I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

O GRUPO DE UM LINK
EM UMA 3-VARIEDADE

PEDRO LUIZ QUEIROZ PERGHER

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO

BRASIL

O GRUPO DE UM LINK
EM UMA 3-VARIEDADE

PEDRO LUIZ QUEIROZ PERGHER

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS
MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
DA UNIVERSIDADE DE SÃO
PAULO, PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE
"MESTRE EM MATEMÁTICA"

Orientador: Prof. Dr. MÁRIO RAMEH SAAB

São Carlos

-1978-

O GRUPO DE UM "LINK" EM UMA 3 - VARIEDADE

PEDRO LUIZ QUEIROZ PERGHER
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Orientador: PROF. DR. MARIO RAMEH SAAB
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

À

Elizabeth,

Pedrinho,

Fabrizio

e a meus pais

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Dr. Mário Rameh Saab, que me proporcionou uma orientação precisa e levada a cabo com dedicação, tendo sido, fora isso, um grande amigo.

Aos professores e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo apoio constante nesta primeira etapa.

Aos professores do Departamento de Matemática da antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, pelo incentivo ao início à pesquisa durante os anos de graduação

Este trabalho dependeu par
cialmente de auxílios das
seguintes entidades:

FAPESP - através de bolsa de iniciação científica, durante o ano de
1975.

FINEP - através de bolsa de pós-graduação durante o ano de 1976.

FAPESP, CAPES e CNPq - através de auxílios concedidos ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, para bibliografia e con
tratação de docentes de cursos de pós-graduação.

THE GROUP OF A LINK IN A 3 - MANIFOLD

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Adviser: *Mário Rameh Saab*

In this work we get the presentation of the group of a link in R^3 with good projection, the relators being obtained locally in a neighbourhood of the link's crossing points, a fact that minimizes the number of letters of these relators which, in turn, implies maximal simplification of such presentations.

We also develop a systematical way of computing the presentation of the group of a link with good projection contained in the interior of a solid torus of genus m .

The actual computation of such presentations is illustrated by means of several examples.

I N D I C E

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I.....	3
Apresentação de Grupos.....	3
Teorema de Van Kampen.....	5
Links. Links do Mesmo Tipo.....	6
Links Suaves. Projeções de Links.....	7
CAPÍTULO II.....	8
Apresentação do Grupo de Um Link em R^3	8
Homomorfismo da Apresentação.....	11
Construção do Grupo Livre da Apresentação.....	11
Relatores da Apresentação.....	16
Teorema Principal.....	17
Observação Importante.....	27
CAPÍTULO III.....	37
Apresentação de um Grupo de um Link em T_m^3	37
Construção do Grupo Livre da Apresentação.....	39
Relatores da Apresentação.....	46
Teorema Principal.....	48
Observação sobre o caso $m = 1$	53
Explicitação dos relatores em Função dos Geradores.....	54
Exemplos.....	55
Observação sobre o Cálculo do Grupo de um Link numa Variedade Tridimensional, Compacta , Conexa e Orientada.....	58

I N T R O D U Ç Ã O

O problema com o qual nos defrontamos neste trabalho é um caso especial do problema do mergulho: dados espaços topológicos X e Y , de que diferentes modos pode X ser mergulhado em Y ?

O caso $X = S^1$, $Y = R^3$ dá origem à comumente chamada "Teoria dos Nós", e o método de ataque ao problema, neste caso, consiste na análise do grupo $\pi(R^3 - K)$, onde K é um nó em R^3 , ou seja, a imagem de um mergulho de S^1 em R^3 . No livro "Knot Theory" de Richard H. Crowell e Ralph H. Fox ([2]), encontramos uma clara e detalhada exposição a respeito do cálculo do grupo de um nó poligonal em posição regular em R^3 , assim chamado o grupo fundamental do complementar de um nó em R^3 .

Em [6], Perez, G., obteve uma apresentação do grupo de um nó poligonal em posição regular no interior de um toro sólido; ainda neste trabalho, uma generalização deste cálculo para um toro sólido de genus m foi efetuada.

O meu orientador, Prof. Mário R. Saab, propôs que iniciássemos estudos no sentido de se verificar o que acontece quando da substuição de um nó em R^3 por um link, assim chamada uma coleção finita de nós dois a dois disjuntos.

Nossas pesquisas conduziram-nos ao livro "Lectures on Introduction to Algebraic Topology", de G. de Rham, ([7]), onde é encontrada uma descrição informal do grupo de um link em R^3 com boa projeção.

Esta descrição está feita, por um lado, em rápidas linhas e carentes de maiores detalhes; por outro lado, na apresentação do grupo de um link aí encontrada, os relatores possuem no máximo quatro letras, levando vantagem neste aspecto sobre [2]. Além disso, a idéia de demonstração indica simplificação e maior elegância em relação a [2].

O que fizemos foi, então, descrever sistematicamente e demonstrar detalhadamente os fatos ali situados, utilizando idéias de [2], [7] e algumas idéias próprias.

Seguindo ainda a linha de abordagem de [7], determinamos também

uma apresentação para o grupo de um link no interior de um toro sólido de genus m .

A redação deste trabalho se divide em três capítulos.

No capítulo I encontram-se alguns tópicos fundamentais ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No capítulo II obtemos uma apresentação para o grupo de um link em R^3 ; o principal resultado deste capítulo é o teorema II.2.4.

O capítulo III trata da apresentação do grupo de um link no interior de um toro sólido de genus m , com o resultado principal dado pelo teorema III.2.4.

Colocamos no final uma observação relativa a um artigo a ser publicado, de autoria de Perez, G., no qual é desenvolvido o cálculo do grupo de um nó contido numa variedade tridimensional compacta, conexa e orientável.

C A P Í T U L O I

1.1. OBJETIVO

Este capítulo é dedicado à reunião de alguns fatos básicos os quais constituem ferramentas básicas para o desenvolvimento dos capítulos II e III.

Tais fatos envolvem considerações sobre apresentação de grupos, cálculo do grupo fundamental e links em R^3 .

Para maiores detalhes sobre estes tópicos, vide, por exemplo, ([2], capítulos II, III, IV e V).

1.2. APRESENTAÇÃO DE GRUPOS

Um grupo G é determinado se são dados um conjunto de *geradores* $g_1, g_2, \dots$,... e um conjunto de *relações* definidoras $f_1(g_1, g_2, \dots) = 1$, $f_2(g_1, g_2, \dots) = 1, \dots$, as quais têm a propriedade que toda relação verdadeira que subsiste entre os elementos $g_1, g_2, \dots$, é uma *consequência* algébrica das dadas equações.

Vejamos o que significa, exatamente, ser uma equação *consequência* algébrica de outras. Um elemento f de um grupo arbitrário, Q é chamado uma *consequência* de um conjunto de elementos $f_1, f_2, \dots$, de Q , se todo homomorfismo $\psi: Q \rightarrow H$ de Q em um grupo H que leva cada um dos elementos $f_1, f_2, \dots$, em 1, leva também o elemento f em 1.

A definição é equivalente a: "um elemento f de Q é uma *consequência* dos elementos $f_1, f_2, \dots$, se f está contido em cada um dos subgrupos normais de Q que contêm todos os elementos $f_1, f_2, \dots$ ".

O conjunto de todas as *consequências* de $f_1, f_2, \dots$, será chamado "*a consequência*" de $f_1, f_2, \dots$. É portanto, o subgrupo normal de Q gerado pelo subconjunto $\{f_1, f_2, \dots\}$ de Q , isto é, o menor subgrupo normal de Q que contém $f_1, f_2, \dots$.

Prova-se que um elemento de Q é uma *consequência* de $f_1, f_2, \dots$.

..., se e somente se, ele é da forma

$$\prod_{j=1}^s h_j^{n(j)} f_{i(j)}^{-1} h_j^{-1}$$

Seja, agora, F um grupo livre com base livre $x_1, x_2, \dots$, em correspondência biunívoca com os geradores $g_1, g_2, \dots$ de G .

Seja $\phi : F \rightarrow G$ o homomorfismo de F sobre G definido por $\phi(x_j) = g_j; j = 1, 2, \dots$.

Para cada relação definidora $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1$ do grupo G , coloquemos $r_i = f_i(x_1, x_2, \dots) \in F; i = 1, 2, \dots$.

Dizer então que em G vale $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1$ é equivalente a afirmar que r_i está no núcleo de ϕ .

Os elementos $r_1, r_2, \dots$ são chamados *relatores*. Indiquemos com R a *consequência* dos relatores $r_1, r_2, \dots$.

A afirmação que as equações $f_i(g_1, g_2, \dots) = 1; i = 1, 2, \dots$, constituem um conjunto de relações para G das quais derivam todas as outras é simplesmente a afirmação que R é o núcleo de ϕ . Neste caso, o grupo G é determinado pela base livre $x_1, x_2, \dots$ e pelos elementos $r_1, r_2, \dots$, pois G é isomorfo ao quociente F/R .

Estas idéias motivam a formalização do que é uma "apresentação de grupo".

Seja F um grupo livre com base livre E , a qual é suposta ter tantos elementos quantos forem necessários.

Uma *apresentação de grupo*, denotada por (x, r) , é um objeto formado por um subconjunto x , de E , e por um subconjunto r do subgrupo $F(x)$, gerado em F por x (o qual ainda é livre). O conjunto x é chamado o conjunto de *geradores* da apresentação, enquanto que r é o conjunto de *relatores* da apresentação.

O grupo definido pela apresentação (x, r) é o grupo quociente $|x : r| = F(x)/R$, onde R é a consequência em $F(x)$ de r .

Dado um grupo G , uma *apresentação para G* consiste de uma apresentação de grupo (x, r) e de um isomorfismo

$$i: |x : r| = \frac{F(x)}{R} \rightarrow G.$$

Se tivermos um homomorfismo $\phi: F(x) \longrightarrow G$ sobrejetor tal que o núcleo de ϕ é R , obtemos uma apresentação (x, r) para G , bastando tomar-se $r \subset R$ tal que a consequência de r é R .

Reciprocamente, se (x, r) é uma apresentação para G com isomorfismo

$$i: \frac{F(x)}{R} \longrightarrow G,$$

o homomorfismo $\phi: F(x) \longrightarrow G$ dado por $\phi(y) = i(yR)$, $y \in x$, é sobrejetor e seu núcleo é R .

Indicamos por $|x; r|\phi$ a apresentação do grupo G , com respeito ao homomorfismo ϕ .

1.2.1. Teorema

Sejam G, G' grupos e $\phi: G \longrightarrow G'$ um homomorfismo sobrejetor. Sejam $H \subset G$ e $\phi(H) = H' \subset G'$. Então a imagem da consequência de H é a consequência de H' .

Demonstração. Vide ([2], página 39).

A seguir, enunciamos dois resultados de importância vital para o que se pretende fazer nos capítulos II e III, resultados esses concernentes ao cálculo do grupo fundamental. O primeiro deles é o

1.3. TEOREMA DE VAN KAMPEN

Seja X um espaço topológico o qual é a união $X = X_1 \cup X_2$ de subconjuntos abertos X_1 e X_2 tais que $X_1, X_2, X_0 = X_1 \cap X_2$ são não vazios e conexos por caminhos. Desde que X_0 é não vazio, segue-se que X é conexo por caminhos. Sejam $p \in X_0$ um ponto base e $G = \pi(X, p)$, $G_i = \pi(X_i, p)$, $i = 0, 1, 2$. Os homomorfismos induzidos pelas inclusões formam o diagrama comutativo

isto é, $\omega_0 = \omega_1\theta_1 = \omega_2\theta_2$.

Nessas condições, os grupos $\omega_i(G_i)$, $i = 0, 1, 2$ geram G . Mais ainda, se H é um grupo arbitrário e $\psi_i : G_i \longrightarrow H$, $i = 0, 1, 2$, são homomorfismos os quais satisfazem $\psi_0 = \psi_1\theta_1 = \psi_2\theta_2$, então existe um único homomorfismo $\lambda : G \longrightarrow H$ tal que $\psi_i = \lambda\omega_i$, $i = 0, 1, 2$.

Prova. Vide ([2], Apêndice III).

Nas condições do teorema acima, temos que os grupos $\omega_1(G_1)$ e $\omega_2(G_2)$ geram G , uma vez que $\omega_0(G_0) = \omega_1(\theta_1(G_0)) \subset \omega_1(G_1)$.

Outro importante resultado é um corolário do teorema acima.

1.4. COROLÁRIO

Usando a mesma notação do teorema anterior, suponha que G_0 é trivial e G_1, G_2 são grupos livres com bases livres $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ e $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ respectivamente.

Então G é livre e $\{\omega_1\alpha_1, \omega_1\alpha_2, \dots, \omega_2\beta_1, \omega_2\beta_2, \dots\}$ é uma base livre para G .

A prova deste corolário é encontrada em ([2], pág. 64).

Teceremos abaixo algumas considerações a respeito de links em R^3 .

1.5. DEFINIÇÕES

Um $n\bar{o}$, em uma n -variedade M^n , é um subconjunto de M^n homeomorfo a uma circunferência.

Por um link em M^n entendemos uma coleção de um número finito de $n\bar{o}$ s, dois a dois disjuntos. Em geral, denotamos um link por

$L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, sendo L_i , $i = 1, 2, \dots, n$, os $n\bar{o}$ s que o compõem.

Em nosso trabalho, consideraremos links em R^3 e num toro sólido T^3m , de genus m .

Dados os links L, L' em R^3 , dizemos que eles possuem o *mesmo tipo* se existe homeomorfismo $h : R^3 \longrightarrow R^3$ tal que $h(L) = L'$.

Chamaremos o grupo fundamental do complementar de um link em R^3 por "o grupo do link".

É claro que se dois links são do mesmo tipo, então seus grupos são isomorfos. Um link é dito *poligonal* se é a união de um número finito de segmentos de reta fechados.

Se um link tiver o mesmo tipo de um link poligonal, então ele é chamado *suave*.

1.6. PROJEÇÕES DE LINKS

Seja $P : R^3 \longrightarrow R^3$ a projeção $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. Dado um link L em R^3 , dizemos que um ponto M da imagem $P(L)$ é chamado *ponto múltiplo* se a imagem inversa $P^{-1}(M)$ contém mais de um ponto de L .

A ordem de $M \in P(L)$ é a cardinalidade de $P^{-1}(M) \cap L$.

Assim, um ponto duplo é um ponto múltiplo de ordem dois, um ponto triplo é um ponto múltiplo de ordem três, etc.

Também podem ocorrer pontos múltiplos de ordem infinita.

Dizemos que um link L em R^3 tem *boa projeção* se $P(L)$ é uma curva com tangente contínua e curvatura contínua, cujas únicas singularidades são pontos duplos com tangentes distintas em direção, e as quais devem ocorrer em número finito.

A anteimagem de um ponto duplo consiste de dois pontos, enquanto que a anteimagem de qualquer outro ponto da projeção é um único ponto.

Pode ser mostrado que um link tendo boa projeção é suave e que qualquer link suave é do mesmo tipo de um link tendo boa projeção.

Em nosso estudo do cálculo do grupo de um link, restringiremos nossa atenção aos links com boa projeção.

Consideramos óbvia a extensão dos conceitos acima no caso da substituição de R^3 pelo toro sólido T^3m , de genus m , desde que este seja considerado como o espaço R^3 menos a união de m cilindros sólidos, fechados disjuntos e infinitos, com eixos dados por retas paralelas ao eixo z (ver capítulo III, III.2).

C A P Í T U L O I I

II.1. OBJETIVO

Em [7, pgs. 43-47] é dada, sem provas, uma descrição informal da apresentação do grupo de um link em R^3 com boa projeção, de tal maneira que os relatores envolvidos constituam-se no máximo de 4 letras.

Nosso objetivo aqui é descrever sistematicamente tal apresentação e demonstrar detalhadamente os fatos envolvidos neste contexto.

A seguir daremos alguns exemplos que ilustrarão a obtenção, na prática, de tais apresentações.

II.2. APRESENTAÇÃO DO GRUPO DE UM LINK EM R^3

Seja $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ um link em R^3 dado por uma boa projeção.

Suponhamos que L esteja situado entre os planos $z = 0, z = z_0$, $z_0 > 0$.

Coloquemos uma orientação em cada componente L_i de L e tomemos $p_0 = (0, 0, z_0)$ como ponto base.

II.2.1. Definições

Chamemos um caminho b em R^2 *simples* quando b for de classe C^1 , seus pontos terminais não encontrarem $P(L)$ e interseccionar $P(L)$ num número finito de pontos, sendo que em tais pontos as tangentes a $P(L)$ e a b diferem em direção.

Dado $p \in R^2$, denominemos $\bar{p}$ o caminho o qual se dirige linearmente de p_0 , paralelamente ao R^2 , até um ponto diretamente acima de p , e a seguir desce linearmente até o ponto p .

Dado um caminho α em R^2 , com ponto inicial $\alpha(0)$ e ponto final $\alpha(||\alpha||)$, o laço com ponto base p_0 dado por:

$$*\alpha = \overline{\alpha(0)} \cdot \alpha \cdot \overline{\alpha(||\alpha||)}^{-1} \quad (\text{fig. 1})$$

Figura 1

Figura 2

Dado um conjunto $K \subset L$, denotemos por K_* o conjunto:

$$K_* = \{(x, y, z) \in R^3 / \exists z' > z \text{ com } (x, y, z') \in K\} \quad (\text{fig. 2})$$

Seja $L \cap L_* = \{P_1, P_2, \dots, P_l\}$. Os pontos P_i , $i = 1, \dots, l$, são antecimagens de pontos duplos de $P(L)$, sendo exatamente os cruzamentos inferiores de L . Pode ser que alguma componente de L não interseccione L_* ; neste caso marcamos um ponto sobre tal componente que não seja cruzamento superior.

Determinamos assim um conjunto $Q = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$, $p \geq l$; os pontos de Q dividem L em p arcos abertos $a_1, a_2, \dots, a_p$, de tal forma que a_i começa em P_i e termina no ponto P_j que vem após P_i seguindo-se a orientação da componente à qual P_i e P_j pertencem. (fig. 3).

Figura 3

Chamemos os arcos a_i de *arcos principais*. Se um P_j pertence à superfície a_{i*} , omitimos todos os pontos de a_{i*} que estejam abaixo de P_j , inclusive P_j ; com este procedimento obtemos superfícies $F_1, F_2, \dots, F_p$ sem bordo e simplesmente conexas. Pomos $F = \bigcup_{i=1}^p F_i$.

Denotemos as semiretas abertas $\{P_i\}_*$ por d_i , $i = 1, \dots, p$; seja $D = \bigcup_{i=1}^p d_i$.

Seja $F(x)$ o grupo livre gerado pelos símbolos $x_1, x_2, \dots, x_p$. A cada caminho simples $\alpha \in R^2 - P(Q)$ associemos o elemento $\alpha^\# \in F(x)$, dado por

$$\alpha^\# = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k},$$

onde os projetados arcos cruzados por α são, em ordem, $P(a_{i_1}), \dots, P(a_{i_k})$, e $\epsilon_l = +1$ ou -1 de acordo com que α cruze $P(a_{i_l})$ da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. (fig. 4).

Figura 4

A correspondência $a \longrightarrow a^\#$ claramente preserva produto.

O grupo $F(x)$ será o grupo livre da apresentação procurada para o grupo de L .

Fixemos de agora em diante, para cada $j = 1, 2, \dots, p$, um caminho simples A_j em $R^2 - P(Q)$ tal que $A_j^\# = x_j$, e o qual cruza abaixo de a_j uma só vez da esquerda para a direita.

Definamos o homomorfismo $\phi: F(x) \longrightarrow \pi(R^3 - L, p_0)$ por $\phi(x_j) = [A_j]$, $j = 1, \dots, p$, onde os colchetes indicam a classe de homotopia de A_j em $R^3 - L$. Pode-se notar que se A'_j é outro caminho simples em $R^2 - P(Q)$ com $A'_j{}^\# = x_j$, então A'_j é homotópico a A_j em $R^3 - L$, o que nos dá a boa definição de ϕ .

O fato de que para caminhos $a, b \in R^2$ vale

$$[(a \cdot b)] = [a \cdot b] \text{ e } [(a)^{-1}] = [a^{-1}]$$

implica imediatamente que $\phi(a^\#) = [a]$ para todo caminho simples a em $R^2 - P(Q)$.

Uma meta posterior será mostrar que ϕ é sobrejetivo, ou seja, que $\phi(x_1), \dots, \phi(x_p)$ geram o grupo $\pi(R^3 - L, p_0)$.

Os dois teoremas que vêm a seguir objetivam a construção de

um subconjunto de $R^3 - L$ cujo grupo fundamental, com uma conveniente identificação, seja exatamente o grupo livre $F(x)$.

11.2.2. Teorema

$R^3 - (L \cup L_*)$ é simplesmente conexo.

Prova

Basta notar que G , o plano paralelo ao R^2 passando por p_0 , é retrato por deformação de $R^3 - (L \cup L_*)$ através da homotopia:

$$h_s(x, y, z) = (x, y, (1-s)z + sz_0), \quad 0 \leq s \leq 1$$

A seguir, G retrai-se no ponto p_0 através da homotopia:

$$g_s(x, y, z_0) = ((1-s)x, (1-s)y, z_0), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

e a demonstração está terminada./

11.2.3. Teorema

O conjunto $(R^3 - L \cup L_*) \cup \left(\bigcup_{j=1}^p F_j \right)$, (fig. 5) é conexo por caminhos e seu grupo fundamental com ponto base p_0 é um grupo livre com base livre $x_1, x_2, \dots, x_p$, onde $x_i = [*A_i]$, os colchetes indicando classe de homotopia de $*A_i$ em

$$(R^3 - L \cup L_*) \cup \left(\bigcup_{j=1}^p F_j \right)$$

Prova

Lembremos que as superfícies $F_1, F_2, \dots, F_p$ são simplesmente conexas, disjuntas, e que o laço $*A_j$ intersecciona F_j apenas uma vez, estando, fora isso, contido em $R^3 - L \cup L_*$.

Para cada $j = 1, \dots, p$, construíamos uma vizinhança aberta W_j da união de F_j com os pontos imagens de $*A_j$, de tal forma que:

i) W_j é conexa por caminhos e $\pi(W_j, p_0)$ é livre de posto 1, com gerador dado pela classe de homotopia de $*A_j$ em W_j .

ii) $W_j \cap (L \cup L_*) = F_j$

iii) $W_j - L_*$ é simplesmente conexo.

A construção de W_j pode ser levada a cabo da seguinte maneira: seja $\epsilon > 0$ tão pequeno que a ϵ -vizinhança aberta M_1^j da imagem de $*A_j$ satisfaça $M_1^j \cap (L \cup L^*) \subset F_j$; seja M_2^j o conjunto de todos os pontos de R^3 cuja distância a F_j é menor do que ϵ e que estejam mais próximos de F_j do que de $L \cup L^* - F_j$.

O conjunto aberto

$$W_j = M_1^j \cup M_2^j$$

satisfaz as condições acima estipuladas. (fig. 6)

$$E_p = R^3 - (L \cup L^* - (\bigcup_{j=1}^p F_j))$$

Figura 5

Figura 6

Seja $E_0 = R^3 - (L \cup L^*)$; $E_i = E_{i-1} \cup W_i$

Desde que $W_j \cap (L \cup L^*) = F_j$, vale a igualdade:

$$(R^3 - (L \cup L^*)) \cup W_j = (R^3 - (L \cup L^*)) \cup F_j.$$

Indutivamente, concluímos então que:

$$E_j = (R^3 - (L \cup L^*)) \cup (\bigcup_{k=1}^p F_k)$$

Em particular,

$$E_p = (R^3 - (L \cup L_*)) \cup \left(\bigcup_{k=1}^p F_k \right)$$

é o espaço citado no teorema.

Além disso, desde que $F_k \cap F_j = W_k \cap (L \cup L_*) \cap W_j =$
 $= W_k \cap (L \cup L_*) \cap W_j \cap (L \cup L_*) = F_k \cap F_j = \emptyset$, para $k \neq j$, segue-se que:

$$\begin{aligned} E_{j-1} \cap W_j &= ((R^3 - L \cup L_*) \cup W_1 \cup \dots \cup W_{j-1}) \cap W_j = \\ &= (R^3 - L \cup L_*) \cap W_j = W_j - (L \cup L_*) = W_j - L_* \end{aligned}$$

Portanto, para $j = 1, 2, \dots, p$, temos que $E_{j-1} \cap W_j$ é simplesmente conexo.

Consideremos o diagrama:

onde $\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2, \omega_0$ são os homomorfismos induzidos pelas respectivas inclusões.

Temos que $E_0, W_1, E_0 \cap W_1$ são não vazios, conexos por caminhos e abertos em $E_1 = E_0 \cup W_1$.

Como $\pi(E_0 \cap W_1)$ e $\pi(E_0)$ são grupos triviais e $\pi(W_1)$ é livre com gerador dado pela classe de homotopia de $*A_1$ em W_1 , podemos

usar o corolário do Teorema de Van Kampen [I, 4] para concluir que E_1 é conexo por caminhos e $\pi(E_1, p_0)$ é livre com base livre constituída, pela classe de homotopia de $*A_1$ em E_1 .

Suponhamos indutivamente que E_{j-1} seja conexo por caminhos e $\pi(E_{j-1}, p_0)$ seja livre com base livre dada pelas classes de homotopia de $*A_1, *A_2, \dots, *A_{j-1}$ em E_{j-1} .

Notemos daí que E_{j-1} , W_j , $E_{j-1} \cap W_j$ são conexos por caminhos, não vazios e abertos em

$$E_{j-1} \cup W_j = E_j.$$

Podemos então formar o diagrama:

Uma vez que $\pi(E_{j-1} \cap W_j)$ é trivial e $\pi(W_j)$ é livre gerado pela classe de $*A_j$ em W_j , usamos mais uma vez [I, 4] para concluir que E_j é conexo por caminhos e $\pi(E_j)$ é um grupo livre cuja base livre é dada pelas classes de $*A_1, \dots, *A_j$ em E_j .

Segue-se a afirmativa feita para $E_p = E_{p-1} \cup W_p$.

A identificação dos símbolos x_i , $i = 1, \dots, p$, com as classes $[*A_i]$ de $\pi(E_p, p_0)$, utilizada no teorema anterior, produz a igualdade entre o grupo livre $F(x)$ e $\pi(E_p, p_0)$; além disso, como é fácil verificar-se, o homomorfismo $\phi: \pi(E_p, p_0) \longrightarrow \pi(R^3 - L, p_0)$ induzido pela inclusão torna-se exatamente o homomorfismo designado pelo mesmo símbolo anteriormente introduzido (em II.2.1).

Veremos que $\pi(E_p, p_0)$ e ϕ são, respectivamente, o grupo livre e o homomorfismo da apresentação do grupo de L .

O que vem a seguir é a descrição das classes de $\pi(E_p, p_0)$ cuja consequência é igual ao núcleo de ϕ ; ou seja, nada mais faremos que descrever os relatores da apresentação de $\pi(R^3 - L, p_0)$. Salientamos que, para qualquer caminho simples α em $R^2 - P(Q)$, o elemento $\alpha^\# \in F(x)$ será entendido como um elemento de $\pi(E_p, p_0)$, precisamente a classe de homotopia em E_p do laço $\ast\alpha$.

Cada ponto $P(P_i) \in P(L)$ está numa das situações:

- 1) $P(P_i)$ é imagem de um cruzamento inferior, ou seja, é um ponto duplo de $P(L)$, e neste caso é o ponto de encontro de um arco $P(a_k)$ com o ponto que separa o arco $P(a_i)$ de algum arco $P(a_j)$, de acordo com a figura 7.

Pelo fato de ser L um link com boa projeção, podemos escolher uma circunferência com centro em $P(P_i)$ a qual encontra transversalmente $P(a_i)$ e $P(a_j)$ uma vez e $P(a_k)$ duas vezes, estando, fora isso, contida em $R^2 - P(L)$. Selecionamos um ponto $q_i \notin P(L)$ sobre tal circunferência e orientamo-la no sentido anti-horário, de maneira que a mesma representa um laço v_i com ponto base q_i contido em $R^2 - P(Q)$.

Figura 7

Figura 8

2) $P(P_i)$ não é ponto duplo; neste caso $P(P_i)$ é ponto inicial e terminal de $P(\alpha_i)$. Escolhemos então uma circunferência com centro em $P(P_i)$ representando um laço v_i em $R^2 - P(Q)$ com ponto base $q_i \notin P(L)$, de maneira que v_i encontre transversalmente $P(\alpha_i)$ apenas duas vezes e não encontre nenhum outro ponto de $P(L)$. Novamente, orientamos v_i no sentido anti-horário. (fig. 8). Os laços $v_1, v_2, \dots, v_p$ assim obtidos podem ser considerados disjuntos dois a dois.

Notemos que $v_i^\# = x_j x_k \bar{x}_i \bar{x}_k$ no primeiro caso e $v_i^\# = x_i \bar{x}_i$ no segundo caso.

É geometricamente óbvio o fato que $\phi(v_i^\#) = 0$ para $i = 1, \dots, p$. Com efeito, em relação ao primeiro caso, temos

$$\phi(v_i^\#) = \phi(x_j x_k \bar{x}_i \bar{x}_k) = [* (A_j A_k A_i^{-1} A_k^{-1})].$$

A contração do laço

$$* (A_j A_k A_i^{-1} A_k^{-1})$$

no ponto p_0 em $R^3 - L$ é vista deslizando-o paralelamente ao eixo Z no sentido negativo e a seguir levantando-o até p_0 . Quanto ao segundo caso, não há o que comentar, desde que $v_i^\# = 0$ em $\pi(E_p, p_0)$. Os elementos $v_1^\#, v_2^\#, \dots, v_p^\#$ serão os relatores da apresentação procurada para $\pi(R^3 - L, p_0)$.

11.2.4. Teorema

Uma apresentação para $\pi(R^3 - L, p_0)$ é $(x_1, x_2, \dots, x_p; v_1^\#, v_2^\#, \dots, v_p^\#)$. Além disso, qualquer um dos relatores $v_i^\#$ é consequência dos restantes $p-1$ relatores, podendo portanto ser omitido na apresentação.

Antes de passarmos a demonstração do teorema, provemos um lema bastante importante para a obtenção da mesma.

11.2.5. Lema

Consideremos uma sequência de grupos e homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{\phi_1} G_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{p-1}} G_{p-1} \xrightarrow{\phi_p} G_p$$

e elementos $b_i \in G_{i-1}$, $b_j' \in G_0$, $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 2, 3, \dots, p$, onde

- a) cada ϕ_i é sobre
 b) núcleo $(\phi_i) = \text{consequência } \{b_i\}$, $i = 1, 2, \dots, p$.
 c) $\phi_{j-1} \phi_{j-2} \dots \phi_1 (b'_j) = b_j$, $j = 2, \dots, p$.

Então núcleo $(\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1) = \text{consequência } \{b_1, b'_1, b'_2, \dots, b'_p\}$

Prova. Temos $\phi_p \dots \phi_1(b_1) = \phi_p \dots \phi_{p-1}(\phi_1(b_1)) = 1$; também $\phi_p \dots \phi_1(b'_j) = \phi_p \dots \phi_j(\phi_{j-1} \dots \phi_1(b'_j)) = \phi_p \dots \phi_j(b_j) = \phi_p \dots \phi_{j+1}(1) = 1$, $j = 2, \dots, p$.

Portanto $\text{conseq } \{b_1, b'_1, \dots, b'_p\} \subseteq \text{núcleo } (\phi_p \dots \phi_1)$.

Notemos agora que se $\beta \in \text{núcleo } (\phi_{p-i} \phi_{p-i-1} \dots \phi_1)$, para $0 \leq i \leq p-2$, teremos que $\phi_{p-i}(\phi_{p-i-1} \dots \phi_1(\beta)) = 1$ e portanto

$$\phi_{p-i-1} \dots \phi_1(\beta) \in \text{conseq } \{b_{p-i}\} \quad (1)$$

Como $\phi_{p-i-1} \dots \phi_1$ é sobrejetora, temos por [I.2.1] que:

$$\text{conseq}\{b_{p-i}\} = \text{conseq}\{\phi_{p-i-1} \dots \phi_1 (b'_{p-i})\} = \phi_{p-i-1} \dots \phi_1(\text{conseq}\{b'_{p-i}\}) \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2), $\phi_{p-i-1} \dots \phi_1(\beta) = \phi_{p-i-1} \dots \phi_1(\xi_{p-i})$, onde $\xi_{p-i} \in \text{conseq } \{b'_{p-i}\}$. O que provamos foi a implicação:

$\beta \in \text{núcleo } (\phi_{p-i} \dots \phi_1) \longrightarrow \text{existe } \xi_{p-i} \in \text{conseq } \{b'_{p-i}\} \text{ tal que } \beta \xi_{p-i}^{-1} \in \text{núcleo } (\phi_{p-i-1} \dots \phi_1)$, $0 \leq i \leq p-2$. Ora, temos então:

$\beta \in \text{núcleo } (\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1) \longrightarrow \text{existe } \xi_p \in \text{conseq } \{b'_p\} \text{ tal que } \beta \xi_p^{-1} \in \text{núcleo } (\phi_{p-1} \dots \phi_1) \longrightarrow \text{existe } \xi_{p-1} \in \text{conseq } \{b'_{p-1}\} \text{ tal que } \beta \xi_p^{-1} \xi_{p-1}^{-1} \in \text{núcleo } (\phi_{p-2} \dots \phi_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{existe } \xi_2 \in \text{conseq } \{b'_2\} \text{ tal que } \beta \xi_p^{-1} \xi_{p-1}^{-1} \dots \xi_2^{-1} \in \text{núcleo } (\phi_1) = \text{conseq } \{b_1\}$.

Assim $\beta \xi_p^{-1} \xi_{p-1}^{-1} \dots \xi_2^{-1} = \xi_1 \in \text{conseq } \{b_1\}$.

Temos portanto que $\beta = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_p$, onde $\xi_1 \in \text{conseq } \{b_1\}$, $\xi_j \in \text{conseq } \{b'_j\}$, $2 \leq j \leq p$.

A conclusão é que núcleo $(\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1) = \text{conseq } \{b_1, b'_2, \dots, b'_p\}$ o que termina a demonstração do lema/.

Passemos agora à prova do teorema. Notemos que $E_p = R^3 - (L \cup D)$, onde:

$$D = \bigcup_{i=1}^p d_i$$

(ver fig. 5). Para cada $j = 1, 2, \dots, p$, seja N_j numa vizinhança aberta da semireta d_j satisfazendo :

- a) N_j é simplesmente conexa e contém p_0
- b) $N_j \cap L = \emptyset$
- c) $N_j \cap D = d_j$
- d) $\pi(N_j - d_j, p_0)$ é cíclico infinito.

A existência de tais vizinhanças é geometricamente clara, bem como a construção das mesmas: para $\epsilon_j > 0$, seja N_j^1 o conjunto dos pontos da ϵ_j - vizinhança tubular de d_j que distam menos de d_j do que de $L - d_j$, isto é, N_j^1 é um tubo infinito com eixo d_j , convenientemente nivelado na ponta de maneira a não interseccionar L .

Escolhamos um arco suave e_j ligando d_j a p_0 com a propriedade de não interseccionar nem enlaçar L e não encontrar d_i para $i \neq j$ ("não enlaçar" está aqui com o sentido de não interseccionar alguma bola aberta em R^3 contendo L) e seja N_j^2 uma ϵ_j - vizinhança aberta de e_j . Para $\epsilon_j > 0$, o conjunto aberto $N_j^1 \cup N_j^2$ satisfaz todas as condições acima. (fig. 9)

Figura 9

Não há problema em impor que $\epsilon_j = \epsilon > 0$ fixo e raio de $v_j < \epsilon$, $j = 1, 2, \dots, p$, onde v_j são os laços em R^2 introduzidos anteriormente. Seja agora k_j um caminho em $N_j - d_j$ ligando p_0 a q_j (ponto base de v_j). O caminho k_j pode, por exemplo, ter um pedaço em comum com e_j .

Então, a classe de homotopia de laço $k_j v_j k_j^{-1}$ em $N_j - d_j$ será o gerador do grupo livre de posto 1, $\pi(N_j - d_j, p_0)$. Denotemos tal classe por μ_j (fig. 9).

Sejam $D_0 = E_p$, $D_i = D_{i-1} \cup N_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Temos então a sequência de grupos e homomorfismos induzidos pelas respectivas inclusões:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi(D_0, p_0) & \xrightarrow{\phi_1} & \pi(D_1, p_0) & \xrightarrow{\phi_2} & \pi(D_2, p_0) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \\ \pi(D_{p-1}, p_0) & \xrightarrow{\phi_p} & \pi(D_p, p_0) & & & & \end{array}$$

Seja $\overline{\mu_j}$ = classe de homotopia do laço $k_j v_j k_j^{-1}$ em D_{j-1} , $j = 1, 2, \dots, p$.

Provaremos a seguir os seguintes fatos:

a) Cada ϕ_i da sequência acima é sobrejetivo.

b) núcleo $(\phi_i) = \text{consequência } \{\overline{\mu_i}\} \subset \pi(D_{i-1}, p_0)$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Estes fatos, através do lema anterior, vão trazer-nos informações a respeito do núcleo de $\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1$, além de implicarem na sobrejeção de tal composição de homomorfismos.

Ora, mas é exatamente este o ponto crucial de nosso problema, uma vez que

$$D_p = E_p \cup \left(\bigcup_{i=1}^p d_i \right) = (R^3 - (L \cup D)) \cup D = R^3 - L$$

é o espaço cujo grupo quer se calcular e $\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1 = \phi: \pi(E_p, p_0) \longrightarrow \pi(R^3 - L, p_0)$ é aquele que se espera ser o homomorfismo da apresentação de $\pi(R^3 - L, p_0)$.

Passemos então à prova de a) e b). Mais uma vez contaremos com o Teorema de Van Kampen.

Temos, para $j = 1, 2, \dots, p$, que:

$$1) D_{j-1} \cap N_j = N_j - d_j$$

Com efeito, para $i \neq k$, temos que:

$$\begin{aligned} (N_i \cap N_k) \cup E_p &= ((R^3 - L \cup D) \cup N_i) \cap ((R^3 - L \cup D) \cup N_k) = \\ &= (R^3 - (L \cup D - N_i)) \cap (R^3 - (L \cup D - N_k)) = \\ &= (R^3 - (L \cup D - d_i)) \cap (R^3 - (L \cup D - d_k)) = \\ &= R^3 - ((L \cup D - d_i) \cup (L \cup D - d_k)) = \end{aligned}$$

$$= R^3 - (L \cup D - (d_i - (L \cup D - d_k))) = R^3 - L \cup D = E_p, \text{ desde que}$$

$$N_i \cap L = \phi, N_i \cap D = d_i \text{ e } d_i - (L \cup D - d_k) = \phi$$

$$\text{Portanto, } N_i \cap N_k \subset E_p.$$

Vejamos agora que

$$N_j \cap D_{j-1} = N_j \cap (E_p \cup (\bigcup_{l=1}^{j-1} N_l)) = (N_j \cap E_p) \cup (N_j \cap (\bigcup_{l=1}^{j-1} N_l)).$$

Pelo visto atrás,

$$N_j \cap (\bigcup_{l=1}^{j-1} N_l) \subset N_j \cap E_p.$$

Assim, usando as relações $N_j \cap D = d_j$ e $N_j \cap L = \phi$, concluimos que:

$$\begin{aligned} N_j \cap D_{j-1} &= N_j \cap E_p = N_j \cap (R^3 - L \cup D) = N_j - (L \cup D) = N_j - D = \\ &= N_j - (N_j \cap D) = N_j - d_j / \end{aligned}$$

2) Os conjuntos N_j , D_{j-1} e $N_j \cap D_{j-1} = N_j - d_j$ são conexos por caminhos, não vazios e abertos em

$$D_j = D_{j-1} \cup N_j$$

Consideremos então o diagrama (o ponto base p_0 será omitido)

onde

$\theta_1^j, \theta_2^j, \theta_0^j, \eta_j$ são homomorfismos induzidos pela inclusão;

R_j é a consequência de $\overline{\mu_j} = \theta_1^j(\mu_j) \in \pi(D_{j-1})$;

$\psi_1^j: \pi(D_{j-1}) \longrightarrow \frac{\pi(D_{j-1})}{R_j}$ é o homomorfismo quociente;

$\psi_0^j = \psi_1^j \circ \theta_1^j$;

$\psi_0^j =$ homomorfismo nulo do grupo trivial $\pi(N_j)$ em $\frac{\pi(D_{j-1})}{R_j}$

Notemos que

$\psi_0^j(\mu_j) = \psi_1^j(\theta_1^j(\mu_j)) = \psi_1^j(\overline{\mu_j}) = \overline{\mu_j} \in R_j$; isso significa que ψ_0^j é o homomorfismo nulo.

Valem, portanto, as relações de consistência:

$$\psi_0^j = \psi_1^j \circ \theta_1^j = \psi_2^j \circ \theta_2^j$$

Pelo Teorema de Van Kampen, existe homomorfismo

$$\lambda: \pi(D_j) \longrightarrow \frac{\pi(D_{j-1})}{R_j}$$

tal que $\lambda \theta_j^j = \psi_1^j$

Estamos agora em condições de concluir as afirmativas a) e b):

a) ϕ_j é sobre: com efeito, pelo Teorema de Van Kampen, $\phi_j(\pi(D_{j-1}))$ e $\eta_j(\pi(N_j))$ geram $\pi(D_j)$; desde que $\eta_j(\pi(N_j)) = 0$, concluímos que $\phi_j(\pi(D_{j-1})) = \pi(D_j)$ (nenhum grupo é gerado por um subgrupo próprio)

b) núcleo $(\phi_j) =$ consequência $\{\overline{\mu_j} = \theta_1^j(\mu_j)\}$: com efeito, $\phi_j(\overline{\mu_j}) = \phi_j(\theta_1^j(\mu_j)) = \eta_j(\theta_2^j(\mu_j)) = \eta_j(1) = 1$, desde que $\pi(N_j) = 0$. Assim, consequência $\{\overline{\mu_j}\} \subset$ núcleo (ϕ_j) .

Reciprocamente, seja $\beta \in$ núcleo (ϕ_j) . Então $R_j = \lambda(1) = \lambda(\phi_j(\beta)) = \psi_1^j(\beta) = \beta R_j$, ou seja, $\beta \in R_j = \text{conseq } \{\overline{\mu_j}\}$. Portanto núcleo $(\phi_j) \subset \text{conseq } \{\overline{\mu_j}\}$, o que conclui o fato acima.

Voltemos à sequência

$$\pi(D_0, p_0) \xrightarrow{\phi_1} \pi(D_1, p_0) \xrightarrow{\phi_2} \pi(D_2, p_0) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\phi_{p-1}} \pi(D_{p-1}, p_0) \xrightarrow{\phi_p} \pi(D_p, p_0).$$

Seja μ_j^0 a classe de homotopia do laço k_j, v_j, k_j^1 em D_0 (notar que $\mu_1^0 = \overline{\mu_1}$), para $j = 1, 2, \dots, p$.

Claramente vale:

$$c) \phi_{j-1} \dots \phi_1(\mu_j^0) = \overline{\mu_j}, \text{ para } j = 2, 3, \dots, p.$$

Os fatos a), b), c) implicam, através do lema anterior, que núcleo $(\phi_p \phi_{p-1} \dots \phi_1) =$ núcleo $(\phi) =$ consequência $\{\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_p^0\}$

Desde que ϕ é sobrejetiva, concluímos que:

$$\pi(R^3 - L, p_0) = \{x_1, x_2, \dots, x_p : \mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_p^0 \mid \phi\}$$

Mostremos agora que qualquer um dos relatores $\mu_1^0, \dots, \mu_p^0$ é consequência dos restantes $p-1$ relatores.

Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} D_{p-1} &= E_p \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} d_i \right) = (R^3 - (L \cup \left(\bigcup_{i=1}^p d_i \right))) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} d_i \right) = \\ &= R^3 - ((L \cup \left(\bigcup_{i=1}^p d_i \right)) - \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} d_i \right)) = R^3 - (L \cup d_p) \end{aligned}$$

(fig. 10).

$$R^3 - (L \cup d_p)$$

Figura 10

O laço $k_p v_p k_p^{-1}$ é homotópico a zero em D_{p-1} ; a contração de tal laço no ponto p_0 é visualizada da seguinte maneira: alarga-se o laço v_p a um laço v'_p conforme indica a figura 11. A seguir, desliza-se o laço assim obtido paralelamente ao eixo z no sentido positivo até que se atinja o plano $z = z_0$. A retração do último laço em p_0 é geometricamente óbvia.

Figura 11

Portanto, temos que $\overline{\mu_p}$ é a classe nula em D_{p-1} .

Consideremos o trecho da sequência atrás introduzida:

$$\pi(D_0, p_0) \xrightarrow{\phi_1} \pi(D_1, p_0) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{p-1}} (D_{p-2}, p_0) \xrightarrow{\phi_{p-1}} (D_{p-1}, p_0)$$

Aplicando-se o lema anterior a tal trecho, concluímos que núcleo $(\phi_{p-1} \phi_{p-2} \dots \phi_1) =$ consequência $\{\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_{p-1}^0\}$

Ora, $1 = \overline{\mu_p} = \phi_{p-1} \dots \phi_1 (\mu_p^0)$; portanto $\mu_p^0 \in$ núcleo $(\phi_{p-1} \dots \phi_1)$, ou seja,

$$\mu_p^0 \in \text{consequência } \{\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_{p-1}^0\}.$$

Desde que a enumeração inicial dos pontos P_i é arbitrária, concluímos que qualquer um dos relatores $\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_p^0$ é consequência dos restantes $p-1$ relatores/.

Para finalizar a prova do teorema, basta mostrar que cada classe $\mu_i^0 = [k_i, v_i, k_i^1]$ em $D_0 = E_p$ é conjugada de $v_i^\#$. Observemos que o arco $\overline{q_i}$ (definido atrás) está totalmente contido em E_p , pelo fato de q_i não pertencer a $P(L)$; portanto, um representante de $v_i^\#$ é $\overline{q_i} \cdot v_i \cdot \overline{q_i}^1$ (fig. 12).

Figura 12

Temos

$$\begin{aligned} k_i v_i k_i^{-1} &= k_i \bar{q}_i^{-1} \bar{q}_i v_i \bar{q}_i^{-1} \bar{q}_i k_i^{-1} \\ &= (k_i \bar{q}_i^{-1}) (\bar{q}_i v_i \bar{q}_i^{-1}) (k_i \bar{q}_i^{-1})^{-1} = (l_i) (\bar{q}_i v_i \bar{q}_i^{-1}) (l_i)^{-1}, \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$$l_i = k_i \bar{q}_i^{-1}$$

Portanto, em E_p vale:

$$[k_i v_i k_i^{-1}] = [l_i] [\bar{q}_i v_i \bar{q}_i^{-1}] [l_i]^{-1} \quad [l_i] v_i^{\#} [l_i]^{-1}$$

Assim, para $i = 1, 2, \dots, p$, $v_i^{\#}$ é conjugado de

$$[k_i v_i k_i^{-1}] = \mu_i^0$$

Concluimos que

$\pi(R^3 - L, p_0) = |x_1, x_2, \dots, x_p : v_1^{\#}, \dots, v_p^{\#}|_{\phi}$ e que qual quer um dos relatores $v_i^{\#}$ é consequência dos restantes $p-1$ relatores, como queríamos demonstrar./

11.2.6. Exemplos

Ilustraremos agora com alguns exemplos a obtenção da apresentação do grupo de um link em R^3 com boa projeção, da maneira como foi atrás abordada; em cada caso, veremos como obter dos arcos principais os geradores e dos pontos de cruzamento os relatores.

Exemplo 1

Temos aqui duas circunferências se entrelaçando uma vez em R^3 ; obtemos os geradores $x_1 = [A_1]$, $x_2 = [A_2]$ e os relatores $v_1^{\#} = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$, $v_2^{\#} = x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}$; omitindo-se o relator $v_2^{\#}$, concluimos que

$$\pi(R^3 - L, p_0) = |x_1, x_2 : x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}|$$

é um grupo abeliano livre de posto 2.

Figura 13

Exemplo 2

Consideramos novamente duas circunferências se entrelaçando, apenas que num número maior de vezes.

Figura 14

Temos aqui $\pi(R^3 - L, p_0) = |x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 : v_1^\#, v_2^\#, v_3^\#, v_4^\#, v_5^\#, v_6^\#|$

onde

$$v_1^\# = x_6^{-1} x_3 x_6^{-1} x_1^{-1}$$

$$v_2^\# = x_5^{-1} x_1 x_5^{-1} x_2^{-1}$$

$$v_3^\# = x_4^{-1} x_2 x_4^{-1} x_3^{-1}$$

$$v_4^\# = x_6 x_3 x_4^{-1} x_3^{-1}$$

$$v_5^\# = x_4 x_2 x_5^{-1} x_2^{-1}$$

$$v_6^\# = x_1 x_6^{-1} x_1^{-1} x_5$$

A nossa vontade, podemos omitir qualquer um dos relatores v_i^* acima.

Exemplo 3 :

Aqui temos dois nós "trefoil" entrelaçando-se em R^3

Figura 15

$$\pi(R^3 - L) = |x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} : v_1^\#, v_2^\#, v_3^\#, v_4^\#, v_5^\#, v_6^\#, v_7^\#, v_8^\#, v_9^\#, v_{10}^\# |$$

onde

$$v_1^\# = x_1^{-1} x_4 x_3 x_4^{-1}; v_2^\# = x_8 x_1 x_8^{-1} x_2^{-1}; v_3^\# = x_6^{-1} x_2 x_6 x_3^{-1}$$

$$v_4^\# = x_7^{-1} x_3 x_7 x_4^{-1}; v_5^\# = x_4 x_1 x_5^{-1} x_1^{-1}; v_6^\# = x_6^{-1} x_8 x_5 x_8^{-1}$$

$$v_7^\# = x_7^{-1} x_9 x_{10} x_9^{-1}; v_8^\# = x_6^{-1} x_8 x_6 x_7^{-1}; v_9^\# = x_{10}^{-1} x_8 x_{10} x_9^{-1}$$

$$v_{10}^\# = x_9 x_8 x_{10}^{-1} x_8^{-1}$$

Exemplo 4

Duas circunferências que não se entrelaçam.

Figura 16

Nesse exemplo temos $L \cap L^* = \emptyset$; de acordo com o que foi atrás desenvolvido, devemos colocar um ponto em cada componente (que não sejam cruzamentos superiores) para se obter arcos principais.

A apresentação obtida no caso é

$$\pi(R^3 - L, p_0) = |x_1, x_2; x_1 x_1^{-1}, x_2 x_2^{-1}| = |x_1, x_2|$$

como era de se esperar.

11.2.7. Observação importante

A apresentação para o grupo de um link em R^3 com boa projeção obtida nas páginas anteriores é importante no sentido de ser a mais detalhada possível: a obtenção de relações em torno dos pontos de cruzamento simplifica ao máximo as mesmas. Além disso, a partir de tal apresentação, podemos, por meio de convenientes operações de Tietze, obter outras apresentações com menos geradores e relações mais complicadas; entre estas se encontra a apresentação obtida mediante utilização da técnica desenvolvida por Crowell e Fox em ([2], capítulo VI).

Tornemos mais precisa esta última afirmação: seja L um link em R^3 com boa projeção e sejam $(x : v) = (x_1, x_2, \dots, x_p : v_1, v_2, \dots, v_p)$, $(y : r) = (y_1, y_2, \dots, y_n : r_1, r_2, \dots, r_n)$ apresentações para $\pi(R^3 - L)$ obtidas, respectivamente, segundo De Rham e Fox; sejam $\phi : F(x) \longrightarrow \pi(R^3 - L)$, $\psi : F(y) \longrightarrow \pi(R^3 - L)$ os homomorfismos de tais apresentações.

Mostraremos a existência de uma relação natural entre $(x : v)$ e $(y : r)$ através da determinação de um homomorfismo sobrejetor $f : F(x) \longrightarrow F(y)$ tal que $f(\text{núcleo}(\phi)) = \text{núcleo}(\psi)$; na construção de tal homomorfismo estará claramente implícito um algoritmo para se passar de $(x : v)$ para $(y : r)$.

Se L é alternado, a enumeração dos pontos que determinam as passagens superiores e inferiores (FOX) e dos arcos abertos (DE RHAM) pode ser escolhida de tal forma que as duas apresentações sejam exatamente iguais.

Supomos, portanto, L não alternado; nesse caso, temos $p > n$.

Para cada $y_i \in y$ (indicaremos a classe e um seu laço representante pelo mesmo símbolo) existe um único arco principal α_j enlaçado por y_i ; além disso, se $y_k \in y$ é tal que $k \neq i$, necessariamente y_k não enlaça α_j ; coloquemos $f(x_j) = y_i$.

Desta forma, f está definida a menos de um subconjunto $\bar{x} \subset x$ com exatamente $p-n$ elementos.

Notemos que $x_k \in \bar{x}$ implica que α_k não contém pontos de cruzamento superior: se isso ocorresse, α_k conteria alguma passagem superior, o que é equivalente a dizer que $x_k \in x - \bar{x}$.

Assim, os elementos de $\bar{x}$ são exatamente os laços x_k que enlaçam arcos principais determinados por pontos de cruzamentos inferior consecutivos.

Consideremos uma sequência de pontos de cruzamento inferior consecutivos $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+m}$. (fig. 17).

Figura 17

De acordo com a figura 17, temos então $v_k = x_k^{-1} x_{l_1} x_i x_{l_1}^{-1}$, onde $x_{l_1}, x_i \in x - \bar{x}$, $x_k \in \bar{x}$. Em termos de relações $x_k = x_{l_1} x_i x_{l_1}^{-1}$

Também $v_{k+1} = x_{k+1}^{-1} x_{l_2} x_k x_{l_2}^{-1}$; $x_{l_2} \in x - \bar{x}$, $x_{k+1} \in \bar{x}$; is

so produz a relação $x_{k+1} = x_{l_2} x_k x_{l_2}^{-1} = x_{l_2} x_{l_1} x_i x_{l_1}^{-1} x_{l_2}^{-1}$.

Indutivamente, expressamos cada x_{k+s} , $0 \leq s \leq m-1$, como produto de elementos de $x - \bar{x}$.

Podemos então estender f a x por linearidade; verifiquemos que $f(\text{núcleo}(\phi)) = \text{núcleo}(\psi)$.

Observemos inicialmente que a substituição de x_k por sua expressão em termos de elementos de $x - \bar{x}$ no relator v_{k+1} é equivalente, em termos geométricos, a obtenção do laço dado pela figura 18.

$$\text{laço obtido} = x_{k+1}^{-1} x_{l_2} x_{l_1} x_i x_{l_1}^{-1} x_{l_2}^{-1}$$

Figura 18

Desta maneira, se $h(x - \bar{x})$ é a expressão de x_{k+m-1} em termos de elementos de $x - \bar{x}$, concluímos indutivamente que

$$f(x_j x_{l_{m+1}} h(x - \bar{x}) x_{l_{m+1}}^{-1})$$

é exatamente o relator de $(y : r)$ que envolve todos os pontos de cruzamento inferior da sequência acima. (1)

Por outro lado, $f(v_{k+s}) = 1$ para $0 \leq s \leq m-1$, pela própria definição de f . (2)

Agora, se v_u é um relator em $(x : v)$ tal que P_u não está em nenhuma sequência de pontos de cruzamento inferior consecutivos, então claramente $f(v_u)$ é relator em $(y : r)$. (3)

Os fatos (1), (2), (3) implicam imediatamente

$$f(\text{núcleo}(\phi)) \subset \text{núcleo}(\psi) ;$$

a inclusão contrária é óbvia, bastando notar-se que se r_i é relator em $(y : r)$ envolvendo a sequência de pontos de cruzamento inferior $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+s}$ (podendo ser inclusive $s = 0$), então $f(v_{k+s}) = r_i$.

Fica claro acima que na obtenção de $(y : r)$ a partir de $(x : v)$ os elementos de $\bar{x}$ são exatamente os geradores eliminados pelas operações de Tietze.

Ilustremos tais idéias com um exemplo. Damos abaixo um link L e consideramos as apresentações para $\pi(R^3 - L)$ obtidas segundo De Rham e Fox.

$$\pi(R^3 - L) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle, \text{ onde}$$

$$v_1 = x_1^{-1} x_2^{-1} x_5 x_2 ; \quad v_2 = x_2^{-1} x_4 x_1 x_4^{-1} ; \quad v_3 = x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 ;$$

$$v_4 = x_2^{-1} x_4^{-1} x_2 x_3 ; \quad v_5 = x_1 x_4 x_1^{-1} x_5^{-1}$$

$\pi(R^3 - L) = |y_1, y_2, y_3 : r_1, r_2, r_3|$, onde $r_1 = y_2^{-1} y_3 y_1 y_3^{-1}$;

$r_2 = y_1, y_2^{-1} y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} y_2$; $r_3 = y_1^{-1} y_2^{-1} y_1 y_3 y_1^{-1} y_2$

Segundo o desenvolvimento anterior, devemos colocar

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_4) = y_3;$$

das sequências P_3, P_4 e P_5, P_1 obtemos, respectivamente, as relações

$$x_3 = x_2^{-1} x_4 x_2 \quad \text{e} \quad x_5 = x_1 x_4 x_1^{-1}.$$

Colocando-se $f(x_3) = y_2^{-1} y_3 y_2$ e $f(x_5) = y_1 y_3 y_1^{-1}$, torna-se imediato verificar que

$$f(v_1) = y_1^{-1} y_2^{-1} y_1 y_3 y_1^{-1} y_3 = r_3, \quad f(v_2) = y_2^{-1} y_3 y_1 y_3^{-1} = r_1 ;$$

$$f(v_3) = y_1 y_2^{-1} y_3^{-1} y_2 y_1^{-1} y_2 = r_2 \quad f(v_4) = 1, \quad f(v_5) = 1.$$

Informalmente falando, para obtermos $(y : r)$ de $(x : v)$, trocamos os símbolos x_1, x_2, x_4 por y_1, y_2, y_3 , respectivamente, eliminando os geradores x_3, x_5 por meio das relações $x_3 = x_2^{-1} x_4 x_2, x_5 = x_1 x_4 x_1^{-1}$.

C A P Í T U L O I I I

I I I . 1 .

Neste capítulo, seguindo a linha de abordagem do capítulo II, tratemos da apresentação do grupo de um link com boa projeção num toro sólido de genus m , T_m^3 , cujo bordo é o m -toro (superfície orientada bidimensional de genus m).

Notaremos como outros relatores surgem, além daqueles advindos dos pontos de cruzamento, no caso $m > 1$, muito embora os geradores se originem naturalmente dos arcos principais e das classes que geram o grupo livre de posto m , $\pi(T_m^3)$.

I I I . 2 . APRESENTAÇÃO DO GRUPO DE UM LINK EM T_m^3

Consideremos T_m^3 como o espaço $M \times [-z_0, z_0]$ onde $z_0 > 0$ e M é um quadrado contido em R^2 contendo a origem, com m buracos, cada um deles sendo o interior de um disco com centro no eixo dos x .

Indiquemos os cilindros internos de T_m^3 por $C_1, C_2, \dots, C_m$.

Seja $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ um link em T_m^3 com boa projeção e tal que $(x, y, z) \in L \longrightarrow 0 < z < z_0$.

Como antes, coloquemos uma orientação em cada componente L_i .

Usaremos o ponto $p_0 = (0, 0, z_0)$ como ponto base. Seja T um quadrado (interior + fronteira) contido num plano paralelo ao R^2 e estando abaixo de R^2 , satisfazendo as condições: $P(C_i) \subset P(T)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $P(T) \subset M$, $P(L) \subset P(T)$, e tal que as circunferências $P(C_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, e a projeção do link $P(L)$ não interseccionem o bordo de $P(T)$.

Seja $S = T \cap T_m^3$ (fig 1).

I I I . 2 . 1 . Definição

Dado um conjunto $K \subset L$, indiquemos por K^* o conjunto:

$K^* = \{(x, y, z) \in R^3 / \text{ existem } z', z'' \in R \text{ com } z' \leq z < z'' \text{ e tal que}$

$(x, y, z') \in S, (x, y, z) \in K\} \cup S$. (fig. 2)

Figura 1

Figura 2

De maneira análoga como foi feito para o caso do link em R^3 , obtemos então os pontos $P_1, P_2, \dots, P_p$ e os arcos principais $a_1, a_2, \dots, a_p$ sobre o link L .

Se um ponto $P_j \in a_i^*$, omitimos todos os pontos de a_i^* estando abaixo de P_j , inclusive P_j , obtendo-se um conjunto F_i' ; coloquemos $F_i = F_i' - S$.

Os conjuntos F_i , $i = 1, 2, \dots, p$, são superfícies limitadas, simplesmente conexas e sem bordo (fig. 3). Temos

$$F = \bigcup_{i=1}^p F_i, \quad Q = \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$$

Seja A_i , $i = 1, 2, \dots, p$, um laço com ponto base p_0 em $T_m^3 - L$ que enlaça apenas o arco a_i de L , e uma vez somente, cruzando abaixo do mesmo da esquerda para a direita, sem enlaçar qualquer cilindro interno C_j ; desta forma, se $i_*: \pi(T_m^3 - L, p_0) \longrightarrow \pi(T_m^3, p_0)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão, temos $i_*([A_i]) = 1$.

Seja $*y_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, um laço com ponto base p_0 enlaçando o cilindro C_j uma vez no sentido anti-horário, acima de L , sem enlaçar L nem qualquer cilindro C_i , $i \neq j$.

Desta forma, as classes $[*y_1], [*y_2], \dots, [*y_m]$ em T_m^3 constituem um conjunto de geradores para o grupo livre de posto m , $\pi(T_m^3, p_0)$. (fig. 3)

Seja k_l , $l = 1, 2, \dots, m-1$, um laço com ponto base p_0 em T_m^3 enlaçando o cilindro C_j uma vez no sentido anti-horário, abaixo de S , sem enlaçar qualquer cilindro C_i , $i \neq j$. (fig 3)

Determinaremos a seguir um subconjunto de $T_m^3 - L$, designado por E_p , no qual as relações que porventura existam entre os elementos $[A_i], [*y_j], [k_l]$, $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, m-1$, em $T_m^3 - L$, deixem de existir; em outras palavras, $\pi(E_p, p_0)$ será um grupo livre dada pelas classes $[A_i], [*y_j], [k_l]$, $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, m-1$, em E_p .

A construção de E_p é levada a cabo nos dois próximos teoremas.

Figura 3

III.2.2. Teorema

O espaço $T_m^3 - (L \cup L^*)$ (fig. 4) é conexo por caminhos e

$$\pi(T_m^3 - (L \cup L^*), p_0)$$

é livre com base livre dada pelas classes $[*y_j]$, $[k_l]$, $j = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, m-1$, em $T_m^3 - (L \cup L^*)$

Figura 4

Prova. É geometricamente óbvio o fato de que podemos substituir o espaço $T_m^3 - (L \cup L^*)$ pelo espaço $T_m^3 - S$ na demonstração do resultado acima.

Denotemos por $P_1 : R^3 \longrightarrow R$ a primeira projeção, $P_1(x, y, z) = x$.

Sejam então, para $j = 1, 2, \dots, m-1$, c_j^+ e c_j^- os pontos obtidos pela intersecção do plano xz com $C_j \cap S$, de tal forma que

$$P_1(c_j^-) < P_1(c_j^+) ;$$

seja t_j o segmento de reta, sem bordo, que une c_j^+ a c_{j+1}^+ . (fig. 5)

Então temos que $J_1, J_2, J_1 \cap J_2$ são não vazios, conexos por caminhos e abertos em $J_1 \cup J_2 = J$.

Uma vez que $J_1 \cap J_2$ é simplesmente conexo e $\pi(J_i, p_0)$ é livre gerado pela classe $[*y_i]$ em J_i , $i = 1, 2$, concluímos por [Capítulo I; 1.4] que J é conexo por caminhos e $\pi(J, p_0)$ é livre gerado pelas classes $[*y_1], [*y_2]$ em J .

Se $m > 2$, tomamos os pontos t_{m-1}^1, t_{m-1}^2 sobre t_{m-1} e obtemos os abertos J_1, J_2 de maneira análoga.

Tomando-se como hipótese indutiva que J_1 é conexo por caminhos e $\pi(J_1, p_0)$ é livre gerado pelas classes $[*y_1], \dots, [*y_{m-1}]$ em J_1 e considerando-se o fato de que J_2 é conexo por caminhos e $\pi(J_2, p_0)$ é livre gerado por $[*y_m]$, obtemos a conclusão desejada através do mesmo raciocínio usado no passo inicial da indução.

Construamos agora, para cada $j = 1, 2, \dots, m-1$, uma vizinhança aberta S_j da união de G_j e o conjunto dos pontos imagens de k_j em T_m^3 de tal forma que:

- i) S_j é conexa por caminhos e o grupo $\pi(S_j, p_0)$ é cíclico infinito gerado pela classe de k_j em S_j .
- ii) $(J \cup (\bigcup_{i=1}^{j-1} G_i)) \cup S_j = J \cup (\bigcup_{i=1}^j G_i)$, $j = 1, 2, \dots, m-1$
- iii) $S_j - G_j$ é simplesmente conexo.

A construção de S_j pode ser feita da seguinte maneira: tomamos $\varepsilon > 0$ tão pequeno que a ε -vizinhança aberta S_j^1 da imagem de k_j em T_m^3 satisfaça

$$S_j^1 \cap (S \cup (\bigcup_{i=1}^{m-1} G_i)) \subset G_{j-1} \cup G_j, \text{ para } j > 1,$$

$$S_1^1 \cap (S \cup (\bigcup_{i=1}^{m-1} G_i)) \subset G_1 \text{ no caso } j = 1;$$

consideramos S_j^2 o conjunto de todos os pontos de T_m^3 cuja distância a G_j é menor que ε e que estão mais próximos de G_j que de S ; então $S_j = S_j^1 \cup S_j^2$ satisfaz as condições acima (fig. 6).

Figura 6

Seja $I_0 = J$; $I_j = I_{j-1} \cup S_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$. É fácil verificar, através da condição $\mathcal{A}$, que $I_{m-1} = T_m^3 - S$ é o espaço a cujo grupo queremos chegar, e que, para $j = 1, 2, \dots, m-1$, temos

$$I_{j-1} \cap S_j = S_j - G_j$$

Assim, $I_{j-1} \cap S_j$ é simplesmente conexo para $j = 1, 2, \dots, m-1$. O resultado é então obtido indutivamente: temos que J , S_1 , $J \cap S_1$ são não vazios, conexos por caminhos, abertos em $J \cup S_1 = I_1$; uma vez que:

$\pi(J, p_0)$ é livre gerado pelas classes $[*y_1], \dots, [*y_m]$ em J ;

$\pi(S_1, p_0)$ é livre gerado pela classe $[k_1]$ em S_1 ;

$J \cap S_1$ é simplesmente conexo,

concluimos imediatamente através de [Cap I; I.4] que I_1 é conexo por caminhos e que $\pi(I_1, p_0)$ é um grupo livre com base livre dada pelas classes $[*y_1], \dots, [*y_m], [k_1]$ em I_1

Tomemos como hipótese indutiva que I_{j-1} é conexo por caminhos e $\pi(I_{j-1}, p_0)$ é livre gerado pelas classes $[*y_1], \dots, [*y_m], [k_1], \dots, [k_{j-1}]$ em I_{j-1} . Desde que: $I_{j-1}, S_j, I_{j-1} \cap S_j$ são não vazios, conexos por caminhos, abertos em $I_{j-1} \cup S_j = I_j$;

$\pi(S_j, p_0)$ é livre gerado por $[k_j]$;

$I_{j-1} \cap S_j$ é simplesmente conexo,

utilizamos mais uma vez [Cap I; I.4] para concluir que I_j é conexo por caminhos e seu grupo fundamental com ponto base p_0 é livre, com base livre constituída pelas classes $[*y_1], \dots, [*y_m], [k_1], \dots, [k_{m-1}]$ em $T_m^3 - S$, como queríamos demonstrar.

III.2.3. Teorema

O espaço $(T_m^3 - (L \cup L^*)) \cup F$ (fig. 7) é conexo por caminhos e seu grupo fundamental com ponto base p_0 é livre, com base livre $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$, onde $x_i = [A_i]$, $y_j = [*y_j]$, $\gamma_l = [k_l]$, os parenteses indicando classe de homotopia em $(T_m^3 - (L \cup L^*)) \cup F$.

Figura 7

Para lembrar o significado de F veja III.2.1. A demonstração do resultado acima é completamente análoga à do teorema 2.3, capítulo II; a única diferença reside no início do processo indutivo: temos aqui que $E_0 = T_m^3 - (L \cup L^*)$, ao invés de simplesmente conexo, tem como grupo fundamental com ponto base p_0 o grupo livre gerado pelas classes dos laços $*y_j, k_l, j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, m-1$, em E_0 , como vimos no teorema III.2.2.

Assim, teremos novamente a notação $(T_m^3 - (L \cup L^*)) \cup F = E_p$.

Cumpra observar aqui que a abordagem efetuada na construção de E_p exclui o caso $m = 1$; nesse caso, porém, é fácil notar que $\pi(T_m^3 - L \cup L, p_0)$ é livre gerado pela classe $[*y_1]$ em $T_m^3 - L \cup L^*$, e este fato implica, através da demonstração de III.2.3, que $\pi(E_p, p_0)$ é livre gerado pelas classes $[A_i], [*y_1], i = 1, 2, \dots, p$.

Assim, o fato de ser conhecido o grupo $\pi(E_p, p_0)$ qualquer que seja o genus do toro sólido considerado, possibilita a não exclusão do caso $m = 1$ em tudo que for feito daqui em diante.

Veremos que $\pi(E_p, p_0)$ pode ser usado como o grupo livre da apresentação de $\pi(T_m^3 - L, p_0)$ através do homomorfismo induzido pela inclusão $\phi : \pi(E_p, p_0) \longrightarrow \pi(T_m^3 - L, p_0)$; em outras palavras, nossa meta final é mostrar que ϕ é sobrejetivo e determinar o núcleo de ϕ , para obtermos uma apresentação de $\pi(T_m^3 - L, p_0)$.

Faremos agora uma descrição geométrica das classes de $\pi(E_p, p_0)$ cuja consequência é núcleo (ϕ) . Seja B uma caixa homeomorfa a um m -toro superfície contendo o conjunto S em seu interior, cujo topo superior está contido em R^2 .

Indiquemos o topo superior de B por B_s e o topo inferior por B_i . Teremos então $P(L) \subset B_s$. (fig. 8).

Para cada ponto $P(P_i) \in B_s$ escolhamos uma circunferência com centro $P(P_i)$ representando um laço v_i em R^2 com ponto base $q_i \notin P(L)$, orientado no sentido anti-horário, da mesma maneira como foi feito no capítulo II para o caso de um link em R^3 . Denotemos a bola fechada em B_s cuja fronteira é v_i por $V_i, i = 1, 2, \dots, p$.

Tomemos um ponto $q_0 \in B_s$ fora de $P(L) \cup (\bigcup_{i=1}^p V_i)$ e liguemos p_0 a q_0 através de um arco suave α em T_m^3 o qual não intersecciona $L \cup L^*$

nem enlaça qualquer cilindro C_j ; a seguir, escolhemos arcos suaves dis-
juntos (a não ser em p_0) e_i em B_s , $i = 1, 2, \dots, p$, com $e_i(0) = q_0$, e_i
($\|e_i\|$) = q_i , de tal maneira que e_i não intersecciona

$$\bigcup_{i=1}^p V_i,$$

a não ser em q_i (fig 8).

Para cada $j = 1, 2, \dots, m$, seja b_j^+ um laço em B_s com ponto ba-
se q_0 o qual enlaça apenas o cilindro C_j no sentido anti-horário e tal
que, para cada $i = 1, 2, \dots, p$, o ponto $P(P_i)$ não pertence a região fe-
chada cuja fronteira é b_j^+ .

Com semelhantes condições, construímos os laços b_j^- enlaçando
 C_j em B_i (fig. 8).

Figura 8

Observemos agora que $(B-Q^*) \cup im(\alpha) = A$ é um m -toro superfície, ligado a p_0 através do arco α , com p furos no topo superior e sem as circunferências $S_1^1, S_2^1, \dots, S_m^1$ que constituem o conjunto $B \cap S \subset \bigcup_{j=1}^m C_j$; assim A possui o mesmo tipo de homotopia de uma esfera com

$p + 2m$ buracos, sendo portanto seu grupo fundamental livre de posto $p + 2m - 1$.

Sejam :

$$\alpha_i^A = [\alpha \ e_i \ v_i \ e_i^{-1} \ \alpha^{-1}];$$

$$\beta_j^A = [\alpha \ b_j^+ \ \alpha^{-1}] ;$$

$$\gamma_k^A = [\alpha \ b_k^- \ \alpha^{-1}] ,$$

$$i = 1, 2, \dots, p;$$

$$j, k = 1, 2, \dots, m,$$

onde os parênteses indicam classe de homotopia em A .

É claro que quaisquer $p + 2m - 1$ entre tais classes constituem um conjunto de geradores para $\pi(A, p_0)$.

Seja:

$$\eta : \pi(A, p_0) \longrightarrow \pi(E_p, p_0) \quad \text{o homomorfismo induzido}$$

pela inclusão.

Notemos que $\eta(\gamma_k^A) = \gamma_k$, para $k = 1, 2, \dots, m-1$; coloquemos

$$\eta(\gamma_m^A) = \gamma_m, \quad \eta(\beta_j^A) = \beta_j, \quad \eta(\alpha_i^A) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o principal teorema deste capítulo:

III.2.4. Teorema

Uma apresentação do grupo

$$\pi(T_m^3 - L, p_0) \text{ é } (x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1} : \alpha_1,$$

$$\alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1 \gamma_1^{-1}, \dots, \beta_m \gamma_m^{-1} \mid \phi, \text{ onde } \phi : \pi(E_p, p_0) \longrightarrow \pi(T_m^3 - L, p_0)$$

é o homomorfismo induzido pela inclusão.

Prova. Usamos mais uma vez o teorema de Van Kampen para chegar ao resultado acima.

Com efeito, seja W uma vizinhança aberta de Q^* satisfazendo:

- i) $W \cap L = \emptyset$ e $p_0 \in W$.
- ii) $\pi(W, p_0)$ é um grupo livre de posto m com base livre dada pelas classes de homotopia dos laços $\alpha b_j^+ \bar{\alpha}^1$ em W . Denotemos tais classes por β_j^W , $j = 1, 2, \dots, m$.
- iii) A é retrato por deformação de $W - Q^*$

Para construir W , seja W_1 a união de uma ϵ -vizinhança aberta de $B \cup \text{im}(\alpha)$ e os pontos que estão no interior da caixa B .

Seja W_2 o conjunto de todos os pontos cuja distância a Q^* é menor do que ϵ e que estão mais próximos de Q^* do que de L .

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o aberto $W = W_1 \cup W_2$ satisfaz as três condições acima. (fig. 9)

Figura 9

Temos que a inclusão $i: A \longrightarrow W - Q^*$ induz o isomorfismo $i_*: \pi(A, p_0) \longrightarrow \pi(W - Q^*, p_0)$.

Assim, quaisquer $p + 2m - 1$ entre as classes $\alpha'_i = i_*(\alpha_i^A)$, $\beta'_j = i_*(\beta_j^A)$, $\gamma'_k = i_*(\gamma_k^A)$, $i = 1, 2, \dots, p$; $j, k = 1, 2, \dots, m$, constituem um conjunto de geradores para $\pi(W - Q^*, p_0)$.

Notemos agora que $E_p \cup W = (T_m^3 - L \cup L^*) \cup F \cup W = T_m^3 - ((L \cup L^*) - (F \cup W)) = T_m^3 - L$, uma vez que

$$W \cap L = \emptyset, \quad F \cap L = \emptyset \quad L^* \subset F \cup W.$$

Também

$$\begin{aligned} E_p \cap W &= ((T_m^3 - (L \cup L^*)) \cup F) \cap W = (T_m^3 - ((L \cup L^*) - F)) \cap W = \\ &= W - ((L \cup L^*) - F) = W - (L^* - F) = W - Q^*, \text{ desde que } W \cap L = \emptyset \end{aligned}$$

Formemos então o diagrama, omitindo-se o ponto base p_0 :

onde E_p , W , $E_p \cap W = W - Q^*$ são não vazios, conexos por caminhos e

e abertos em $E_p \cup W = T_m^3 - L$; $\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2, \omega_0$ são homomorfismos induzidos pela inclusão tornando o diagrama consistente:

$$\omega_0 = \omega_1 \theta_1 = \omega_2 \theta_2;$$

$R = \text{consequência de } \{\theta_1(\alpha_i^1), \theta_1(\beta_j^1 \gamma_j^{-1}), 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\};$

$\psi_1 = \text{homomorfismo canônico de } \pi(E_p) \text{ em } \frac{\pi(E_p)}{R};$

$$\psi_0 = \psi_1 \theta_1$$

O homomorfismo ψ_2 é definido por

$$\psi_2(\beta_j^W) = \theta_1(\beta_j^1) R, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

afirmamos, através desta definição, que $\psi_2 \theta_2 = \psi_0$

Verifiquemos isto nos geradores de $\pi(W - Q^*)$:

$$1) \psi_0(\alpha_i^1) = \psi_1 \theta_1(\alpha_i^1) = \theta_1(\alpha_i^1) R = R = 1 \in \frac{\pi(E_p)}{R}, \text{ uma vez que}$$

$$\theta_1(\alpha_i^1) \in R, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\psi_2 \theta_2(\alpha_i^1) = \psi_2(1) = 1 \in \frac{\pi(E_p)}{R}, \text{ desde que } \theta_2(\alpha_i^1) = 1 \text{ em } W, \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

$$2) \psi_0(\beta_j^1) = \psi_1 \theta_1(\beta_j^1) = \theta_1(\beta_j^1) R = \psi_2(\beta_j^W) = \psi_2 \theta_2(\beta_j^1), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$3) \psi_0(\gamma_k^1) = \psi_1 \theta_1(\gamma_k^1) = \theta_1(\gamma_k^1) R = \theta_1(\beta_k^1) R = \psi_2(\beta_k^W) = \psi_2 \theta_2(\gamma_k^1),$$

$k = 1, 2, \dots, m$, desde que $\theta_1(\beta_k^1 \gamma_k^{-1}) \in R$ e desde que os laços $ab_k^+ \bar{a}^{-1}$ e $a b_k^- \bar{a}^{-1}$ são homotópicos em W .

Valem portanto as relações de consistência:

$$\psi_0 = \psi_1 \theta_1 = \psi_2 \theta_2$$

Pelo Teorema de Van Kampen [I.3], existe homomorfismo

$$\lambda : \pi(T_m^3 - L, p_0) \longrightarrow \frac{\pi(E_p, p)}{R}$$

tal que $\psi_1 = \lambda \omega_1$

Temos então:

a) $\omega_1 = \phi : \pi(E_p, p_0) \longrightarrow \pi(T_m^3 - L, p_0)$ é sobre : com efeito,

pelo teorema de Van Kampen, $\omega_1(\pi(E_p))$ e $\omega_2(\pi(W))$ geram o grupo $\pi(T_m^3 - L, p_0)$.

É claro que $\omega_2(\beta_i^W) = \omega_1(\beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$; assim,

$$\omega_2(\pi(W)) \subset \omega_1(\pi(E_p)).$$

Concluimos que $\pi(T_m^3 - L, p_0)$ é gerado por $\omega_1(\pi(E_p))$, ou seja ω_1 é sobrejetivo/

b) núcleo $(\omega_1) = R$: com efeito, temos $\omega_1\theta_1(\alpha_i^!) = \omega_2\theta_2(\alpha_i^!) = 1, i = 1, 2, \dots, p$, desde que $\theta_2(\alpha_i^!) = 1$ em W .

$$\begin{aligned} \text{Também } \omega_1\theta_1(\beta_j^! \gamma_j^{r-1}) &= \omega_2\theta_2(\beta_j^! \gamma_j^{r-1}) = \omega_2\theta_2(\beta_j^!) \cdot \theta_2(\gamma_j^!)^{-1} = \omega_2 \\ (\beta_j^W \beta_j^{W-1}) &= \omega_2(1) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Segue-se que $R \subset \text{núcleo}(\omega_1)$

Reciprocamente, seja $\mu \in \text{núcleo}(\omega_1)$; então

$R = \lambda(1) = \lambda \omega_1(\mu) = \psi_1(\mu) = \mu R$, ou seja, $\mu \in R$. Concluimos que

$$R = \text{núcleo}(\omega_1)$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha_i^!) &= \theta_1(i_*(\alpha_i^A)) = \eta(\alpha_i^A) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \theta_1(\beta_j^! \gamma_j^{r-1}) &= \theta_1(\beta_j^!) \theta_1(\gamma_j^!)^{-1} = (\theta_1 i_*) (\beta_j^A) (\theta_1 i_*)^{-1} (\gamma_j^A)^{-1} = \\ &= \eta(\beta_j^A) \eta(\gamma_j^A)^{-1} = \beta_j \gamma_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

juntando isto aos fatos a) e b), concluimos que:

$$\begin{aligned} \pi(T_m^3 - L, p_0) &= \langle x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}; \alpha_1 \alpha_2, \\ &\dots, \alpha_p, \beta_1 \gamma_1^{-1}, \beta_2 \gamma_2^{-1}, \dots, \beta_m \gamma_m^{-1} \mid \phi \rangle, \quad \text{como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

É geometricamente óbvio o fato de que, em E_p , o laço s_1 é homotópico ao produto de laços $l_1^+ r_1 r_2 \dots r_p$; portanto

$$\gamma_1 = [l_1^-] = [s_1] = [l_1^+] [r_1] \dots [r_p] = \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$$

$$\text{Segue-se que } \beta_1 \gamma_1^{-1} = \beta_1 \alpha_1^{-1} \dots \alpha_p^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}.$$

A conclusão final é que $\beta_1 \gamma_1^{-1}$ é consequência das classes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, e pode portanto ser omitida na apresentação de $\pi(T_1^3 - L, p_0)$.

Isso justifica o resultado conseguido em ([6], Capítulo II).

III.2.5. Observação

O desenvolvimento até aqui feito teve a característica principal de mostrar a forma geométrica dos geradores e relatores da apresentação de $\pi(T_m^3 - L, p_0)$.

O que se pode dizer quanto a maneira de explicitar, em E_p , cada relator em função dos geradores, obtendo-se efetivamente uma apresentação (no sentido algébrico) do grupo de L ?

Em primeiro lugar, cada α_i se escreve na forma: $\alpha_i = X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_2}^{-1}$, onde cada X_{i_k} , $k = 1, 2, 3$, se exprime como

$$X_{i_k} = Y_{i_k} x_{i_k} Y_{i_k}^{-1},$$

sendo cada Y_{i_k} uma palavra nas letras $y_1, y_2, \dots, y_m$.

A seguir, notemos que, em geral, $\beta_j \neq y_j$; a igualdade ocorre quando o cilindro interno C_j não é enlaçado por L ou quando $m = 1$.

O que temos, na verdade, é que cada β_j se expressa na forma:

$$\beta_j = \delta_j y_j \delta_j^{-1}, \text{ onde } \delta_j \text{ é um produto do tipo } \delta_j = \prod_{s=1}^l Y_{js} x_{js} Y_{js}^{-1}, \text{ sen}$$

do mais uma vez Y_{js} uma palavra nas letras $y_1, y_2, \dots, y_m$

Ressaltemos que a palavra δ_j provém do enlaçamento de C_j por L .

Essas afirmações serão ilustradas nos exemplos a serem dados no próximo item.

A última dificuldade que se apresenta aqui é o fato de, ao

Coloquemos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ em função dos geradores $x_1, x_2, y_1, y_2, \gamma_1$; temos que:

$$\alpha_1 = y_1 x_1 y_1^{-1} y_2^{-1} x_2 y_2 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2^{-1};$$

$$\alpha_2 = x_2^{-1} y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 x_1$$

Conforme observamos antes, temos $\beta_i = \delta_i y_i \delta_i^{-1}$, $i = 1, 2$, onde δ_i é uma palavra nas letras x_1, x_2, y_1, y_2 ; para visualizarmos essa explicitação, deslizamos y_i próxima e paralelamente ao cilindro C_i no sentido negativo; a parte de L que impede a retração de y_i em β_i através deste deslizamento nos fornece a palavra δ_i .

Temos então, nesse caso:

$$y_1 = x_1 \beta_1 x_1^{-1}; \quad y_2 = x_2 \beta_2 x_2^{-1}, \text{ ou seja,}$$

$$\beta_1 = x_1^{-1} y_1 x_1; \quad \beta_2 = x_2^{-1} y_2 x_2$$

Conforme a observação III.2.6, temos:

$$\gamma_2 = \gamma_1^{-1} y_1 y_2$$

A apresentação do grupo L será, portanto:

$$\pi(T_3^2 - L, p_0) = |x_1, x_2, y_1, y_2, \gamma_1: \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \gamma_1^{-1}, \beta_2 \gamma_2^{-1}| =$$

$$= |x_1, x_2, y_1, y_2, \gamma_1: y_1 x_1 y_1^{-1} y_2^{-1} x_2 y_2 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2^{-1},$$

$$x_2^{-1} y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 x_1, x_1^{-1} y_1 x_1 \gamma_1^{-1} x_2^{-1} y_2 x_2 y_2^{-1} y_1^{-1} \gamma_1|$$

Exemplo 2.

Nesse caso, temos um link L com uma única componente (um nó) em T_3^2 . Notemos que, considerado como um nó em R^3 , L é trivial; assim, esse exemplo ilustra o grau de complexidade que aparece na apresentação do grupo de L em função do enlaçamento dos cilindros inter-nos pelo link.

Figura 12

Temos aqui:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= x_1^{-1} \ x_3^{-1} \ y_1^{-1} \ y_2^{-1} \ y_1 \ x_3 \ y_1^{-1} \ y_2 \ y_1 \ x_3; \\
 \alpha_2 &= y_2^{-1} \ x_2^{-1} \ y_2 \ y_1 \ x_3 \ y_1^{-1} \ x_1 \ y_1 \ x_3^{-1} \ y_1^{-1}; \\
 \alpha_3 &= y_1 \ x_3^{-1} \ y_1^{-1} \ x_2 \ y_1 \ x_3 \ y_1^{-1} \ x_3^{-1};
 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \begin{matrix} & \overset{-1}{y_1} & \overset{-1}{y_2} & & \overset{-1}{x_3} & \overset{-1}{y_1} & y_2 & y_1 & x_3 & y_1 & \overset{-1}{x_3} & \overset{-1}{y_1} & \overset{-1}{y_2} & y_1 \\ x_3 & \overset{-1}{y_1} & y_2 & y_1 & ; \end{matrix}$$

$$\beta_2 = x_3 \quad y_1 \quad \overset{-1}{x_3} \quad \overset{-1}{y_1} \quad y_2 \quad y_1 \quad x_3 \quad \overset{-1}{y_1} \quad \overset{-1}{x_3}$$

$$\gamma_2 = \overset{-1}{\gamma_1} \quad y_1 \quad y_2$$

Esses dados nos fornecem imediatamente a apresentação do grupo de L :

$$\pi(T_3^2 - L, p_0) = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \gamma_1 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 \gamma_1^{-1}, \beta_2 \gamma_2^{-1} \rangle$$

Observação.

Num trabalho a ser publicado, mas de cujo teor já tomei conhecimento, de autoria de Perez, G., é calculado o grupo de um nó numa variedade tridimensional, compacta, conexa e orientada.

Expomos abaixo, em rápidas linhas, a maneira como tal resultado é conseguido.

Dada uma variedade N^3 compacta, conexa e orientada, existe uma decomposição $N^3 = Ta \cup Tb$, onde Ta e Tb são subvariedades homeomorfas a um mesmo toro sólido fechado de determinado genus m e tais que $\partial Ta = \partial Tb = Ta \cap Tb$ ([1], página 70).

O par (Ta, Tb) é denominado um "diagrama de Heegaard para N^3 ".

Por exemplo, S^3 é a união de dois toros sólidos de genus 1 colados pelo bordo ([4], página 57).

Segue-se da definição que $Ta \cap Tb$ é homeomorfo a um m -toro superfície.

Dado um nó K no interior de N^3 , existe um diagrama de Heegaard (Ta, Tb) para N^3 tal que $K \subset Ta - \partial Ta$ ([1], página 79); além disso, se o genus do diagrama é m , indicando-se por T_m^3 um m -toro sólido fechado com bordo T_m^2 , existe um homeomorfismo $f: T_m^2 \longrightarrow T_m^2$ tal que o espaço N_f obtido do espaço $(T_m^3 \times 0) \cup (T_m^3 \times 1)$ identificando-se $(x, 0)$ com $(f(x), 1)$, para $x \in T_m^2$, reproduz N^3 , enquanto que os mergulhos canônicos de $T_m^3 \times 0$ e $T_m^3 \times 1$ em N_f reproduzem respectivamente Ta e Tb ([1], página 69).

Por facilidade trabalha-se então em N_f ao invés de em N^3 ; a pesar disso, continuaremos usando as notações Ta , Tb , N^3 .

Consideremos o diagrama

onde w_1 , w_2 , w_0 , θ_1 , θ_2 são os homomorfismos induzidos pelas inclusões;

os espaços $Ta - K$, Tb e $Ta \cap Tb$ são colocados no lugar de abertos, com o mesmo tipo de homotopia, que os contêm;

H e ϕ são, respectivamente, o grupo livre e o homomorfismo da apresentação de $\pi(Ta - K)$ conforme ([6], página 45), ou seja,

$$\pi(Ta - K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}; r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{n+m} \mid \phi \rangle$$

Sejam $l_1, l_2, \dots, l_m, h_1, h_2, \dots, h_m$ um conjunto de geradores de $\pi(Ta \cap Tb)$ tal que $\theta_2(l_i) = 1$ e $\theta_2(h_i)$ geram o grupo livre $\pi(Tb)$ ([5], página 131).

Tomemos $s_1, s_2, \dots, s_m \in H$ tal que $\phi(s_i) = \theta_1(l_i)$.

Com o auxílio do Teorema de Van Kampen, prova-se então que:

$$\pi(N^3 - K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}; r_1, \dots, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{n+m}, s_1, s_2, \dots, s_m \mid w_1 \phi \rangle$$

As fórmulas que exprimem cada s_i em função dos elementos $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ são obtidas através da função de colagem:

$$f : T_n^2 \longrightarrow T_n^2$$

Verifiquei que podemos obter resultado análogo no caso da substituição do nó por um link, bastando para isso seguir a linha de raciocínio anteriormente desenvolvida e utilizar o resultado do capítulo III do meu trabalho.

B I B L I O G R A F I A

- |1| BIASI, C. - *Bordismo de família finita de nós orientados em variedades 3 - dimensionais*. Dissertação de Mestrado, ICMSC, 1975.
- |2| CROWELL, R.H., FOX, R.H. - *Introduction to knot theory*. Blaisdell Company, N.Y., 1965.
- |3| HILTON, P.J. - *An Introduction to Homotopy Theory*. Cambridge, University Press, 1961.
- |4| LOIBEL, G.F. - *Notas de Topologia Geral*. Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, USP, 1974.
- |5| MASSEY, W.J. - *Algebraic Topology An Introduction*. Harcourt, Brace & World Inc., New York, 1967.
- |6| PEREZ, G. - *O grupo de um nó no interior do toro sólido $S^1 \times D^2$* . Dissertação de Mestrado, ICMSC, 1975.
- |7| RHAM, G. de - *Lectures on Introduction to Algebraic Topology*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.