Pi_n & \nearrow \zeta & \downarrow \Pi_p \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

onde $T(\mathbb{R}^n)$ é o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$, Π_n é a projeção natural e Tf é a aplicação tangente induzida por f . Se denotarmos por $\theta(n)$ o conjunto de germes na origem de campos de vetores do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, campos de vetores ao longo da identidade $I_n : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$), um elemento $\chi \in \theta(n)$ será aplicado por Tf ao campo $tf(\chi) = Tf \circ \chi \in \theta(f)$, e portanto fica definida uma aplicação $tf : \theta(n) \rightarrow \theta(f)$. Observe que $\theta(n) = \theta(I_n)$ é o $\mathcal{E}_n$ -módulo livre com base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$. Logo $tf : \theta(n) \rightarrow \theta(f)$ é a aplicação $\mathcal{E}_n$ -linear com matriz

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

Definimos então o espaço tangente à direita de f , ou o $\mathcal{R}$ -espaço tangente de f como sendo

$$tf(\mathcal{M}_n\theta(n)),$$

ou seja, a imagem de tf dos campos de vetores que se anulam na origem. Por outro lado, se $\eta \in \theta(p)$ então a composição com f , $\eta \circ f \in \theta(f)$, define uma aplicação $wf : \theta(p) \rightarrow \theta(f)$. Também aqui $\theta(p) = \theta(I_p)$ é o $\mathcal{E}_p$ -módulo livre gerado por $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$, e wf é simplesmente a aplicação induzida por $f^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$, $f^*(g) = g \circ f$. Definimos então o espaço tangente à esquerda de f como sendo

$$wf(\mathcal{M}_p(\theta(p))).$$

O $\mathcal{A}$ -espaço tangente de f é então definido por

$$T\mathcal{A}f = T\mathcal{R}f + T\mathcal{L}f$$

Voltemos agora ao caso de jatos. O k -jato de uma composta $h \circ k$ depende somente dos respectivos k -jatos das aplicações h e k . Assim, as ações de $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$ sobre o espaço de germes induzem ações dos grupos de Lie (de dimensão finita) $J^k \mathcal{R}, J^k \mathcal{L}, J^k \mathcal{A}$ sobre $J^k(n, p)$ (a fibra de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ sobre o ponto $(0, 0)$). Como estamos num caso finito-dimensional os espaços tangentes a cada uma destas ações podem ser tomados no sentido usual, e apesar de ao nível de germes termos apenas expressões formais para os espaços tangentes, os respectivos espaços tangentes às órbitas das ações induzidas são obtidos tomando-se a imagem dos respectivos espaços tangentes ao nível de germes em $\mathcal{M}_n \theta(f) / \mathcal{M}_n^{k+1} \theta(f)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}^k f &:= T\mathcal{R}f / \mathcal{M}_n^{k+1}, \\ T\mathcal{L}^k f &:= T\mathcal{L}f / \mathcal{M}_n^{k+1}, \\ T\mathcal{A}^k f &:= T\mathcal{A}f / \mathcal{M}_n^{k+1} \end{aligned}$$

Os espaços tangentes definidos acima se referem ao caso em que a fonte e a meta dos germes são fixas (no caso fixamos $x = 0$ e $y = 0$). Se permitirmos que estas variem definimos então os espaços tangentes estendidos por

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}_e f &:= tf(\theta(n)), \\ T\mathcal{L}_e f &:= wf(\theta(p)), \\ T\mathcal{A}_e f &:= T\mathcal{R}_e f + T\mathcal{L}_e f. \end{aligned}$$

1.3 Desdobramentos versais

Passamos agora a discutir o conceito de desdobramento de um germe f e, na seção seguinte discutiremos o conceito de genericidade. Estes dois conceitos são de certa forma relacionados um com o outro.

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \times \mathbb{R}^p, 0$ um germe diferenciável. Um *desdobramento a s parâmetros* de f é uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$, $F(x, \lambda) = (\bar{f}(x, \lambda), \lambda)$ tal que

$F(x, 0) = (f(x), 0), \forall x$. A aplicação $\bar{f}(x, \lambda) = \bar{f}_\lambda(x)$, por sua vez, é denominada uma *deformação* de f . Em outras palavras, um desdobramento de f é simplesmente uma família de germes de aplicações contendo o germe de f . Dentre os desdobramentos de um germe f destacam-se os desdobramentos $\mathcal{G}$ -versais ($\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$) de f , que são de central importância no estudo da geometria do mesmo. Dizemos que um desdobramento F do germe f é *$\mathcal{G}$ -versal* se dado qualquer desdobramento $G(x, u) = (\bar{g}(x, u), u)$ de f , para cada parâmetro $u \in \mathbb{R}^r$ a aplicação $\bar{g}_u : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$, dada por $g_u(x) = g(x, u)$, é $\mathcal{G}$ -equivalente a $\bar{f}_{\alpha(u)}$ onde $\alpha : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma aplicação diferenciável. Neste caso, dizemos também que $\bar{f}$ é uma *deformação versal*. O número mínimo s de parâmetros em um desdobramento versal de F é chamado de $\mathcal{G}_e$ -codimensão de f . Uma deformação versal com o número mínimo de parâmetros é chamada *deformação miniversal*. Algebricamente os desdobramentos versais são caracterizados pelo seguinte teorema devido a Martinet [1].

Teorema 1.3.1 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um desdobramento $\mathcal{G}$ -versal ($\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$) do germe f se, e somente se,

$$T\mathcal{G}_e f + \mathbb{R}\{\bar{f}'_i\} = \theta(f),$$

onde $\bar{f}'_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0)$ é a velocidade inicial da deformação $\bar{f}$, $i = 1, \dots, s$.

Neste trabalho estaremos principalmente interessados nos grupos $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{R}$.

1.4 Transversalidade e genericidade

Fortemente relacionado com o conceito de versalidade está o conceito de genericidade. Dizemos que uma propriedade é genérica em $C^\infty(M, N)$ se ela se verifica

para um conjunto residual de aplicações. Lembremos que um conjunto residual é uma interseção enumerável de abertos densos. Sendo $C^\infty(M, N)$ um espaço de Baire, tais conjuntos são densos. A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade, que descrevemos a seguir.

Definição 1.4.1 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^∞ . Seja W uma subvariedade de N e $x \in M$. Então f intercepta W transversalmente em x se*

- (i) $f(x) \notin W$, ou
- (ii) $f(x) \in W$ e $T_{f(x)}N = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xM)$.

Dizemos que f é transversal a W se f é transversal a W em x para todo $x \in M$.

Lema 1.4.1 (Lema de transversalidade de Thom) *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $W \subset P$ uma subvariedade e $F : N \times M \rightarrow P$ uma aplicação C^∞ . Se F é transversal a W então para quase todo $y \in M$ a aplicação $F_y : N \rightarrow P; F_y(x) = F(x, y)$ é transversal a W .*

Teorema 1.4.1 (Teorema de transversalidade de Thom) *Sejam $Q_1, \dots, Q_s$ subvariedades diferenciáveis do espaço de jatos $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. O conjunto de todas as aplicações diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ para as quais $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é transversal a $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

1.5 Classificação de singularidades

Quando estudamos a geometria de superfícies é muito comum precisarmos classificar germes de aplicações sob alguma relação de equivalência até uma certa codimensão. Por exemplo, para estudarmos o contato de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com planos, precisamos de antemão classificar os germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão ≤ 2 . Este processo de classificação envolve basicamente duas etapas: a primeira delas é determinar quais são os “jatos relevantes” em $J^k(n, p)$ e então testar se estes jatos são “finitamente determinados” ou não. Este processo é o que chamamos de processo indutivo via jatos, e se baseia em três pontos chaves que são: o conceito de transversal completa introduzido por Bruce, du Plessis e Kirk em [5], o lema de Mather e os teoremas de determinação finita. Destes três pontos o mais conhecido é o lema de Mather que, quando aplicado, reduz os jatos a formas mais simples. Seu enunciado é o seguinte:

Teorema 1.5.1 (Lema de Mather [6]) *a) Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre a variedade M e suponha que a subvariedade $S \subset M$ tem as seguintes propriedades:*

- 1. para cada $x \in S, T_x S \subset T_x Gx$;*
- 2. a dimensão de Gx é independente da escolha de $x \in S$;*
- 3. S é uma variedade conexa.*

Então S está inteiramente contida em uma única G -órbita.

b) Suponha que $\Pi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma G -submersão, e seja $S = \Pi^{-1}(x_0)$ para algum $x_0 \in M_2$. Se (1) e (3) de (a) se verificam, então S está contida em uma única G -órbita.

A técnica de classificação, como já dissemos, é o método indutivo de classificação via jatos até que um jato suficiente (e portanto um germe finitamente determinado)

seja obtido. Começemos então falando um pouco sobre determinação finita. Dado um grupo $\mathcal{G}$ de equivalências entre germes, dizemos que um germe $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é k - $\mathcal{G}$ -determinado se, para qualquer germe g , tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ tivermos g $\mathcal{G}$ -equivalente a f . Dizemos ainda que f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se ele for k -determinado para algum k . Um k -jato é dito *suficiente* se ele é o k -jato de algum germe k -determinado. Resultados importantes sobre determinação finita que dão condições necessárias e, em alguns casos, também suficientes para a determinação finita podem ser encontrados em [7]. Um resultado central da teoria é o critério infinitesimal para a determinação finita:

Teorema 1.5.2 ([7]) *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos usuais da teoria de singularidades $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado;
2. para algum k $T\mathcal{G}f \supset \mathcal{M}_n^k \theta(f)$;
3. para algum k $T\mathcal{G}_e f \supset \mathcal{M}_n^k \theta(f)$;
4. $\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \{ \mathcal{M}_n \theta(f) / T\mathcal{G}f \} < \infty$;
5. $\mathcal{G}_e\text{-cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \{ \theta(f) / T\mathcal{G}_e f \} < \infty$;

Mais precisamente, pondo $\epsilon = 1$ para $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$, e $\epsilon = 2$ para $\mathcal{L}, \mathcal{A}$, temos:

1. se f é r - $\mathcal{G}$ -determinado então $T\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f)$.
2. se $T\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f)$ então f é $(\epsilon r + 1)$ - $\mathcal{G}$ -determinado.
3. se $\text{cod}(f, \mathcal{G}) = d$ então $T\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{d+1^\epsilon} \theta(f)$.

Alguns resultados de determinação finita utilizam o subgrupo $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas cujo 1-jato é a identidade. Em geral dado o grupo $\mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas, ficam definidos os subgrupos $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas cujo s -jato é a identidade. Nesta direção Bruce, du Plessis e Wall em [8] encontram condições necessárias e suficientes para a determinação finita de germes para uma classe bem abrangente de subgrupos de $\mathcal{K}$, a saber subgrupos unipotentes. O principal

resultado lá contido é o seguinte teorema, sobre o qual não entraremos em detalhes, por envolver conceitos e técnicas que vão além dos objetivos de nosso trabalho. Antes de enunciarmos o resultado, colocamos um conceito do qual os autores fazem uso no teorema. Diz-se que um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é *fortemente fechado* em $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{H}$ para algum s e $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo fechado de $J^s \mathcal{G}$. Se além disso $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo algébrico diz-se que $\mathcal{H}$ é *fortemente Zariski fechado*.

Teorema 1.5.3 ([8]) . *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$ ou $\mathcal{A}$. Sejam $\mathcal{H}$ um subgrupo fortemente Zariski-fechado de $\mathcal{G}$ e $f : \mathbb{F}^n, 0 \rightarrow \mathbb{F}^p, 0$ um germe C^r (aqui $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$); $\tau = \infty$ (aplicações C^∞ , com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $\tau = \mathbb{R} - \omega$ (aplicações analíticas reais), ou $\tau = \mathbb{C} - \omega$ (aplicações analíticas complexas, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Então para qualquer $r < \infty$, f é $r\text{-}\mathcal{H}$ -determinado se, e somente se, existe um subgrupo de $\mathcal{G}$ fortemente fechado $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, com $J^1 \mathcal{U}$ unipotente para o qual tem-se*

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f) \subset T\mathcal{U}f.$$

Passamos agora a descrever a outra ferramenta que precisamos no processo de classificação que é o conceito de transversal completa desenvolvido primeiramente por J. W. Bruce e A. A. du Plessis e posteriormente junto com N. Kirk [5]. O resultado central daquele artigo é o seguinte teorema:

Teorema 1.5.4 (Teorema das transversais completas [5]) *Seja $\mathcal{H}$ um subgrupo de Lie de $\mathcal{G}_1$ e seja f um k -jato em $J^k(n, p)$. Se $T \subset H^{k+1}(n, p)$ é um subespaço vetorial de $H^{k+1}(n, p)$ tal que*

$$H^{k+1}(n, p) \subset T + T\mathcal{H}^{k+1}f$$

então todo $(k+1)$ -jato F com $j^k F = f$ é $\mathcal{H}^{k+1}$ -equivalente a algum $(k+1)$ -jato da forma $f + t$, para algum $f \in T$.

Bastante útil é a variante deste teorema que se obtém fazendo-se $\mathcal{H} = \mathcal{A}_1$.

Proposição 1.5.1 *Seja f um k -jato no espaço de jatos $J^k(n, p)$. Seja ainda T um subespaço vetorial do $H^{k+1}(n, p)$ de jatos homogêneos de grau $k + 1$ tal que*

$$H^{k+1}(n, p) \subset T + T\mathcal{A}_1^{k+1}f.$$

Então qualquer $(k + 1)$ -jato F com $j^k F = f$ é $\mathcal{A}_1$ -equivalente a $f + t$ para algum $t \in T$.

Neste ponto cabe um exemplo para ilustrar o método.

Exemplo 1 *Consideremos aqui $\mathcal{A}$ -equivalência e aplicações $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ de corank 1 (ver [9]). Um tal germe f deve ter 1-jato da forma $\sigma = (x, 0)$. Vamos determinar uma 2-transversal completa para σ . Como podemos ver facilmente, os geradores do espaço tangente $T\mathcal{A}_1^2\sigma$ são $(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2)$. Assim, podemos tomar como subespaço T no teorema 1.5.4 o subespaço de $H^2(2, 2)$ gerado pelos vetores $(0, xy), (0, y^2)$. Portanto de acordo com o mesmo teorema qualquer 2-jato sobre $(x, 0)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(x, a_1xy + a_2y^2)$, com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Teremos então 3 casos a considerar: $a_2 \neq 0$; $a_2 = 0$ com $a_1 \neq 0$; ou $a_1 = a_2 = 0$. Chegamos então aos três possíveis 2-jatos que são $(x, y^2), (x, xy), (x, 0)$. O primeiro deles é 2- $\mathcal{A}_1$ -determinado. Poderíamos agora continuar, por exemplo, a classificar os germes sobre o 2-jato (x, xy) ou $(x, 0)$ em codimensões baixas. Por exemplo, um dos três jatos sobre $(x, 0)$ é (x, y^3) . Pensando este 3-jato como um k -jato (com $k \geq 3$) e analisando o seu espaço tangente $T\mathcal{A}_1^{k+1}f$, vemos que o único termo de grau $k + 1$ que não está presente é o vetor $(0, x^k y)$. Logo uma transversal completa em $J^{k+1}(2, 2)$ é dada por $(x, y^3 + ax^k y)$, com $a \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ com mudanças de escalas na fonte e na meta podemos reduzi-la às formas normais $(x, y^3 \pm x^k y)$ para k par e $(x, y^3 + x^k y)$ para k ímpar. Estes germes são $\mathcal{A}$ -finitamente determinados ([9]) e, portando, temos uma lista completa dos germes $\mathcal{A}$ -finitamente determinados com 3-jato (x, y^3) .*

Na seção seguinte listamos alguns resultados importantes de classificação, dos quais faremos uso nos capítulos seguintes.

1.6 Classificação dos germes de funções

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de uma função suave. Se $\nabla f(0) \neq 0$, então $f \simeq_{\mathcal{R}} x_1$. Se f é singular em 0, o objetivo é determinar uma lista de singularidades finitamente determinadas. É claro que não podemos obter todos os germes finitamente determinados, portanto, restringimo-nos ao caso dos germes simples.

A classificação dos germes de funções (ou de aplicações) é obtida por indução sobre o espaço de k -jatos. Dado um $j^k f$ usamos o teorema da Transversal Completa para obter uma parametrização dos $(k+1)$ -jatos que tem o k -jato igual a $j^k f$. Podemos usar o Lema de Mather para produzir as órbitas dentro desta parametrização. Aplicamos o teste da determinação finita a cada órbita no $(k+1)$ -jato (cuja k -jato é $j^k f$). Se o germe é finitamente determinado paramos o processo. Se não, consideramos o $(k+2)$ -jato. No caso de funções precisamos dos resultados que apresentaremos na sequência, e cujas principais referências são [3] e [12]

1.6.1 Singularidades de Morse e Lema da Decomposição

Definição 1.6.1 *Um germe $f \in m_n$ é dito de Morse se $j^2 f$ é uma forma quadrática não degenerada.*

Lema 1.6.1 *Um germe de Morse é $\mathcal{R}$ -equivalente a $\sum_{i=1}^n \pm x_i^2$.*

Seja $f \in m_n$, então o $\mathcal{R}$ -espaço tangente estendido de f é dado por $T\mathcal{R}_e.f = J(f)$, onde $J(f)$ denota o ideal Jacobiano de f . Segue do teorema fundamental dos desdobramentos versais (ver Teorema 1.3.1) que um desdobramento de f é $\mathcal{R}_e$ -versal se, e somente se,

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_n.$$

Isto implica na seguinte proposição.

Proposição 1.6.1 *Uma deformação $\mathcal{R}_e$ -miniversal de um germe de Morse f é dada por $f(x, u) = f(x) + u$.*

Observação 1.6.1 *No caso do grupo $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{A}$ um germe de Morse é estável.*

Definição 1.6.2 *Um germe $f \in m_n^2$ tem corank q se a matriz Hessiana $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(0))$ tem rank $p = n - q$.*

Lema 1.6.2 (*"Splitting Lemma" ou Lema de Decomposição*) *Se $f \in m_n^2$ é uma singularidade de corank q , então f é $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma*

$$Q(x_1, \dots, x_p) + g(x_{p+1}, \dots, x_n),$$

onde $p + q = n$, Q uma forma quadrática não degenerada e $j^2 g = 0$.

Demonstração: Podemos supor que $j^2 f$ é dado por uma forma quadrática não degenerada $Q(x_1, \dots, x_p)$, e considerar f como um desdobramento de Q . Como $Q + u$ é miniversal, segue que f é isomorfo a $g^*(Q + u)$ por algum germe $g : \mathbb{R}^{n-p}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. Isto é, existe um difeomorfismo ϕ tal que

$$f(\phi(x_1, \dots, x_n)) = Q(x_1, \dots, x_p) + g(x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Observemos que a singularidade de f é completamente determinada pela singularidade de g . A vantagem do uso do Lema de Decomposição é que g tem um número menor de variáveis. Podemos classificar agora os germes de funções usando o Teorema da Transversal Completa e o Teorema 1.5.1 da determinação finita, a saber, se

$$m_n^k \cdot \mathcal{E}_n \subset T\mathcal{R}.f + m_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_n,$$

então f é $k - \mathcal{R}$ -determinado.

1.6.2 Singularidades de corank 1

Usando o Lema de Decomposição, temos $f = g(x) + q(x_2, \dots, x_n)$, onde q é uma forma quadrática não degenerada. Então o problema neste caso se reduz a classificar funções de uma só variável.

Se $g(0) = \dots = g^{(k)} = 0$ mas $g^{(k+1)} \neq 0$, então não é difícil mostrar que g é $(k+1)$ -determinado e, portanto,

$$g \simeq_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1}.$$

A singularidade $\pm x^{k+1}$ é chamada A_k . Ela é de $\mathcal{R}_e$ -codimensão k . Um desdobramento versal é dado por

$$\pm x^{k+1} + u_{k-1}x^{k-1} + \dots + u_1x + u_0.$$

A constante u_0 representa os níveis de $f_u(x)$. Em alguns casos somente a singularidade de f é de interesse. Neste caso, é definido o desdobramento versal “potencial” como um desdobramento que satisfaz

$$J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = m_n \cdot \mathcal{E}_n.$$

No caso da singularidade $\pm x^{k+1}$, um modelo de um desdobramento potencial é $\pm x^{k+1} + u_{k-1}x^{k-1} + \dots + u_1x$. Uma outra maneira de eliminar o termo constante é considerar o grupo $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{A}$. Nestes casos podemos obter o termo constante no desdobramento usando o grupo $\mathcal{L}$.

1.6.3 Singularidades de corank 2

Pelo Lema de Decomposição temos que considerar germes de funções de duas variáveis $g(x, y)$ com $j^2g = 0$.

Seja $j^3g = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$. Podemos mudar variáveis e escrever g na forma

$$g \simeq_{\mathcal{K}} \begin{cases} x^3 \pm xy^2 & \text{se } g \text{ possui uma ou três raízes reais} \\ xy^2 & \text{se } g \text{ possui uma raiz dupla} \\ x^3 & \text{se } g \text{ é uma cúbica perfeita} \\ 0 & \text{se } g = 0 \end{cases}$$

O 3-jato $x^3 \pm xy^2$ é 3-determinado pois

$$m^3(x, y) \subset m(x, y) < 3x^2 \pm y^2, \pm 2xy > + m^4(x, y).$$

Esta singularidade é chamada D_4 e tem $\mathcal{R}_e$ -codimensão 4. Um desdobramento versal é dado por

$$x^3 \pm xy^2 + u_3x^2 + u_2x + u_1y + u_0.$$

Como no caso anterior, não precisamos do termo u_0 no caso de um $\mathcal{A}$ -desdobramento.

O 3-jato xy^2 : Suponha $j^{k-2}f = xy^2$, $k \geq 5$. Então

$$J^{k-1}(m^2(x, y) < y^2, 2xy >) \cap H^{k-1}(x, y) + \mathbb{R} \cdot \{x^{k-1}\} = H^{k-1}(x, y).$$

Segue do teorema da Transversal Completa que todos os $(k-1)$ -jatos cujos $(k-2)$ jatos são iguais a xy^2 são equivalentes a $xy^2 + ax^{k-1}$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Uma mudança de coordenadas mostra que as órbitas nesta família são

$$xy^2 \pm x^{k-1} \text{ e } xy^2.$$

A singularidade $xy^2 \pm x^{k-1}$ é $(k-1)$ -determinada, pois

$$m^{k-1}(x, y) \subset m(x, y) < y^2 \pm (k-1)x^{k-2}, 2xy > + m^k(x, y).$$

Esta singularidade é chamada D_k e tem $\mathcal{R}_e$ -codimensão k . Um desdobramento versal é dado por

$$xy^2 \pm x^{k-1} + u_{k-1}x^{k-2} + \cdots + u_2x + u_1y + u_0.$$

O 3-jato x^3 : Temos $f_x = 3x^2$ e $f_y = 0$,

$$J^4(m^2(x, y) < 3x^2, 0 >) \cap H^4(x, y) + \mathbb{R} \cdot \{xy^3, y^4\} = H^4(x, y).$$

Então um elemento g de $J^4(2, 1)$ com $j^3g = f$ é equivalente a $x^3 + axy^3 + by^4$ para algum par $a, b \in \mathbb{R}$.

- Se $b \neq 0$, então $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 + axy^3 \pm y^4$. Seja $V = \{x^3 + axy^3 \pm y^4, a \in \mathbb{R}\}$ um espaço vetorial em $M = J^4(2, 1)$ e seja $G = J^4\mathcal{R}$. Aplicando o Lema de Mather segue que V está contido em uma só órbita, o que mostra que $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 \pm y^4$. Esta singularidade é 4-determinada e é denotada por E_6 . Ela tem $\mathcal{R}_e$ -codimensão 6 com um desdobramento versal dado por

$$x^3 \pm y^4 + u_5xy^2 + u_4y^2 + u_3xy + u_2x + u_1y + u_0.$$

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, então $g \simeq_{\mathcal{R}} x^3 + xy^3$. Esta singularidade é 5 determinada e é denotada por E_7 . Tem $\mathcal{R}_e$ -codimensão 7 com um desdobramento versal dado por

$$x^3 + xy^3 + u_6y^4 + u_5y^3 + u_4xy^2 + u_3y^2 + u_2xy + u_1x + u_0.$$

• Se $a = b = 0$, então um 5-jato cujo 4-jato é x^3 é equivalente a $x^3 + cxy^4 + dy^5$. Se $d \neq 0$, então $g \simeq x^3 + y^5$. Esta singularidade, denotada por E_8 , é 5-determinada e tem $\mathcal{R}_e$ -codimensão 8. Um desdobramento versal é dado por

$$x^3 + y^5 + u_7xy^3 + u_6y^3 + u_5xy^2 + u_4y^2 + u_3xy + u_2x + u_1y^4 + u_0.$$

1.6.4 Singularidades simples

Definição 1.6.3 *Uma singularidade finitamente determinada $f \in m_n\mathcal{E}(n, p)$ é dita $\mathcal{G}$ -simples se existe uma vizinhança V de $j^k f$ (k grande) em $J^k(n, p)$ tal que V contém um número finito de órbitas de $J^k\mathcal{G}$ em $J^k(n, p)$.*

Exemplo 2 (1) $n = p = 1$, $f(x) = \pm x^{k+1}$ é $\mathcal{R}$ -simples, pois para $l \geq k + 1$, uma vizinhança de $j^l f$ que contém só as órbitas $A_s, s \leq k$. (Ver o desdobramento versal de A_k).

(2) Nem todos os germes são $\mathcal{R}$ -simples. Seja

$$f_t(x, y) = xy(x + y)(x - ty).$$

O conjunto $f^{-1}(0)$ é formado por 4 retas passando pelo origem. Podemos mostrar que f_t é finitamente determinado mas f_t e $f_{t'}$ não são $\mathcal{R}$ -equivalentes para $t \neq t'$.

Proposição 1.6.2 *Se $f \in m_n$ é $\mathcal{R}$ -simples, então $\text{corank}(f) \leq 2$.*

Demonstração: $j^2 f$ define uma forma quadrática de rank r em $\mathbb{R}^2$. O espaço nulo desta forma quadrática é um subespaço vetorial de dimensão $n - r$. $j^3 f$ define uma forma cúbica em V que é independente do sistema de coordenadas. Se $\phi \in \mathcal{R}$ então

$D\phi(0)$ leva V_{j^2f} a $V_{j^2(f\circ\phi)}$. Então a ação de $J^3\mathcal{R}$ sobre $J^3(n, 1)$ induz uma ação de $GL(n - r, \mathbb{R})$ sobre o espaço das formas cúbicas de $(n - r)$ -variáveis. Assim, se as formas cúbicas definidas pelos germes f, g de rank r não são $GL(n - r, \mathbb{R})$ -equivalentes, então f e g não são $\mathcal{R}$ -equivalentes.

O espaço de cúbicas de $(n - r)$ -variáveis é de dimensão $\binom{n - r + 2}{3}$. Mas $\dim GL(n - r, \mathbb{R}) = (n - r)^2$; logo se $n - r \geq 3$, então $\binom{n - r + 2}{3} > (n - r)^2$, e portanto as órbitas de $GL(n - r, \mathbb{R})$ têm codimensão > 1 . Isto é qualquer vizinhança encontra um número infinito de órbitas.

O número $\mathcal{R}_e\text{-cod}(f, \mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}}\{\theta(f)/T\mathcal{R}_e f\}$ é um importante invariante no estudo das singularidades de funções e é chamado o *número de Milnor de f* e denotado por $\mu(f)$, ou simplesmente μ .

Teorema 1.6.1 (Arnold [10]) *As singularidades $\mathcal{R}$ -simples em m_n são:*

$A_k, k \geq 1$ cuja forma normal é $\pm x^{k+1}$ e $\mu = k$

$D_k, k \geq 4$ cuja forma normal é $xy^2 \pm x^{k-1}$ e $\mu = k$

E_6 cuja forma normal é $x^3 \pm y^4$ e $\mu = 6$

E_7 cuja forma normal é $x^3 \pm xy^3$ e $\mu = 7$

E_8 cuja forma normal é $x^3 + y^5$ e $\mu = 8$

Demonstração: Usando os desdobramentos versais das singularidades no teorema, podemos mostrar que estas singularidades são simples. Segue da Proposição 1.6.2 que só precisamos considerar os germes de corank ≤ 2 .

Se $\text{corank}(f) = 1$, então $f \simeq_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1}$ que é simples.

Se $\text{corank}(f) = 2$, então se f tem uma singularidade D_k , E_6 , E_7 ou E_8 , f é simples. Caso contrário, usando o Lema de Mather podemos mostrar facilmente que f não é simples.

Podemos agora desenhar o **diagrama de adjacências das singularidades simples**:

Observação 1.6.2 1. A relação entre as singularidades simples e as álgebras de Lie simples designadas pelos mesmos nomes ou grupos gerados pelas reflexões é estudada em [V.I. Arnold, Remarks on the stationary phase methods and the Coxeter numbers, Russian Maths. Surveys, 28:5, 19-48].

2. Um germe de função é $\mathcal{A}$ -simples se, somente se, é $\mathcal{K}$ -simples se, somente se, é $\mathcal{R}$ -simples.

1.6.5 Classificação dos germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$

A teoria de singularidades começou com os trabalhos de Whitney (1955) sobre a classificação de singularidades estáveis do plano no plano. Muitas listas de germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ seguiram, a mais longa até hoje é aquela apresentada por Rieger [9].

Daremos uma classificação dos germes de corank 1 e codimensão ≤ 2 usando a técnica da Transversal Completa.

Seja $F : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ um germe de uma aplicação suave. Se $\text{corank}(F) \leq 1$, então podemos mudar coordenadas e escrever F na forma

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Pretendemos classificar germes sob a ação do grupo $\mathcal{A}$ que tem $\mathcal{A}_e - \text{cod} \leq 2$. Seguimos o mesmo método da classificação de funções, a saber classificar pela indução sobre os espaços de jatos.

Denotamos por $a_{k,i}$ o coeficiente do monômio $x^k y^i$ na serie de Taylor de f .

Se $a_{1,1} \neq 0$ então F é um germe de um difeomorfismo, portanto $F \simeq_{\mathcal{A}} (x, y)$. Assim, suponhamos que $a_{1,1} = 0$.

Lema 1.6.3 As $J^2\mathcal{A}$ -órbitas singulares em $J^2(2, 2)$ são (x, y^2) , (x, xy) e $(x, 0)$.

Demonstração: $j^2 f = (x, a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{2,1}xy + a_{2,2}y^2)$. Podemos eliminar o termo $a_{1,0}$ usando a ação à esquerda. Se $a_{2,2} \neq 0$, então a mudança $y \mapsto y - \frac{a_{2,1}}{2a_{2,2}}x$ elimina o termo xy . Para eliminar o termo x^2 , usamos uma mudança de variáveis na meta da forma $(u, v) \mapsto (u, v - \alpha u^2)$. O germe final é da forma $(x, a_{2,2}y^2)$. Uma mudança escalar reduz ao germe (x, y^2) .

Se $a_{2,2} = 0$ e $a_{2,1} \neq 0$, então a mudança $Y = a_{2,0}x + a_{2,1}y$, reduz a (x, xy) .

Se $a_{2,2} = a_{2,1} = 0$, então $j^2 f \simeq (x, 0)$.

Proposição 1.6.3 O germe $F(x, y) = (x, y^2)$ é 2- $\mathcal{A}$ -determinado e é $\mathcal{A}_e$ -estável.

Classificação dos germes com o 2-jato igual a (x, xy)

Considere um k -jato cujo 2-jato é (x, xy) . Usando uma mudança de coordenadas da forma $Y = y - p(x, y)$ podemos eliminar todos os termos divisíveis por x na segunda componente exceto xy . Então este k -jato é equivalente a $(x, xy + \sum_{i=3}^k a_i y^i)$.

Proposição 1.6.4 Os germes de $\mathcal{A}_e - \text{cod} \leq 2$ com o 2-jato igual a (x, xy) são equivalentes a um dos seguintes germes

Cúspide	$(x, xy + y^3)$	$\mathcal{A}_e - \text{cod} = 0$
Rabo de andorinha	$(x, xy + y^4)$	1
Borboleta	$(x, xy + y^5 + y^7)$	2

Classificação dos germes com o 2-jato igual a $(x, 0)$

Lema 1.6.4 As $J^3\mathcal{A}$ -órbitas singulares em $J^3(2, 2)$ que têm o 2-jato equivalente a $(x, 0)$ são $(x, y^3 \pm x^2y)$, (x, y^3) , (x, xy^2) e $(x, 0)$.

Demonstração: Seja $J^3F = (x, a_{3,0}x^3 + a_{3,1}x^2y + a_{3,2}xy^2 + a_{3,3}y^3)$.

• Se $a_{3,3} \neq 0$, então usando a mudança $Y = y - \frac{a_{3,2}}{3a_{3,3}}x$ e eliminando o termo x^3 por uma mudança de coordenadas na meta, reduzimos j^3F a $(x, (3a_{3,1}a_{3,3} - a_{3,2}^2)/a_{3,3}x^2y + a_{3,3}y^3)$.

Se $3a_{3,1}a_{3,3} - a_{3,2}^2 \neq 0$, então uma mudança escalar reduz a $(x, y^3 \pm x^2y)$. Se não, $j^3F \simeq (x, y^3)$.

• Se $a_{3,3} = 0$ e $a_{3,2} \neq 0$, então usando o Lema de Mather podemos mostrar que $j^3F \simeq (x, a_{3,2}xy^2) \simeq (x, xy^2)$.

- Se $a_{3,3} = a_{3,2} = 0$ e $a_{3,1} \neq 0$, então usando o Lema de Mather $j^3 F \simeq (x, x^2 y)$.

- Se todos os coeficientes se anulam, então $j^3 F = (x, 0)$.

Proposição 1.6.5 Um $(k+1)$ -jato cujo k -jato ($k \geq 3$) é equivalente a (x, y^3) é equivalente a $(x, y^3 \pm x^k y)$ ou (x, y^3) . O germe $(x, y^3 \pm x^k y)$ ($k \geq 2$) é $(k+1)$ -determinado e tem $\mathcal{A}_e$ -cod igual a $(k-1)$.

Podemos mostrar que um k -jato cujo $(k-1)$ -jato ($k \geq 3$) é equivalente a (x, xy^2) é equivalente a $(x, xy^2 + \sum_{i=4}^k a_{i,i} y^i)$. Se $a_{4,4} \neq 0$, então o 4-jato é equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$.

Proposição 1.6.6 As órbitas finitamente determinadas da “raiz” $(x, xy^2 + y^4)$ são dadas por $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1})$, $k \geq 2$. Este germe é $(2k+1)$ -determinado e tem $\mathcal{A}_e$ -cod igual a $k-2$.

Observação 1.6.3 Os demais germes conduzem a k -jatos de codimensão > 2 .

Em conclusão temos

Proposição 1.6.7 Os germes de codimensão ≤ 2 de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ e seus desdobramentos $\mathcal{A}_e$ -versais são os seguintes:

<i>Nome</i>	<i>Forma Normal</i>	<i>Desdobramento Versal</i>	$\mathcal{A}_e - cod$
<i>Submersão</i>	(x, y)	(x, y)	0
<i>Dobra</i>	(x, y^2)	(x, y^2)	0
<i>Cúspide</i>	$(x, xy + y^3)$	$(x, xy + y^3)$	0
<i>Rabo de andorinha</i>	$(x, xy + y^4)$	$(x, xy + y^4 + uy^2)$	1
<i>Lábios/Bicos</i>	$(x, y^3 \pm x^2y)$	$(x, y^3 \pm x^2y + uy)$	1
<i>Borboleta</i>	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	$(x, xy + y^5 + y^7 + uy^2 + vy^3)$	2
<i>Ganso</i>	$(x, y^3 + x^3y)$	$(x, y^3 + x^3y + uy + vxy)$	2
<i>Gaivota</i>	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	$(x, xy^2 + y^4 + y^5 + uy + vy^3)$	2

Capítulo 2

Duais de hipersuperfícies genéricas em $\mathbb{R}^n$

A teoria de singularidades não somente reinterpreta resultados clássicos da geometria diferencial local das subvariedades em espaços euclidianos, como também permite a descoberta de novos resultados sobre esta geometria. Os novos resultados seguiram da sugestão de René Thom que consiste em estudar o contato das superfícies com conjuntos especiais tais como planos, linhas, esferas, círculos, etc.. Uma resenha dos resultados nesta área nos últimos 20 anos é feita por J.W.Bruce em [16].

Neste capítulo, estudamos os contatos genéricos de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com famílias de hiperplanos. A referência principal para este estudo é o artigo The duals of generic hypersurfaces de J. W. Bruce [13].

2.1 A família de funções altura

Seja $S^n = S$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e seja N uma variedade diferenciável. Dado um mergulho $f : N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, considere a família de funções

$$N \times S \xrightarrow{H_f} \mathbb{R} \times S \xrightarrow{\pi} S \text{ onde } H_f(x, u) = (f(x) \cdot u, u), \pi(c, u) = u$$

para $(x, u, c) \in N \times S \times \mathbb{R}$ e o “ponto” denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^{n+1}$.

A família H_f chamada “família de funções altura” associada a f , descreve os contatos de N com a família de hiperplanos ortogonais a $u \in S$. Quando não houver perigo de confusão, omitiremos o índice f . Para cada $u \in S$, indicaremos por H_u a aplicação

$$\begin{aligned} H_u : N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto H_u(x) = H(x, u) \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos críticos ΣH de H é o conjunto $\{(x, u); x \text{ é um ponto crítico de } H_u : N \rightarrow \mathbb{R}\}$, que é o fibrado normal unitário a N .

Quando N é compacta de dimensão n , N separa $\mathbb{R}^{n+1}$ e a projeção $\pi_1 : \Sigma H \rightarrow N$ é um recobrimento duplo, cada uma das folhas correspondendo a uma orientação para os vetores normais a N .

Indicaremos por Σ^+ o subconjunto de ΣH correspondente aos vetores normais a N , que apontam para fora.

Definição 2.1.1 O dual de N é o conjunto dos valores críticos de H , isto é, o conjunto $H(\Sigma^+)$.

A aplicação de Gauss está associada a H pela composição

$$G : N \xrightarrow{\pi_1^{-1}} \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R} \times S \xrightarrow{\pi} S$$

Como foi definida, a família de funções H depende da posição de N com respeito à origem. Contudo é fácil verificar que qualquer translação de N dá uma família equivalente de funções no seguinte sentido:

Duas famílias suaves de funções $F_i : N \times S \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ são equivalentes se existirem difeomorfismos h_1, h_2, h_3 comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} N \times S & \xrightarrow{F_1} & \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{\pi} & S \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\ N \times S & \xrightarrow{F_2} & \mathbb{R} \times S & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

onde $F_i(x, y) = (f_i(x, y), y)$ e π é a projeção canônica. Observe que a comutatividade do diagrama mostra que a segunda componente de h_2 depende só de x .

$$h_2(t, x) = ((h_2)_1, (h_2)_2)(t, x) = ((h_2)_1(t, x), h_3(x))$$

já que $\pi \circ h_2(t, x) = h_3 \circ \pi(t, x) = h_3(x)$. Segue assim que existe um difeomorfismo de $\mathbb{R} \times S$ levando o dual de N no dual transladado de N . A aplicação de Gauss, fica inalterada.

O relacionamento entre as singularidades da família H_f e as singularidades da aplicação normal de Gauss fica evidente no seguinte lema, provavelmente devido a Milnor:

Lema 2.1.1 O ponto $y \in N$ é um ponto regular de $G : N \rightarrow S$ com $G(y) = u$ se e somente se a função altura $H_u : N \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade A_1 em y .

Demonstração: É suficiente considerar o caso $u = (0, \dots, 1)$, isto é, H_u é a função altura x_{n+1} . Claramente podemos escrever N localmente como $x_{n+1} = h(x_1, \dots, x_n)$ para algum $h = H_u$. Então

$$G(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) = p \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial h}{\partial x_n}, 1 \right)$$

onde $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S$ é tal que $p(x) = x \cdot \|x\|^{-1}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Quando restringimos à qualquer hiperplano não passando pela origem p atua como um difeomorfismo local. Então u é um valor regular de G se e somente se $(-\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j})$ é não singular. Então h tem singularidade A_1 se o rank da hessiana é máximo $\Leftrightarrow$ a jacobiana de Gauss é máxima.

Podemos agora formular varias questões. Por exemplo, que tipo de funções altura H_u se deve esperar; o que o dual de N parece genericamente? Quais as correspondentes singularidades da aplicação de Gauss?

Com relação à primeira questão, a resposta é dada pelo teorema de genericidade de Looijenga.

Definição 2.1.2 Se $\chi = \cup X_j$ é um subconjunto estratificado do espaço de multijatos ${}_{\tau}J^k(N, \mathbb{R})$, dizemos que f é tangente transversa à χ se o jato ${}_{\tau}j_1^k H_f : N^{(r)} \times S \rightarrow {}_{\tau}J^k(N, \mathbb{R})$ é transversal à cada $X_j \subset \chi$, onde $N^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r) \in N^r \text{ tal que } x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j\}$.

Teorema 2.1.1 (Looijenga [19]) Dado $\chi = \cup X_j$ como acima, o conjunto de mergulhos $f \in C^\infty(N, \mathbb{R}^{n+1})$ com H_f tangente transversa à χ é residual.

Os subconjuntos estratificados $\chi = \cup X_j \subset {}_{\tau}J^k(N, \mathbb{R})$ de interesse são subconjuntos em ${}_{\tau}J^k(N, \mathbb{R})$ invariantes pela ação do grupo $\mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{R}^{(k)} \times \mathcal{L}^{(k)}$ dos k -jatos de difeomorfismos na fonte e na meta. A aplicação do teorema é feita da seguinte forma: Obtemos primeiramente uma classificação de todas as singularidades em $J^k(n, 1)$ de A_e -codimensão $\leq n = \dim(S)$ (dimensão do espaço de parâmetros).

Suponhamos que obtivemos um número finito de órbitas nesta classificação. Estratificamos, então, o espaço de jatos (e também o de multijatos) ${}_{\tau}J^k(N, \mathbb{R})$ obtendo $X_1, X_2, \dots, X_s$, e também o complementar destas órbitas. Este complementar

pode ser decomposto em um número finito de variedades de codimensão maior que $2n$ ($\dim(N) + \dim(S)$), $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_t$. Aplicando então o teorema 2.1.1, a esta estratificação, obtemos para cada X_j , o conjunto

$$R_{X_j} = \{f \in C^\infty(N, \mathbb{R}^{n+1}), f \text{ mergulho, } \tau_j^k H_f \text{ é transversal a } X_j\} \text{ é residual}$$

Logo o conjunto $R = \cap R_{X_i}$ é ainda residual.

Observe que para um mergulho $f \in R$, a aplicação k -jato associada a f evita os estratos X_i para $i > s$ e é transversal a X_i , para $i \leq s$. Uma tal imersão é chamada uma imersão genérica para a situação que se está considerando. Assim um mergulho genérico $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ dá origem a uma composta, $H_f : N \times S \rightarrow \mathbb{R}$, a qual apresentará somente aquelas singularidades que aparecem na classificação cuja $\mathcal{A}_e$ -codimensão seja no máximo $n = \dim S$. A transversalidade às órbitas nos assegura, então, que estas singularidades serão versalmente deformadas (ou desdobradas), ou seja, que a família H_f é localmente versal.

Pode acontecer que, feita a classificação, tenhamos chegado a um número infinito de órbitas, isto é, tenhamos encontrado algum germe modal. Neste caso, devemos reunir estas órbitas em estratos e considerar então, não a codimensão individual das órbitas, mas sim a codimensão do estrato associado. Também não poderemos mais esperar que a aplicação k -jato seja transversal às órbitas.

Quando $n \leq 5$, as únicas singularidades de codimensão $\leq n$ em $J^k(n, 1)$ são as singularidades simples, classificadas por Arnold. Com efeito, cada estrato X_j é uma A^k -órbita de codimensão ≤ 5 se e somente se X_j é simples. Mais ainda, se f é simples com número de Milnor μ , o subconjunto X_j correspondente em $J^k(N, \mathbb{R})$ terá codimensão $n + \mu - 1$, de modo que tais singularidades ocorrem quando $\mu - 1 \leq n$. Para as informações sobre o dual de N , é preciso investigar as singularidades genéricas que ocorrem quando $n \leq 5$, para germes (caso $r = 1$) e também para multigerms

(caso $r > 1$)

Para uma melhor discussão da geometria do mergulho genérico $f : N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, o seguinte teorema, que complementa o resultado obtido no lema 2.1.1, é essencial:

Teorema 2.1.2 (Looijenga [19], Wall [20]) *Seja $f : N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um mergulho de N para o qual a família H_f associada é localmente versal. Então, a aplicação normal de Gauss associada a este mergulho $G : N \rightarrow S$, é localmente estável.*

Nas próximas seções estudamos a caracterização geométrica para as singularidades da função altura quando $n = 1$ e 2 e as correspondentes singularidades do dual de N e da aplicação normal de Gauss.

2.2 Curvas planas

Seja C uma curva regular em $\mathbb{R}^2$. O contato de C com retas em $\mathbb{R}^2$ é dado pela família

$$H : C \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto \langle p, u \rangle$$

Para cada $u \in S^1$ fixo, H_u descreve o contato de C com a reta que passa por p e é ortogonal a u . Como consequência do teorema de Looijenga nesta dimensão, segue-se que para um mergulho genérico de C em $\mathbb{R}^2$, as singularidades da função H são as singularidades de germes e multigerms de codimensão ≤ 1 . Assim, podem ocorrer as seguintes singularidades A_1 (Morse), A_2 (dobra) e também as singularidades $A_1 A_1$ que correspondem a dois pontos críticos não degenerados de mesma altura.

Para interpretar geometricamente estes resultados, tomemos coordenadas de forma que numa vizinhança da origem a curva seja dada pelo gráfico e projetando o mesmo

na direção do vetor normal $(0, 1)$ obtemos: $t \rightarrow (t, f(t)) \xrightarrow{\pi} f(t)$, onde $f(0) = 0 = f'(0)$. Com as hipóteses anteriores teremos que a singularidade será estável (A_1) $\Leftrightarrow f''(x) \neq 0$.

E a singularidade será $A_2 \Leftrightarrow f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$

Vamos analisar o dual para os pontos parabólicos (ou de inflexão): Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$, e $H(x, u) = (ux - x^3, u)$. O dual $H(\Sigma^+)$ é portanto $\{(2x^3, 3x^2)\}$

Considerando os multijatos, as singularidades genéricas que podem ocorrer são do tipo A_1A_1 e o dual correspondente possui ponto duplo como singularidade. De

fato, escolhendo pontos críticos de Morse com a mesma altura: $f_1(t) = t^2, f_2(t) = t^2$. Os possíveis desdobramentos versais são: $(t^2 + u, t^2)$ ou $(t^2, t^2 + u)$. Considerando $H(t, u) = [(t^2 + u, u); (t^2, u)]$ obtemos o dual $H(\Sigma^+) = \{[(u, u); (0, u)]\}$

2.3 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Seja M uma superfície suave em $\mathbb{R}^3$. O contato de M com planos em $\mathbb{R}^3$ é dado pela família de funções altura

$$\begin{aligned} H : M \times S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, u) &\mapsto \langle p, u \rangle \end{aligned}$$

Para u fixo, a função H_u é a função altura na direção u . Em $p \in M$ esta função descreve o contato de M com o plano pelo ponto p cujo vetor normal é u .

Escolhamos coordenadas locais em torno de p_0 , tais que $p_0 = (0, 0)$ e a superfície M é dada como o gráfico da função $z = f(x, y)$. Suponhamos que as direções em S^2 são em torno de $u = (0, 0, 1)$. Estas direções podem ser parametrizadas por $(a, b, 1)$. Então a família (alterada) de funções altura é dada, localmente, por

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (a, b)) &\mapsto f(x, y) + ax + by \end{aligned}$$

com $H_0(x, y) = f(x, y)$. Queremos identificar geometricamente os tipos de singularidades da função f e verificar se a família H é um desdobramento versal destas

singularidades. Como H é uma deformação a 2 parâmetros de f , somente as singularidades de codimensão ≤ 2 de f podem ser desdobradas versalmente por H , ou seja, somente as singularidades A_1 , A_2 e A_3 .

As singularidades estáveis são do tipo A_1 : $A_1(1)$ (sela), $A_1(2)$ (Max/Min). O conjunto dos pontos para os quais o plano tangente encontra a superfície em uma singularidade $A_1(1)$ são os pontos hiperbólicos e o conjunto dos pontos para os quais o plano tangente encontra a superfície em uma singularidade $A_1(2)$ são os pontos elípticos. De fato, f é singular na origem se, e somente se, $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, ou seja, se, e somente, se a direção $(0,0,1)$ é a direção normal a M em p_0 . Fazendo a expansão de Taylor de f temos:

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + R(x, y), \text{ onde } \text{ordem}(R(x, y)) \geq 3$$

Com uma rotação de forma a colocar os eixos nas direções principais obtemos:

$$f(x, y) = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + R(x, y)$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais em $(0,0)$. Assim, se o ponto é hiperbólico, k_1 e k_2 possuem sinais opostos. Logo numa vizinhança da origem, $f(x, y)$ se comporta como uma "sela". Portanto uma pequena translação do plano tangente na direção da normal faz com que este encontre a superfície localmente em uma hipérbole. Se o ponto é elíptico, então k_1 e k_2 possuem o mesmo sinal e então $(0,0)$ é um ponto de mínimo ou máximo não degenerado da função altura. Neste caso, nossa singularidade é do tipo $A_1(2)$. Ambos os casos descrevem a geometria das singularidades estáveis, isto é, singularidade de Morse numa vizinhança da origem.

Existem três tipos de singularidades genéricas em um ponto parabólico, isto é, ponto para o qual $\kappa = 0$. Supondo $k_2 = 0$, $M(x, y)$ será dado por

$$M(x, y) = (x, y, \frac{k_1}{2}x^2 + R(x, y))$$

Fazendo mudanças de variáveis, podemos supor $f(x, y) = x^2 + cxy^2 + dy^3 + R(x, y)$, onde $\text{ordem}(R) \geq 3$.

Se $d \neq 0$, $f(x, y) = x^2 + y^3 + \tilde{R}(x, y)$. Como $x^2 + y^3$ é 3-determinado, podemos desprezar $\tilde{R}(x, y)$ na classificação da singularidade de f , que neste caso é do tipo A_2 . Observemos que o plano tangente encontra N em uma curva com cúspide. Pode-se verificar facilmente que a família $H(x, y, a, b) = x^2 + y^3 + ax + by$ é versal, isto é, $TA_e(f) + \mathbb{R}\{\frac{\partial H}{\partial a}, \frac{\partial H}{\partial b}\} = \theta_f$. Com cálculos simples utilizando a forma normal, podemos verificar que a condição $d \neq 0$ significa geometricamente que a única direção assintótica no ponto parabólico é transversal a este conjunto.

Se $d = 0$, tomamos $f(x, y) = x^2 + xy^2 \pm y^4$, que é uma singularidade de tipo A_3 . Observe que $x^2 + xy^2 \pm y^4$ é $\mathcal{R}$ -equivalente a $x^2 \pm y^4$ e sua $\mathcal{A}_e$ -codimensão é igual a 2. Além disso, a família $H(x, y) = x^2 + xy^2 \pm y^4 + ax + by$ é um desdobramento versal de $f(x, y) = x^2 + xy^2 \pm y^4$. Com efeito, temos:

$$\langle 2x + y^2, 2xy \pm 4y^3 \rangle + \mathbb{R}\{x, y\} = \langle x, y \rangle$$

Vamos calcular o dual destas singularidades.

Para a família $H(x, y) = (a, b, x^2 + y^3 + ax + by)$, temos que o conjunto $\Sigma(H) = \{(x, y, a, b); (x, y) \text{ é ponto crítico de } H_{a,b} : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0\}$ é definido pelas equações

$$2x + a = 0$$

$$3y^2 + b = 0$$

Portanto $H(\Sigma)$ pode ser descrito pela parametrização

$$(x, y) \mapsto (-2x, -3y^2, -x^2 - 2y^3)$$

A aplicação de Gauss em uma vizinhança de $(0, 0)$ é dada por

$$G : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$$

$$(x, y) \mapsto (-2x, -3y^2)$$

Observe que a singularidade de G em $(0, 0)$ é uma dobra.

Para a família $H(x, y) = (a, b, x^2 + xy^2 \pm y^4 + ax + by)$, o conjunto $\Sigma(H)$ é definido pelas equações:

$$2x + y^2 + a = 0$$

$$2xy \pm 4y^3 + b = 0$$

Portanto $H(\Sigma) = (-2x - y^2, -2xy \mp 4y^3, -x^2 - 2xy^2 \mp 3y^4)$

E a aplicação de Gauss G numa vizinhança de $(0,0)$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^2, 0 \\ (x, y) &\mapsto (-2x - y^2, -2xy \mp 4y^3)\end{aligned}$$

Note que $(0,0)$ é um ponto de cúspide.

Nas proposições seguintes resumimos os resultados discutidos acima:

Teorema 2.3.1 *Seja f um mergulho genérico de N em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja p um ponto singular de $H_u : N \rightarrow \mathbb{R}$. Então:*

- (a) u é direção normal a N em p
- (b) (i) p é de tipo $A_1 \iff K(p) \neq 0$
- (ii) p é de tipo $A_2 \iff p$ é um ponto parabólico; o conjunto dos pontos parabólicos Π é uma curva regular e a única direção assintótica em p é transversal ao conjunto dos pontos parabólicos Π .
- (iii) p é de tipo $A_3 \iff p$ é ponto parabólico; o conjunto dos pontos parabólicos Π é uma curva regular e a única direção assintótica em p é tangente a Π .

Proposição 2.3.1 *Nas hipóteses acima, seja u um vetor normal a N em p .*

- (i) p é de tipo A_1 para $H_u \iff p$ é ponto regular para a aplicação normal de Gauss.
- (ii) p é de tipo A_2 para $H_u \iff p$ é ponto de dobra para G
- (iii) p é de tipo A_3 para $H_u \iff p$ é um ponto de cúspide para a aplicação de Gauss.

Proposição 2.3.2 (a) *O dual de M é localmente difeomorfo a*

- *uma superfície suave nos pontos A_1*

- um edge cuspidal nos pontos A_2
 - um rabo de andorinha num ponto A_3
- (b) A imagem do conjunto parabólico na esfera de Gauss é localmente difeomorfa a
- uma curva suave nos pontos A_2
 - uma cúspide em pontos de tipo A_3

Uma análise análoga dos multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão ≤ 2 mostra que:

Proposição 2.3.3 *As singularidades genéricas são dois pontos singulares com a mesma imagem:*

(i) $A_1(1)A_1(1)$; (ii) $A_1(1)A_1(2)$; (iii) $A_1(2)A_1(2)$; (iv) $A_1(1)A_2$; (v) $A_1(2)A_2$;

ou três pontos singulares com a mesma imagem:

(vi) $A_1(1)A_1(1)A_1(1)$; (vii) $A_1(1)A_1(1)A_1(2)$; (viii) $A_1(1)A_1(2)A_1(2)$; (ix) $A_1(2)A_1(2)A_1(2)$.

Os correspondentes duais são cúspide $\times$ reta; ponto duplo $\times$ reta; pontos triplos e rabo de andorinha (correspondente as singularidades do tipo $A_3(1)$ e $A_3(2)$).

Observação 2.3.1 O livro "Cusps of the Gauss mappings" de T. Banchoff, T. Gaffney e C. McCrory [21], descreve várias caracterizações geométricas para as cúspides da aplicação de Gauss.

Destacamos a seguir uma destas caracterizações que será útil na parte final do trabalho:

Teorema: Para uma superfície regular genérica, as cúspides da aplicação de Gauss são precisamente os pontos parabólicos os quais são os limites dos pontos de inflexão das curvas assintóticas.

Capítulo 3

Duais de hipersuperfícies projetivas

Neste capítulo, demonstraremos teoremas de genericidade para os contatos de hipersuperfícies algébricas reais e complexas com famílias de hiperplanos de $\mathbb{P}^{n+1}$. A principal referência é o artigo “The Duals of Generic Hypersurfaces” de J. W. Bruce [13].

Sejam K o corpo dos números reais ou complexos, $\mathbb{P}^{n+1}$ o espaço projetivo real ou complexo de dimensão $n + 1$, e K^M o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d em $n + 2$ variáveis ($M = \binom{n+d+1}{d}$) e $\{F = 0\}$ uma hipersuperfície não singular em $\mathbb{P}^{n+1}$.

Queremos discutir a estrutura dos duais de hipersuperfícies projetivas “genéricas” $\{F = 0\}$, e como estamos trabalhando no espaço projetivo precisamos tomar cuidado pois as funções altura são objetos Euclidianos. Contudo, transversalidade é um fenômeno local, de modo que podemos dar uma definição local de transversalidade tangente. Para fazer isto, selecionaremos uma carta afim de $\mathbb{P}^{n+1}$ e é claro que nossa definição

de transversalidade tangente deve ser independente da carta e de qualquer outra escolha desejada. Como no capítulo anterior, consideraremos apenas subvariedades de singularidades naturais do espaço de jatos e multijatos resultantes das $\mathcal{R}^{(k)} \times \mathcal{L}^{(k)}$ subvariedades invariantes $X_j \subset \Sigma \subset {}_rJ^k(n, 1)$, e a definição de transversalidade tangente assegurará que para uma hipersuperfície não singular $V = \{F = 0\}$ transversa tangente a X_j , o conjunto $\{x \in V; \text{a função altura normal à } x \text{ é do tipo } X_j\}$ é uma subvariedade de V da dimensão correta.

Os principais resultados discutidos em [13] e apresentados neste capítulo são os teoremas abaixo, que são respectivamente, os teoremas de genericidade para germes e multigerms.

Teorema 3.2.1: *Seja $D \subset K^M$ o subconjunto das formas que definem hipersuperfícies singulares. Cada $F \in K^M - D$ possui uma vizinhança $U \subset K^M - D$ e no caso $K = \mathbb{C}$ (respectivamente $K = \mathbb{R}$) um subconjunto subanalítico (respectivamente real subanalítico) $B \subset U$ de codimensão real ≥ 1 , tal que para todo $G \in U - B$ a hipersuperfície $\{G = 0\}$ é tangente transversa à $X \subset J^k(n, 1)$ desde que $k \leq d$.*

Teorema 3.3.2: *Seja $K = \mathbb{C}$. Seja $\{F = 0\}$ uma hipersuperfície não singular com tangências em posição geral. Então dada uma estratificação natural $\chi \subset \Sigma \subset J^k(n, 1)$, existe uma vizinhança aberta U de F e uma família enumerável de subconjuntos reais subanalíticos $B_\alpha \subset U$, com $\text{cod}(B_\alpha) \geq 1$ tal que para $G \in U - \cup B_\alpha$ a hipersuperfície $\{G = 0\}$ é tangente multitransversa a χ desde que $k \leq \frac{d-1}{2}$.*

Nosso objetivo é apresentar as provas detalhadas destes teoremas e aplicar os resultados ao estudo dos duais de hipersuperfícies projetivas.

3.1 A família de funções altura: definições básicas e resultados preliminares

Seja $D \subset K^M$ o subconjunto algébrico das formas que definem hipersuperfícies singulares, ou seja, não possuem rank máximo, e seja $F \in K^M - D$.

Se $\Gamma_F = \{(x, L) \in \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{n+1}; x \in L \cap \{F = 0\}\}$ e $\Pi_F : \Gamma_F \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ é a projeção canônica, então o conjunto singular de Π_F , $\Sigma\Pi_F = \{(x, L); L \text{ é o plano tangente à } \{F = 0\} \text{ em } x\}$.

Definição 3.1.1 O dual de $\{F = 0\}$ é o conjunto dos valores críticos de Π_F , isto é $\Pi_F(\Sigma\Pi_F)$.

Proposição 3.1.1 O dual de Π_F é um conjunto algébrico.

Demonstração: A projeção $\Pi_F : \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ é fechada na topologia de Zariski quando $K = \mathbb{C}$ (ver [11]), logo, leva conjuntos fechados em conjuntos fechados e neste caso os duais são algébricos.

Seja $x \in V$ e escolha uma carta afim $K^{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ contendo x , seja $V_1 = V \cap K^{n+1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x = 0 \in K^{n+1}$.

A variedade irredutível afim V_1 será o conjunto de zeros de algum polinômio irredutível f e podemos escolher uma parametrização local de V_1 no ponto 0, $h : K^n \rightarrow V_1$ (de modo que $f \circ h(\alpha) \equiv 0$).

Se $(K^{n+1})^*$ é o dual de K^{n+1} , seja $df(0) \in (K^{n+1})^*$ a diferencial de f em 0.

Escolheremos então uma aplicação linear $L : K^n \rightarrow (K^{n+1})^*$ de modo que

$$\text{Im}L \oplus \text{Sp}\{df(0)\} = (K^{n+1})^*$$

Observe que $\text{Im}L$ é um subespaço vetorial de $(K^{n+1})^*$ de dimensão n

Definimos então um germe de uma família a n parâmetros de funções $H_a : K^n \rightarrow K$ por $H(f, h, L) : (K^n \times K^n, 0) \rightarrow (K, 0)$ onde $H(f, h, L)(\alpha, a) = (df(0) + L(a))(h(\alpha))$

Lema 3.1.1 (1) H é independente das escolhas da equação f , da parametrização h e da aplicação linear L , isto é, quaisquer duas escolhas dão famílias equivalentes.

(2) Seja $\Sigma H = \{(\alpha, a); \alpha \text{ é um ponto crítico de } H_a\}$. Então o conjunto dos pontos críticos de H é regular e a projeção $\Sigma H \rightarrow K^n, (\alpha, a) \rightarrow \alpha$ é um difeomorfismo local.

Demonstração: (1)(a) Como V_1 é uma variedade afim irredutível, qualquer outra equação definindo V_1 é da forma $\lambda f = 0$, para algum $\lambda \in K - \{0\}$. Usando as mudanças de coordenadas $\psi(\alpha, a) = (\alpha, \lambda a)$ e $\phi(c) = \lambda c$, temos que:

$$\phi \circ H(f, h, L)(\alpha, a) = \phi((df(0) + L(a))(h(\alpha))) = \lambda(df(0) + L(a))(h(\alpha))$$

Por outro lado, temos:

$$H(\lambda f, h, L) \circ \psi(\alpha, a) = H(\lambda f, h, L)(\alpha, \lambda a) = \lambda(df(0) + L(a))(h(\alpha))$$

Portanto, $\phi \circ H(f, h, L)(\alpha, a) = H(\lambda f, h, L) \circ \psi(\alpha, a)$.

(b) Quaisquer duas parametrizações h_1, h_2 de V_1 no ponto 0 diferem por um difeomorfismo $h : (K^n, 0) \rightarrow (K^n, 0)$ tal que $h_2 = h_1 \circ h$. Uma mudança de coordenadas $\psi(\alpha, a) = (h(\alpha), a)$ nos fornece:

$$\begin{aligned} (H(f, h_1, L) \circ \psi)(\alpha, a) &= H(f, h_1, L)(h(\alpha), a) = (df(0) + L(a))(h_1(h(\alpha))) = \\ &= (df(0) + L(a))(h_2(\alpha)) = H(f, h_2, L)(\alpha, a) \end{aligned}$$

(c) Suponha que temos duas aplicações lineares L_1, L_2 como acima. Podemos escrever $L_1(a) = \theta(a)df(0) + \varphi(a)$ para alguma aplicação linear $\theta : K^n \rightarrow K$ e $\varphi : K^n \rightarrow \text{Im}L_2$. Note que φ é um isomorfismo. De fato, suponha que φ não seja, então

existe $a \neq 0, a \in K^n$ tal que $\varphi(a) = 0$. Como $L_1(a) \neq 0$ (L_1 é isomorfismo) e $\theta(a) \neq 0$, segue que $L_1(a) = \theta(a)df(0)$, o que é absurdo devido à hipótese de que $\text{Im}L_2 \oplus \text{Sp}\{df(0)\} = (K^{n+1})^*$.

Através das seguintes mudanças de coordenadas: $\psi(\alpha, a) = \left(\alpha, L_2^{-1} \left(\frac{\varphi(a)}{1+\theta(a)}\right)\right)$, $\phi(c, a) = \left(\frac{c}{1+\theta(a)}\right)$ e usando o fato de que $L_1(a) = \theta(a)df(0) + \varphi(a)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\phi(H(f, h, L_1)(\alpha, a), a) &= \phi((df(0) + L_1(a))(h(\alpha)), a) = \\ \phi((df(0) + \theta(a)df(0) + \varphi(a))(h(\alpha)), a) &= \phi((1 + \theta(a))df(0) + \varphi(a))(h(\alpha)), a) = \\ (df(0) + (1 + \theta(a))^{-1}\varphi(a))(h(\alpha))\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(H(f, h, L_2) \circ \psi)(\alpha, a) &= H(f, h, L_2) \left(\alpha, L_2^{-1} \left(\frac{\varphi(a)}{1+\theta(a)}\right)\right) = \\ &= (df(0) + L_2 \left(L_2^{-1} \left(\frac{\varphi(a)}{1+\theta(a)}\right)\right))(h(\alpha)) = \\ &= (df(0) + (1 + \theta(a))^{-1}\varphi(a))(h(\alpha))\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi(H(f, h, L_1)(\alpha, a), a) = (H(f, h, L_2) \circ \psi)(\alpha, a)$$

(2) Temos $H(f, h, L)(\alpha, a) = (df(0) + L(a))(h(\alpha))$. Assim, $T_\alpha H(f, h, L) = T_\alpha(df(0) + L(a)) \circ T_\alpha h = (df(0) + L(a)) \circ T_\alpha h$. Como $h : K^n \rightarrow K^{n+1}$, temos $T_\alpha h : T_\alpha K^n \rightarrow T_{h(\alpha)}K^{n+1}$, mas $T_\alpha K^n \approx K^n$ e $T_{h(\alpha)}K^{n+1} \approx K^{n+1}$, assim obtemos o seguinte diagrama:

$$K^n \xrightarrow{T_\alpha h} K^{n+1} \xrightarrow{df(0)+L(a)} K$$

Vamos definir a aplicação induzida de $T_\alpha h$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(T_\alpha h)^* : (K^{n+1})^* &\rightarrow (K^n)^* \\ A &\mapsto (T_\alpha h)^*(A) = A \circ T_\alpha h\end{aligned}$$

Assim, o conjunto dos pontos críticos de $H(f, h, L)$ fica definido pelo conjunto

$$\Sigma = \{(\alpha, a); (T_\alpha h)^*(df(0) + L(a)) = 0\}$$

Escrevendo $\xi(\alpha, a) = (T_a h)^*(df(0) + L(a))$, vemos que $\frac{\partial \xi}{\partial a}(0, 0) = (T_0 h)^* L : K^n \rightarrow (K^n)^*$, que é invertível, então pelo Teorema da Função Implícita, podemos parametrizar Σ como $(\alpha, \beta(\alpha))$ para algum β , seguindo assim, o resultado.

Vamos deixar de lado os parênteses (f, h, L) e considerar a aplicação

$$\begin{aligned} j_1^k H_a : (K^n \times K^n, (0, 0)) &\rightarrow (J^k(K^n, K), j_1^k H(0, 0)) \\ (\alpha, a) &\mapsto j^k H_a(\alpha) \end{aligned}$$

Definição 3.1.2 Uma hipersuperfície projetiva $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ é tangente transversa à $\mathcal{R}^{(k)} \times \mathcal{L}^{(k)}$ -estratificação invariante $\chi = \cup X_j \subset \Sigma \subset J^k(n, 1)$ se para cada $x \in V$ pudermos escolher uma carta afim e uma vizinhança $A_1 \times A_2$ de $(0, 0) \in K^n \times K^n$ de modo que a aplicação $j_1^k H_a : A_1 \times A_2 \rightarrow J^k(K^n, K)$ é transversal à correspondente subvariedade $\tilde{X}_j \subset J^k(K^n, K)$.

Segue do lema 3.1.1 acima que se $j_1^k H_x : A_1 \times A_2 \rightarrow J^k(K^n, K)$ é transversal à X_j , então para um y suficientemente próximo de x , $j_1^k H_y$ também será transversal a X_j .

Proposição 3.1.2 Se X é uma subvariedade $\mathcal{R}^{(k)} \times \mathcal{L}^{(k)}$ -invariante de $\Sigma \subset J^k(n, 1)$ e $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ é tangente transversa à X , então o conjunto $V(X) = \{x \in V; \text{a função altura normal à } x \text{ é do tipo } X\}$ é regular e $\text{cod } V(X)$ em V é igual à $\text{cod } X$ em Σ . (Observe que esta proposição segue do lema 3.1.1 e do lema da transversalidade.)

Queremos mostrar que as hipersuperfícies $\{F = 0\}$ que não são tangente transversas a algum subconjunto invariante $X \subset \Sigma$ são escassas. Para obter um resultado forte, assumiremos que no caso real X é semi-algébrico e no caso complexo X é construtível.

Primeiramente vamos definir o que vem a ser um conjunto semialgébrico e um conjunto construtível:

Definição 3.1.3 ([3]) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico quando ele pode ser obtido através da combinação de um número finito das seguintes operações: interseção, união e diferença de conjuntos, a partir de conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial.

Definição 3.1.4 ([14]) Um subconjunto S de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{P}^n$ é construtível se ele pertence a uma álgebra Booleana gerada por conjuntos algébricos fechados, ou equivalentemente, se S é uma união disjunta $T_1 \cup \dots \cup T_k$, onde T_i é localmente fechado, isto é, $T_i = T'_i - T''_i$, onde T'_i é um conjunto algébrico fechado e $T''_i \subset T'_i$ um conjunto algébrico menor.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Chevalley [23]) Seja A um anel Noetheriano e B uma A -álgebra de tipo finito. Seja $\phi : A \rightarrow B$ o isomorfismo canônico; Seja $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ e $f = \phi^* : Y \rightarrow X$, então a imagem $f(Y')$ de um conjunto construtível Y' em Y é construtível em X .

Teorema 3.1.2 ([14]) Seja $S \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ um conjunto construtível. Então $\pi_2(S) \subset \mathbb{C}^m$ é um conjunto construtível. Em particular, se S é uma subvariedade de $\mathbb{C}^{n+m}$ e $\overline{\pi_2(S)}$ é o fecho de Zariski da imagem, então $\pi_2(S)$ contém um conjunto aberto Zariski em $\overline{\pi_2(S)}$.

As seguintes definições serão utilizadas:

Seja A um anel de funções de valores reais definidas em um conjunto E . Seja $S(A)$ os subconjuntos de E que são descritos por A , isto é, a menor família de

subconjuntos de E contendo todos $\{f(x) > 0\}, f \in \mathcal{A}$, que é estável com relação à interseção finita, união finita e complemento.

Equivalentemente, $S(\mathcal{A})$ representa os subconjuntos de E da forma $X = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^q X_{ij}$, onde cada X_{ij} é $\{f_{ij}(x) = 0\}$ ou $\{f_{ij}(x) > 0\}, f_{ij} \in \mathcal{A}$.

Seja M uma variedade real analítica. Se U é um subconjunto aberto de M , seja $\mathcal{O}(U)$ o anel das funções reais analíticas em U .

Definição 3.1.5 ([22]) Um conjunto X de M é semianalítico se para todo $a \in M$ existir uma vizinhança U tal que $X \cap U \in S(\mathcal{O}(U))$.

Definição 3.1.6 ([22]) Um subconjunto X de M é subanalítico se cada ponto de M admite uma vizinhança U tal que $X \cap U$ é uma projeção de um conjunto semianalítico relativamente compacto (isto é, existe uma variedade real analítica N e um subconjunto $A \subset M \times N$, onde A é semianalítico relativamente compacto tal que $X \cap U = \pi(A)$, onde $\pi : M \times N \rightarrow M$ é a projeção).

As propriedades básicas destes conjuntos são também discutidas em [22]

3.2 O teorema de genericidade local

Teorema 3.2.1 Cada $F \in K^M - D$ possui uma vizinhança $U \subset K^M - D$ e no caso $K = \mathbb{C}$ (respectivamente $K = \mathbb{R}$) um subconjunto subanalítico (respectivamente real subanalítico) $B \subset U$ de codimensão real ≥ 1 , tal que para todo $G \in U - B$ a hipersuperfície $\{G = 0\}$ é tangente transversa à $X \subset J^k(n, 1)$ desde que $k \leq d$.

Usando o fato que $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ é compacto, a demonstração do teorema segue da seguinte afirmação:

Afirmação 3.2.1 Para cada $F \in K^M - D$, e $x(0) \in \{F = 0\}$ podemos encontrar vizinhanças A (respectivamente U) de $x(0) \in \mathbb{P}^{n+1}$ (respectivamente $F \in K^M - D$) e um conjunto ruim $B \subset U$ como acima, de modo que para $G \in U - B$ e $y \in A \cap \{G = 0\}$ o germe de aplicação $j_1^k H_y$ (para $\{G = 0\}$) é transversal à $\tilde{X}$.

Para mostrarmos esta afirmação, usaremos o lema 1.4.1 de Thom. Mas neste caso, as famílias de deformações serão obtidas variando as hipersuperfícies $\{G = 0\}$.

Demonstração da afirmação 3.2.1: Sem perda de generalidade, vamos supor que $x(0) = (1, 0, \dots, 0)$, vamos também supor que o plano tangente a $F = 0$ em $x(0)$ é $x_1 = 0$ e por simplicidade, nesta seção, usaremos a notação $x(0) = (1, 0)$, sempre que não houver perigo de confusão. Em particular, estamos assumindo que $\frac{\partial F}{\partial x_j}(1, 0) = 0$, $1 < j \leq n$ e $\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \neq 0$. Usaremos a carta afim usual em $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{P}^{n+1}$.

Considere a aplicação $g : K^M \times K^n \rightarrow K$, $g(u, x) = F(1, x) + \sum_1^M u_i \varphi_i(1, x)$, onde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ é uma base monomial para o espaço vetorial das formas homogêneas em $n + 2$ variáveis de grau d . Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\varphi_1 = x_0^d$ (logo, $\varphi_1(1, 0) = 1$).

Desejamos parametrizar estas superfícies (pelo menos numa vizinhança de $0 \in K^{n+1}$) de modo que procuramos $h : K^M \times K^n \rightarrow K$ tal que $g(u, h(u, \alpha), \alpha) \equiv 0$. Mas $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}$, logo

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \neq 0,$$

Assim, pelo teorema da função implícita tal função analítica h existe e para valores pequenos de u , a hipersuperfície $g(u, x) = 0$, é dada por $(h(u, \alpha), \alpha)$.

Note que quando aplicamos o T.F.I., podemos considerar uma família de gráficos na

qual $h(u, 0) = 0$, ou seja, $h(u, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = h(0, \alpha) + u\tilde{h}(u, \alpha)$, onde $h(0, 0) = 0$ e $\tilde{h}(u, 0) = 0$. Segue ainda que $\frac{\partial h}{\partial u_i}(u, 0) = 0$.

Agora, temos que escolher a aplicação linear L :

$$L(a_1, \dots, a_n) = L(a) = \sum_1^n a_j x_{j+1}$$

Vemos que esta é uma escolha admissível para $g_u = 0$ próximo a $x(0)$ tomando-se u suficientemente pequeno. Com efeito,

$$dg_u(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(1, 0) \right)$$

No nosso caso, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(1, 0) = 0$, $1 < i \leq n$

$$dg_u(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0), \dots, \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(1, 0) \right)$$

Logo, L satisfaz a condição

$$Im L \oplus Sp\{dg_u(0)\} = (K^{n+1})^*$$

para u próximo a zero.

Assim, temos uma família de funções $H : K^M \times K^n \times K^n \rightarrow K$,

$$H(u, \alpha, a) = (dg_u(0) + L(a))(h(u, \alpha), \alpha) =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0), \dots, \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(1, 0) \right) (h(u, \alpha), \alpha) +$$

$$+ (\sum_1^n a_j x_{j+1}) (h(u, \alpha), \alpha) =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \right) (h(u, \alpha)) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=2}^n u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(1, 0) \alpha_j + \sum_1^n a_j x_{j+1} \alpha_{j+1}$$

o que nos leva à uma aplicação

$$\eta = j^k H_{(u,a)}(\alpha) : K^M \times K^n \times K^n \rightarrow J^k(K^n, K) = K^n \times K \times J^k(n, 1) \quad (*)$$

O principal resultado que precisamos mostrar é que η é uma submersão em $(0, 0, 0)$ se $k \leq d$.

Podemos tomar $k = d$. Como $g(u, h(u, \alpha), \alpha) \equiv 0$, derivando com relação a u_i , obtemos:

$$(i) \quad \frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \alpha), \alpha) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(u, h(u, \alpha), \alpha) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \alpha) \equiv 0$$

Temos que mostrar que a aplicação tangente

$$T_0\eta : K^M \times K^n \times K^n \rightarrow K^n \times K \times J^d(n, 1)$$

é sobrejetora. Aqui, estamos identificando um espaço vetorial com seu espaço tangente no ponto. Observe que $T_0\eta(0 \times K^n \times 0)$ contém $K^n \times 0 \times 0$

Se u_1 é a coordenada correspondente ao monômio x_0^d temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \frac{\partial h}{\partial u_1}(0, 0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(1, 0) h(0, 0) + \\ &+ \sum_{i=1}^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_1}(0, 0) + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}(1, 0) \alpha_j \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \frac{\partial H}{\partial u_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \frac{\partial h}{\partial u_1}(0, 0)$$

Pelo teorema da função implícita segue que

$$\frac{\partial h}{\partial u_1}(0, 0) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_1}(0, 0)}{\frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0)}, \text{ como } \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}(0, 0) = -\frac{\partial g}{\partial u_1}(0, 0) = -\varphi_1(1, 0) = -1 \neq 0$$

Assim, é suficiente mostrar que $\mathcal{L} = \{u \in K^M; \sum u_i \varphi_i \text{ não possui termos envolvendo } x_1 \text{ e nem o termo } x_0^d\}$ é levado sobrejetivamente por $T_0\eta$ em $J^d(n, 1)$. (Note que ambos os espaços $\mathcal{L}$ e $J^d(n, 1)$ possuem a mesma dimensão.)

A seguinte igualdade se verifica:

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0)h(u, \beta) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0)h(u, 0) \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} (H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0))$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_i} (H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0)) = \\ & = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)h(u, \beta) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) \right] + \\ & - \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u_i}(u, 0)}_{=0} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \underbrace{h(u, 0)}_{=0} + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u_i}(u, 0)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{\partial}{\partial u_i} (H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) \right) + \\ & + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)h(u, \beta) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0)h(u, \beta) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0)h(u, 0) \right) = \\ & \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial u_i}(u, 0)h(u, \beta)}_{=\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)} + \frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \\ & - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial u_i}(0, 0) \underbrace{h(u, 0)}_{=0} - \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) \underbrace{\frac{\partial h}{\partial u_i}(u, 0)}_{=0} = \\ & = \frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)h(u, \beta) \quad (b) \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)$, segue que (a) = (b) e consequentemente, (ii) está mostrado! Assim,

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) \right) +$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) h(u, \beta)$$

$$e \quad \frac{\partial}{\partial u_i}(H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0) \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \beta) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) h(u, \beta)$$

Lembrando que estamos trabalhando com o conjunto $\mathcal{L}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(u, 0) &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 0) + \underbrace{\sum_1^M u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(1, 0)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \end{aligned}$$

Por (i) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u_i}(u, \alpha) &= -\frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \alpha), \alpha) \left(\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_1}(u, h(u, \alpha), \alpha)} \right) = \\ &= -\frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \alpha), \alpha) \left(\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x)} \right) \end{aligned}$$

Assim, na diferença temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i}(H(u, \beta, 0) - H(u, 0, 0)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \left(-\frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \beta), \beta) \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x)} \right) = \\ &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)}{\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x)} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \beta), \beta) \right) \end{aligned}$$

Olhando para $\frac{\partial g}{\partial u_i}(u, h(u, \beta), \beta)$ e fazendo $u = 0$, obtemos um polinômio em β :

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}(0, h(0, \beta), \beta) = \varphi_i(\beta)$$

Uma vez que $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)}{\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, x)}$ é um elemento invertível, o $\text{rank}\{j^d(\frac{\partial g}{\partial u_i})\}_u$ coincide com o $\text{rank}\{\frac{\partial g}{\partial u_i}\}$, e segue-se então que $T_0\eta$ é sobre.

Assim, η é uma submersão em alguma vizinhança $U \times A_1 \times A_2$ de $0 \in K^M \times K^n \times$

K^n . Tomemos U, A_1, A_2 vizinhanças fechadas, reais subanalíticas (por exemplo, bolas fechadas), e U' uma vizinhança aberta de $U \times A_1 \times A_2$ na qual η é uma submersão. $\eta : U' \rightarrow J^d(K^n, K)$ é transversal à $\tilde{X}$, então $\eta^{-1}(\tilde{X}) \cap U'$ é uma subvariedade diferenciável de U' . Seja $\Pi : K^M \times K^n \times K^n \rightarrow K^M$ a projeção canônica e Σ o conjunto dos pontos singulares de $\Pi|_{\eta^{-1}(\tilde{X}) \cap U'}$.

Como η e Π são aplicações analíticas e para $K = \mathbb{R}$, $\tilde{X}$ é semialgêbrico (para $K = \mathbb{C}$, $\tilde{X}$ é construtível) Σ é semi-algêbrico.

$\Pi : U \times A_1 \times A_2 \rightarrow U$ é própria então $B = \Pi(\Sigma \cap (U \times A_1 \times A_2))$ é real subanalítico. Este conjunto tem, pelo teorema de Sard, medida nula e consequentemente possui codimensão ≥ 1 .

Segue do lema 1.4.1 que para $u \in U - B$ a aplicação $\eta_u : A_1 \times A_2 \rightarrow J^d(K^n, K)$ é transversal a $\tilde{X}$, então para todo $\alpha \in A_1$ o ponto $y = (h(u, \alpha), \alpha) \in \{g_u = 0\}$ satisfaz a condição de tangente transversa dada na definição acima. Podemos escolher a vizinhança A de $x(0) = (1, 0, \dots, 0)$, de forma que $(h, 1)^{-1}(A) \subset U \times A_1$.

Corolário 3.2.1 *Seja f k -determinada com número de Milnor μ (então $k \leq \mu + 1$). Se $d \geq k$ então para quase toda hipersuperfície $\{G = 0\} = V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de grau d , o conjunto $V(f) = \{x \in V; \text{a função altura normal à } x \text{ possui uma singularidade } A\text{-equivalente à } f\}$ é regular e tem dimensão $n + 1 - \mu$.*

Exemplo 3 (i) $n = 1$. Se $d \geq 3$, as únicas singularidades tangentes são as simples (A_1) e cúspide (A_2) . (Os casos $d = 1, 2$ são triviais)

(ii) $n = 2$. Se $d \geq 4$, as únicas singularidades tangentes são as simples (A_1) (dois tipos no caso real), cúspide (A_2) e tacnode (A_3) (dois tipos no caso real).

(Novamente os casos $d = 1, 2$ são fáceis. Vamos argumentar o caso $d = 3$: A_1, A_2 são 3-determinadas e a órbita do 2-jato $x^2 \in J^3(2, 1)$ tem codimensão 2. As outras órbitas possuem codimensão > 2 . Então para G tangente transversa às órbitas singulares de $J^3(2, 1)$ obtemos tangências (A_1) em um conjunto aberto, tangências cuspidais (A_2)

em uma curva e pontos isolados onde a função altura tem 2-jato x^2 . Mas como $\{G = 0\}$ é uma cúbica não singular, qualquer seção plana pode ter apenas singularidades do tipo A_1, A_2, A_3, D_4 , então os pontos isolados são do tipo A_3).

3.3 O teorema de genericidade multilocal

Embora o teorema 3.2.1 acima descreva os tipos de singularidades tangentes que ocorrem em hipersuperfícies genéricas de grau suficientemente alto e este teorema seja suficiente para a discussão dos respectivos duais, para o caso de multitransversalidade vamos precisar mostrar que os pontos de tangência genericamente estão em posição geral nos hiperplanos tangentes.

Definição 3.3.1 Dados K pontos $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^n$, dizemos que eles estão em posição geral se as retas correspondentes em $\mathbb{C}^{n+1}$ formam subespaços linearmente independentes, então em particular $k \leq n + 1$. Vamos denotar por $L(p_1, \dots, p_k)$ os $(k - 1)$ -planos em $\mathbb{P}^n$ gerados por $p_1, \dots, p_k$. O ponto $p_0 \in L(p_1, \dots, p_k)$ está em posição geral com relação a $p_1, \dots, p_k$ se p_0 não está em nenhum subespaço determinado por um subconjunto próprio de $\{p_1, \dots, p_k\}$.

Definição 3.3.2 Uma hipersuperfície $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ tem tangências em posição geral se dado um hiperplano L tangente em $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \{F = 0\}$ os pontos $p_1, \dots, p_k$ estão em posição geral L .

Proposição 3.3.1 O conjunto $X_1(k) = \{F; F = 0 \text{ possui } k \text{ singularidades em posição geral}\}$ é um conjunto construtível de codimensão k cujo fecho é irreduzível.

Demonstração: Se e_i denota o i -ésimo vértice de referência em $\mathbb{P}^{n+1}$, ou seja, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima posição, o subconjunto de $\mathbb{C}^M$ consistindo das hipersuperfícies com singularidades em $e_1, \dots, e_k$ é um espaço linear L , pois este subconjunto consiste de hipersuperfícies com singularidades nos mesmos pontos.

Se $\varphi : GL_{n+2} \times \mathbb{C}^M$ é a ação do grupo $GL_{n+2} = GL(n+2, \mathbb{C})$ (mudanças de coordenadas lineares na fonte), então $X_1 = \varphi(GL_{n+2} \times L)$ é construtível pelo teorema de Chevalley [3.1.1]. Se pensarmos em $GL_{n+2} \subset \mathbb{C}^{(n+2)^2}$ então existe uma extensão natural da ação de φ em $\mathbb{C}^{(n+2)^2}$, e é claro que

$$\overline{\varphi(GL_{n+2} \times L)} \subset \overline{\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)}$$

(onde a barra denota o fecho com respeito à topologia de Zariski).

Temos que $\overline{GL_{n+2}}$ e L são irredutíveis pois, $\overline{GL_{n+2}} = M_{n+2}$ o qual é irredutível e L é um espaço linear. Então $\overline{\varphi(GL_{n+2} \times L)}$ e $\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)$ são irredutíveis. Claramente $GL_{n+2} \times L \subset \overline{GL_{n+2}} \times L$ é aberto Zariski. Vamos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} GL_{n+2} \times L & \longrightarrow & GL_{n+2} \times \mathbb{C}^M \\ (g, F) & \xrightarrow{\eta} & (g, F \circ g) \\ \varphi \searrow & & \downarrow \pi_2 \\ & & F \circ g \end{array}$$

onde $\varphi = \pi_2 \circ \eta$.

Segue do teorema de Chevalley, que $\varphi(GL_{n+2} \times L)$ é construtível. Note que GL_{n+2} é um conjunto construtível pois, seu complementar $(GL_{n+2})^c$ é o conjunto das matrizes

de determinante nulo, que é portanto um conjunto algébrico fechado.

$$GL_{n+2} = \underbrace{M_{n+2}}_{\text{conj. alg. fechado}} - \underbrace{(GL_{n+2})^c}_{\text{conj. alg. fechado}}$$

Assim, segue que

$$\eta(GL_{n+2} \times L) = \underbrace{GL_{n+2}}_{\text{construtível}} \times \underbrace{\varphi(GL_{n+2} \times L)}_{\text{construtível}} \text{ é construtível}$$

Pelo teorema 3.1.2, $\varphi(GL_{n+2} \times L)$ contém um subconjunto aberto Zariski de $\overline{\varphi(GL_{n+2} \times L)}$, o que implica que $\dim(\varphi(GL_{n+2} \times L)) = \dim(\overline{\varphi(GL_{n+2} \times L)})$. Por outro lado, temos

$$\underbrace{GL_{n+2} \times L}_{\text{Z-aberto}} \subset \overline{GL_{n+2}} \times L$$

$\overline{GL_{n+2}} \times L \text{ é construtível}$

Assim pelo teorema 3.1.1, $\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)$ é construtível $\Rightarrow GL_{n+2} \times \varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)$ é construtível, pelo teorema 3.1.2, $\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)$ contém um aberto da topologia de Zariski em $\overline{\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)}$, portanto

$$\dim(\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)) = \dim(\overline{\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)})$$

Assim,

$$\overline{\varphi(GL_{n+2} \times L)} = \overline{\varphi(\overline{GL_{n+2}} \times L)}$$

o qual já vimos que é irredutível.

Para concluir a demonstração, precisaríamos ainda verificar que a codimensão de $X_1(k)$ é exatamente k . Vamos fazer com detalhes o caso $n+2=2$

Considere $X_1(k) = \{F \in \mathbb{C}^M; F=0 \text{ tem } k \text{ singularidades em posição geral}\}$, $k=1,2$

(i) $k = 1$. Mostremos que $\text{cod}(X_1(1)) = 1$. Seja $F(x_1, x_2) = a_0x_1^d + a_1x_1^{d-1}x_2 + \dots + a_dx_2^d$, onde $F \in X_1(1)$.

O fato de F possuir um ponto singular implica que F possui uma raiz de multiplicidade 2. Com efeito, todo polinômio homogêneo de grau d $F(x_1, x_2)$ em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ se decompõe em fatores lineares, isto é, $F(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^d (a_ix_1 + b_ix_2)$. Se os fatores são distintos então $x_1 = x_2 = 0$ é a única singularidade de $F = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_2 = 0$ não é solução de $F = 0$. Assim, podemos fazer a nossa análise para o polinômio

$$F(x_1, 1) = a_0x_1^d + a_1x_1^{d-1} + \dots + a_d$$

O fato de F ter uma raiz múltipla nos diz que $p(a_0, \dots, a_d) = 0$, onde p é a resultante entre $F(x_1, 1)$ e $\frac{\partial F}{\partial x_1}$. Assim, $X_1(1)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$X_1(1) = \{F \in \mathbb{C}^M; p(a_0, \dots, a_d) = 0\}$, onde p é a resultante entre F e $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, ambos desomogenizados com relação a x_2 .

Note que $p(a_0, \dots, a_d) = 0$ define uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^M$, cuja parte regular é determinada exatamente pelas equações:

$$\begin{cases} p = 0 \\ \text{grad}(p) \neq 0 \end{cases}$$

Portanto $\text{cod}(X_1(1)) = 1$.

(ii) $k = 2$. Mostremos que $\text{cod}(X_1(2)) = 2$.

Seja $F(x_1, x_2) = a_0x_1^d + a_1x_1^{d-1}x_2 + \dots + a_dx_2^d$, onde $F \in X_1(2)$. O fato de F possuir uma singularidade nos permite escrevê-la da seguinte maneira:

$$F(x_1, x_2) = \underbrace{(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^2}_{(*)} G_1(x_1, x_2)$$

$(*) =$ parte determinada por uma das singularidades

Agora, analisando $G_1(x_1, x_2)$ de forma análoga ao caso (i), obteremos uma equação $p_1 = 0$ a qual pode ser escrita em termos de $a_0, \dots, a_d$, onde p_1 é a resultante entre G_1 e $\frac{\partial G_1}{\partial x_1}$.

Repetindo o processo, colocando desta vez a parte relativa a outra singularidade em evidência, obteremos:

$$F(x_1, x_2) = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)^2 G_2(x_1, x_2)$$

Novamente, a partir de G_2 , obtemos uma equação $p_2 = 0$, onde p_2 é a resultante entre G_2 e $\frac{\partial G_2}{\partial x_1}$.

Assim, a melhor situação ocorre quando $p_1 = 0$ intercepta $p_2 = 0$ transversalmente, o que corresponde a termos duas singularidades em posição geral.

$$X_1(2) = \left\{ F \in \mathbb{C}^M; \left(\begin{array}{c} p_1 = 0 \\ \text{grad}(p_1) \neq 0 \end{array} \right) \cap \left(\begin{array}{c} p_2 = 0 \\ \text{grad}(p_2) \neq 0 \end{array} \right) \text{ ocorre transversalmente} \right\}$$

$$\text{Portanto } \text{cod}(X_1(2)) = 2.$$

Proposição 3.3.2 *Seja X_2 o subconjunto de X_1 , definido na proposição anterior, que consiste das hipersuperfícies que possuem uma singularidade adicional que está no $(k-1)$ -plano gerado pelas k anteriores, e está em posição geral a elas. Afirmamos que X_2 é construtível de codimensão $\geq k+1$*

Demonstração: A construtibilidade segue como na proposição anterior. Para mostrar que X_2 possui codimensão maior do que X_1 , afirmamos que é suficiente mostrar que $X_1 - X_2$ tem codimensão k . De fato, inicialmente vamos assumir que $\text{cod}(X_1 - X_2) = k$. A hipótese de construtibilidade de um conjunto X nos garante que $\dim(\overline{X} - X) < \dim(X) = \dim(\overline{X})$.

Agora, suponha que $\dim(X_1) = \dim(X_2)$, então $\dim(\overline{X_1}) = \dim(\overline{X_2})$, como X_1 é irredutível segue que $\overline{X_1} = \overline{X_2}$, e então, $\overline{X_1} - X_2 = \overline{X_2} - X_2$. Então

$$\begin{aligned} N - k &= \dim(X_1 - X_2) \leq \dim(\overline{X_1} - X_2) = \dim(\overline{X_2} - X_2) < \dim(\overline{X_2}) = \\ &= \dim(\overline{X_1}) = \dim(X_1) = N - k \end{aligned}$$

o que é absurdo. Então dado que $\text{cod}(X_1 - X_2) = k$ segue que $\text{cod}(X_2) > k$.

O fato de que $\text{cod}(X_1 - X_2) = k$ segue da proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.3 Dado qualquer $k, 1 \leq k \leq n+2$, existem hipersuperfícies $F \in \mathbb{C}^N$ com $\{F = 0\}$ tendo k singularidades em posição geral, e nenhuma outra singularidade.

Demonstração: Usaremos indução em n . Para $n = 0$ as formas

$$F = x_1^2 \prod_{j=1}^{d-2} (x_1 - jx_2) \quad (\text{respectivamente, } F = x_1^2 x_2^2 \prod_{j=1}^{d-4} (x_1 - jx_2))$$

possuem raízes repetidas em 1 (respectivamente 2) pontos.

Para $n = 1$ tomaremos $d = 3$ e consideremos

$$F = x_1 x_2 x_3 + x_1^3 + x_2^3 \quad (\text{respectivamente, } F = x_3(x_3^2 - x_1 x_2), F = x_1 x_2 x_3)$$

Estas F 's possuem respectivamente uma, duas e três singularidades em posição geral.

Agora, desejamos produzir hipersuperfícies $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ tendo apenas k singularidades em posição geral, $1 \leq k \leq n+2$. Por indução podemos encontrar $G_k(x_1, \dots, x_{n+1})$ com $\{G_k = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ tendo apenas k singularidades em posição geral, $1 \leq k \leq n+1$. A forma $G_k + x_{n+2}^d$ cuida dos casos $1 \leq k \leq n+1$. Para $k = n+2$ afirmamos que

$$G_{n+2} = G_{n+1} + x_{n+2}^{d-2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2 \right)$$

para $(a_1, \dots, a_{n+1})$ genéricos possui precisamente $n+2$ singularidades. Basta mostrarmos que

$$\left\{ G_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

possui apenas uma singularidade (na origem) para $(a_1, \dots, a_{n+1})$ genéricos. Deste modo, o ponto $(0, \dots, 0, 1)$ será uma singularidade de $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$, conseguindo assim, as $n + 2$ singularidades em posição geral desejadas.

Considere a aplicação

$$G : (\mathbb{C}^{n+1} - 0) \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, a) \mapsto G_{n+1}(x) + \sum a_i x_i^2 = G_a(x)$$

Note que G é uma aplicação regular, de fato, calculando o gradiente de G temos que:

$$\nabla G = \left(\frac{\partial G_{n+1}}{\partial x_1}(x) + 2x_1, \dots, \frac{\partial G_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(x) + 2x_{n+1}, x_1^2, \dots, \underbrace{x_i^2}_{\neq 0}, \dots, x_{n+1}^2 \right)$$

como estamos trabalhando em $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ temos que pelo menos um $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n + 1 \Rightarrow \nabla G \neq 0$. Portanto, G é regular. Pelo lema de Thom 1.4.1, temos que $G_a : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ é regular para quase todo $a \in \mathbb{C}^{n+1}$. Logo, $\{G_a = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} - 0$ não possui pontos singulares, como desejávamos.

Teorema 3.3.1 O conjunto das F cujas tangências não estão em posição geral formam um conjunto construtível de codimensão ≥ 1 .

Demonstração: Suponha que $\{F = 0\}$ tem um plano tangente T com $k + 1$ pontos tangentes $p_0, \dots, p_k$ com $p_1, \dots, p_k$ em posição geral e $p_0 \in L(p_1, \dots, p_k)$ em posição geral com relação à $p_1, \dots, p_k$. Começaremos considerando o caso especial $p_i = e_i$, $1 \leq$

$i \leq k, p_0 = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (k uns) e $T = \{x_{n+2} = 0\}$, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_j) = 0$ para qualquer $i = 1, \dots, n+1$ e $\frac{\partial F}{\partial x_{n+2}}(p_j) = 1$. Então podemos escrever

$$F = f(x_1, \dots, x_k) + \sum_{k+1}^{n+2} x_j f_j(x_1, \dots, x_{n+2})$$

Temos,

$$F = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k+1}^{n+2} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0$$

para $1 \leq i \leq k$ em $p_0, e_1, \dots, e_k$. Em particular, $f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ nestes pontos.

Portanto $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^M$ é o conjunto das formas de grau d nas variáveis $x_1, \dots, x_k$ e X_2 é o subconjunto de $\mathbb{C}^N$ discutido na proposição 3.3.2, assim, $f \in X_2$.

Além disso, $f_j = 0$ em $e_1, \dots, e_k$ para $k+1 \leq j \leq n+1$, pois continuando com as derivadas, $\frac{\partial F}{\partial x_j}(e_l) = f_j(e_l)$, como $\frac{\partial F}{\partial x_j}(e_l) = 0$, pois o plano $x_{n+2} = 0$ é tangente comum, isto é, $\text{grad}(F(e_l)) = (0, \dots, 0, 1)$, segue que $f_j(e_l) = 0$, $l = 1, \dots, k$; $j = k+1, \dots, n+1$.

Então, $f_j = \sum_{k+1}^{n+1} x_i f_{ij}$ e

$$F = f + \sum_{j=k+1}^{n+2} \sum_{i=k+1}^{n+1} x_j x_i f_{ij}$$

A coleção destas F 's é um produto $X_2 \times L$ para algum espaço linear L .

Mas estamos interessados na $\varphi(GL_{n+2}(X_2 \times L))$, mais ainda, queremos obter $\text{cod}(\varphi(GL_{n+2}(X_2 \times L)))$. O espaço tangente a $X_2 \times L$, satisfaz a:

$$\tau = T_{(f,l)}(X_2 \times L) \subset T_f X_2 + \text{Sp}\{x_i \psi; \text{grau}(\psi) = d-1, k+1 \leq i \leq n+2\}$$

Com relação a $\varphi(GL_{n+2}(X_2 \times L))$ temos

$$\begin{aligned} GL_{n+2} \times (X_2 \times L) &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^M \\ (I, F) &\longmapsto \varphi(I, F) \end{aligned}$$

Assim,

$$d\varphi_{(I,F)}(\tau) = \tau' = T_f(\varphi(GL_k \times X_2)) + Sp\{x_i\psi; \text{ grau}\psi = d-1, k+1 \leq i \leq n+2\} + Sp\{x_i \frac{\partial F}{\partial x_j}; 1 \leq i, j \leq n+2\}$$

Fazendo a interseção com $\mathbb{C}^N$ ($x_j = 0, k+1 \leq j \leq n+2$)

$$\mathbb{C}^N \cap \tau' \subset T_f(\varphi(GL_k \times X_2)) + Sp\{x_i f_{n+2}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), 1 \leq i \leq k\}$$

(pois $f_j = 0$ quando fazemos $x_j = 0$ para $k+1 \leq j \leq n+1$).

Vimos na proposição 3.3.2 que $\text{cod}(\varphi(GL_k \times X_2))$ em $\mathbb{C}^M$ é maior que k . Portanto $\text{cod}(\mathbb{C}^N \cap \tau')$ em $\mathbb{C}^N$ é ≥ 1 .

Teorema 3.3.2 *Seja $K = \mathbb{C}$. Seja $\{F = 0\}$ uma hipersuperfície não singular com tangências em posição geral. Então dada uma uma estratificação natural $\chi \subset \Sigma \subset J^k(n, 1)$, existe uma vizinhança aberta U de F e uma família enumerável de subconjuntos reais subanalíticos $B_\alpha \subset U$, com $\text{cod}(B_\alpha) \geq 1$ tal que para $G \in U - \cup B_\alpha$ a hipersuperfície $\{G = 0\}$ é tangente multitransversa a χ desde que $k \leq \frac{d-1}{2}$.*

Antes de fazermos a demonstração, vamos dar uma idéia da prova:

Como de costume temos uma família natural de perturbações fornecida pela própria família de hipersuperfícies. Suponha que temos pontos de tangência $x(1), \dots, x(r)$ com um plano tangente comum $x_0 = 0$. Como os $x(j)$ estão em posição geral, vamos supor que eles são os pontos e_{j+1} (1 na $(j+1)$ -ésima posição e zero nas demais).

No caso em $r = 1$, $x(1) = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Na demonstração deste caso (Teorema 3.2.1), vimos que apenas os monômios de grau d em $x_0, \dots, x_{n+1}$ que não envolvem x_0 ou o termo x_1^d eram suficientes para mostrar que a aplicação η em questão era uma submersão, ou seja, utilizamos apenas uma face do $(n+1)$ simplexo de monômios de grau d em $x_0, \dots, x_{n+1}$.

No caso geral, desde que $k \leq \frac{d-1}{2}$, nós podemos em e_j , obter todos os monômios em $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ de grau $\leq k$, sem usar qualquer monômio da face do simplexo duas vezes. De fato, seja d_i o grau do monômio x_i , então temos que

$$d_j + (d_1 + \dots + d_{j-1} + d_{j+1} + \dots + d_n) = d$$

queremos que $d_1 + \dots + d_{j-1} + d_{j+1} + \dots + d_n \leq k$. Assim,

$$d_j \geq d - k \geq d - \frac{d-1}{2} = \frac{d+1}{2}$$

Logo, quando desomogenizamos com relação a uma outra variável, obteremos $d_j < \frac{d+1}{2}$, deste modo não repetiremos nenhum monômio, como queríamos.

A principal diferença entre este caso e o caso $r = 1$ é que $V^{(r)}$ não é compacto, apenas separável. Então quando estamos trabalhando localmente em $V^{(r)}$ precisamos sempre usar alguma vizinhança fixa U de F . Isto significa (lembrando nossa demonstração do teorema 3.2.1) que dado $x \in V$, precisamos encontrar parametrizações h_u válidas para $F_u \in U$. Como estamos trabalhando com multijatos, também queremos garantir que estas parametrizações locais não se interceptam.

Demonstração do teorema 3.3.2

Afirmção: Podemos escolher $Q = (n+1)^2 + 1$ planos $L_1, \dots, L_Q$ de modo que dados quaisquer $n+1$ pontos $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}^{n+1}$ um dos planos L_j não contém nenhum ponto p_i .

De fato, escolha os planos L_j em posição geral (isto é, quaisquer $p \leq n+2$ planos fornecem p planos em posição geral em K^{n+2}). Note que cada p_i pertence a no máximo $n+1$ planos, como temos $n+1$ pontos, estes ocuparão no máximo $(n+1)^2$ planos, como Q é superior a este número o resultado segue.

Agora, dado um hiperplano $L \subset \mathbb{P}^{n+1}$ temos que $\mathbb{P}^{n+1} - L \equiv K^{n+1}$. Escolha uma bola fechada $B_j \subset \mathbb{P}^{n+1} - L$ suficientemente grande de modo que $\mathbb{P}^{n+1} - B_j$ não contém $n+1$ pontos. Seja $V = \{F = 0\}$, escolha L_j e B_j como acima mas com uma propriedade adicional de que a interseção de V com a interseção de quaisquer $n+1$ complementos $\mathbb{P}^{n+1} - B_j$ é vazia, ou seja,

$$V \cap (\cap_{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - B_j)) = \emptyset$$

$$V \cap (\mathbb{P}^{n+1} - \cup_{n+1} B_j) = \emptyset$$

$$\text{Logo, } V \subset \cup_{n+1} B_j$$

Portanto, (B_j) é uma cobertura de V .

Escolha uma vizinhança U_1 de F de modo que $G \in U_1$ tem as mesmas propriedades que F com relação as coberturas $B_1, \dots, B_Q$ acima descritas. Escolha uma carta $x_0, \dots, x_n$ em $\mathbb{P}^{n+1} - L_j$ e seja $B_j \cap V = V_j$ com equação $f_j = 0$; seja

$$N_j = \left\{ (x, v) \in V_j \times K^{n+1}; v = \lambda \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_0}(x), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \right) \right\}$$

e considere a aplicação $E : N_j \rightarrow K^{n+1}, E(x, v) = x + v$. Com a nossa notação E é localmente a aplicação

$$(\alpha, \lambda) \rightarrow h(\alpha) + \lambda \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_0}(h(\alpha)), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(h(\alpha)) \right)$$

e claramente E é um difeomorfismo local. Usando o fato que V_j é compacto escolha $\epsilon > 0$ tal que a restrição $E : N_j \cap (V_j \times B_\epsilon) \rightarrow K^{n+1}$ é um mergulho, onde B_ϵ é uma bola de raio ϵ centrada em $0 \in K^{n+1}$. Agora escolha $U_2 \subset U_1$ tal que para

qualquer $G \in U_2$ o conjunto $W_j = B_j \cap \{G = 0\}$ está contido na vizinhança $E(N_j \cap (V_j \times B_\epsilon))$. (Estritamente falando, devemos trabalhar com duas bolas grandes B_j, B'_j para evitarmos dificuldades na fronteira). Escolha um aberto $U \subset U_2$ com $\bar{U} \subset U_2$ compacto de modo que para $G \in \bar{U}$ e $y \in \{G = 0\} \cap B_j$ com $y = E(x, v)$ o vetor v não pertence a $T_y W_j$, isto é, G é suficientemente próximo de F para que os espaços tangentes também sejam próximos (Basta perceber que a vizinhança tubular de $G = 0$ está contida na vizinhança tubular de $F = 0$ e que perturbações suficientemente pequenas de F vão dar perturbações suficientemente pequenas de $(\frac{\partial f_j}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n})$). Segue para qualquer $x \in V_j$ (o qual supomos ter espaço tangente $x_0 = 0$) podemos escolher uma vizinhança A_1 de $0 \in K^n$ e uma família de parametrizações

$$h : \bar{U} \times A_1 \rightarrow K^{n+1}, \quad h(u, \alpha) = (h'(u, \alpha), \alpha)$$

com h_u parametrizando $F_u = 0$. Mais ainda, como $h(\bar{U} \times 0) \subset \{E(h(0), v)\}$ dados $x(1), x(2) \in V_j$ com parametrizações locais $h_j : \bar{U} \times A_1^j \rightarrow K^{n+1}, j = 1, 2$,

$$h_1(\bar{U} \times 0) \cap h_2(\bar{U} \times 0) = \emptyset$$

então se necessário, podemos diminuir os A_1^j e supor que $\cap_{j=1,2} h_j(U \times A_1^j) = \emptyset$.

Agora sejam $(x(1), \dots, x(r)) \in \{F = 0\}^{(r)}, r \leq n+1$ possuindo plano tangente comum e seja $L : K^n \rightarrow (K^{n+1})^*$ como de costume. Escolha um B_j com $x(i) \in B_j, 1 \leq i \leq r$, e parametrizações locais $h_j : \bar{U} \times A_1^j \rightarrow K^{n+1}$ com

$$h_j(U \times A_1^j) \cap h_i(U \times A_1^i) = \emptyset, \quad i \neq j$$

Considere a aplicação $\eta : A_1^1 \times \dots \times A_1^r \times U \times K^n \rightarrow \prod_{j=1}^r J^k(K^n, K)$

$$\begin{aligned} \eta(\alpha(1), \dots, \alpha(r), u, a) &= \prod_1^r (k \text{ jatos em } \alpha(i) \text{ dos} \\ \alpha &\rightarrow (df_j(x(j)) + L(a))(h_i(u, \alpha(i))) = \\ &= \prod_1^r (j_1^k H_i(u, \alpha(i), a)) \end{aligned}$$

Afirmamos que η é transversal a $\Delta^r(\chi)$. Se $j_1^k H_i(u, \alpha(i), a) \notin \Sigma$ para algum i , então

$$\eta(\alpha(1), \dots, \alpha(r), u, a) \notin \Delta^r(\chi)$$

Se o $j_1^k H_i(u, \alpha(i), a) \in \Sigma$, mas os $h_i(u, \alpha(i))$ não possuem um plano tangente comum, então

$$\eta(\alpha(1), \dots, \alpha(r), u, a) \notin \Delta^r(\chi)$$

Contudo, se eles possuem um plano tangente comum dado por

$$(df_i(\alpha(i)) + L(a))(h_i(u, \alpha(i))) = c$$

então os $h_i(u, \alpha(i))$ estão em posição geral neste plano. Segue da observação acima que η é uma submersão em $(\alpha(1), \dots, \alpha(r), u, a)$ e assim, transversal a $\Delta^r(\chi)$. Então existe um conjunto ruim real subanalítico $B \subset U$ de codimensão ≥ 1 tal que para $u \in U - B$ a aplicação

$$\eta_u : \prod A_1^j \times K^n \rightarrow \prod J^k(K^n, K)$$

é transversal a $\Delta^r(\chi)$. Agora, usamos o fato que $\{G = 0\}^{(r)}$ é separável para obter uma quantidade enumerável de conjuntos ruins B_α .

3.4 Considerações finais

Nesta última seção comentaremos alguns exemplos de cúspides da aplicação de Gauss projetiva. A principal referência é o artigo “Cusps of the projective Gauss map” [17].

Seja M uma superfície algébrica regular em $\mathbb{P}^3$ tal que a família H é localmente versal. Sabemos que neste caso, a aplicação de Gauss $G : M \rightarrow \mathbb{P}^3$ é estável. Ou seja, as únicas singularidades que ocorrem são dobras e cúspides. Mais ainda, ΣG é uma reunião disjunta de curvas, contendo pontos isolados que são os pontos de cúspide.

Em [17], Clint McCrory e Theodore Shifrin estudam as cúspides da aplicação

de Gauss de superfícies em $\mathbb{P}^3$. Os principais resultados obtidos são os seguintes teoremas:

Teorema 3.4.1 *Para uma superfície projetiva regular genérica mergulhada em $\mathbb{P}^3$, as cúspides da aplicação de Gauss são precisamente os pontos parabólicos os quais são os limites dos pontos de inflexão das curvas assintóticas.*

A demonstração deste teorema pode ser reduzida ao caso afim, caso em que o resultado é bastante conhecido. A demonstração apresentada pelos autores usa métodos da Geometria Diferencial projetiva.

Teorema 3.4.2 *A aplicação de Gauss de uma superfície projetiva genérica de grau d em $\mathbb{P}^3$ possui $2d(d-2)(11d-24)$ cúspides.*

A prova do teorema acima utiliza ferramentas da Teoria Enumerativa e escapa do alcance desta dissertação.

Nos exemplos de superfícies de grau $d = 2, 3$ é possível verificar diretamente o resultado do teorema 3.4.2:

Exemplo 4 Superfícies Quádricas

Se $M \subset \mathbb{P}^3$ é uma quádrlica genérica (ver apêndice)

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

A equação dos pontos parabólicos da aplicação de Gauss é dada por

$$\begin{cases} F = 0 \\ \text{Hess}(F) = 0 \end{cases}$$

Como F é homogênea de grau 2, $\text{Hess}(F) = \text{constante}$, e portanto, vemos que genericamente a aplicação de Gauss não possui singularidades.

Exemplo 5 Superfícies Cúbicas ([24], [25])

Seja M uma cúbica genérica em $\mathbb{P}^3$. Segue do teorema 3.4.2 que M tem 54 cúspides, mas é possível neste caso, argumentar diretamente.

Sabemos que existem 27 retas contidas em M . Evidentemente, cada reta é uma direção assintótica em M . Por outro lado, todos os pontos de uma tal reta $L \subset M$ são pontos de inflexão. Assim, aplicando o teorema 3.4.1, vemos que os pontos do conjunto parabólico Π nos quais uma reta L de M é tangente a Π correspondem aos pontos de cúspide da aplicação normal de Gauss G .

Não é difícil mostrar o seguinte resultado: "Cada reta de M intercepta a curva parabólica em dois pontos e é tangente à essa curva nestes pontos".

De fato: Seja $L \subset M$ e H um plano contendo L . Então $H \cap M$ é uma curva de grau 3 contendo L , logo $H \cap M = L \cup C$, onde C é uma cônica.

Observemos que C pode ser redutível, mas $L \cup C$ não pode conter uma linha dupla, pois neste caso M seria singular.

O número de interseções de L e C é 2 (Teorema de Bezout [24]), e evidentemente H é tangente a M em cada um destes pontos p_i , $i = 1, 2$ de $L \cap C$

Se L_i indica a reta tangente a C em p_i , os pares de retas (L, L_1) e (L, L_2) são as direções assintóticas de M em p_1 e p_2 , respectivamente. (Estas são as retas com maior contato com M em p_i). Quando estes dois pontos p_1 e p_2 coincidem, isto é, L é tangente a C , o ponto $p = p_1 = p_2$ é ponto parabólico de M e L é a única direção assintótica.

Agora definimos uma involução σ de L como segue. Dado $p \in L$, $T_p M \cap M$ é tangente a M em outro ponto q , e definimos $\sigma(p) = q$. A involução σ é algébrica, e pelo teorema do ponto fixo de Lefschetz, σ possui dois pontos fixos, os quais são os dois pontos parabólicos em L .

Exemplo 6 A cúbica de Fermat $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ é um exemplo de uma superfície projetiva que não é genérica. A curva parabólica Π é dada por $x_0 x_1 x_2 x_3 = 0$. Os pontos singulares da curva $\Pi = 0$ são obtidos a partir da solução dos determinantes dos menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} 3x_0^2 & 3x_1^2 & 3x_2^2 & 3x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 & x_0 x_2 x_3 & x_0 x_1 x_3 & x_0 x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Note que o ponto $(1, 0, 0, 0)$ é um ponto singular de $\Pi = 0$. Portanto, M não é uma superfície genérica.

Pode-se mostrar mais precisamente que Π é uma curva redutível com 18 pontos singulares (pontos duplos) e que se perturbarmos a cúbica de Fermat cada um dos 18 pontos duplos vão dar origem a 3 cúspides da aplicação de Gauss.

Apêndice A

Geometria Algébrica Projetiva

A.1 O Espaço Projetivo e as Variedades Projetivas

Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em pontos não nulos de K^{n+1} da seguinte forma: $(x'_0, \dots, x'_n) \sim (x_0, \dots, x_n)$ se existe um elemento não nulo $\lambda \in K$ tal que $(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$

Definição A.1.1 *Um espaço projetivo n -dimensional sobre um corpo K , denotado $\mathbb{P}^n(K)$, é o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ em $K^{n+1} - \{0\}$. Assim,*

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

Cada n -upla não nula $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ define um ponto $p \in \mathbb{P}^n(K)$, e dizemos que $(x_0, \dots, x_n)$ são as coordenadas homogêneas de p .

Existe uma correspondência 1-1 entre pontos de $\mathbb{P}^n(K)$ e retas passando pela origem em K^{n+1} . De fato, todas as coordenadas homogêneas de $p \in \mathbb{P}^n(K)$ são

dadas por $\lambda p, \lambda \in K - \{0\}$, e note que todos estes pontos pertencem a mesma reta passando pela origem em K^{n+1} . Como $p \neq 0$ temos a garantia de que esta reta existe. Por outro lado, dada qualquer reta L passando pela origem em K^{n+1} , um ponto $p \in L - \{0\}$ nos fornece as coordenadas homogêneas de um único ponto em $\mathbb{P}^n(K)$.

Proposição A.1.1 Para cada $i = 0, \dots, n$, seja $U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(K); x_i \neq 0\}$

- (i) Os pontos de cada U_i estão em correspondência 1-1 com os pontos de K^n .
- (ii) $\mathbb{P}^n(K) \cong K^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(K)$
- (iii) Temos $\mathbb{P}^n(K) = \cup_{i=0}^n U_i$

Demonstração:

(i) Para cada $i = 0, \dots, n$ considere $\phi_i : K^n \rightarrow U_i$ dada por

$$\phi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

e $\psi_i : U_i \rightarrow K^n$ dada por

$$\psi_i(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Primeiro devemos mostrar que ψ_i está bem definida. Sejam $(x_0, \dots, x_n)$ e $(y_0, \dots, y_n)$ coordenadas homogêneas de $p \in U_i$. Assim temos que $(y_0, \dots, y_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$. Então:

$$\begin{aligned} \psi_i(y_0, \dots, y_n) &= \psi_i(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \\ &= \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \psi_i(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \phi_i(\psi_i(x_0, \dots, x_n)) &= \phi_i \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \\ &= (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\psi_i(\phi_i(x_1, \dots, x_n)) = \psi_i(x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_i}{1}, \frac{x_{i+1}}{1}, \dots, \frac{x_n}{1}\right) = (x_1, \dots, x_n)$$

Portanto ψ e ϕ são aplicações inversas, o que estabelece a correspondência 1-1 desejada.

(ii) Pela definição de U_i , temos que

$$\mathbb{P}^n(K) = U_i \cup H_i, \text{ onde } H_i = \{p \in \mathbb{P}^n(K); i\text{-ésima coordenada é nula}\}$$

Os pontos em H_i estão em correspondência 1-1 com as classes de equivalência $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, onde duas n -uplas representam o mesmo ponto de H_i se uma for um escalar não nulo multiplicado pela outra. Em outras palavras, H_i é uma “cópia” de $\mathbb{P}^{n-1}(K)$, o espaço projetivo de dimensão menor.

$$\mathbb{P}^n(K) \cong K^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(K)$$

(iii) Como cada $U_i \subset \mathbb{P}^n(K)$, $0 \leq i \leq n$, pela própria definição de U_i , segue que $\cup_{i=0}^n U_i \subset \mathbb{P}^n(K)$. Falta apenas mostrar que $\mathbb{P}^n(K) \subset \cup_{i=0}^n U_i$. Seja $p \in \mathbb{P}^n(K)$, logo, $p = (x_0, \dots, x_n)$, onde $x_0, \dots, x_n$ são não simultaneamente nulos, assim, $p \in U_i$ para algum i , portanto $p \in \cup_{i=0}^n U_i$.

Nosso próximo objetivo é estender a definição de variedades no espaço afim para o espaço projetivo.

Definição A.1.2 Seja K um corpo e sejam $f_1, \dots, f_s$ polinômios em $K[x_1, \dots, x_n]$. Então o conjunto

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n; f_i(a_1, \dots, a_n) = 0; \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

é chamado de variedade afim definida por $f_1, \dots, f_s$.

Definição A.1.3 Um polinômio é homogêneo de grau d se todos os termos de f possuem grau d .

Exemplo 7 $f = x^2 + 2xy + y^2$ é homogêneo de grau 2.

Observe que se $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ é um polinômio homogêneo que se anula em alguma coordenada homogênea de um ponto $p \in \mathbb{P}^n(K)$, então f se anula em todas as coordenadas homogêneas de p .

Definição A.1.4 Seja K um corpo e sejam $f_1, \dots, f_s \in K[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos.

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n(K); f_i(a_0, \dots, a_n) = 0; \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

Chamamos $V(f_1, \dots, f_s)$ a variedade projetiva definida por $f_1, \dots, f_s$.

As variedades projetivas $V(f)$ definidas por uma única equação homogênea são conhecidas como hipersuperfícies. Estas são geralmente classificadas de acordo com o grau que definem suas equações. Assim se f possui grau 2 em $K[x_0, \dots, x_n]$, chamamos $V(f)$ de hipersuperfície quádrlica ou quádrlica.

Análogamente, hipersuperfícies definidas por equações de grau 3, 4 e 5 são conhecidas como cúbricas, quárticas e quánticas respectivamente.

Proposição A.1.2 Seja $V = V(f_1, \dots, f_s)$ uma variedade projetiva. Então $W = V \cap U_0$ pode ser identificado com a variedade afim $V(g_1, \dots, g_s) \subset K^n$, onde $g_i(y_1, \dots, y_n) = f_i(1, y_1, \dots, y_n)$ para cada $1 \leq i \leq s$.

Demonstração: Seja $p = (1, a_1, \dots, a_n) \in W = V \cap U_0$. Usando a aplicação $\psi_0 : U_0 \rightarrow K^n$ (da última proposição), temos que $\psi_0(p) = (a_1, \dots, a_n)$ e como para cada i , temos $g_i(a_1, \dots, a_n) = f_i(1, a_1, \dots, a_n) = 0$, segue que $\psi_0(p) \in V(g_1, \dots, g_s)$. Por outro lado, se $(a_1, \dots, a_n) \in V(g_1, \dots, g_s)$, então o ponto com coordenadas homogêneas $(1, a_1, \dots, a_n)$ pertence a U_0 e satisfaz as equações $f_i(1, a_1, \dots, a_n) = g_i(a_1, \dots, a_n) = 0$. Assim, $\phi(V(g_1, \dots, g_s)) \subset W$. Como as aplicações ϕ e ψ são inversas, os pontos de W estão em correspondência 1-1 com os pontos de $V(g_1, \dots, g_s)$.

Exemplo 8 Considere a variedade projetiva $V = V(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3x_0^2) \subset \mathbb{P}^3(R)$. Para interseccionar V com U_0 , nós desomogenizamos as equações que definem V , o que dará a variedade afim $V(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3) \subset R^3$.

Note que também podemos desomogenizar com relação à outras variáveis.

Uma idéia natural é reverter o processo de desomogenização descrito anteriormente e “homogenizar” as equações que definem a variedade afim. Por exemplo, considere a variedade afim $W = V(x_2 - x_1^3 + x_1^2)$ em $U_0 = R^2$. A equação que define W não é homogênea, de modo que não obtemos uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^2(R)$ diretamente desta equação. Mas podemos usar uma variável extra x_0 para tornar o polinômio $f = x_2 - x_1^3 + x_1^2$ homogêneo. Como f possui grau 3, modificamos f de modo que todos os seus termos possuam grau 3. Isto nos leva ao polinômio homogêneo $f^h = x_2x_0^2 - x_1^3 + x_1^2x_0$. Mais ainda, note que a desomogenização de f^h nos devolve o polinômio original f em x_1, x_2 .

Agora, note que dada qualquer variedade afim $W = V(g_1, \dots, g_s) \subset K^n$, podemos homogenizar as equações que definem W de modo a obter a variedade projetiva $V = V(g_1^h, \dots, g_s^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$. Mais ainda, $V \cap U_0 = W$. Assim, nossa variedade afim original W é a porção afim da variedade projetiva V .

Exemplo 9 Neste exemplo, escreveremos as coordenadas homogêneas dos pontos em $\mathbb{P}^2(K)$ como sendo da forma (x, y, z) . Numerando estas coordenadas como 0, 1, 2, vemos que U_2 é o conjunto dos pontos com coordenadas $(x, y, 1)$. Agora considere a variedade afim

$$W = V(g) = V(y - x^3 + x) \subset U_2$$

Sabemos que W é a porção afim $V \cap U_2$ da variedade projetiva $V = V(g^h) = V(yz^2 - x^3 + xz^2)$. A variedade V consiste de W junto com os pontos no infinito $V \cap V(z)$. A porção afim W é o gráfico de um polinômio cúbico, o qual é uma curva regular. Os pontos no infinito, os quais formam um complemento de W em V , são dados pelas soluções das equações:

$$\begin{cases} yz^2 - x^3 + xz^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que as soluções são $z = x = 0$ e como estamos trabalhando em $\mathbb{P}^2(K)$, tomamos o único ponto $p = (0, 1, 0)$ em $V \cap V(Z)$. Assim, $V = W \cup \{p\}$.

Vejamos o que acontece quando desomogenizamos a equação de V com relação a y e estudamos a intersecção $V \cap U_1$.

$$W' = V \cap U_1 = V(g^h(x, 1, y)) = V(z^2 - x^3 + xz^2)$$

Através da teoria de singularidades, podemos facilmente verificar que p , que corresponde ao ponto $(x, z) = (0, 0) \in W'$, é um ponto singular de W' .

Assim, mesmo começando com uma variedade afim suave, homogenizando as equações e tomando a correspondente variedade projetiva podemos obter um objeto geométrico mais complicado, pois, não estávamos “vendo toda a figura” na porção afim original da variedade. Em geral, dada uma variedade projetiva $V \subset \mathbb{P}^n(K)$, como $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$, precisamos considerar $V \cap U_i$ para diversos valores de $i = 0, \dots, n$ para vermos toda a figura.

A.2 Correspondência entre Ideais Projetivos e Vari- edades Projetivas

Definição A.2.1 (Ordem Lexicográfica); Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in Z_{\geq 0}^n$. Dizemos que $\alpha >_{lex} \beta$ se no vetor diferença $\alpha - \beta \in Z_{\geq 0}^n$, o valor não nulo mais à esquerda é positivo. Escrevemos $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se $\alpha >_{lex} \beta$

Definição A.2.2 (Ordem Graduada Lex). Sejam $\alpha, \beta \in Z_{\geq 0}^n$. Dizemos que $\alpha >_{grelex} \beta$ se $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ ou, $|\beta| = |\alpha|$ e $\alpha >_{lex} \beta$.

Definição A.2.3 Seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal não nulo.

- (i) O termo de liderança de um polinômio f ($LT(f)$), é o monômio de f que possui maior grau.
- (ii) Denotamos por $LT(I) = \{cx^\alpha; \text{ existe } f \in I \text{ com } LT(f) = cx^\alpha\}$
- (iii) Denotamos por $\langle LT(I) \rangle$ o ideal gerado pelos elementos de $LT(I)$

Definição A.2.4 Fixe uma ordem monomial. Um subconjunto finito $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ de um ideal I é uma base de Gröebner se

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

Definição A.2.5 Um ideal I em $K[x_1, \dots, x_n]$ é homogêneo se para cada $f \in I$, as componentes homogêneas f_i de f também estiverem em I .

Teorema A.2.1 *Seja $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ um ideal. Então são equivalentes:*

- (i) *I é um ideal homogêneo de $K[x_0, \dots, x_n]$*
- (ii) *$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, onde $f_1, \dots, f_s$ são polinômios homogêneos.*

Demonstração: (ii) $\Rightarrow$ (i)

Seja $g \in I$, então $g = \sum_{j=1}^s A_j f_j$. Agora suponha que expandimos cada A_j como soma de suas componentes homogêneas: $A_j = \sum_{k=1}^d A_{jk}$. Portanto,

$$g = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^d A_{jk} f_j$$

Podemos reagrupar os termos de g que possuem mesmo grau da seguinte forma:

$$g = \sum_{j+k=2}^{s+d} A_{jk} f_j, 1 \leq j \leq d, 1 \leq k \leq d$$

Note que as componentes homogêneas de g pertencem à I , logo I é um ideal homogêneo.

(i) $\Rightarrow$ (ii) *Seja I um ideal homogêneo. Pelo Teorema das Bases de Hilbert, temos $I = \langle F_1, \dots, F_s \rangle$ para alguns polinômios $F_j \in K[x_0, \dots, x_n]$ (não necessariamente homogêneos). Se escrevermos F_j como a soma de suas componentes homogêneas, digamos $F_j = \sum_i F_{ji}$, então cada $F_{ji} \in I$ pois I é homogêneo. Seja I' o ideal gerado pelos polinômios homogêneos F_{ji} . Então $I \subset I'$ pois cada F_j é uma soma dos geradores de I' . Por outro lado, $I' \subset I$ pois cada componente homogênea de F_j está em I . Isto mostra que $I = I'$ e segue que I possui uma base de polinômios homogêneos.*

Observação A.2.1 *Seja $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo e suponha que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, onde $f_1, \dots, f_s$ são homogêneos. Então é fácil ver que*

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$$

de modo que $V(I)$ é uma variedade projetiva.

Proposição A.2.1 *Seja $V \subset \mathbb{P}^n(K)$ uma variedade projetiva e seja*

$$I(V) = \{f \in K[x_0, \dots, x_n]; f(a_0, \dots, a_n) = 0, \forall (a_0, \dots, a_n) \in V\}$$

(Isto significa que f se anula para todas as coordenadas homogêneas de todos os pontos em V).

Se K é infinito, então $I(V)$ é um ideal homogêneo em $K[x_0, \dots, x_n]$

Demonstração: *Note que $I(V)$ é fechado com relação à soma e com relação ao produto por elementos de $K[x_0, \dots, x_n]$.*

Assim, $I(V)$ é um ideal em $K[x_0, \dots, x_n]$. Agora, pegue $f \in I(V)$ e fixe um ponto $p \in V$. Por hipótese, f se anula em todas as coordenadas homogêneas $(a_0, \dots, a_n)$ de p .

Como K é infinito, segue que cada componente homogênea f_i de f se anula em $(a_0, \dots, a_n)$.

De fato, podemos escrever $f = \sum f_i$ como a soma de suas componentes homogêneas f_i

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$$

Como $p \in V$ e $(a_0, \dots, a_n)$ é coordenada homogênea de p segue que

$$f(a_0, \dots, a_n) = f_0(a_0, \dots, a_n) + f_1(a_0, \dots, a_n) + \dots + f_n(a_0, \dots, a_n) = 0$$

$$f(2a_0, \dots, 2a_n) = f_0(a_0, \dots, a_n) + 2f_1(a_0, \dots, a_n) + \dots + 2^n f_n(a_0, \dots, a_n) = 0$$

$\vdots$

$$f((n+1)(a_0, \dots, a_n)) = f_0(a_0, \dots, a_n) + (n+1)f_1(a_0, \dots, a_n) + \dots + (n+1)^n f_n(a_0, \dots, a_n) = 0$$

Note que o nosso sistema é representado por

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^1 & \dots & 2^n \\ \vdots & & & \\ 1 & (n+1)^1 & \dots & (n+1)^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde} \Rightarrow \det \neq 0} \begin{pmatrix} f_0(a_0, \dots, a_n) \\ \vdots \\ f_n(a_0, \dots, a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo o sistema possui solução única. Como $(0, \dots, 0)$ é uma solução segue que

$$\begin{aligned} f_0(a_0, \dots, a_n) &= 0 \\ \vdots \\ f_n(a_0, \dots, a_n) &= 0 \end{aligned}$$

Isto mostra que $f_i \in I(V)$ e assim, $I(V)$ é homogêneo.

Teorema A: Seja K um corpo infinito. Então as aplicações

$$\text{Variedades Projetivas} \xrightarrow{I} \text{Ideais Homogêneos}$$

$$\text{Ideais Homogêneos} \xrightarrow{V} \text{Variedades Projetivas}$$

são inclusões reversas. Além do mais, para qualquer variedade projetiva, temos $V(I(V)) = V$ de modo que I é sempre 1-1.

Demonstração: Mostremos que I e V são inclusões reversas:

(i) Se $I_1 \subset I_2$ então $V(I_2) \subset V(I_1)$

Seja p um ponto pertencente à $V(I_2)$. Isto significa que para todo $f \in I_2$, f se anula em todas as coordenadas homogêneas $(a_0, \dots, a_n)$ de p . Como $I_1 \subset I_2 \Rightarrow \forall g \in I_1, g$ se anula em todas as coordenadas homogêneas $(a_0, \dots, a_n)$ de $p \Rightarrow p \in V(I_1)$.

(ii) $V_1 \subset V_2$ então $I(V_2) \subset I(V_1)$

Seja $f \in I(V_2)$, logo f se anula em todas as coordenadas homogêneas de todos os pontos de V_2 , como $V_1 \subset V_2$ temos que f se anula em todas as coordenadas homogêneas de todos os pontos de $V_1 \Rightarrow f \in I(V_1)$

Resta mostrar que $V(I(V)) = V$, quando $V = V(f_1, \dots, f_s)$ é uma variedade projetiva. Como todo $f \in I(V)$ se anula em todas as coordenadas homogêneas dos pontos de V , a inclusão $V \subset V(I(V))$ segue diretamente da definição de V .

Por outro lado, note que $f_1, \dots, f_s \in I(V)$ pela definição de I , e assim, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V)$. Como V é inclusão reversa, segue que $V(I(V)) \subset V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) = V$. Isto mostra a igualdade desejada $V(I(V)) = V$ e consequentemente, I é 1-1.

Definição A.2.6 O radical de um ideal é o ideal:

$$\sqrt{I} = \{f \in K[x_0, \dots, x_n]; f^n \in I \text{ para algum } n \geq 1\}$$

Proposição A.2.2 Seja $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo. Então $\sqrt{I}$ também é um ideal homogêneo.

Demonstração: Se $f \in \sqrt{I}$, então $f^m \in I$ para algum $m \geq 1$. Agora, decompondo f nas suas componentes homogêneas

$$f = \sum_i f_i = f_{\max} + \sum_{i < \max} f_i$$

onde $f_{\max}$ é a componente homogênea não nula de maior grau em f . Expandindo a potência f^m , é fácil ver que

$$(f^m)_{\max} = (f_{\max})^m$$

Como I é um ideal homogêneo, $(f^m)_{\max} \in I$. Assim, $(f_{\max})^m \in I$, o que mostra que $f_{\max} \in \sqrt{I}$. Se considerarmos $g = f - f_{\max} \in \sqrt{I}$ e repetirmos o argumento, teremos que $g_{\max} \in \sqrt{I}$. Mas $g_{\max}$ também é uma componente homogênea de f . Aplicando repetidamente este argumento, mostramos que todas as componentes homogêneas de f estão em $\sqrt{I}$. Como isto vale para todo $f \in \sqrt{I}$, temos que $\sqrt{I}$ é um ideal homogêneo.

Agora vamos recordar o Nullstellensatz Fraco e o Nullstellensatz Forte no caso afim:

Seja I um ideal contido em $K[x_1, \dots, x_n]$

- (O Nullstellensatz Fraco) $V_a(I) = \emptyset$ em $K^n \Leftrightarrow I = K[x_1, \dots, x_n]$
 - (O Nullstellensatz Forte) $\sqrt{I} = I_a(V_a(I))$ em $K[x_1, \dots, x_n]$
- (Para evitar confusão, usaremos I_a e V_a para denotar as versões afim de I e V).

É natural questionarmos se estes resultados se estendem à variedades projetivas e ideais homogêneos.

A resposta é não. Em particular o Nullstellensatz Fraco falha para certos ideais homogêneos. Por exemplo, considere o ideal $I = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset C[x_0, \dots, x_n]$.

Então $V(I) \subset \mathbb{P}^n(C)$ é definido pelas equações $x_0 = \dots = x_n = 0$. A única solução é $(0, \dots, 0)$, mas isto é impossível, pois não é permitido que todas as coordenadas homogêneas se anulem simultaneamente.

Segue que $V(I) = \emptyset$ e ainda, $I \neq C[x_0, \dots, x_n]$ ($1 + x_0 \notin I$).

Felizmente, é possível caracterizar os ideais para os quais isto acontece.

A seguinte versão do Nullstellensatz Fraco descreve todos os ideais homogêneos sem soluções projetivas.

Teorema A.2.2 (O Nullstellensatz Fraco Projetivo) Seja K algebricamente fechado e seja I um ideal homogêneo em $K[x_0, \dots, x_n]$. Então são equivalentes:

- (i) $V(I) \subset \mathbb{P}^n(K)$ é vazio
- (ii) Para cada $0 \leq i \leq n$, existe um inteiro $m_i \geq 0$ tal que $x_i^{m_i} \in I$.
- (iii) Existe algum $r \geq 1$ tal que $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$

Demonstração: (ii) $\Rightarrow$ (i)

Segue que $\langle x_0^{m_0}, \dots, x_n^{m_n} \rangle \subset I$, assim, aplicando V , temos que $V(I)$ está contido em $V(\langle x_0^{m_0}, \dots, x_n^{m_n} \rangle) = \emptyset$ pois estamos em $\mathbb{P}^n(K)$, logo $V(I) = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

É claro que se $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ então $x_i^r \in I \forall i$.

Para mostrar (i) $\Rightarrow$ (iii), trabalharemos com a variedade afim $C_v = V_a(I) \subset K^{n+1}$, como interpretamos pontos em $\mathbb{P}^n(K)$ como retas passando pela origem em K^{n+1} , então C_v é a união das retas determinadas por V . Em particular, C_v contém todas as coordenadas homogêneas dos pontos de V .

Então, observe que se $V = \emptyset \Rightarrow C_v \subset \{(0, \dots, 0)\}$ em K^{n+1} . Obtemos então

$$I_a(\{(0, \dots, 0)\}) \subset I_a(C_v) = I_a(V_a(I))$$

Mas $I_a(\{(0, \dots, 0)\}) = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.

Pela versão afim do Nullstellensatz forte, temos que

$$I_a(C_v) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I}$$

Assim, $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset \sqrt{I}$, logo existe $r \geq 1$ tal que $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$.

Teorema A.2.3 (O Nullstellensatz Forte Projetivo) Seja K um corpo algebricamente fechado e seja I um ideal homogêneo em $K[x_0, \dots, x_n]$. Se $V = V(I)$ é uma variedade projetiva não vazia em $\mathbb{P}^n(K)$, então temos

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Demonstração: Como na demonstração do teorema anterior, trabalharemos com a variedade projetiva $V = V(I) \subset \mathbb{P}^n(K)$ e seu cone afim $C_v = V_a(I) \subset K^{n+1}$. Primeiro afirmamos que

$$(*) \quad I_a(C_v) = I(V) \text{ quando } V \neq \emptyset$$

Para ver isto, suponha que $f \in I_a(C_v)$. Dado $p \in V$, qualquer coordenada homogênea de p pertence à C_v , de modo que f se anula em todas as coordenadas homogêneas de p . Por definição, isto implica $f \in I(V)$.

Por outro lado, tome $f \in I(V)$. Como todo ponto não nulo de C_v fornece coordenadas homogêneas para um ponto em V , segue que f se anula em $C_v - \{0\}$. Resta mostrar que f se anula na origem.

Como $I(V)$ é um ideal homogêneo, sabemos que as componentes homogêneas f_i de f também se anulam em V . Em particular, o termo constante de f , o qual é homogêneo na componente f_0 de grau zero, se anula em V . Como $V \neq 0$, isto força $f_0 = 0$, o que significa que f se anula na origem. Assim, $f \in I_a(C_v)$ e $(*)$ está mostrado.

Pela forma afim do Nullstellensatz Forte, sabemos que $\sqrt{I} = I_a(V_a(I))$. Então usando $(*)$, obtemos:

$$\sqrt{I} = I_a(V_a(I)) = I_a(C_v) = I(V) = I(V(I))$$

O que completa a demonstração do teorema.

Agora podemos completar a correspondência projetiva ideal-variedade.

Como no caso afim, temos uma correspondência 1-1 entre variedades projetivas e ideais radicais homogêneos com exceção dos casos $\sqrt{I} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ e $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle$.

Teorema A.2.4 *Seja K um corpo algebricamente fechado. Se restringirmos as correspondências do teorema A a variedades projetivas não vazias e ideais radicais homogêneos propriamente contidos em $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ então:*

Variedades Projetivas não vazias $\xrightarrow{I}$ Ideais Rad. Hom. própr. contidos em $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$

Ideais Rad. Hom. própr. contidos em $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \xrightarrow{V}$ Variedades Projetivas não vazias

Demonstração: Note que uma consequência do Nullstellensatz Fraco projetivo é que os únicos ideais radicais homogêneos I com $V(I) = \emptyset$ são $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ e $K[x_0, \dots, x_n]$. Uma segunda observação é que se I é um ideal homogêneo diferente de $K[x_0, \dots, x_n]$, então $I \subset \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.

Estas observações mostram que os ideais radicais homogêneos com $V(I) \neq \emptyset$ são precisamente aqueles que satisfazem I estritamente contido em $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$. E a relação segue do Nullstellensatz Forte projetivo.

Definição A.2.7 Seja I um ideal em $K[x_1, \dots, x_n]$. Definimos a **homogenização** de I como sendo o ideal

$$I^h = \langle f^h; f \in I \rangle \subset K[x_0, \dots, x_n]$$

onde f^h é a homogenização de f .

Proposição A.2.3 Para qualquer ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$, a homogenização I^h é um ideal homogêneo em $K[x_0, \dots, x_n]$

Demonstração: O ideal I^h possui um conjunto finito de geradores e pela própria definição de I^h , estes geradores são polinômios homogêneos. Logo I^h é um ideal homogêneo.

Exemplo 10 Considere $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$, o ideal da cúbica torcida afim. Se homogenizarmos f_1, f_2 então teremos o ideal $J = \langle x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3 \rangle$ em $R[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Afirmamos que $J \neq I^h$. Para mostrarmos isto, considere o polinômio $f_3 = f_2 - x_1f_1 = x_3 - x_1x_2 \in I \Rightarrow f_3^h = x_0x_3 - x_1x_2 \in I^h$. Agora note que f_3^h não pode ser obtido como combinação de f_1^h e f_2^h . Logo, $f_3^h \notin J \Rightarrow J \neq I^h$.

Precisamos então, de um método para calcular um conjunto finito de geradores para o ideal I .

Teorema B: Seja I um ideal em $K[x_1, \dots, x_n]$ e seja $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ uma base de Gröebner para I com respeito a uma ordenação monomial graduada em $K[x_1, \dots, x_n]$. Então $G^h = \{g_1^h, \dots, g_s^h\}$ é uma base para $I^h \subset K[x_0, \dots, x_n]$

Para ilustrar o teorema, considere novamente o ideal $I = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$ da cúbica torcida afim $W \subset R^3$.

Calculando uma base de Gröebner para I com respeito a ordem *grlex*, temos:

$$G = \{x_1^2 - x_2, x_1x_2 - x_3, x_1x_3 - x_2^2\}$$

Pelo teorema B, a homogenização destes polinômios gera I^h . Assim,

$$I^h = \langle x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2 \rangle$$

Discutiremos agora o significado geométrico da homogenização de um ideal.

Definição A.2.8 Dada uma variedade afim $W \subset K^n$, o fecho projetivo de W é a variedade projetiva

$$\overline{W} = V(I_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$$

onde $I_a(W)^h \subset K[x_0, \dots, x_n]$ é a homogenização do ideal $I_a(W) \subset K[x_1, \dots, x_n]$

Proposição A.2.4 Seja $W \subset K^n$ uma variedade afim e seja $\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(K)$ seu fecho projetivo. Então $\overline{W}$ é a menor variedade projetiva em $\mathbb{P}^n(K)$ contendo W .

Demonstração: Precisamos mostrar que se V é uma variedade projetiva contendo W , então $\overline{W} \subset V$.

Suponha que $V = V(F_1, \dots, F_s)$. Então os F_i 's se anulam em V , de modo que sua desomogenização $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$ se anula em W . Assim, $f_i \in I_a(W)$ e logo, $f_i^h \in I_a(W)^h$. Isto mostra que f_i^h se anula em $\overline{W} = V(I_a(W)^h)$.

Mas, $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ para algum inteiro e_i .

De fato, seja $F(x_0, \dots, x_n)$ um polinômio homogêneo de grau d e seja e a maior potência de x_0 dividindo F . Então $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio de grau $(d - e)$. Assim,

$$f^h = \sum_{j=0}^{d-e} F_j(1, x_1, \dots, x_n) x_0^{(d-e)-j}, \text{ onde } F_j \text{ é o termo de grau } j \text{ de } F$$

Portanto,

$$x_0^e f^h = \sum_{j=0}^{d-e} \underbrace{F_j(1, x_1, \dots, x_n) x_0^{d-j}}_{\text{pol. hom. de grau } d} = F(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Assim, F_i se anula em $\overline{W}$ e como isto é válido para todo i , segue que $\overline{W} \subset V$.

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 11 Considere a cúbica torcida afim $W \subset \mathbb{R}^3$

Sabemos que $I_a(W) = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle$

Usando o teorema B, temos que

$$I_a(W)^h = \langle x_1^2 - x_0 x_2, x_1 x_2 - x_0 x_3, x_1 x_3 - x_2^2 \rangle$$

Segue assim que a variedade

$$V = V(x_1^2 - x_0 x_2, x_1 x_2 - x_0 x_3, x_1 x_3 - x_2^2)$$

é o fecho projetivo da cúbica torcida afim W .

O principal obstáculo da definição do fecho projetivo é que precisamos conhecer $I_a(W)$. Seria muito mais interessante se pudéssemos calcular o fecho diretamente de

qualquer ideal definindo W . Quando K é algebricamente fechado, isto sempre pode ser feito.

Teorema C: Seja K um corpo algebricamente fechado, e seja $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então $V(I^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$ é o fecho projetivo de $V_a(I) \subset K^n$.

Demonstração: Seja $W = V_a(I) \subset K^n$ e $Z = V(I^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$. Fazendo $Z \cap U_0$, teremos a porção afim de $V(I^h)$, ou seja, fazendo $x_0 = 1$ obtemos $V_a(I) = W$. Assim, temos que Z é uma variedade projetiva contendo W .

Demonstraremos agora que Z é a menor variedade projetiva contendo W .

Seja $V = V(F_1, \dots, F_s)$ uma variedade projetiva qualquer contendo W . Temos que a desomogenização $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n) \in I_a(W)$. Como K é algebricamente fechado, o Nullstellensatz implica que $I_a(W) = \sqrt{I}$, de modo que $f_i^m \in I$ para algum inteiro m . Isto nos diz que $(f_i^m)^h \in I^h$ e, conseqüentemente, $(f_i^m)^h$ se anula em Z . Mas, $(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$, e segue que f_i^h se anula em Z . Então $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ também se anula em Z . Donde concluímos que $Z \subset W$. Isto mostra que Z é a menor variedade projetiva contendo W . Como o fecho projetivo $\overline{W}$ possui a mesma propriedade, segue que $Z = \overline{W}$.

Se combinarmos os teoremas B e C, teremos um algoritmo para calcular o fecho projetivo de uma variedade afim sobre um corpo algebricamente fechado:

Dado $W \subset K^n$ definida por $f_1 = \dots = f_s = 0$, calculamos uma base de Gröebner G de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ com respeito a uma ordem graduada, e então o fecho projetivo em $\mathbb{P}^n(K)$ é definido por $V(G^h)$

A.3 A Geometria das Hipersuperfícies Quádricas

Definição A.3.1 Uma variedade $V = V(f) \subset \mathbb{P}^n(K)$, onde f é um polinômio homogêneo não nulo de grau 2, é chamada hipersuperfície quádrlica, ou simplesmente quádrlica

Definição A.3.2 Dadas V e W duas variedades projetivas em $\mathbb{P}^n(K)$, dizemos que V é projetivamente equivalente a W se existir uma matriz invertível $A \in GL(n+1, K)$ tal que $V = A(W)$.

Observação A.3.1 Através dos resultados de álgebra linear, sabemos que as equações que definem uma quádrlica são equivalentes à uma equação da forma $c_0x_0^2 + \dots + c_nx_n^2$, e se K for algebricamente fechado, então a hipersuperfície quádrlica de rank $p+1$ é projetivamente equivalente à quádrlica definida pela equação $x_0^2 + \dots + x_p^2 = 0$.

Discutiremos a seguir algumas propriedades interessantes de quádrlicas não singulares em $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^3$ e $\mathbb{P}^5$.

Para o caso de $\mathbb{P}^2$ considere a aplicação $F : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definida por $F(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, onde (u, v) são coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^1$. Observe que os pontos de $F(\mathbb{P}^1)$ satisfazem a equação $x_0x_2 - x_1^2 = 0$, mais ainda, a aplicação $F : \mathbb{P}^1 \rightarrow V(x_0x_2 - x_1^2)$ é uma bijeção, de modo que esta cônica é uma cópia de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^2$. De fato, mostremos que F é sobre:

Seja $(w_0, w_1, w_2) \in V(x_0x_2 - x_1^2)$, logo $w_0w_2 - w_1^2 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $w_0 \neq 0$, então (w_0, w_1) é um ponto de $\mathbb{P}^1$. $F(w_0, w_1) = (w_0^2, w_0w_1, w_1^2) = (w_0^2, w_0w_1, w_0w_2) = (w_0, w_1, w_2)$.

F é injetora. De fato, basta mostrarmos que todo ponto $(u, v) \in \mathbb{P}^1$ tal que $F(u, v) = (w_0, w_1, w_2) \in V$, é equivalente ao ponto (w_0, w_1) , pois como vimos anteriormente $F(u, v) = (w_0, w_1, w_2) = F(w_0, w_1)$. Logo, $F(u, v) = (u^2, uv, v^2) = \lambda(w_0^2, w_0w_1, w_1^2)$. Como $w_0 \neq 0, \lambda \neq 0$ segue que $u^2 = \lambda w_0 \Rightarrow u \neq 0$. Assim, $uv = \lambda w_0 w_1 \Rightarrow u = \frac{\lambda w_0}{u} w_0$. Seja $\beta = \frac{\lambda w_0}{u}$. Análogamente, temos $uv = \lambda w_0 w_1 \Rightarrow v = \beta w_1$. Logo $(u, v) = \beta(w_0, w_1) \Rightarrow (u, v) \sim (w_0, w_1)$ em $\mathbb{P}^1$.

Quando vemos quádricas em $\mathbb{P}^3$ a situação é mais interessante. Considere a aplicação $F : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ que leva um ponto $(x_0, x_1, y_0, y_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no ponto $(x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1) \in \mathbb{P}^3$. Esta aplicação é chamada aplicação de Segre.

Proposição A.3.1 A aplicação de Segre $F : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ é um-a-um e sua imagem é a quádrica não singular $V(z_0z_3 - z_1z_2)$. (Note que esta é uma maneira de enxergar o toro em $\mathbb{P}^3$)

Demonstração: Usaremos (z_0, z_1, z_2, z_3) como coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^3$. Note que os pontos de $F(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ satisfazem a equação $z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ assim, $F(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset V(z_0z_3 - z_1z_2)$. Para mostrar a igualdade, suponha $(w_0, w_1, w_2, w_3) \in V(z_0z_3 - z_1z_2)$. Se $w_0 \neq 0$, então $(w_0, w_2, w_0, w_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $F(w_0, w_2, w_0, w_1) = (w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_1w_2)$. Contudo, como $w_0w_3 - w_1w_2 = 0$, segue que:

$$F(w_0, w_2, w_0, w_1) = (w_0^2, w_0w_1, w_0w_2, w_0w_3) = (w_0, w_1, w_2, w_3)$$

Quando uma coordenada diferente é não nula, a demonstração é similar e segue que $F(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = V(z_0z_3 - z_1z_2)$.

F é injetiva. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor $w_0 \neq 0$. Basta mostrarmos que todo ponto $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tal que $F(u_0, u_1, u_2, u_3) = (w_0, w_1, w_2, w_3) \in V$ é equivalente ao ponto $(w_0, w_2, w_0, w_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, pois como vimos na parte anterior da demonstração, $F(w_0, w_2, w_0, w_1) = (w_0, w_1, w_2, w_3) =$

$F(u_0, u_1, u_2, u_3)$. Assim, devemos mostrar que $(w_0, w_2, w_0, w_1) \sim (u_0, u_1, u_2, u_3)$ em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ou seja, $(w_0, w_2) \sim (u_0, u_1)$ e $(w_0, w_1) \sim (u_2, u_3)$ em $\mathbb{P}^1$. Aplicando F temos que $(u_0 u_2, u_0 u_3, u_1 u_2, u_1 u_3) = \lambda(w_0^2, w_0 w_1, w_0 w_2, w_1 w_2)$, $u_0 u_2 = \lambda w_0^2$, como $w_0 \neq 0 \Rightarrow u_0 \neq 0$ e $u_2 \neq 0 \Rightarrow u_0 = \frac{\lambda w_0}{u_2} w_0$, seja $\alpha = \frac{\lambda w_0}{u_2} \Rightarrow u_0 = \alpha w_0$. $u_1 u_2 = \lambda w_0 w_2 \Rightarrow u_1 = \frac{\lambda w_0}{u_2} w_2 \Rightarrow u_1 = \alpha w_2$. Assim, $(u_0, u_1) \sim (w_0, w_2)$. Por outro lado, temos $u_0 u_2 = \lambda w_0 w_0 \Rightarrow u_2 = \frac{\lambda w_0}{u_0} w_0$, seja $\beta = \frac{\lambda w_0}{u_0} \Rightarrow u_2 = \beta w_0$, $u_0 u_3 = \lambda w_0 w_1 \Rightarrow u_3 = \frac{\lambda w_0}{u_0} w_1 \Rightarrow u_3 = \beta w_1$. Logo $(u_2, u_3) \sim (w_0, w_1)$. Portanto F é injetora.

Vamos agora mostrar que o conjunto de retas projetivas em $\mathbb{P}^3$ se identifica com uma quádrlica em $\mathbb{P}^5$.

Dois pontos $p \neq q$ em $\mathbb{P}^3$ dão vetores l.i. $p = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $q = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ em K^4 . Agora considere a aplicação $F : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dada por

$$(\nabla) F(u, v) = (a_0 u - b_0 v, a_1 u - b_1 v, a_2 u - b_2 v, a_3 u - b_3 v)$$

Como p e q são linearmente independentes, $a_0 u - b_0 v, a_1 u - b_1 v, a_2 u - b_2 v, a_3 u - b_3 v$ não podem se anular simultaneamente, de modo que E está definida para todo $\mathbb{P}^1$. A imagem de F é uma variedade $L \subset \mathbb{P}^3$ definida por equações lineares que determinam um plano em K^4 , logo, uma reta em $\mathbb{P}^3$. Chamamos L de reta projetiva determinada por p e q .

Lembre que uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ é definida por uma única equação $A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 = 0$. Note que (A_0, A_1, A_2) pode ser observado como as "coordenadas homogêneas" de L e que o conjunto de todas as retas formam o espaço projetivo dual $\mathbb{P}^{2v}$.

Faz sentido questionarmos a mesma coisa para $\mathbb{P}^3$. Em particular, podemos encontrar "coordenadas homogêneas" para retas em $\mathbb{P}^3$?

Sabemos que uma reta $L \subset \mathbb{P}^3$ pode ser parametrizada projetivamente usando dois pontos $p = (a_0, a_1, a_2, a_3), q = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in K^4$. Então considere a matriz 2×4 cujas linhas são p e q

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Numerando as colunas de Ω usando $0, 1, 2, 3$, então o determinante formado usando as colunas i e j será denotado w_{ij} . Podemos assumir $0 \leq i < j \leq 3$ e obtemos os seis determinantes

$$(\nabla') = \begin{cases} w_{01} = a_0b_1 - a_1b_0 \\ w_{02} = a_0b_2 - a_2b_0 \\ w_{03} = a_0b_3 - a_3b_0 \\ w_{12} = a_1b_2 - a_2b_1 \\ w_{13} = a_1b_3 - a_3b_1 \\ w_{23} = a_2b_3 - a_3b_2 \end{cases}$$

Usaremos a notação

$$w(p, q) = (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) \in K^6$$

Os w_{ij} são chamados as coordenadas de Plücker da reta L . Note que toda reta possui pelo menos uma coordenada de Plücker não nula, devido ao fato de Ω possuir rank 2. As coordenadas de Plücker de uma reta L não dependem dos pontos p e q escolhidos. De fato, suponha que escolhemos um par diferente $q', p' \in L$. Em termos de coordenadas homogêneas, L pode ser descrito como o conjunto $L = \{up - vq; (u, v) \in \mathbb{P}^1\}$. Em particular, podemos escrever

$$p' = up - vq$$

$$q' = sp - tq$$

para pontos distintos $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1$. Note que

$$\begin{pmatrix} up - vq \\ sp - tq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ s & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Assim, $w(p, q) = w(up - vq, sp - tq) = (sv - ut)w(p, q)$ em K^6 , onde $sv - ut \neq 0$ pois (u, v) e (s, t) são pontos distintos de $\mathbb{P}^1$. Isto mostra que $w(p, q)$ nos dá um ponto em $\mathbb{P}^5$ o qual depende apenas de L . Assim, uma reta L determina um ponto bem definido $w(L) \in \mathbb{P}^5$.

Variando L sobre as retas em $\mathbb{P}^3$, as coordenadas de Plücker $w(L)$ irão descrever um certo subconjunto de $\mathbb{P}^5$. Eliminando os a_i 's e b_i 's de (∇') , é fácil ver que $w_{01}w_{23} - w_{02}w_{13} + w_{03}w_{12} = 0$ para todos os conjuntos de coordenadas de Plücker. Considerando z_{ij} , $0 \leq i < j \leq 3$, coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^5$, segue que os pontos de $w(L)$ pertencem à quádrlica não singular $V(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12}) \subset \mathbb{P}^5$.

Teorema A.3.1 A aplicação $\{\text{retas em } \mathbb{P}^3\} \rightarrow V(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$ definida por enviar uma reta $L \subset \mathbb{P}^3$ em suas coordenadas de Plücker $w(L) \in V(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12}) \in \mathbb{P}^5$ é uma bijeção.

Demonstração: A estratégia da demonstração é mostrar que uma reta $L \subset \mathbb{P}^3$ pode ser reconstruída pelas suas coordenadas de Plücker. Dados dois pontos $p = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $q = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ em L , é fácil checar que conseguimos os quatro vetores em K^4

$$\begin{aligned}
 b_0p - a_0q &= (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03}) \\
 b_1p - a_1q &= (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13}) \\
 b_2p - a_2q &= (w_{02}, w_{12}, 0, -w_{23}) \\
 b_3p - a_3q &= (w_{03}, w_{13}, w_{23}, 0)
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Sempre que estes vetores forem não nulos, ele nos fornecem pontos de L .

Para Mostrar que w é 1-1, suponha que temos retas L e L' tais que $w(L) = \lambda w(L')$ para algum λ não nulo. Em termos das coordenadas de Plücker, isto significa que $w_{ij} = \lambda w'_{ij}$ para todo $0 \leq i < j \leq 3$. Sabemos que alguma coordenada de Plücker

de L é não nula, e por mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^3$, podemos assumir $w_{01} \neq 0$. Então (*) implica que em $\mathbb{P}^3$, os pontos

$$\begin{aligned} P &= (0, -w'_{01}, -w'_{02}, -w'_{03}) = (0, -\lambda w_{01}, -\lambda w_{02}, -\lambda w_{03}) = (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03}) \\ Q &= (w'_{01}, 0, -w'_{12}, -w'_{13}) = (\lambda w_{01}, 0, -\lambda w_{12}, -\lambda w_{13}) = (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13}) \end{aligned}$$

estão ambos em L e L' . Como existe uma única reta passando por dois pontos em $\mathbb{P}^3$, segue que $L = L'$. Isto mostra que nossa aplicação é 1-1.

Para ver que w é sobre, escolha um ponto $(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{23}) \in V(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$. Por mudanças de coordenadas em $\mathbb{P}^3$, podemos assumir $w_{01} \neq 0$. Então os dois primeiros vetores de (*) são não nulos e assim, determinam uma reta $L \subset \mathbb{P}^3$. Vamos calcular as coordenadas de Plücker desta reta:

$$\begin{aligned} w'_{01} &= w_{01}^2 \\ w'_{02} &= w_{01}w_{02} \\ w'_{03} &= w_{01}w_{03} \\ w'_{12} &= w_{01}w_{12} \\ w'_{13} &= w_{01}w_{13} \\ w'_{23} &= w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12} \end{aligned}$$

Usando o fato de que $(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{23}) \in V(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$, temos que $-w_{03}w_{12} = w_{01}w_{23} - w_{02}w_{13}$ e usando isto em w'_{23} segue:

$$w'_{23} = w_{01}w_{23}$$

Assim, $w(L) = (w_{01}^2, w_{01}w_{02}, w_{01}w_{03}, w_{01}w_{12}, w_{01}w_{13}, w_{01}w_{23})$, como $w_{01} \neq 0$, temos $w(L) = (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23})$. Portanto w_{ij} são as coordenadas de Plücker de L , logo w é sobre.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Martinet. *Singularities of smooth functions and maps*, volume 58 of *London Math. Soc. Lectures Notes*. Cambridge University Press, 1982.
- [2] J. N. Damon. *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of A and K* . *Mem. Amer. Math. Soc.*, 50, 1984.
- [3] C. G. Gibson. *Singular points of smooth mappings*, volume 25 of *Pitman Research Notes in Mathematics*. 1979.
- [4] J. A. Montaldi. *On generic composite of maps*. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 23:81-85, 1991.
- [5] J. W. Bruce, N. Kirk, and A. A. du Plessis. *Complete transversals and the classifications of singularities*. *Nonlinearity*, 10, 1997.
- [6] J. N. Mather. *Stability of C^∞ -mappings IV: Classification of stable map-germs by $\mathbb{R}$ -algebras*. *Publ. Math. IHES*, 37:223-248, 1970.
- [7] C. T. C. Wall. *Classification and stability of singularities of smooth maps*. In D. T. Lê, K. Saito, and B. Tossier, editors, *Singularity Theory*, pages 920-952. World Scientific Publishing, 1995.
- [8] J.W. Bruce, A. A. du Plessis, and C. T. C. Wall. *Determinacy and unipotency*. *Invent. Math.*, 88:521-554, 1987.

- [9] J. H. Rieger. *Families of maps from the plane to the plane*. *J. London Math. soc*, 36:351-369, 1987.
- [10] J.W. Bruce and P.J. Giblin. *Curves And singularities*, Cambridge University Press .
- [11] Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in projective space*, Springer Verlag (Teorema 3, página 58).
- [12] Farid Tari. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*, Notas Didáticas do ICMC-USP.
- [13] J.W.Bruce. *The duals of generic hypersurfaces*, *Math. Scand.* 49(1981), 36-60.
- [14] D.Mumford. *Algebraic Geometry I: Complex projective varieties*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [15] David Cox, John Little and Donal O'Shea; *Ideals, varieties, and algorithms - An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*; Springer-Verlag. Springer-Verlag.
- [16] J.W.Bruce, *Generic geometry and duality*, *LMS Lecture Note Series 201*, Edited by J.P.Brasselet (1994) pp 29-60].
- [17] Clint McCrory and Theodore Shifrin, *Cusps of the projective Gauss map*, *J. Differential Geometry* 19(1984)257-276.
- [18] A. Nogueira. *Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade*. Tese de doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP-São Carlos, 1998.
- [19] E.J.N.Looijenga. *Structural stability of smooth families of C^∞ functions*, Thesis, University of Amsterdam, 1974.

- [20] C.T.C.Wall, *Geometric properties of generic differentiable manifolds*, in: *Geometry and Topology III*(Lecture Notes in Mathematics 597), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.
- [21] T.Banchoff, T.Gaffney, C.McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne.
- [22] E.Bierstone, D.Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, I.H.E.S - Publications Mathématiques, 67,1988.
- [23] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, W.A.Benjamin, Inc, New York 1970.
- [24] William Fulton, *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, Mathematics Lecture Note Series.
- [25] Israel Vainsencher, *Introdução às curvas algébricas planas*, Décimo segundo colóquio brasileiro de matemática, IMPA, 1979.