I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMAGG-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

SOLUÇÕES QUASE PERIÓDICAS
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

MARGARETE TERESA ZANON BAPTISTINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOLUÇÕES QUASE PERIÓDICAS
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

MARGARETE TERESA ZANON BAPTISTINI

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé

Dissertação apresentada ao Ins
tituto de Ciências Matemáticas
de São Carlos, da Universidade
de São Paulo, para a obtenção
do título de Mestre em Ciências
(Matemática).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS

1978

SOLUÇÕES QUASE PERIÓDICAS
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS

MARGARETE TERESA ZANON BAPTISTINI

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. ANTONIO FERNANDES IZÉ
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ao

Osmar,
Pedrinho
e meus pais

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Antonio Fernandes Izé pela orientação segura e confiança em nós depositada desde os momentos iniciais no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos.

Ao Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas, por sua dedicação à nossa formação profissional e entusiasmo demonstrado para com este trabalho.

Ao Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes, pela prontidão com que sempre nos atendeu e oportunas sugestões apresentadas.

Aos Professores e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos pelo incentivo dado aos nossos estudos.

Aos colegas da pós-graduação, meus agradecimentos pelo ambiente acolhedor, compreensão e grande apoio nos momentos difíceis.

A FAPESP, cujo auxílio através de bolsa de estudos possibilitou a realização dos cursos de Pós-Graduação.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

A B S T R A C T

The principal objective of this work is to give conditions such that one can guarantee the existence of almost periodic solution for a system of functional differential equations with time delay.

There are two ways of discussing this problem, both of them assuming the existence of bounded solutions for the almost periodic system. One is to assume a separation condition for the bounded solutions and, in this sense, we present generalizations of Favard's [3] and Amerio's [1] results for functional differential equations with time delay. The other one is to assume that the bounded solutions have some kind of stability property (uniform stability, uniform asymptotic stability, total stability, ...).

By using Liapunov's theory we analyse the problem above with stronger stability hypothesis.

We also discuss the relationship between stability properties and separability properties.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	3
1.1 - Introdução	3
1.2 - Funções Quase Periódicas e Assintoticamente Quase Periódicas	3
1.3 - Equações Diferenciais com Retardamento — Fatos Bá sicos	8
CAPÍTULO 2	13
2.1 - Introdução	13
2.2 - Propriedades de Estabilidade em um Sistema Quase Periódico	13
2.3 - Condições de Separação em um Sistema Quase Periódico	30
2.4 - Estabilidade e Condições de Separação	45
CAPÍTULO 3	63
3.1 - Introdução	63
3.2 - Existência de Soluções Quase Periódicas por Fun ções de Liapunov	63
REFERÊNCIAS	83

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar condições para que o sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde f é contínua e quase periódica, tenha solução quase periódica.

Ultimamente, muitos autores tem se dedicado a esse problema.

Sabe-se que a limitação de todas as soluções, ou mesmo a limitação uniforme final não asseguram a existência de solução quase periódica, como mostram Yoshizawa [18] e Fink [5]; assim condições adicionais são requeridas.

Há dois modos de discutir a existência de soluções quase periódicas assumindo limitação.

Um deles é supor uma condição de separação para as soluções limitadas. Favard [3] obteve a existência de soluções quase periódicas para um sistema linear de equações diferenciais ordinárias sob alguma espécie de condição de separação e Amerio [1] generalizou alguns resultados de Favard para sistemas não lineares; outras extensões foram feitas por Fink [5].

O outro é assumir que o sistema quase periódico tenha uma solução limitada com alguma propriedade de estabilidade. Nesse sentido, Hale [7] e Yoshizawa [15] e [19] discutiram a existência de soluções periódicas e quase periódicas usando funções de Liapunov. Miller, Seifert e Sell estudaram tal problema usando a teoria de sistemas dinâmicos e assim a unicidade de soluções era assumida. Por outro lado Coppel [2] e Yoshizawa [13] estudaram a mesma questão usando funções assintoticamente quase periódicas introduzidas por Fréchet [4] sem assumir a unicidade.

Tais teorias, no entanto, podem ser unificadas, visto que há relações entre condições de separação e propriedades de estabilidade — [17].

Neste trabalho procuramos fazer um estudo dos resultados principais acima mencionados.

No Capítulo 1 damos as definições e resultados básicos que serão usados no decorrer do trabalho.

Começamos realmente o nosso estudo no Capítulo 2. O Parágrafo 2.2 consta de propriedades de estabilidade que asseguram existência de solução quase periódica. Em 2.3 assumimos condições de separação e apresentamos os teoremas de Favard e de Amerio para equações diferenciais funcionais. No Parágrafo 2.4 discutimos relações entre as condições de separação e as propriedades de estabilidade.

No Capítulo 3 assumimos estabilidade num bastante geral considerado por Yoshizawa em [15] e obtemos soluções quase periódicas com algumas propriedades adicionais.

CAPÍTULO 1

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo reunimos algumas definições, resultados básicos e enunciamos os teoremas que serão utilizados no decorrer do trabalho.

É oportuno observar que as demonstrações dos resultados que aqui estão as quais indicamos [18] referem-se lá a funções definidas em $\mathbb{R} \times D$, onde D é um aberto do $\mathbb{R}^n$, no entanto, para o nosso caso são completamente análogas.

Usaremos as seguintes notações:

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ é a norma de x

Para $h > 0$, C é o espaço das funções contínuas definidas em $[-h, 0]$ com valores no $\mathbb{R}^n$ e para $\psi \in C$, $||\psi|| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)|$.

$C_\alpha = \{\psi \in C \mid ||\psi|| < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

$\bar{C}_\alpha = \{\psi \in C \mid ||\psi|| \leq \alpha\}$.

$C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ contínua}\}$ onde $D \subset \mathbb{R}^n$, aberto.

$I = [0, \infty)$.

1.2 - FUNÇÕES QUASE PERIÓDICAS E ASSINTOTICAMENTE QUASE PERIÓDICAS.

Definição 1.1 - Seja $f \in C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$. Dizemos que f é quase periódica em t uniformemente para $\psi \in D$ se $\forall \epsilon > 0$, $\forall S \subset D$ compacto, $\exists \ell = \ell(\epsilon, S) > 0$ tal que todo intervalo de comprimento ℓ contém um número τ satisfazendo:

$$|f(t+\tau, \psi) - f(t, \psi)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \psi \in S.$$

Definição 1.2 - Seja $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Dizemos que f é quase periódica se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \ell = \ell(\epsilon) > 0$ tal que todo intervalo de comprimento ℓ contém um número τ satisfazendo:

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

OBS.: denotaremos "quase periódica" por q.p. É claro que uma função periódica é q.p.

Teorema 1.1 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Então $f(t, \psi)$ é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times S$, onde S é um compacto qualquer em D .

Prova: [18], pág. 7, T.2.1.

Nota: Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência de números reais tal que $\{f(t+\tau_k, \psi)\}$ converge uniformemente em $\mathbb{R} \times S$, onde S é um compacto qualquer em D , diremos nesse caso que $\{f(t+\tau_k, \psi)\}$ converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$.

Teorema 1.2 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Então para qualquer sequência $\{h_k\}$ de números reais, existe uma subsequência $\{h_{k_j}\}$ e uma função contínua $g(t, \psi)$ tal que:

$$f(t+h_{k_j}, \psi) \rightarrow g(t, \psi) \text{ } c\text{-uniformemente em } \mathbb{R} \times D.$$

Além disso $g(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.

Prova: [18], pág. 10, T.2.2.

OBS.: para $g(t, \psi)$ no T.1.2, pode-se provar que existe uma sequência $\{\tau_k\}$, $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\{f(t+\tau_k, \psi)\}$ converge para $g(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$ - [10].

Teorema 1.3 - Seja $f(t, \psi) \in C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$. Suponhamos que para qualquer sequência $\{h_k\}$ de números reais existe uma subsequência $\{h_{k_j}\}$ tal que $\{f(t+h_{k_j}, \psi)\}$ converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$. Então $f(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.

Prova: [18], pág. 12, T.2.3.

Teorema 1.4 - Sejam $f(t, \psi)$ e $g(t, \psi)$ funções q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Então $c.f(t, \psi)$ (c é constante) e $f(t, \psi) + g(t, \psi)$ são q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.

Teorema 1.5 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.

Então para quaisquer sequências de números reais $\{\alpha'_k\}$ e $\{\beta'_k\}$, existem subsequências $\{\alpha_s\} = \{\alpha'_{k_s}\}$ e $\{\beta_s\} = \{\beta'_{k_s}\}$ para uma se quência comum de índices $\{k_s\}$ tais que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(t + \alpha_\ell + \beta_m, \psi) \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(t + \alpha_s + \beta_s, \psi)$$

onde cada um dos 3 limites existe c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$.

Prova: [18], pág. 15, T.2.6.

Nota: para simplificar as afirmações usaremos as notações:

$$\alpha = \{\alpha_k\}.$$

Para $\beta = \{\beta_k\}$, $\beta \subset \alpha$ significa que β é uma subsequência de α .

$$\alpha + \beta = \{\alpha_k + \beta_k\}$$

$$-\alpha = \{-\alpha_k\}.$$

Para $\alpha \subset \alpha'$ e $\beta \subset \beta'$, se $\alpha_n = \alpha'_{m_n}$ e $\beta_n = \beta'_{m_n}$ para uma se quência comum de índices $\{m_n\}$ dizemos que α, β são subse quências de α' e β' com subíndices comuns, $T_\alpha f = g$ significa que $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \alpha_k)$ quando o limite existe.

Usando estas notações, o T.1.5 pode ser enunciado como se gue: para quaisquer 2 sequências α' e β' , existem $\alpha \subset \alpha'$ e $\beta \subset \beta'$ com subíndices comuns tais que:

$$T_\beta T_\alpha f = T_{\alpha+\beta} f \quad c\text{-uniformemente em } \mathbb{R} \times D.$$

Teorema 1.6 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$ e $\varepsilon(t)$ q.p. tal que $\varepsilon_t \in S \forall t \in \mathbb{R}$ ($\varepsilon_t(\theta) = \varepsilon(t+\theta)$, $-h \leq \theta \leq h$), onde S é um compacto em D . Então $f(t, \varepsilon_t)$ é q.p.

Prova: [18], pág. 16, T.2.7.

Definição 1.3 - Seja $f \in C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Chamamos de *hull* de f e denotamos por $H(f)$ o seguinte subconjunto de $C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$:

$$H(f) = \{g(t, \psi) \mid g(t, \psi) = \lim_{K \rightarrow \infty} f(t + h_K, \psi) \text{ c-uniforme-}$$

mente em $\mathbb{R} \times D$, para alguma $\{h_K\}\}$.

Propriedades:

- i) $f \in H(f)$.
- ii) Se $g \in H(f)$ então g é q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.
- iii) Se $g \in H(f)$ então $H(g) = H(f)$.
- iv) $H(f)$ é compacto (no senso da convergência σ -uniforme).

OBS.: em vista da observação que segue o T.1.2, se $g \in H(f)$, $\exists \{\sigma_k\}$, $\sigma_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que $g(t, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \sigma_k, \psi)$ σ -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$.

Teorema 1.7 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.
Seja

$$\alpha(f, \lambda, \psi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \psi) e^{-i\lambda t} dt \in \mathbb{R}^n.$$

Então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha(f, \lambda, \psi)$ existe uniformemente para ψ em conjuntos compactos de D e é contínua em ψ .

Teorema 1.8 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.
Então $\Lambda = \mathbb{R} - \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \alpha(f, \lambda, \psi) \equiv 0 \text{ para } \psi \in D\}$ é enumerável.

Prova: [18], pág. 19.

Definição 1.4 - Os números reais $\lambda \in \Lambda$ são chamados expoentes e os valores $\alpha(f, \lambda, \psi) \in \mathbb{R}^n$ com $\lambda \in \Lambda$ são os coeficientes de Fourier de $f(t, \psi)$. Em outras palavras a série de Fourier associada a $f(t, \psi)$ é $\sum_n \alpha(f, \lambda_n, \psi) e^{i\lambda_n t}$ com $\lambda_n \in \Lambda$.

Definição 1.5 - Seja $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$.
Chama-se módulo de f e denota-se por $\text{mod}f$ o menor grupo aditivo de números reais que contém os expoentes de f . Em outras palavras:

$$\text{mod}f = \left\{ \sum_{j=1}^N n_j \lambda_j \mid n_j \in \mathbb{Z}, \lambda_j \in \Lambda, j = 1, \dots, N, N \geq 1 \text{ inteiro} \right\}$$

OBS.: Se $f(t, \psi)$ for periódica em t de período 2ω ($\omega > 0$), pode-se provar que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \psi) e^{-i\lambda t} dt \neq 0 \iff \lambda = \omega_k$ com

$$\omega_k = \frac{k\pi}{w}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Assim, os expoentes de Fourier da série definida acima são:

$$\{\omega_k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \text{ e } a(f, \omega_k, \psi) = \frac{1}{2w} \int_0^{2w} f(t, \psi) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Segue então que a série de Fourier definida acima coincide com a usual. Além disso:

$$\text{mod} f = \left\{ \sum_{k=1}^N n_k \omega_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_k = \frac{k\pi}{w} \right\} = \{\omega_k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Lema 1.1 - Sejam $f(t, \psi)$ e $g(t, \psi)$ funções quase periódicas e uniformemente para $\psi \in D$; $\text{mod} g \subset \text{mod} f \iff$ para qualquer sequência $\{\tau_k\}$ de números reais para a qual $f(t+\tau_k, \psi) \rightarrow f(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$ quando $k \rightarrow \infty$, existe uma subsequência $\{\tau_{k_j}\}$ tal que $g(t+\tau_{k_j}, \psi) \rightarrow g(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$ quando $j \rightarrow \infty$.

Teorema 1.9 - Sejam $f(t, \psi)$ q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$ e $g(t, \psi) \in C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^n)$. Se para qualquer sequência $\{\tau_k\}$ de números reais tendo limite (incluindo ∞) para a qual $\{f(t+\tau_k, \psi)\}$ converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$, $\{g(t+\tau_k, \psi)\}$ também converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times D$, então $g(t, \psi)$ é q.p. e $\text{mod} g \subset \text{mod} f$.

Prova: que $g(t, \psi)$ é q.p., segue pelos T.1.2 e T.1.3.

Para a outra parte ver [18], pág. 18, T.2.8.

Nota: Se $g \in H(f)$, $\text{mod} g \subset \text{mod} f$.

Definição 1.6 - Sejam $f(t, \psi)$ e $g(t, \psi)$ funções q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Chamamos de módulo associado ao campo vetorial de f e g e denotamos por $\text{mod}(f, g)$ o menor grupo aditivo de números reais que contém os expoentes de f e g . Isto é,

$$\text{mod}(f, g) = \left\{ \sum_{j=1}^N n_j \lambda_j \mid n_j \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_j \in \Lambda_f \cup \Lambda_g, \quad j=1, \dots, N \text{ e } N \geq 1, \text{ inteiro} \right\}.$$

Proposição 1.1 - Sejam $f(t, \psi)$ e $g(t, \psi)$ funções q.p. em t uniformemente para $\psi \in D$. Então $\text{mod}(f+g) \subset \text{mod}(f, g)$.

Nota: A Definição 1.6 e a Proposição 1.1 podem ser estendidas naturalmente para qualquer número finito de funções quase

periódicas.

Definição 1.7 - Seja $f \in C([a, \infty), \mathbb{R}^n)$. Dizemos que f é assintoticamente quase periódica (a.q.p. para simplificar) se $f(t) = p(t) + q(t)$ onde $p(t)$ é q.p. e $q(t) \in C([a, \infty), \mathbb{R}^n)$, $q(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.10 - Seja $f(t)$ uma função a.q.p. Então sua decomposição numa soma de funções, uma delas q.p. e a outra contínua e tendendo a zero quando $t \rightarrow \infty$ é única.

Prova: [18], pág. 21, T.3.1.

Teorema 1.11 - Uma função a.q.p. $f(t)$ é limitada e uniformemente contínua em $[a, \infty)$.

Teorema 1.12 - Seja $f \in C([a, \infty), \mathbb{R}^n)$. $f(t)$ é a.q.p. $\Leftrightarrow$ para qualquer sequência $\{h_k\}$ tal que $h_k > 0$ e $h_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, existe uma subsequência $\{h_{k_j}\}$ para a qual $\{f(t+h_{k_j})\}$ converge uniformemente em $[a, \infty)$.

Prova: [18], pág. 24.

1.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO - FATOS BÁSICOS

Sejam $A > 0$ e $x \in C([-h, A], \mathbb{R}^n)$.

Para cada $t \in [0, A]$, seja $x_t \in C$ definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$.

Sejam $\dot{x}(t)$ a derivada à direita da função $x(u)$ em $u = t$ e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R} \times C$.

A equação:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) \quad (1.1)$$

é chamada equação diferencial funcional com retardamento.

Definição 1.8 - Sejam $(t_0, \psi) \in \Omega$. Uma função $x(t_0, \psi)$ é uma solução de (1.1) com função inicial ψ em $t = t_0$ se $\exists A > 0$ tal que:

$$(i) \ x(t_0, \psi) \in C([t_0-h, t_0+A], \mathbb{R}^n).$$

(ii) $(t, x_t) \in \Omega$ e $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + A)$.

(iii) $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

Teorema 1.13 - Se $F(t, \psi)$ é contínua em Ω , então $\forall (t_0, \psi) \in \Omega$ existem $A > 0$ e uma função x definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$ que é solução de (1.1) com função inicial ψ em $t = t_0$. Se $F(t, \psi)$ for Lipschitziana em ψ em cada compacto de Ω , tal solução é única à direita.

Prova: [8], pág. 41.

Teorema 1.14 - (Dependência Contínua) - Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ aberto, $(t_0, \psi) \in \Omega$, $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e x solução de $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$ por (t_0, ψ) a qual existe e é única em $[t_0 - h, b]$.

Seja $W \subset \Omega$ um compacto definido por:

$$W = \{(t, x_t) \mid t \in [t_0, b]\}$$

e seja V_0 uma vizinhança de W na qual F é limitada. Se (t_0^k, ψ^k, F^k) $k=1, 2, \dots$ satisfazem $t_0^k \rightarrow t_0$, $\psi^k \rightarrow \psi$, $|F^k - F|_{V_0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ então $\exists k_0 > 0$ tal que para $k \geq k_0$, cada solução $x^k = x^k(t_0^k, \psi^k)$ de $\dot{x}(t) = F^k(t, x_t)$ existe em $[t_0 - h, b]$ e $x^k \rightarrow x$ uniformemente em $[t_0 - h, b]$.

Prova: [8], pág. 41.

Nota: para as definições dadas a seguir, consideremos $F(t, \psi)$ de (1.1) definida em $[0, \infty) \times D$ com valores no $\mathbb{R}^n$, contínua, onde D é um aberto de C . Seja $x(t)$ uma solução de (1.1) definida em $[-h, \infty)$.

Definições 1.9 -

i) A solução $x(t)$ é uniformemente estável se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $\|x_{t_0} - \psi\| < \delta(\epsilon)$ então

$$\|x_t - \tilde{x}_t(t_0, \psi)\| < \epsilon \text{ para } t \geq t_0$$

onde $\tilde{x}(t_0, \psi)$ é solução de (1.1) tal que $\tilde{x}_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

ii) A solução $x(t)$ é quase uniformemente assintótica

mente estável se $\exists \eta > 0$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists T(\epsilon) > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $\|x_{t_0} - \phi\| < \eta$ então

$$\|x_t - \tilde{x}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon \text{ para } t \geq t_0 + T(\epsilon)$$

onde $\tilde{x}(t_0, \phi)$ é solução de (1.1) tal que $\tilde{x}_{t_0}(t_0, \phi) = \phi$.

iii) A solução $x(t)$ de (1.1) é uniformemente assintoticamente estável se (i) e (ii) estiverem satisfeitas.

OBSERVAÇÃO: quando toda solução de (1.1) for uniformemente assintoticamente estável dizemos que o sistema (1.1) é uniformemente assintoticamente estável. Se $F(t, \phi)$ for linear em ϕ , (1.1) é uniformemente assintoticamente estável se e somente se a solução $x \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável.

Enunciamos a seguir alguns teoremas que, embora básicos, são de grande importância e utilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1.15 (Teorema de Ascoli) - Seja $F = \{f\}$ um conjunto infinito de funções, uniformemente limitado e equicontínuo, $f: J \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \forall f \in F$, onde J é um intervalo limitado. Então F contém uma sequência $\{f_k\} \quad k = 1, 2, \dots$ que converge uniformemente em J .

Teorema 1.16 - Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^n$ tais que $\exists M > 0$ para o qual $|f_n(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $|t - \bar{t}| < \delta(\epsilon)$ então $|f_n(t) - f_n(\bar{t})| < \epsilon \quad \forall n$. Então existe uma subsequência de $\{f_n\}$ que converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Corolário: Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência de números reais, $\tau_k > 0, \forall k$. Seja $x^k(t) = x(t + \tau_k)$ onde $x(t)$ é solução de (1.1) definida em $[0, \infty)$, $|x(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$ e $|F(t, \phi)| \leq k \quad \forall t \in I, \forall \phi \in D$. Então $\{x^k(t)\}$ tem subsequência que converge uniformemente em cada compacto de I .

Teorema 1.17 - Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência de números reais, $\tau_k > 0 \forall k$. Seja $x(t)$ solução de (1.1) definida em $[0, \infty)$, $x^k(t) = x(t + \tau_k)$, $x_t^k \in S$ para $t \geq 0$, $\forall k$, onde S é um compacto em D , e $\{x^k(t)\}$ tem subsequência que converge uniformemente em cada compacto de I . Chamemos tal subsequência de $\{x^k(t)\}$ mesmo e $y(t)$ seu limite. Suponhamos ainda $F(t + \tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ uniformemente em $\mathbb{R} \times S$.

Então $y(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$.

CAPÍTULO 2

2.1 - INTRODUÇÃO

Em 2.2, admitindo que o sistema quase periódico tenha uma solução limitada com alguma espécie de propriedade de estabilidade, discutimos a existência de solução quase periódica e, quando possível, a obtenção de propriedade de estabilidade para tal solução.

2.3 consiste em assumir condições de separação para soluções limitadas do sistema, as quais asseguram a existência de solução quase periódica. O Teorema 2.12 foi aprovado por Kato em [9] e é extensão do Teorema de Favard [3] para equações diferenciais funcionais. Também a generalização dos resultados de Favard para sistemas não lineares dada por Amerio [1] é tratada aqui para equações diferenciais funcionais — Teorema 2.9.

Em 2.4 discutimos relações entre as propriedades de estabilidade e de separação. Os Teoremas 2.13 e 2.14 nos dizem que a condição de separação de Amerio pode ser enfraquecida. Também, sob uma condição de separação mais fraca do que a de Amerio ainda obtemos solução quase periódica — Teorema 2.18.

2.2 - PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE EM UM SISTEMA QUASE PERIÓDICO

Consideremos os sistemas:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) \quad (2.1)$$

$F: \mathbb{R} \times C_{B^*} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, quase periódica em t uniformemente para $\phi \in C_{B^*}$ ($0 < B^* \leq \infty$).

Assumimos que $\forall \gamma, 0 \leq \gamma < B^*, \exists L(\gamma) > 0$ tal que $|F(t, \phi)| \leq L(\gamma) \quad \forall t \in \mathbb{R}, ||\phi|| \leq \gamma$ e que (2.1) tenha uma solução $\xi(t)$ definida em $I, ||\xi_t|| \leq B \quad \forall t \geq 0, B < B^*$.

$$\dot{x}(t) = G(t, x_t), \quad G \in H(F) \quad (2.2)$$

Seja $x(t)$ solução de (2.1) definida em I . Denotamos por $(\eta, G) \in H(x, F)$ o seguinte fato: $\exists \{\tau_k\}, \tau_k > 0$, tal que

$x(t+\tau_k) \rightarrow \eta(t)$ uniformemente em cada compacto de I e $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ σ -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$.

É claro que se $(\eta, G) \in H(x, F)$, $G \in H(F)$ e $\eta(t)$ é solução de (2.2).

Definição 2.1 - Dizemos que uma propriedade P é hereditária se quando $x(t)$ tem a propriedade P em relação às soluções de (2.1) e $(\eta, G) \in H(x, F)$, $\eta(t)$ tem a propriedade P em relação às soluções de (2.2).

No que segue chamaremos de K o seguinte compacto em C_{B^*} :

$$K = \{ \psi \in C_{B^*} \mid ||\psi|| \leq \frac{B+B^*}{2}, |\psi(\phi) - \psi(\theta')| \leq L|\theta - \theta'|, -h \leq \theta, \theta' \leq 0 \}$$

onde $L = L(\frac{B+B^*}{2})$.

No caso $B^* = \infty$ assumiremos $\frac{B+B^*}{2} = B+1$. É claro que $\xi_t \in K$, $\forall t \geq 0$.

Lema 2.1 - Suponhamos que para cada $G \in H(F)$ a solução de (2.2) seja única para a condição inicial. Seja $T > 0$ dado. Então, para cada $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $||\xi_{t_0} - \psi|| < \delta(\epsilon)$ e $|g(t)| < \delta(\epsilon)$ para $t \geq t_0$ temos:

$$||\xi_t - x_t(t_0, \psi)|| < \epsilon \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução por (t_0, ψ) do sistema $\dot{x}(t) = F(t, x_t) + g(t)$, $g(t)$ contínua em I .

Prova:

Para cada intervalo $[t_0, t_0 + T]$ fixado, existe tal $\delta > 0$ (que pode depender do intervalo) pois $\xi(t)$ é única à direita para a condição inicial e assim vale o teorema da dependência contínua.

Suponhamos então t_0 variável.

Suponhamos que para algum $\epsilon > 0$, não exista nenhum δ que satisfaça as condições do lema.

Então existem sequências $\{\delta_k\}$, $\{t_k\}$ e $\{g_k(t)\}$ tais que $\delta_k \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, $|g_k(t)| < \delta_k$, $||\xi_{t_k} - x_{t_k}^k|| < \delta_k$ e

$||\xi_{\tilde{t}_k} - x_{\tilde{t}_k}^k|| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para algum $\tilde{t}_k \in (t_k, t_k+T]$, onde $x^k(t)$ é uma solução de $\dot{x}(t) = F(t, x_t) + g_k(t)$.

$$||\xi_{\tilde{t}_k} - x_{\tilde{t}_k}^k|| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\xi(\tilde{t}_k + \theta) - x^k(\tilde{t}_k + \theta)| =$$

$$= |\xi(\lambda_k) - x^k(\lambda_k)| \quad \text{e} \quad \lambda_k \in (t_k - h, t_k + T].$$

Como

$$||\xi_{t_k} - x_{t_k}^k|| < \delta_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |\xi(\lambda_k) - x^k(\lambda_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

segue que $\exists \tau_k \in (t_k, t_k+T]$ tal que $|\xi(\tau_k) - x^k(\tau_k)| = \frac{\varepsilon}{2}$ e $|\xi(t) - x^k(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $t_k \leq t < \tau_k$.

Então existem sequências $\{\delta_k\}$, $\{t_k\}$, $\{\tau_k\}$ e $\{g_k(t)\}$, tais que $\delta_k \rightarrow 0$, $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, $\tau_k \in (t_k, t_k+T]$, $|g_k(t)| < \delta_k$, $||\xi_{t_k} - x_{t_k}^k|| < \delta_k$ e $|\xi(\tau_k) - x^k(\tau_k)| = \frac{\varepsilon}{2}$, $|\xi(t) - x^k(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ em $t_k \leq t < \tau_k$ onde $x^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t, x_t) + g_k(t)$.

Suponhamos $\varepsilon < \frac{B^* - B}{2}$ (quando $B^* = \infty$, seja $\varepsilon < 1$). Sejam $\xi^k(t) = \xi(t+t_k)$, $y^k(t) = x^k(t+t_k)$. Então $\xi^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+t_k, x_t)$ e $y^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+t_k, x_t) + g_k(t+t_k)$ por $(0, x_{t_k}^k)$.

Chamemos $\tau_k = t_k + \sigma_k$; então $0 < \sigma_k \leq T$ e tomando uma subseqüência se for necessário temos $\sigma_k \rightarrow \sigma$, $0 < \sigma \leq T$. Então, para k suficientemente grande, $|\sigma_k - \sigma| < \frac{\varepsilon}{8L}$.

No caso de $\sigma_k \geq \sigma$ é claro que $y^k(t)$ existe em $[-h, \sigma]$ pois $|\xi^k(t) - y^k(t)| = |\xi(t+t_k) - x^k(t+t_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 \leq t \leq \sigma_k$.

Para $\sigma_k < \sigma$, enquanto $y^k(t)$ existir:

$$y^k(t) = y^k(\sigma_k) + \int_{\sigma_k}^t F(s+t_k, y_s^k) ds + \int_{\sigma_k}^t g_k(s+t_k) ds, \quad t \geq \sigma_k.$$

Então, enquanto $y^k(t)$ existir para $\sigma_k \leq t \leq \sigma$,

$$|y^k(t) - y^k(\sigma_k)| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{8L} + \delta_k \cdot \frac{\varepsilon}{8L} = \frac{\varepsilon}{8} + \delta_k \frac{\varepsilon}{8L}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 |y^k(t) - \xi^k(t)| &\leq |y^k(t) - y^k(\sigma_k)| + |y^k(\sigma_k) - \xi^k(\sigma_k)| + \\
 &+ |\xi^k(\sigma_k) - \xi^k(t)| < \frac{\varepsilon}{8} + \delta_k \frac{\varepsilon}{8L} + |x^k(\tau_k) - \xi(\tau_k)| + \\
 &+ \int_{\sigma_k}^t |F(s+t_k, \xi_s^k)| ds < \frac{\varepsilon}{8} + \delta_k \frac{\varepsilon}{8L} + \frac{\varepsilon}{2} + L \frac{\varepsilon}{8L} = \\
 &= \frac{3\varepsilon}{4} + \delta_k \frac{\varepsilon}{8L}
 \end{aligned}$$

$\therefore |y^k(t) - \xi^k(t)| < \varepsilon$ em $[-h, \sigma]$ para k suficientemente grande, enquanto $y^k(t)$ existir.

Então, para k suficientemente grande, $y^k(t)$ existe em $[-h, \sigma]$ e temos:

$$(1) \ y^k(t) = \begin{cases} x^k(t_k) + \int_0^t F(s+t_k, y_s^k) ds + \int_0^t g_k(s+t_k) ds & 0 \leq t \leq \sigma. \\ x^k(t+t_k), & -h \leq t < 0. \end{cases}$$

Para a sequência $\{t_k\}$, existe uma subsequência que vamos denotar por $\{t_k\}$ mesmo para a qual $\{F(t+t_k, \psi)\}$ converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$ e $\xi_{t_k} \rightarrow \psi$ quando $k \rightarrow \infty$ pois $F(t, \psi)$ é q.p. e $\xi_{t_k} \in K$ para k grande.

Seja

$$G(t, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(t+t_k, \psi) \text{ } c\text{-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}.$$

Como $y_0^k = x_{t_k}^k$ e $||\xi_{t_k} - x_{t_k}^k|| < \delta_k$ é claro que $y_0^k \rightarrow \psi$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto $\{y^k(\theta)\}$, $-h \leq \theta \leq 0$ é uniformemente limitada e equicontínua em $[-h, 0]$.

Além disso, para k suficientemente grande:

$$\begin{aligned}
 |y^k(t) - \xi^k(t)| < \varepsilon \text{ em } [-h, \sigma] &\Rightarrow |y^k(t)| < \varepsilon + |\xi^k(t)| < \\
 < \frac{B^*-B}{2} + B = \frac{B^*+B}{2} \text{ (ou } |y^k(t)| < B+1).
 \end{aligned}$$

Assim $\{y^k(t)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua em $[-h, \sigma]$. Existe pois, uma subsequência de $\{y^k(t)\}$, que vamos

denotar por $\{y^k(t)\}$ mesmo, tal que $y^k(t) \rightarrow x(t)$ uniformemente em $[-h, \sigma]$, quando $k \rightarrow \infty$. É claro que x_t e y_t^k permanecem em um compacto para $t \geq 0$ e k grande e portanto de (1) segue que:

$$x(t) = \begin{cases} \psi(0) + \int_0^t G(s, x_s) ds, & 0 \leq t \leq \sigma. \\ \psi(t), & -h \leq t < 0. \end{cases}$$

Isto mostra que $x(t)$ é solução de (2.2) por $(0, \psi)$. Por outro lado $\xi^k(t) \rightarrow \eta(t)$ uniformemente em cada compacto de I e assim $\eta(t)$ é solução de (2.2) por $(0, \psi)$.

Pela unicidade $x(t) = \eta(t)$ em $[-h, \sigma]$. Entretanto

$$\begin{aligned} |x^k(\tau_k) - \xi(\tau_k)| &= |y^k(\sigma_k) - \xi^k(\sigma_k)| = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow |x(\sigma) - \eta(\sigma)| &= \frac{\varepsilon}{2} \text{ uma contradição.} \end{aligned}$$

Teorema 2.1 - Suponhamos que para cada $G \in H(F)$, a solução de (2.2) seja única para a condição inicial. Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k > 0$, $\xi_{\tau_k} \rightarrow \psi$ e $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$, $G \in H(F)$, uniformemente em $\mathbb{R} \times K$ quando $K \rightarrow \infty$. Se a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) for uniformemente estável para $t \geq 0$, a solução $\eta(t)$ de (2.2) por $(0, \psi)$ é uniformemente estável para $t \geq 0$. Além disso se $\xi(t)$ for uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$, então $\eta(t)$ é uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$. (Em outras palavras: estabilidade uniforme e estabilidade assintótica uniforme com unicidade no hull são propriedades hereditárias.)

Prova:

Como $\xi(t)$ é uniformemente estável, $\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ por $(0, \xi_{\tau_k})$ uniformemente estável com o mesmo par $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ de $\xi(t)$.

$|\xi^k(t)| \leq B$ e $|\dot{\xi}^k(t)| \leq L(B)$ para $t \geq 0$, $\forall k$, então $\{\xi^k(t)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua em I . Além disso $\{\xi^k(t)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua em $[-h, 0]$, pois $\xi^k(t) \rightarrow \psi(t)$ uniformemente em $[-h, 0]$.

Então $\{\xi^k(t)\}$ tem subsequência que vamos chamar de $\{\xi^k(t)\}$ mesmo a qual converge uniformemente em cada compacto de

$[-h, \infty)$.

$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t)$ é solução de (2.2) por $(0, \psi)$.

Pela unicidade $y(t) = \eta(t)$ em $[-h, \infty)$.

Para um $t_0 \in I$ fixado e k suficientemente grande temos:

$$||\xi^k_{t_0} - \eta_{t_0}|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

onde $\delta(\varepsilon)$ é da estabilidade uniforme de $\xi(t)$ e $\varepsilon < B^* - B$ (ou $\varepsilon < 1$ quando $B^* = \infty$).

Seja $\psi \in K$ tal que $||\psi - \eta_{t_0}|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Seja $x(t)$ solução de (2.1) tal que $x_{t_0+\tau_k} = \psi$.

Então $x^k(t) = x(t+\tau_k)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ e $x^k_{t_0} = \psi$.

Como $\xi^k(t)$ é uniformemente estável com o mesmo par $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ de $\xi(t)$ e $||\xi^k_{t_0} - x^k_{t_0}|| \leq ||\xi^k_{t_0} - \eta_{t_0}|| + ||\eta_{t_0} - \psi|| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ então

$$||\xi^k_t - x^k_t|| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } t \geq t_0.$$

Por outro lado, como $x^k_t \in K$ para $t \geq 0$ e k grande, uma subsequência de $\{x^k(t)\}$ converge para uma solução $z(t)$ de (2.2) por (t_0, ψ) a qual é univocamente determinada, uniformemente em cada intervalo compacto $[t_0, t_0+N]$. Denotemos tal subsequência por $\{x^k(t)\}$ mesmo.

Assim, para k suficientemente grande, digamos $K \geq K_0(\varepsilon, N)$, $||x^k_t - z_t|| < \frac{\varepsilon}{4}$ e $||\xi^k_t - \eta_t|| < \frac{\varepsilon}{4}$ em $[t_0, t_0+N]$.

Então:

$$\begin{aligned} ||\eta_t - z_t|| &\leq ||\eta_t - \xi^k_t|| + ||\xi^k_t - x^k_t|| + ||x^k_t - z_t|| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \text{ em } [t_0, t_0+N]. \end{aligned}$$

Como N é arbitrário: $||\eta_t - z_t|| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ se $||\psi - \eta_{t_0}|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\psi \in K$, onde $z_t(t_0, \psi)$ é solução de (2.2) por (t_0, ψ) .

Para cada $t_0 \in I$, vimos que se $||\eta_{t_0+h} - \psi|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\psi \in K$ então $||\eta_t - z_t(t_0+h, \psi)|| < \varepsilon$ para $t \geq t_0+h$ onde z é solução de (2.2).

Pelo lema 2.1: $\exists \delta^*(\epsilon)$ tal que se $t_0 \in I$, $||\eta_{t_0} - \tilde{\psi}|| < \delta^*(\epsilon)$, $\tilde{\psi} \in C_{B^*}$, então $||\eta_t - x_t(t_0, \tilde{\psi})|| < \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2})$ em $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, onde $x(t_0, \tilde{\psi})$ é solução de (2.2), tomando $g(t) \equiv 0$.

Então $||\eta_{t_0+h} - x_{t_0+h}(t_0, \tilde{\psi})|| < \frac{1}{2} \delta(\frac{\epsilon}{2})$ e $x_{t_0+h}(t_0, \tilde{\psi}) \in K$. Portanto:

$||\eta_t - x_t(t_0, \tilde{\psi})|| < \epsilon$ para $t \geq 0$, se $||\eta_{t_0} - \tilde{\psi}|| < \delta^*(\epsilon)$, $\tilde{\psi} \in C$, isto é, $\eta(t)$ é uniformemente estável para $t \geq 0$.

Suponhamos agora que $\xi(t)$ seja uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$. Então $\xi^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$ com o mesmo $(\delta_0, \epsilon, T(\epsilon))$ de $\xi(t)$.

Como vimos, $\eta(t)$ é uniformemente estável com $(\epsilon, \delta^*(\epsilon))$. Para um ϵ_0 fixado tal que $0 < \epsilon_0 < \frac{B^* - B}{2}$ (ou $\epsilon_0 < 1$ quando $B^* = \infty$) seja $\delta_0^* = \delta^*(\epsilon_0)$.

Para um $t_0 \in I$, fixado, se K é suficientemente grande temos $||\xi_{t_0}^k - \eta_{t_0}|| < \frac{1}{2} \delta_0$, onde δ_0 é da estabilidade assintótica uniforme de $\xi(t)$ e podemos supor $\frac{1}{2} \delta_0 \leq \delta_0^*$.

Seja ψ tal que $\psi \in K$ e $||\eta_{t_0} - \psi|| < \frac{1}{2} \delta_0$ e seja $x(t)$ solução de (2.1) tal que $x_{t_0+\tau_k} = \psi$.

Então $x^k(t) = x(t+\tau_k)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ e $x_{t_0}^k = \psi$.

Como

$$||\xi_{t_0}^k - \psi|| \leq ||\xi_{t_0}^k - \eta_{t_0}|| + ||\eta_{t_0} - \psi|| < \frac{1}{2} \delta_0 + \frac{1}{2} \delta_0 = \delta_0$$

e $\xi^k(t)$ é uniformemente assintoticamente estável temos:

$$||\xi_t^k - x_t^k|| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } t \geq t_0 + T(\frac{\epsilon}{2}).$$

Como $x^k(t) \in K$ para $t \geq 0$ e K suficientemente grande uma subsequência de $\{x^k(t)\}$ converge para a solução $y(t)$ de (2.2) por (t_0, ψ) uniformemente em cada compacto $t_0 + T(\frac{\epsilon}{2}) \leq t \leq t_0 + T(\frac{\epsilon}{2}) + N$.

Denotemos tal subsequência por $\{x^k(t)\}$ mesmo.

Então, para K suficientemente grande, digamos $K \geq K_0(\epsilon, N)$:

$$||x_t^k - y_t|| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad ||\xi_t^k - \eta_t|| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para}$$

$$t_0 + T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq t \leq t_0 + T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + N.$$

Como $N > 0$ é arbitrário:

$$||\eta_t - y_t(t_0, \psi)|| < \varepsilon \quad \text{para} \quad t \geq t_0 + T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{se}$$

$$||\eta_{t_0} - \psi|| < \frac{1}{2} \delta_0, \quad \psi \in K.$$

Pelo Lema 2.1: $\exists \delta_0^{**} > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $||\eta_{t_0} - \psi|| < \delta_0^{**}$, $\psi \in C$ então

$$||\eta_{t_0+h} - x_{t_0+h}(t_0, \psi)|| < \frac{1}{2} \delta_0 \quad \text{e} \quad x_{t_0+h}(t_0, \psi) \in K,$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução de (2.2).

Então

$$||\eta_t - x_t(t_0, \psi)|| < \varepsilon \quad \text{para} \quad t \geq t_0 + h + T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{se}$$

$$||\eta_{t_0} - \psi|| < \delta_0^{**}$$

$\therefore \eta(t)$ é uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$.

Definição 2.2 - A solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) é totalmente estável para $t \geq 0$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $||\xi_{t_0} - \psi|| < \delta(\varepsilon)$ e $|R(t)| < \delta(\varepsilon)$ para $t \geq t_0$ então $||\xi_t - x_t(t_0, \psi)|| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$, onde $R(t)$ é contínua em I e $x(t_0, \psi)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t, x_t) + R(t)$.

OBS.: é claro que estabilidade total de uma solução implica estabilidade uniforme e consequentemente unicidade em relação a condição inicial.

Teorema 2.2 - Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência, $\tau_k > 0$, $\xi_{\tau_k} \rightarrow \psi$ e $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ uniformemente em $R \times K$ quando $k \rightarrow \infty$. Se a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) for totalmente estável, a solução $\eta(t)$ de (2.2) por $(0, \psi)$ é totalmente estável. (Isto é: estabilidade total é propriedade hereditária.)

Prova:

Como $\xi(t)$ é totalmente estável, $\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$ é solução totalmente estável de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ com o mesmo par $(\epsilon, \delta(\epsilon))$ de $\xi(t)$.

$|\xi^k(t)| \leq B$ e $|\dot{\xi}^k(t)| \leq L(B)$ para $t \geq 0$; então $\{\xi^k(t)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua em I . Mas $\{\xi^k(t)\}$ também é uniformemente limitada e equicontínua em $[-h, 0]$ pois $\xi^k(t) \rightarrow \psi(t)$ uniformemente.

Então, $\{\xi^k(t)\}$ tem subsequência que vamos chamar de $\{\xi^k(t)\}$ mesmo a qual converge uniformemente em cada compacto de $[-h, \infty]$.

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t)$$

é solução de (2.2) por $(0, \psi)$.

É claro que $y_t \in K$, $\forall t \geq 0$.

Para $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, seja $z(t_0, \psi)$ solução de $\dot{x}(t) = G(t, x_t) + h(t)$ tal que

$$||y_{t_0} - \psi|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ e } |h(t)| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ para } t \geq t_0.$$

Para K suficientemente grande:

$$||\xi^k_{t_0} - y_{t_0}|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ e } |F(t+\tau_k, \psi) - G(t, \psi)| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \psi \in K.$$

Observemos que $y(0, \psi)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, \psi) + G(t, \psi) - F(t+\tau_k, \psi)$. Como $\xi^k(t)$ é totalmente estável:

$$||\xi^k_t - y_t|| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } t \geq t_0.$$

Por outro lado:

$$||\xi^k_{t_0} - \psi|| \leq ||\xi^k_{t_0} - y_{t_0}|| + ||y_{t_0} - \psi|| < \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

e

$$|F(t+\tau_k, \psi) - G(t, \psi) - h(t)| \leq |F(t+\tau_k, \psi) - G(t, \psi)| + |h(t)| < \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

e então $||\xi^k_t - z_t(t_0, \psi)|| < \frac{\epsilon}{2}$ para $t \geq t_0$.

Então

$$||y_t - z_t(t_0, \psi)|| \leq ||y_t - \xi_t^k|| + ||\xi_t^k - z_t(t_0, \psi)|| < \epsilon \text{ para } t \geq 0.$$

$\therefore y(t)$ é totalmente estável para $t \geq 0$.

Como $y(t)$ é única à direita, $y(t) = \eta(t)$.

Definição 2.3 - Seja S um compacto em C_B^* tal que $\xi_t \in S$ para $t \geq 0$. Para $G, H \in H(F)$ definimos $\rho(G, H, S)$ por

$$\rho(G, H, S) = \sup\{|G(t, \psi) - H(t, \psi)|, t \in \mathbb{R}, \psi \in S\}.$$

A solução $\xi(t)$ é estável sob perturbações de $H(F)$ com relação a S se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\tau \geq 0, G \in H(F)$ $\rho(F^\tau, G, S) < \delta(\epsilon), ||\xi_\tau - \psi|| < \delta, \psi \in S$ então

$$||\xi_{t+\tau} - y_t(0, \psi, G)|| < \epsilon \text{ para } t \geq 0$$

onde $y(0, \psi, G)$ é solução de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$ por $(0, \psi), y_t(0, \psi, G) \in S$ para $t \geq 0$ e $F^\tau(t, \psi) = F(t+\tau, \psi)$.

Nota: Como estamos considerando o compacto

$$K = \{\psi \mid ||\psi|| \leq \frac{B+B^*}{2}, |\psi(\theta) - \psi(\theta')| \leq L|\theta - \theta'|\}$$

denotaremos $\rho(G, H, K)$ por $\rho(G, H)$.

Lema 2.2 - Suponhamos que a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) seja estável sob perturbações de $H(F)$ em relação a K e seja c uma constante positiva. Então $\eta(t) = \xi(t+c), \eta_0 = \xi_c$, é solução de $\dot{x}(t) = F(t+c, x_t)$ estável sob perturbações de $H(Fc)$ com o mesmo par $(\epsilon, \delta(\epsilon))$ de $\xi(t)$.

OBS.: pode-se mostrar que se uma solução é estável sob perturbações de $H(F)$ ela é única à direita para a condição inicial.

Teorema 2.3 - Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k > 0, \xi_{\tau_k} \rightarrow \psi$ e $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ uniformemente em $\mathbb{R} \times K$. Se $\xi(t)$ for estável sob perturbações de $H(F)$ com relação a K , a solução $\eta(t)$ por $(0, \psi)$ é estável sob perturbações de $H(G)$ com relação a K (estabilidade sob perturbações do hull é propriedade hereditária).

ria).

Prova:

Como $\xi(t)$ é estável sob perturbações do $H(F)$ com relação a K , pelo lema 2.2, $\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ estável sob perturbações do $H(F^{\tau_k})$ com relação a K com o mesmo par $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ de $\xi(t)$.

Como vimos no T.2.2 $\{\xi^k(t)\}$ tem subsequência que converge uniformemente em cada compacto de $[-h, \infty)$. Então:

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t)$$

é solução de (2.2) por $(0, \psi)$ e $y_t \in K$ para $t \geq 0$.

Sejam $\varepsilon > 0$, $\tau \geq 0$ e $z(t, 0, \psi, H)$ solução de $\dot{x}(t) = H(t, x_t)$ tais que

$$\begin{aligned} ||y_\tau - \psi|| &< \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \psi \in K, \quad H \in H(G), \quad \rho(G^\tau, H, K) < \\ &< \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Para k suficientemente grande:

$$|G(t+\tau, \psi) - F(t+\tau_k+\tau, \psi)| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \psi \in K.$$

$$||y_\tau - \xi_\tau^k|| < \frac{1}{2} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Além disso $H \in H(G)$ e $G \in H(F^{\tau_k}) \Rightarrow H \in H(F^{\tau_k})$.

$$\rho(F^{\tau_k+\tau}, H) = \sup\{|F(t+\tau+\tau_k, \psi) - H(t, \psi)|, t \in \mathbb{R}, \psi \in K\} \leq$$

$$\leq \sup\{|F(t+\tau+\tau_k, \psi) - G(t+\tau, \psi)|, t \in \mathbb{R}, \psi \in K\} +$$

$$+ \sup\{|G(t+\tau, \psi) - H(t, \psi)|, t \in \mathbb{R}, \psi \in K\} < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$$||\xi_{\tau+\tau_k} - \psi|| \leq ||\xi_{\tau+\tau_k} - y_\tau|| + ||y_\tau - \psi|| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Como $\xi^k(t)$ é estável sob perturbações do $H(F^{\tau_k})$ com relação a K , $||\xi_{t+\tau}^k - z_t|| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $t \geq 0$.

Para k suficientemente grande $||\xi_{t+\tau}^k - y_{t+\tau}|| < \frac{\varepsilon}{2}$ em $[0, N]$ onde $N > 0$ arbitrário.

Então $||y_{t+\tau} - z_t|| \leq ||y_{t+\tau} - \xi_{t+\tau}^k|| + ||\xi_{t+\tau}^k - z_t|| < \epsilon$
para $t \geq 0$ pois N é arbitrário.

$\therefore y(t)$ é estável sob perturbações do $H(G)$ com relação a K . Em consequência $y(t)$ é única para a condição inicial.

$\therefore y(t) = \eta(t)$.

Teorema 2.4 - Se a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) for totalmente estável para $t \geq 0$, então ela será estável sob perturbações do $H(F)$ com relação a K .

Prova:

Seja $G \in H(F)$ tal que

$$\rho(F^\tau, G) = \sup\{|F^\tau(t, \psi) - G(t, \psi)|, t \in \mathbb{R}, \psi \in K\} \leq \delta'(\epsilon) < \delta(\epsilon)$$

onde $\delta(\epsilon)$ é da estabilidade total de $\xi(t)$.

Seja $\psi \in K$, $||\xi_\tau - \psi|| < \delta'(\epsilon)$.

Seja $\eta(t)$ solução de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$ por $(0, \psi)$, $\eta_t \in K$ para $t \geq 0$.

Então $y_t = \eta_{t-\tau}$, $t \geq \tau$, é solução de $\dot{x}(t) = G(t-\tau, x_t)$ por (τ, ψ) . Em outras palavras $y(t)$ é solução de:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) + G(t-\tau, y_t) - F(t, y_t) \text{ tal que } y_\tau = \psi.$$

$y_t \in K$ para $t \geq \tau$ e assim, enquanto $y(t)$ existir:

$$|G(t-\tau, y_t) - F(t, y_t)| < \delta(\epsilon).$$

Como $\xi(t)$ é solução totalmente estável de (2.1), $||\xi_\tau - \psi|| < \delta(\epsilon)$ e $|G(t-\tau, y_t) - F(t, y_t)| < \delta(\epsilon)$ segue que:

$$||y_t - \xi_t|| < \epsilon \text{ enquanto } y(t) \text{ existir.}$$

Mas $\xi(t)$ existe para $t \geq 0$ e $\therefore y(t)$ existe para $t \geq \tau$ e $||y_t - \xi_t|| < \epsilon$ para $t \geq \tau$.

Substituindo t por $t+\tau$ temos:

$$||\eta_t - \xi_{t+\tau}|| < \epsilon \text{ para } t \geq 0 \text{ e } \eta(0, \psi) \text{ é solução de (2.2).}$$

$\therefore \xi(t)$ é estável sob perturbações de $H(F)$ com relação a K .

Nota:

Em [17], Yoshizawa mostra outras relações entre esses tipos de estabilidade. Como o objetivo principal deste trabalho é discutir a *existência* de soluções q.p. apenas citaremos tais relações.

Em um sistema quase periódico:

Estabilidade assintótica uniforme com unicidade para toda equação no hull $\Rightarrow$ estabilidade total $\Rightarrow$ estabilidade sob perturbações do hull $\Rightarrow$ estabilidade uniforme.

No entanto, sem unicidade no hull, estabilidade assintótica uniforme não implica nem estabilidade total e nem estabilidade sob perturbações, como mostra Kato em [10].

Em um sistema periódico:

Estabilidade assintótica uniforme $\Rightarrow$ estabilidade total $\Rightarrow$ estabilidade sob perturbações $\Leftrightarrow$ estabilidade uniforme.

Teorema 2.5 - Suponhamos que a solução $\xi(t)$ de (2.1) definida em I seja assintoticamente quase periódica. Então (2.1) tem solução q.p.

Prova:

$\xi(t)$ é a.q.p. $\Rightarrow \xi(t) = p(t) + q(t)$ onde $p(t)$ é q.p. e $q(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

$\xi(t)$ e $p(t)$ são uniformemente contínuas e $\|\xi_t\| \leq B$; $\|p_t\| \leq B$, existe um compacto $S \subset C_B^*$ tal que $\xi_t \in S$ para $t \geq 0$, $p_t \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $F(t+\tau_k, \varphi) \rightarrow F(t, \varphi)$ uniformemente em $\mathbb{R} \times S$.

$p(t+\tau_k) \rightarrow p^*(t)$ uniformemente em $\mathbb{R}$. ($\therefore p^*(t)$ é q.p.)

Seja $\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$.

Então $\xi^k(t)$ está definida em $-\tau_k - h \leq t < \infty$, $\xi_t^k \in S$ para $t \geq -\tau_k$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer; $\exists K_0 = K_0(\alpha)$ tal que para $k \geq K_0$,

$\xi^k(t)$ está definida em $[a, \infty)$. Pelo T.1.16, $\{\xi^k(t)\}$ tem subsequência que vamos denotar por $\{\xi^k(t)\}$ mesmo a qual converge uniformemente em cada compacto de $[a, \infty)$.

$$\xi^k(t) = p(t+\tau_k) + q(t+\tau_k),$$

portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t) = p^*(t),$$

uniformemente em cada compacto de $[a, \infty)$ e como a é arbitrário,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t) = p^*(t)$$

uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

$\therefore p^*(t)$ é solução q.p. de (2.1).

Observações:

i) Não usamos no T.2.5 a hipótese $|F(t, \psi)| \leq L(\gamma)$,
 $t \in \mathbb{R}$, $||\psi|| \leq \gamma$.

ii) Como $\xi(t)$ é a.q.p., $\{\tau_k\}$ tem subsequência $\{\tau_{k_j}\}$ tal que $\{\xi(t+\tau_{k_j})\}$ converge uniformemente em I quando $k \rightarrow \infty$. Então $p^*(t) = \lim_{k_j \rightarrow \infty} \xi(t+\tau_{k_j})$ uniformemente em I quando $k \rightarrow \infty$.

Teorema 2.6 - Se a solução $\xi(t)$ de (2.1) for estável sob perturbações do $H(F)$ com relação a K , $\xi(t)$ será a.q.p. Consequentemente (2.1) terá solução q.p. estável sob perturbações do $H(F)$ com relação a K .

Prova:

Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k > 0$, $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$.

Então $\xi^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_k, x_t)$ por $(0, \xi_{\tau_k})$ e $||\xi_t^k|| \leq B$ para $t \geq 0$, $\forall k$. ($\xi_t^k \in K$ para $t \geq 0$, $\forall k$).

Pelo Lema 2.2, $\xi^k(t)$ é estável sob perturbações do $H(F^{\tau_k})$ com o mesmo par $(\epsilon, \delta(\epsilon))$ de $\xi(t)$.

$\{F(t+\tau_k, \psi)\}$ converge uniformemente em $\mathbb{R} \times K$ quando $K \rightarrow \infty$ (tomando uma subsequência de $\{\tau_k\}$, se for necessário). Assim $\exists K_0(\epsilon) > 0$ tal que se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$:

$$|F(t+\tau_k, \varphi) - F(t+\tau_m, \varphi)| \leq \delta(\epsilon) \text{ em } \mathbb{R} \times K.$$

Então se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$, $\rho(F^{\tau_k}, F^{\tau_m}) \leq \delta(\epsilon)$.

Como $\xi_0^k \in K$ podemos supor que se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$:

$$||\xi_0^k - \xi_0^m|| \leq \delta(\epsilon)$$

tomando uma subsequência de $\{\xi_0^k\}$, se for necessário.

$\xi^m(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t+\tau_m, x_t)$, $F^{\tau_m} \in H(F^{\tau_k})$, $\rho(F^{\tau_k}, F^{\tau_m}) < \delta(\epsilon)$ e $\xi^k(t)$ é estável sob perturbações de $H(F^{\tau_k})$.

Então $||\xi_t^k - \xi_t^m|| \leq \epsilon$ para $t \geq 0$, se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$.

$\therefore |\xi(t+\tau_k) - \xi(t+\tau_m)| \leq \epsilon$ para $t \geq 0$, $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$, isto é, $\{\xi(t+\tau_k)\}$ é uniformemente convergente em I .

Portanto $\xi(t)$ é a.q.p.

Pelo T.2.5, (2.1) tem solução q.p. $p^*(t)$.

Pelo T.2.3, $p^*(t)$ é estável sob perturbações de $H(F)$ com relação a K .

Nota: observamos anteriormente que para sistemas periódicos, estabilidade sob perturbações de $H(F)$ é equivalente a estabilidade uniforme. Segue então pelo T.2.6, que se um sistema periódico tiver solução limitada uniformemente estável, terá solução q.p. uniformemente estável.

Teorema 2.7 - Se a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) for totalmente estável então ela será a.q.p. Assim (2.1) terá solução q.p. totalmente estável.

Prova:

$\xi(t)$ totalmente estável $\Rightarrow \xi(t)$ estável sob perturbações de $H(F)$ com relação a K , pelo T.2.4.

Pelo T.2.6, (2.1) tem solução q.p. $p^*(t)$.

Tal solução é totalmente estável, pelo T.2.2.

Teorema 2.8 - Para o sistema (2.1) assumimos que para cada $G \in H(F)$ a solução de (2.2) é única para a condição inicial. Se a solução limitada $\xi(t)$ de (2.1) for uniformemente assintoticamente estável, será a.q.p. Assim (2.1) terá uma solução q.p. uniformemente assintoticamente estável para $t \geq 0$.

Prova:

Como $\xi(t)$ é uniformemente assintoticamente estável, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ e $T(\varepsilon) > 0$ tal que se $x(t)$ é solução de (2.1), $||\xi_{t_0} - x_{t_0}|| < \delta(\varepsilon)$ para $t_0 \geq 0$ então $||\xi_t - x_t|| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $t \geq t_0$ e $||\xi_t - x_t|| < \frac{\delta_1(\varepsilon)}{2}$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k > 0$, $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, $\xi^k(t) = \xi(t + \tau_k)$. Então $\xi^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t + \tau_k, x_t)$ e é uniformemente assintoticamente estável com os mesmos $\delta(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ de $\xi(t)$.

Pelo Lema 2.1, para $\delta_1(\varepsilon)$ e $T(\varepsilon)$, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que se $t_0 \in I$, $||\xi_{t_0} - \psi|| < \delta_2(\varepsilon)$ e $|g(t)| < \delta(\varepsilon)$ então:

$$||\xi_t - x_t(t_0, \psi)|| < \frac{1}{2} \delta_1(\varepsilon) \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + T(\varepsilon)$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t, x_t) + g(t)$.

Para qualquer k podemos ver que se $t_0 \in I$, $||\xi_{t_0}^k - \psi|| < \delta_2(\varepsilon)$ e $|g_k(t)| < \delta_2(\varepsilon)$ então

$$||\xi_t^k - x_t^k(t_0, \psi)|| < \frac{1}{2} \delta_1(\varepsilon) \text{ em } t_0 \leq t \leq t_0 + T(\varepsilon)$$

com o mesmo $\delta_2(\varepsilon)$, onde $x^k(t_0, \psi)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t + \tau_k, x_t) + g_k(t)$.

Existe uma subsequência de $\{\tau_k\}$, que vamos denotar por $\{\tau_m\}$ mesmo tal que $\{\xi_0^k\}$ converge (pois $\xi_0^k \in K$) e $\{F(t + \tau_k, \psi)\}$ converge em $\mathbb{R} \times K$ uniformemente, quando $k \rightarrow \infty$. Então existe um inteiro positivo $K_0(\varepsilon)$ tal que se $m \geq k \geq K_0(\varepsilon)$:

$$|F(t + \tau_k, \psi) - F(t + \tau_m, \psi)| < \delta_2(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi \in S$$

e

$$||\xi_0^k - \xi_0^m|| < \delta_1(\varepsilon).$$

$\xi^m(t)$ é uma solução uniformemente assintoticamente estável do sistema:

$$\dot{x}(t) = F(t + \tau_m, x_t)$$

e assim a solução $\eta(t)$ desse sistema por $(0, \xi_0^k)$ satisfaz:

$$||\xi_t^m - \eta_t|| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } t \geq 0$$

e

$$||\xi_{T(\varepsilon)}^m - \eta_{T(\varepsilon)}|| < \frac{1}{2} \delta_1(\varepsilon).$$

Por outro lado $\eta(t)$ é solução de

$$\dot{\eta}(t) = F(t+\tau_k, \eta_t) + F(t+\tau_m, \eta_t) - F(t+\tau_k, \eta_t)$$

e

$$|F(t+\tau_m, \eta_t) - F(t+\tau_k, \eta_t)| = |g(t)| < \delta_2(\epsilon),$$

pois $\eta_t \in K$.

Assim se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$:

$$||\xi_t^k - \eta_t|| < \frac{1}{2} \delta_1(\epsilon) \text{ em } 0 \leq t \leq T(\epsilon).$$

Para $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$:

$$||\xi_t^k - \xi_t^m|| \leq ||\xi_t^k - \eta_t|| + ||\eta_t - \xi_t^m|| < \frac{1}{2} \delta_1(\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \text{ em } 0 \leq t \leq T(\epsilon)$$

$$||\xi_{T(\epsilon)}^k - \xi_{T(\epsilon)}^m|| \leq ||\xi_{T(\epsilon)}^k - \eta_{T(\epsilon)}|| + ||\eta_{T(\epsilon)} - \xi_{T(\epsilon)}^m|| < < \frac{1}{2} \delta_1(\epsilon) + \frac{1}{2} \delta_1(\epsilon) = \delta_1(\epsilon).$$

Pelo mesmo argumento usado acima podemos ver que se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$:

$$||\xi_t^k - \xi_t^m|| < \epsilon \text{ em } T(\epsilon) \leq t \leq 2T(\epsilon)$$

e em geral

$$||\xi_t^k - \xi_t^m|| < \epsilon \text{ em } pT(\epsilon) \leq t \leq (p+1)T(\epsilon) \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto $|\xi^k(t) - \xi^m(t)| < \epsilon$ para $t \geq 0$ se $m \geq k \geq K_0(\epsilon)$, isto é, $\xi(t)$ é a.q.p.

Segue o resultado aplicando agora os teoremas 2.5 e 2.1 sucessivamente.

Nota: sem assumir unicidade para toda equação em $H(F)$ o T.2.8 não vale como mostra o contra exemplo construído por Kato e Sibuya em [11]. No entanto, se (2.1) for w -periódico em t , a existência de uma solução limitada uniformemente assintoticamente estável assegura a existência de solução mw -periódica uniformemente assintoticamente estável, onde m é algum inteiro positivo - [13].

2.3 - CONDIÇÕES DE SEPARAÇÃO EM UM SISTEMA QUASE PERIÓDICO

Lema 2.3 - Seja $\xi(t)$ a solução limitada de (2.1) tal que $\xi_t \in \overline{C}_B$ para $t \geq 0$. Então, para cada $G \in H(F)$, (2.2) tem solução em $\overline{C}_B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Prova:

Seja $G \in H(F)$.

Existe $\{\tau_k\}$, $\tau_k > 0$, $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ ϵ -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$.

$$\xi^k(t) = \xi(t+\tau_k)$$

$\xi^k(t)$ está definida para $t \geq -\tau_k - h$, $|\xi^k(t)| \leq B$ e $|\dot{\xi}^k(t)| \leq L(B)$ para $t \geq -\tau_k$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, qualquer; $\exists K_0 = K_0(\alpha)$ tal que para $k \geq K_0$, $\xi^k(t)$ está definida em $[\alpha, \infty)$. Pelo T.1.16, $\{\xi^k(t)\}$ tem subsequência que vamos denotar por $\{\xi^k(t)\}$ mesmo a qual converge uniformemente em cada compacto de $[\alpha, \infty)$; chamemos de $\eta(t)$ tal limite.

Como α é arbitrário, $\eta(t)$ está definida em $(-\infty, +\infty)$ e $\eta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Além disso $\xi_t^k \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e k suficientemente grande e portanto $\eta_t \in K$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Também $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ uniformemente em $\mathbb{R} \times K$.

Então $\eta(t)$ é solução de (2.2) e $|\eta_t| \leq B \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Nota: para uma solução $x(t)$ de (2.1) definida em $\mathbb{R}$ tal que $||x_t|| \leq B$, $\forall t \in \mathbb{R}$ diremos que $x \in \overline{C}_B$.

Definição 2.4 - Dizemos que uma solução $x(t)$ de (2.1), $x \in \overline{C}_B$, é separada em $\overline{C}_B$ se $\exists d(x) > 0$ tal que para qualquer outra solução $y(t)$ de (2.1), $y \in \overline{C}_B$, $||x_t - y_t|| \geq d(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.4 - Suponhamos que toda equação em $H(F)$ tenha somente soluções separadas em $\overline{C}_B$. Então cada equação tem somente um número finito de soluções em $\overline{C}_B$. Consequentemente este número é o mesmo para toda equação em $H(F)$ e a constante $d(x)$ pode ser tomada independente da solução e da equação.

Prova:

Seja $G \in H(F)$ fixada e consideremos o sistema:

$$\dot{x}(t) = G(t, x_t) \quad (2.2)$$

$$X = \{x(t) \mid x(t) \text{ é solução de (2.2) em } \overline{C}_B\}.$$

Para qualquer $x \in X$, temos:

$$|x(t)| \leq B \quad \text{e} \quad |\dot{x}(t)| \leq L(B) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

segue então que X é uniformemente limitado e equicontínuo.

Então, se X for infinito, ele deve conter uma sequência $\{x^n(t)\}$ que converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Chamemos de $\eta(t)$ tal limite.

Como $G(t, \emptyset)$ é uniformemente contínua para $t \in \mathbb{R}$ e $\emptyset$ em conjuntos compactos e $x_t^n \in K$, $\eta_t \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos: $G(t, x_t^n) \rightarrow G(t, \eta_t)$.

Então $\eta(t)$ é solução de (2.2) em $\overline{C}_B$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $n \geq n_0$:

$$|x^n(t) - \eta(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [a, b].$$

Então $\eta(t)$ não é separada em $\overline{C}_B$, uma contradição.

$\therefore X$ é finito.

Sejam $G_1, G_2 \in H(F)$ e $x_1(t)$ e $y_1(t)$ soluções de $\dot{x}(t) = G_1(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$ (portanto separadas, se forem distintas).

$G_1 \in H(F) \Rightarrow H(G_1) = H(F)$ e portanto $G_2 \in H(G_1)$.

Então $\exists \{\tau_k\}$ tal que $G_1(t+\tau_k, \emptyset) \rightarrow G_2(t, \emptyset)$ c-uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$.

Sejam $x_1^k(t) = x_1(t+\tau_k)$ e $y_1^k = y_1(t+\tau_k)$.

$\{x_1^k(t)\}$ e $\{y_1^k(t)\}$ são sequências uniformemente limitadas e equicontínuas; pelo T.1.16 existem subsequências $\{x_1^{kj}(t)\}$ e $\{y_1^{kj}(t)\}$ tais que

$$x_1^{kj}(t) \rightarrow x_2(t)$$

uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

$$y_1^{kj}(t) \rightarrow y_2(t)$$

Além disso $x_1^{kj} \in K$ e $y_1^{kj} \in K$, $\forall k, j$, $\forall t$ e $G_1(t+\tau_{kj}, \emptyset) \rightarrow G_2(t, \emptyset)$ uniformemente em $\mathbb{R} \times K$, portanto $x_2(t)$ e

$y_2(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = G_2(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$.

Se $x_1(t) \neq y_1(t)$ temos:

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{1_{t+\tau_{kj}}} - y_{1_{t+\tau_{kj}}}|| = \inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{1_t} - y_{1_t}|| = \alpha_{12} > 0$$

portanto

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{2_t} - y_{2_t}|| = \beta_{12} \geq \alpha_{12} > 0$$

isto é, $x_2(t)$ e $y_2(t)$ são soluções distintas de $\dot{x}(t) = G_2(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$.

Então se chamarmos de p_1 e p_2 ($p_1 \geq 1$, $p_2 \geq 1$) o número de soluções distintas em $\overline{C}_B$ de $\dot{x}(t) = G_1(t, x_t)$ e $\dot{x}(t) = G_2(t, x_t)$ respectivamente temos $p_2 \geq p_1$.

Analogamente se tomarmos soluções distintas de $\dot{x}(t) = G_2(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$ (portanto separadas) teremos em correspondência soluções distintas de $\dot{x}(t) = G_1(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$, portanto $p_2 \geq p_1$.

Então $p_1 = p_2 (=p)$.

Sejam

$$\alpha = \min\{\alpha_{ik}; i, k = 1, \dots, p \ i \neq k\}.$$

$$\beta = \min\{\beta_{jm}; j, m = 1, \dots, p \ j \neq m\}.$$

Por (2) $\beta \geq \alpha$.

Analogamente $\alpha \geq \beta$. Então $\alpha = \beta = \lambda_0$.

Portanto $||x_t - y_t|| \geq \lambda_0$ onde $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$, $\forall G \in H(F)$.

Nota: sob a hipótese que o sistema $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$ tem somente soluções separadas em $\overline{C}_B$ para toda $G \in H(F)$, vimos que $\exists \lambda_0 > 0$ tal que $||x_t - y_t|| \geq \lambda_0$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são soluções quaisquer de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$ em $\overline{C}_B$, $G \in H(F)$. Chamaremos λ_0 de *constante de separação* em $\overline{C}_B$.

Teorema 2.9 (Teorema de Amerio) - Suponhamos que para cada $G \in H(F)$ o sistema (2.2) tenha somente soluções separadas em $\overline{C}_B$. Então a solução $\xi(t)$ de (2.1) tal que $\xi_t \in \overline{C}_B$ para $t \geq 0$ é assintoticamente quase periódica e assim (2.1) tem solução q.p.

Prova:

Para qualquer sequência $\{\tau'_k\}$, $\tau'_k \rightarrow \infty$ quando $K \rightarrow \infty$ exis

te uma subsequência $\tau = \{\tau_k\}$ tal que $\{\xi(t+\tau_k)\}$ converge uniformemente em cada compacto de I e $\{F(t+\tau_k, \varphi)\}$ converge uniformemente em $\mathbb{R} \times K$.

Suponhamos que $\{\xi(t+\tau_k)\}$ não seja uniformemente convergente em I .

Então para algum $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < \frac{\lambda_0}{2}$) existem sequências $\{t'_j\}$, $\{k_j\}$, $\{m_j\}$ tais que $k_j \rightarrow \infty$, $m_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e

$$||\xi_{t'_j+\tau_{k_j}} - \xi_{t'_j+\tau_{m_j}}|| \geq \varepsilon.$$

Como $\{\xi_{\tau_k}\}$ é convergente,

$$||\xi_{\tau_{k_j}} - \xi_{\tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}$$

para j suficientemente grande. Desde que $\varepsilon < \frac{\lambda_0}{2}$, $\exists t_j \geq 0$ tal que

$$\varepsilon \leq ||\xi_{t_j+\tau_{k_j}} - \xi_{t_j+\tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

Assim existem sequências $\gamma = \{t_j\}$, $\tau' = \{\tau_{k_j}\}$, $\tau'' = \{\tau_{m_j}\}$ com $\tau' \subset \tau$, $\tau'' \subset \tau$ tais que

$$\varepsilon < ||\xi_{t_j+\tau_{k_j}} - \xi_{t_j+\tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

Sejam

$$x^j(t) = \xi(t+t_j+\tau_{k_j}).$$

$$y^j(t) = \xi(t+t_j+\tau_{m_j}).$$

$x^j(t)$ e $y^j(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = F(t+t_j+\tau_{k_j}, x_t)$ e $\dot{x}(t) = F(t+t_j+\tau_{m_j}, x_t)$ respectivamente, $x_t^j \in K$, $y_t^j \in K$.

Como $F(t, \varphi)$ é q.p. em t uniformemente para $\varphi \in C_{B^*}$, pelo T.1.5 existem subsequências $\gamma' \subset \gamma$, $\delta \subset \tau'$, $\delta' \subset \tau''$ com subíndices comuns tais que:

$$T_{\gamma'}, T_{\delta} F = T_{\gamma'+\delta} F \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}$$

e

$$T_{\gamma'}, T_{\delta'}, F = T_{\gamma'+\delta'}, F \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}.$$

Mas $T_{\delta} F = T_{\delta'}, F = G$, portanto $T_{\gamma'+\delta} F = T_{\gamma'+\delta'}, F = T_{\gamma'}, G = H$ c-unif

formemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$.

Além disso $x^j(t) \rightarrow x(t)$ e $y^j(t) \rightarrow y(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$; $x_t \in K$, $y_t \in K$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = H(t, x_t)$; $\|x_t\| \leq B$, $\|y_t\| \leq B$, $t \in \mathbb{R}$.

Como $x_0^j = \xi_{t_j + \tau_{k_j}}$, $y_0^j = \xi_{t_j + \tau_{m_j}}$ segue que:

$$\varepsilon \leq \|x_0 - y_0\| \leq \frac{\lambda_0}{2},$$

portanto $x(t)$ e $y(t)$ são soluções distintas de $\dot{x}(t) = H(t, x_t)$, $H \in H(F)$, em $\overline{C}_B$, mas não satisfazem $\|x_t - y_t\| \geq \lambda_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição.

Segue então que $\{\xi(t + \tau_k)\}$ é uniformemente convergente em $[0, \infty)$, ou seja, $\xi(t)$ é a.q.p.

Pelo T.2.5, (2.1) tem solução q.p.

Corolário - Sob as hipóteses do teorema anterior, se $\xi(t)$ é uma solução de (2.1) definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\|\xi_t\| \leq B$, $\forall t \in \mathbb{R}$ então $\xi(t)$ é solução q.p. de (2.1).

Prova:

Para $t \geq 0$, $\xi(t)$ é a.q.p.

Pelo T.2.5, $p^*(t)$ é solução q.p. de (2.1) ($\therefore$ definida em $\mathbb{R}$) onde

$$p^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi(t + \tau_k)$$

uniformemente em I e $\{\tau_k\} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Como $\|\xi_t\| \leq B$ e $\|p_t^*\| \leq B$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se $\xi(t)$ e $p^*(t)$ fossem soluções distintas de (1), deveríamos ter:

$$\|\xi_t - p_t^*\| \geq \lambda_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o que seria uma contradição.

$$\therefore \xi(t) = p^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.10 - Seja P uma propriedade hereditária. Se para cada $G \in H(F)$ (2.2) tem uma única solução em $\overline{C}_B$ que tem a propriedade P então essas soluções são quase periódicas, com módulos contidos no módulo de F .

Prova:

Seja $x(t)$ solução de [2,1] tal que $\|x(t)\| \leq B \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $x(t)$ tem a propriedade P.

Para uma sequência $\{\tau'_k\}$ qualquer, $\exists$ subsequência $\tau = \{\tau_k\}$ tal que $\{x(t+\tau_k)\}$ converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $\{F(t+\tau_k, \psi)\} \rightarrow G(t, \psi)$ c-uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$.

Suponhamos que $\{x(t+\tau_k)\}$ não seja uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Então $\exists \epsilon > 0$ e sequências $\gamma = \{t_j\}$, $\tau' = \{\tau_{k_j}\} \subset \tau$ e $\tau'' = \{\tau_{m_j}\} \subset \tau$ tais que $k_j \rightarrow \infty$, $m_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e

$$|x(t_j + \tau_{k_j}) - x(t_j + \tau_{m_j})| \geq \epsilon.$$

Sejam $\xi^j(t) = x(t+t_j+\tau_{k_j})$ e $\eta^j(t) = x(t+t_j+\tau_{m_j})$.

Então $\xi^j(t)$ e $\eta^j(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = F(t+t_j+\tau_{k_j}, x_t)$ e $\dot{x}(t) = F(t+t_j+\tau_{m_j}, x_t)$ respectivamente; $\xi_t^j \in \overline{C}_B \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $\eta_t^j \in \overline{C}_B \quad t \in \mathbb{R}$.

Como $F(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in C_{B^*}$, pelo T.1.5 existem subsequências $\gamma' \subset \gamma$, $\delta \subset \tau'$, $\delta' \subset \tau''$ com subíndices comuns tais que:

$$T_{\gamma'+\delta} F = T_{\gamma'} T_{\delta} F \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}$$

e

$$T_{\gamma'+\delta'} F = T_{\gamma'} T_{\delta'} F \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}.$$

Como $T_{\delta} F = T_{\delta'} F = G$ segue que $T_{\gamma'+\delta} F = T_{\gamma'+\delta'} F = T_{\gamma'} G = H$.

Além disso $T_{\gamma'+\delta} x = y$ e $T_{\gamma'+\delta'} x = z$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$, $y_t \in \overline{C}_B$, $z_t \in \overline{C}_B \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Então $y(t)$ e $z(t)$ são soluções de $\dot{x}(t) = H(t, x_t)'$ e ambas tem a propriedade P.

Pela unicidade: $y(t) = z(t)$.

Mas

$$x_{t_j+\tau_{k_j}} \rightarrow y_0 \text{ e } x_{t_j+\tau_{m_j}} \rightarrow z_0$$

e

$$|x(t_j+\tau_{k_j}) - x(t_j+\tau_{m_j})| \geq \epsilon$$

e assim $\|y_0 - z_0\| \geq \epsilon$, o que é uma contradição.

Então $\{x(t+\tau_k)\}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ e $\therefore x(t)$ é q.p. Mostremos que $\text{mod } x(t) \subset \text{mod } F(t, \psi)$:

Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow F(t, \psi)$ ϕ -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$; $\{\tau_k\}$ tem subsequência que vamos denotar por $\{\tau_k\}$ mesmo tal que $\{x(t+\tau_k)\}$ converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$. Seja

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t+\tau_k)$$

uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Mas então $y(t)$ é solução de (2.1), $y \in \overline{C}_B$ e y tem a propriedade P , logo $y(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Se $\{x(t+\tau_k)\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$ obtemos como acima duas soluções em $\overline{C}_B$ de uma equação no hull, ambas tendo a propriedade P , o que é uma contradição.

Assim $x(t+\tau_k) \rightarrow x(t)$ uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $K \rightarrow \infty$ e o resultado segue pelo Lema 1.1.

Corolário - Se para cada $G \in H(F)$, (2.2) tem uma única solução em $\overline{C}_B$, essas soluções são quase periódicas e seus módulos estão contidos no módulo de F .

Prova:

Análoga à do T.2.10.

Consideremos agora os sistemas:

$$\dot{x}(t) = A(t, x_t) \tag{2.3}$$

$$\dot{x}(t) = B(t, x_t), \quad B \in H(A) \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(t) = A(t, x_t) + h(t) \tag{2.5}$$

onde $A(t, \psi)$ é contínua para $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$, linear em ψ , q.p. em t uniformemente para $\psi \in C$ e $h(t)$ é contínua para $t \in \mathbb{R}$, quase periódica.

Nota: $\exists L > 0$ tal que $|A(t, \psi)| \leq L \|\psi\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \psi \in C$ e $B(t, \psi)$ é linear em ψ .

Teorema 2.11 - Suponhamos que para cada $B \in H(A)$, a única solu

ção limitada em $\mathbb{R}$ de (2.4) é $x \equiv 0$.

Se (2.5) tem uma solução limitada em I , então tem solução q.p. com módulo contido em $\text{mod}(A, h)$.

Prova:

Se (2.5) tem solução limitada em I , então pelo Lema 2.3 para cada $B+g \in H(A+h)$,

$$\dot{x}(t) = B(t, x_t) + g(t) \quad (2.6)$$

tem solução limitada em $\mathbb{R}$. Tal solução é única, pois se para alguma $(B+g) \in H(A+h)$, (2.6) tivesse duas soluções $x(t)$ e $y(t)$ limitadas em $\mathbb{R}$, $\psi(t) = x(t) - y(t)$ seria solução não nula de (2.4), limitada em $\mathbb{R}$, uma contradição.

Seja $x(t)$ a solução (única) de $\dot{x}(t) = A(t, x_t) + h(t)$, limitada em $\mathbb{R}$.

Pelo corolário do T.2.10, $x(t)$ é q.p. e $\text{mod } x \subset \text{mod}(A+h)$. Mas $\text{mod}(A+h) \subset \text{mod}(A, h)$, pela proposição 1.1.

Segue então o resultado.

Nota: Em [9], Kato introduziu uma nova norma em $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, com a qual reuniu condições para provar o Teorema de Favard para equações diferenciais com retardamento. É o que faremos até o final deste parágrafo.

Consideremos a seguinte norma em $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$:

$$||\varphi||_* = \left(\int_{-h}^0 |\varphi(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in C.$$

Propriedades:

$$1) \quad ||\varphi||_* \leq \sqrt{h} \quad ||\varphi||.$$

2) Se $\varphi(s)$ satisfaz uma condição de Lipschitz com constante de Lipschitz $K > 0$ então:

$$||\varphi||_* \geq \sqrt{\frac{||\varphi||^2}{3K^*(||\varphi||)}} \quad , \quad K^*(\alpha) = \max\left\{\frac{1}{h}, \frac{K}{\alpha}\right\}.$$

Demonstrações:

$$1) \quad ||\varphi||_* = \left(\int_{-h}^0 |\varphi(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-h}^0 ||\varphi||^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = ||\varphi|| \cdot \sqrt{h}.$$

2) Seja $\sigma \in [-h, 0]$ tal que $||\psi|| = |\psi(\sigma)|$.

Como $|\psi(s) - \psi(s')| \leq K|s-s'|$ $-h \leq s, s' \leq 0$, to
mando $s' = \sigma$ temos:

$$|\psi(s)| \geq ||\psi|| - K|s-\sigma|$$

$$\therefore |\psi(s)| \geq \max\{0, ||\psi|| - K|s-\sigma|\}.$$

Então

$$||\psi||_*^2 = \int_{-h}^0 |\psi(s)|^2 ds \geq I(\sigma)$$

$$\text{onde } I(\sigma) = \int_{-h}^0 [\max\{0, ||\psi|| - K|s-\sigma|\}]^2 ds$$

$$\begin{aligned} I(-h) &= \int_{-h}^0 [\max\{0, ||\psi|| - K(s+h)\}]^2 ds = \\ &= \int_0^h [\max\{0, ||\psi|| - K\theta\}]^2 d\theta. \end{aligned}$$

$$\text{Seja } g(\theta) = ||\psi|| - K\theta.$$

$$\text{Para } \theta = 0 \text{ temos } \max\{0, g(\theta)\} = ||\psi||.$$

Além disso

$$g(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{||\psi||}{K}.$$

Então:

$$i) \text{ Se } \frac{||\psi||}{K} \in [0, h], \max\{0, ||\psi|| - K\theta\} =$$

$$= \begin{cases} ||\psi|| - K\theta & \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{||\psi||}{K} \\ 0 & \text{para } \frac{||\psi||}{K} \leq \theta \leq h \end{cases}$$

$$ii) \text{ Se } \frac{||\psi||}{K} > h \text{ então } \max\{0, ||\psi|| - K\theta\} = ||\psi|| - K\theta \\ \text{para } 0 \leq \theta \leq h.$$

Então em ambos os casos:

$$I(-h) = \int_0^\alpha (||\psi|| - Ks)^2 ds \text{ onde } \alpha = \min\{h, \frac{||\psi||}{K}\}.$$

$$\begin{aligned} I(-h) &= \int_0^\alpha (||\psi|| - Ks)^2 ds = ||\psi||^2 \alpha + K^2 \frac{\alpha^3}{3} - K||\psi||\alpha^2 = \\ &= \frac{\alpha}{3} ||\psi||^2 + \frac{\alpha(2||\psi|| - K\alpha)(||\psi|| - K\alpha)}{3} \geq \frac{\alpha}{3} ||\psi||^2. \end{aligned}$$

Além disso para $\sigma \in [-h, 0]$, segue que $I(\sigma) \geq I(-h)$, já que

$$|s-\sigma| \leq |s+h| \Rightarrow ||\psi|| - L|s-\sigma| \geq ||\psi|| - L|s+h|,$$

$$\forall s \in [-h, 0].$$

Então temos:

$$||\psi||_*^2 \geq I(\sigma) \geq I(-h) \geq \frac{\alpha}{3} ||\psi||^2$$

$$\therefore ||\psi||_* \geq \sqrt{\frac{||\psi||^2}{3 \cdot \frac{1}{\alpha}}}$$

ou seja:

$$||\psi||_* \geq \sqrt{\frac{||\psi||^2}{3K^*(||\psi||)}} \text{ onde } K^*(\alpha) = \max\{\frac{1}{h}, \frac{K}{\alpha}\}.$$

Lema 2.5 - Para uma solução $x(t)$ de (2.1) limitada em $\mathbb{R}$ seja

$$\lambda(x) = \sup\{||x_t||_*, t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\Lambda(F) = \inf\{\lambda(x); x(t) \text{ é solução de (2.1) limitada em } \mathbb{R}\}.$$

Então para cada $G \in H(F)$, $\Lambda(F) = \Lambda(G)$.

Prova:

Observemos que $\lambda(x) < \infty$, se $x(t)$ é limitada em $\mathbb{R}$.

Como $\Lambda(F) = \inf\{\lambda(x), x(t) \text{ é solução de (2.1) limitada em } \mathbb{R}\}$, $\forall \epsilon > 0 \exists$ uma solução de (2.1) limitada em $\mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(x) \leq \Lambda(F) + \epsilon.$$

Pelo Lema 2.3, para toda $G \in H(F)$ o sistema (2.2) tem solução $y(t)$ limitada em $\mathbb{R}$ tal que $x(t+\tau_k) \rightarrow y(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$, para alguma sequência $\{\tau_k\}$.

$$||y_t||_* - ||x_{t+\tau_k}||_* \leq ||x_{t+\tau_k} - y_t||_* \leq \sqrt{h} ||x_{t+\tau_k} - y_t||$$

$$\therefore ||y_t||_* \leq \sqrt{h} ||x_{t+\tau_k} - y_t|| + ||x_{t+\tau_k}||_*.$$

Mas $||x_{t+\tau_k} - y_t|| \rightarrow 0$ quando $K \rightarrow \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Então

$$||y_t||_* \leq \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{t+\tau_k}||_* \leq \lambda(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \lambda(y) \leq \lambda(x).$$

Assim:

$$\Lambda(G) \leq \lambda(y) \leq \lambda(x) \leq \lambda(F) + \epsilon, \forall \epsilon > 0 \quad \therefore \Lambda(G) \leq \Lambda(F).$$

Por outro lado, como $G \in H(F)$, G é q.p. em t uniforme mente para $\psi \in C$ e $F \in H(G)$. Com os mesmos argumentos usados acima mostra-se que $\Lambda(F) \leq \Lambda(G)$.

$$\therefore \Lambda(G) = \Lambda(F), \quad \forall G \in H(F).$$

Lema 2.6 - Suponhamos $L(\gamma) = \theta(\gamma^3)$ quando $\gamma \rightarrow \infty$, onde:

$$L(\gamma) = \sup\{|F(t, \psi)| \mid t \in \mathbb{R}, ||\psi|| \leq \gamma\}$$

Então $\forall \alpha > 0$, $\exists$ uma cte $\beta > 0$ tal que se $x(t)$ é solu ção de (2.1) limitada em $\mathbb{R}$ e satisfaz $\lambda(x) \leq \alpha$ então $||x_t|| \leq \beta$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Prova:

$L(\gamma) = \theta(\gamma^3)$ quando $\gamma \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{L(\gamma)}{\gamma^3} = 0.$$

Então $\forall \epsilon > 0$, $\exists K_0(\epsilon) > 0$ tal que $\frac{L(\gamma)}{\gamma^3} < \epsilon$ para $\gamma \geq K_0(\epsilon)$.

Dado $\alpha > 0$, sejam

$$\epsilon = \frac{1}{3\alpha^2} \quad \text{e} \quad \beta > \max\{K_0(\frac{1}{3\alpha^2}), \alpha \sqrt{\frac{3}{h}}\}.$$

Então para $\gamma \geq \beta$ temos $\frac{L(\gamma)}{\gamma^3} < \frac{1}{3\alpha^2}$.

Mostremos que tal β é conveniente:

Suponhamos que exista uma solução $x(t)$ de (2.1) limita da em $\mathbb{R}$ tal que $\lambda(x) \leq \alpha$ e $\gamma = \sup\{||x_t||, t \in \mathbb{R}\} > \beta$.

Então podemos achar um $\delta > 0$ e um $\tau \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\gamma - \delta \geq \beta, \quad \frac{L(\gamma)}{(\gamma - \delta)^3} < \frac{1}{3\alpha^2} \quad \text{e} \quad ||x_\tau|| \geq \gamma - \delta.$$

Como $|\dot{x}(t)| = |F(t, x_t)| \leq L(\gamma)$, x_τ satisfaz:

$$|x_\tau(\theta) - x_\tau(\theta')| \leq L(\gamma) |\theta - \theta'|.$$

Então:

$$\alpha \geq \lambda(x) \geq ||x_\tau||_* \geq \sqrt{\frac{||x_\tau||^2}{3K^*(||x_\tau||)}} \geq \sqrt{\frac{(\gamma - \delta)^2}{3K^*(||x_\tau||)}}$$

onde

$$K^*(||x_\tau||) = \max\left\{\frac{1}{h}, \frac{L(\gamma)}{||x_\tau||}\right\}$$

Assim

$$\alpha \geq \sqrt{\frac{(\gamma-\delta)^2}{3 \cdot \frac{1}{h}}} \quad \text{ou} \quad \alpha \geq \sqrt{\frac{(\gamma-\delta)^2}{3 \cdot \frac{L(\gamma)}{||x_\tau||}}} \geq \sqrt{\frac{(\gamma-\delta)^2}{3 \cdot \frac{L(\gamma)}{\gamma-\delta}}} = \sqrt{\frac{(\gamma-\delta)^3}{3L(\gamma)}} \Rightarrow$$

$$\frac{3\alpha^2}{h} \geq (\gamma-\delta)^2 \geq \beta^2 \quad \text{ou} \quad 3\alpha^2 \geq \frac{(\gamma-\delta)^3}{L(\gamma)} \Rightarrow$$

$$\alpha \sqrt{\frac{3}{h}} \geq \beta \quad \text{ou} \quad \frac{L(\gamma)}{(\gamma-\delta)^3} \geq \frac{1}{3\alpha^2}$$

o que é contradição, em ambos os casos.

Lema 2.7 - Sob as hipóteses do Lema 2.6, suponha que o sistema (2.1) tenha solução limitada em $\mathbb{R}$. Então (2.1) tem solução limitada em $\mathbb{R}$ com a propriedade $\lambda(x) = \Lambda(F)$.

Prova:

$$\Lambda(F) = \inf\{\lambda(x) \mid x(t) \text{ é solução de (2.1) limitada em } \mathbb{R}\}.$$

Então existe uma sequência $\{x^k(t)\}$ de soluções de (2.1) limitadas em $\mathbb{R}$ tais que:

$$\lambda(x^k) \leq \Lambda(F) + \frac{1}{k} \leq \Lambda(F) + 1.$$

Pelo Lema 2.6, $\exists \beta > 0$ tal que

$$||x_t^k|| \leq \beta \quad \forall k, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso $|\dot{x}^k(t)| \leq L(\beta) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k.$

Então, pelo T.1.16, $\{x^k(t)\}$ tem subsequência $\{x^{kj}(t)\}$ a qual converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Seja $x(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{kj}(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Além disso $\exists$ compacto $K \subset C$ tal que $x_t^k \in K, \forall k, \forall t \in \mathbb{R}$, por exemplo $K = \{\phi \in C \mid ||\phi|| \leq \beta, \quad |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \leq L(\beta) |\theta - \theta'|, \quad -h \leq \theta, \theta' \leq 0\}$, e consequentemente $x_t \in K$.

Como $F(t, \psi)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times K$,
 $F(t, x_t^{kj}) \rightarrow F(t, x_t)$.

Então $x(t)$ é solução de (2.1) limitada em $\mathbb{R}$.

$$||x_t||_* - ||x_t^{kj}||_* \leq ||x_t - x_t^{kj}||_* < \sqrt{h} ||x_t - x_t^{kj}||,$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ||x_t||_* \leq ||x_t^{kj}||_* + \sqrt{h} ||x_t - x_t^{kj}|| < \Lambda(F) +$$

$$+ \frac{1}{K_j} + \sqrt{h} ||x_t - x_t^{kj}||$$

para $K_j \rightarrow \infty$:

$$||x_t||_* \leq \Lambda(F), \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(x) \leq \Lambda(F).$$

$$\therefore \lambda(x) = \Lambda(f).$$

Nota: de modo análogo ao de equações diferenciais ordinárias se definirmos a norma de uma solução $x(t)$ de (2.1) limitada em $\mathbb{R}$ por

$$||x||_* = \sup\{||x_t||_*, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

o lema 2.7 afirma que (2.1) tem solução com norma mínima, se $L(\gamma) = o(\gamma^3)$ quando $\gamma \rightarrow \infty$.

Teorema 2.12 (Teorema de Favard) - Suponhamos que para cada $B \in H(A)$, toda solução não trivial e limitada em $\mathbb{R}$ do sistema (2.4) satisfaz

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_t|| > 0;$$

então para qualquer função quase periódica $h(t)$ o sistema (2.5) tem solução quase periódica, sempre que tiver solução limitada em I .

Prova:

$A: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ linear em ψ , q.p. em t uniformemente para $\psi \in C$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ q.p.

Então $|A(t, \psi) + h(t)| \leq |A(t, \psi)| + |h(t)| \leq L \cdot ||\psi|| +$
 $+ M \leq L\alpha + M = L(\alpha) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall ||\psi|| \leq \alpha$, onde M é uma cte po

sitiva.

Se (2.5) tem solução limitada em I , pelo Lema 2.3 ele tem solução limitada em $\mathbb{R}$, bem como cada equação em $H(A+h)$. Como

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{L(\alpha)}{\alpha^3} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{L\alpha + M}{\alpha^3} = 0,$$

segue pelo Lema 2.7 que (2.5) tem uma solução $x(t)$ limitada em $\mathbb{R}$ tal que $\lambda(x) = \lambda(f)$. (Isto é: solução com norma mínima.)

Provemos agora que para cada $B(t, \varphi) + g(t) \in H(A+h)$ o sistema (2.6) tem uma única solução limitada em $\mathbb{R}$ com norma mínima.

Como vimos no Lema 2.5, para cada $B+g \in H(A+h)$, o sistema (2.6) tem uma solução $y(t)$ limitada em $\mathbb{R}$ tal que $x(t+\tau_k) \rightarrow y(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ para alguma sequência $\{\tau_k\}$ e $\lambda(y) \leq \lambda(x)$.

Mas, no nosso caso, $\lambda(x) = \Lambda(A+h)$.

Então $\lambda(y) \leq \lambda(x) = \Lambda(A+h) = \Lambda(B+g)$.

$\therefore \lambda(y) = \Lambda(B+g)$.

Observemos que foi provado acima que "norma mínima" é propriedade hereditária.

Sejam $x^1(t)$ e $x^2(t)$ soluções de (2.6) limitadas em $\mathbb{R}$ com norma mínima: $\lambda(x^1) = \alpha = \lambda(x^2)$.

Então

$z(t) = \frac{1}{2} \{x^1(t) - x^2(t)\}$ é solução de (2.4) limitada em $\mathbb{R}$.

$y(t) = \frac{1}{2} \{x^1(t) + x^2(t)\}$ é solução de (2.6) limitada em $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2} \{|x^1(t)|^2 + |x^2(t)|^2\} = |y(t)|^2 + |z(t)|^2, \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{-h}^0 \{|x_t^1(s)|^2 + |x_t^2(s)|^2\} ds = \int_{-h}^0 \{|y_t(s)|^2 + |z_t(s)|^2\} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \{||x_t^1||_*^2 + ||x_t^2||_*^2\} = ||y_t||_*^2 + ||z_t||_*^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||y_t||_*^2 = \frac{1}{2} \{||x_t^1||_*^2 + ||x_t^2||_*^2\} - ||z_t||_*^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \lambda(y)^2 &= \sup\{||y_t||_*^2, t \in \mathbb{R}\} = \sup\{\frac{1}{2} (||x_t^1||_*^2 + ||x_t^2||_*^2) - \\
 &\quad - ||z_t||_*^2, t \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \frac{1}{2} \sup\{||x_t^1||_*^2 + ||x_t^2||_*^2, t \in \mathbb{R}\} - \inf\{||z_t||_*^2, t \in \mathbb{R}\} \leq \\
 &\leq \alpha^2 - \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_*^2. \\
 \therefore \lambda(y)^2 &\leq \alpha^2 - \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_*^2.
 \end{aligned}$$

Como $\alpha = \lambda(x^1) = \lambda(x^2)$ é a norma mínima dentre as normas das soluções de (2.6), segue que:

$$\alpha^2 \leq \lambda(y)^2.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 \leq \lambda(y)^2 &\leq \alpha^2 - \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_*^2 \Rightarrow \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_*^2 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_* = 0.
 \end{aligned}$$

Como $z(t)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, pois é solução de (2.4), segue então pela propriedade 2 da $|| \cdot ||_*$ que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t|| = 0.$$

Então $z(t)$ é solução não nula de (2.4) limitada em $\mathbb{R}$ e

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t|| = 0,$$

o que é uma contradição.

Assim, para cada $B+g \in H(A+h)$, (2.6) tem uma única solução limitada em $\mathbb{R}$ com norma mínima. Segue agora o resultado por aplicação do T.2.10.

Nota: segue ainda pelo T.2.10 que o módulo de tal solução quase periódica está contido em $\text{mod}(A, h)$.

2.4 - ESTABILIDADE E CONDIÇÕES DE SEPARAÇÃO

Neste parágrafo usaremos as seguintes notações:

$$E = \{\phi \in C_B^* \mid ||\phi|| \leq \alpha < B^*\}.$$

$A(F, E)$: família de soluções x de (2.1) tais que $x_t \in E$ para $t \geq \sigma$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}$.

Para $x \in A(F, E)$, σ_x é o ínfimo dos σ tais que $x_t \in E$ para $t \geq \sigma$ (σ_x pode ser $-\infty$).

$B(F, E)$: família de soluções $x(t)$ de (2.1) tais que $x_t \in E, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.5 - $x \in B(F, E)$ é condicionalmente totalmente estável (C.T.E.) em E se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $||x_t - y_t(h)|| < \epsilon$ para $t \geq \sigma$, quando $y(h) \in A(F+h, E), ||y_\sigma(h) - x_\sigma|| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma > \sigma_{y(h)}$ e $|h(t)| < \delta(\epsilon)$ em $[\sigma, \infty)$, $h(t)$ é contínua.

O sistema (2.1) é C.T.E. em E se toda $x \in B(F, E)$ é C.T.E. em E .

Nota: com o mesmo argumento do T.2.2, pode-se provar que estabilidade condicional total é propriedade hereditária.

Diremos aqui que o sistema (2.1) satisfaz condição de separação em E se para cada $G \in H(F), \exists \lambda(G) > 0$ tal que se x, y são soluções distintas de (2.2) e $x_t \in E, y_t \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}, ||x_t - y_t|| \geq \lambda(G), t \in \mathbb{R}$.

Como vimos no L.2.4, podemos achar um número positivo $\lambda_0 = \lambda(G)$ independente de G que é chamado constante de separação em E .

Teorema 2.13 - Se o sistema (2.1) satisfaz condição de separação em E , então para cada $G \in H(F)$ o sistema (2.2) é C.T.E. em E . Além disso podemos escolher o número $\delta(.)$ dependendo só de ϵ e independente de G e da solução.

Prova:

Devemos provar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $G \in H(F)$ e qualquer $x \in B(G, E), ||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq \sigma$ quando $y \in A(G+h, E), ||x_\sigma - y_\sigma|| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma > \sigma_y$

e $|h(t)| < \delta(\epsilon)$ em $[\sigma, \infty)$.

Suponhamos que não exista tal δ .

Então:

$\exists \epsilon > 0$ e sequências $\{G^k\} \in H(F)$, $\{h^k(t)\}$, $\{x^k\} \in B(G^k, E)$, $\{y^k\} \in A(G^k + h^k, E)$, $\{t_k\}$, $\{\tau_k\}$, $\tau_k > t_k \quad \forall k$ tais que

$$|h^k(t)| < \frac{1}{k} \quad \text{em } [t_k, \infty), \quad ||x_{t_k}^k - y_{t_k}^k|| < \frac{1}{k},$$

$$t_k > \sigma_{y^k} \quad \text{e} \quad ||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| = \epsilon.$$

(Podemos assumir $\epsilon \leq \frac{\lambda_0}{2}$).

Sejam $u^k(t) = x^k(t + \tau_k)$ e $v^k(t) = y^k(t + \tau_k)$.

Então $u^k(t)$ e $v^k(t)$ são soluções de

$$\dot{x}(t) = G^k(t + \tau_k, x_t) \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = G^k(t + \tau_k, x_t) + h^k(t + \tau_k)$$

respectivamente e $u_t^k \in E \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $v_t^k \in E$ para $t \geq t_k - \tau_k$ ($t_k - \tau_k < 0$).

Como

$$|\dot{x}^k(t)| = |G^k(t, x_t^k)| \leq L(\alpha) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$|\dot{u}^k(t)| = |G^k(t + \tau_k, u_t^k)| \leq L(\alpha) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

existe um compacto $S \subset C_B^*$ tal que $x_t^k \in S$, $u_t^k \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k$.

Então, tomando uma subsequência de $\{t_k\}$, se for necessário, podemos afirmar que $x_{t_k}^k \rightarrow \psi \in S$ quando $k \rightarrow \infty$.

Como

$$||y_{t_k}^k - \psi|| \leq ||y_{t_k}^k - x_{t_k}^k|| + ||x_{t_k}^k - \psi|| < \frac{1}{k} + ||x_{t_k}^k - \psi||,$$

segue que $y_{t_k}^k \rightarrow \psi$ quando $k \rightarrow \infty$.

Então o conjunto $\{y_{t_k}^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \psi\}$ é compacto.

Assim $\{y^k(t_k + \theta)\}$ para $-h \leq \theta \leq 0$ é uniformemente limitado e equicontínuo.

Também $|\dot{v}^k(t)| = |\dot{y}^k(t + \tau_k)| = |G^k(t + \tau_k, v_t^k) + h^k(t + \tau_k)| \leq L(\alpha) + 1$ para $t \geq t_k - \tau_k$.

Portanto existe um compacto $S_1 \subset E$ tal que $v_t^k \in S_1$ para $t \geq t_k - \tau_k$ e $u_t^k \in S_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $G^k(t + \tau_k, \psi) \in H(F)$ e $H(F)$ é compacto (no sentido da convergência c -uniforme), $G^k(t + \tau_k, \psi)$ tem subsequência a

qual vamos denotar por $\{G^k(t+\tau_k, \phi)\}$ mesmo tal que $G^k(t+\tau_k, \phi) \rightarrow p(t, \phi)$ ϵ -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$ quando $k \rightarrow \infty$ e $p \in H(F)$.

Podemos assumir que $t_k - \tau_k \rightarrow \tau$ quando $k \rightarrow \infty$ (τ pode ser $-\infty$). No caso em que $\tau = -\infty$, tomando uma subsequência se for necessário, $v^k(t) \rightarrow \eta(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ quando $k \rightarrow \infty$.

Além disso $\eta_t \in S_1 \subset E \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e como $h^k(t+\tau_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, $\eta(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = p(t, x_t)$. Em outras palavras $\eta \in B(p, E)$.

Por outro lado, $\exists \xi(t)$ tal que $\xi_t \in S_1 \subset E \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $u^k(t) \rightarrow \xi(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

$\therefore \xi(t) \in B(p, E)$.

$$||\xi_0 - \eta_0|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||u_0^k - v_0^k|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| = \epsilon > 0.$$

Assim $\xi(t)$ e $\eta(t)$ são soluções distintas de $\dot{x}(t) = p(t, x_t)$, $\xi_t \in E$, $\eta_t \in E \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e

$$||\xi_0 - \eta_0|| \leq \frac{\lambda_0}{2}, \text{ o que é uma contradição.}$$

No caso em que $\tau > -\infty$ ($\tau \leq 0$) analogamente ao que foi feito acima podemos achar $\eta \in A(p, E)$, $\xi \in B(p, E)$. Além disso $\eta_\tau = \xi_\tau$ pois:

$$||\eta_\tau - \xi_\tau|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||v_{t_k - \tau_k}^k - u_{t_k - \tau_k}^k|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{t_k}^k - y_{t_k}^k|| = 0.$$

Seja

$$\eta^*(t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{para } t \geq \tau \\ \xi(t) & \text{para } t < \tau \end{cases}$$

então $\eta^* \in B(p, E)$.

Assim $\eta^* \in B(p, E)$, $\xi \in B(p, E)$, são distintas pois

$$||\eta_0^* - \xi_0|| = ||\eta_0 - \xi_0|| = \epsilon \quad (\epsilon > 0 \text{ e } \epsilon \leq \frac{\lambda_0}{2})$$

e temos também uma contradição.

Teorema 2.14 - Suponha que (2.1) tem uma solução $\xi(t)$ tal que

$\xi_t \in E, \forall t \in \mathbb{R}$. Se $\xi(t)$ é C.T.E. em E , então $\xi(t)$ é assintoticamente quase periódica e conseqüentemente (2.1) tem solução quase periódica.

Prova:

Sejam $\{\tau_k\}$ uma sequência tal que $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $\xi^k(t) = \xi(t + \tau_k)$.

Como $||\xi_t^k|| \leq \alpha$ e $|\dot{\xi}^k(t)| \leq L(\alpha) \forall t \in \mathbb{R}, \forall k$, existe um compacto $S \subset E$ tal que $\xi_t^k \in S \forall t \in \mathbb{R}, \forall k$.

$\xi^k(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = F(t + \tau_k, x_t)$ por $(0, \xi_{\tau_k})$ e $\xi^k(t)$ é C.T.E. em E com o mesmo $\delta(\cdot)$ de $\xi(t)$.

$\xi_0^k \in S$ e então $\exists k_0(\epsilon) > 0$ tal que se $m \geq k \geq k_0(\epsilon)$:

$$||\xi_0^k - \xi_0^m|| < \delta(\epsilon).$$

Além disso $|F(t + \tau_k, \psi) - F(t + \tau_m, \psi)| < \delta(\epsilon)$ em $\mathbb{R} \times S$, tomando uma subsequência de $\{\tau_k\}$, se for necessário.

Como $\xi_t^m \in S \subset E$ para $t \geq 0$ e $\xi^m(t)$ é solução de

$$\dot{x}(t) = F(t + \tau_k, x_t) + F(t + \tau_m, \xi_t^m) - F(t + \tau_k, \xi_t^m)$$

e $\xi^k \in B(F^{\tau_k}, E)$ é C.T.E. em E segue que:

$$||\xi_t^k - \xi_t^m|| < \epsilon \text{ para } t \geq 0, m \geq k \geq k_0(\epsilon)$$

$\therefore |\xi(t + \tau_k) - \xi(t + \tau_m)| < \epsilon$ para $t \geq 0, m \geq k \geq k_0(\epsilon)$, isto é, $\{\xi(t + \tau_k)\}$ é uniformemente convergente em I , ou seja, $\xi(t)$ é a.q.p.

Pelo T.2.5, (2.1) tem solução q.p.

Definições 2.6 -

i) $x \in B(F, E)$ é condicionalmente uniformemente estável (C.U.E.) em E se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq \tau$ sempre que $y \in A(F, E)$ e $||x_\sigma - y_\sigma|| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma > \sigma_y$.

ii) $x \in B(F, E)$ é condicionalmente uniformemente atrativa (C.U.A.) em E se $\exists \delta_0 > 0$ e $\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0$ tal que $||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq \sigma + T(\epsilon)$ sempre que $y \in A(F, E)$ e $||x_\sigma - y_\sigma|| < \delta_0$ para algum

$$\sigma > \sigma_y.$$

iii) $x \in B(F, E)$ é condicionalmente uniformemente as sintoticamente estável (C.U.A.E.) em E se [i] e [ii] forem verificadas.

iv) O sistema (2.1) é C.U.A.E. em E se toda $x \in B(F, E)$ é C.U.A.E. em E .

Teorema 2.15 - O sistema (2.1) satisfaz condição de separação em E se e somente se para cada $G \in H(F)$, (2.2) é C.U.A.E. em E com $(\delta_0, \delta(\cdot), T(\cdot))$ comum.

Prova:

Suponhamos que (2.1) satisfaz condição de separação em E ; pelo T.2.13, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\forall G \in H(F)$, toda solução $x \in B(G, E)$ satisfaz $\|x_t - y_t\| < \epsilon$ para $t \geq \sigma$, sempre que $y \in A(G, E)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma > \sigma_y$.

Seja agora δ_0 tal que

$$0 < \delta_0 < \delta\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)$$

onde λ_0 é a constante de separação de (2.1).

Devemos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $G \in H(F)$, toda solução $x \in B(G, E)$ satisfaz $\|x_t - y_t\| < \epsilon$ para $t \geq \sigma + T(\epsilon)$, sempre que $y \in A(G, E)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta_0$ para algum $\sigma > \sigma_y$.

Suponhamos que não.

Então $\exists \epsilon > 0$ e sequências $\{G^k\} \in H(F)$, $\{x^k\} \in B(G^k, E)$, $\{y^k\} \in A(G^k, E)$, $\{t_k\}$ ($t_k > \sigma_{y^k}$), $\{\tau_k\}$ com $\tau_k > t_k + k$ tais que

$$(a) \quad \|x_{t_k}^k - y_{t_k}^k\| < \delta_0 \quad (< \delta(\frac{\lambda_0}{2}))$$

$$(b) \quad \|x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k\| \geq \epsilon.$$

Desde que (a) implica que $\|x_t^k - y_t^k\| < \frac{\lambda_0}{2}$ para $t \geq t_k$ por (b) temos:

$$\epsilon \leq \|x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k\| \leq \frac{\lambda_0}{2}.$$

Sejam $u^k(t) = x^k(t + \tau_k)$ e $v^k(t) = y^k(t + \tau_k)$ e seja S o seguinte

compacto:

$$(c) S = \{\psi \in C_B^* \mid \psi \in E, |\psi(\theta) - \psi(\theta')| \leq L(\alpha) |\theta - \theta'|\}.$$

Então $u^k(t)$ e $v^k(t)$ são soluções de:

$$\dot{x}(t) = G^k(t + \tau_k, x_t)$$

e $u_t^k \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}, v_t^k \in S$ para $t \geq -k$.

Como $G^k(t + \tau_k, \psi) \in H(F)$ e $H(F)$ é compacto, $\exists H \in H(F)$ tal que $G^k(t + \tau_k, \psi) \rightarrow H(t, \psi)$ α -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$. Além disso $u^k(t) \rightarrow \xi(t)$, $v^k(t) \rightarrow \eta(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$.

Então $\xi \in B(H, E)$, $\eta \in B(H, E)$.

$$\|\xi_0 - \eta_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_0^k - v_0^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k\|$$

$\Rightarrow \epsilon \leq \|\xi_0 - \eta_0\| \leq \frac{\lambda_0}{2}$, o que contradiz a condição de separação.

$\therefore \forall G \in H(F)$, (2.2) é C.U.A.E. em E .

Suponhamos agora que para cada $G \in H(F)$, o sistema (2.2) é C.U.A.E. em E com $(\delta_0, \delta(\cdot), T(\cdot))$ comum.

Primeiramente vamos ver que quaisquer duas soluções distintas $x, y \in B(G, E)$, $G \in H(F)$ satisfazem:

$$(d) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \inf \|x_t - y_t\| \geq \delta_0.$$

Suponhamos que não. Então para alguma $G \in H(F)$, existem $x, y \in B(G, E)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf \|x_t - y_t\| < \delta_0.$$

Como $x(t) \neq y(t)$, $\|x_\sigma - y_\sigma\| = \epsilon$ para algum σ e algum ϵ . Para tal $\epsilon > 0$, seja $T(\frac{\epsilon}{2})$ o número na definição de C.U.A.E. em E . Então $\exists \tau$ tal que $\tau < \sigma - T(\frac{\epsilon}{2})$ e $\|x_\tau - y_\tau\| < \delta_0 \Rightarrow \|x_t - y_t\| < \frac{\epsilon}{2}$ para $t \geq \tau + T(\frac{\epsilon}{2})$.

$\therefore \|x_\sigma - y_\sigma\| < \frac{\epsilon}{2}$ o que é uma contradição.

Seja S o compacto em (c).

Então existe uma cobertura finita consistindo de m_0 bolas com diâmetro menor que $\frac{\lambda_0}{4}$. Mostremos que o número de soluções em $B(G, E)$ é no máximo m_0 :

Se tivéssemos $m_0 + 1$ soluções em $B(G, E)$, $x^j(t)$, $j = 1, \dots, m_0 + 1$, existiria τ tal que:

$$||x_\tau^i - x_\tau^j|| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{por } [d]).$$

Entretanto duas dessas soluções, digamos x^i, x^j ($i \neq j$) estão numa mesma bola desde que para qualquer $x \in B(G, E)$, $x_t \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim $||x_\tau^i - y_\tau^j|| < \frac{\delta_0}{4}$, o que é uma contradição.

Assim o número de soluções em $B(G, E)$ é $m \leq m_0$,

$$B(G, E) = \{x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)\}.$$

Além disso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf ||x_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad i \neq j.$$

Consideremos uma sequência $\{\tau_k\}$ tal que $\tau_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e $G(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $\{x^j(t+\tau_k)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua, $x^j(t+\tau_k) \rightarrow y^j(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq m$.

$$\therefore y^j(t) \in B(G, E) \quad 1 \leq j \leq m.$$

$$||y_t^i - y_t^j|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{t+\tau_k}^i - x_{t+\tau_k}^j||, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||y_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \neq j.$$

Como o número de soluções em $B(G, E)$ é m , $B(G, E)$ consiste de $y^1, \dots, y^m$, onde $||y_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \neq j$.

$\therefore$ (2.1) satisfaz condição de separação em E com constante de separação $= \delta_0$.

Nota: seja $\xi(t)$ solução de (2.1) tal que $||\xi_t|| \leq B \leq B^* \quad \forall t \geq 0$.

Denotaremos por $(\eta, G) \in H(\xi, F)$ o seguinte fato: existe uma sequência $\{\tau_k\}$ tal que $\tau_k \rightarrow \infty$, $\xi(t+\tau_k) \rightarrow \eta(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $F(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$ quando $k \rightarrow \infty$.

Definições 2.7

$\hat{\lambda}$) $H(\xi, F)$ é uniformemente estável no hull se $\forall \epsilon > 0$,

$\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|x_t - y_t\| < \epsilon$, para $t \geq \sigma$, quando $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma \in \mathbb{R}$.

ii) $H(\xi, F)$ é uniformemente atrativa no hull se $\exists \delta_0 > 0$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists T(\epsilon) > 0$ tal que $\|x_t - y_t\| < \epsilon$ para $t \geq \sigma + T(\epsilon)$, sempre que $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta_0$ para algum $\sigma \in \mathbb{R}$.

iii) $H(\xi, F)$ é uniformemente assintoticamente estável no hull se (i) e (ii) forem verificadas.

iv) $H(\xi, F)$ é fracamente uniformemente assintoticamente estável no hull se é uniformemente estável no hull e $\exists \delta_0 > 0$ tal que $\|x_t - y_t\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, sempre que $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta_0$ para algum $\sigma \in \mathbb{R}$.

Nota: podemos substituir σ por 0 nas definições acima.

Lema 2.8 - Seja $(x^k, G^k) \in H(\xi, F)$. Suponhamos que $x^k(t) \rightarrow x(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $G^k(t, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$ quando $k \rightarrow \infty$. Então $(x, G) \in H(\xi, F)$.

Prova:

$(x^k, G^k) \in H(\xi, F) \iff \exists \{\tau_m^k\}$ tal que $\tau_m^k \rightarrow \infty$, $\xi(t + \tau_m^k) \rightarrow x^k(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $F(t + \tau_m^k, \psi) \rightarrow G^k(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$ quando $m \rightarrow \infty$, $\forall k$.

Sejam $\tau_1^1 \in \{\tau_m^1\}$, $\tau_2^2 \in \{\tau_m^2\}$, ..., $\tau_k^k \in \{\tau_m^k\}$,

Então $\{\tau_k^k\} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, $\xi(t + \tau_k^k) \rightarrow x(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $F(t + \tau_k^k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$ quando $k \rightarrow \infty$.

$\therefore (x, G) \in H(\xi, F)$.

Teorema 2.16 - $H(\xi, F)$ é uniformemente assintoticamente estável no hull se e somente se é fracamente uniformemente assintoticamente estável no hull.

Prova:

Suponhamos que $H(\xi, F)$ é fracamente uniformemente assintoticamente estável no hull.

Então $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|x_t - y_t\| < \epsilon$ para $t \geq \sigma$ quando $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ e $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta(\epsilon)$ para algum $\sigma \in \mathbb{R}$. Além disso $\exists \delta_0 > 0$ tal que se $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta_0$, $\|x_t - y_t\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $\delta^* = \delta(\frac{\delta_0}{2})$ e $0 < \epsilon < \delta^*$.

Vamos mostrar que $\exists T(\epsilon) > 0$ tal que para $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ se $\|x_0 - y_0\| < \delta^*$, existe σ , $0 < \sigma \leq T(\epsilon)$ tal que $\|x_\sigma - y_\sigma\| < \delta(\epsilon)$.

Suponhamos que não exista $T(\epsilon)$.

Então para algum $\epsilon > 0$, existem sequências $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{G^k\}$ tais que $(x^k, G^k) \in H(\xi, F)$, $(y^k, G^k) \in H(\xi, F)$,

$$\|x_0^k - y_0^k\| < \delta^* \text{ e } \|x_t^k - y_t^k\| \geq \delta'(\epsilon) \text{ em } 0 \leq t \leq k.$$

Como $\|x_0^k - y_0^k\| < \delta^* = \delta(\frac{\delta_0}{2})$ e $H(\xi, F)$ é uniformemente estável no hull $\Rightarrow \|x_t^k - y_t^k\| < \frac{\delta_0}{2}$ para $t \geq 0$.

Tomando subsequências de $\{x^k(t)\}$, $\{y^k(t)\}$ e $\{G^k(t, \phi)\}$ as quais vamos denotar por $\{x^k(t)\}$, $\{y^k(t)\}$ e $\{G^k(t, \phi)\}$ mesmo podemos afirmar que: $x^k(t) \rightarrow u(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$, $y^k(t) \rightarrow v(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $G^k(t, \phi) \rightarrow G(t, \phi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$.

Pelo Lema 2.8: (u, G) , $(v, G) \in H(\xi, F)$.

Seja $t \geq 0$, fixado arbitrariamente.

$\exists k_0$ tal que $k \geq k_0$, $t \in [0, k]$.

$$\therefore \|x_t^k - y_t^k\| \geq \delta(\epsilon) \quad \forall k \geq k_0.$$

$$\text{Além disso } \exists k_1 \mid k \geq k_1 : \|x_t^k - u_t\| < \frac{\delta(\epsilon)}{4}, \\ \|y_t^k - v_t\| < \frac{\delta(\epsilon)}{4}.$$

$$\text{Então para } k \geq \max\{k_0, k_1\} \Rightarrow \|x_t^k - y_t^k\| \geq \delta(\epsilon), \\ \|x_t^k - u_t\| < \frac{\delta(\epsilon)}{4}, \quad \|y_t^k - v_t\| < \frac{\delta(\epsilon)}{4}.$$

$$\therefore \|y_t^k - x_t^k\| \leq \|y_t^k - v_t\| + \|v_t - u_t\| + \|u_t - x_t^k\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u_t - v_t\| > \frac{\delta(\epsilon)}{2}.$$

$$\therefore \|u_t - v_t\| > \frac{\delta(\epsilon)}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado,

$$||u_0 - v_0|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_0^k - y_0^k|| < \delta_0 \Rightarrow ||u_t - v_t|| \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$, o que contradiz $||u_t - v_t|| > \frac{\delta(\epsilon)}{2}$.

Então $\exists T(\epsilon) > 0$ tal que para quaisquer $(x, G), (y, G) \in H(\xi, F)$, se $||x_0 - y_0|| < \delta^*$, existe $\sigma \in (0, T(\epsilon))$ tal que $||x_\sigma - y_\sigma|| < \delta(\epsilon)$ e como $H(\xi, F)$ é uniformemente estável, $||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq T(\epsilon)$.

$\therefore H(\xi, F)$ é uniformemente assintoticamente estável no hull.

A recíproca é imediata.

Nota: se $(u, G) \in H(\xi, F)$ então $u(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = G(t, x_t)$, $G \in H(F)$ e $u_t \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$, onde

$$S = \{\psi \in C_{B^*} \mid ||\psi|| \leq B, |\psi(\theta) - \psi(\theta')| \leq L(B) |\theta - \theta'|, \\ -h \leq \theta, \theta' \leq 0\}.$$

Chamemos de $H^*(G)$ o seguinte conjunto:

$$H^*(G) = \{u \mid (u, G) \in H(\xi, F)\}.$$

Definição 2.8 - $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull se $H^*(G)$ é finito para cada G e para $x, y \in H^*(G)$, $x \neq y$, $\exists \lambda(x, y, G) > 0$ tal que $||x_t - y_t|| \geq \lambda(x, y, G) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.9 - Se $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull podemos escolher $\lambda_0 = \lambda(x, y, G)$ independente de G, x, y .

Prova:

Sejam $H^*(G_1)$ e $H^*(G_2)$ quaisquer.

Sejam $x_1, y_1 \in H(G_1)$ $x_1 \neq y_1$.

Como $G_1 \in H(F) \rightarrow H(F) = H(G_1) \therefore G_2 \in H(G_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{\tau_k\}, \tau_k \rightarrow \infty$ tal que $G_1(t + \tau_k, \phi) \rightarrow G_2(t, \phi)$ c-uniformemente em $\mathbb{R} \times C_{B^*}$.

Além disso $x_{1_t} \in S, y_{1_t} \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e então

$$\begin{aligned} x_1(t + \tau_k) &\rightarrow x_2(t) \\ y_2(t + \tau_k) &\rightarrow y_2(t) \end{aligned} \quad \text{uniformemente em cada compacto de } \mathbb{R}$$

Pelo Lema 2.8: $(x_2, G_2) \in H(\xi, F)$, $(y_2, G_2) \in H(\xi, F)$.

Como $x_1 \neq y_1$ temos:

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{1_{t+\tau_k}} - y_{1_{t+\tau_k}}|| = \inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{1_t} - y_{1_t}|| = \alpha_{12} > 0$$

$$\therefore \inf_{t \in \mathbb{R}} ||x_{2_t} - y_{2_t}|| = \beta_{12} \geq \alpha_{12} > 0$$

$$\therefore x_2, y_2 \in H^*(G_2) \text{ e } x_2 \neq y_2.$$

Então, se chamarmos de p_1 e p_2 ($p_1 \geq 1$, $p_2 \geq 1$) o número de elementos de $H^*(G_1)$ e $H^*(G_2)$ respectivamente, temos $p_2 \geq p_1$.

Analogamente ao que foi feito acima, se tomarmos $u_2, v_2 \in H^*(G_2)$, $u_2 \neq v_2$ teremos em correspondência $u_1, v_1 \in H^*(G_1)$, $u_1 \neq v_1$ e assim $p_1 \geq p_2$.

Logo $p_1 = p_2 = p$.

Chamando de

$$\alpha = \min\{\alpha_{ik}; i, k = 1, \dots, p; i \neq k\}$$

e

$$\beta = \min\{\beta_{jm}; j, m = 1, \dots, p; j \neq m\};$$

vimos acima que $\alpha \geq \beta$.

$$\therefore \alpha = \beta = \lambda_0.$$

Nota: se o sistema (2.1) satisfaz condição de separação em $C_{\overline{B}}$ é claro que $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull.

Teorema 2.17 - $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull $\Leftrightarrow H(\xi, F)$ é uniformemente assintoticamente estável no hull.

Prova:

Suponhamos que $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull.

Provemos primeiramente que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq 0$ sempre que $(x, G) \in H(\xi, F)$, $(y, G) \in H(\xi, F)$ e $||x_0 - y_0|| < \delta(\epsilon)$.

Suponhamos que não exista tal δ .

Então $\exists \epsilon > 0$ e sequências $\{x^k\}, \{y^k\}, \{G^k\}, \{\tau_k\} > 0$ tais que $(x^k, G^k) \in H(\xi, F)$, $(y^k, G^k) \in H(\xi, F)$, $||x_0^k - y_0^k|| < \frac{1}{k}$ e

$$||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| = \epsilon.$$

Podemos assumir $0 < \epsilon \leq \frac{\lambda_0}{2}$ (onde λ_0 é a cte de separação de $H(\xi, F)$).

$$\text{Sejam } u^k(t) = x^k(t+\tau_k), \quad v^k(t) = y^k(t+\tau_k).$$

Como $(x^k, G^k), (y^k, G^k) \in H(\xi, F)$, $u_t^k \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k$ e $v_t^k \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k$; além disso $G^k \in H(F) \quad \forall k$, e então podemos assumir que:

$$u^k(t) \rightarrow \eta(t) \text{ uniformemente em cada compacto de } \mathbb{R}$$

$$v^k(t) \rightarrow w(t) \text{ uniformemente em cada compacto de } \mathbb{R}$$

$$G^k(t+\tau_k, \varphi) \rightarrow H(t, \varphi) \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*}.$$

$$\text{Pelo Lema 2.8: } (\eta, H) \in H(\xi, F), \quad (w, H) \in H(\xi, F).$$

$$||\eta_0 - w_0|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||u_0^k - v_0^k|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| = \epsilon.$$

$$\therefore 0 < ||\eta_0 - w_0|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

Assim $\eta, w \in H^*(H)$, $\eta \neq w$ e $||\eta_0 - w_0|| < \frac{\lambda_0}{2}$, o que contraria a condição de separação de $H(\xi, F)$ no hull.

$$\text{Seja } \delta_0 \text{ tal que } 0 < \delta_0 < \delta\left(\frac{\lambda_0}{2}\right).$$

Mostremos que $\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0$ tal que $||x_t - y_t|| < \epsilon$ para $t \geq T(\epsilon)$ sempre que $(x, G) \in H(\xi, F), (y, G) \in H(\xi, F), ||x_0 - y_0|| < \delta_0$.

Suponhamos que isto não ocorra.

Então $\exists \epsilon > 0$ e sequências $\{x^k\}, \{y^k\}, \{G^k\}, \{\tau_k\}$ tais que $(x^k, G^k) \in H(\xi, F), (y^k, G^k) \in H(\xi, F), \tau_k > k, ||x_0^k - y_0^k|| < \delta_0 (< \delta(\frac{\lambda_0}{2}))$ e $||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| \geq \epsilon$.

Como

$$||x_0^k - y_0^k|| < \delta_0 (< \delta(\frac{\lambda_0}{2})) \Rightarrow ||x_t^k - y_t^k|| < \frac{\lambda_0}{2} \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{portanto } \epsilon \leq ||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

$$\text{Sejam } u^k(t) = x^k(t+\tau_k), \quad v^k(t) = y^k(t+\tau_k)$$

$$u_t^k \in S \text{ e } v_t^k \in S \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k, \quad G^k \in H(F)$$

Então:

$$u^k(t) \rightarrow \eta(t) \text{ uniformemente em cada compacto de } \mathbb{R}$$

$$v^k(t) \rightarrow w(t) \text{ uniformemente em cada compacto de } \mathbb{R}$$

$$G^k(t+\tau_k, \varphi) \rightarrow H(t, \varphi) \text{ c-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_{B^*},$$

pelo Lema 2.8, $(\eta, H) \in H(\xi, F)$, $(\omega, H) \in H(\xi, F)$.

$$||w_0 - \eta_0|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||u_0^k - v_0^k|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{\tau_k}^k - y_{\tau_k}^k||$$

$\therefore \epsilon \leq ||w_0 - \eta_0|| \leq \frac{\lambda_0}{2}$ o que contradiz a condição de separação.

Suponhamos agora que $H(\xi, F)$ seja uniformemente assintoticamente estável no hull.

Sejam $x, y \in H^*(G)$, $x \neq y$.

Mostremos primeiramente que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf ||x_t - y_t|| \geq \delta_0.$$

Suponhamos que isto não ocorra.

Então para alguma G , $\exists x, y \in H^*(G)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf ||x_t - y_t|| < \delta_0.$$

Como $x(t) \neq y(t)$, $||x_\sigma - y_\sigma|| = \epsilon$ para algum σ e algum $\epsilon > 0$. Para tal $\epsilon > 0$, seja, $T(\frac{\epsilon}{2})$ o número da definição de estabilidade assintótica uniforme no hull.

$\exists \tau \in \mathbb{R}$, $\tau < \sigma - T(\epsilon)$ tal que $||x_\tau - y_\tau|| < \delta_0 \Rightarrow ||x_t - y_t|| < \frac{\epsilon}{2}$ para $t \geq \tau + T(\epsilon)$, pois $H(\xi, F)$ é uniformemente assintoticamente estável no hull.

Mas então $||x_\sigma - y_\sigma|| < \frac{\epsilon}{2}$, o que é uma contradição.

Seja S o seguinte compacto:

$$S = \{\psi \in C_B^* \mid ||\psi|| \leq B, |\psi(\theta) - \psi(\theta')| \leq L(B)|\theta - \theta'|\}.$$

Então S admite uma cobertura finita consistindo de n bolas com diâmetro menor que $\frac{\delta_0}{4}$.

Mostremos que o número de elementos em $H^*(G)$ é no máximo n .

Se tivéssemos $n+1$ elementos em $H^*(G)$, digamos $x^j(t)$ $j = 1, \dots, n+1$, existiria τ tal que

$$||x_\tau^i - x_\tau^j|| \geq \frac{\delta_0}{2} \text{ para } i \neq j.$$

No entanto dois desses elementos, digamos x^i e x^j ($i \neq j$) estão numa mesma bola, já que $x_\tau^i \in S$, $x_\tau^j \in S \forall t \in \mathbb{R}$ e assim $||x_\tau^i - x_\tau^j|| < \frac{\delta_0}{4}$, o que é uma contradição.

Assim o número de elementos em $H^*(G)$ é $m \leq n$.

$$H^*(G) = \{x^1(t), \dots, x^m(t)\}.$$

Além disso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf ||x_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad i \neq j.$$

Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência, $\tau_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. $G(t+\tau_k, \psi) \rightarrow G(t, \psi)$ c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $\{x^j(t+\tau_k)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua, $x^j(t+\tau_k) \rightarrow y^j(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$, para $1 \leq j \leq m$.

$$\therefore y^j(t) \in H^*(G).$$

$$||y_t^i - y_t^j|| = \lim_{k \rightarrow \infty} ||x_{t+\tau_k}^i - x_{t+\tau_k}^j|| \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$||y_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i \neq j.$$

Como $H^*(G)$ tem m elementos, $H^*(G) = \{y^1, \dots, y^m\}$ onde

$$||y_t^i - y_t^j|| \geq \delta_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i \neq j.$$

$\therefore H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação com constante de separação $= \delta_0$.

Teorema 2.18 - Se $H(\xi, F)$ satisfaz condição de separação no hull o sistema (2.1) tem uma solução quase periódica.

Prova:

Mostremos que $\xi(t)$ é a.q.p.

Seja $\{\tau'_k\}$ uma sequência qualquer, $\tau'_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $\{\xi(t)\}$ é uniformemente limitado e equicontínuo e $F(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in C_B^*$, $\{\tau'_k\}$ tem subsequência $\tau = \{\tau_k\}$ tal que:

$\{\xi(t+\tau_k)\}$ converge uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$

$\{F(t+\tau_k, \psi)\}$ converge c -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$.

Suponhamos que $\xi(t+\tau_k)$ não seja uniformemente convergente em I .

Então para algum $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < \frac{\lambda_0}{2}$), existem sequências $\{t'_j\}$, $\{k_j\}$, $\{m_j\}$ tais que $k_j \rightarrow \infty$, $m_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e

$$||\xi_{t_j' + \tau_{k_j}} - \xi_{t_j' + \tau_{m_j}}|| \geq \epsilon.$$

Como $\{\xi_{\tau_k}\}$ é convergente,

$$||\xi_{\tau_{k_j}} - \xi_{\tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}$$

para j suficientemente grande.

Como $\epsilon < \frac{\lambda_0}{2}$, $\exists t_j \geq 0$ tal que

$$\epsilon \leq ||\xi_{t_j + \tau_{k_j}} - \xi_{t_j + \tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

Assim existem seqüências $\gamma = \{t_j\}$, $\tau' = \{\tau_{k_j}\}$, $\tau'' = \{\tau_{m_j}\}$ com $\tau' \subset \tau$, $\tau'' \subset \tau$ tais que

$$\epsilon \leq ||\xi_{t_j + \tau_{k_j}} - \xi_{t_j + \tau_{m_j}}|| < \frac{\lambda_0}{2}.$$

Sejam

$$x^j(t) = \xi(t + t_j + \tau_{k_j}), y^j(t) = \xi(t + t_j + \tau_{m_j}), x_t^j \in S, y_t^j \in S$$

para j suficientemente grande.

Consideremos as seqüências $\{F(t + t_j + \tau_{k_j}, \psi)\}$, $\{F(t + t_j + \tau_{m_j}, \psi)\}$. Como $F(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in C_B^*$, pelo T.1.5 existem subseqüências $\gamma' \subset \gamma$, $\delta \subset \tau'$, $\delta' \subset \tau''$ com subíndices comuns tais que

$$T_{\gamma'}, T_{\delta} F = T_{\gamma' + \delta} F \text{ } \epsilon\text{-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_B^*$$

$$T_{\gamma'}, T_{\delta'}, F = T_{\gamma' + \delta'}, F \text{ } \epsilon\text{-uniformemente em } \mathbb{R} \times C_B^*.$$

Mas $T_{\delta} F = T_{\delta'}, F = G \therefore T_{\gamma' + \delta} F = T_{\gamma' + \delta'}, F = T_{\gamma'}, G = H$ ϵ -uniformemente em $\mathbb{R} \times C_B^*$.

Além disso $x^j(t) \rightarrow x(t)$, $y^j(t) \rightarrow y(t)$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$ e $\gamma' + \delta \rightarrow \infty$, $\gamma' + \delta' \rightarrow \infty$.

$$\therefore (x, H) \in H(\xi, F), (y, H) \in H(\xi, F).$$

$$||x_0 - y_0|| = \lim_{j \rightarrow \infty} ||x_0^j - y_0^j|| =$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} ||\xi_{t_j + \tau_{k_j}} - \xi_{t_j + \tau_{m_j}}||.$$

$$\therefore \epsilon \leq ||x_0 - y_0|| \leq \frac{\lambda_0}{2}.$$

$\therefore x, y \in H^*(H)$, $x \neq y$ mas não satisfazem

$$||x_t - y_t|| \geq \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o que é uma contradição.

$\therefore \xi(t)$ é a.q.p.; pelo T.2.5 (2.1) tem solução q.p.

Teorema 2.19 - Se o sistema (2.5) tem uma solução limitada $\xi(t)$ definida em $[0, \infty)$ e se a solução nula de (2.3) é uniformemente estável então (2.5) tem solução quase periódica.

Prova:

$\xi(t)$ é solução de (2.5) definida e limitada em $[0, \infty)$; pelo Lema 2.3, (2.5) tem solução definida e limitada em $\mathbb{R}$.

$$\sup\{|A(t, \psi) + h(t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad ||\psi|| \leq \alpha\} \leq L\alpha + M \quad \text{e}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{L\alpha + M}{\alpha^3} = 0$$

e então pelo Lema 2.7, (2.5) tem solução $p(t)$ limitada em $\mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} ||p_t||_* = \lambda,$$

onde λ é a norma mínima.

Como vimos no T.2.12 esta propriedade é hereditária, isto é, se $(q, B+k) \in H(p, A+h)$, $q(t)$ é solução de

$$\dot{x}(t) = B(t, x_t) + k(t) \quad (2.7)$$

e tem norma mínima:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} ||q_t||_* = \lambda.$$

$A(t, \psi)$ é linear em ψ e a solução nula de (2.3) é uniformemente estável, pelo T.2.1 para qualquer $B \in H(A)$, a solução zero de (2.4) é uniformemente estável com $(\delta(.))$ comum.

Sejam $F(t, \psi) = A(t, \psi) + h(t)$, $G(t, \psi) = B(t, \psi) + k(t)$, $(u, G) \in H(p, F)$, $(v, G) \in H(p, F)$.

Então u e v são soluções de (2.7) com norma mínima.

$$z(t) = \frac{1}{2} [u(t) - v(t)] \text{ é solução de (2.4).}$$

Como a solução nula de (2.4) é uniformemente estável

e $B(t, \psi)$ é linear em ψ , $z(t)$ é uniformemente estável e $H(p, F)$ é uniformemente estável no bull.

Seja

$$y(t) = \frac{1}{2} [u(t) + v(t)].$$

Então $y(t)$ é solução de (2.7).

Como $u_t(s), v_t(s) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}, -h \leq s \leq 0$ segue que

$$|u_t(s) + v_t(s)|^2 + |u_t(s) - v_t(s)|^2 = 2(|u_t(s)|^2 + |v_t(s)|^2)$$

$$\Rightarrow |y_t(s)|^2 + |z_t(s)|^2 = \frac{|u_t(s)|^2 + |v_t(s)|^2}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$-h \leq s \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{||u_t||_*^2 + ||v_t||_*^2}{2} = ||y_t||_*^2 + ||z_t||_*^2.$$

Se $\inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_* \neq 0, \exists \delta_0 > 0$ tal que $||z_t||_* \geq \delta_0 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e então

$$||y_t||_*^2 = \frac{||u_t||_*^2 + ||v_t||_*^2}{2} - ||z_t||_*^2 < \frac{||u_t||_*^2 + ||v_t||_*^2}{2} - \delta_0$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} ||y_t||_*^2 \leq \lambda^2 - \delta_0 \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} ||y_t||_* \leq \sqrt{\lambda^2 - \delta_0} < \lambda$$

o que contraria a minimalidade da norma.

$$\therefore \inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t||_* = 0.$$

Desde que $z(t) = \frac{1}{2} [u(t) - v(t)]$ é solução de (2.4) limitada em $\mathbb{R}$, $\dot{z}(t)$ é limitada em $\mathbb{R}$ e então z_t satisfaz uma condição de Lipschitz, $\forall t \in \mathbb{R}$. Pela propriedade 2 da norma $|| \cdot ||_*$,

$$\frac{||z_t||}{\sqrt{3k^*(||z_t||)}} \leq ||z_t||_* \text{ onde } k^*(\alpha) = \max\{\frac{1}{h}, \frac{k}{\alpha}\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (\tilde{k}(||z_t||))^{\frac{1}{2}} ||z_t|| \leq ||z_t||_*, \quad \tilde{k}(\alpha) = \min\{h, \frac{\alpha}{k}\}$$

e assim $\inf_{t \in \mathbb{R}} ||z_t|| = 0.$

Se

$$\inf_{t \in (-\infty, 0)} ||z_t|| = 0 \Rightarrow \exists \sigma < 0$$

tal que $||z_\sigma|| < \delta(\epsilon)$, onde $\epsilon = \frac{||z_0||}{2}$ e como $z(t)$ é uniforme mente estável, $||z_t|| < \epsilon$ para $t \geq \sigma$; assim

$$||z_0|| < \epsilon = \frac{||z_0||}{2},$$

o que é uma contradição.

$$\therefore \inf_{t \geq 0} ||z_t|| = 0.$$

Então $\forall \epsilon > 0$, $\exists \tau > 0$ tal que $||z_\tau|| < \delta(\epsilon) \Rightarrow ||z_t|| < \epsilon$ para $t \geq \tau$.

$$\therefore ||z_t|| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

$$\therefore ||u_t - v_t|| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

assim $H(p, F)$ é fracamente uniformemente assintoticamente estável no hull.

Segue agora o resultado por aplicação dos teoremas T.2.16, T.2.17, T.2.18 sucessivamente.

C A P Í T U L O 3

3.1 - INTRODUÇÃO

Discutimos aqui a existência de soluções quase periódicas por Funcionais de Liapunov.

Em [7], Hale analisa a existência de soluções periódicas e quase periódicas de equações diferenciais funcionais lineares não homogêneas, sob a hipótese de estabilidade assintótica uniforme para o sistema homogêneo; ele usa um Funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ que é decrescente ao longo das soluções da equação diferencial funcional e satisfaz

$$||\varphi - \psi|| \leq V(t, \varphi, \psi) \leq K ||\varphi - \psi||.$$

No entanto Yoshizawa [15] mostra que tendo um funcional de tal espécie o sistema não precisa ser linear e então generaliza os resultados de Hale.

Neste capítulo fazemos um resumo dos resultados principais de [15] e obtemos o teorema central de [7] como consequência (Teorema 3.9).

Aqui as condições que garantem solução quase periódica são bastante fortes, no entanto obtemos informações sobre os expoentes de Fourier da solução quase periódica em termos dos das funções que definem o sistema.

3.2 - EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES QUASE PERIÓDICAS POR FUNÇÕES DE LIAPUNOV

Neste capítulo chamaremos de $C_H = \{\varphi \in C \mid ||\varphi|| \leq H\}$ com $0 < H < \infty$.

Consideremos o sistema

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) \tag{3.1}$$

e o sistema produto associado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ \dot{y}(t) = F(t, y_t) \end{array} \right. \tag{3.1}^*$$

onde $F: \mathbb{R} \times C_H$ (ou $\mathbb{R} \times C$) $\rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

Definição 3.1 - Um funcional de Liapunov é uma função escalar $V(t, \psi)$, contínua, definida em $I \times C_H$ (ou $I \times C$), que satisfaz localmente uma condição de Lipschitz com relação a ψ .

A derivada de $V(t, \psi)$ ao longo das soluções de (3.1) será denotada por $\dot{V}_{(3.1)}$ e definida por:

$$\dot{V}_{(3.1)}(t, x_t(t_0, \psi)) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0_+} \frac{1}{\delta} [V(t+\delta, x_{t+\delta}(t_0, \psi)) - V(t, x_t(t_0, \psi))]$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução de (3.1) tal que $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$. Podemos também usar a notação:

$$\dot{V}_{(3.1)}(t, \psi) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0_+} \frac{1}{\delta} [V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \psi)) - V(t, \psi)]$$

onde ψ é o "segmento" para o intervalo $[t-h, t]$ da solução de (3.1).

Proposição 3.1 - Seja $V(t, \psi)$ um funcional de Liapunov definido para $t \geq 0$, $\psi \in C_H$ (ou $\psi \in C$). Sejam x e y funções contínuas definidas em $[0, \infty)$ tais que $x_t = y_t = \psi$, deriváveis à direita. Seja L a constante de Lipschitz de $V(t, \psi)$ numa vizinhança de (t, ψ) . Então:

$$\dot{V}(t, y_t) \leq \dot{V}(t, x_t) + L|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)|.$$

Teorema 3.1 (Princípio de Comparação) - Seja $V(t, \psi)$ um funcional de Liapunov definido para $t \geq 0$, $\psi \in C_H$ (ou $\psi \in C$).

Suponhamos que

$$\dot{V}_{(3.1)}(t, \psi) \leq AV(t, \psi) + B, \quad \forall (t, \psi) \in I \times C_H \text{ (ou } I \times C)$$

onde A e B são constantes.

Então

$$V(t, x_t(t_0, \psi)) \leq V(t_0, \psi) e^{A(t-t_0)} + \frac{B}{A} e^{A(t-t_0)} - \frac{B}{A}$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução de (3.1) e a desigualdade vale para todo $t \geq t_0$ para o qual $x_t(t_0, \psi)$ está definida.

Prova: [18], pág. 4.

Daremos a seguir definições de estabilidade no sentido de Liapunov num contexto bastante geral considerado por Yoshizawa em [15]. Denotaremos por $x(t_0, \varphi)$ a solução de (3.1) tal que $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$.

Definições 3.2

- i) O sistema (3.1) é uniformemente estável com relação a (H^*, H) (ou (H^*, ∞)) onde $H^* \leq H$ (ou $H^* \leq \infty$) se $\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\varphi, \psi \in C_{H^*}$ e $\|\varphi - \psi\| < \delta(\epsilon)$ então

$$\|x_t(t_0, \varphi) - x_t(t_0, \psi)\| < \epsilon$$
 para todo $t \geq t_0$.
- ii) O sistema (3.1) é quase uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, H) (ou (H^*, ∞)) se $\exists \delta_0 > 0$ e $T(\epsilon) > 0$ para cada $\epsilon > 0$, tal que se $\varphi, \psi \in C_{H^*}$ e $\|\varphi - \psi\| < \delta_0$,

$$\|x_t(t_0, \varphi) - x_t(t_0, \psi)\| < \epsilon$$
 para $t \geq t_0 + T(\epsilon)$.
- iii) O sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, H) (ou (H^*, ∞)) se (i) e (ii) são satisfeitas.

No caso em que $H^* = \infty$ a seguinte definição é equivalente à definição (ii):

- ii') O sistema (3.1) é quase uniformemente assintoticamente estável com relação a (∞, ∞) se $\forall \epsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists T(\epsilon, \eta) > 0$ tal que se $\varphi, \psi \in C$, $\|\varphi - \psi\| < \eta$ então

$$\|x_t(t_0, \varphi) - x_t(t_0, \psi)\| < \epsilon$$
 para todo $t \geq t_0 + T(\epsilon, \eta)$.

Teorema 3.2 (para o caso $H^* = \infty$) - Consideremos as seguintes hipóteses:

- i) $F(t, \varphi)$ definida em $\mathbb{R} \times C$, contínua.
- ii) $\forall \alpha > 0$ se $\|\varphi\| \leq \alpha$, $\|\psi\| \leq \alpha$ então

$$\|F(t, \varphi) - F(t, \psi)\| < L(\alpha) \|\varphi - \psi\|.$$

iii) As soluções de (3.1) são uniformemente limitadas, isto é, $\forall \alpha > 0$, $\exists \gamma(\alpha) > 0$ tal que se $\|\varphi\| < \alpha$, $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \gamma(\alpha)$ para todo $t \geq t_0$.

iv) O sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (∞, ∞) .

Então existe um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ definido para $0 \leq t < \infty$, $\varphi \in C$, $\psi \in C$, satisfazendo as condições:

(a) $a(\|\varphi - \psi\|) \leq V(t, \varphi, \psi) \leq b(\|\varphi - \psi\|)$ onde $a(r)$ é contínua, crescente, definida positiva e $b(r)$ é contínua, crescente, $b(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

(b) $V(t, \varphi, \psi)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em (φ, ψ) e para $\varphi_i \in C_\eta$, $\psi_i \in C_\eta$ ($i = 1, 2$):

$$|V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq h(\eta) \{ \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\| \}$$

onde $h(\eta)$ é uma função contínua e positiva.

(c) $\dot{V}_{(3.1)}(t, \varphi, \psi) \leq -V(t, \varphi, \psi)$.

Prova: [15], T.1.

Teorema 3.3 ($H^* < \infty$) - Consideremos as seguintes hipóteses:

v) $F(t, \varphi)$ definida em $\mathbb{R} \times C_H$, contínua.

vi) $|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L \|\varphi - \psi\|$ onde L é uma constante e $\varphi, \psi \in C_H$.

vii) O sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, H) .

Então existe um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ definido para $0 \leq t < \infty$, $\varphi \in C_{H^*}$, $\psi \in C_{H^*}$ satisfazendo as condições (a) e (c) do T.3.2 e

(b') $V(t, \varphi, \psi)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em (φ, ψ) e $|V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq K \{ \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\| \}$ onde K é uma constante positiva.

Prova: [15], T.2.

Teorema 3.4 - Suponhamos $F(t, \varphi)$ contínua em $\mathbb{R} \times C$ e $\exists H^*$, finito ou infinito, tal que se $\varphi \in C_{H^*}$, toda solução $x(t, \varphi)$ existe no futuro. Além disso suponhamos que exista um funcional de Liapunov contínuo $V(t, \varphi, \psi)$ definido para $0 \leq t < \infty$, $\varphi \in C$, $\psi \in C$ e $\|\varphi - \psi\| \leq H_0$ (onde H_0 é algum número positivo) satisfazendo as condições:

(a*) $a(\|\varphi - \psi\|) \leq V(t, \varphi, \psi) \leq b(\|\varphi - \psi\|)$ onde $a(r)$ é contínua, definida positiva e $b(r)$ é contínua, $b(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

(b*) $\dot{V}_{(3.1)}(t, \varphi, \psi) \leq -c(\|\varphi - \psi\|)$ onde $c(r)$ é contínua e definida positiva.

Então o sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, ∞) .

Prova: [16], T.8.

Teorema 3.5 - Suponhamos $F(t, \varphi)$ contínua em $\mathbb{R} \times C_H$ e se $\varphi \in C_{H^*}$ ($H^* \leq H$), $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq H$ para $t \geq t_0$. Além disso suponhamos que exista um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ definido em $[0, \infty) \times C_H \times C_H$ e $\|\varphi - \psi\| < H_0$ o qual satisfaz as condições (a*) e (b*). Então o sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, H) .

Prova: [16], T.8.

Definição 3.3 - Uma solução $x(t, \varphi)$ de (3.1) definida em $[0, \infty)$ é dita globalmente uniformemente assintoticamente estável se:

i) $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|x_{t_0}(0, \varphi) - \psi\| < \delta$ então $\|x_t(0, \varphi) - x_t(t_0, \psi)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

ii) $\forall \alpha > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \beta(\alpha) > 0$ tal que se $\|x_{t_0}(0, \varphi) - \psi\| \leq \alpha$ então $\|x_t(0, \varphi) - x_t(t_0, \psi)\| \leq \beta(\alpha)$ para $t \geq t_0$.

iii) $\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists T = T(\epsilon, \alpha) > 0$ tal que se $\|x_{t_0}(0, \psi) - \psi\| \leq \alpha$ então $\|x_t(0, \psi) - x_t(t_0, \psi)\| < \epsilon$ para $t \geq t_0 + T(\epsilon, \alpha)$.

OBS.: no que segue assumiremos $F(t, \varphi)$ q.p. em t uniformemente para $\varphi \in C_H$ (ou C) e $\forall \alpha > 0, \exists L(\alpha) > 0$ tal que se $\|\varphi\| \leq \alpha$ então $|F(t, \varphi)| \leq L(\alpha)$.

Teorema 3.6 - Suponhamos que exista um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ para $t \geq 0, \varphi \in C_H, \psi \in C_H$ (ou $\varphi \in C, \psi \in C$) satisfazendo as condições:

- i) $a(\|\varphi - \psi\|) \leq V(t, \varphi, \psi) \leq b(\|\varphi - \psi\|)$ com $a(r)$ contínua, crescente, definida positiva e $b(r)$ contínua, crescente, $b(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.
- ii) $|V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq K(\|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|)$ onde K é uma constante positiva (no caso em que $\varphi, \psi \in C, K$ pode depender de η para $\varphi_i, \psi_i \in C_\eta$).
- iii) $\dot{V}_{(3.1)}(t, \varphi, \psi) \leq -\alpha V(t, \varphi, \psi) \quad \alpha = \text{cte positiva}.$

Além disso suponhamos que exista uma solução $x(t, t_0, \psi)$ de (3.1) tal que $\|x_t(t_0, \psi)\| \leq H_1$ para $t \geq t_0 \geq 0, H_1 < H$.

Então na região C_H (ou C) existe uma única solução quase periódica de (3.1) uniformemente assintoticamente estável, limitada por H_1 , com módulo contido no de $F(t, \varphi)$.

Em particular, se $F(t, \varphi)$ é T -periódica em t , (3.1) tem uma única solução periódica uniformemente assintoticamente estável, de período T .

Prova:

Seja $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ solução de (3.1) tal que

$$\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq H_1 \quad \text{para } t \geq t_0 \geq 0.$$

Então $|F(t, x_t(t_0, \varphi))| \leq L(H_1) = R$ para $t \geq t_0$, ou seja, $|\dot{x}(t)| \leq R$ para $t \geq t_0$.

Seja $S = \{\varphi \in C \mid \|\varphi\| \leq H_1 \text{ e } |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq R|t_1 - t_2|\}$. Pelo Teorema de Ascoli: S é compacto em C_H (ou C).

Como $F(t, \psi)$ é q.p. em t uniformemente para $\psi \in S$, pelo T.1.2 $\exists$ uma sequência $\{\tau_k\}$ de números reais, $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que:

$$F(t+\tau_k, \psi) - F(t, \psi) \rightarrow 0 \text{ uniformemente para } t \in \mathbb{R}, \psi \in S.$$

Para qualquer número real β , seja $K_0(\beta)$ o menor valor de K tal que $\tau_{k_0} + \beta \geq t_0 + h$. Desde que $\|x_t(t_0, \psi)\| \leq H_1$ e $|\dot{x}(t)| \leq R$ para $t \geq t_0$ segue que $x_{t+\tau_k} \in S$ para $t \geq \beta$, $K \geq K_0(\beta)$.

Provemos que $\{x(t+\tau_k)\}$, $K \geq K_0(\beta)$ forma uma sequência de Cauchy em cada compacto de $[\beta, \infty)$:

Para qualquer subconjunto compacto U de $[\beta, \infty)$ e para qualquer $\varepsilon > 0$, seja $n_0(\varepsilon, \beta) \geq K_0(\beta)$ tão grande que:

$$(1) \quad b(2H_1) e^{-\alpha(\beta+\tau_k-t_0)} < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} \quad \text{para } l \geq k \geq n_0(\varepsilon, \beta)$$

$$(2) \quad |F(t+\tau_l, \psi) - F(t+\tau_k, \psi)| < \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{2K} \quad t \in U$$

o que é possível pois $F(t+\tau_k, \psi) - F(t, \psi) \rightarrow 0$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in S$, $e^{-\alpha(t-t_0)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $\alpha(r)$ é contínua, crescente, definida positiva.

Consideremos a função $V(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k})$.

Pela proposição 3.1:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq \dot{V}_{(3.1)}(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) + \\ &+ K |F(s+\tau_l-\tau_k, x_{s+\tau_l-\tau_k}) - F(s, x_{s+\tau_l-\tau_k})|. \end{aligned}$$

Por (iii) e (2):

$$\dot{V}(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) \leq -\alpha V(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) + \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{2}.$$

Pelo T.3.1:

$$\begin{aligned} V(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq V(t_0, x_{t_0}, x_{t_0+\tau_l-\tau_k}) e^{-\alpha(s-t_0)} + \\ &+ \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} - \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} e^{-\alpha(s-t_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(s, x_s, x_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq V(t_0, x_{t_0}, x_{t_0+\tau_l-\tau_k}) e^{-\alpha(s-t_0)} + \\ &+ \frac{\alpha(\epsilon)}{2} \leq b(||x_{t_0} - x_{t_0+\tau_l-\tau_k}||) e^{-\alpha(s-t_0)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{2} \leq \\ &\leq b(2H_1) e^{-\alpha(s-t_0)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{2}. \end{aligned}$$

para $s = t+\tau_k$, $t \in U$:

$$\begin{aligned} V(t+\tau_k, x_{t+\tau_k}, x_{t+\tau_l}) &\leq b(2H_1) e^{-\alpha(t+\tau_k-t_0)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{2} \leq \\ &\leq b(2H_1) e^{-\alpha(\beta+\tau_k-t_0)} + \frac{\alpha(\epsilon)}{2}. \end{aligned}$$

Por (1):

$$\begin{aligned} V(t+\tau_k, x_{t+\tau_k}, x_{t+\tau_l}) &< \frac{\alpha(\epsilon)}{2} + \frac{\alpha(\epsilon)}{2} = \alpha(\epsilon) \text{ para } t \in U, \\ l &\geq K \geq n_0(\epsilon, \beta) \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{(1)} \alpha(||x_{t+\tau_k} - x_{t+\tau_l}||) < \alpha(\epsilon)$$

$$\xRightarrow{(1)} ||x_{t+\tau_k} - x_{t+\tau_l}|| < \epsilon \text{ para } l \geq K \geq n_0(\epsilon, \beta), t \in U$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x(t+\tau_k) - x(t+\tau_l)| &< \epsilon \text{ para } l \geq K \geq n_0(\epsilon, \beta), \\ t &\in U. \end{aligned}$$

Portanto $\{x(t+\tau_k)\}$, $K \geq K_0(\beta)$, forma uma sequência de Cauchy em cada compacto de $[\beta, \infty)$. Desse modo existe uma função w , definida em $[\beta, \infty)$ tal que

$$w(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t+\tau_k)$$

uniforme em cada compacto de $[\beta, \infty)$.

Observemos que

$$|w(t)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(t+\tau_k)| \leq H_1, \quad \forall t \in [\beta, \infty)$$

e $w(t)$ é contínua $\forall t \in [\beta, \infty)$ já que é limite uniforme de uma sequência de funções contínuas em cada compacto de $[\beta, \infty)$.

Como β é arbitrário, w está definida em $(-\infty, +\infty)$ e $x(t+\tau_k) \rightarrow w(t)$ quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente em cada compacto de $(-\infty, +\infty)$.

Mostremos que $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}(t+\tau_k)$ uniformemente em cada compacto de $(-\infty, +\infty)$:

$$|\dot{x}(t+\tau_k) - \dot{x}(t+\tau_l)| \leq |F(t+\tau_k, x_{t+\tau_k}) - F(t+\tau_l, x_{t+\tau_k})| + \\ + |F(t+\tau_l, x_{t+\tau_k}) - F(t+\tau_l, x_{t+\tau_l})|.$$

Como $x_{t+\tau_k} \in S$ para τ_k suficientemente grande, e para t em cada compacto em $(-\infty, +\infty)$, $\exists n_1(\epsilon) > 0$ tal que se $l \geq k \geq n_1(\epsilon)$

$$|F(t+\tau_k, x_{t+\tau_k}) - F(t+\tau_l, x_{t+\tau_k})| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $x_{t+\tau_k} \in S$ e $x_{t+\tau_l} \in S$ para τ_k e τ_l suficientemente grandes e $F(t, \psi)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R} \times S$ pelo T.1.1, $\exists n_2(\epsilon) > 0$ tal que se $l \geq k \geq n_2(\epsilon)$ então:

$$|F(t+\tau_l, x_{t+\tau_k}) - F(t+\tau_l, x_{t+\tau_l})| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para $l \geq k \geq n_0(\epsilon) = \max\{n_1, n_2\}$ temos:

$$|\dot{x}(t+\tau_k) - \dot{x}(t+\tau_l)| < \epsilon.$$

Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}(t+\tau_k)$ existe uniformemente em cada compacto de $(-\infty, +\infty)$.

Consequentemente $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}(t+\tau_k) = \dot{w}(t)$.

Observemos que

$$|\dot{w}(t)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}(t+\tau_k) \right| \leq R$$

e portanto $w_t \in S$.

$$\dot{w}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t+\tau_k, x_{t+\tau_k}) - F(t+\tau_k, w_t) + F(t+\tau_k, w_t)\} \\ = F(t, w_t)$$

$\therefore w$ satisfaz a equação (3.1).

Para mostrar que w é quase periódica com módulo contido no de $F(t, \psi)$ é suficiente mostrar, pelo T.1.9, que para qualquer sequência $\{\tau_k\}$ de números reais para a qual $\{F(t+\tau_k, \psi)\}$ é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$, $\psi \in S$, a sequência $\{w(t+\tau_k)\}$ é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$, onde τ_k tende a um número finito ou infinito.

Mas se $\tau_k \rightarrow \tau$, $w(t+\tau_k) \rightarrow w(t+\tau)$ uniformemente em

$(-\infty, +\infty)$, portanto basta supor $\tau_k \rightarrow +\infty$ e $\tau_k \rightarrow -\infty$.

Suponhamos agora que $\tau_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow \infty$:

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $n_0(\varepsilon) > 0$ tal que se $l \geq k \geq n_0(\varepsilon)$

$$(3) e^{-\alpha\tau_k} b(2H_l) < \frac{\alpha(\varepsilon)}{4} \quad \text{para } \sigma \in (-\infty, +\infty)$$

$$(4) |F(\sigma + \tau_k, \psi) - F(\sigma + \tau_l, \psi)| < \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k} \quad \psi \in S$$

Para cada $t \in (-\infty, +\infty)$ seja c um número $\frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k}$ — translação de F tal que $t+c \geq 0$, isto é:

$$(5) |F(\sigma, \psi) - F(\sigma+c, \psi)| < \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k} \quad \text{para } \sigma \in (-\infty, +\infty), \psi \in S.$$

Consideremos a função $V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k})$ definida para $t \leq s \leq t+\tau_k$.

Pela proposição 3.1:

$$\begin{aligned} \dot{V}(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq \dot{V}_{(3.1)}(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) + K|F(s, w_s) - \\ &- F(c+s, w_s)| + K|F(s+\tau_l-\tau_k, w_{s+\tau_l-\tau_k}) - F(c+s, w_{s+\tau_l-\tau_k})|. \end{aligned}$$

Chamando $\sigma = s - \tau_k$ na última parcela:

$$\begin{aligned} \dot{V}(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq -\alpha V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) + K|F(s, w_s) - \\ &- F(c+s, w_s)| + K|F(\sigma + \tau_l, w_{\sigma + \tau_l}) - F(c + \sigma + \tau_k, w_{\sigma + \tau_l})| \leq \\ &\leq -\alpha V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) + K|F(s, w_s) - F(c+s, w_s)| + \\ &+ K|F(\sigma + \tau_l, w_{\sigma + \tau_l}) - F(\sigma + \tau_k, w_{\sigma + \tau_l})| + K|F(\sigma + \tau_k, w_{\sigma + \tau_l}) - \\ &- F(c + \sigma + \tau_k, w_{\sigma + \tau_l})|. \end{aligned}$$

Por [4] e [5]

$$\begin{aligned} \dot{V}(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq -\alpha V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) + \\ &+ K \cdot \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k} + K \cdot \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k} + K \cdot \frac{\alpha(\varepsilon)\alpha}{4k} \\ \dot{V}(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq -\alpha V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) + \frac{3\alpha(\varepsilon)\alpha}{4} \\ &\text{para } 0 \leq t+c \leq s+c \leq t+c+\tau_k. \end{aligned}$$

Pelo T.3.1:

$$\begin{aligned} V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) &\leq V(t+c, w_t, w_{t+\tau_l-\tau_k}) e^{-\alpha(s-t)} + \\ &+ \frac{3\alpha(\varepsilon)}{4} - \frac{3\alpha(\varepsilon)}{4} e^{-\alpha(s-t)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(c+s, w_s, w_{s+\tau_l-\tau_k}) \leq V(t+c, w_t, w_{t+\tau_l-\tau_k}) e^{-\alpha(s-t)} + \frac{3a(\varepsilon)}{4}$$

para $s = t+\tau_k$:

$$V(c+t+\tau_k, w_{t+\tau_k}, w_{t+\tau_l}) \leq b(\|w_t - w_{t+\tau_l-\tau_k}\|) e^{-\alpha\tau_k} + \frac{3a(\varepsilon)}{4} \leq b(2H_1) e^{-\alpha\tau_k} + \frac{3a(\varepsilon)}{4} \stackrel{(3)}{<} \frac{a(\varepsilon)}{4} + \frac{3a(\varepsilon)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(c+t+\tau_k, w_{t+\tau_k}, w_{t+\tau_l}) < a(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\|w_{t+\tau_k} - w_{t+\tau_l}\|) < a(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w_{t+\tau_k} - w_{t+\tau_l}\| < \varepsilon \text{ para } l \geq k \geq n_0(\varepsilon), t \in (-\infty, +\infty).$$

$\therefore \{w(t+\tau_k)\}$ é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$.

De modo análogo prova-se para $\tau_k \rightarrow -\infty$, considerando a função

$$V(c+s+2\tau_k, w_{s+2\tau_k}, w_{s+\tau_l+\tau_k})$$

definida para $t \leq s \leq t-\tau_k$.

Pelos T.3.4 e T.3.5 podemos ver que $w(t)$ é uniformemente assintoticamente estável e que toda solução em C_H aproxima-se de $w(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, e portanto, $w(t)$ é única.

No caso em que $F(t, \psi)$ for T -periódica em t , consideramos $\tau_k = KT (K = 1, 2, \dots)$.

Assim $x(t+KT) \rightarrow w(t)$ quando $K \rightarrow \infty$ e portanto:

$$x(t+T+KT) \rightarrow w(t+T) \text{ quando } K \rightarrow \infty$$

mas $x(t+(K+1)T) \rightarrow w(t)$ quando $K \rightarrow \infty$.

$$\therefore w(t) = w(t+T), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.7 - Suponhamos $F(t, \psi)$ contínua e q.p. em t uniformemente para $\psi \in C_H$.

Além disso suponhamos que:

(1) O sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a (H^*, H) , para $t \geq 0$.

(ii) $|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L \|\varphi - \psi\|$ onde $L = \text{cte}$ positiva e $\varphi, \psi \in C_H$.

(iii) $\exists$ solução $x(t_0, \varphi)$ de (3.1) tal que $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq H_1$ para $t \geq t_0 \geq 0$, $H_1 < H^*$.

Então na região $\|\varphi\| \leq H^*$, (3.1) tem uma única solução q.p. uniformemente assintoticamente estável, limitada por H_1 , com módulo contido no de $F(t, \varphi)$. Em particular, se $F(t, \varphi)$ é T -periódica em t , a solução acima também é.

Prova:

De (i), (ii) e $F(t, \varphi)$ contínua segue pelo T.3.3 a existência de um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ definido em $[0, \infty) \times C_{H^*} \times C_{H^*}$ satisfazendo as condições:

(a) $a(\|\varphi - \psi\|) \leq V(t, \varphi, \psi) \leq b(\|\varphi - \psi\|)$ onde $a(r)$ é contínua, crescente, definida positiva e $b(r)$ é contínua, crescente, $b(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

(b) $|V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq K\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|\}$ $K = \text{cte}$ positiva.

(c) $\dot{V}_{(3.1)^*}(t, \varphi, \psi) \leq -V(t, \varphi, \psi)$.

Segue agora o resultado por aplicação do T.3.6.

Corolário - Suponhamos que $F(t, \varphi)$ de (3.1) seja contínua em $\mathbb{R} \times C$ e quase periódica em t uniformemente para $\varphi \in C$. Suponhamos também que $\forall \alpha > 0$, $\exists L(\alpha) > 0$ tal que se $\|\varphi\| \leq \alpha$, $\|\psi\| \leq \alpha$ temos $|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leq L(\alpha) \|\varphi - \psi\|$.

Se existir uma solução de (3.1) $x(0, \varphi)$ definida para $t \geq 0$, limitada por H_1 e globalmente uniformemente assintoticamente estável então existe uma única solução de (3.1) quase periódica, globalmente uniformemente assintoticamente estável, limitada por H_1 , com módulo contido no de $F(t, \varphi)$. Em particular, se $F(t, \varphi)$ for T -periódica em t , então a solução acima também será.

Prova:

Seja um número positivo arbitrário tal que $H_1 < H$. Con

sideremos a região $\{(t, \psi) \mid t \geq 0, \|\psi\| \leq \beta(2H) + H_1\}$ onde β é um número do item (iii) da Definição 3.3.

Se $\psi \in C_H$ temos $\|x_t(t_0, \psi)\| \leq \beta(2H) + H_1$ pois:

$$\|x_{t_0}(0, \psi) - \psi\| \leq \|x_{t_0}(0, \psi)\| + \|\psi\| \leq H_1 + H < 2H$$

$$\Rightarrow \quad (iii) \quad \|x_t(0, \psi) - x_t(t_0, \psi)\| \leq \beta(2H) \quad \text{para } t \geq t_0$$

$$\Rightarrow \quad \|x_t(t_0, \psi)\| \leq \beta(2H) + \|x_t(0, \psi)\| \leq \beta(2H) + H_1$$

para $t \geq t_0$.

Sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_H$.

Por (iii) da Definição 3.3: $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$ e $2H$,

$\exists T(\epsilon) > 0$ tal que se $t \geq t_0 + T(\epsilon)$ então

$$\|x_t(0, \psi) - x_t(t_0, \psi_1)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e}$$

$$\|x_t(0, \psi) - x_t(t_0, \psi_2)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então:

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists T(\epsilon) > 0 \quad \text{tal que se } \psi_1, \psi_2 \in C_H,$$

$$\|x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)\| < \epsilon \quad \text{para } t \geq t_0 + T(\epsilon).$$

Assim o sistema (2.1) é quase-uniformemente assintoticamente estável com relação a $(H, \beta(2H) + H_1)$.

Se $\|\psi_1\| \leq \beta(2H) + H_1, \|\psi_2\| \leq \beta(2H) + H_1$, por hipótese $\exists L(\beta(2H) + H_1)$ tal que $|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)| < \leq L(\beta(2H) + H_1) \|\psi_1 - \psi_2\|$.

Para um dado $\epsilon > 0$, seja $\delta(\epsilon)$ tal que

$$\delta e^{L(\beta(2H)+H_1)T(\epsilon)} < \epsilon.$$

Então se $\psi_1, \psi_2 \in C_H$ e $\|\psi_1 - \psi_2\| < \delta(\epsilon)$ nós temos

$$\|x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)\| < \epsilon \quad \text{para } t \geq t_0 + T(\epsilon).$$

Para $t_0 \leq t \leq t_0 + T(\epsilon)$:

$$\psi_1, \psi_2 \in C_H \Rightarrow \|x_t(t_0, \psi_1)\| \leq \beta(2H) + H_1, \|x_t(t_0, \psi_2)\| \leq \beta(2H) + H_1.$$

Assim:

$$|\dot{x}(t, t_0, \psi_1) - \dot{x}(t, t_0, \psi_2)| = |F(t, x_t(t_0, \psi_1)) - F(t, x_t(t_0, \psi_2))| \leq L(\beta(2H)+H_1) \|x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)\|$$

Mas então, pelo T.3.1:

$$\begin{aligned} ||x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)|| &\leq ||\psi_1 - \psi_2|| e^{L(\beta(2H) + H_1)(t - t_0)} \\ \forall t \in [t_0, t_0 + T(\epsilon)] \\ \Rightarrow ||x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)|| &\leq ||\psi_1 - \psi_2|| e^{L(\beta(2H) + H_1)T(\epsilon)} \\ &< \delta e^{L(\beta(2H) + H_1)T(\epsilon)} < \epsilon \end{aligned}$$

Portanto: $||x_t(t_0, \psi_1) - x_t(t_0, \psi_2)|| < \epsilon$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + T(\epsilon)$.

Desse modo vemos que (3.1) é uniformemente estável com relação a $(H, \beta(2H) + H_1)$.

Mas então (3.1) é uniformemente assintoticamente estável com relação a $(H, \beta(2H) + H_1)$.

Pelo T.3.7, na região $||\varphi|| \leq H$, existe uma única solução de (3.1) quase periódica, uniformemente assintoticamente estável, limitada por H_1 , com módulo contido no módulo de $F(t, \varphi)$. Em particular, se $F(t, \varphi)$ é T -periódica em t , então o é a solução acima. Como H é arbitrário, segue que a solução é única e é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Lema 3.1 - Suponhamos que exista um funcional de Liapunov contínuo $V(t, \varphi, \psi)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $\psi \in C_H$ (ou $\varphi \in C$, $\psi \in C$) satisfazendo as condições:

- i) $\alpha(||\varphi - \psi||) \leq V(t, \varphi, \psi) \leq b(||\varphi - \psi||)$ onde $\alpha(r)$ é contínua, crescente, definida positiva e $b(r)$ é contínua, crescente, $b(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.
- ii) $|V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq K ||(\varphi_1 - \varphi_2) - (\psi_1 - \psi_2)||$ onde K é uma constante positiva (no caso em que $\varphi, \psi \in C$, K pode depender de η para $\varphi_i, \psi_i \in C_\eta$).
- iii) $\dot{V}_{(3.1)}(t, \varphi, \psi) \leq -\alpha V(t, \varphi, \psi)$ α : cte positiva.

Além disso suponhamos que (3.1) tenha uma solução $x^0(t)$ tal que $||x_t^0|| \leq c$ para $t \geq t_0 \geq 0$ e alguma constante c positiva.

Consideremos o sistema:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) + h(t) \quad (3.2)$$

com $h(t)$ contínua para $-\infty < t < +\infty$, $|h(t)| \leq R$. Se

$$||\psi - x_{t_0}^o|| \leq b^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right), \quad ||\psi|| < H$$

e

$$a^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right) + c \leq H_1 < H$$

onde $a^{-1}(r)$ e $b^{-1}(r)$ são as inversas de $a(r)$ e $b(r)$ respectivamente, temos:

$$||x_t(t_0, \psi) - x_t^o|| \leq a^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right) \quad \text{para } t \geq t_0,$$

onde $x(t_0, \psi)$ é solução de (3.2).

Prova:

Seja $x(t_0, \psi)$ solução de (3.2) tal que

$$||\psi - x_{t_0}^o|| \leq b^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right) \quad \text{e} \quad ||\psi|| < H.$$

Seja H^* tal que $H_1 < H^* < H$.

Consideremos a função $V(t, x_t^o, x_t)$ definida para todo t tal que $x_t \in C_{H^*}$.

Pela proposição 3.1:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t^o, x_t) &\leq \dot{V}_{(3.1)^*}(t, x_t^o, x_t) + K ||(F(t, x_t^o) - \\ &- F(t, x_t^o)) - (F(t, x_t) + h(t) - F(t, x_t))|| \leq \\ &\leq -\alpha V(t, x_t^o, x_t) + K ||h(t)|| \\ \Rightarrow \dot{V}(t, x_t^o, x_t) &\leq -\alpha V(t, x_t^o, x_t) + KR, \end{aligned}$$

para todo t tal que $x_t \in C_{H^*}$.

Se tomarmos ψ tal que $||\psi|| < H^*$, temos pelo T.3.1:

$$V(t, x_t^o, x_t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \left\{ V(t_0, x_{t_0}^o, \psi) - \frac{KR}{\alpha} \right\} + \frac{KR}{\alpha}$$

para todo t tal que $x_t \in C_{H^*}$.

Mas

$$V(t_0, x_{t_0}^o, \psi) \leq b(||x_{t_0}^o - \psi||) \leq b(b^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right)) = \frac{KR}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(t_0, x_{t_0}^o, \psi) - \frac{KR}{\alpha} \leq 0.$$

Assim $V(t, x_t^o, x_t) \leq \frac{KR}{\alpha}$ para todo t tal que $x_t \in C_{H^*}$.

$$\Rightarrow \alpha(||x_t^o - x_t||) \leq \frac{KR}{\alpha} \Rightarrow ||x_t^o - x_t|| \leq a^{-1}\left(\frac{KR}{\alpha}\right)$$

para todo t para o qual $x_t \in C_{H^*}$.

Mas

$$\begin{aligned} ||x_t^o - x_t|| &\leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) \Rightarrow ||x_t|| \leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) + ||x_t^o|| \leq \\ &\leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) + c \leq H_1 < H^*. \end{aligned}$$

Portanto $||x_t^o - x_t|| \leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha})$, $\forall t \geq t_0$.

Teorema 3.8 - Suponhamos que exista um funcional de Liapunov $V(t, \varphi, \psi)$ definido para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $\psi \in C_H$ (ou $\varphi \in C$, $\psi \in C$) satisfazendo as condições do Lema 3.1. Suponhamos também que (3.1) tenha uma solução $x^o(t)$ tal que $||x_t^o|| \leq c$ para $t \geq t_0 \geq 0$ e alguma constante c positiva e que $F(t, \varphi)$ e $h(t)$ de (3.2) sejam quase periódicas em t uniformemente para $\varphi \in C_H$ (ou $\varphi \in C$).

Então se $a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) + c \leq H_1 < H$ (ou para algum H e $K(H)$) na região C_{H^*} ($H_1 < H^* < H$), (ou C), o sistema (3.2) tem uma única solução quase periódica uniformemente assintoticamente estável, limitada por H_1 , com módulo contido no módulo associado ao campo vetorial. Em particular, se $F(t, \varphi)$ e $h(t)$ são periódicas em t de período T na região C_{H^*} (ou C) existe uma única solução T -periódica de (3.2) uniformemente assintoticamente estável.

No caso de $\dot{V}$ ser bem definida para todo $||\varphi|| = H$, $||\psi|| = H$, a conclusão é verdadeira em C_H .

Prova:

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

$$(3.2) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t) + h(t).$$

Sejam x_t^o e x_t soluções de (3.1) e (3.2) respectivamente tais que $x_{t_0}^o = x_{t_0} = \varphi$ com $||\varphi|| < H^*$, $||x_t^o|| \leq c$ para $t \geq t_0 \geq 0$.

Como $||\varphi - x_{t_0}^o|| = 0 \leq b^{-1}(\frac{KR}{\alpha})$ e $||\varphi|| < H$ temos satisfeitas todas as hipóteses do Lema 3.1.

$$\text{Então } ||x_t(t_0, \varphi) - x_t^o|| \leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}), \quad \forall t \geq t_0$$

$$\Rightarrow ||x_t(t_0, \varphi)|| \leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) + ||x_t^o|| \leq a^{-1}(\frac{KR}{\alpha}) + c \leq H_1$$

para $t \geq t_0$, isto é, o sistema (3.2) tem uma solução $x_t(t_0, \varphi)$

limitada por H_1 para $t \geq t_0$, $H_1 < H^*$.

Além disso:

$$(ii)' \Rightarrow |V(t, \varphi_1, \psi_1) - V(t, \varphi_2, \psi_2)| \leq K\{||\varphi_1 - \varphi_2|| + ||\psi_1 - \psi_2||\}.$$

$$(ii)' \text{ e } (iii) \xRightarrow{\text{Prop. 3.1}} \dot{V}_{(3.2)}^*(t, \varphi, \psi) \leq \dot{V}_{(3.1)}^*(t, \varphi, \psi) + K|[F(t, \varphi) + h(t) - F(t, \psi)] - [F(t, \psi) + h(t) - F(t, \psi)]|.$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(3.2)}^*(t, \varphi, \psi) \leq -\alpha V(t, \varphi, \psi).$$

Pelo T.3.6: Na região C_{H^*} (ou C) existe uma única solução quase periódica de (3.2) uniformemente assintoticamente estável limitada por H_1 , com módulo contido no módulo de $F(t, \varphi) + h(t)$.

Mas $\text{mod}(F(t, \varphi) + h(t)) \subset \text{mod}(F(t, \varphi), h(t))$ pela Proposição 1.1, segue então que o módulo de tal solução está contido no módulo associado ao campo vetorial.

Em particular, se $F(t, \varphi)$ e $h(t)$ forem T -periódicas em t , a solução acima também será.

É claro que no caso de $\dot{V}$ ser bem definida para $||\varphi|| = H$, $||\psi|| = H$ podemos tomar $H^* = H$ e a conclusão será válida em C_H .

Lema 3.2 - Se $F(t, \varphi)$ é contínua em $\mathbb{R} \times C_H$ (ou $\mathbb{R} \times C$), linear em φ e o sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável, existem constantes $K \geq 1$ e $\alpha > 0$ e um funcional de Liapunov $V(t, \varphi)$ definido para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$ (ou $\varphi \in C$) tais que

$$||\varphi|| \leq V(t, \varphi) \leq K||\varphi||$$

$$\dot{V}_{(3.1)}(t, \varphi) \leq -\alpha V(t, \varphi)$$

$$|V(t, \varphi_1) - V(t, \varphi_2)| \leq K||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Prova: [6], Lema II-1.

Teorema 3.9 - Suponhamos $F(t, \varphi)$ contínua em (t, φ) para $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, linear em φ e (3.1) uniformemente assintoticamente estável

vel. Se, para cada ψ fixada, $F(t, \psi)$ é limitada para $t \in \mathbb{R}$ e se $h(t)$ é qualquer função contínua e limitada, $-\infty < t < +\infty$, então as soluções de

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) + h(t) \quad (3.2)$$

satisfazem as seguintes propriedades:

- i) Todas as soluções de (3.2) são limitadas para $t \geq t_0$. De fato, se $R = \sup_t |h(t)|$, existem constantes $K \geq 1$, $\alpha > 0$ independentes de h tais que se $||\psi|| \leq \frac{R}{\alpha}$ então $||x_t(t_0, \psi)|| \leq \frac{KR}{\alpha}$ para $t \geq t_0 \geq 0$, $\psi \in C$.
- ii) Se $F(t, \psi)$, $h(t)$ são q.p. em t uniformemente para $\psi \in C$, então existe uma única solução quase periódica de (3.2), uniformemente assintoticamente estável, limitada por $\frac{KR}{\alpha}$, com módulo contido no módulo associado ao campo vetorial. Em particular se $F(t, \psi)$ e $h(t)$ são T -periódicos então (3.2) tem uma única solução T -periódica uniformemente assintoticamente estável.

Prova:

- i) Com $V(t, \psi)$ definido no Lema 3.2, segue pela Proposição 3.1:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(3.2)}(t, x_t(t_0, \psi)) &\leq \dot{V}_{(3.1)}(t, x_t(t_0, \psi)) + K|h(t)| \\ t &\geq t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(3.2)}(t, x_t(t_0, \psi)) \leq -\alpha V(t, x_t(t_0, \psi)) + KR.$$

Pelo T.3.1:

$$\begin{aligned} V(t, x_t(t_0, \psi)) &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} V(t_0, \psi) + \frac{KR}{\alpha} [1 - \\ &- e^{-\alpha(t-t_0)}] \quad \text{para } t \geq t_0, \quad \psi \in C. \end{aligned}$$

Suponhamos então $||\psi|| \leq \frac{R}{\alpha}$. Pelo Lema 3.2:

$$V(t_0, \psi) \leq \frac{KR}{\alpha}$$

Então:

$$||x_t(t_0, \psi)|| \leq V(t, x_t(t_0, \psi)) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{KR}{\alpha} - \frac{KR}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

$$\therefore ||x_t(t_0, \psi)|| \leq \frac{KR}{\alpha} \text{ para } t \geq t_0, \psi \in C.$$

ii) Seja $W(t, \psi, \psi) = V(t, \psi - \psi)$. Então:

$$||\psi - \psi|| \leq W(t, \psi, \psi) \leq K||\psi - \psi||$$

e

$$|W(t, \psi_1, \psi_1) - W(t, \psi_2, \psi_2)| \leq K|(\psi_1 - \psi_2) - (\psi_1 - \psi_2)|$$

para todo $t \geq 0$, $\psi, \psi, \psi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_2 \in C$. A derivada de $W(t, \psi, \psi)$ ao longo das soluções de (3.1)* é calculada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(3.1)}^*(t, \psi, \psi) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0_+} \frac{1}{\delta} \{V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \psi) - \\ &\quad - x_{t+\delta}(t, \psi) - V(t, \psi - \psi)\} \\ &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0_+} \frac{1}{\delta} \{V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \psi - \psi) - \\ &\quad - V(t, \psi - \psi)\}. \\ &\leq \dot{V}_{(3.1)}(t, \psi - \psi) \leq -\alpha V(t, \psi - \psi) \leq \\ &\leq -\alpha W(t, \psi, \psi). \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{W}_{(3.1)}^*(t, \psi, \psi) \leq -\alpha W(t, \psi, \psi).$$

Vemos assim que $W(t, \psi, \psi)$ satisfaz as condições do T.3.8 para $\psi \in C$.

Podemos tomar $x_t^0 = 0$ (solução de (3.1)) no T.3.8 e também $c = 0$.

Segue agora o resultado por aplicação do T.3.8.

Nota: Em [14], Yoshizawa prova que com as mesmas hipóteses destes teoremas, obtemos a estabilidade assintótica uniforme da solução quase periódica em toda a reta.

R E F E R E N C I A S

- [1] - AMERIO, L. - *Soluzioni Quasi-Periodiche, o Limitate, di Sistemi Differenziali Non Linear Quasi Periodici, o Limitate.* Ann. Mat. Pura Appl., 39, 97-119, 1955.
- [2] - COPPEL, W.A. - *Almost Periodic Properties of Ordinary Differential Equations.* Ann. Mat. Pura Appl., 76, 27-49, 1967.
- [3] - FAVARD, J. - *Leçons sur les Fonctions Presque-Periodiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1933.
- [4] - FRÉCHET, M. - *Les Fonctions Asymptotiquement Presque-Periodiques.* Rev. Scientifique, 79, 341-354, 1941.
- [5] - FINK, A.M. - *Almost Periodic Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, 1974.
- [6] - HALE, J.K. - *Asymptotic Behavior of the Solutions of Differential - Difference Equations.* Proc. Symp. Nonlinear Oscillations, IUTAM, Kiev, U.S.S.R., September, 1961.
- [7] - HALE, J.K. - *Periodic and Almost Periodic Solutions of Functional Equations.* Arch. Rational Mech. Anal., 15, 289-304, 1964.
- [8] - HALE, J.K. - *Theory of Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, 1976.
- [9] - KATO, J. - *Favard's Separation Theorem in Functional Differential Equations.* Funkcial. Ekvac., 18, 85-92, 1975.

- [10] - KATO, J. - *Uniformly Asymptotic Stability and Total Stability*. Tohoku Math. J., 22, 254-269, 1970.
- [11] - KATO, J. and SIBUYA, Y. - *Catastrophic Deformation of a Flow and Non Existence of Almost Periodic Solutions*. J. Faculty of Sci., Univ. of Tokyo, Ser. IA, 24, 267-280, 1977.
- [12] - KATO, J. and YOSHIKAWA, T. - *A Relationship between Uniformly Asymptotic Stability and Total Stability*. Funkcial. Ekvac., 12, 233-238, 1969.
- [13] - YOSHIKAWA, T. - *Asymptotically Almost Periodic Solutions of an Almost Periodic System*. Funkcial. Ekvac., 12, 23-40, 1969.
- [14] - YOSHIKAWA, T. - *Asymptotic Stability of Solutions of an Almost Periodic System of Functional Differential Equations*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, série II, XIII, 1964.
- [15] - YOSHIKAWA, T. - *Extreme Stability and Almost Periodic Solutions of Functional Differential Equations*. Arch. Rational Mech. Anal., 17, 148-170, 1964.
- [16] - YOSHIKAWA, T. - *Stability and Boundedness of Systems*. Arch. Rational Mech. Anal., 6, 409-421, 1960.
- [17] - YOSHIKAWA, T. - *Stability and Almost Periodic Solutions in Functional Differential Equations*. Equa Diff.
- [18] - YOSHIKAWA, T. - *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*. Springer-Verlag, 1975.
- [19] - YOSHIKAWA, T. - *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.