Uma introdução às derivações localmente
nilpotentes com uma aplicação ao 14º problema
de Hilbert

Liliam Carsava Merighe

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Uma introdução às derivações localmente nilpotentes com uma aplicação ao 14º problema de Hilbert

Liliam Carsava Merighe

***Orientador:* Prof. Dr. Daniel Levcovitz**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Maio de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C561i Carsava Merighe, Liliam
 Uma introdução às derivações localmente nilpotentes
 com uma aplicação ao 14º problema de Hilbert /
 Liliam Carsava Merighe; orientador Daniel
 Levcovitz. -- São Carlos, 2015.
 60 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

 1. Derivações Localmente Nilpotentes. 2. 14º
 Problema de Hilbert. 3. Derivações. I. Levcovitz,
 Daniel, orient. II. Título.

*“De certa forma não posso acreditar que hajam tantas
alturas para serem escaladas por um homem que sabe
o segredo dos sonhos tornarem-se realidade.
Esse segredo especial pode ser resumido em quatro C’s:
curiosidade, coragem, confiança e constância.
E o maior de todos eles é a confiança.
Quando você acredita em uma coisa,
você deve acreditar nela até o fim.”*

Walt Disney

Agradecimentos

Agradecer é lembrar e reconhecer que houve um momento em que precisamos de alguém. Ninguém cresce sozinho, é sempre preciso um abraço de apoio, um puxão de orelha, uma palavra de incentivo, conforto e ensinamento, um olhar de carinho, um gesto de amor. Por isso, neste momento, quero agradecer imensamente a todos aqueles que de alguma forma estiveram presente em todos os momentos da minha vida e, principalmente, nesses dois anos de mestrado.

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir sentir a cada dia a grandeza do seu amor por mim. Ele me deu a oportunidade de buscar novos horizontes na cidade de São Carlos e me capacita todos os dias para superar os obstáculos que a vida coloca em meu caminho. Sem Ele eu nada seria e certamente não teria chegado onde cheguei.

Agradeço ao meu pai, João Roberto, e à minha mãe, Célia pelo amor incondicional; pelo suporte que me dão todos os dias, sendo pessoalmente ou pelas longas conversas pelo telefone; pelas palavras de apoio nos momentos mais difíceis; pelos abraços apertados; por sempre me incentivarem e me darem forças para não desistir da busca pelos meus sonhos. Enfim, agradeço por serem meus pais e meus exemplos para toda a vida! Eu amo vocês!

Agradeço a toda a minha família pelos muitos momentos felizes que tivemos juntos, pelas orações, por toda a torcida por mim em todos desafios que passei e pela euforia e demonstração de satisfação a cada vitória minha.

Agradeço a todos os professores e funcionários do ICMC/USP por toda a atenção e disponibilidade. Em especial, agradeço ao meu orientador Profº. Dr. Daniel Levcovitz, primeiramente pela confiança e por ter me aceitado como aluna e posteriormente por tudo

o que fez por mim: sua dedicação, seus ensinamentos, sua disposição em sanar minhas dúvidas e sua paciência.

Não poderia deixar de agradecer também a todos os professores do IBILCE/UNESP de São José do Rio Preto, foram eles quem me formaram e me deram a base para ser quem eu sou hoje. De maneira especial, agradeço ao Prof^o. Dr. Parham Salehyan por todos os projetos de iniciação científica e por ter sido um grande exemplo para mim nos meus quatro anos de graduação; e também à Prof^a. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade pela oportunidade de participar do PET e por todas as dicas e conselhos.

A amizade é um dos pés de sustentação da nossa vida, sem ela, nada somos! Por isso, agradeço a todos os meus amigos, desde os mais próximos até os mais distantes. Àqueles de São Carlos, agradeço pela recepção, o acolhimento e por todos os momentos que vivi e ainda viverei aqui. Àqueles de antes, agradeço por não permitirem que a distância fosse uma barreira entre nós.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro que viabilizou o meu sustento durante este período.

A todos vocês o meu carinho e o meu MUITO OBRIGADA!

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar um contraexemplo para o *Décimo Quarto Problema de Hilbert* no caso de dimensão $n = 5$, que foi apresentado por Arno van den Essen ([6]) em 2006 e que é baseado em um contraexemplo de D. Daigle e G. Freudenburg ([4]). Para isso, serão estudados os conceitos fundamentais da teoria de derivações e os princípios básicos das derivações localmente nilpotentes, bem como seus respectivos corolários.

Dentre esses princípios encontra-se o Princípio 13, que garante que, se B é uma k -álgebra polinomial, digamos $B = k[x_1, \dots, x_n]$, (onde k é um corpo de característica zero) e D é uma derivação localmente nilpotente sobre B , então seu núcleo $A = \ker D$ satisfaz $A = B \cap \text{Frac}(A)$. Assim encontramos o contraexemplo esperado, ao mostrar que A não é finitamente gerado sobre k .

Além disso, no apêndice deste trabalho, é dada uma prova para o caso de dimensão 1 do *Décimo Quarto Problema de Hilbert*.

Palavras-chave: Décimo Quarto Problema de Hilbert, Derivações Localmente Nilpotentes, Derivações.

Abstract

The main objective of this thesis is to study a counterexample to the *Hilbert's Fourteenth Problem* in dimension $n = 5$, which was presented by Arno van den Essen ([6]) in 2006 and that is based on a counterexample of D. Daigle and G. Freudenburg ([4]). For these purpose, we study the fundamental concepts of the theory of derivations and the basic principles of locally nilpotent derivations and their corollaries.

Among these principles, Principle 13 ensures that if B is a k -algebra polynomial, say $B = k[x_1, \dots, x_n]$, (where k is a field of characteristic zero) and D is a locally nilpotent derivation on B , then its kernel $A = \ker D$ satisfies $A = B \cap \text{Frac}(A)$. Once we have proved that A is not finitely generated over k , we find the expected counterexample.

In addition, in the appendix of this work is given a proof for the *Hilbert's Fourteenth Problem* in dimension $n = 1$.

Key words: Hilbert's Fourteenth Problem, Locally Nilpotent Derivations, Derivations.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Algumas definições	5
1.1.1 Anéis Polinomiais	8
1.1.2 Função Grau	9
1.1.3 Anéis Graduados e Derivações Homogêneas	10
1.1.4 O Anel Graduado Associado a uma Filtração	11
1.1.5 A Função Grau Induzida pela Derivação	13
1.1.6 As Aplicações Exponencial e de Dixmier	14
1.1.7 A Derivada de um Polinômio	15
1.2 Fatos Básicos sobre Derivações	15
2 Primeiros Princípios das Derivações Localmente Nilpotentes	21
2.1 Os Princípios	21
3 Um contraexemplo para o 14º Problema de Hilbert	39
3.1 O resultado	39
A Uma demonstração do 14º Problema de Hilbert para o caso $n = 1$	53
Índice remissivo	59

Referências Bibliográficas

59

Introdução

Em 1900, na Conferência Internacional de Matemáticos em Paris, o matemático David Hilbert propôs uma lista com 23 Problemas que ficaram futuramente conhecidos como “Os 23 Problemas de Hilbert”. Hilbert achava que esses problemas serviriam como guia para o desenvolvimento da matemática no século que se iniciava, o que, de fato, aconteceu. Além disso, pretendia desafiar os matemáticos desse novo século. Dentre esses problemas, encontra-se o 14º, que tem o seguinte enunciado:

“Seja k um corpo, $k[x] := k[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre um corpo k e $k(x)$ seu corpo de frações. Considere L um corpo tal que $k \subseteq L \subseteq k(x)$. Pergunta-se: o anel $L \cap k[x]$ é uma k -álgebra finitamente gerada?”

A motivação para a proposição deste problema veio do seguinte fato: seja $G = SL(n)$ o grupo das matrizes de ordem n , com coeficientes em k e determinante 1. Considere $k(x_1, \dots, x_n)^G$ o corpo dos invariantes pela ação do grupo G em $k(x_1, \dots, x_n)$ (aqui G age linearmente nas variáveis). É claro que

$$k \subseteq k(x_1, \dots, x_n)^G \subseteq k(x_1, \dots, x_n).$$

e

$$k(x_1, \dots, x_n)^G \cap k[x_1, \dots, x_n] = k[x_1, \dots, x_n]^G,$$

onde $k[x_1, \dots, x_n]^G$ é o anel dos invariantes. Hilbert mostrou que $k[x_1, \dots, x_n]^G$ é uma k -álgebra finitamente gerada. A pergunta natural foi: o que aconteceria quando $k(x_1, \dots, x_n)^G$ era trocado por um corpo L qualquer, nas mesmas condições?

Uma resposta positiva para o 14º Problema de Hilbert foi dada por Zariski ([18]) para o caso em que $\text{tr.deg}_k L \leq 2$. Uma versão para a demonstração dos casos em que $n = 1$ e $n = 2$ pode ser encontrada em [15, Capítulo 5]. Entretanto, em 1958, Nagata ([14]) encontrou um contraexemplo para o caso em que $n = 32$, que era um tanto trabalhoso.

Mais tarde, em 1988, Roberts ([17]) encontrou um contraexemplo para o caso em que $n = 7$, utilizando o fato de que $L \cap k[x_1, x_2, \dots, x_7]$ pode ser visto como o núcleo de uma k -derivação. Esse exemplo foi generalizado por A. van den Essen, T. Janssen, H. Kojima e M. Miyanishi ([8] e [11]) para o caso em que $n \geq 7$.

No ano de 1993, H. Derksen simplificou o trabalho feito por Nagata 35 anos antes, utilizando o mesmo argumento que Roberts: vendo $L \cap k[x_1, x_2, \dots, x_{32}]$ como o núcleo de uma k -derivação em $k[x_1, x_2, \dots, x_{32}]$.

Em 1998, Freudenburg ([10]), estudando o exemplo de Roberts, encontrou um contraexemplo para o caso em que $n = 6$, o que, em 1999, inspirou Daigle e o próprio Freudenburg ([4]) a encontrar um contraexemplo no caso em que $n = 5$.

Finalmente, em 2004 e 2005, S. Kuroda ([12] e [13]) construiu novos contraexemplos para as dimensões 3 e 4, que ainda não haviam sido estudadas.

As demonstrações obtidas usando o núcleo de uma k -derivação fazem uso do conceito de derivação localmente nilpotente: se B é uma k -álgebra que é também um domínio, então uma derivação D de B é dita *localmente nilpotente* se, para cada $b \in B$, existe um n natural (dependendo de b) tal que $D^n(b) = 0$. O conjunto dessas derivações desempenha um papel importante em Álgebra e Geometria Algébrica, já que inúmeros problemas podem ser atacados ou reformulados em termos desta noção, como por exemplo a *Conjectura do Jacobiano* ([7]) e o *Problema do Cancelamento* ([2] e [5]).

O objetivo desta dissertação é, baseado no trabalho de Arno Van den Essen ([6]), simplificar os argumentos usados em [4] e [10] para dar um contraexemplo do 14º Problema de Hilbert em dimensão 5. Além disso, fazemos em um apêndice uma demonstração alternativa à feita por Zariski para o caso em que $n = 1$.

Para chegar ao objetivo serão necessárias ferramentas para trabalhar com as derivações e essas ferramentas foram divididas em três capítulos.

No Capítulo 1, temos as definições, propriedades e resultados básicos gerais de derivações. Sendo destaque aqui a definição de derivação localmente nilpotente. Todas as definições e resultados deste capítulo serão necessárias para demonstrar o que se encontra no capítulo seguinte.

No Capítulo 2, serão provados os primeiros princípios das derivações localmente nilpotentes e alguns de seus corolários, tendo destaque o Princípio 13: seja B uma k -álgebra do tipo $B = k[x_1, \dots, x_n]$ (onde k é um corpo de característica zero) e D uma derivação localmente nilpotente sobre B . Seja A o núcleo dessa derivação. Então $A = \text{Frac}(A) \cap B$. Ele é o ponto chave no contraexemplo a ser estudado.

Finalmente, no Capítulo 3, serão necessários um Lema e uma Proposição auxiliares e técnicas para exibirmos um contraexemplo específico que o núcleo de uma derivação localmente nilpotente D em B não é finitamente gerado.

No apêndice, fazemos o uso de um Teorema e uma Proposição para concluir e provar que $L \cap k(x_1)$ é uma k -álgebra finitamente gerada.

Preliminares

1.1 Algumas definições

Nesta seção daremos todas as definições básicas e notações relacionadas às derivações e derivações localmente nilpotentes que serão encontradas no decorrer deste trabalho. Em todos os casos, B é um k -domínio (isto é, um domínio que também é uma k -álgebra) comutativo, onde k é um corpo de *característica zero*.

Definição 1.1. Uma função $D : B \rightarrow B$ é chamada de **derivação** de B se satisfaz as seguintes condições, para $a, b \in B$:

- (1) $D(a + b) = Da + Db$;
- (2) $D(ab) = aDb + bDa$ (Regra de Leibniz ou Regra do Produto).

O conjunto de todas as derivações de B é denotado por $\text{Der}(B)$. Se A é um subanel de B , então $\text{Der}_A(B)$ denota o subconjunto de todas as $D \in \text{Der}(B)$ com $D(A) = 0$. O conjunto $\ker(D) = \{b \in B : Db = 0\}$ é o **núcleo** de D .

Dada $D \in \text{Der}(B)$, quatro fatos importantes podem ser notados:

- (F1) $\ker(D)$ é um subanel de B , para qualquer $D \in \text{Der}(B)$.
- (F2) $\mathbb{Q} \subset \ker D$, para qualquer $D \in \text{Der}(B)$. (Lembre-se que como k é de característica zero, $\mathbb{Q} \subseteq k$).
- (F3) $\text{Aut}(B)$ age em $\text{Der}(B)$ por conjugação: $\alpha * D = \alpha D \alpha^{-1}$.

(F4) Dados $b \in B$ e $D, E \in \text{Der}(B)$, se $[D, E] := DE - ED$, então bD , $D + E$ e $[D, E]$ continuam em $\text{Der}(B)$.

Definição 1.2. Definimos um **ideal integral**, como sendo um ideal $I \subset B$ tal que $DI \subset I$. Dizemos também que I é ***D*-estável**.

Um elemento $f \in B$ é um **elemento integral** de D se $Df = gf$, para algum $g \in B$. Equivalentemente, $f \in B$ é um **elemento integral** de D se o ideal $fB = (f)$ é um ideal integral de D .

Definição 1.3. Uma derivação D de B é **redutível** se existe $b \in B$ não-invertível tal que $DB \subset bB$. Caso contrário, D é **irredutível**.

Definição 1.4. Dada uma derivação D de B . Um elemento $s \in B$ tal que $Ds = 1$ é uma “**slice**” (fatia) de D . Da mesma forma, um elemento $s \in B$ tal que $Ds \in \ker D$ e $Ds \neq 0$ é uma “**local slice**” (fatia local) de D .

Dada uma derivação $D \in \text{Der}(B)$, seja $A = \ker D$. São usados os seguintes termos e notações para D :

- Dado $n \geq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$), D^n denota a n -ésima composição de D com ela mesmo, onde D^0 é a identidade.
- Podemos chamar o $\ker D$ como o **anel das constantes** de D e uma notação alternativa é B^D .
- A imagem de B por D é denotada por DB .
- O ideal de B gerado pela imagem DB é denotado por (DB) .

Definição 1.5. Dado $b \in B$ e uma derivação $D \in \text{Der}(B)$, dizemos que D é **nilpotente em b** se existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $D^n b = 0$.

O conjunto dos elementos nilpotentes de D é denotado por $\text{Nil}(D)$, ou seja,

$$\text{Nil}(D) = \{b \in B : \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } D^n b = 0\}.$$

Definição 1.6. Uma derivação $D \in \text{Der}(B)$ é **localmente nilpotente** se para cada $b \in B$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ (dependendo de b) tal que $D^n b = 0$, isto é, se $\text{Nil}(D) = B$.

A seguir serão dados alguns exemplos sobre os vários tipos de derivações. Uma observação importante é que neles usaremos o Princípio 2, que garante que para verificar se uma derivação é localmente nilpotente, basta verificar se ela é localmente nilpotente no conjunto de geradores de B como k -álgebra. Esse Princípio será demonstrado apenas no próximo capítulo.

Exemplo 1.7. *Seja $B = k[x, y]$. A derivação $D = \frac{\partial}{\partial x}$ é localmente nilpotente, pois $Da = 0$, para todo $a \in k[y]$ e $D^2x = 0$, logo, concluímos o desejado.*

Mais geralmente, as derivações $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, são derivações localmente nilpotentes de $k[x_1, \dots, x_n]$

Exemplo 1.8. *A derivação $D = x \frac{\partial}{\partial x}$ não é localmente nilpotente em $k[x]$, pois $D^n x = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.9. *Seja $B = k[x, y]$. As derivações $D_1 = x \frac{\partial}{\partial y}$ e $D_2 = y \frac{\partial}{\partial x}$ são localmente nilpotentes em B . Porém, a derivação $D = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$ não é localmente nilpotente em B .*

A partir deste exemplo, podemos observar que o conjunto das derivações localmente nilpotentes não é fechado para a soma.

Denotamos por $\text{LND}(B)$ o conjunto de todas as derivações $D \in \text{Der}(B)$ que são localmente nilpotentes.

Se A é um subanel de B , definimos $\text{LND}_A(B) := \text{Der}_A(B) \cap \text{LND}(B)$.

Definição 1.10. *Se $B = k[x_1, \dots, x_n]$, dizemos que D é uma **derivação triangular** de B se $Dx_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$ para $i = 2, \dots, n$ e $Dx_1 \in k$*

Note que as derivações triangulares são uma subclasse das Derivações Localmente Nilpotentes em anéis polinomiais. Vários exemplos, como o principal abordado neste trabalho, envolvem as derivações triangulares em suas soluções.

Exemplo 1.11. *Seja $B = k[X, S, T, U, V]$. A derivação $D = X^3 \frac{\partial}{\partial S} + S \frac{\partial}{\partial T} + T \frac{\partial}{\partial U} + X^2 \frac{\partial}{\partial V}$ é triangular, pois $DV = X^2 \in k[X, S, T, U]$, $DU = T \in k[X, S, T]$, $DT = S \in k[X, S]$, $DS = X^3 \in k[X]$ e $DX = 0 \in k$.*

Além disso, temos também que D é localmente nilpotente.

Esse exemplo será usado no Capítulo 3.

1.1.1 Anéis Polinomiais

Seja A um anel. O anel de polinômios na variável t sobre A , denotado por $A[t]$, é definido da forma usual. Também é comum denotar esse anel por $A^{[1]}$. Mais geralmente, anéis polinomiais com coeficientes em um anel são definidos como segue: seja A um anel comutativo, então $A^{[0]} := A$ e para $n \geq 0$, $A^{[n+1]} := A^{[n]}[t]$, onde t é uma variável sobre $A^{[n]}$.

Definição 1.12. *Seja $A \subset B$ uma extensão de anéis. Um elemento $b \in B$ é **algébrico** sobre A se ele satisfaz um polinômio não nulo com coeficientes em A , isto é,*

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_i \in A, \quad a_i \neq 0 \text{ para algum } i.$$

*Se esse polinômio for mônico, isto é, se $a_n = 1$, dizemos que $b \in B$ é **integral** sobre A .*

*Dizemos que o anel B é **algébrico (integral)** sobre A se todo elemento de B é algébrico (integral) sobre A .*

Note que as definições de elementos algébricos e integrais são equivalentes quando A é corpo.

Mais ainda:

Definição 1.13. *Seja $\overline{A}$ o conjunto de todos os elementos de B que são algébricos (integrais) sobre A . Dizemos que A é **algebricamente fechado (integralmente fechado)** em B se $A = \overline{A}$.*

Definição 1.14. *Um subanel $A \subset B$ é **fatorialmente fechado** em B se, dados $f, g \in B$ não nulos, a condição $fg \in A$ implica $f \in A$ e $g \in A$.*

Quando A é fatorialmente fechado em B temos as seguintes propriedades:

(P1) $A^* = B^*$, onde A^* e B^* denotam o conjunto dos elementos invertíveis de A e B , respectivamente.

(P2) A é algebricamente fechado em B .

(P3) Todo elemento irredutível em A é irredutível em B .

De fato,

(P1) “ $\supseteq$ ” Seja $f \in B^*$, então existe $g \in B^*$ tal que $fg = 1$. Como A é subanel de B , temos que $1 \in A$. Assim, $fg = 1 \in A$ e então $f \in A^*$ e $g \in A^*$.

“ $\subseteq$ ” Segue do fato que $A \subset B$.

(P2) Queremos mostrar que $\overline{A} = A$. Note que só nos resta provar que $\overline{A} \subseteq A$.

Seja $b \in \overline{A}$, isto é, $b \in B$ tal que $P(b) = 0$, onde $P(t) = a_mt^m + \cdots + a_1t + a_0 \in A[t]$.

Assim

$$P(b) = a_mb^m + \cdots + a_1b + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b(a_mb^{m-1} + \cdots + a_1) = -a_0 \in A,$$

então, como A é fatorialmente fechado, $b \in A$ e $(a_mb^{m-1} + \cdots + a_1) \in A$.

(P3) Seja $a \in A$ irredutível tal que $a = fg$ em B , f e g não invertíveis em B . Como A é fatorialmente fechado segue que $f \in A$ e $g \in A$, o que implica que a é redutível em A , o que é uma contradição.

1.1.2 Função Grau

Definição 1.15. Uma **função grau** em B é uma aplicação $\deg : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ tal que, para cada $f, g \in B$, as seguintes condições são satisfeitas

- (1) $\deg(f) = -\infty \Leftrightarrow f = 0$;
- (2) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$;
- (3) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

Convencionamos que $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ e $(-\infty) + n = -\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, $-\infty < n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Três fatos podem ser notados:

(FG1) Se $\deg(f) \neq \deg(g)$, vale a igualdade na condição (3).

(FG2) $B_0 := \{b \in B : \deg(b) \leq 0\}$ é um subanel fatorialmente fechado de B .

(FG3) $B^* \subset B_0$.

De fato,

(FG1) Suponha, sem perda de generalidade, que $\deg(f) < \deg(g)$.

Por absurdo, suponha que $\deg(f + g) < \max\{\deg(f), \deg(g)\} = \deg(g)$.

Temos

$$\deg(g) = \deg(g + f - f) \leq \max\{\deg(f + g), \deg(f)\} < \deg(g),$$

o que é um absurdo.

Portanto, $\deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

(FG2) Sejam $f, g \in B$ não nulos tais que $fg \in B_0$, ou seja, $\deg(fg) = 0$ (note que, como $fg \neq 0$, não temos que considerar o caso em que $\deg(fg) < 0$). Assim, por (2),

$$\deg(f) + \deg(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(f) = \deg(g) = 0.$$

Logo, $f, g \in B_0$.

(FG3) Como B_0 é subanel fatorialmente fechado de B , temos $B^* = B_0^* \subset B_0$.

1.1.3 Anéis Graduados e Derivações Homogêneas

Suponha que B seja um anel graduado, isto é, B admite uma decomposição $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, onde I é um semigrupo abeliano ordenado, cada B_i é um $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial e $B_i B_j \subset B_{i+j}$, para todo $i, j \in I$.

Definição 1.16. Se rotularmos a graduação dada para B por ω , então os elementos dos submódulos B_i são chamados **ω -elementos homogêneos** de B , e se $f \in B_i$, então o **ω -grau** de f é i .

Definição 1.17. Seja ω a graduação dada para B . Uma derivação $D \in \text{Der}(B)$ tal que existe $d \in I$ tal que $DB_i \subset B_{i+d}$, para todo $i \in I$, é chamada **ω -derivação homogênea**. Isso quer dizer que D respeita essa graduação. O elemento $d \in I$ é chamado de **ω -grau** de D .

Observe que se D é ω -homogêneo e $f \in B$ se decompõe como $f = \sum_{i \in I} f_i$, com $f_i \in B_i$, então $Df = 0$ se, e somente se, $Df_i = 0$, para todo i . Isso acontece pois $Df = \sum_{i \in I} Df_i$ é a decomposição de Df em parcelas homogêneas.

1.1.4 O Anel Graduado Associado a uma Filtração

Se um k -domínio comutativo B admite uma $\mathbb{Z}$ -filtração por k -subespaços vetoriais como definiremos a seguir, então é possível construir a partir de B um $\mathbb{Z}$ -anel graduado $\text{Gr}(B)$, junto a uma função natural $B \rightarrow \text{Gr}(B)$. Além disso, cada derivação $D \in \text{Der}_k(B)$, respeitando essa filtração, é associada a uma derivação homogênea $\text{gr}(D) \in \text{Der}_k(\text{Gr}(B))$, e muitas vezes é mais fácil trabalhar com $\text{gr}(D)$ do que com D .

Definição 1.18. *Uma $\mathbb{Z}$ -filtração de B é uma coleção $\{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de subconjuntos de B satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) *Cada B_i é um k -espaço vetorial;*

(2) *$B_j \subset B_i$, quando $j \leq i$;*

(3) *$B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$;*

(4) *$B_i B_j \subset B_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{Z}$.*

A filtração é dita $\mathbb{Z}$ -filtração própria quando também valem

(5) *$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} B_i = \{0\}$;*

(6) *Se $a \in B_i \setminus B_{i-1}$ e $b \in B_j \setminus B_{j-1}$, então $ab \in B_{i+j} \setminus B_{i+j-1}$.*

Observamos que qualquer função grau em B nos dará uma $\mathbb{Z}$ -filtração própria, onde os B_i 's são dados por:

$$B_i = \{b \in B : \deg(b) \leq i\}.$$

Definição 1.19. *Suponha que $B = \bigcup B_i$ é uma $\mathbb{Z}$ -filtração própria e defina a álgebra graduada associada $\text{Gr}(B)$ como*

$$\text{Gr}(B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{B_n}{B_{n-1}}.$$

A estrutura aditiva sobre k em $\text{Gr}(B)$ é dada decompondo os elementos na soma direta e somando termo a termo.

Agora, considere $a + B_{i-1} \in \frac{B_i}{B_{i-1}}$ e $b + B_{j-1} \in \frac{B_j}{B_{j-1}}$, onde $a \in B_i$ e $b \in B_j$. O produto

deles é o elemento de $\frac{B_{i+j}}{B_{i+j-1}}$ definido por

$$(a + B_{i-1}) \cdot (b + B_{j-1}) = ab + B_{i+j-1}$$

que está bem definida por (4) e (6). Usando a propriedade distributiva estendemos a multiplicação para todo o $\text{Gr}(B)$.

Note que, pelo axioma (6), $\text{Gr}(B)$ é um domínio.

Por (2) e (5), para cada $a \in B$ não-nulo, o conjunto $\{i \in \mathbb{Z} : a \in B_i\}$ tem um mínimo, que será denotado em $\iota(a)$. A aplicação natural é dada por

$$\begin{aligned} \rho : B &\longrightarrow \text{Gr}(B) \\ a &\mapsto \bar{a} \in \frac{B_i}{B_{i-1}} \end{aligned}$$

onde $i = \iota(a)$. Também definimos $\rho(0) = 0$.

Observação 1.20. Dado $a \in B$, $\rho(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$.

Justificativa:

($\Leftarrow$) Vale por definição.

($\Rightarrow$) Temos que se $\rho(a) = 0$, então $a + B_{i-1} = 0$, o que implica que $a \in B_{i-1}$, mas $i = \iota(a) = \min\{i \in \mathbb{Z} : a \in B_i\}$, logo $a \in B_i$, para qualquer $i \in I$. Assim, pelo axioma (5), $a = 0$.

■

Note que ρ é uma aplicação multiplicativa, pois

$$\rho(ab) = ab + B_{i+j-1} = (a + B_{i-1})(b + B_{j-1}) = \rho(a)\rho(b),$$

com $a, b \neq 0$. Porém, não é um homomorfismo entre álgebras, já que, geralmente, não respeita a adição.

Caso B já seja um $\mathbb{Z}$ -anel graduado, então B admite uma filtração em relação à qual B é isomorfo a $\text{Gr}(B)$, via ρ . Em particular, se $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, então uma $\mathbb{Z}$ -filtração própria é definida por $B_i = \bigoplus_{j \leq i} A_j$.

Definição 1.21. *Suponha que $B = \bigcup B_i$ é uma $\mathbb{Z}$ -filtração própria. Dada $D \in \text{Der}_k(B)$, dizemos que D **respeita a filtração** se existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $D(B_i) \subset B_{i+t}$, para todo i .*

Nesse caso, definimos a função $\text{gr}(D) : \text{Gr}(B) \rightarrow \text{Gr}(B)$ como a seguir:

- Se $D \equiv 0$, então $\text{gr}(D) \equiv 0$.
- Se $D \neq 0$, escolha t o menor inteiro tal que $D(B_i) \subset B_{i+t}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então, dado $i \in \mathbb{Z}$, defina

$$\begin{aligned} \text{gr}(D)_i : \frac{B_i}{B_{i-1}} &\longrightarrow \frac{B_{i+t}}{B_{i+t-1}} \\ a + B_{i-1} &\mapsto Da + B_{i+t-1} \end{aligned} .$$

Estendendo $\text{gr}(D)_i$ por linearidade para todo $\text{Gr}(B)$, obtemos $\text{gr}(D)$.

Não é difícil mostrar que $\text{gr}(D)$ satisfaz a regra do produto, sendo assim, $\text{gr}(D) \in \text{Der}(\text{Gr}(B))$ e $\text{gr}(D)(B_i) \subset B_{i+t}$. Portanto, $\text{gr}(D)$ é uma k -derivação homogênea de $\text{Gr}(B)$.

Note que, dada $D \in \text{Der}_k(B)$, temos, pela observação anterior, que $\text{gr}(D) = 0$ se, e somente se, $D = 0$. Além disso,

$$\rho(\ker D) \subset \ker(\text{gr}(D)),$$

pois, se $a \in \ker(D)$ e $\rho(a) \in \frac{B_i}{B_{i-1}}$, $i = \iota(a)$, então

$$\text{gr}(D)(\rho(a)) = \text{gr}(D)(a + B_{i-1}) = D(a) + B_{i+t-1} = 0 + B_{i+t-1}.$$

1.1.5 A Função Grau Induzida pela Derivação

Definiremos nesta seção a função grau ν_D induzida por uma derivação D , que é uma ferramenta importante no trabalho com derivações, especialmente no caso localmente nilpotente.

Definição 1.22. *Dada $D \in \text{Der}(B)$ e $f \in \text{Nil}(D)$, sabemos que existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$D^n f = 0$. Se $f \neq 0$, defina

$$\nu_D(f) = \min\{n \in \mathbb{N} : D^{n+1}f = 0\}$$

Além disso, defina $\nu_D(0) = -\infty$.

Mais adiante será mostrado que $\text{Nil}(D)$ é uma subálgebra de B e ν_D é uma função grau em $\text{Nil}(D)$. Assim, se D é localmente nilpotente, ν_D induz uma $\mathbb{Z}$ filtração própria $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ com respeito a D , onde $B_i = \{f \in B : \nu_D(f) \leq i\}$. Nesse caso, note que $B_0 = \ker D$ e que cada elemento de $B_1 \setminus B_0$ é uma “local slice”.

1.1.6 As Aplicações Exponencial e de Dixmier

Definição 1.23. Dada $D \in \text{LND}(B)$, a **função exponencial** determinada por D é

$$\begin{aligned} \exp D : B &\longrightarrow B \\ f &\mapsto \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i f \end{aligned} .$$

Definição 1.24. Dada $D \in \text{LND}(B)$, para toda “local slice” $r \in B$ de D (lembre-se que $Dr \neq 0$), a **aplicação de Dixmier** induzida por r é

$$\begin{aligned} \pi_r : B &\longrightarrow B_{Dr} \\ f &\mapsto \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} D^i f \frac{r^i}{(Dr)^i} \end{aligned} .$$

Aqui, B_{Dr} denota a localização de B em Dr .

Note que, como D é localmente nilpotente, ambas as aplicações estão bem definidas (já que as duas somas acabam se tornando somas finitas). Note também que essas definições dependem do fato que $\mathbb{Q} \subset B$.

1.1.7 A Derivada de um Polinômio

Seja A é um subanel de B e suponha que $B = A[t]$ para algum $t \in B$, a **derivada** de B relativa ao par (A, t) é a derivação $\left(\frac{d}{dt}\right)_A \in \text{Der}_A(B)$ unicamente definida por $\left(\frac{d}{dt}\right)_A(t) = 1$. Quando o anel A está implícito, ele pode ser omitido da notação.

Dado $P(t) \in A[t]$, definimos

$$P'(t) := \frac{d}{dt}(P(t)).$$

Analogamente, dado $n \geq 0$, as notações $P^{(n)}(t)$ e $\frac{d^n P}{dt^n}$ denotam a n -ésima derivada.

1.2 Fatos Básicos sobre Derivações

No início da seção anterior, foram dadas duas condições na definição de derivações e elas implicaram em quatro outros fatos. Agora, enunciaremos outras consequências desses fatos. Parte das demonstrações serão omitidas devido ao fato de que elas não são o objetivo principal deste trabalho. Elas podem ser encontradas em [9].

Proposição 1.25. *Seja $D \in \text{Der}(B)$ dada e $A = \ker D$.*

(a) $D(ab) = aDb$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Portanto, D é um A -módulo endomorfismo sobre B .

(b) Regra da potência: Para todo $t \in B$ e $n \geq 1$,

$$D(t^n) = nt^{n-1}Dt.$$

(c) Regra do quociente: Se $g \in B^$ e $f \in B$, então*

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(gDf - fDg)}{g^2}.$$

(d) **Regra do produto iterada:** Para quaisquer $a, b \in B$ e qualquer inteiro $m \geq 0$,

$$D^m(ab) = \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} D^i a D^j b.$$

Proposição 1.26. Suponha que A é um subanel de B e $t \in B$ é transcendente sobre A .

Se $P(t) \in A[t]$ é dado por $P(t) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i t^i$, $a_i \in A$, então

$$P'(t) = \sum_{1 \leq i \leq m} i a_i t^{i-1},$$

onde $P'(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)_A (P(t))$.

Corolário 1.27. (Fórmula de Taylor) Seja A um subanel de B . Dados $s, t \in B$ e $P \in A^{[1]}$ de grau $n \geq 0$,

$$P(s+t) = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(s)}{i!} t^i$$

Proposição 1.28. Sejam $D \in \text{Der}(B)$ e $A = \ker D$.

(a) $DB \cap A$ é um ideal de A , chamado de “plinth ideal”.

(b) Qualquer ideal de B gerado por elementos de A é um ideal integral de D .

(c) **Regra da Cadeia:** Sejam $P \in A^{[1]}$ e $t \in B$ transcendente sobre A , então $D(P(t)) = P'(t)D(t)$.

(d) A é um subanel algebricamente fechado de B .

Demonstração:

(a) Como $D : B \rightarrow B$ é um A -módulo homomorfismo, A e DB são A -submódulos em B . Então, $A \cap DB$ é um A -submódulo de A , isto é, um ideal de A .

(b) Seja $I = (a)$ um ideal de B , onde $a \in A$.

Temos $DI \subset I$, pois dado $x \in I$, temos que $x = ba$, com $b \in B$, e $D(ba) = aD(b) \in I$.

Logo, I é um ideal integral de D .

(c) Segue imediatamente da Proposição 1.25 (b), da Proposição 1.26 e da primeira condição da definição de derivação.

(d) Seja $t \in B$ algébrico sobre A , ou seja, $t \in \overline{A}$, e $P \in A^{[1]}$, não nulo, o polinômio de menor grau tal que $P(t) = 0$.

Pelo item (c),

$$0 = D(P(t)) = P'(t)Dt.$$

Note que $P'(t) \neq 0$, pela minimalidade do grau de P .

Como B é domínio temos que $Dt = 0$. Logo $t \in A = \ker D$.

Portanto, $A = \overline{A}$, ou seja, A é um subanel algebricamente fechado.

■

Proposição 1.29. *Seja $D \in \text{Der}(B)$ dada.*

(a) $\nu_D(Df) = \nu_D(f) - 1$ sempre que $f \in \text{Nil}(D) \setminus \ker(D)$.

(b) $\text{Nil}(D)$ é uma $\mathbb{Q}$ -subálgebra de B .

(c) ν_D é uma função grau em $\text{Nil}(D)$.

Demonstração:

Dados $f, g \in \text{Nil}(D) \subset B$, sejam $m = \nu_D(f)$ e $n = \nu_D(g)$. Suponhamos que $fg \neq 0$, assim, $m \geq 0$ e $n \geq 0$ (pois $f \neq 0$ e $g \neq 0$).

Como

$$0 = D^{m+1}f = D^m(Df),$$

segue que $Df \in \text{Nil}(D)$.

Assim, se $f \in \text{Nil}(D) \setminus \ker(D)$, segue que

$$\nu_D(Df) = m - 1 = \nu_D(f) - 1.$$

Portanto, vale (a).

Além disso, se $\mu = \max\{m, n\}$, então

$$D^{\mu+1}(f + g) = D^{\mu+1}f + D^{\mu+1}g = 0,$$

ou seja, $f + g \in \text{Nil}(D)$. Então $\text{Nil}(D)$ é fechado para a adição. Dessa equação também concluímos que, para $f, g \in \text{Nil}(D)$,

$$\nu_D(f + g) \leq \max\{\nu_D(f), \nu_D(g)\}. \quad (1.1)$$

Pela regra do produto iterada temos que

$$D^{m+n+1}(fg) = \sum_{i+j=m+n+1} \binom{m+n+1}{i} D^i f D^j g.$$

Se $i + j = m + n + 1$ para i e j não negativos, então $i > m$ ou $j > n$. Assim, $D^i f D^j g = 0$, o que implica $D^{m+n+1}(fg) = 0$. Logo, $\text{Nil}(D)$ é também fechado para a multiplicação. Portanto, $\text{Nil}(D)$ é uma subálgebra de B , e (b) está mostrado.

Os passos anteriores nos mostram que $\nu_D(fg) \leq m + n$. Note ainda que

$$D^{m+n}(fg) = \sum_{i+j=m+n} \binom{m+n}{i} D^i f D^j g = \frac{(m+n)!}{m!n!} D^m f D^n g \neq 0.$$

Logo,

$$\nu_D(fg) = m + n. \quad (1.2)$$

Assim, por (1.1) e (1.2), ν_D é uma função grau e portanto (c) está mostrado. ■

Vale a recíproca do item (d) da Proposição 1.28 para corpos, e ela é dada a seguir:

Proposição 1.30. *Sejam K e L , $K \subset L$, corpos de característica zero. São equivalentes:*

- (a) *Existe $d \in \text{Der}(L)$ tal que $K = \ker d$.*
- (b) *K é algebricamente fechado em L .*

A implicação (a) $\Rightarrow$ (b) é simples, porém a outra implicação deste resultado não é trivial e pode ser encontrada no livro [16] de Nowicki, em 3.3.2. A partir dele, pode-se caracterizar todas as k -subálgebras de B que são núcleos de k -derivações.

Proposição 1.31. *([16], 4.1.4) Seja B um k -domínio afim e $A \subset B$ uma k -subálgebra. São equivalentes:*

- (a) *Existe $D \in \text{Der}_k(B)$ tal que $A = \ker D$.*
- (b) *A é integralmente fechado em B e $\text{Frac}(A) \cap B = A$.*

Nessa Proposição, a implicação (a) $\Rightarrow$ $\text{Frac}(A) \cap B = A$ não utiliza o fato de B ser afim e ela será demonstrada juntamente com o Princípio 13, no próximo capítulo. As

outras implicações bem como a Proposição a seguir não serão demonstradas, pois não se encaixam no objetivo deste trabalho.

Proposição 1.32. ([9], 1.12) *Suponha que B é uma extensão algébrica de um subanel B' . Se $D, E \in \text{Der}(B)$ e $Df = Ef$ para todo $f \in B'$, então $D = E$.*

O próximo Teorema indica a relação entre derivações e extensões integrais. Sua demonstração pode ser encontrada em [7, 1.2.15].

Teorema 1.33. (Teorema de Seidenberg) *Se B é um domínio Noetheriano, sejam $K = \text{Frac}(B)$ e $\mathfrak{B} \subset K$ o fecho integral de B em K . Dado $D \in \text{Der}(K)$, se $DB \subset B$, então $D\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$.*

Também encontramos extensões de derivações em relação a localizações, quocientes, completamentos, extensões sobre um corpo base, produtos tensoriais, etc.. A seguir, veremos como trabalhar com derivações em relação à localização e ao quociente.

Definição 1.34. *Seja S um subconjunto multiplicativamente fechado de B que não contém o zero, e seja uma derivação $D \in \text{Der}_k(B)$. Então D se estende unicamente a uma **derivação localizada** $S^{-1}D$ sobre a localização $S^{-1}B$ pela regra do quociente dada anteriormente.*

Note que

$$(S \cap \ker D)^{-1}(\ker D) \subset \ker(S^{-1}D)$$

com igualdade quando $S \subset \ker D$ (a justificativa dessa inclusão será feita na demonstração do Princípio 9, no próximo capítulo).

Similarmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.35. *Seja uma derivação $D \in \text{Der}_k(B)$ e $I \subset B$ um ideal integral de D (isto é, $DI \subset I$). Então o par (D, I) induz uma **derivação quociente** bem-definida $\frac{D}{I}$ no quociente $\frac{B}{I}$, dada por*

$$\frac{D}{I}(\bar{b}) = \overline{Db}$$

onde $\bar{b}$ denota a classe de b módulo I . Reciprocamente, qualquer ideal $I \subset B$ para o qual $\frac{D}{I}$ está bem-definida é um ideal integral de D .

Primeiros Princípios das Derivações Localmente Nilpotentes

Nosso objetivo nesta capítulo é voltar a atenção às derivações localmente nilpotentes e alguns de seus princípios. Aqui, k continua sendo um corpo de característica zero e B um k -domínio comutativo.

2.1 Os Princípios

Princípio 1. *Suponha que $D \in \text{LND}(B)$.*

- (a) $\ker D$ é fatorialmente fechado.*
- (b) $B^* \subset \ker D$. Em particular, $\text{LND}(B) = \text{LND}_k(B)$.*
- (c) Se $D \neq 0$, então D admite uma “local slice” $r \in B$.*
- (d) $\text{Aut}_k(B)$ age em $\text{LND}(B)$ por conjugação.*

Demonstração:

(a) e (b) Pela Proposição 1.29, ν_D é uma função grau. Anteriormente já foi observado que, para qualquer função grau,

- $B_0 = \{b \in B : \nu_D(b) \leq 0\}$ é fatorialmente fechado.
- $B^* \subset B_0$.

Note que

$$B_0 = \{b \in B : \nu_D(b) \leq 0\} = \{b \in B : Db = 0\} = \ker D.$$

Logo, (a) está mostrado e para a parte (b) só falta mostrar que $\text{LND}(B) = \text{LND}_k(B)$.

De fato, como $\text{Der}_k(B) \subseteq \text{Der}(B)$, segue que $\text{LND}_k(B) \subseteq \text{LND}(B)$. Agora, seja $D \in \text{LND}(B)$. Como k é corpo, $k^* \subset B^* \subset \ker D$, segue que $k \subset \ker D$. Logo, $D|_k \equiv 0$ e portanto $D \in \text{LND}_k(B)$.

(c) Seja $b \in B$ tal que $Db \neq 0$ e seja $n = \nu_D(b) \geq 1$. Então $D^n b \neq 0$ e $D^{n+1}b = 0$. Portanto, basta tomar $r := D^{n-1}b$.

(d) Seja

$$\begin{aligned} \rho : \text{Aut}_k(B) &\longrightarrow P(\text{LND}(B)) \quad , \\ \alpha &\longmapsto \rho(\alpha) \end{aligned}$$

onde $P(\text{LND}(B))$ é o grupo das permutações de $\text{LND}(B)$ e ρ é a conjugação:

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) : \text{LND}(B) &\longrightarrow \text{LND}(B) \quad . \\ D &\longmapsto \alpha D \alpha^{-1} \end{aligned}$$

ρ é uma ação, só resta mostrar que está bem definida, isto é, que $\alpha D \alpha^{-1} \in \text{LND}(B)$.

De fato, note que $(\alpha D \alpha^{-1})^n = \alpha D^n \alpha^{-1}$, para qualquer $\alpha \in \text{Aut}_k(B)$ e $n \geq 0$.

Portanto, $\text{Aut}_k(B)$ age por conjugação em $\text{LND}(B)$. ■

Note que, enquanto derivações em corpos são interessantes e importantes, o corolário a seguir mostra que a única derivação localmente nilpotente de um corpo é a derivação nula.

Corolário 2.1. *Se K é um corpo de característica zero, então $\text{LND}(K) = \{0\}$.*

Demonstração:

Primeiramente, note que $B^* = K^* \subset \ker D$. Assim $\text{LND}(K) = \text{LND}_K(K) = \{0\}$. ■

Observação 2.2. *Existem subanéis fatorialmente fechados $A \subset B$ com $\text{tr.deg}_A B = 1$ que não são núcleo de nenhuma derivação localmente nilpotente. Por exemplo, podemos*

tomar $A = k[x^2 - y^3]$ em $B = k[x, y]$ (ver [3] p.226, primeira observação).

Princípio 2. *Seja $S \subset B$ um subconjunto que gera B como uma k -álgebra e seja $D \in \text{Der}_k(B)$. Então*

$$D \in \text{LND}(B) \Leftrightarrow S \subset \text{Nil}(D).$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Temos que $D \in \text{LND}(B)$ se, e somente se, $B = \text{Nil}(D)$. Logo, $S \subset B = \text{Nil}(D)$.

($\Leftarrow$) Precisamos mostrar que $\text{Nil}(D) = B$. Porém, isso segue do fato de que $\text{Nil}(D)$ é uma k -subálgebra de B e como S gera B como k -álgebra, então $B \subset \text{Nil}(D)$ (a outra inclusão é imediata). ■

Suponha que B é finitamente gerado sobre $A = \ker D$, a saber, $B = A[x_1, \dots, x_n]$. Então este resultado implica que $D \in \text{LND}(B)$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $D^N x_i = 0$, para cada i .

Princípio 3. *Suponha $D \in \text{LND}(B)$ não nula e seja $A = \ker D$. Se $P \in A^{[1]}$ e $t \in B$ são tais que nem t nem $P(t)$ são nulos, então*

$$\nu_D(P(t)) = (\deg P) \cdot \nu_D(t).$$

Demonstração:

O caso $\nu_D(t) = 0$ é trivial, já que $A = \ker D$, $P \in A^{[1]}$ e $Dt = 0$, então $D(P(t)) = 0$. Logo, $\nu_D(P(t)) = 0$.

Suponhamos que $\nu_D(t) > 0$. Para cada $a \in A$, $a \neq 0$, e $i \in \mathbb{N}$,

$$\nu_D(at^i) = \nu_D(a) + \nu_D(t^i) = i\nu_D(t).$$

Logo, como os termos não nulos em $P(t)$ são distintos, cada um com um ν_D -grau,

$$\nu_D(P(t)) = \max_i \{\nu_D(a_i t^i)\} = \max_i \{i\nu_D(t)\} = (\deg P) \cdot \nu_D(t).$$

Portanto segue o resultado. ■

Princípio 4. *Dado um ideal I de B , e dado $D \in \text{LND}(B)$, $D \neq 0$, D induz um elemento $\frac{D}{I} \in \text{LND}\left(\frac{B}{I}\right)$ bem definido se, e somente se, I é um ideal integral de D . Além disso, se I é um ideal integral de D e é um ideal maximal de B , então $DB \subset I$.*

Demonstração:

1ª parte: Já foi feito anteriormente, na seção 1.2.

2ª parte: Se I é um ideal maximal, então $\frac{B}{I}$ é um corpo (de característica zero, pois $k \subset B$), assim $\text{LND}\left(\frac{B}{I}\right) = \{0\}$ (pelo corolário 2.1). Em particular, $\frac{D}{I} = 0$. Portanto, $DB \subset I$. ■

Princípio 5. *Seja $D \in \text{LND}(B)$ e $f_1, \dots, f_n \in B$ ($n \geq 1$) dadas. Suponha que exista uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $Df_i \in f_{\sigma(i)}B$ para cada i . Então, em cada órbita de σ , existe i com $Df_i = 0$.*

Demonstração:

Suponha $Df_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e escolha $a_1, \dots, a_n \in B$ não nulos tais que $Df_i = a_i f_{\sigma(i)}$. Então, $\nu_D(f_i) \geq 1$ e $\nu_D(a_i) \geq 0$, para todo i . Segue que, para cada i ,

$$\nu_D(f_i) - 1 \stackrel{\text{Propo. 1.29}}{=} \nu_D(Df_i) = \nu_D(a_i f_{\sigma(i)}) = \nu_D(a_i) + \nu_D(f_{\sigma(i)}) \geq \nu_D(f_{\sigma(i)}).$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n \nu_D(f_i) - n \geq \sum_{i=1}^n \nu_D(f_{\sigma(i)})$$

o que é um absurdo, pois os dois somatórios são iguais.

Portanto, $Df_i = 0$ para pelo menos um i .

Agora, aplique essa conclusão para σ decomposto em ciclos disjuntos e o resultado segue. ■

O caso $n = 1$ é especialmente importante e é enunciado no Corolário a seguir, cuja demonstração é imediata.

Corolário 2.3. *Se $Df \in fB$ para $D \in \text{LND}(B)$ e $f \in B$, então $Df = 0$.*

Princípio 6. *Suponha que B é um k -domínio comutativo e $D \in \text{LND}(B)$. Assuma que D é estendida a uma derivação D^* no anel $B[t] = B^{[1]}$. Então, D^* é localmente nilpotente se, e somente se, $D^*t \in B$.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponhamos que $D^*t \in B$. Como $D \in \text{LND}(B)$, $\text{Nil}(D) = B$ e assim, como D^* estende D , $B \subset \text{Nil}(D^*)$. Então, $D^*t \in \text{Nil}(D^*)$. Logo, existe n tal que $D^{*n}(D^*t) = 0$. Segue então que $t \in \text{Nil}(D^*)$. Assim, pelo Princípio 2, D^* é localmente nilpotente.

($\Rightarrow$) Agora, suponhamos que D^* é localmente nilpotente mas $D^*t \notin B$.

Escolha N tal que $(D^*)^N t \notin B$, mas $(D^*)^{N+1}t \in B$, o que é possível pois D^* é localmente nilpotente e $D^*t \notin B$. Então, $P(t) := (D^*)^N t$ é tal que $\deg_t P(t) = m \geq 1$. Suponha também que $\deg_t D^*t = n \geq 1$. Escreva $P(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i$, $b_i \in B$. Então

$$\begin{aligned} D^*(P(t)) &= \sum_i [b_i (D^*t^i) + t^i D b_i] = \sum_i [i t^{i-1} b_i (D^*t) + t^i D b_i] \\ &= P'(t) D^*t + \sum_{i=1}^m (D b_i) t^i, \end{aligned}$$

que pertence a B , pois $D^*(P(t)) = (D^*)^{N+1}t \in B$. Ou seja, $\deg_t D^*(P(t)) = 0$.

Segue então que $(m-1) + n \leq m$, pois o grau de $P'(t)D^*t$ não pode passar o de $\sum_{i=1}^m (D b_i) t^i$, caso contrário não teríamos $\deg_t D^*(P(t)) = 0$. Logo $n = 1$, isto é, D^*t é linear em t . Isso implica que $\deg_t (D^*)^i t \leq 1$, para todo $i \geq 0$, em particular devemos ter $m = 1$.

Escrevamos $P(t) = at + b$ e $D^*t = ct + d$ para $a, b, c, d \in B$ e $a, c \neq 0$. Então $D^*(at + b) = (ac + Da)t + ad + Db$ pertence a B , o que implica que $ac + Da = 0$. Assim teremos que $Da \in aB$ e, pelo Corolário anterior, $Da = 0$. Porém, concluiríamos que $ac = 0$, o que é uma contradição.

Portanto, $D^*t \in B$. ■

Princípio 7. Dados $D \in \text{Der}_k(B)$ e $f \in B$ não nulo, temos

$$fD \in \text{LND}(B) \Leftrightarrow D \in \text{LND}(B) \text{ e } f \in \ker D.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $fD \in \text{LND}(B)$. Vamos mostrar que $D \in \text{LND}(B)$ e $f \in \ker D$.

Para isso, dividiremos a demonstração em dois passos:

- Suponha que $D \notin \text{LND}(B)$, que é equivalente a $\text{Nil}(D) \neq B$.

Note que, neste caso, $D \neq 0$.

Tome $N = \nu_{fD}(f) \geq 0$ e escolha $g \in B \setminus \text{Nil}(D)$. Segue que $g \neq 0$, $\nu_{fD}(g) \geq 0$ e $\nu_{fD}(D^n g) \geq 0$, para todo $n \geq 1$.

Por um lado, temos

$$\nu_{fD}(fD^n g) = \nu_{fD}((fD)(D^{n-1}g)) \stackrel{\text{Propo. 1.29(a)}}{=} \nu_{fD}(D^{n-1}g) - 1.$$

Por outro lado,

$$\nu_{fD}(fD^n g) = \nu_{fD}(f) + \nu_{fD}(D^n g) = N + \nu_{fD}(D^n g).$$

Assim,

$$\nu_{fD}(D^n g) = \nu_{fD}(D^{n-1}g) - (N + 1)$$

para todo $n \geq 1$. Fazendo recursivamente, temos

$$\nu_{fD}(D^n g) = \nu_{fD}(g) - n(N + 1)$$

o que é um absurdo, pois $\nu_{fD}(D^n g) \geq 0$.

Logo, $D \in \text{LND}(B)$.

- Note que $(fD)(f) \in fB$ e então pelo Corolário 2.3, segue que $f \in \ker(fD)$. Como B é um domínio, $\ker(fD) = \ker D$. Logo, $f \in \ker D$.

Portanto, $D \in \text{LND}(B)$ e $f \in \ker D$.

($\Leftarrow$) Já temos que $\text{Nil}(fD) \subset B$, falta mostrar a outra inclusão.

Seja $g \in B$. Como $B = \text{Nil}(D)$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $D^m(g) = 0$. Assim, como $f \in \ker D$, temos $(fD)^m g = fD^m g = 0$.

Portanto, $fD \in \text{LND}(B)$. ■

Observação 2.4. *Esse resultado pode falhar em um anel que não é domínio:*

Seja $R = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3)} = \mathbb{Q}[\bar{x}]$ e seja $d \in \text{Der}_{\mathbb{Q}}(R)$ definida por $d\bar{x} = \bar{x}^2$. Então, $d, \bar{x}d \in \text{LND}(R)$, mas $\bar{x} \notin \ker d$.

Princípio 8. *Suponha que $B = A[t]$, onde A é um subanel de B e t é transcendente sobre A . Então*

$$(a) \frac{d}{dt} \in \text{LND}_A(A[t]).$$

$$(b) \ker \left(\frac{d}{dt} \right) = A.$$

$$(c) \text{LND}_A(A[t]) = A \frac{d}{dt}.$$

Demonstração:

(a) Já sabemos que $\frac{d}{dt}(A) = 0$, então para mostrar (a) só falta mostrar que $\text{Nil} \left(\frac{d}{dt} \right) = A[t]$.

De fato, é consequência da Proposição 1.26, já que nela mostramos que cada aplicação de $\frac{d}{dt}$ reduz em 1 o grau de um elemento em $A[t]$.

(b) Por definição, $A \subseteq \ker \left(\frac{d}{dt} \right)$, falta mostrar a outra inclusão.

Suponha que $P(t) \in \ker \left(\frac{d}{dt} \right)$. Se $\deg_t P \geq 1$, como o núcleo é fatorialmente fechado, teríamos que $t \in \ker \left(\frac{d}{dt} \right)$, o que é um absurdo.

Portanto, $\ker \left(\frac{d}{dt} \right) \subseteq A$.

(c) “ $\subseteq$ ” Seja $D \in \text{LND}_A(A[t])$ dado, com $D \neq 0$. Pela Proposição 1.28 (c), para qualquer $p(t) \in A[t]$, $D(p(t)) = p'(t)Dt$. Logo, $D = Dt \frac{d}{dt}$.

Como $Dt \frac{d}{dt} \in \text{LND}_A(A[t])$, pelo Princípio 7, temos que $Dt \in A = \ker \left(\frac{d}{dt} \right)$.

Portanto, $\text{LND}_A(A[t]) \subseteq A \frac{d}{dt}$.

“ $\supseteq$ ” Segue imediatamente da “volta” do Princípio 7. ■

Princípio 9. *Sejam $S \subset B - \{0\}$ um conjunto multiplicativamente fechado e $D \in \text{Der}_k(B)$ dada. Então*

$$S^{-1}D \in \text{LND}(S^{-1}B) \Leftrightarrow D \in \text{LND}(B) \text{ e } S \subset \ker D.$$

Neste caso, $\ker(S^{-1}D) = S^{-1}(\ker D)$.

Demonstração:

1ª parte:

($\Rightarrow$) Suponha que $S^{-1}D \in \text{LND}(S^{-1}B)$, assim como $S^{-1}D$ é uma extensão de D , segue que $D \in \text{LND}(B)$.

Por outro lado, como $S \subseteq (S^{-1}B)^\times \subseteq \ker D$. Segue então que $S \subseteq \ker D$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $D \in \text{LND}(B)$ e $S \subseteq \ker D$.

Tome $\frac{f}{g} \in S^{-1}B$. Como $g \in S \subseteq \ker D$, temos que

$$(S^{-1}D)^n \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g(S^{-1}D)^n(f) - f(S^{-1}D)^n(g)}{g^2} = \frac{gD^n f - fD^n g}{g^2} = g^{-1}D^n f = 0,$$

para $n \gg 0$ (pois D é uma derivação localmente nilpotente). Logo, $S^{-1}D \in \text{LND}(S^{-1}B)$.

2ª parte:

Agora, como $S \subseteq \ker D$, segue que

$$S^{-1}D \left(\frac{f}{g} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{g}Df = 0 \Leftrightarrow Df = 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \in S^{-1}(\ker D).$$

■

Princípio 10. *Suponha $D \in \text{LND}(B)$.*

(a) *Se $[D, E] = 0$, para $E \in \text{LND}(B)$, então $D + E \in \text{LND}(B)$ e $\exp(D + E) = \exp D \circ \exp E$.*

(b) $\exp D \in \text{Aut}_k(B)$.

(c) *O subgrupo de $\text{Aut}_k(B)$ gerado por $\{\exp D : D \in \text{LND}(B)\}$ é normal.*

Demonstração:

(a) Seja $f \in B$. Como $D, E \in \text{LND}(B)$, escolha $m \geq 0$ tal que $D^m f = E^m f = 0$. Tome $n = 2m$. Como $[D, E] = 0$, temos que $DE = ED$, assim

$$(D + E)^n(f) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} D^i E^j(f)$$

pela regra do produto iterada. Note que, para cada termo dessa soma, $i \geq m$ ou $j \geq m$ e daí segue que $D^i E^j(f) = E^j D^i(f) = 0$ para cada par i, j . Logo, $D + E \in \text{LND}(B)$.

Além disso, usando essa mesma expansão para $(D + E)^k(f)$, temos

$$\begin{aligned} \exp(D + E)(f) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (D + E)^k f = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \binom{k}{i} D^i E^j(f) \right) \\ &= \sum_{k=0} \sum_{i+j=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{i!j!} D^i E^j(f) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} D^i E^j(f) \\ &= (\exp D \circ \exp E)(f). \end{aligned}$$

Portanto, (a) está mostrado.

(b) Como a função D^i é aditiva para qualquer $i \in \mathbb{N}$, então $\exp D(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(f)$ é uma função aditiva.

Para ver que $\exp D$ respeita a multiplicação, suponhamos $f, g \in B$ não nulos, com $\nu_D(f) = m$ e $\nu_D(g) = n$. Então $D^i f = D^j g = 0$, para $i > m$ e $j > n$, e

$$\begin{aligned} (\exp D)(f) \cdot (\exp D)(g) &= \left(\sum_{0 \leq i \leq m} \frac{1}{i!} D^i f \right) \cdot \left(\sum_{0 \leq j \leq n} \frac{1}{j!} D^j g \right) \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{i!j!} D^i f D^j g = \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} D^i f D^j g \\ &= \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} \left(\sum_{i+j=t} \binom{i+j}{i} D^i f D^j g \right) = \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} D^t(fg) \\ &= (\exp D)(fg). \end{aligned}$$

Logo, $\exp D$ é um homomorfismo entre álgebras.

Pelo Princípio 7, temos que $-D \in \text{LND}(B)$. Então, pela parte (a), segue que

$$\exp(D) \circ \exp(-D) = \exp(-D) \circ \exp(D) = \exp 0 = I.$$

Portanto, $\exp D$ é um automorfismo e (b) está provado.

(c) Note que, para $\alpha \in \text{Aut}_k(B)$

$$\alpha(\exp D f) \alpha^{-1} = \alpha \left(\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i f \right) \alpha^{-1} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} (\alpha D \alpha^{-1})^i f = \exp(\alpha D \alpha^{-1}) f$$

e também que $\alpha D \alpha^{-1} \in \text{LND}(B)$, pois

$$(\alpha D \alpha^{-1})^n(f) = (\alpha D^n \alpha^{-1})(f) = \alpha(D^n(\alpha^{-1}f)) = 0,$$

onde $n - 1 = \nu_D(\alpha^{-1}(f))$.

Portanto, (c) segue. ■

Princípio 11. *Seja $D \in \text{LND}(B)$ dada, com $D \neq 0$, e tome $A = \ker D$. Escolha uma “local slice” $r \in B$ de D (que existe pelo Princípio 1) e considere $\pi_r : B \rightarrow B_{Dr}$ a aplicação de Dixmier definida por r . Então,*

- (a) $\pi_r(B) \subset A_{Dr}$.
- (b) π_r é um homomorfismo sobre k -álgebras.
- (c) $\ker \pi_r = rB_{Dr} \cap B$.
- (d) $B_{Dr} = A_{Dr}[r]$.
- (e) O grau de transcendência de B sobre A é 1.

Demonstração:

Vamos dividir essa demonstração em duas partes.

1º caso: Considere $s \in B$ tal que $Ds = 1$, ou seja, $s \in B$ é uma “slice”.

(a) Lembremos que

$$\pi_s(h) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} (D^i h) s^i, \quad h \in B.$$

Assim,

$$D(\pi_s(h)) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} [D^{i+1} h s^i + D^i h D(s^i)] \stackrel{\text{soma telescópica}}{=} 0, \quad \forall h \in B.$$

Logo, $\pi_s(B) \subset A = A_{Ds}$ (já que $Ds = 1$).

(b) Seja t transcendente sobre B e estenda D para $B[t]$ via $Dt = 0$.

Sejam $\iota : B \rightarrow B[t]$ a inclusão e $\varepsilon : B[t] \rightarrow B$ a aplicação de avaliação $\varepsilon(t) = s$.

Pelos Princípios 7 e 10, $\exp(-tD)$ é um automorfismo de $B[t]$. Além disso,

$$\pi_s = \varepsilon \circ \exp(-tD) \circ \iota.$$

Portanto, π_s é um homomorfismo.

(c) Note que $\pi_s(s) = s - (Ds)s = 0$. Logo, $\pi_s(sB) = 0$.

Reciprocamente, seja $f \in B$, se $\pi_s(f) = 0$, como $\pi_s(f) = f + sb$, para algum $b \in B$, concluímos que $f \in sB$.

Logo, $\ker(\pi_s) = sB = sB \cap B$, quando $Ds = 1$.

(d) Como, em $B[t]$, $\ker D = A[t]$, π_s se estende a um homomorfismo $\pi_s : B[t] \rightarrow A[t]$. Defina o homomorfismo $\phi : B \rightarrow A[s]$ por $\phi = \varepsilon \circ \pi_s \circ \exp(tD) \circ \iota$, ou seja,

$$\phi(g) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \pi_s(D^n g) s^n.$$

Note que, como $\phi(a) = a$, $a \in A$, e $\phi(s) = s$, ϕ é sobrejetora. Resta mostrar que ϕ é injetora, para isso vamos verificar que $\ker \phi = \{0\}$. Seja $g \in \ker \phi$, ou seja, $\phi(g) = 0$. Como s é transcendente sobre A , segue que cada coeficiente de $\phi(g) \in A[s]$ é zero. Se $g \neq 0$, o coeficiente de maior grau de $\phi(g)$ é $\frac{1}{n!} \pi_s(D^n g)$, onde $n = \nu_D(g) \geq 0$, e, pelo observado anteriormente, $\frac{1}{n!} \pi_s(D^n g) = 0$. Logo, $D^n g \in \ker \pi_s = sB$ e como $D^n g \in A - \{0\}$ concluímos que $s \in A$ (pois A é fatorialmente fechado). Mas $s \notin A$, portanto $g = 0$.

Portanto, ϕ é um isomorfismo e (d) está mostrado.

Assim, concluímos a demonstração de (a) - (d) no caso especial em que $Ds = 1$.

Caso geral: Suponha que $Dr = f \in A$, $f \neq 0$.

Denote por D_f a extensão de D para B_f . Então $s := \frac{r}{f}$ é uma “slice” de D_f .

Como $\pi_r = \pi_s|_B$, onde $\pi_s : B_f \rightarrow B_f$ é um homomorfismo, segue que π_r é um homomorfismo.

O núcleo é $sB_f \cap B = rB_f \cap B$ e $B_f = A_f[s] = A_f[r]$.

Portanto, (a) - (d) valem também para o caso geral.

(e) Segue imediatamente de (d). ■

A seguir, alguns corolários importantes desse resultado.

Corolário 2.5. (Teorema da “slice”) *Suponha que $D \in \text{LND}(B)$ admita uma “slice” $s \in B$ e seja $A = \ker D$. Então*

(a) $B = A[s]$ e $D = \frac{d}{ds}$.

(b) $A = \pi_s(B)$ e $\ker \pi_s = sB$.

(c) Se B é afim, então A é afim.

Demonstração:

As demonstrações dos itens (a) e (b) seguem diretamente do Princípio anterior.

(c) Considere a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow sB \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0.$$

Logo $A \cong \frac{B}{sB}$ é afim, pois quociente de álgebras afins é afim. ■

Corolário 2.6. *Seja B um k -domínio comutativo e seja $D \in \text{LND}(B)$. Denote por δ a extensão de D a uma derivação no corpo $\text{Frac}(B)$ (se $D \neq 0$, δ não é localmente nilpotente). Então $\ker \delta = \text{Frac}(\ker D)$.*

Demonstração:

Seja $A = \ker D$. Se r é uma “local slice” de D e $f = Dr$, então $B \subset B_f = A_f[r]$. Temos então $\text{Frac}(B) \subseteq \text{Frac}(A)(r) \subseteq \text{Frac}(B)$, o que implica que $\text{Frac}(B) = \text{Frac}(A)(r)$.

Agora, seja $g \in \text{Frac}(B)$ onde $\delta g = 0$, isto é, $g \in \ker \delta$, e escreva $g = P(r)$ para a função racional P com coeficientes em $\text{Frac}(A)$. Então $0 = P'(r)\delta r$ e, como $\delta r \neq 0$ (pois estende D e $Dr \neq 0$), $P'(r) = 0$. Logo, $g = P(r) \in \text{Frac}(A)$ o que mostra que $\ker \delta \subset \text{Frac}(\ker D)$.

Para a outra inclusão, seja $\xi = \frac{a}{b} \in \text{Frac}(\ker D)$. Temos que

$$\delta(\xi) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2} = 0.$$

■

Corolário 2.7. *Se S é um k -domínio comutativo tal que $\text{tr.deg}_k S = 1$ e $\text{LND}(S) \neq \{0\}$, então $S = K^{[1]}$, onde K é um corpo algébrico sobre k . Além disso, se k é algebricamente fechado, $S = k^{[1]}$.*

Demonstração:

Suponha $\delta \in \text{LND}(S)$ não nula e seja $K = \ker \delta$.

Afirmção: K é corpo.

De fato, note que $k \subset K \subset S$, onde $\text{tr.deg}_k S = 1$ (pois, caso fosse zero, teríamos $\delta \equiv 0$). Logo, $\text{tr.deg}_k K = 0$, isto é, K é uma extensão integral de k .

Seja $b \in K$, então existe $p(x) \in k[x]$ minimal tal que

$$p(b) = b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_j \in k, \quad a_0 \neq 0.$$

Assim,

$$b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) = -a_0$$

e então

$$\frac{1}{b} = (b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) \left(-\frac{1}{a_0} \right),$$

onde $(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1) \in K$ e $\left(-\frac{1}{a_0} \right) \in k$. Logo, $\frac{1}{b} \in K$.

Se $r \in S$ é uma “local slice” de δ , então $\delta r \in K^*$, e assim, $s = (\delta r)^{-1}r$ é uma “slice” de δ . Logo, pelo Corolário 2.5, $S = K[s]$. ■

Corolário 2.8. *Dada $D \in \text{LND}(B)$, sejam $L = \text{Frac}(B)$ e $K = \text{Frac}(A)$, onde $A = B^D = \ker D$. Se $b \in B$ e $b \notin A$, então $\nu_D(b) = [L : K(b)]$.*

Demonstração:

Afirmção: Podemos escrever $b = f(s) \in K[s]$.

De fato, como $D \in \text{LND}(B)$ e $b \notin A$, existe $n \geq 1$ tal que $D^{n+1}(b) = 0$. Tome $p = D^{n-1}(b)$ e $d = D^n(b)$, assim $d \in A$.

Agora, seja $\tilde{B} := B[d^{-1}]$ e $s := \frac{p}{d}$.

Podemos estender a derivação D unicamente sobre $\tilde{B}$ (continuaremos chamando de D) e teremos que $D \in \text{LND}(\tilde{B})$.

Note que

$$D(s) = \frac{D(p)}{d} = 1,$$

ou seja, D tem uma “slice” em $\tilde{B}$. Mais ainda, podemos verificar que $\tilde{B}^D = A[d^{-1}]$.

Assim, pelo Corolário 2.5, temos $\tilde{B} = A[d^{-1}][s]$ e $D = \frac{d}{ds}$ em $\tilde{B}$.

Logo, como $Db \neq 0$, podemos escrever $b = f(s) \in A[d^{-1}][s] \subset K[s]$.

Agora, seja $\deg_T f(T) = l \geq 1$.

Como $D = \frac{d}{ds}$ em $K[s]$, temos que $\nu_D(b) = l$ (pois $D^{l+1}(b) = 0$).

Por outro lado,

$$[L : K(b)] = [K(s) : K(f(s))] = l.$$

Portanto, $\nu_D(b) = [L : K(b)]$. ■

Princípio 12. *Suponha que $D, E \in \text{LND}(B)$ são tais que $A := \ker D = \ker E$. Então existem $a, b \in A$ não nulos tais que $aD = bE$.*

Demonstração:

Podemos assumir $D, E \neq 0$.

Pelo Princípio 11 (d), existe $c \in A$ não nulo e $t \in B$ tal que $B_c = A_c[t]$. Pelo Princípio 9, $\ker(D_c) = \ker(E_c) = A_c$. Assim, pelo Princípio 8, $D_c = \beta \frac{d}{dt}$ e $E_c = \alpha \frac{d}{dt}$, para algum $\alpha, \beta \in A_c$. Consequentemente, $\alpha D_c = \beta E_c$.

Escolha $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a := c^n \alpha$ e $b := c^n \beta$ pertencem a A . Logo, $aD_c = bE_c$. Restringindo a B , segue o resultado. ■

O Princípio a seguir é um dos resultados mais importantes e será usado fortemente no contraexemplo do 14º Problema de Hilbert, dado no Capítulo 3 deste trabalho.

Princípio 13. *Seja A uma subálgebra de B ($A \neq B$), $S = A - \{0\}$ e $K = S^{-1}A$ o corpo de frações de A . Considere as seguintes afirmações*

1. $A = \ker D$, para algum $D \in \text{LND}(B)$.
 2. $S^{-1}B = K^{[1]} = K[r]$, para alguma “local slice” $r \in B$, e $A = K \cap B$.
- Temos que (1) $\Rightarrow$ (2). Se B é finitamente gerado sobre A , então (2) $\Rightarrow$ (1).*

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Primeiramente mostraremos que $S^{-1}B = K^{[1]} = K[r]$, onde $r \in B$ é uma “local slice”.

Sabemos que $K \subseteq S^{-1}B$ e $r \in B \subseteq S^{-1}B$. Assim, como $S^{-1}B$ é um anel

$$K[r] \subseteq S^{-1}B.$$

Por outro lado, pelo Princípio 11 (b), sabemos que $B_{Dr} = A_{Dr}[r]$. Seja $\xi \in S^{-1}B$,

então

$$\xi = \frac{b}{a} = \frac{1}{a}b, \quad b \in B, \quad a \in A, \quad a \neq 0.$$

Como $b \in B \subseteq B_{Dr}$, podemos escrever

$$b = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 r + \cdots + \alpha_l r^l}{(Dr)^n}, \quad \alpha_i \in A, \quad Dr \in A.$$

Assim,

$$\xi = \frac{b}{a} = \frac{\alpha_0}{a(Dr)^n} + \frac{\alpha_1}{a(Dr)^n}r + \cdots + \frac{\alpha_l}{a(Dr)^n}r^l \in K[r].$$

Logo, $S^{-1}B \subseteq K[r]$. E portanto, $S^{-1}B = K[r]$.

Resta agora mostrar que $A = K \cap B = \text{Frac}(A) \cap B$. Basta mostrar que $K \cap B \subseteq A$ (pois a outra inclusão é clara). De fato, isso vale pois, pelo Princípio 9, temos que

$$K = S^{-1}A = S^{-1}(\ker D) = \ker(S^{-1}D)$$

e então

$$K \cap B = \ker(S^{-1}D) \cap B \subseteq A,$$

onde essa última inclusão vale pois

$$b \in \ker(S^{-1}D) \cap B \Rightarrow S^{-1}D(b) \stackrel{b \in B}{=} D(b) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Reciprocamente, assuma que (2) vale e que $B = A[b_1, \dots, b_n]$, com $b_i \in B$. Como $\frac{d}{dt}(b_i) \in K[t]$ para cada i , existe $s \in S$ tal que $s\frac{d}{dt}(B) \subset B$.

Como $s \in K$, $s\frac{d}{dt}$ é localmente nilpotente. Seja $D = s\frac{d}{dt}|_B$, então D é localmente nilpotente e

$$\ker D = B \cap \ker \left(s\frac{d}{dt} \right) \stackrel{(*)}{=} B \cap K = A$$

onde $(*)$ vale, já que sabemos que $\ker \left(\frac{d}{dt} \right) = K$, pois $\frac{d}{dt}(t) = 1$ e $\frac{d}{dt}(K) = 0$. ■

Princípio 14. Suponha que $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ é um anel graduado e seja $D \in \text{LND}(B)$ dada. Suponha que, para inteiros $m \leq n$, D admite uma decomposição $D = \sum_{m \leq i \leq n} D_i$, onde cada

$D_i \in \text{Der}_k(B)$ é homogênea de grau i relativa à sua graduação, e onde $D_m \neq 0$ e $D_n \neq 0$. Então,

(a) $D_m, D_n \in \text{LND}(B)$.

(b) Se $f \in \ker D$ e $f = \sum_{u \leq i \leq v} f_i$, para $f_i \in B_i$, então $f_u \in \ker D_m$ e $f_v \in \ker D_n$.

Demonstração:

(a) Dado $t \in \mathbb{Z}_+$, a função D^t é a soma de funções da forma $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_t}$, onde $m \leq i_j \leq n$ para cada j . Em particular, cada “monômio” é uma função homogênea em B e o maior grau somado aparecendo em D^t é $(D_n)^t$.

Suponha que $F \in B$ é homogêneo mas não nulo e seja $t = \nu_D(F) + 1 \geq 1$. Então, o maior grau do somando homogêneo de $D^t F$ é igual a $(D_n)^t F$, e como $D_t F = 0$, segue que $(D_n)^t F = 0$.

Logo, a subálgebra $\text{Nil}(D_n)$ contém todos os elementos homogêneos de B e segue que $\text{Nil}(D_n) = B$.

Analogamente, o menor grau do somando homogêneo de $D^t F$ é $(D_m)^t F = 0$, o que implica que D_m é localmente nilpotente.

(b) Como $f \in \ker D$, temos

$$0 = Df = \sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ u \leq j \leq v}} D_i f_j$$

Cada termo $D_i f_j$ é homogêneo e o grau de $D_n f_v$ excede o de qualquer outro termo. Logo, $D_n f_v = 0$.

Da mesma forma, o termo de menor grau é $D_m f_u$, que também deve ser zero. ■

Princípio 15. Seja $B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ uma $\mathbb{Z}$ -filtração própria e suponha que $D \in \text{LND}(B)$ seja uma derivação que respeita essa filtração. Então, $\text{gr}(D) \in \text{LND}(\text{Gr}(B))$.

Demonstração:

Podemos assumir que $D \neq 0$.

Denotemos por δ a derivação $\text{gr}(D)$ em $\text{Gr}(B)$, e por ρ a aplicação natural de B em $\text{Gr}(B)$ que, como já vimos, leva $a \in B$, $a \neq 0$, na sua classe em $\frac{B_i}{B_{i-1}}$, onde $i = \iota(a)$ e $\rho(0) = 0$.

É suficiente mostrar que δ é localmente nilpotente nos conjuntos geradores $\frac{B_i}{B_{i-1}}$ de $\text{Gr}(B)$.

Como D respeita a filtração, podemos considerar o mesmo inteiro t tal que $DB_i \subset B_{i+t}$ para todo i . Dado $a \in B$ não nulo, seja $\iota(a) = i$, o que significa que $a \in B_i \setminus B_{i-1}$. Por hipótese, $Da \in B_{i+t}$ e então, $\iota(Da) \leq i + t$.

Se $\iota(Da) < i + t$, então $Da \in B_{i+t-1}$ e

$$\delta(a + B_{i-1}) = Da + B_{i+t-1} = 0.$$

Se $\iota(Da) = i + t$, temos

$$\delta(\rho(a)) = \delta(a + B_{i-1}) = Da + B_{i+t-1} = \rho(Da).$$

Por interação, temos

$$\delta^n(\rho(a)) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta^n(\rho(a)) = \rho(D^n a).$$

Como $D \in \text{LND}(B)$, concluímos que $\delta^{n+1}(\rho(a)) = 0$, para $n = \nu_D(a)$. ■

Um contraexemplo para o 14^o

Problema de Hilbert

Como dito anteriormente, em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, David Hilbert apresentou uma lista com 23 problemas. Dentre esses problemas, estava o enunciado a seguir.

14^o Problema de Hilbert: Seja k um corpo, $k[x] := k[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre k e $k(x)$ seu corpo de frações. Considere L tal que $k \subseteq L \subseteq k(x)$. Pergunta-se: o anel $L \cap k[x]$ é uma k -álgebra finitamente gerada?

O objetivo deste capítulo é estudar um contraexemplo para o caso em que $n = 5$, baseado no trabalho de Arno Van Den Essen ([6]).

3.1 O resultado

No decorrer do capítulo, usaremos as seguintes notações: k é sempre um corpo de característica zero,

$$B := k[X, S, T, U, V],$$

$$D_0 := X^3 \partial_S + S \partial_T + T \partial_U,$$

$$D := D_0 + X^2 \partial_V = X^3 \partial_S + S \partial_T + T \partial_U + X^2 \partial_V.$$

Além disso,

$$A := k[S, T, U],$$

$$D_1 := \partial_S + S\partial_T + T\partial_U.$$

Consideraremos D e D_0 como derivações em B e D_1 como uma derivação em A . Note que D , D_0 e D_1 são derivações triangulares e, portanto, são localmente nilpotentes.

Nosso objetivo é mostrar o seguinte Teorema, feito inicialmente por Daigle e Freudenburg em [4]:

Teorema (Daigle - Freudenburg): B^D não é uma k -álgebra finitamente gerada.

Lembre-se que $B^D = \ker D$ e B^D é uma subálgebra de B . Seja $L = \text{Frac}(B^D)$, com $k \subset L \subset k(X, S, T, U, V)$. Sendo assim, pela implicação (1) $\Rightarrow$ (2) do Princípio 13, $B^D = L \cap B$. Logo, mostrando o Teorema, obtemos um contraexemplo para o 14º Problema de Hilbert.

Para demonstrar o Teorema, precisaremos da seguinte Proposição.

Proposição 3.1. *Seja $e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a aplicação definida por $e(3l) = 2l$ e $e(3l + 1) = e(3l + 2) = 2l + 1$, para todo $l \geq 0$. Então existem $c_0 = 1, c_1, c_2, \dots$ em A com $D_1 c_i = c_{i-1}$ e $\deg c_i \leq e(i)$, para todo i .*

Demonstração:

Tome

$$T_1 := T - \frac{1}{2}S^2$$

e

$$U_1 := U - ST + \frac{1}{3}S^3.$$

Então $A = k[T_1, U_1][S]$. De fato, a inclusão $k[T_1, U_1][S] \subseteq A$ é imediata, falta mostrar que $A \subseteq k[T_1, U_1][S]$. Isso acontece pois

$$T = T_1 + \frac{1}{2}S^2 \in k[T_1, U_1][S]$$

e

$$U = U_1 + ST - \frac{1}{3}S^3 \in k[T_1, U_1][S].$$

Agora, note que

$$D_1 T_1 = (\partial_S + S\partial_T + T\partial_U)(T - \frac{1}{2}S^2) = S - \frac{1}{2}2S = 0,$$

$$D_1 U_1 = (\partial_S + S\partial_T + T\partial_U)(U - ST + \frac{1}{3}S^3) = T - T + S(-S) + \frac{1}{3}3S^2 = 0$$

e

$$D_1 S = (\partial_S + S\partial_T + T\partial_U)(S) = 1.$$

Assim, $\ker D_1 = A^{D_1} \supseteq k[T_1, U_1]$. Por outro lado, seja $\xi \in \ker D_1 \subset k[T_1, U_1][S]$ tal que

$$\xi = \sum_{i \geq 0} (l_i(T_1, U_1)) S^i.$$

Temos

$$0 = D_1(\xi) = \sum_{i \geq 1} i l_i(T_1, U_1) S^{i-1}.$$

Então $l_i(T_1, U_1) = 0$ para $i \geq 1$. Logo, $\xi = l_0(T_1, U_1) \in k[T_1, U_1]$, mostrando que $\ker D_1 = A^{D_1} \subseteq k[T_1, U_1]$.

Portanto, $\ker D_1 = A^{D_1} = k[T_1, U_1]$.

Em $A = k[S, T, U]$ usaremos duas graduações. A graduação usual, denotada por $\deg f$, para $f \in A$, $f \neq 0$, e uma outra graduação definida por

$$w(S) = 1, \quad w(T) = 2 \quad \text{e} \quad w(U) = 3.$$

Essa graduação denotaremos por $w\text{-deg } f$, para $f \in A$, $f \neq 0$.

Seja A_n o k -espaço vetorial gerado por todos os elementos de w -grau n , ou seja,

$$A_n = \langle S^a T^b U^c \rangle_k$$

com $a + 2b + 3c = n$.

Note que $T_1 \in A_2$ e $U_1 \in A_3$.

Afirmção: $D_1(A_n) \subset A_{n-1}$.

De fato, note primeiramente que $D_1 S = 1$, $D_1 T = S$ e $D_1 U = T$. Agora, seja $x \in A_n$,

então

$$x = \sum_i k_i S^{a_i} T^{b_i} U^{d_i},$$

com $a_i + 2b_i + 3d_i = n$. Pela linearidade de D_1 , basta considerar $x = S^a T^b U^c$, com $a + 2b + 3c = n$.

Temos

$$\begin{aligned} D_1 x &= D_1(S^a T^b U^c) = S^a T^b D_1 U^c + S^a U^c D_1 T^b + T^b U^c D_1 S^a \\ &= S^a T^b c U^{c-1} D_1 U + S^a U^c b T^{b-1} D_1 T + T^b U^c a S^{a-1} D_1 S \\ &= c S^a T^{b+1} U^{c-1} + b S^{a+1} U^c T^{b-1} + a T^b U^c S^{a-1} \end{aligned}$$

que pertence a A_{n-1} , pois

$$a + 2(b+1) + 3(c-1) = a + 1 + 2(b-1) + 3c = a - 1 + 2b + 3c = n - 1.$$

Agora vamos construir $c_n \in A_n$ satisfazendo a desigualdade desejada. Faremos isso por indução. Tome $c_0 = 1$, então $\deg c_0 = 0 \leq e(1) = 1$. Agora suponha válido que $\deg c_n \leq e(n)$.

Como $A = A^{D_1}[S]$ e $c_n \in A_n$, podemos escrever

$$c_n = \sum_{i=0}^n H_{n-i} S^i, \quad \text{com} \quad H_{n-i} \in A_{n-i} \cap A^{D_1}, \quad \text{já que} \quad S \in A_1.$$

Sendo assim definimos

$$\tilde{c}_{n+1} := \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} H_{n-i} S^{i+1} = \int c_n dS \in A_{n+1}.$$

Temos então que $D_1(\tilde{c}_{n+1}) = c_n$.

Por hipótese de indução, temos que $\deg D_1(\tilde{c}_{n+1}) = \deg c_n \leq e(n)$. Então, pelo Lema 3.2 que será demonstrado a seguir, existe $h \in A_{n+1} \cap A^{D_1}$ tal que

$$\deg(\tilde{c}_{n+1} - h) \leq e(n+1).$$

Tome

$$c_{n+1} := \tilde{c}_{n+1} - h$$

e teremos

$$D_1(c_{n+1}) = D_1(\tilde{c}_{n+1}) = c_n$$

com $\deg(c_{n+1}) \leq e(n+1)$. ■

Lema 3.2. *Se $f \in A_{n+1}$ é tal que $\deg D_1 f \leq e(n)$, então existe $h \in A_{n+1} \cap A^{D_1}$ tal que $\deg(f - h) \leq e(n+1)$.*

Demonstração:

Dividiremos o problema em três casos: $n = 3l$, $n = 3l+1$ e $n = 3l+2$. Faremos apenas o caso $n = 3l$, já que nos outros dois as contas são as mesmas, a menos de constantes.

1º passo: Seja $n = 3l$ e M o subespaço gerado sobre k por todos os polinômios $f \in A_{n+1}$ tal que $\deg D_1 f \leq 2l = e(n)$.

Seja $f \in A_{n+1}$ qualquer e escreva

$$f = \sum \alpha_{ijk} S^i T^j U^k, \quad i, j, k \geq 0$$

com $i + 2j + 3k = n + 1 = 3l + 1$ e $\alpha_{ijk} \in k$. Então

$$\begin{aligned} D_1 f &= \sum \alpha_{ijk} D_1(S^i T^j U^k) \\ &= \sum \alpha_{ijk} [i S^{i-1} T^j U^k + j S^{i+1} T^{j-1} U^k + k S^i T^{j+1} U^{k-1}] \\ &= \sum_{i+2j+3k=3l+1} [i \alpha_{ijk} + (j+1) \alpha_{i-2, j+1, k} + (k+1) \alpha_{i-1, j-1, k+1}] S^{i-1} T^j U^k. \end{aligned}$$

Assim, $\deg D_1 f \leq 2l$ se, e somente se,

$$i \alpha_{ijk} + (j+1) \alpha_{i-2, j+1, k} + (k+1) \alpha_{i-1, j-1, k+1} = 0 \tag{3.1}$$

para todo i, j, k satisfazendo $i + 2j + 3k = 3l + 1$ e

$$(i-1) + j + k \geq 2l + 1, \quad \text{isto é,} \quad i + j + k \geq 2l + 2.$$

Note que devemos sempre ter que $i > 0$, pois caso $i = 0$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2j + 3k = 3l + 1 \\ j + k \geq 2l + 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2j = 3l + 1 - 3k \\ 2k \geq 4l + 4 - 2j \end{cases} \\ \Rightarrow 2k \geq 4l + 4 - 3l - 1 + 3k &\Rightarrow k \leq -l - 3 < 0. \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Assim, por (3.1), cada α_{ijk} é uma combinação linear de α_{pqr} , com $p + q + r < i + j + k$. Podemos repetir esse argumento até termos que

$$p + q + r = 2l + 2.$$

De fato, é nesse ponto em que acabam os coeficientes dos termos de $D_1 f$ que são nulos (os coeficientes cujo grau ultrapassaria $2l$), logo não é mais possível repetir o argumento.

Assim, cada α_{ijk} é uma combinação de α_{pqr} 's satisfazendo $p + q + r = 2l + 2$.

Afirmção 1: Existem $\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1$ elementos α_{pqr} 's nas condições acima, ou seja, com p, q e r satisfazendo

$$(*) : \begin{cases} p + q + r = 2l + 2 \\ p + 2q + 3r = 3l + 1 \end{cases}$$

De fato, resolvendo o sistema, temos

$$q + 2r = l - 1$$

e assim, $q = l - 1 - 2r$.

Note que $0 \leq q \leq l - 1$, então

$$0 \leq l - 1 - 2r \leq l - 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{l-1}{2}.$$

Como $r \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq r \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor.$$

Logo, existem $\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1$ soluções para p, q e r .

Seja $g \in A$, defina $\pi(g)$ como a soma de todos os monômios de g de grau maior ou igual a $2l+2$. Dessa forma,

$$\pi(M) = \langle S^p T^q U^r \rangle_k$$

onde p, q e r satisfazem o sistema (*). Pela Afirmação 1,

$$\dim \pi(M) \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1. \quad (3.2)$$

2º passo: Tome $N := A^{D_1} \cap A_{n+1}$.

Afirmação 2: $N = \langle n_p \rangle_k$, onde $n_p := T_1^{3p+2} U_1^{l-(2p+1)}$ e $0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$. Lembre-se que $T_1 := T - \frac{1}{2}S^2$ e $U_1 := U - ST + \frac{1}{3}S^3$.

Vamos mostrar as duas inclusões.

“ $\supseteq$ ” Vale, pois $T_1 \in A_2$ e $U_1 \in A_3$ e

$$2(3p+2) + 3[l - (2p+1)] = 3l + 1 = n + 1$$

então $n_p \in A_{n+1}$. Além disso,

$$\begin{aligned} D_1(n_p) &= D_1(T_1^{3p+2} U_1^{l-(2p+1)}) \\ &= (3p+2)T_1^{3p+1} D_1(T_1) U_1^{l-(2p+1)} + (l-2p-1)U_1^{l-(2p+2)} D_1(U_1) T_1^{3p+2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $T_1, U_1 \in A^{D_1}$.

Logo, $n_p \in N$.

“ $\subseteq$ ” Seja $\alpha \in N$, então $\alpha = \sum \alpha_i T_1^{\beta_i} U_1^{\gamma_i}$ com $\alpha_i \in k$ e $2\beta_i + 3\gamma_i = n+1 = 3l+1$, para todo i . Vamos mostrar que

$$T_1^\beta U_1^\gamma \in \langle n_p \rangle_k, \quad \text{com } 2\beta + 3\gamma = 3l + 1.$$

De fato, temos

$$2\beta \equiv 1 \pmod{3} \quad \Rightarrow \quad \beta \equiv 2 \pmod{3}.$$

Logo, $\beta = 3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$2\beta + 3\gamma = 2(3p + 2) + 3\gamma = 3l + 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = l - (2p + 1).$$

E $\gamma \geq 0$ se, e somente se, $p \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$.

Portanto,

$$T_1^\beta U_1^\gamma = T_1^{3p+2} U_1^{l-(2p+1)} \in \langle n_p \rangle_k, \quad 0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$$

Afirmção 3: Os $\pi(n_p)$ são linearmente independentes sobre k .

Ao mostrarmos essa afirmação, teremos que

$$\dim \pi(N) = \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Assim, por (3.2), $\dim \pi(M) \leq \dim \pi(N)$.

Por outro lado, $N \subseteq M$ e então $\pi(N) \subseteq \pi(M)$.

Logo, segue que

$$\pi(M) = \pi(N).$$

Sendo assim, dado $f \in M$, existe $h \in N := A^{D_1} \cap A_{n+1}$ tal que

$$\deg(f - h) \leq e(n+1) = 2l+1,$$

pois as partes de grau maior ou igual a $2l+2$ são iguais em M e N , o que prova o Lema.

3º passo: Prova da Afirmção 3.

Para isso, note que

$$n_p|_{T=0, U=\frac{1}{3}S} = \left(-\frac{1}{2}S^2\right)^{3p+2} \left(\frac{1}{3}(S + S^3)\right)^{l-(2p+1)}$$

Assim, tome

$$w_p := (-2)^{3p+2} 3^{l-(2p+1)} \pi(n_p|_{T=0, U=\frac{1}{3}S}) = \pi((S^2)^{3p+2}(S + S^3)^{l-(2p+1)}).$$

Observe que

$$\begin{aligned} (S^2)^{3p+2}(S + S^3)^{l-(2p+1)} &= S^{6p+4} \sum_{j=0}^{l-(2p+1)} \binom{l-(2p+1)}{j} S^j S^{3[l-(2p+1)-j]} \\ &= \sum_{j=0}^{l-(2p+1)} \binom{l-(2p+1)}{j} S^{3l+1-2j}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 3l+1-2j \geq 2l+2 &\Leftrightarrow \frac{l-1}{2} \geq j \\ &\stackrel{j \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$w_p = \pi((S^2)^{3p+2}(S + S^3)^{l-(2p+1)}) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor} \binom{l-(2p+1)}{j} S^{3l+1-2j}.$$

Note que, $\pi(n_p)$ são linearmente independentes sobre k se, e somente se, w_p são linearmente independentes. De fato, w_p e $\pi(n_p)$ diferem por um escalar não nulo.

Sendo assim, basta mostrar que

$$\det \left(\binom{l-(2p+1)}{j} \right)_{0 \leq p, j \leq \lfloor (l-1)/2 \rfloor} \neq 0.$$

De fato, como esse é, a menos de troca de linhas, um determinante “retirado” do Triângulo de Pascal, sabe-se que é não nulo (ver [1], Capítulo 25).

Logo, segue a independência linear de w_p e, portanto, de $\pi(n_p)$. ■

Teorema 3.3. (*Daigle - Freudenburg*) $B^D = \ker D$ não é uma k -álgebra finitamente gerada.

Demonstração:

Primeiramente vale lembrar que

$$D_0 := X^3 \partial_S + S \partial_T + T \partial_U$$

e

$$D := D_0 + X^2 \partial_V.$$

1º passo: Defina

$$a_i := X^{2i+1} c_i \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right), \quad i \geq 0.$$

Vamos mostrar que a_i é um polinômio em $k[X, S, T, U]$, ou seja, que não tem X em seu denominador. Para isso, precisamos mostrar que

$$3 \deg c_i \leq 2i + 1.$$

De fato, seja $i = 3l + \alpha$, onde $\alpha = 0, 1$ ou 2 . Então $l = \frac{i - \alpha}{3}$. Assim,

$$\deg c_i \leq e(i) = \begin{cases} 2 \left(\frac{i}{3} \right), & \text{se } \alpha = 0 \\ 2 \left(\frac{i-1}{3} \right) + 1, & \text{se } \alpha = 1 \\ 2 \left(\frac{i-2}{3} \right) + 1, & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}.$$

Então,

$$3 \deg c_i \leq \begin{cases} 3 \cdot 2 \left(\frac{i}{3} \right) = 2i \leq 2i + 1, & \text{se } \alpha = 0 \\ 3 \cdot 2 \left(\frac{i-1}{3} \right) + 3 = 2i - 2 + 3 = 2i + 1, & \text{se } \alpha = 1 \\ 3 \cdot 2 \left(\frac{i-2}{3} \right) + 3 = 2i - 4 + 3 = 2i - 1 \leq 2i + 1, & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}.$$

Portanto,

$$a_i \in k[X, S, T, U], \quad i \geq 0.$$

2º passo: Verificar que

$$D_0 a_i = X^2 a_{i-1}, \quad \forall i \geq 1.$$

Note que

$$X^2 a_{i-1} = X^2 \cdot X^{2i-1} c_{i-1} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) = X^{2i+1} c_{i-1} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right).$$

Assim, como $D_0 a_i = X^{2i+1} D_0 c_i \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right)$, mostrar o que queremos é equivalente a mostrar que

$$D_0 c_i \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) = c_{i-1} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right). \quad (3.3)$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} D_0 c_i \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) &= D_0 \left(\frac{S}{X^3} \right) \partial_{S c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) + D_0 \left(\frac{T}{X^3} \right) \partial_{T c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) \\ &+ D_0 \left(\frac{U}{X^3} \right) \partial_{U c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) \\ &= \partial_{S c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) + \frac{S}{X^3} \partial_{T c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) \\ &+ \frac{T}{X^3} \partial_{U c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição anterior,

$$\begin{aligned} c_{i-1}(S, T, U) &= D_1 c_i(S, T, U) \\ &= \partial_{S c_i}(S, T, U) + S \partial_{T c_i}(S, T, U) + T \partial_{U c_i}(S, T, U). \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{i-1} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) = \partial_{S c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) + \frac{S}{X^3} \partial_{T c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right) + \frac{T}{X^3} \partial_{U c_i} \left(\frac{S}{X^3}, \frac{T}{X^3}, \frac{U}{X^3} \right).$$

Logo, temos a igualdade que queríamos em (3.3).

Portanto, temos que

$$D_0 a_i = X^2 a_{i-1}, \quad \forall i \geq 1.$$

3º passo: Verificar que

$$F_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_i V^{n-i} \in \ker D, \quad n \geq 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} DF_n &= D_0 F_n + X^2 \partial_V F_n \\ &= V^n D_0 a_0 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} V^{n-i} D_0 a_i + X^2 \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_i \partial_V V^{n-i} \\ &= V^n D_0 X + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} V^{n-i} X^2 a_{i-1} + X^2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_i (n-i) V^{n-i-1} \\ &= X^2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_{i-1} V^{n-i} + X^2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{n!}{(n-i-1)!} a_i V^{n-i-1} \\ &= X^2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_{i-1} V^{n-i} + X^2 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{n!}{(n-i)!} a_{i-1} V^{n-i} \\ &= X^2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_{i-1} V^{n-i} - X^2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} a_{i-1} V^{n-i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4º passo: Mostrar que, de fato, o núcleo não é finitamente gerado.

Suponha que $\ker D \subseteq k[X, S, T, U, V]$ é finitamente gerado por $g_1, \dots, g_s$ sobre k , isto é, $\ker D = k[g_1, \dots, g_s]$. Note que, podemos supor que $g_i(0) = 0$, para todo i , pois se $g_i(0) \neq 0$ podemos substituir g_i por $g_i - g_i(0)$.

Escreva $g_i = \sum_j g_{ij} V^j$, com $g_{ij} \in k[X, S, T, U]$.

Afirmção: $g_{ij} \in (X, S, T, U)$, para todo i e j .

Para isso, basta mostrarmos que se $g = \sum h_j V^j \in \ker D$ satisfaz $g(0) = 0$, então, para cada j , $h_j \in (X, S, T, U)$.

Como $g(0) = 0$ temos claramente que $h_0 \in (X, S, T, U)$.

Suponha então $j \geq 1$.

Como $Dg = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 0 &= Dg = D\left(\sum_{j \geq 0} h_j V^j\right) = Dh_0 + \sum_{j \geq 1} [h_j DV^j + (Dh_j)V^j] \\
 &= D_0 h_0 + \sum_{j \geq 1} [jh_j X^2 V^{j-1} + (D_0 h_j)V^j] \\
 &= D_0 h_0 + h_1 X^2 + (D_0 h_1 + 2h_2 X^2)V + (D_0 h_2 + 3h_3 X^2)V^2 + (D_0 h_3 + 4h_4 X^2)V^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Igualando termo a termo a zero,

$$D_0 h_{j-1} + jh_j X^2 = 0,$$

o que implica

$$jh_j X^2 = D_0(-h_{j-1}), \quad j \geq 1.$$

Logo,

$$jh_j X^2 = D_0(-h_{j-1}) \in D_0(k[X, S, T, U]) \stackrel{(*)}{\subseteq} (X^3, S, T), \quad \forall j \geq 1, \quad (3.4)$$

onde $(*)$ vale pela forma que definimos D_0 .

Se $h_j(0) \neq 0$, então

$$h_j = \alpha_0 + \sum_I \alpha_I X^{i_1} S^{i_2} T^{i_3} U^{i_4}, \quad \text{com } \alpha_0 \neq 0.$$

Assim,

$$X^2 h_j = \alpha_0 X^2 + \sum_I \alpha_I X^{i_1+2} S^{i_2} T^{i_3} U^{i_4}.$$

Como por (3.4), $X^2 h_j \equiv 0 \pmod{(X^3, S, T)}$, então

$$\alpha_0 X^2 + \gamma X^2 U \in (X^3, S, T)$$

com $\gamma \in k[X, S, T, U]$. Logo, $\alpha_0 X^2 \in (X^3, S, T, X^2 U)$ e como $\alpha_0 \neq 0$, temos que

$$X^2 \in (X^3, S, T, X^2 U),$$

o que é um absurdo!

Logo, $h_j(0) = 0$, isto é, $h_j \in (X, S, T, U)$.

Assim, pela afirmação, $g_{ij} \in (X, S, T, U)$, para todo i e j .

Tome d como o máximo dos graus em V em todas as g_i . Considere

$$\begin{aligned} F_{d+1} &= \sum_{i=0}^{d+1} (-1)^i \frac{(d+1)!}{(d+1-i)!} a_i V^{d+1-i} \\ &= a_0 V^{d+1} - (d+1)a_1 V^d + (d+1)da_2 V^{d-1} + \dots \\ &= XV^{d+1} + \text{termos de grau menor em } V. \end{aligned}$$

Lembramos que $F_{d+1} \in \ker D = k[g_1, \dots, g_s]$.

Como d é o máximo dos graus em V , devemos ter que X (que é o coeficiente de V^{d+1}) deve ser produto de pelo menos dois g_{ij} , caso contrário, d não seria o maior grau, e sim $d+1$. Logo, temos que $X \in (X, S, T, U)^2$, o que é um absurdo.

Portanto, $\ker D$ não é uma k -álgebra finitamente gerada. ■

Uma demonstração do 14º Problema de Hilbert para o caso $n = 1$

Como foi citado na introdução deste trabalho, o 14º Problema de Hilbert possui uma resposta afirmativa para os casos $n = 1$ e $n = 2$. Neste apêndice faremos a demonstração do problema para o caso $n = 1$. Para isso, precisaremos de um Teorema, uma Proposição e, finalmente, do resultado enunciado na conclusão, todos enunciados e demonstrados a seguir.

Lembrando que aqui estamos nas condições iniciais do 14º Problema de Hilbert: k é um corpo (de característica zero ou finita), $k[x]$ é um anel polinomial de uma variável, com $k(x)$ seu corpo de frações, e L é um corpo tal que $k \subseteq L \subseteq k(x)$.

Teorema A.1. (*Teorema de Artin-Tate*) *Considere a inclusão de anéis $A \subseteq B \subseteq C$. Suponha que A é Noetheriano, C é uma álgebra finitamente gerada sobre A e C é um módulo finitamente gerado sobre B . Então, B é uma álgebra finitamente gerada sobre A .*

Demonstração:

Sejam $x_1, \dots, x_m$ geradores de C como A -álgebra e $y_1, \dots, y_n$ geradores de C como B -módulo. Note que podemos escrever

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij} \in B) \tag{A.1}$$

$$y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad (b_{ijk} \in B) \quad (\text{A.2})$$

já que $x_i \in C$ e $y_i y_j \in C$.

Defina B_0 como a A -álgebra gerada pelos b_{ij} e b_{ijk} (note que há finitos deles, então B_0 é uma A -álgebra finitamente gerada). Como A é Noetheriano, segue que B_0 é Noetheriano e $A \subseteq B_0 \subseteq B$.

Temos que qualquer elemento de C é um polinômio nos x_i com coeficientes em A . Substituindo os x_i pelas equações em (A.1) e usando (A.2) repetidas vezes, mostramos que cada elemento de C é uma combinação linear dos y_j com coeficientes em B_0 . Então, C é finitamente gerado como B_0 -módulo. Como B_0 é Noetheriano, C é um B_0 -módulo Noetheriano. Por outro lado, B é submódulo de C , logo B é finitamente gerado como B_0 -módulo.

Portanto, como B_0 é finitamente gerado como A -álgebra e B é finitamente gerado como B_0 -módulo, segue que B é finitamente gerado como A -álgebra. ■

Esse Teorema será usado na demonstração da Proposição a seguir, que será o elemento chave para a nossa conclusão.

Proposição A.2. *Se A é uma k -subálgebra de $k[x]$, então A é finitamente gerada como k -álgebra.*

Demonstração:

Note que $A \subseteq k[x]$. Se $A = k$ não há nada a ser feito. Suponha então que $A \neq k$ e tome $f(x) \in A \setminus k$ mônico.

Como $f(x)$ é mônico, $k[f] \subseteq k[x]$ é uma extensão integral. Além disso, $k[x] = k[f][x]$ é uma álgebra finitamente gerada sobre $k[f]$. Logo, essas duas condições são equivalentes a dizer que $k[x]$ é finitamente gerado como $k[f]$ -módulo.

Sabemos que k é Noetheriano, então $k[f]$ também é Noetheriano. Como $k[x]$ é um $k[f]$ -módulo finitamente gerado, segue que $k[x]$ é um $k[f]$ -módulo Noetheriano.

Por hipótese, $A \subseteq k[x]$ é uma k -subálgebra e tomamos $f \in A$, então A também pode ser visto como um $k[f]$ -submódulo de $k[x]$. Como $k[x]$ é um $k[f]$ -módulo Noetheriano, segue que A é um módulo finitamente gerado sobre $k[f]$.

Sendo assim, temos a seguinte cadeia:

$$k \subset k[f] \subseteq A \subseteq k[x].$$

Sabemos que

- $k[x]$ é uma k -álgebra finitamente gerada.
- $k[x]$ é um módulo finitamente gerado sobre A , já que $k[f] \subseteq A$ e $k[x]$ é finitamente gerado sobre $k[f]$.

Portanto, pelo Teorema A.1, A é uma k -álgebra finitamente gerada.

■

Conclusão: Nas condições do 14º Problema de Hilbert, $L \cap k[x]$ é uma k -álgebra finitamente gerada.

De fato, sabemos que L é um corpo tal que $k \subseteq L \subseteq k(x)$, assim $k \subseteq L \cap k[x] \subseteq k[x]$.

Considere o morfismo inclusão $k \hookrightarrow L \cap k[x]$. Logo, $L \cap k[x]$ é uma k -álgebra e, em particular, é uma k -subálgebra de $k[x]$.

Portanto, pela Proposição A.2, $L \cap k[x]$ é uma k -álgebra finitamente gerada, como gostaríamos de provar.

Índice Remissivo

- Der(B), 5
- Der $_A$ (B), 5
- Gr(B), 11
- LND(B), 7
- LND $_A$ (B), 7
- Nil(D), 6
- $\mathbb{Z}$ -filtração, 11
 - própria, 11
- gr(D), 13
- ker(D), 5
- $\nu_D(f)$, 14
- ω -grau, 10
- k -domínio, 5
- w -deg f , 41
- Álgebra graduada, 11
- 14º Problema de Hilbert, 1
 - caso $n = 1$, 53
 - caso $n = 5$, 39
- Anel
 - Algebricamente fechado, 8
 - das constantes, 6
 - Fatorialmente fechado, 8
- Graduado, 10
- Integralmente fechado, 8
- Polinomial, 8
- Aplicação
 - de Dixmier, 14
- Contraexemplo, 40
- Derivação, 5
 - ω -homogênea, 10
 - Irredutível, 6
 - Localizada, 19
 - Localmente Nilpotente, 6
 - nilpotente em um elemento, 6
 - que respeita a filtração, 13
 - Quociente, 19
 - Redutível, 6
 - Triangular, 7
- Derivada, 15
- Elemento
 - ω -homogêneo, 10
 - Algébrico sobre um anel, 8
 - Integral, 6

-
- Integral sobre um anel, 8
- 15, 36
- Fórmula
- de Taylor, 16
- Função
- Exponencial, 14
- Grau, 9
- Grau induzida por uma derivação, 13
- Ideal
- D -estável, 6
- Integral, 6
- Local Slice, 6
- Núcleo de uma derivação, 5
- Plinth ideal, 16
- Princípio
- 1, 21
- 2, 23
- 3, 23
- 4, 23
- 5, 24
- 6, 24
- 7, 25
- 8, 27
- 9, 27
- 10, 28
- 11, 30
- 12, 34
- 13, 34
- 14, 35
- Regra
- da cadeia, 16
- da potência, 15
- de Leibniz, 5
- do produto, 5
- do produto iterada, 16
- do quociente, 15
- Slice, 6
- Teorema
- da “slice”, 31
- Daigle-Freudentburg, 40, 47
- de Artin-Tate, 53
- de Seidenberg, 19

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Third Edition, 2003.
- [2] D. Daigle, *Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces*, Osaka J. Math. 41, 37-80 (2004).
- [3] —, *On some properties of locally nilpotent derivations*, J. Pure Appl. Algebra 114 (1997), 221-230.
- [4] D. Daigle and G. Freudenburg, *A conterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension five*, J. Algebra 221 (1999), 528-535.
- [5] W. Danielewski, *On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties*, Preprint, Warsaw, 1989.
- [6] A. van den Essen, *A simple solution of Hilbert's Fourteenth Problem in dimension five*, Colloq. Math. 105 (2006), 167-170.
- [7] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [8] A. van den Essen and T. Janssen, *Kernels of elementary derivations*, Univ. Nijmegen Report No. 9548, Nijmegen, 1995.

-
- [9] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VII, R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov Subseries Editors.
- [10] —, *A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension six*, Transformation Groups 5 (2000), 61-71.
- [11] H. Kojima and M. Miyanishi, *On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert*, J. Pure Appl. Algebra 122 (1997), 277-292.
- [12] S. Kuroda, *A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension four*, J. Algebra 279 (2004), 126-134.
- [13] —, *A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three*, Michigan Math. J. 53 (2005), 123-132.
- [14] M. Nagata, *On the Fourteenth Problem of Hilbert*, in: Proc. I.C.M. 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 459-462.
- [15] M. Nagata, *Lectures on The Fourteenth Problem of Hilbert*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
- [16] A. Nowiki, *Polynomial Derivations and their Rings of Constants*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1994.
- [17] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem*, J. Algebra 132 (1990), 461-473.
- [18] O. Zariski, *Interprétations algébrique-géométriques du quatorzième problème de Hilbert*, Bull. Sci. Math. 78 (1954), 155-168.