Funções positivas definidas para interpolação em esferas complexas

Ana Paula Peron

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Valdir A. Menegatto*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área de Matemática

USP - São Carlos

Novembro de 2000

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30E10, 41A05, 41A10, 42C05, 42C10.

Palavras chaves: Esferas complexas, Funções positivas definidas, Positividade definida estrita, Polinômios no disco, Polinômios de Jacobi.

E-mail: apperon@uem.br

Versão revisada após defesa.

À minha amada filha,

Gabriela ♡

Agradecimentos

Ao Prof. Valdir, pelas sugestões, pelo incentivo, pela dedicação, disposição em colaborar, paciência e compreensão. Muito obrigada!!!!

*Ao "meu anjinho", **Gabriela**, pequenina e tão sábia; por me ensinar algo novo a cada dia e fazer parte da minha vida...*

Eu te amo!

Aos meus pais, Maria de Lourdes e Valdecir, minha irmã Kátia, minha sobrinha Inajá e meu cunhado Marcelo, por sempre apoiarem minhas decisões e pelo carinho...

Aos amigos que durante esse período fizeram os dias ficarem mais "leves".

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, pela política de qualificação que vem desenvolvendo.

A todos que de alguma forma contribuíram.

Obrigada!

Ana Paula.

Este trabalho teve suporte financeiro parcial do PICDT-CAPES # 0474/1997.

Resumo

Apresentamos uma caracterização das funções positivas definidas em esferas complexas, generalizando assim, um resultado de Schoenberg ([41]). Como no caso real, uma classe importante dessas funções é aquela composta pelas funções estritamente positivas definidas de uma certa ordem; estas podem ser utilizadas para resolver certos problemas de interpolação de dados arbitrários associados a pontos distintos distribuídos nas esferas. Com esse objetivo, obtivemos algumas condições necessárias e suficientes (separadamente) para que funções positivas definidas sejam estritamente positivas definidas. Os resultados apresentados fornecem uma caracterização final elementar para funções estritamente positivas definidas de todas as ordens em quase todas as esferas complexas. Funções estritamente positivas definidas de ordem 2 são caracterizadas em todas as esferas complexas. Analisamos também a relação entre funções estritamente positivas definidas em esferas complexas e funções estritamente positivas definidas em esferas reais.

Abstract

We characterize positive definite functions on complex spheres, generalizing a famous result due to I. J. Schoenberg ([41]). As in the real case, we study the so-called strictly positive definite functions. They can be used to perform interpolation of scattered data on those spheres. We present (separated) necessary and sufficient conditions for a positive definite function to be strictly positive definite of a certain order. These conditions produce a final characterization for those positive definite functions which are strictly positive definite of all orders, on almost all spheres. Strictly positive definite functions of order 2 are identified. Finally, we study a connection between strictly positive definite functions on real spheres and strictly positive definite functions on complex spheres.

Índice

Introdução

O termo “positiva definida” quando aplicado a funções tem vários significados; as definições dependem dos espaços considerados e do grau de generalidade procurado. Inicialmente vamos considerar um caso bem conhecido e aproveitá-lo para explicar a importância de tais funções na Teoria de Aproximação.

Consideremos o espaço Euclideano $\mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$) e h uma função a valores reais definida em $\mathbb{R}^q$. Se $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ é um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^q$, então podemos formar uma matriz de ordem N com entrada $\mu\nu$ dada por

$$A_{\mu\nu} := h(x_\mu - x_\nu). \tag{1}$$

Se esta matriz é não negativa definida independentemente de N e dos pontos x_μ, então a função h é denominada *positiva definida em* $\mathbb{R}^q$. A positividade definida de h é equivalente a seguinte condição alternativa: se N é um inteiro positivo, $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^q$ e se $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu c_\nu h(x_\mu - x_\nu) \geq 0.$$

Se esta desigualdade é estrita quando os pontos x_μ são dois a dois distintos e pelo menos um dos c_μ é não nulo, então h é denominada *estritamente positiva definida em* $\mathbb{R}^q$. Existe um defeito óbvio nestas terminologias, mas elas estão consolidadas na literatura desta forma.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_N$ pontos distintos em $\mathbb{R}^q$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ números reais quaisquer. Geralmente, um problema de interpolação associado a estes dados consiste em encontrar uma função $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ de algum tipo pré-determinado, tal que

$$F(x_\mu) = \lambda_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq N. \tag{2}$$

Um procedimento muito utilizado ([5]) é buscar soluções F que sejam combinações lineares de translações de uma função h fixada. Neste caso, a função interpoladora F é da forma

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu h(x - x_\nu), \quad x \in \mathbb{R}^q. \tag{3}$$

Quando as condições de interpolação (2) são impostas, o resultado é o sistema de N equações lineares

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu h(x_\mu - x_\nu) = \lambda_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq N, \tag{4}$$

cuja matriz é aquela definida em (1). Se h é uma função positiva definida em $\mathbb{R}^q$, então a matriz é não negativa definida ([13]), mas isto é insuficiente para garantir sua invertibilidade. Entretanto, se h é estritamente positiva definida em $\mathbb{R}^q$, a matriz do sistema é positiva definida e, conseqüentemente, invertível ([5]). É importante observar que a positividade definida estrita de h em $\mathbb{R}^q$ garante a solução única do sistema (4) qualquer que seja o número N de pontos e quaisquer que sejam os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Além de ser invertível, a matriz do sistema (4) tem outras propriedades desejáveis que favorecem o manuseio numérico do sistema ([5]).

Devido à sua aplicabilidade em Geofísica ([22]) bem como outras áreas, as funções que além de positivas definidas em $\mathbb{R}^q$ são também "radiais", formam uma classe muito rica de funções dentre aquelas geralmente utilizadas na geração de funções interpoladoras. Uma função h é *radial* em $\mathbb{R}^q$ se satisfaz

$$h(x) = g(||x||),$$

onde $||\cdot||$ denota alguma norma em $\mathbb{R}^q$ e g é uma função contínua a valores reais definida em $[0, \infty)$. Neste caso, a função interpoladora (3) torna-se

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu g(||x - x_\nu||), \quad x \in \mathbb{R}^q. \tag{5}$$

As referências básicas sobre a utilização de funções radiais na resolução do problema (2) são [9, 31, 36].

Agora, consideremos a esfera unitária S^q em $\mathbb{R}^{q+1}$ (quando $q = \infty$, S^∞ representará a esfera de Hilbert real, ou seja, a esfera unitária em ℓ^2 real) e $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em S^q. Em analogia com o caso considerado acima, é natural tentar-se resolver o problema de interpolação

$$F(\xi_\mu) = \lambda_\mu, \quad \lambda_\mu \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq \mu \leq N, \tag{6}$$

através de funções interpoladoras da forma

$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu g(d_q(\xi, \xi_\nu)), \quad \xi \in S^q, \tag{7}$$

onde g é uma função contínua a valores reais definida pelo menos em $[0, \pi]$ e d_q é a distância geodésica em S^q. A distância geodésica d_q é dada por

$$d_q(\xi, \eta) := \arccos\langle \xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in S^q,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^{q+1}$ (ℓ^2 se $q = \infty$). Como $\langle \xi, \eta \rangle = \cos(d_q(\xi, \eta))$, tomando-se $g(t) = f(\cos t)$ a função interpoladora (7) pode ser escrita na forma

$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu f(\langle \xi, \xi_\nu \rangle), \quad \xi \in S^q. \tag{8}$$

Esta versão esférica do problema de interpolação (2) tem aplicações em Geofísica, Geologia, Meteorologia, etc ([12]). Dado $\eta \in S^q$, uma função da forma

$$\xi \in S^q \longrightarrow f(\langle \xi, \eta \rangle)$$

é chamada *η-zonal* em S^q (gerada por f). Esta definição é o análogo esférico do conceito de função radial em $\mathbb{R}^{q+1}$. Uma função zonal em S^q é constante em esferas de dimensão inferior contidas em S^q. A função interpoladora (8) pode então ser vista como uma combinação linear de funções zonais, todas geradas por uma única função f.

Para resolvermos o problema de interpolação (6), usando uma função F como em (8), é necessário encontrarmos coeficientes reais $c_1, c_2, \ldots, c_N$ tais que

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = \lambda_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq N.$$

Como anteriormente, uma condição suficiente conveniente para a resolubilidade do sistema é que a matriz $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ seja positiva definida. Neste contexto, dizemos que uma função contínua f a valores reais (ou complexos) definida pelo menos em $[-1,1]$ é *positiva definida em* S^q se

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu c_\nu f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) \geq 0$$

para todo inteiro positivo N, todo subconjunto $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ de S^q e todo subconjunto $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ de números reais. Fixando-se N, dizemos que f é *estritamente positiva definida de ordem* N *em* S^q se a desigualdade acima é estrita sempre que os N pontos ξ_μ são dois a dois distintos e pelo menos um dos c_μ é não nulo. Finalmente, dizemos que f é *estritamente positiva definida em* S^q se ela é estritamente positiva definida de todas as ordens em S^q.

Funções positivas definidas em S^q foram caracterizadas por Schoenberg em 1942 ([41]): *Uma função contínua* f *definida pelo menos em* $[-1,1]$ *é positiva definida em* S^q *se, e somente se, ela tem uma representação da forma*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^q(f) P_k^{(q-1)/2}(t), \quad a_k^q(f) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^q(f) < \infty, \tag{9}$$

onde $P_k^{(q-1)/2}$ *é o polinômio de Gegenbauer ou ultraesférico de grau* k *associado com* $(q-1)/2$ *se* $q < \infty$ *e* $P_k^\infty(t) := t^k$.

Logo, a seguinte questão torna-se importante: dada uma função f como em (9) e um inteiro positivo N, encontrar condições nos coeficientes $a_k^q(f)$ de modo que f seja estritamente positiva definida de ordem N em S^q.

O problema acima já foi considerado em vários artigos. Xu e Cheney ([49]) mostraram que se $a_k^1(f) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, [N/2]$, então f é estritamente positiva definida de ordem N em S^1, e se $a_k^q(f) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, [N/2]$, então f é estritamente positiva definida de ordem $[N/2] + 1$ em S^q, $q \geq 2$. Aqui, $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Usando a chamada solução mínima para interpolação polinomial em várias variáveis, Ron e Sun ([38]) mostraram que, na verdade, se $a_k^q(f) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, [N/2]$, então f é estritamente positiva definida de ordem N em S^q, $q < \infty$. Eles também provaram que isto é o melhor possível, no seguinte sentido: se $a_k^q(f) > 0$, $k = 0, 1, \ldots, [N/2]-1$, então f não é estritamente positiva definida de ordem N em S^q. Menegatto ([26]) mostrou que se q é um inteiro maior ou igual a 2 e N um inteiro positivo menor ou igual a q, f é estritamente positiva definida de ordem N em S^q se, e somente se, $a_k^q(f) > 0$ para um inteiro k par e um inteiro k ímpar, ambos maiores ou iguais a $[N/2]-1$. Positividade definida estrita de ordem 2 já foi caracterizada em todas as esferas S^q ([26]). Os resultados acima revelam que se $a_k^q(f) > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, então f é estritamente positiva definida em S^q. Este último resultado foi aperfeiçoado por Schreiner ([40]), permitindo que um número finito de coeficientes sejam nulos.

Embora todos os resultados descritos acima sejam importantes, não existe ainda uma caracterização final das funções estritamente positivas definidas em S^q, $q < \infty$, e das funções estritamente positivas definidas de ordens maiores ou iguais à dimensão da esfera. O único caso no qual as funções estritamente positivas definidas foram caracterizadas é o da esfera de Hilbert S^∞ ([26]): f é estritamente positiva definida de ordem N em S^∞ se, e somente se, $a_k^\infty(f) > 0$ para um inteiro k par e um inteiro k ímpar, ambos maiores ou iguais a $[N/2]-1$. Em particular, uma função f é estritamente positiva definida em S^∞ se, e somente se, $a_k^\infty(f) > 0$ para infinitos índices pares e infinitos índices ímpares ([27]).

Em muitos problemas práticos, é freqüente desejar-se interpolar não apenas os valores da função mas também os valores das derivadas até uma certa ordem, como na interpolação clássica do tipo Hermite em $\mathbb{R}$ ([7, p. 28]). Sun mostrou em [44], como funções positivas definidas em $\mathbb{R}^q$ podem ser usadas para resolver problemas de interpolação do tipo Hermite em $\mathbb{R}^q$. Neste contexto um problema de interpolação do tipo Hermite propriamente dito pode ser descrito da seguinte forma: dados $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ um conjunto de pontos distintos em $\mathbb{R}^q$ e $\{\lambda_{\mu\nu} : \mu = 1, 2\ldots, N, \nu = 1, 2\ldots, r\}$ um conjunto de números reais, encontrar uma função contínua f (possivelmente diferenciável até uma certa ordem) tal que

$$[p_\nu(D)f](x_\mu) = \lambda_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq N, \quad 1 \leq \nu \leq r,$$

onde $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ é um conjunto linearmente independente de polinômios homogêneos em $\mathbb{R}^q$ e D é o símbolo diferencial $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \ldots, \partial/\partial x^s)$, $x := (x^1, x^2, \ldots, x^s) \in \mathbb{R}^q$. Versões esféricas do problema acima foram introduzidas e estudadas em [10, 29, 34, 35].

Outro caminho já investigado é o da aproximação de uma função dada ou uma classe de funções definidas em S^q por combinações lineares de funções positivas definidas ou estritamente positivas definidas em S^q ([4, 23, 24, 45, 46]).

Motivados pelo exposto, investigaremos problemas de interpolação similares ao descrito acima quando os dados pertencem às esferas complexas unitárias Ω_{2q} do espaço vetorial complexo q-dimensional $\mathbb{C}^q$. Como no caso real somos levados a estudar funções estritamente positivas definidas nestas esferas (ver definição apropriada no final da Seção 1.1). Mediante modificações apropriadas, todos os resultados sobre positividade definida e positividade definida estrita em esferas reais podem ser inseridos neste novo contexto. Por outro lado, como esferas reais estão naturalmente mergulhadas em esferas complexas, o nosso desenvolvimento permite a utilização de funções positivas definidas complexas para interpolar dados nas esferas reais, ampliando assim o rol de funções admissíveis naqueles processos interpolatórios. O trabalho propriamente dito será apresentado na seguinte forma.

No Capítulo 1, introduziremos algumas notações básicas, o conceito de funções positivas definidas em esferas complexas e alguns exemplos dessas funções. O objetivo principal deste trabalho ficará então bem estabelecido quando apresentarmos o problema de interpolação propriamente dito. Apresentaremos também uma breve descrição dos polinômios no disco, bem como algumas de suas propriedades, já que os mesmos aparecem naturalmente no problema estudado.

No Capítulo 2, caracterizaremos as funções positivas definidas nas esferas complexas. Tal caracterização é similar àquela obtida por Schoenberg ([41]) para as esferas reais. Com este propósito, apresentaremos o problema de Dirichlet na bola unitária fechada de $\mathbb{C}^q$, cuja solução indica a forma geral de uma função positiva definida em Ω_{2q}. Introduziremos também o núcleo de Poisson-Szegő, uma vez que este além de estar relacionado com os polinômios no disco, é também o gerador natural de soluções para o problema de Dirichlet.

No Capítulo 3, apresentaremos algumas caracterizações de positividade definida estrita em Ω_{2q} ($q \geq 1$). Quando $q = 1$ mostraremos uma condição necessária para positividade definida estrita. Nos demais casos, apresentaremos várias condições necessárias e suficientes (separadamente) que garantem tal propriedade. Quando $q \in \{3, 4, \ldots, \infty\}$ os resultados fornecerão uma caracterização final elementar para positividade definida estrita de todas as ordens. Positividade definida estrita de ordem 2 será caracterizada em todas as esferas Ω_{2q}. Explicitaremos também a relação entre positividade definida estrita em esferas complexas e positividade definida estrita em esferas reais. Alguns exemplos concretos serão apresentados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas notações básicas, o conceito de funções positivas definidas em esferas complexas, alguns exemplos dessas funções e apresentaremos o problema de interpolação propriamente dito. Introduziremos também, os polinômios no disco e algumas de suas propriedades, uma vez que estes polinômios aparecem naturalmente no problema estudado.

1.1 Definições

Consideraremos $\mathbb{C}^q$ o espaço vetorial complexo q-dimensional, com produto interno dado por

$$\langle z, w\rangle := z^1\overline{w^1} + z^2\overline{w^2} + \cdots + z^q\overline{w^q}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q,$$

onde $z = (z^1, z^2, \ldots, z^q)$ e $w = (w^1, w^2, \ldots, w^q)$. Denotaremos por Ω_{2q} a esfera unitária em $\mathbb{C}^q$, ou seja,

$$\Omega_{2q} := \{z \in \mathbb{C}^q : \langle z, z\rangle = 1\},$$

e por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ os elementos da base canônica ordenada de $\mathbb{C}^q$. O grupo dos operadores lineares unitários sobre $\mathbb{C}^q$ será denotado por $U(q)$, ou seja,

$$U(q) := \{T : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q \ : \ T \text{ é linear e } TT^* = I\},$$

e o seu subgrupo composto de operadores que fixam um elemento ζ de Ω_{2q} será representado por $U_\zeta(q-1)$, isto é,

$$U_\zeta(q-1) := \{T \in U(q) : T\zeta = \zeta\}.$$

Na definição acima, I representa o operador identidade e T^* o operador adjunto de T.

Usaremos a notação usual de multi-índices, isto é, se um elemento $r = (r_1, r_2, \dots, r_q)$ de $\mathbb{N}^q$ ($\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$) é um multi-índice e z é um elemento de $\mathbb{C}^q$, então

$$z^r := (z^1)^{r_1}(z^2)^{r_2}\dots(z^q)^{r_q}$$

e

$$|r| := r_1 + r_2 + \cdots + r_q.$$

Denotaremos por Π^q o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dos polinômios nas variáveis independentes z e $\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}^q$, ou seja, se p é um elemento de Π^q, então

$$p(z, \overline{z}) = \sum_{|r|\le m}\sum_{|s|\le n} a_{r,s} z^r \overline{z}^s, \quad z \in \mathbb{C}^q, \quad a_{r,s} \in \mathbb{C}, \quad r, s \in \mathbb{N}^q, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

O subconjunto de Π^q formado pelos polinômios homogêneos de grau m em z e de grau n em $\overline{z}$ será denotado por $\Pi^{o,q}_{m,n}$. Um elemento p em qualquer um desses espaços será denotado por $p(z)$ ou $p(z, \overline{z})$ dependendo da nossa conveniência. Logo, se p é um elemento de $\Pi^{o,q}_{m,n}$, então

$$p(\lambda z) = \lambda^m \overline{\lambda}^n p(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Certamente $\Pi^{o,q}_{m,n}$, adicionado do polinômio nulo, é um subespaço de Π^q. Um subconjunto de $\Pi^{o,q}_{m,n}$ de grande importância é aquele cujos polinômios são também harmônicos. Neste contexto, uma função é harmônica se está no núcleo do Laplaciano complexo dado por

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{z^j}}, \quad z \in \mathbb{C}^q.$$

Denotaremos tal conjunto por $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}$. Finalmente, denotaremos por $\mathcal{H}^q_{m,n}$ o conjunto das restrições a Ω_{2q} dos elementos de $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}$ Acrescentando-se o polinômio nulo a $\mathcal{H}^q_{m,n}$ este torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$; sua dimensão será denotada por $N(q; m, n)$.

Observação 1.1.1. *(i)* $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{0,n} = \Pi^{o,q}_{0,n}$ *e* $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,0} = \Pi^{o,q}_{m,0}$.

(ii) Valem as seguintes relações entre operadores diferenciais parciais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

(iii) As fórmulas do item (ii) produzem a seguinte fórmula para o Laplaciano complexo

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{z^j}} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y^j)^2}\right).$$

A seguir apresentamos um exemplo de um polinômio harmônico.

Exemplo 1.1.2. *O polinômio*

$$p(z) = \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^j\right)^m \left(\sum_{j=1}^{q} b_j \overline{z^j}\right)^n, \quad \sum_{j=1}^{q} a_j b_j = 0,$$

é um elemento de $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$.

De fato, temos que

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{z^i}} = \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^j\right)^m n b_i \left(\sum_{j=1}^{q} b_j \overline{z^j}\right)^{n-1}$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} = mna_i b_i \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^j\right)^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{q} b_j \overline{z^j}\right)^{n-1}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} = mn \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^j\right)^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{q} b_j \overline{z^j}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^{q} a_i b_i = 0,$$

e portanto p é harmônico. Claramente p é homogêneo de grau m em z e de grau n em $\overline{z}$.

O próximo resultado mostra que $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$ é invariante por elementos de $U(q)$.

Lema 1.1.3. *Sejam* p *um elemento de* $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$ *e* T *um elemento de* $U(q)$. *Então,* $p \circ T$ *é um elemento de* $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$.

Prova. Podemos escrever

$$Tz = \left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j} z^j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} a_{qj} z^j \right), \quad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad z = (z^1, z^2, \ldots, z^q) \in \mathbb{C}^q.$$

Claramente $p \circ T$ é um polinômio homogêneo de grau m em z e de grau n em $\overline{z}$. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{z^i}} (p \circ T)(z) &= \frac{\partial}{\partial \overline{z^i}} p \left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j} z^j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} a_{qj} z^j, \sum_{j=1}^{q} \overline{a_{1j}}\, \overline{z^j}, \ldots, \sum_{j=1}^{q} \overline{a_{qj}}\, \overline{z^j} \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial \overline{z^1}} (Tz)\, \overline{a_{1i}} + \frac{\partial p}{\partial \overline{z^2}} (Tz)\, \overline{a_{2i}} \cdots + \frac{\partial p}{\partial \overline{z^q}} (Tz)\, \overline{a_{qi}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} (p \circ T)(z) &= \frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{\partial p}{\partial \overline{z^1}} (Tz)\, \overline{a_{1i}} + \frac{\partial p}{\partial \overline{z^2}} (Tz)\, \overline{a_{2i}} + \cdots + \frac{\partial p}{\partial \overline{z^q}} (Tz)\, \overline{a_{qi}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial z^1 \partial \overline{z^1}} (Tz)\, |a_{1i}|^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2 \partial \overline{z^1}} (Tz)\, \overline{a_{1i}} a_{2i} + \cdots + \frac{\partial^2 p}{\partial z^q \partial \overline{z^1}} (Tz)\, a_{1i} a_{qi} \\ &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial z^1 \partial \overline{z^2}} (Tz)\, \overline{a_{2i}} a_{1i} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2 \partial \overline{z^2}} (Tz)\, |a_{2i}|^2 + \cdots + \frac{\partial^2 p}{\partial z^q \partial \overline{z^2}} (Tz)\, \overline{a_{2i}} a_{qi} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial z^1 \partial \overline{z^q}} (Tz)\, \overline{a_{qi}} a_{1i} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2 \partial \overline{z^q}} (Tz)\, \overline{a_{qi}} a_{2i} + \cdots + \frac{\partial^2 p}{\partial z^q \partial \overline{z^q}} (Tz)\, |a_{qi}|^2. \end{aligned}$$

Note que o Laplaciano de $p \circ T$ é a soma em i da expressão acima. Como $T \in U(q)$, temos as seguintes igualdades

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} (Tz) \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|^2 = \frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} (Tz), \quad 1 \leq i \leq q,$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} (Tz)\, 2\mathrm{Re} \left(\sum_{l=1}^{q} \overline{a_{il}} a_{jl} \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} (Tz)\, 0 = 0, \quad i \neq j.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} (p \circ T) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 p}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} = 0,$$

o que prova que $p \circ T$ é harmônico, concluindo o lema. ■

Todo elemento de $\mathcal{H}^q_{m,n}$ pode ser identificado com um harmônico esférico de grau $m+n$ em $2q$ variáveis no sentido clássico ([32, 43]). De fato, se

$$f(z, \overline{z}) = f(x^1 + iy^1, \ldots, x^q + iy^q, x^1 - iy^1, \ldots, x^q - iy^q)$$

é uma função em $\mathcal{H} \cap \Pi^{o;q}_{m,n}$, então a função g dada por

$$g(x^1, y^1, \ldots, x^q, y^q) := f(x^1 + iy^1, \ldots, x^q + iy^q, x^1 - iy^1, \ldots, x^q - iy^q)$$

é homogênea de grau $m+n$ na variável $(x^1, y^1, \ldots, x^q, y^q)$. Devido à Observação 1.1.1-(iii),

$$\sum_{j=1}^{q} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial (x^j)^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial (y^j)^2} \right) = 4 \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial \overline{z^j}} = 0.$$

Assim, g é uma função harmônica no sentido usual. Isto implica que g é um harmônico esférico sólido. Em particular, a restrição de g à esfera unitária S^{2q-1} de $\mathbb{R}^{2q}$ é um harmônico esférico de grau $m+n$. Portanto, a restrição de f a Ω_{2q} identifica-se com um harmônico esférico (a valores complexos) de grau $m+n$ no sentido clássico.

Neste trabalho consideraremos núcleos positivos definidos na esfera Ω_{2q} que têm a forma

$$(\xi, \zeta) \in \Omega_{2q}^2 \longrightarrow f(\langle \xi, \zeta \rangle),$$

para alguma função f contínua e complexa. Esta deve estar definida em Ω_2 quando $q = 1$ e no disco fechado unitário B_2 em $\mathbb{C}$, caso contrário. Núcleos da forma acima são chamados *bizonais* devido ao fato de se tornarem funções zonais em Ω_{2q} quando uma das variáveis está fixada. Dizemos que uma função f em Ω_{2q} é ζ-*zonal*, $\zeta \in \Omega_{2q}$, se

$$f(T\xi) = f(\xi), \quad T \in U_\zeta(q-1), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Um núcleo $K : X^2 \to \mathbb{C}$ é *positivo definido* num conjunto não vazio X se, e somente se,

$$\sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} K(\xi_\mu, \xi_\nu) \geq 0, \tag{1.1}$$

para todo $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\} \subset \mathbb{C}$. Em outras palavras, K é positivo definido em X se, e somente se, toda matriz da forma

$$(K(\xi_\mu, \xi_\nu)), \quad \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset X, \quad N \geq 1,$$

é não negativa definida. É conveniente chamarmos uma função complexa f de *positiva definida em* X quando o seu núcleo bizonal correspondente $f(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ é positivo definido em X.

Note que a terminologia acima estende, em um certo sentido, a noção de positividade definida em esferas reais apresentada na Introdução, uma vez que estas são subconjuntos das esferas complexas Ω_{2q}.

A seguir listamos alguns exemplos de funções positivas definidas.

Exemplo 1.1.4. *Sejam X um subconjunto de Ω_2 e k um inteiro. A função $f(\xi) = \xi^k$ é positiva definida em X.*

De fato, se $N \geq 1$, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \dots, c_N\} \subset \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k \\
&= \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \xi_\mu^k \overline{\xi_\nu}^k \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \xi_\mu^k \sum_{\nu=1}^{N} \overline{c_\nu} \overline{\xi_\nu}^k \\
&= \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \xi_\mu^k \right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f é positiva definida em X.

Exemplo 1.1.5. *Sejam X um subconjunto de Ω_{2q} e k um inteiro não negativo. A função $f(\xi) = \xi^k$ é positiva definida em X.*

De fato, claramente a forma quadrática em (1.1) é não negativa quando $k = 0$. Se $k = 1$, $N \geq 1$, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \dots, c_N\} \subset \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \xi_\mu, \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \xi_\nu \right\rangle \\
&= \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \xi_\mu \right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Se $k > 1$, a matriz $(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k)$ é positiva definida pelo Teorema de Schur [13, p. 458]. Portanto, f é positiva definida em X.

Exemplo 1.1.6. *Se f e g são funções positivas definidas em X, então fg é positiva definida em X.*

De fato, esta propriedade segue diretamente do Teorema de Schur.

Exemplo 1.1.7. *Sejam a e b constantes não negativas. Se f e g são funções positivas definidas em X, então $af + bg$ é positiva definida em X.*

Exemplo 1.1.8. *Se f é uma função positiva definida em X, então $\overline{f}$ é positiva definida em X.*

Assumindo-se hipóteses adicionais razoáveis sobre uma função positiva definida f em Ω_{2q} e que os pontos ξ_μ são dois a dois distintos, é possível garantir a positividade definida (e conseqüentemente a invertibilidade [13, p. 398]) de muitas matrizes da forma $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$. Conseqüentemente, interpolação de dados arbitrários nos ξ_μ por uma função da forma

$$\xi \in \Omega_{2q} \longrightarrow \sum_{\nu=1}^{N} \overline{c_\nu} f(\langle \xi, \xi_\nu \rangle)$$

pode ser resolvida de maneira única. Portanto, como no caso real, a seguinte questão é importante: determinar quais funções positivas definidas f em Ω_{2q} são *estritamente positivas definidas de ordem N em* Ω_{2q}, isto é, fixado N, determinar quais funções positivas definidas f em Ω_{2q} satisfazem

$$\sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) > 0, \tag{1.2}$$

quando os pontos ξ_μ são dois a dois distintos e pelo menos um dos c_μ é não nulo.

1.2 Polinômios no disco

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre os polinômios no disco, uma vez que eles estão atrelados à maioria dos resultados obtidos neste trabalho. Estes polinômios são polinômios nas variáveis z e $\overline{z}$ e podem ser vistos como análogos bidimensionais dos celebrados polinômios de Jacobi. Mostraremos que as funções ζ-zonais em $\mathcal{H}^q_{m,n}$ são múltiplas constantes de núcleos bizonais envolvendo os polinômios no disco. Este resultado é o passo fundamental em direção à caracterização de funções positivas definidas em Ω_{2q}.

Os polinômios de Jacobi $R_0^{(\alpha,\beta)}, R_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots$ (ordenação segundo a ordem crescente dos graus) são polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$ em relação à função peso

$$r(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1,$$

e formam uma base para o espaço de todos os polinômios em uma variável. Em geral, para que estes polinômios fiquem unicamente determinados, alguma normalização é assumida. Neste trabalho, assumiremos que

$$R_k^{(\alpha,\beta)}(1) = 1, \quad k \geq 0.$$

Em particular ([48, p. 168]),

$$|R_k^{(\alpha,\beta)}(x)| \leq 1, \quad x \in [-1,1], \quad \alpha, \beta > -\frac{1}{2}.$$

Enunciaremos sem prova o seguinte resultado.

Lema 1.2.1. *Se $\{0 \neq P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ é um conjunto de polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$ em relação à função peso r, então, após uma possível reordenação, P_k é um múltiplo de $R_k^{(\alpha,\beta)}$, $k \geq 0$.*

Mais detalhes sobre os polinômios de Jacobi podem ser encontrados em [37, 48].

Definição 1.2.2. *Sejam m e n inteiros não negativos. O polinômio no disco de grau $m+n$ em x e y associado a um número real α maior do que -1 é a função $R_{m,n}^\alpha$ dada por*

$$R_{m,n}^\alpha(re^{i\theta}) := r^{|m-n|} e^{i(m-n)\theta} R_{m\wedge n}^{(\alpha,|m-n|)}(2r^2-1), \quad z := re^{i\theta} = x + iy \in B_2,$$

onde $m \wedge n$ é o menor elemento do conjunto $\{m,n\}$.

É fácil ver que

$$R_{m,n}^\alpha(z) = \begin{cases} R_n^{(\alpha,m-n)}(2z\overline{z}-1)z^{m-n}, & m \geq n \\ R_m^{(\alpha,n-m)}(2z\overline{z}-1)\overline{z}^{n-m}, & m \leq n \end{cases}$$

e que, portanto, $R_{m,n}^\alpha$ é um polinômio de grau m na variável z e de grau n na variável $\overline{z}$. Aparentemente, os polinômios no disco foram inicialmente estudados em [51] e posteriormente em [2, 3, 8, 11, 14, 15, 16, 17, 18].

Observação 1.2.3. *Boyd ([2, p. 15 e p. 21]) provou que se α é um número real positivo, então o conjunto $\{R^\alpha_{m,n} : 0 \leq m, n < \infty\}$ é um sistema ortogonal completo em $L^2(B_2, dw_\alpha)$, onde dw_α é a medida positiva de massa total unitária em B_2 dada por*

$$dw_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\left(1 - x^2 - y^2\right)^\alpha dxdy, \quad z = x + iy.$$

No lema abaixo estão listadas algumas propriedades elementares dos polinômios no disco. Todas elas seguem diretamente da Definição 1.2.2.

Lema 1.2.4. *Sejam m e n inteiros não negativos e α um número real maior do que -1. As seguintes propriedades valem*

(i) $R^\alpha_{m,n}(e^{i\varphi}z) = e^{i(m-n)\varphi}R^\alpha_{m,n}(z), \ \varphi \in [0, 2\pi), \ z \in B_2$*;*

(ii) $R^\alpha_{m,n}(1) = 1$*;*

(iii) $|R^\alpha_{m,n}(z)| \leq 1, \ z \in B_2, \ (\alpha > -1/2)$*;*

(iv) $R^\alpha_{m,n}(\overline{z}) = \overline{R^\alpha_{m,n}(z)} = R^\alpha_{n,m}(z), \ z \in B_2$.

O lema a seguir estabelece uma representação polar para os elementos de Ω_{2q}, $q < \infty$.

Lema 1.2.5. *Seja q um inteiro maior ou igual a 2. Todo elemento ξ de Ω_{2q} pode ser representado na forma*

$$\xi = te^{i\varphi}\varepsilon_1 + \sqrt{1-t^2}\,\xi', \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \tag{1.3}$$

onde ξ' é um elemento pertencente ao espaço $(q-1)$-dimensional gerado por $\{\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q\}$.

Prova. Seja $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^q)$ um elemento de Ω_{2q}. Se $\xi^1 \neq 0$, podemos decompor ξ na forma

$$\xi = \eta' + \eta'',$$

onde $\eta' := a(\xi^1/a, 0, \ldots, 0)$, $\eta'' := b(0, \xi^2/b, \ldots, \xi^q/b)$, $a := |\eta'|$ e $b := |\eta''|$. Como

$$1 = |\xi|^2 = |\eta' + \eta''|^2 = |\eta'|^2 + |\eta''|^2 = a^2 + b^2,$$

podemos escrever $a = t$ e $b = \sqrt{1-t^2}$, onde $t \in (0, 1]$. Então,

$$\xi = \eta' + \eta'' = t\,\frac{\xi^1}{a}\,\varepsilon_1 + \sqrt{1-t^2}\left(0, \frac{\xi^2}{b}, \ldots, \frac{\xi^q}{b}\right).$$

Escrevendo-se $\xi^1/a := \exp(i\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, e $\xi' := \eta''/b$, obtemos

$$\xi = te^{i\varphi}\varepsilon_1 + \sqrt{1-t^2}\,\xi'.$$

Se $\xi^1 = 0$, a representação acima vale com $t = 0$. ∎

Observação 1.2.6. *(i) O ponto ξ' do lema acima pode ser identificado com um elemento de Ω_{2q-2}, como indicado na prova do lema.*
(ii) O coeficiente de ε_1 coincide com $\langle \xi, \varepsilon_1 \rangle$.
(iii) A representação do lema não é única, isto é, dois pontos de Ω_{2q} podem ser representados como no Lema 1.2.5 com os mesmos valores de t e φ, por exemplo, $(0, \ldots, 0, 1)$ e $(0, \ldots, 1, 0)$.
(iv) Escrevendo-se $t = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, a representação de ξ na Equação (1.3) torna-se

$$\xi = (\cos\theta)e^{i\varphi}\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)\xi'. \tag{1.4}$$

(v) Dado $\zeta \in \Omega_{2q}$, podemos representar os elementos de Ω_{2q} na forma

$$\xi = te^{i\varphi}\zeta + \sqrt{1-t^2}\,\xi', \tag{1.5}$$

ou

$$\xi = (\cos\theta)e^{i\varphi}\zeta + (\operatorname{sen}\theta)\xi', \tag{1.6}$$

com t, φ, θ, ξ' como anteriormente. De fato, assumindo-se (1.4) e tomando-se $T \in U(q)$ tal que $T\varepsilon_1 = \zeta$, temos que

$$T\xi = (\cos\theta)e^{i\varphi}T\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)T\xi' = (\cos\theta)e^{i\varphi}\zeta + (\operatorname{sen}\theta)T\xi'.$$

Como T é uma função bijetora, $T\xi$ percorre todos os elementos de Ω_{2q} quando ξ percorre Ω_{2q}. Além disso,

$$\langle T\xi', \zeta \rangle = \langle T\xi', T\varepsilon_1 \rangle = \langle \xi', \varepsilon_1 \rangle = 0.$$

Denotaremos por $d\omega_{2q}$ a *medida de Lebesgue esférica* sobre Ω_{2q}. Ela é invariante por elementos de $U(q)$, isto é,

$$d\omega_{2q}(T\zeta) = d\omega_{2q}(\zeta), \quad T \in U(q), \quad \zeta \in \Omega_{2q}.$$

O Lema 1.2.5 fornece a seguinte relação entre os elementos de superfície $d\omega_{2q}$ para diferentes valores de q (ver Apêndice A)

$$d\omega_{2q}(\xi) = \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3} d\theta d\varphi d\omega_{2q-2}(\xi'). \tag{1.7}$$

Em particular, fazendo-se $\cos\theta = t$ e $\varphi = \eta$, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_{2q}(\xi) &= \cos\theta(\operatorname{sen}^2\theta)^{q-2}\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi d\omega_{2q-2}(\xi') \\ &= -t(1-t^2)^{q-2} dt d\eta d\omega_{2q-2}(\xi'). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Denotaremos por ω_{2q} a *superfície total* de Ω_{2q}. Usando-se (1.8), vemos que

$$\begin{aligned} \omega_{2q} &:= \int_{\Omega_{2q}} d\omega_{2q} \\ &= 2\pi\omega_{2q-2}\int_0^1 t(1-t^2)^{q-2} dt. \end{aligned}$$

Como $\omega_2 = 2\pi$, segue, por indução e cálculo direto, que

$$\omega_{2q} = \frac{2\pi^q}{(q-1)!}.$$

A seguir apresentamos alguns resultados técnicos envolvendo a medida acima e necessários na prova do resultado fundamental informado no início desta seção. O primeiro deles estabelece uma propriedade de ortogonalidade entre os (elementos dos) vários espaços $\mathcal{H}^q_{m,n}$ em relação ao produto interno dado por

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle := \int_{\Omega_{2q}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\omega_{2q}(\zeta). \tag{1.9}$$

Proposição 1.2.7. *Se* $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$*, então*

$$\int_{\Omega_{2q}} f_1(\xi)\overline{f_2(\xi)} d\omega_{2q}(\xi) = 0, \quad f_i \in \mathcal{H}^q_{m_i,n_i}, \quad i = 1, 2.$$

Prova. Pela observação feita na seção anterior, f_1 e f_2 são harmônicos esféricos (no sentido clássico) de graus $m_1 + n_1$ e $m_2 + n_2$, respectivamente. Como tais harmônicos esféricos são ortogonais quando possuem graus diferentes ([32, p. 21]) e as medidas de superfícies de Ω_{2q} e S^{2q-1} coincidem (ver Apêndice A), a propriedade vale no caso em que $m_1 + n_1 \neq m_2 + n_2$. Assumamos então que $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$. Essa condição e a hipótese garantem que $m_1 - n_1 \neq m_2 - n_2$. Tomando-se um número real φ tal que

$\varphi(m_1 - n_1 - m_2 + n_2)/2\pi$ não seja inteiro e considerando o operador $T = \exp(-i\varphi)I$ em $U(q)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2q}} f_1(\xi)\overline{f_2(\xi)}d\omega_{2q}(\xi) &= \int_{\Omega_{2q}} f_1(\xi)\overline{f_2(\xi)}d\omega_{2q}(T^{-1}\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} f_1(T\eta)\overline{f_2(T\eta)}d\omega_{2q}(\eta) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} f_1(e^{-i\varphi}\xi)\overline{f_2(e^{-i\varphi}\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= e^{-i((m_1-n_1)-(m_2-n_2))\varphi} \int_{\Omega_{2q}} f_1(\xi)\overline{f_2(\xi)}d\omega_{2q}(\xi), \quad \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade se justifica pelo fato dos polinômios serem homogêneos. O resultado segue já que a exponencial não é identicamente igual a 1. ■

O lema a seguir fornece uma caracterização de função zonal mais apropriada para o que segue.

Lema 1.2.8. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2 e ζ um elemento de Ω_{2q}. Uma função é ζ-zonal se, e somente se, é da forma*

$$\xi \in \Omega_{2q} \longrightarrow g(\langle \xi, \zeta \rangle)$$

para alguma função contínua g definida em B_2.

Prova. Seja f uma função da forma

$$f(\xi) = g(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad \xi \in \Omega_{2q},$$

para alguma função g definida em B_2. Então,

$$f(T\xi) = g(\langle T\xi, \zeta \rangle) = g(\langle \xi, T^*\zeta \rangle) = g(\langle \xi, \zeta \rangle) = f(\xi), \quad T \in U_\zeta(q-1),$$

e portanto, f é ζ-zonal.

Reciprocamente, suponhamos que f seja uma função ζ-zonal. Seja $\xi \in \Omega_{2q}$ e o representemos como na Equação (1.5). Tomemos η tal que $\langle \zeta, \eta \rangle = 0$. Como existe um operador

$T \in U_\zeta(q-1)$ tal que $T\xi' = \eta$, segue que

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(te^{i\varphi}\zeta + \sqrt{1-t^2}\xi') \\ &= f(te^{i\varphi}\zeta + \sqrt{1-t^2}\eta) \\ &= f(te^{i\varphi}\zeta + \sqrt{1-t^2|e^{i\varphi}|^2}\eta) \\ &= f(te^{i\varphi}\zeta + \sqrt{1-|te^{i\varphi}|^2}\eta), \end{aligned}$$

a qual é uma função contínua de $te^{i\varphi} = \langle \xi, \zeta \rangle$. ■

Lema 1.2.9. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2, ζ um elemento de Ω_{2q} e representemos os pontos de Ω_{2q} como na Equação (1.6). Se f é uma função ζ-zonal em $\Pi^{o,q}_{m,n}$, então existe um polinômio p (real) de grau no máximo $m \wedge n$ tal que*

$$f(\xi) = e^{i(m-n)\varphi}(\cos\theta)^{|m-n|}p(\cos 2\theta), \quad \xi \in \Omega_{2q}. \tag{1.10}$$

Prova. Fixemos ξ em Ω_{2q}. Como f é homogênea de grau m na variável z e de grau n na variável $\overline{z}$, segue que

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f\left((\cos\theta)e^{i\varphi}\zeta + (\operatorname{sen}\theta)\xi'\right) \\ &= f\left(e^{i\varphi}((\cos\theta)\zeta + (\operatorname{sen}\theta)e^{-i\varphi}\xi')\right) \\ &= e^{i(m-n)\varphi} f\left((\cos\theta)\zeta + (\operatorname{sen}\theta)e^{-i\varphi}\xi'\right). \end{aligned}$$

Dado $\psi \in \mathbb{R}$, existe um operador T em $U_\zeta(q-1)$ tal que $T(\exp(-i\varphi)\xi') = \exp(i\psi)\eta$, onde $\langle \eta, \zeta \rangle = 0$. Como f é ζ-zonal

$$f(\xi) = f(T\xi) = e^{i(m-n)\varphi} f\left((\cos\theta)\zeta + (\operatorname{sen}\theta)e^{i\psi}\eta\right), \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Além disso, existe um operador linear A tal que $A\varepsilon_1 = \zeta$ e $A(\exp(i\psi)\varepsilon_2) = \exp(i\psi)\eta$. Assim,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e^{i(m-n)\varphi} f\left((\cos\theta)A\,\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)A(e^{i\psi}\varepsilon_2)\right) \\ &= e^{i(m-n)\varphi}(f \circ A)\left((\cos\theta)\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)e^{i\psi}\varepsilon_2\right), \quad \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima em relação a ψ, obtemos

$$f(\xi) = e^{i(m-n)\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f \circ A)\left((\cos\theta)\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)e^{i\psi}\varepsilon_2\right)d\psi.$$

Pela homogeneidade da função $f \circ A$ podemos expandi-la na forma

$$\begin{aligned}
&(f \circ A)\left((\cos\theta)\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)e^{i\psi}\varepsilon_2\right) = \\
&\quad = (f \circ A)(\cos\theta, (\operatorname{sen}\theta)\, e^{i\psi}, 0, \dots, 0, \cos\theta, (\operatorname{sen}\theta)\, e^{-i\psi}, 0, \dots, 0) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}(\cos\theta)^{m-k}((\operatorname{sen}\theta)e^{i\psi})^k(\cos\theta)^{n-l}((\operatorname{sen}\theta)e^{-i\psi})^l \\
&\quad = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}(\cos\theta)^{m+n-k-l}(\operatorname{sen}\theta)^{k+l}e^{i(k-l)\psi}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= e^{i(m-n)\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f \circ A)\left((\cos\theta)\,\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)\, e^{i\psi}\varepsilon_2\right) d\psi \\
&= e^{i(m-n)\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}(\cos\theta)^{m+n-k-l}(\operatorname{sen}\theta)^{k+l}e^{i(k-l)\psi}d\psi \\
&= e^{i(m-n)\varphi}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}(\cos\theta)^{m+n-k-l}(\operatorname{sen}\theta)^{k+l}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\psi}d\psi \\
&= e^{i(m-n)\varphi}\sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}(\cos\theta)^{m+n-2k}(\operatorname{sen}\theta)^{2k} \\
&= e^{i(m-n)\varphi}(\cos\theta)^{|m-n|}\sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}(\cos\theta)^{2(m\wedge n-k)}(\operatorname{sen}\theta)^{2k} \\
&= e^{i(m-n)\varphi}(\cos\theta)^{|m-n|}\sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^{m\wedge n-k}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

Note que o polinômio

$$p(t) := \sum_{k=0}^{m\wedge n} a_{k,k}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{m\wedge n-k}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{k}$$

independe de ξ e, portanto, concluímos o lema. ■

Lema 1.2.10. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2, f um elemento de $\mathcal{H}^q_{m,n}$ e ζ um elemento de Ω_{2q}. Representemos os pontos de Ω_{2q} como na Equação* (1.6)*. Então, f é ζ-zonal se, e somente se,*

$$f(\xi) = Me^{i(m-n)\varphi}(\cos\theta)^{|m-n|}R^{(q-2,|m-n|)}_{m\wedge n}(\cos 2\theta), \quad \xi \in \Omega_{2q}, \tag{1.11}$$

para alguma constante M.

Prova. Assumamos inicialmente que f seja representável como na Equação (1.11). Como f não depende do ξ' presente na representação de ξ, segue que

$$(f \circ T)(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega_{2q}, \quad T \in U_\zeta(q-1).$$

Portanto, f é ζ-zonal.

Reciprocamente, suponhamos que f seja ζ-zonal e definamos $k := m-n$. Pelo Lema 1.2.9, podemos escrever

$$f(\xi) = e^{ik\varphi}(\cos\theta)^{|k|}p(\cos 2\theta), \quad \xi \in \Omega_{2q}, \tag{1.12}$$

onde p é um polinômio de grau no máximo $m \wedge n$. Notemos agora que dado um inteiro l não negativo, $l \neq m \wedge n$, existe pelo menos um par (m', n') tal que $m'-n' = k$ e $m' \wedge n' = l$. Se f_l é um elemento ζ-zonal de $\mathcal{H}^q_{m',n'}$, então

$$f_l(\xi) = e^{ik\varphi}(\cos\theta)^{|k|}p_l(\cos 2\theta), \quad \xi \in \Omega_{2q}, \tag{1.13}$$

onde p_l é um polinômio de grau no máximo l. Pela Proposição 1.2.7, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_{2q}} f(\xi)\overline{f_l(\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} e^{ik\varphi}(\cos\theta)^{|k|}p(\cos 2\theta)e^{-ik\varphi}(\cos\theta)^{|k|}p_l(\cos 2\theta)d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q-2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2|k|}p(\cos 2\theta)p_l(\cos 2\theta)\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}d\theta d\varphi d\omega_{2q-2}(\xi) \\
&= 2\pi\omega_{2q-2}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2|k|}p(\cos 2\theta)p_l(\cos 2\theta)\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}d\theta \\
&= 2\pi\omega_{2q-2}\int_0^{\pi/2}p(\cos 2\theta)p_l(\cos 2\theta)(\cos\theta)^{2|k|}(\operatorname{sen}\theta)^{2q-4}\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Fazendo-se $\cos 2\theta = x$, temos

$$\int_{-1}^{1} p(x)p_l(x)(1+x)^{|k|}(1-x)^{q-2}dx = 0. \tag{1.14}$$

Como l é arbitrário, segue, pelo Lema 1.2.1, que

$$p(x) = MR^{(q-2,|k|)}_{m\wedge n}(x),$$

para alguma constante M. Este resultado, junto com a Equação (1.12) prova o lema. ■

Teorema 1.2.11. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2, f um elemento de $\mathcal{H}^q_{m,n}$ e ζ um elemento de Ω_{2q}. Então, f é ζ-zonal se, e somente se,*

$$f(\xi) = f(\zeta) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Prova. Suponhamos que f seja ζ-zonal. Decompondo-se $\xi \in \Omega_{2q}$ como na Equação (1.6) obtemos, pelo Lema 1.2.10, que

$$f(\xi) = M R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Como $R^{q-2}_{m,n}(\langle \zeta, \zeta \rangle) = R^{q-2}_{m,n}(1) = 1$, segue que $M = f(\zeta)$. Claramente a recíproca é verdadeira. ■

O próximo resultado fornece uma decomposição para os elementos ζ-zonais de $\mathcal{H}^q_{m,n}$ em termos de uma base ortonormal fixada deste espaço.

Teorema 1.2.12. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2 e $\{Y^q_1, Y^q_2, \ldots, Y^q_{N(q;m,n)}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}^q_{m,n}$, em relação ao produto interno definido na Equação* (1.9)*. A seguinte decomposição vale*

$$R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \zeta \rangle) = \frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} Y^q_k(\xi) \overline{Y^q_k(\zeta)}, \quad \xi, \zeta \in \Omega_{2q}. \tag{1.15}$$

Prova. Pelo Lema 1.1.3,

$$Y^q_k(T\xi) \in \mathcal{H}^q_{m,n}, \quad T \in U(q), \quad 1 \leq k \leq N(q;m,n).$$

Como $\{Y^q_1, Y^q_2, \ldots, Y^q_{N(q;m,n)}\}$ é uma base de $\mathcal{H}^q_{m,n}$, existem coeficientes $u_{kj}(T)$ tais que

$$Y^q_k(T\xi) = \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} u_{kj}(T) Y^q_j(\xi). \tag{1.16}$$

Usando a invariância de $d\omega_{2q}$ em relação a elementos de $U(q)$ e a ortonormalidade da base, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \int_{\Omega_{2q}} Y_i^q(\xi)\overline{Y_j^q(\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} Y_i^q(\xi)\overline{Y_j^q(\xi)}d\omega_{2q}(T^*\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} Y_i^q(T\xi)\overline{Y_j^q(T\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} u_{ik}(T)Y_k^q(\xi) \sum_{l=1}^{N(q;m,n)} \overline{u_{jl}(T)Y_l^q(\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} \sum_{l=1}^{N(q;m,n)} u_{ik}(T)\overline{u_{jl}(T)}Y_k^q(\xi)\overline{Y_l^q(\xi)}d\omega_{2q}(\xi).
\end{aligned}$$

Trocando-se a integral com as somas, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} \sum_{l=1}^{N(q;m,n)} u_{ik}(T)\overline{u_{jl}(T)} \int_{\Omega_{2q}} Y_k^q(\xi)\overline{Y_l^q(\xi)}d\omega_{2q}(\xi) \\
&= \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} u_{ik}(T)\overline{u_{jk}(T)}, \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

ou seja, a matriz

$$(u_{jk}(T)), \quad T \in U(q),$$

é unitária. Conseqüentemente, a matriz transposta $(u_{kj}(T))$ também é unitária, isto é,

$$\sum_{k=1}^{N(q;m,n)} u_{ki}(T)\overline{u_{kj}(T)} = \delta_{ij}, \quad T \in U(q). \qquad (1.18)$$

Definamos agora uma função f pela expressão

$$f(\xi,\zeta) := \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} Y_j^q(\zeta)\overline{Y_j^q(\xi)}, \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}.$$

Segue das Equações (1.16) e (1.18) que

$$\begin{aligned}
f(T\xi,T\zeta) &= \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \sum_{i=1}^{N(q;m,n)} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} u_{jk}(T)\overline{u_{ji}(T)}Y_k^q(\zeta)\overline{Y_i^q(\xi)} \\
&= \sum_{i=1}^{N(q;m,n)} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} Y_k^q(\zeta)\overline{Y_i^q(\xi)} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} u_{jk}(T)\overline{u_{ji}(T)} \\
&= \sum_{i=1}^{N(q;m,n)} Y_i^q(\zeta)\overline{Y_i^q(\xi)} = f(\xi,\zeta), \quad T \in U(q), \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}.
\end{aligned}$$

Fixando-se $\zeta \in \Omega_{2q}$, vemos que a função resultante $f(\cdot,\zeta)$ é ζ-zonal, pois

$$f(T\xi,\zeta) = f(T\xi,T\zeta) = f(\xi,\zeta), \quad T \in U_\zeta(q-1), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Além disso, $\overline{f(\cdot,\zeta)}$ está em $\mathcal{H}^q_{m,n}$. Logo, pelo Teorema 1.2.11,

$$f(\xi,\zeta) = f(\zeta,\zeta)\overline{R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi,\zeta\rangle)}, \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}. \tag{1.19}$$

Analogamente, podemos concluir que

$$f(\xi,\zeta) = f(\xi,\xi)\overline{R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi,\zeta\rangle)}, \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}.$$

Logo,

$$f(\xi,\xi)\overline{R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi,\zeta\rangle)} = f(\zeta,\zeta)\overline{R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi,\zeta\rangle)}, \quad \xi,\zeta \in \Omega_{2q}. \tag{1.20}$$

Como $R^{q-2}_{m,n}$ não é identicamente nulo, segue que $f(\xi,\xi) = f(\zeta,\zeta)$, $\xi,\zeta \in \Omega_{2q}$, ou seja, f é constante na diagonal de Ω^2_{2q}. Além disso,

$$\begin{aligned}
f(\zeta,\zeta)\omega_{2q} &= \int_{\Omega_{2q}} f(\zeta,\zeta)d\omega_{2q}(\zeta) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} Y^q_j(\zeta)\overline{Y^q_j(\zeta)}d\omega_{2q}(\zeta) \\
&= \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \int_{\Omega_{2q}} Y^q_j(\zeta)\overline{Y^q_j(\zeta)}d\omega_{2q}(\zeta) \\
&= \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} 1 = N(q;m,n).
\end{aligned}$$

Assim,

$$f(\zeta,\zeta) = \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}},$$

e substituindo-se este valor na Equação (1.19) obtemos o resultado. ■

Observação 1.2.13. *Ortonormalidade em $\mathcal{H}^q_{m,n}$ sempre referir-se-á ao produto interno definido na Equação* (1.9).

Exemplo 1.2.14. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2 e X um subconjunto de Ω_{2q}. A função $R^{q-2}_{m,n}$ é positiva definida em X.*

De fato, se $N \geq 1$, $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\} \subset \mathbb{C}$, então pelo Teorema 1.2.12,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} Y^q_j(\xi_\mu)\overline{Y^q_j(\xi_\nu)} \\
&= \frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y^q_j(\xi_\mu) \sum_{\nu=1}^{N} \overline{c_\nu} \overline{Y^q_j(\xi_\nu)} \\
&= \frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y^q_j(\xi_\mu) \right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Concluímos esta seção com a Fórmula de Adição para polinômios no disco. Esta fórmula foi provada quase que simultaneamente por Šapiro ([39]) e Koornwinder ([19]). Este último autor obteve sua famosa fórmula de adição para polinômios de Jacobi ([20]) utilizando inicialmente a fórmula de adição para polinômios no disco. A prova da fórmula não será incluída no trabalho pois a mesma é relativamente longa. De qualquer forma, uma prova detalhada pode ser encontrada em [19]. A Fórmula de Adição propriamente dita é:

$$\begin{aligned}
&R^{\alpha}_{m,n}((\cos\theta_1)\, e^{i\varphi_1} (\cos\theta_2)\, e^{i\varphi_2} + (\operatorname{sen}\theta_1)\,(\operatorname{sen}\theta_2)\, w) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b^{k,l}_{m,n,\alpha} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_1,\varphi_1)\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_2,\varphi_2)} R^{\alpha-1}_{k,l}(w),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ e $w \in B_2$. As funções $Q^{k,l}_{m,n}$ são definidas por

$$Q^{k,l}_{m,n}(\theta,\varphi) := (\operatorname{sen}\theta)^{k+l}\, R^{\alpha+k+l}_{m-k,n-l}((\cos\theta)\, e^{i\varphi}), \quad (\theta,\varphi) \in [0,\pi/2] \times [0,2\pi).$$

As constantes $b^{k,l}_{m,n,\alpha}$ são todas positivas e dadas por

$$b^{k,l}_{m,n,\alpha} := \frac{\alpha\, m!\, n!\, (\alpha+n+1)_k(\alpha+m+1)_l}{(\alpha+k+l)(m-k)!(n-l)!(\alpha+l)_k(\alpha+k)_l},$$

onde

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)},$$

Γ representando a função Gama usual.

Capítulo 2

Funções positivas definidas em esferas complexas

Neste capítulo, apresentaremos uma caracterização completa das funções positivas definidas em Ω_{2q}, generalizando assim, o resultado de I. J. Schoenberg ([41]) sobre funções positivas definidas em esferas reais. Apesar de ter alguma analogia com os argumentos usados por Schoenberg, a metodologia empregada na prova do nosso resultado é radicalmente diferente daquela usada por Schoenberg, não fazendo uso de nenhum sistema particular de coordenadas. Soluções de certos problemas de Dirichlet na bola fechada unitária B_{2q} de $\mathbb{C}^q$ indicam como devem ser as funções positivas definidas em Ω_{2q}. O núcleo de Poisson-Szegő é o gerador natural de soluções para tal problema de Dirichlet e estabelece um elo entre polinômios no disco e funções hipergeométricas.

2.1 Núcleo de Poisson-Szegő

Nesta seção, introduziremos o conhecido núcleo de Poisson-Szegő. Este núcleo será usado nas Seções 2.3 e 2.4, onde caracterizaremos as funções positivas definidas em Ω_{2q}. Para mais informações sobre o núcleo de Poisson-Szegő ver [21, 42].

Consideremos $A_2(B_{2q})$ o espaço de Hilbert das funções holomorfas em B_{2q} com o produto interno

$$\prec f, g \succ := \int_{B_{2q}} f(z)\overline{g(z)}ds(z),$$

onde ds denota a medida Euclideana em $\mathbb{C}^q$. Seja $\{\phi_1(z), \phi_2(z), \dots\}$ uma base ortonormal de $A_2(B_{2q})$. A série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)\overline{\phi_j(w)}, \quad z, w \in B_{2q},$$

converge uniformemente em todo subconjunto compacto de B_{2q}^2. Sua soma $K(z,w)$, conhecida na literatura como o *núcleo de Bergman* ([21, p. 40 e 41], [42, p. 15 e 16]), é independente da escolha da base e está caracterizada pelas seguintes propriedades:

(1) $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$, $z, w \in B_{2q}$.

(2) Para cada $w \in B_{2q}$ fixado, $K(z,w) \in A_2(B_{2q})$.

(3) Se $f \in A_2(B_{2q})$, então

$$f(z) = \int_{B_{2q}} K(z,w) f(w) ds, \quad z \in B_{2q}.$$

O núcleo de Poisson-Szegő pode ser definido de forma análoga ao núcleo de Bergman. Para isso, consideremos $A(B_{2q})$ o conjunto das funções contínuas em B_{2q} que são holomorfas em $B_{2q} \setminus \Omega_{2q}$. Denotemos por $A(B_{2q})|_{\Omega_{2q}}$ o conjunto das restrições dos elementos de $A(B_{2q})$ a Ω_{2q} e por $H_2(\Omega_{2q})$ o fecho de $A(B_{2q})|_{\Omega_{2q}}$ em $L^2(\Omega_{2q}, d\omega_{2q})$. Então, $H_2(\Omega_{2q})$ é um subespaço de Hilbert de $L^2(\Omega_{2q}, d\omega_{2q})$. Cada elemento f de $H_2(\Omega_{2q})$ tem uma extensão holomorfa a B_{2q}, aqui também denotada por f. Se $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ é uma base ortonormal (em relação ao produto interno (1.9)) de $H_2(\Omega_{2q})$ então, como no caso do núcleo de Bergman, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(z)\overline{\psi_j(w)}, \quad z, w \in B_{2q},$$

converge uniformemente em cada subconjunto compacto de B_{2q}^2. Sua soma $S(z,w)$, denominada *núcleo de Szegő* ([21, p. 54 e 55], [42, p. 18]), é então independente da escolha da base e possui as seguintes propriedades:

(1) Para cada $z \in B_{2q}$ fixado, $\overline{S(z,w)} \in H_2(\Omega_{2q})$.

(2) Se $f \in H_2(\Omega_{2q})$, então

$$f(z) = \int_{\Omega_{2q}} S(z,\zeta) f(\zeta) d\omega_2(\zeta), \quad z \in B_{2q}.$$

Finalmente, o *núcleo de Poisson-Szegő* é dado pela fórmula

$$\mathcal{P}_q(z,\zeta) := \frac{|S(z,\zeta)|^2}{S(z,z)}, \quad (z,\zeta) \in B_{2q} \times \Omega_{2q}.$$

Algumas propriedades básicas deste núcleo são:

1. $\mathcal{P}_q \geq 0$.

2. $\mathcal{P}_1$ coincide com o núcleo de Poisson convencional (o qual aparece na Teoria Geométrica das Funções Harmônicas em $\mathbb{R}^2$). Daremos mais detalhes desta propriedade na Seção 2.3.

3. Vale a expressão ([42])

$$\mathcal{P}_q(z,\zeta) = \frac{(q-1)!}{2\pi^q}\frac{(1-|z|^2)^q}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2q}}, \quad (z,\zeta) \in B_{2q} \times \Omega_{2q}. \tag{2.1}$$

O *operador de Laplace-Beltrami* Δ_{2q} associado à métrica de Bergman em B_{2q} ([42, p. 25]) está normalmente relacionado com o núcleo de Poisson-Szegő e pode ser definido por

$$\Delta_{2q} = \frac{4}{q+1}\left(1-|z|^2\right)\sum_{\mu,\nu=1}^{q}(\delta_{\mu\nu} - z^\mu \overline{z^\nu})\frac{\partial^2}{\partial z^\mu \partial \overline{z^\nu}}, \quad z = (z^1, z^2, \ldots, z^q) \in B_{2q}.$$

Observamos que ([42, p. 27])

$$\Delta_{2q}(\mathcal{P}_q(\cdot,\zeta)) = 0, \quad \zeta \in \Omega_{2q}.$$

O núcleo de Poisson-Szegő aparece como principal ferramenta no seguinte problema de Dirichlet ([42]):

Teorema 2.1.1. *Dada uma função contínua $f : \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$, existe uma função contínua $u : B_{2q} \to \mathbb{C}$ tal que $\Delta_{2q}u = 0$ e $u|\Omega_{2q} = f$. A solução u pode ser calculada pela fórmula*

$$u(z) = \int_{\Omega_{2q}} \mathcal{P}_q(z,\zeta)f(\zeta)d\omega_{2q}(\zeta), \quad z \in B_{2q}.$$

Consideremos, agora, a função hipergeométrica $F(a,b,c;t)$ associada a tripla (a,b,c). Tal função é dada pela expressão ([37, p. 45]):

$$F(a,b,c;t) := \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+j)}\frac{t^j}{j!}, \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad c > 0, \quad -1 < t < 1.$$

Observemos que se $c > a+b$, então ([37, p. 48])

$$\lim_{t\to 1^-} F(a,b,c;t) = F(a,b,c;1).$$

O Teorema 2.1.2 abaixo é o resultado principal em [11], e fornece uma representação em série de polinômios no disco para o núcleo de Poisson-Szegő. Os coeficientes nesta representação dependem da função $S^q_{m,n}$ dada por

$$S^q_{m,n}(r) := r^{m+n}\frac{F(m,n,m+n+q;r^2)}{F(m,n,m+n+q;1)}, \quad (m,n)\in\mathbb{N}^2, \quad q\geq 2, \quad 0\leq r<1.$$

Claramente

$$S^q_{m,n}(r)\geq 0, \quad (m,n)\in\mathbb{N}^2, \quad q\geq 2, \quad 0\leq r<1$$

e

$$\lim_{r\to 1^-} S^q_{m,n}(r)=1.$$

Teorema 2.1.2. *Seja q um inteiro maior ou igual a 2. Então,*

$$\mathcal{P}_q(r\xi,\zeta)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}}S^q_{m,n}(r)R^{q-2}_{m,n}(\langle\xi,\zeta\rangle), \quad \xi,\zeta\in\Omega_{2q}, \quad 0\leq r<1.$$

A série converge absolutamente e uniformemente em $\{(r\xi,\zeta):\xi,\zeta\in\Omega_{2q}, 0\leq r\leq\rho\}$, $\rho<1$.

2.2 Condições necessárias para positividade definida em Ω_{2q}

O resultado apresentado nesta seção é um passo importante para a caracterização de funções positivas definidas em Ω_{2q}. Um teorema parecido para funções positivas definidas em $\mathbb{R}$ foi provado por W. H. Young ([50]).

Lema 2.2.1. *Se uma função contínua f é positiva definida em Ω_{2q}, então*

$$\int_{\Omega_{2q}}\int_{\Omega_{2q}} f(\langle\xi,\zeta\rangle)g(\xi)\,\overline{g(\zeta)}\,d\omega_{2q}(\xi)d\omega_{2q}(\zeta)\geq 0,$$

para toda função contínua $g:\Omega_{2q}\to\mathbb{C}$.

Prova. Sejam f uma função positiva definida em Ω_{2q} e g uma função contínua em Ω_{2q}. Como a desigualdade

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu\overline{c_\nu}f(\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle)\geq 0,$$

vale para todo inteiro positivo N, $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset \Omega_{2q}$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\} \subset \mathbb{C}$, tomando-se $N \geq 2$ e $c_\mu = g(\xi_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, obtemos

$$\sum_{\mu=1}^{N} |g(\xi_\mu)|^2 f(1) + \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} g(\xi_\mu)\overline{g(\xi_\nu)} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) \geq 0.$$

Integrando a desigualdade acima em relação a ξ_μ e ξ_ν, obtemos

$$\sum_{\mu=1}^{N} \omega_{2q} f(1) \int_{\Omega_{2q}} |g(\xi_\mu)|^2 d\omega_{2q}(\xi_\mu) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} \int_{\Omega_{2q}} \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) g(\xi_\mu)\overline{g(\xi_\nu)}\, d\omega_{2q}(\xi_\mu) d\omega_{2q}(\xi_\mu) \geq 0.$$

Logo,

$$N\, \omega_{2q} f(1) \int_{\Omega_{2q}} |g(\xi)|^2 d\omega_{2q}(\xi) + N(N-1) \int_{\Omega_{2q}} \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta \rangle) g(\xi)\overline{g(\zeta)}\, d\omega_{2q}(\xi) d\omega_{2q}(\zeta) \geq 0.$$

A continuidade de g implica que a integral simples acima é finita. Portanto, dividindo a desigualdade anterior por $N(N-1)$ e fazendo N tender para o infinito, deduzimos que

$$\int_{\Omega_{2q}} \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta \rangle) g(\xi)\overline{g(\zeta)}\, d\omega_{2q}(\xi) d\omega_{2q}(\zeta) \geq 0,$$

concluindo o lema. ■

Corolário 2.2.2. *Se uma função contínua f é positiva definida em Ω_{2q}, então*

$$\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta \rangle) d\omega_{2q}(\xi) \geq 0, \quad \zeta \in \Omega_{2q}.$$

Prova. Fazendo-se $g \equiv 1$ no Lema 2.2.1, segue que

$$\int_{\Omega_{2q}} \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta \rangle) d\omega_{2q}(\xi) d\omega_{2q}(\zeta) \geq 0.$$

Para concluirmos a prova, basta mostrarmos a validade da seguinte propriedade de invariância:

$$\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta \rangle) d\omega_{2q}(\xi) = \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\xi), \quad \zeta, \eta \in \Omega_{2q}.$$

Como isso é certamente verdadeiro para o caso $q = 1$, assumiremos que $q \geq 2$. Decompondo o ponto ξ como na Equação (1.6), sabemos que

$$d\omega_{2q}(\xi) = \cos\theta (\operatorname{sen}\theta)^{2q-3} d\theta d\varphi d\omega_{2q-2}(\xi').$$

Fazendo-se as mudanças de coordenadas $r = \cos\theta$ e $\varphi = \rho$, obtemos

$$d\omega_{2q}(\xi) = -r(1-r^2)^{q-2} dr d\rho d\omega_{2q-2}(\xi'),$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, e^{i\varphi}\zeta\rangle) d\omega_{2q}(\xi) = 2\pi\omega_{2q-2}\int_0^1 r(1-r^2)^{q-2} f(r) dr.$$

Obviamente esta última integral é independente de φ e ζ. Tomando-se um elemento T em $U(q)$ tal que $T(\exp(i\varphi)\zeta) = \zeta$ e usando-se a invariância de $d\omega_{2q}$ em relação a elementos de $U(q)$, obtemos, finalmente,

$$\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta\rangle) d\omega_{2q}(\xi) = \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, e^{i\varphi}\zeta\rangle) d\omega_{2q}(\xi).$$

O resultado segue. ■

Observação 2.2.3. *Da prova do Corolário 2.2.2, concluímos que se f é positiva definida em Ω_{2q}, então a integral*

$$\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \xi, \zeta\rangle) d\omega_{2q}(\xi)$$

independe de $\zeta \in \Omega_{2q}$.

2.3 Funções positivas definidas em Ω_2

Iniciaremos esta seção observando que o núcleo de Poisson-Szegő em Ω_2 é um "múltiplo" do núcleo de Poisson convencional. De fato, escrevendo-se $z = r\exp(i\theta)$ e $\zeta = \exp(i\varphi)$ e voltando à Equação (2.1), obtemos

$$\mathcal{P}_1(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} := P(r,\theta-\varphi),$$

onde $P(r,\theta-\varphi)$ é o núcleo de Poisson convencional. Como $P(r,\theta-\varphi)$ tem uma expansão da forma

$$P(r,\theta-\varphi) = 1 + 2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} r^k \cos k(\theta-\varphi), \quad \theta,\varphi\in[0,2\pi), \quad 0\le r<1,$$

podemos escrever

$$\mathcal{P}_1(r\xi,\zeta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\langle \xi,\zeta\rangle^k, \quad \xi,\zeta\in\Omega_2, \quad 0\le r<1. \tag{2.2}$$

Como a série converge uniformemente em r, ξ e ζ, fixada uma função contínua g, a solução do problema de Dirichlet em Ω_2 dada no Teorema 2.1.1 pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u(r\xi) &:= \int_{\Omega_2} \mathcal{P}_1(r\xi,\zeta)g(\zeta)d\omega_2(\zeta) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\int_{\Omega_2} g(\zeta)\langle\xi,\zeta\rangle^k d\omega_2(\zeta), \quad \xi\in\Omega_2, \quad 0\le r<1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observando o Teorema 2.1.1, vemos então que uma função contínua $g:\Omega_2\to\mathbb{C}$ pode ser representada por uma série da forma

$$g(\xi)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_2} g(\zeta)\langle\xi,\zeta\rangle^k d\omega_2(\zeta), \quad \xi\in\Omega_2.$$

Nosso próximo resultado é uma conseqüência desta representação e do Corolário 2.2.2.

Teorema 2.3.1. *Uma função contínua f é positiva definida em Ω_2 se, e somente se,*

$$f(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)\xi^k, \quad \xi\in\Omega_2,$$

onde $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)<\infty$ e $a_k^1(f)\ge 0$ para todo k.

Prova. Seja f uma função positiva definida em Ω_2. Para $\eta\in\Omega_2$, a função $f(\langle\cdot,\eta\rangle)$ pode ser representada na forma

$$\begin{aligned} f(\langle\xi,\eta\rangle) &\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_2} f(\langle\zeta,\eta\rangle)\langle\xi,\zeta\rangle^k d\omega_2(\zeta) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_2} f(\langle\zeta,\eta\rangle)\langle\eta,\zeta\rangle^k\langle\xi,\eta\rangle^k d\omega_2(\zeta) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\Omega_2} f(\langle\zeta,\eta\rangle)\langle\eta,\zeta\rangle^k d\omega_2(\zeta)\right)\langle\xi,\eta\rangle^k, \quad \xi\in\Omega_2. \end{aligned}$$

Pelos Exemplos 1.1.4, 1.1.8 e 1.1.6, a função $\xi\in\Omega_2\to f(\xi)\overline{\xi}^k$, $k\in\mathbb{Z}$, é positiva definida em Ω_2. Pelo Corolário 2.2.2 e pela Observação 2.2.3, a integral

$$a_k^1(f,\eta):=\int_{\Omega_2} f(\langle\zeta,\eta\rangle)\langle\eta,\zeta\rangle^k d\omega_2(\zeta)$$

é não negativa e independente de η. Logo,

$$f(\langle\xi,\eta\rangle)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)\,\langle\xi,\eta\rangle^k, \quad a_k^1(f)\ge 0, \quad \xi,\eta\in\Omega_2.$$

Como o produto interno entre elementos de Ω_2 é um elemento de Ω_2, podemos escrever

$$f(\xi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)\xi^k, \quad a_k^1(f) \geq 0, \quad \xi \in \Omega_2.$$

Para provarmos que f coincide com a série é suficiente mostrarmos que a série é absolutamente convergente em Ω_2. Mas, fazendo-se $r \to 1^-$ na desigualdade

$$\sum_{k=-m}^{m} a_k^1(f)r^{|k|}|\xi|^k \leq \sum_{k=-m}^{m} a_k^1(f)r^{|k|} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)r^{|k|}, \quad \xi \in \Omega_2, \quad m \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\sum_{k=-m}^{m} a_k^1(f)|\xi|^k \leq \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)r^{|k|} = f(1), \quad \xi \in \Omega_2, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde a igualdade acima justifica-se da seguinte forma. Pela Equação (2.3), temos que

$$u(r\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^1(f)r^{|k|}, \quad \eta \in \Omega_2.$$

Como a solução u é contínua e coincide com f em Ω_2, segue que

$$\lim_{r\to 1^-} u(r\eta) = u(\eta) = f(\langle \eta, \eta\rangle) = f(1).$$

Assim, a série representando $f(\xi)$ é absolutamente convergente em ξ mostrando que a função coincide com a série.

Reciprocamente, se f tem a representação em série como no enunciado do teorema, então os Exemplos 1.1.4 e 1.1.7 garantem que f é positiva definida em Ω_2. ■

Exemplo 2.3.2. *Seja ζ um elemento de Ω_2. A função $f(\langle\cdot,\zeta\rangle)$ definida por*

$$f(\langle \xi, \zeta\rangle) = \mathcal{P}_1(r\xi, \zeta), \quad \xi \in \Omega_2, \quad 0 \leq r < 1$$

é positiva definida em Ω_2.

De fato, pela Equação (2.2), podemos escrever

$$f(\langle \xi, \zeta\rangle) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\langle \xi, \zeta\rangle^k, \quad \xi \in \Omega_2.$$

Como, a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}$, $r \in [0, 1)$, é convergente, segue pelo Teorema 2.3.1, que f é positiva definida em Ω_2.

Exemplo 2.3.3. *Sejam n um inteiro não negativo e f como no exemplo anterior. A função f^n é positiva definida em Ω_2.*

De fato, isto segue diretamente do Exemplo 1.1.6.

2.4 Funções positivas definidas em Ω_{2q}, $1 < q < \infty$

Nesta seção, generalizaremos o Teorema 2.3.1, caracterizando as funções positivas definidas em Ω_{2q}, onde q é um inteiro maior ou igual a 2. A técnica empregada é idêntica àquela utilizada na Seção 2.3.

Para uma função contínua $f : \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$ consideramos novamente a solução do problema de Dirichlet em B_{2q}, isto é, definimos

$$u(r\xi) := \int_{\Omega_{2q}} \mathcal{P}_q(r\xi, \eta) f(\eta) d\omega_{2q}(\eta), \quad 0 \leq r < 1, \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Multiplicando-se a equação no Teorema 2.1.2 por $f(\eta)$ e integrando, obtemos

$$\int_{\Omega_{2q}} \mathcal{P}_q(r\xi, \eta) f(\eta) d\omega_{2q}(\eta) \quad = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} S^q_{m,n}(r) \int_{\Omega_{2q}} f(\eta) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta),$$

ou seja,

$$u(r\xi) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} S^q_{m,n}(r) \int_{\Omega_{2q}} f(\eta) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta), \quad 0 \leq r < 1, \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Lembrando que $\lim_{r\to 1^-} S^q_{m,n}(r) = 1$, podemos escrever

$$f(\xi) \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} \int_{\Omega_{2q}} f(\eta) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

A seguir, analisamos a identificação acima para o caso em que f é ζ-zonal. Definimos

$$\Psi(\xi) := \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \eta, \zeta \rangle) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta), \quad \xi \in \Omega_{2q},$$

e observamos que Ψ é ζ-zonal. De fato, como $d\omega_{2q}$ é invariante em relação a elementos de $U_\zeta(q-1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi(T\xi) &= \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \eta, T\zeta \rangle) R^{q-2}_{m,n}(\langle T\xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} f(\langle T^*\eta, \zeta \rangle) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, T^*\eta \rangle) d\omega_{2q}(T^*\eta) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \eta, \zeta \rangle) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta) = \Psi(\xi), \quad \xi \in \Omega_{2q}, \quad T \in U_\zeta(q-1).
\end{aligned}$$

Como a função $\xi \mapsto R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \zeta \rangle)$ é um elemento de $\mathcal{H}^q_{m,n}$, Ψ também é. Pelo Teorema 1.2.11, concluímos que

$$\Psi(\xi) = \Psi(\zeta) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad \xi \in \Omega_{2q}.$$

Assim, provamos o seguinte resultado.

Lema 2.4.1. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2 e ξ, ζ elementos de Ω_{2q}. Se f é uma função contínua em B_2, então vale a seguinte expansão:*

$$f(\langle \xi, \zeta \rangle) \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} \left(\int_{\Omega_{2q}} f(\langle \eta, \zeta \rangle) R_{m,n}^{q-2}(\langle \zeta, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta) \right) R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle).$$

Agora estamos preparados para provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.4.2. *Seja q um inteiro maior ou igual a 2. Uma função contínua f é positiva definida em Ω_{2q} se, e somente se,*

$$f(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}^q(f) R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B_2,$$

onde $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}^q(f) < \infty$ e $a_{m,n}^q(f) \geq 0$ para todo (m,n).

Prova. Primeiramente, seja f uma função positiva definida em Ω_{2q}. Pelo Lema 2.4.1, podemos escrever

$$f(\langle \xi, \zeta \rangle) \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} a_{m,n}^q(f,\zeta) R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad \xi, \zeta \in \Omega_{2q},$$

onde

$$a_{m,n}^q(f,\zeta) := \int_{\Omega_{2q}} f(\langle \eta, \zeta \rangle) R_{m,n}^{q-2}(\langle \zeta, \eta \rangle) d\omega_{2q}(\eta).$$

Pelo Corolário 2.2.2 e pela Observação 2.2.3, $a_{m,n}^q$ é não negativa e independente de ζ. Logo, podemos escrever

$$f(\langle \xi, \zeta \rangle) \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}^q(f) R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle), \quad a_{m,n}^q(f) \geq 0, \quad \xi, \zeta \in \Omega_{2q}.$$

Para ver que f coincide com a série, é suficiente observarmos que

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{k} a_{m,n}^q(f) S_{m,n}^q(r) |R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle)| &\leq \sum_{m,n=0}^{k} a_{m,n}^q(f) S_{m,n}^q(r) |R_{m,n}^{q-2}(1)| \\ &\leq \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}^q(f) S_{m,n}^q(r) R_{m,n}^{q-2}(1), \quad 0 \leq r < 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fazendo-se $r \to 1^-$, obtemos

$$\sum_{m,n=0}^{k} a_{m,n}^q(f) |R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle)| \leq \lim_{r\to 1^-} \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}^q(f) S_{m,n}^q(r) R_{m,n}^{q-2}(1) = f(1), \quad k \in \mathbb{N},$$

onde a última igualdade segue como na prova do Teorema 2.3.1. Assim, a série representando $f(\langle \xi, \zeta \rangle)$ é absolutamente convergente em ξ e ζ mostrando que a função coincide com a série. A representação desejada para f agora está clara, já que variando os pontos ξ e ζ em Ω_{2q}, o produto interno $\langle \xi, \zeta \rangle$ percorre B_2.

Reciprocamente, se f tem a representação em série como no enunciado do teorema, então, pelos Exemplos 1.2.14 e 1.1.7, f é positiva definida em Ω_{2q}. ■

2.5 Considerações finais

Todos os conceitos introduzidos até agora podem ser naturalmente adaptados para o caso da esfera de Hilbert complexa, isto é, a esfera unitária no espaço ℓ^2 complexo. Notemos que neste caso o produto interno de $\mathbb{C}^q$ deve ser substituído pelo produto interno usual de ℓ^2. As funções positivas definidas na esfera de Hilbert complexa Ω_∞ foram caracterizadas por Christensen e Ressel ([6]). Eles provaram que toda função positiva definida f em Ω_∞ tem a seguinte expansão em série

$$f(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^{\infty}_{m,n}(f) z^m \overline{z}^n, \quad a^{\infty}_{m,n}(f) \geq 0, \quad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a^{\infty}_{m,n}(f) < \infty, \quad z \in B_2.$$

Este resultado estende outro de Schoenberg ([41]), que caracteriza as funções positivas definidas na esfera de Hilbert real S^∞. Funções positivas definidas em Ω_∞ são positivas definidas em todas as esferas consideradas anteriormente. Por razões de uniformidade, adotaremos então a seguinte notação

$$R^{\infty}_{m,n}(z) := z^m \overline{z}^n.$$

A seguir, discutiremos um aspecto na relação entre positividade definida em Ω_{2q} e positividade definida em esferas reais.

Como Ω_{2q} contém uma cópia de S^{q-1}, segue que toda função positiva definida em Ω_{2q} é positiva definida em S^{q-1}. Por outro lado, funções positivas definidas em Ω_{2q} podem ser construídas a partir de funções positivas definidas em S^{2q-1}. Para justificarmos esse fato precisamos do seguinte resultado de Dreseler e Hrach ([8]), que relaciona os polinômios ultraesféricos com os polinômios no disco.

Lema 2.5.1. *Para todo número real α não negativo e todo inteiro k não negativo, existem constantes positivas $\{d(k,\alpha,m,n) : m+n=k\}$ tais que $d(k,\alpha,m,n) = d(k,\alpha,n,m)$ e*

$$R_k^{(\alpha+1/2,\alpha+1/2)}(Re\, z) = \sum_{m+n=k} d(k,\alpha,m,n) R_{m,n}^{\alpha}(z), \quad z \in B_2.$$

Os coeficientes $d(k,\alpha,m,n)$ podem ser calculados pela fórmula

$$d(k,\alpha,m,n) = \left(\int_{-1}^{1} \left|R_k^{(\alpha+1/2,\alpha+1/2)}(x)\right|^2 dw_{\alpha+1/2,\alpha+1/2}(x)\right)\left(\int_{B_2} \left|R_{m,n}^{\alpha}(z)\right|^2 dw_\alpha(z)\right)^{-1},$$

onde

$$dw_{\alpha+1/2,\alpha+1/2}(x) = c(\alpha)(1-x^2)^{\alpha+1/2}dx,$$

e $c(\alpha)$ é uma constante escolhida de forma que a medida tenha massa total unitária.

Observamos que a prova do Lema 2.5.1 para o caso $\alpha = \infty$ pode ser feita independentemente por indução sobre k.

Seja, agora, $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função positiva definida em S^{2q-1}, $q \geq 2$. Pelo Teorema de Schoenberg,

$$g(x) = \sum_{k\in K} a_k^{2q-1}(g) R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(x), \quad K \subset \mathbb{N}, \quad a_k^{2q-1}(g) \geq 0, \quad \sum_{k\in K} a_k^{2q-1}(g) < \infty. \tag{2.4}$$

Pelo Lema 2.5.1, obtemos

$$\begin{aligned} g(\mathrm{Re}\, z) &= \sum_{k\in K} a_k^{2q-1}(g) \sum_{m+n=k} d(k,q-2,m,n) R_{m,n}^{q-2}(z) \\ &= \sum_{k\in K}\sum_{m+n=k} a_k^{2q-1}(g) d(k,q-2,m,n) R_{m,n}^{q-2}(z) \\ &= \sum_{m+n\in K} a_{m+n}^{2q-1}(g) d(m+n,q-2,m,n) R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B_2. \end{aligned}$$

Devido as hipóteses sobre g, a soma resultante define uma função real f positiva definida em Ω_{2q}.

Portanto, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.5.2. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}$, q um inteiro maior ou igual a 2 e g uma função positiva definida em S^{2q-1} como na Equação (2.4). Então, a função f definida por*

$$f(z) = \sum_{(m,n)\in\mathcal{K}} a_{m+n}^{2q-1}(g) d(m+n,q-2,m,n) R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B_2,$$

onde $\mathcal{K} := \bigcup_{k\in K}\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m+n=k\}$ e os coeficientes $d(m+n,q-2,m,n)$ são dados pelo Lema 2.5.1, é positiva definida em Ω_{2q}.

Capítulo 3

Positividade definida estrita em esferas complexas

Seja q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$. Dada uma função positiva definida f em Ω_{2q} definamos

$$K_q(f) := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : a^q_{m,n}(f) > 0\}.$$

Para uma função positiva definida f em Ω_{2q}, $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos e N pontos distintos $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q} temos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = \sum_{(m,n)\in K_q(f)} a^q_{m,n}(f) \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle).$$

Como cada matriz $(R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é não negativa definida, se $\sum_{\mu=1}^{N} |c_\mu| > 0$, então concluímos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) > 0$$

se, e somente se,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) > 0,$$

para algum $(m, n) \in K_q(f)$. Em outras palavras, a positividade definida estrita de ordem N de f depende apenas do conjunto $K_q(f)$ e não dos valores dos coeficientes $a^q_{m,n}(f)$. Uma observação análoga vale para positividade definida estrita em Ω_2. De fato, para uma função positiva definida f em Ω_2 e N pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_2 temos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = \sum_{k\in K_1(f)} a^1_k(f) \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k, \tag{3.1}$$

onde $K_1(f) := \{k \in \mathbb{Z} : a_k^1(f) > 0\}$. Como as matrizes $(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k)$, $k \in K_1(f)$, são não negativas definidas, se $\sum_{\mu=1}^N |c_\mu| > 0$, então concluímos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^N c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) > 0$$

se, e somente se,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^N c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k > 0,$$

para algum $k \in K_1(f)$.

O parágrafo acima justifica a seguinte definição: Um subconjunto K de $\mathbb{N}^2$ (respectivamente, $\mathbb{Z}$) *induz positividade definida estrita (SPD) de ordem N em* Ω_{2q} (respectivamente, Ω_2), se toda função positiva definida f em Ω_{2q} (respectivamente, Ω_2) satisfazendo $K_q(f) = K$ é estritamente positiva definida de ordem N em Ω_{2q} (respectivamente, Ω_2).

Observação 3.0.3. *Segue diretamente da definição acima que, se um subconjunto K de $\mathbb{N}^2$ (respectivamente de $\mathbb{Z}$) induz SPD de ordem N ($N \geq 2$) em Ω_{2q} (respectivamente em Ω_2), então K induz SPD de ordem $N-1$ em Ω_{2q} (respectivamente em Ω_2).*

3.1 Positividade definida estrita em Ω_2

Começaremos com duas caracterizações de SPD. Uma delas é uma conseqüência direta da nossa definição, enquanto que a outra usa argumentos da teoria de núcleos de reprodução ([1]).

Lema 3.1.1. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) K induz SPD de ordem N em Ω_2;

(ii) Não existe função não nula da forma

$$z \in \Omega_2 \longrightarrow \sum_{\mu=1}^N c_\mu e^{i\theta_\mu z}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ são pontos distintos em $[0, 2\pi)$, anulando-se em K;

(iii) Se $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos em Ω_2 e f é uma função positiva definida em Ω_2 satisfazendo $K_1(f) = K$, então o conjunto

$$\{z \in \Omega_2 \longrightarrow f(\langle z, \xi_\mu \rangle) : \mu = 1, 2, \ldots, N\} \tag{3.3}$$

é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$.

Prova. A equivalência entre (i) e (ii) segue da Equação (3.1). De fato, escrevendo-se $\xi_\mu = \exp(i\theta_\mu)$, $\theta_\mu \in [0, 2\pi)$, a Equação (3.1) torna-se

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \sum_{k \in K} a_k^1(f) e^{i(\theta_\mu - \theta_\nu)k} \\
&= \sum_{k \in K} a_k^1(f) \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu k} \right|^2,
\end{aligned}$$

e a equivalência segue.

Agora, suponhamos que (iii) vale. Sejam f uma função positiva definida Ω_2 satisfazendo $K_1(f) = K$ e $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_2. Por integração sobre Ω_2, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle f(\langle \cdot, \xi_\mu \rangle), f(\langle \cdot, \xi_\nu \rangle)\rangle\rangle &= \int_{\Omega_2} f(\langle z, \xi_\mu \rangle) \overline{f(\langle z, \xi_\nu \rangle)} d\omega_2(z) \\
&= \sum_{k \in K} a_k^1(f) \sum_{l \in K} a_l^1(f) \int_{\Omega_2} \langle z, \xi_\mu \rangle^k \overline{\langle z, \xi_\nu \rangle^l} d\omega_2(z) \\
&= \sum_{k \in K} a_k^1(f) \sum_{l \in K} a_l^1(f) \langle \xi_\nu^l, \xi_\mu^k \rangle \int_{\Omega_2} \langle z^k, z^l \rangle d\omega_2(z) \\
&= \sum_{k \in K} 2\pi (a_k^1(f))^2 \langle \xi_\nu, \xi_\mu \rangle^k \\
&= \overline{g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n,
\end{aligned}$$

onde g é positiva definida em Ω_2 com $K_1(g) = K$. Assim, a matriz $(\overline{g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)})$, sendo uma matriz Gram gerada por um conjunto linearmente independente, é positiva definida. Como conjugação não interfere na positividade definida da matriz, $(g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ também é positiva definida. O fato de que $K_1(f) = K_1(g)$ agora implica que $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é positiva definida. Portanto, f é estritamente positiva definida de ordem N em Ω_2 e (i) segue.

Agora, suponhamos que (i) vale. Se uma combinação linear das funções

$$z \in \Omega_{2q} \longrightarrow f(\langle z, \xi_\nu \rangle)$$

é nula, então podemos substituir $z = \xi_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, obtendo um sistema linear de N equações, cuja matriz é $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$. Pela hipótese, todos os escalares na combinação linear devem ser nulos e (iii) segue. ■

Nosso próximo resultado estabelece a invariância de SPD em Ω_2 por translações de inteiros. Observamos que uma propriedade similar não vale para SPD em S^1 ([26]). Discutiremos a relação entre esses conceitos na próxima seção.

Teorema 3.1.2. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{Z}$, l um inteiro e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em Ω_2;
(ii) $K + l := \{k + l : k \in K\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2.

Prova. Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ pontos distintos em $[0, 2\pi)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos. Suponhamos que K induza SPD de ordem N em Ω_2. Se

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu(k+l)} = 0, \quad k \in K,$$

então, o Lema 3.1.1 implica que $c_\mu \exp(i\theta_\mu l) = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, de onde deduzimos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. Assim, pelo Lema 3.1.1, $K + l$ induz SPD de ordem N em Ω_2. Reciprocamente, suponhamos que $K + l$ induza SPD de ordem N em Ω_2 e que

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K.$$

Então,

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{-i\theta_\mu l} e^{i\theta_\mu(k+l)} = 0, \quad k \in K.$$

Aplicando novamente o Lema 3.1.1, concluímos que $c_\mu \exp(-i\theta_\mu l) = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, ou equivalentemente, $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. Logo, K induz SPD de ordem N em Ω_2. ■

Lema 3.1.3. *Sejam N um inteiro positivo e l um inteiro não divisível por N. Se z é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, então $z^l + z^{2l} + \cdots + z^{Nl} = 0$.*

Prova. Seja z uma raiz N-ésima primitiva da unidade. Como

$$(1 - z^l)(z^l + z^{2l} + \cdots + z^{Nl}) = z^l(1 - z^{Nl}),$$

segue que o lado direito dessa igualdade anula-se, enquanto que $1 - z^l$ não se anula. ∎

O próximo resultado fornece um exemplo de conjuntos que induzem SPD de ordem N em Ω_2.

Teorema 3.1.4. *Um conjunto de N inteiros consecutivos induz SPD de ordem N em Ω_2.*

Prova. Pelo Teorema 3.1.2, é suficiente mostrarmos que $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2. Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ pontos distintos em $[0, 2\pi)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos. Se

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

a matriz do sistema resultante é uma matriz de Vandermonde correspondente aos N pontos distintos $\exp(i\theta_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Assim, o sistema tem uma única solução, isto é, $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. Portanto, pelo Lema 3.1.1, $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2. ∎

A seguir apresentamos uma condição necessária para SPD de ordem N em Ω_2.

Teorema 3.1.5. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e N um inteiro positivo. Se K induz SPD de ordem N em Ω_2, então K tem intersecção não vazia com os conjuntos*

$$N\mathbb{Z} + j := \{Nl + j : l \in \mathbb{Z}\}, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Prova. Assumamos que K induza SPD de ordem N em Ω_2 e que $K \cap (N\mathbb{Z} + j) = \emptyset$, para algum j em $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ e encontremos uma contradição. Os números complexos $c_\mu = \exp(-i2\pi\mu j/N)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, são certamente não nulos. Como os inteiros $k - j$, $k \in K$, não são divisíveis por N e $\exp(i2\pi/N)$ é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, temos, pelo Lema 3.1.3, que

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i2\pi\mu k/N} = \sum_{\mu=1}^{N} e^{i2\pi\mu(k-j)/N} = 0, \quad k \in K,$$

contrariando o Lema 3.1.1. ∎

Corolário 3.1.6. *Sejam K e N como no Teorema 3.1.5. Se K induz SPD de ordem N em Ω_2, então sua cardinalidade é no mínimo N.*

Nosso próximo resultado fornece uma identificação de todos conjuntos que induzem SPD de ordem 2 em Ω_2. Antes enunciaremos um lema técnico.

Lema 3.1.7. *Seja L um subconjunto de $\mathbb{Z}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) L contém um subconjunto relativamente primo;
(ii) O sistema de equações

$$e^{ilx} = 1, \quad l \in L,$$

tem uma única solução em $[0, 2\pi)$.

Prova. Segue do Teorema 2.7 em [25]. ■

Teorema 3.1.8. *Um subconjunto K de $\mathbb{Z}$ induz SPD de ordem 2 em Ω_2 se, e somente se, $K - K := \{k - l : k, l \in K\}$ possui um subconjunto relativamente primo.*

Prova. Pela definição de SPD, concluímos que K induz SPD de ordem 2 em Ω_2 se, e somente se,

$$f(1)^2 - f(z)f(\overline{z}) > 0, \quad z \in \Omega_2 \setminus \{1\},$$

qualquer que seja a função positiva definida f em Ω_2 satisfazendo $K_1(f) = K$. Mas, isto é equivalente à condição

$$\sum_{\substack{k,l \in K \\ k \neq l}} a_k^1(f) a_l^1(f) \left(1 - z^{k-l}\right) > 0, \quad z \in \Omega_2 \setminus \{1\},$$

ou seja, que o sistema

$$z^m = 1, \quad m \in (K - K) \setminus \{0\},$$

não tenha solução em $\Omega_2 \setminus \{1\}$. Pelo Lema 3.1.7, a última afirmação é equivalente a $K - K$ possuir um subconjunto relativamente primo. ■

A situação ideal para interpolação é aquela onde um mesmo conjunto K pode ser usado para construir funções interpoladoras que interpolem dados quaisquer associados a um número arbitrário (finito) de pontos. Neste sentido, o Teorema 3.1.9 abaixo complementa o Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.9. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Se K induz SPD de todas as ordens em Ω_2, então K tem intersecção infinita com cada um dos conjuntos*

$$N\mathbb{Z}+j, \quad N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Prova. Suponhamos que K induza SPD de todas as ordens em Ω_2. Pelo Teorema 3.1.5, K tem intersecção não vazia com todo conjunto da forma enunciada. Vamos assumir que a cardinalidade de $K \cap (N\mathbb{Z}+j)$ é finita, digamos m, para algum inteiro N positivo e algum j em $\{0,1,\ldots,N-1\}$, e encontrar uma contradição. Começamos considerando a soma de exponenciais

$$f(z) := \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{i2\pi\mu(z-j)/N}.$$

Todo inteiro no conjunto $\{|l-j| : l = 0,1,\ldots,N-1\}$, exceto zero, não é divisível por N. Portanto, $f(l) = 0$ para $l = 0,1,\ldots,N-1$, $l \neq j$. Como f tem período N, segue que

$$f(l) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}\setminus(N\mathbb{Z}+j).$$

De fato, se $z \in \mathbb{Z}\setminus(N\mathbb{Z}+j)$, temos 4 possibilidades:

1. $0 \leq z \leq N-1$, $z \neq j$.

   Neste caso $f(z) = 0$ como anteriormente.

2. $z \geq N$.

   Então, $z = l + Nk$, com $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $l \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ e $l \neq j$. Como f é N-periódica, $f(z) = f(l) = 0$.

3. $-N+1 \leq z < 0$.

   Então, $z = l - N$, com $l \in \{1,2,\ldots,N-1\}$, $l \neq j$ e novamente $f(z) = f(l) = 0$.

4. $z \leq -N$.

   Então, $z = l + Nk$, com $-k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $l \in \{-(N-1), -(N-2), \ldots, 0\}$, $l \neq j$ e finalmente $f(z) = f(l) = 0$.

A seguir, escolhamos $2m+1$ números reais $t_0, t_1, \ldots, t_{2m}$ de forma que

$$\left\{t_\nu + \frac{2\pi\mu}{N} : 0 \leq \nu \leq 2m,\ 0 \leq \mu \leq N-1\right\} \subset [0, 2\pi)$$

e

$$\{t_r - t_s : r \neq s\} \cap \frac{2\pi}{N}\mathbb{Z} = \emptyset. \tag{3.4}$$

As restrições das $2m+1$ funções

$$z \longrightarrow e^{it_\nu z} f(z), \quad 0 \leq \nu \leq 2m,$$

ao conjunto $K \cap (N\mathbb{Z} + j)$, formam um conjunto linearmente dependente sobre $\mathbb{R}$. Logo, podemos encontrar números reais $c_0, c_1, \ldots, c_{2m}$ não todos nulos tais que

$$\sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu e^{it_\nu k} f(k) = 0, \quad k \in K \cap (N\mathbb{Z} + j).$$

Agora, definamos a função g da seguinte forma

$$g(z) := f(z) \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu e^{it_\nu z} = \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu e^{-i2\pi\mu j/N} e^{i(2\pi\mu/N + t_\nu)z}.$$

Por construção, g anula-se em $K \cap (N\mathbb{Z}+j)$ e $\mathbb{Z} \setminus (N\mathbb{Z}+j)$, e portanto, em K. O último passo na prova será mostrar que g não é identicamente nula, gerando uma contradição com o Lema 3.1.1. Para isso suponhamos que g seja a função nula. Como f não se anula em $N\mathbb{Z} + j$, segue que

$$\sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu e^{it_\nu (N\mu + j)} = 0, \quad 0 \leq \mu \leq 2m. \tag{3.5}$$

Por (3.4),

$$e^{iNt_\mu} \neq e^{iNt_\nu}, \quad \mu \neq \nu.$$

Assim, como a matriz em (3.5) é uma matriz do tipo Vandermonde associada a $2m+1$ pontos distintos, concluímos que todos os números $c_\mu \exp(it_\mu j)$ são nulos, isto é, $c_0 = c_1 = \cdots = c_{2m} = 0$, o que é uma contradição. ∎

Observação 3.1.10. *Acreditamos que a condição do Teorema 3.1.9 seja suficiente para garantir SPD de todas as ordens em Ω_2, mas ainda não foi possível provar tal fato.*

3.2 Relação entre positividade definida estrita em Ω_2 e em S^1

Nosso objetivo nesta seção é explorar a relação entre os conceitos de SPD em Ω_2 e SPD em S^1. Positividade definida estrita em S^1 pode ser caracterizada da seguinte forma (veja p. xi e [38]): Um subconjunto K de $\mathbb{N}$ induz SPD de ordem N em S^1 se toda função f positiva definida em S^1 satisfazendo $K(f) := \{k \in \mathbb{N} : a_k^1(f) > 0\} = K$ é estritamente positiva definida de ordem N em S^1.

Os resultados desta seção confirmarão que identificar conjuntos que induzem SPD em Ω_2 é mais complicado do que identificar conjuntos que induzem SPD em S^1. Mostraremos que SPD em S^1 corresponde a SPD em Ω_2 daqueles conjuntos que são simétricos em relação à origem. Um resultado similar ao Lema 3.1.1 vale para SPD em S^1. Enunciaremos o mesmo sem prová-lo.

Lema 3.2.1. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}$ e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em S^1;
(ii) Não existe função não nula da forma

$$x \in S^1 \longrightarrow \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu x}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

onde $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ são pontos distintos em $[0, 2\pi)$, anulando-se em K.

O Teorema 3.2.2 abaixo fornece um bom método para construirmos conjuntos que induzem SPD em Ω_2 a partir de conjuntos que induzem SPD em S^1 e vice-versa.

Teorema 3.2.2. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}$ e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em S^1;
(ii) $K' := \{k : |k| \in K\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2.

Prova. Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ pontos distintos em $[0, 2\pi)$. Se $c_1, c_2, \ldots, c_N$ são números reais e

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu |k|} = 0, \quad k \in K,$$

então

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K'.$$

Portanto, se K' induz SPD de ordem N em Ω_2, todos os c_μ são nulos. Assim, (ii) implica (i) pelo Lema 3.2.1.

Se $d_1, d_2, \ldots, d_N$ são números complexos e

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K'$$

então, a simetria de K' permite concluir que

$$\sum_{\mu=1}^{N} \overline{c_\mu} e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K'.$$

Assim,

$$\sum_{\mu=1}^{N} (\operatorname{Re} c_\mu)\, e^{i\theta_\mu k} = \sum_{\mu=1}^{N} (\operatorname{Im} c_\mu)\, e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K'.$$

Em particular,

$$\sum_{\mu=1}^{N} (\operatorname{Re} c_\mu)\, e^{i\theta_\mu k} = \sum_{\mu=1}^{N} (\operatorname{Im} c_\mu)\, e^{i\theta_\mu k} = 0, \quad k \in K.$$

Se K induz SPD de ordem N em S^1, o Lema 3.2.1 implica que

$$\operatorname{Re} c_\mu = \operatorname{Im} c_\mu = 0, \quad 1 \leq \mu \leq N,$$

e, conseqüentemente, todos os d_μ são nulos. Pelo Lemma 3.1.1, K' induz SPD de ordem N em Ω_2. ■

O resultado a seguir é uma conseqüência elementar do Teorema 3.2.2.

Corolário 3.2.3. *Se um subconjunto K de $\mathbb{Z}$ induz SPD de ordem N em Ω_2, então o conjunto $\{|k| : k \in K\}$ induz SPD de ordem N em S^1. A recíproca é verdadeira quando K é simétrico, isto é, $K = \{-k : k \in K\}$.*

Para vermos que a recíproca do Corolário 3.2.3 em geral não é verdadeira, consideremos o conjunto $K = \{-1, 0, 1, 2\}$. Sendo de cardinalidade 4, pelo Corolário 3.1.6, K não induz SPD de ordem 5 em Ω_2. Entretanto, $\{|k| : k \in K\} = \{0, 1, 2\}$ induz SPD de ordem 5 em S^1 ([49]).

3.3 Positividade definida estrita em Ω_{2q}, $q \geq 2$

Dividiremos esta seção em três partes. Na primeira apresentaremos várias caracterizações de positividade definida estrita em esferas complexas. Na segunda parte colocaremos algumas condições necessárias e suficientes (separadamente) para que um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ induza SPD em Ω_{2q}. Além disso, quando $q \in \{3, 4, \ldots, \infty\}$ os resultados fornecerão uma caracterização final elementar para SPD de todas as ordens em Ω_{2q}. Positividade definida estrita de ordem 2 será caracterizada em todas as esferas. Finalmente, na última parte, apresentaremos alguns conjuntos que induzem SPD em Ω_{2q}.

3.3.1 Caracterizações de positividade definida estrita em Ω_{2q}

Nesta subseção, apresentaremos várias caracterizações para SPD em Ω_{2q}. Algumas delas serão usadas para provarmos resultados na próxima subseção, enquanto que outras são de interesse independente. Nossa primeira caracterização relaciona o método de interpolação discutido no Capítulo 1 com interpolação polinomial em $\mathbb{C}^q$.

Dado um subconjunto K de $\mathbb{N}^2$ escreveremos

$$\mathcal{H}_K^q := \bigoplus_{(m,n)\in K} \mathcal{H}_{m,n}^q.$$

Teorema 3.3.1. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q um inteiro maior ou igual a 2 e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) K induz SPD de ordem N em Ω_{2q};

(ii) Não existe funcional linear não nulo da forma

$$\mathcal{L}(g) := \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu g(\xi_\mu), \quad c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C},$$

onde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos de Ω_{2q}, anulando-se em $\mathcal{H}_K^q$;

(iii) Se $E \subset \Omega_{2q}$ tem cardinalidade N, então o espaço $\mathcal{H}_K^q|_E := \{p|_E : p \in \mathcal{H}_K^q\}$ tem dimensão N;

(iv) Para todo $E \subset \Omega_{2q}$ de cardinalidade N e para toda função g definida em E, existe $p \in \mathcal{H}_K^q$ tal que $p|_E = g$.

(v) Se $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos em Ω_{2q} e f é uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$, então o conjunto

$$\{z \in \Omega_{2q} \longrightarrow f(\langle z, \xi_\mu \rangle) : \mu = 1, 2, \ldots, N\}$$

é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$.

Prova. Mostraremos as implicações $(v) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii)$. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos de Ω_{2q}, $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos e f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Usando o Teorema 1.2.12, temos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)} \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu) \right|^2, \qquad (3.7)$$

onde $\{Y_1^{q,m,n}, Y_2^{q,m,n}, \ldots, Y_{N(q;m,n)}^{q,m,n}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_{m,n}^q$ (a utilização dos superíndices m e n deve-se ao fato de estarmos trabalhando com vários $\mathcal{H}_{m,n}^q$ simultaneamente). Suponhamos que K induza SPD de ordem N em Ω_{2q}. Se o funcional linear $\mathcal{L}$ definido por

$$\mathcal{L}(g) := \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu g(\xi_\mu)$$

anula-se em $\mathcal{H}_K^q$, então

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu) = 0, \quad (m,n) \in K, \quad 1 \leq j \leq N(q;m,n).$$

Logo, pela Equação (3.7),

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = 0.$$

Pela hipótese sobre K, $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$, isto é, $\mathcal{L}$ é identicamente nulo. Isto prova que (i) implica (ii).

Suponhamos, agora, que K não induza SPD de ordem N em Ω_{2q}. Então, existem N pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q} tais que a matriz $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ não é positiva definida, para alguma função f positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Logo, existem números complexos $c_1, c_2, \ldots, c_N$ tais que $\sum_{\mu=1}^{N} |c_\mu| > 0$ e

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = 0.$$

Pela Equação (3.7),

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu) = 0, \quad (m,n) \in K, \quad 1 \leq j \leq N(q;m,n)$$

o que implica que o funcional não nulo $\mathcal{L}(g) := \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu g(\xi_\mu)$ anula-se em $\mathcal{H}_K^q$. Isto mostra que (ii) implica (i).

Suponhamos que (v) vale. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, c_1, c_2, \ldots, c_N$ e f como no início da prova. Usando a representação em série de f e trocando-se as somas com a integral, obtemos

$$\begin{aligned}\langle\langle f(\langle\cdot,\xi_\mu\rangle), f(\langle\cdot,\xi_\nu\rangle)\rangle\rangle &= \int_{\Omega_{2q}} f(\langle z,\xi_\mu\rangle)\overline{f(\langle z,\xi_\nu\rangle)}dw_{2q}(z)\\ &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \sum_{(r,s)\in K} a_{r,s}^q(f) \int_{\Omega_{2q}} R_{m,n}^{q-2}(\langle z,\xi_\mu\rangle)\overline{R_{r,s}^{q-2}(\langle z,\xi_\nu\rangle)}dw_{2q}(z).\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.7, segue que

$$\langle\langle f(\langle\cdot,\xi_\mu\rangle), f(\langle\cdot,\xi_\nu\rangle)\rangle\rangle = \sum_{(m,n)\in K} (a_{m,n}^q(f))^2 \int_{\Omega_{2q}} R_{m,n}^{q-2}(\langle z,\xi_\mu\rangle)\overline{R_{m,n}^{q-2}(\langle z,\xi_\nu\rangle)}dw_{2q}(z).$$

Mas, pelo Teorema 1.2.12,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{2q}} R_{m,n}^{q-2}(\langle z,\xi_\mu\rangle)\overline{R_{m,n}^{q-2}(\langle z,\xi_\nu\rangle)}dw_{2q}(z) =\\ &= \left(\frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)}\right)^2 \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} \overline{Y_k^{q,m,n}(\xi_\mu)} \sum_{l=1}^{N(q;m,n)} Y_l^{q,m,n}(\xi_\nu) \int_{\Omega_{2q}} Y_k^{q,m,n}(z)\overline{Y_l^{q,m,n}(z)}dw_{2q}(z)\\ &= \left(\frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)}\right)^2 \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} \overline{Y_k^{q,m,n}(\xi_\mu)} Y_k^{q,m,n}(\xi_\nu).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle\langle f(\langle\cdot,\xi_\mu\rangle), f(\langle\cdot,\xi_\nu\rangle)\rangle\rangle &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f)\frac{\omega_{2q}}{N(q;m,n)}\overline{R_{m,n}^{q-2}(\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle)}\\ &= \overline{g(\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle)}, \quad 1 \leq \mu,\nu \leq N,\end{aligned}$$

onde g é uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(g) = K$. Como $(g(\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle))$ é positiva definida, segue que a matriz $(f(\langle\xi_\mu,\xi_\nu\rangle))$ é também positiva definida. Isto mostra que (v) implica (i). Para concluirmos a equivalência $(v) \Leftrightarrow (i)$ seguimos o mesmo procedimento usado na prova do Lema 3.1.1.

Suponhamos que $\mathcal{H}_K^q|_E$ tenha dimensão menor que N para algum subconjunto $E := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ de Ω_{2q}. Então, existe um vetor não nulo $(c_1, c_2, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N$ ortogonal a $\mathcal{H}_K^q|_E$, isto é, tal que

$$\sum_{\mu=1}^{N} \overline{c_\mu} p(\xi_\mu) = 0, \quad p \in \mathcal{H}_K^q.$$

Assim, o funcional não nulo $\mathcal{L}(g) := \sum_{\mu=1}^N \overline{c_\mu} g(\xi_\mu)$ anula-se em $\mathcal{H}_K^q$. Isto mostra que (ii) implica (iii).

Seja g uma função definida em $E := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset \Omega_{2q}$ e suponhamos que $g \neq p|_E$ para todo $p \in \mathcal{H}_K^q$. Então, além de ser não nulo, o vetor $(g(\xi_1), g(\xi_2), \ldots, g(\xi_N))$ não está em $\mathcal{H}_K^q|_E$. Portanto, $\mathcal{H}_K^q|_E$ não tem dimensão N. Isto mostra que (iii) implica (iv).

Finalmente, seja $\mathcal{L}$ um funcional linear não nulo definido por $\mathcal{L}(g) = \sum_{\mu=1}^N c_\mu g(\xi_\mu)$ e anulando-se em $\mathcal{H}_K^q$. Então, existe uma função f definida em $E := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset \Omega_{2q}$ tal que $\mathcal{L}(f) \neq 0$. Afirmamos que não existe $p \in \mathcal{H}_K^q$ tal que $p|_E = f$. De fato, se existisse tal p, teríamos

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu p(\xi_\mu) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu f(\xi_\mu) = \mathcal{L}(f) \neq 0,$$

o que contradiz o fato de $\mathcal{L}$ anular-se em $\mathcal{H}_K^q$. Isto mostra que (iv) implica (ii). ■

Se f for uma função representável por uma série da forma

$$f(z) = \sum_{|r|,|s|=0}^{\infty} a_{r,s} z^r \overline{z}^s, \quad z \in \mathbb{C}^q, \tag{3.8}$$

onde r e s são multi-índices, então $f_{m,n}$ denotará o maior somando de f pertencente ao espaço $\Pi_{m,n}^{o,q}$, isto é,

$$f_{m,n}(z) = \sum_{|r|=m,|s|=n} a_{r,s} z^r \overline{z}^s.$$

Denotaremos por $f_{m,n}(D)$ o operador obtido de $f_{m,n}$ substituindo-se a variável $z = (z^1, z^2, \ldots, z^q)$ pelo símbolo diferencial $D = (\partial/\partial z^1, \partial/\partial z^2, \ldots, \partial/\partial z^q)$.

Lema 3.3.2. *Sejam f uma função como em (3.8) e p um elemento de $\Pi_{m,n}^{o,q}$. As seguintes propriedades valem:*

(i) $(p(D)(f))(0) = (p(D)(f_{m,n}))(0) = (f_{m,n}(D)(p))(0) = f_{m,n}(D)(p)$;

(ii) Para $w \in \mathbb{C}^q$,

$$p(D)(e^{\langle \overline{w}, z\rangle + \langle z, \overline{w}\rangle}) = p(w) e^{\langle \overline{w}, z\rangle + \langle z, \overline{w}\rangle}.$$

Prova. A prova segue de cálculos diretos. ■

Agora, para um inteiro positivo N e um inteiro q maior ou igual a 2 denotaremos por $E_N(\Omega_{2q})$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de todas as funções da forma

$$z \in \mathbb{C}^q \longrightarrow \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{\langle \overline{\xi_\mu}, z\rangle} e^{\langle z, \overline{\xi_\mu}\rangle},$$

onde $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset \Omega_{2q}$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\} \subset \mathbb{C}$.

Teorema 3.3.3. *Sejam K, q e N como no Teorema 3.3.1. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) K induz SPD de ordem N em Ω_{2q};

(ii) Se f é uma função em $E_N(\Omega_{2q}) \setminus \{0\}$, então existe um par (m,n) em K tal que $f_{m,n}(D)$ não é o operador nulo em $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$.

Prova. Seja f uma função não nula da forma

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{\langle \overline{\xi_\mu}, z\rangle} e^{\langle z, \overline{\xi_\mu}\rangle},$$

onde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos em Ω_{2q} e $c_1, c_2, \ldots, c_N$ são números complexos. Suponhamos que para todo $(m,n) \in K$, $f_{m,n}(D)$ seja o operador nulo em $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$. Definindo-se o funcional linear não nulo

$$\mathcal{L}(g) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu g(\xi_\mu),$$

segue, pelo Lema 3.3.2, que

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu p(\xi_\mu) = (p(D)f)(0) = f_{m,n}(D)(p), \quad p \in \mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}, \quad (m,n) \in K.$$

Conseqüentemente, $\mathcal{L}$ anula-se em $\mathcal{H}_K^q$. Portanto, pelo Teorema 3.3.1, K não induz SPD de ordem N em Ω_{2q}. Isto mostra que (i) implica (ii).

Reciprocamente, suponhamos que K não induza SPD de ordem N em Ω_{2q}. Novamente pelo Teorema 3.3.1, existe um funcional linear não nulo da forma $\mathcal{L}(g) = \sum_{\mu=1}^{N} d_\mu g(\xi_\mu)$, onde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos em Ω_{2q}, anulando-se em $\mathcal{H}_K^q$. Em particular, $\mathcal{L}$ anula-se em $\mathcal{H}_{m,n}^q$, $(m,n) \in K$. Definindo-se

$$g(z) := \sum_{\mu=1}^{N} d_\mu e^{\langle \overline{\xi_\mu}, z\rangle} e^{\langle z, \overline{\xi_\mu}\rangle}, \tag{3.9}$$

temos que g não é identicamente nula e, pelo Lema 3.3.2,

$$g_{m,n}(D)(p) = (p(D)g)(0) = \sum_{\mu=1}^{N} d_\mu p(\xi_\mu) = \mathcal{L}(p) = 0, \quad p \in \mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}, \quad (m,n) \in K.$$

Logo, não existe $(m,n) \in K$ para o qual $g_{m,n}(D)$ não se anula em $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$, o que mostra que (ii) implica (i). ■

Lema 3.3.4. *Seja q um inteiro maior ou igual a 2. Para inteiros positivos m e n, vale a fórmula*

$$\Pi_{m,n}^{o,q} = (\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}) \oplus \Upsilon\, \Pi_{m-1,n-1}^{o,q},$$

onde $\Upsilon(z) := \langle z, z \rangle$.

Prova. Este resultado é a Proposição 30 em [2]. ■

Teorema 3.3.5. *Sejam K, q e N como no Teorema 3.3.1. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) K induz SPD de ordem N em Ω_{2q};

(ii) Se f é uma função em $E_N(\Omega_{2q}) \setminus \{0\}$, então existe um par (m,n) em K tal que $f_{m,n}$ não é divisível por Υ.

Prova. Suponhamos que exista uma função f em $E_N(\Omega_{2q}) \setminus \{0\}$ tal que $f_{m,n}$ seja divisível por Υ, para todo $(m,n) \in K$. Afirmamos que $f_{m,n}(D)$ anula-se em $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$, $(m,n) \in K$. De fato, escrevendo-se $f_{m,n} := \Upsilon g$, obtemos

$$\begin{aligned}
(f_{m,n}(D))(p) &= (\Upsilon g)(D)(p) \\
&= (\Upsilon(D) g(D))(p) \\
&= g(D)(\Upsilon(D)(p)) \\
&= g(D)(0) = 0, \quad p \in \mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.3.3, K não induz SPD de ordem N em Ω_{2q}. Isto mostra que (i) implica (ii).

Agora, suponhamos que K não induza SPD de ordem N em Ω_{2q}. Pelo Teorema 3.3.3, existe uma função f em $E_N(\Omega_{2q}) \setminus \{0\}$ tal que o operador $f_{m,n}(D)$ anula-se em $\mathcal{H} \cap \Pi_{m,n}^{o,q}$,

$(m,n) \in K$. Afirmamos que cada $f_{m,n}$ é divisível por Υ. De fato, caso contrário, pelo Lema 3.3.4 teríamos,

$$f_{m,n} = g + \Upsilon h,$$

onde $g \in (\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}) \setminus \{0\}$ e $h \in \Pi^{o,q}_{m-1,n-1}$. Como o operador $f_{m,n}(D)$ anula-se em $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}$, segue que $f_{m,n}(D)(g) = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_{m,n}(D)(g) &= g(D)(g) + (\Upsilon h)(D)(g) \\ &= g(D)(g) + (\Upsilon(D)h(D))(g) \\ &= g(D)(g) + h(D)(\Upsilon(D)(g)) \\ &= g(D)(g) + h(D)(0) \\ &= g(D)(g) \neq 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que (ii) implica (i). ■

Corolário 3.3.6. *Sejam K, q e N como no Teorema 3.3.1. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em Ω_{2q};
(ii) Não existe f em $E_N(\Omega_{2q}) \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{(m,n)\in K} f_{m,n}$ é divisível por Υ.

Prova. Uma implicação segue diretamente do Teorema 3.3.5. A outra implicação, segue do fato de que na álgebra das funções representáveis como em (3.9), a divisibilidade de $\sum_{(m,n)\in K} f_{m,n}$ por Υ é equivalente à divisibilidade de cada $f_{m,n}$ por Υ. ■

O restante desta seção será dedicada à prova do Lema 3.3.8, o qual será usado na próxima seção.

Lema 3.3.7. *Sejam q um inteiro maior ou igual a 2 e (m,n) um par em $\mathbb{N}^2$. Então, existem pontos $\xi_1^{q,m,n}, \xi_2^{q,m,n}, \ldots, \xi_{N(q;m,n)}^{q,m,n}$ em Ω_{2q} tais que todo elemento $Y^{q,m,m}$ em $\mathcal{H}^q_{m,n}$ pode ser escrito na forma*

$$Y^{q,m,n}(\xi) = \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} d_j R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi, \xi_j^{q,m,n} \rangle), \quad d_j \in \mathbb{C}.$$

Prova. Consideremos $\{Y_1^{q,m,n}, Y_2^{q,m,n}, \ldots, Y_{N(q;m,n)}^{q,m,n}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_{m,n}^q$. Como $Y_1^{q,m,n}$ não é o polinômio nulo, existe $\xi_1^{q,m,n} \in \Omega_{2q}$ tal que $Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) \neq 0$. Agora, suponhamos que para todo $\xi \in \Omega_{2q}$ o determinante

$$\begin{vmatrix} Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & Y_1^{q,m,n}(\xi) \\ Y_2^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & Y_2^{q,m,n}(\xi) \end{vmatrix}$$

seja nulo. Como $Y_1^{q,m,n}$ e $Y_2^{q,m,n}$ são linearmente independentes, devemos ter

$$Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) = Y_2^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) = 0,$$

o que é uma contradição. Então, existe $\xi_2^{q,m,n} \in \Omega_{2q}$ tal que

$$\begin{vmatrix} Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & Y_1^{q,m,n}(\xi_2^{q,m,n}) \\ Y_2^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & Y_2^{q,m,n}(\xi_2^{q,m,n}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como o conjunto $\{Y_j^{q,m,n} : j = 1, 2, \ldots, N(q;m,n)\}$ é linearmente independente, podemos construir recursivamente uma seqüência de determinantes

$$\begin{vmatrix} Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_1^{q,m,n}(\xi_k^{q,m,n}) & Y_1^{q,m,n}(\xi) \\ Y_2^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_2^{q,m,n}(\xi_k^{q,m,n}) & Y_2^{q,m,n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_{k+1}^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_{k+1}^{q,m,n}(\xi_k^{q,m,n}) & Y_{k+1}^{q,m,n}(\xi) \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N(q;m,n) - 1,$$

não nulos. Portanto, existem pontos $\xi_1^{q,m,n}, \xi_2^{q,m,n}, \ldots, \xi_{N(q;m,n)}^{q,m,n} \in \Omega_{2q}$ tais que

$$\begin{vmatrix} Y_1^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_1^{q,m,n}(\xi_{N(q;m,n)}^{q,m,n}) \\ Y_2^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_2^{q,m,n}(\xi_{N(q;m,n)}^{q,m,n}) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{N(q;m,n)}^{q,m,n}(\xi_1^{q,m,n}) & \ldots & Y_{N(q;m,n)}^{q,m,n}(\xi_{N(q;m,n)}^{q,m,n}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ou seja, a matriz do sistema

$$\sum_{k=1}^{N(q;m,n)} \overline{Y_k^{q,m,n}(\xi_j^{q,m,n})} Y_k^{q,m,n}(\xi) = \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \xi_j^{q,m,n} \rangle), \quad 1 \leq j \leq N(q;m,n),$$

é não singular, concluindo a prova. ∎

Qualquer conjunto de pontos como descritos no Lema 3.3.7 será denotado por

$$D_{m,n}^q := \{\xi_j^{q,m,n} \in \Omega_{2q} : j = 1, 2, \ldots, N(q;m,n)\}.$$

Lema 3.3.8. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q um inteiro maior ou igual a 3, f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_{2q} decompostos como em (1.4) e $c_1, c_2, \dots, c_N$ números complexos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\displaystyle\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = 0;$

(ii) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y^{q,m,n}(\xi_\mu) = 0,\ (m,n) \in K,\ Y^{q,m,n} \in \mathcal{H}^q_{m,n};$

(iii) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \eta \rangle) = 0,\ (m,n) \in K,\ \eta \in \Omega_{2q};$

(iv) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \zeta \rangle) = 0,\ (m,n) \in K,\ \zeta \in D^q_{m,n};$

(v) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) R^{q-3}_{k,l}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0,\ (m,n) \in K,\ 0 \leq k \leq m,\ 0 \leq l \leq n,\ \eta' \in \Omega_{2q-2}.$

Prova. A equivalência entre (i) e (ii) segue diretamente do Teorema 1.2.12. Obviamente (iii) implica (iv).

Seja $\{Y_1^{q,m,n}, Y_2^{q,m,n}, \dots, Y^{q,m,n}_{N(q;m,n)}\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}^q_{m,n}$. Suponhamos que (ii) vale. Então,

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu)\overline{Y_j^{q,m,n}(\eta)} = 0, \quad (m,n) \in K, \quad \eta \in \Omega_{2q}, \quad 1 \leq j \leq N(q;m,n).$$

Somando-se em j, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu)\overline{Y_j^{q,m,n}(\eta)} &= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} Y_j^{q,m,n}(\xi_\mu)\overline{Y_j^{q,m,n}(\eta)} \\ &= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \frac{N(q;m,n)}{\omega_{2q}} R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \eta \rangle), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \eta \rangle) = 0, \quad (m,n) \in K, \quad \eta \in \Omega_{2q}.$$

Isto mostra que (ii) implica (iii).

Seja $Y^{q,m,n} \in \mathcal{H}^q_{m,n}$. Suponhamos que (iv) vale. Então, pelo Lema 3.3.7,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Y^{q,m,n}(\xi_\mu) &= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} d_j R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_j^{q,m,n} \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^{N(q;m,n)} d_j \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_j^{q,m,n} \rangle) = 0, \quad (m,n) \in K,\ \xi_j^{q,m,n} \in D^q_{m,n}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que (iv) implica (ii).

Suponhamos, agora, que (v) vale. Seja $\eta \in \Omega_{2q}$, escrevendo-se

$$\eta = (\cos\phi) e^{i\psi}\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\phi)\eta', \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad \eta' \in \Omega_{2q-2},$$

segue pela Fórmula de Adição (1.21), que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \eta \rangle) &= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}((\cos\theta_\mu) e^{i\varphi_\mu}(\cos\phi) e^{i\psi} + (\operatorname{sen}\theta_\mu)(\operatorname{sen}\phi)\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\phi,\psi)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2}\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\phi,\psi)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R^{q-3}_{k,l}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0,
\end{aligned}$$

para $(m,n) \in K$. Isto mostra que (v) implica (iii).

Finalmente, suponhamos que (iii) vale. Então,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2}\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\phi,\psi)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R^{q-3}_{k,l}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) \\
&= b^{0,0}_{m,n,q-2}\overline{R^{q-2}_{m,n}((\cos\phi)e^{i\psi})} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}((\cos\theta_\mu)e^{i\varphi_\mu}) R^{q-3}_{0,0}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) + \qquad (3.10)\\
&\quad + \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2}\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\phi,\psi)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R^{q-3}_{k,l}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle),
\end{aligned}$$

para $(m,n) \in K$, $\phi \in [0,\pi/2]$, $\psi \in [0,2\pi)$ e $\eta' \in \Omega_{2q-2}$. Escolhendo-se $\phi = \psi = 0$, obtemos

$$b^{0,0}_{m,n,q-2}\overline{R^{q-2}_{m,n}(1)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}((\cos\theta_\mu)e^{i\varphi_\mu}) R^{q-3}_{0,0}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0, \quad (m,n) \in K, \quad \eta' \in \Omega_{2q-2}.$$

Como $b^{0,0}_{m,n,q-2} > 0$, segue que

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}((\cos\theta_\mu)e^{i\varphi_\mu}) = 0, \quad (m,n) \in K. \qquad (3.11)$$

Esta equação corresponde a condição (v) no caso $k = l = 0$. Agora, a Equação (3.10) reduz-se a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b_{m,n,q-2}^{k,l} \overline{Q_{m,n}^{k,l}(\phi,\psi)} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) \\
&= (\operatorname{sen}\phi)^2 \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b_{m,n,q-2}^{k,l} (\operatorname{sen}\phi)^{k-1+l-1} R_{m-k,n-l}^{q-2+k+l}((\cos\phi)e^{-i\psi}) \times \\
&\quad \times \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle),
\end{aligned}$$

para $(m,n) \in K$, $\phi \in [0,\pi/2]$, $\psi \in [0,2\pi)$ e $\eta' \in \Omega_{2q-2}$. Logo,

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b_{m,n,q-2}^{k,l} (\operatorname{sen}\phi)^{k-1+l-1} R_{m-k,n-l}^{q-2+k+l}((\cos\phi)e^{-i\psi}) \times \\
\times \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0,$$

para $(m,n) \in K$, $\phi \in (0,\pi/2]$, $\psi \in [0,2\pi)$ e $\eta' \in \Omega_{2q-2}$. Em particular, quando $\psi = 0$,

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b_{m,n,q-2}^{k,l} (\operatorname{sen}\phi)^{k-1+l-1} R_{m-k,n-l}^{q-2+k+l}((\cos\phi)) \times \\
\times \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0,$$

para $(m,n) \in K$, $\phi \in (0,\pi/2]$, e $\eta' \in \Omega_{2q-2}$. Conseqüentemente, fazendo-se $\phi \to 0^+$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{\phi\to 0^+} \Bigg[\sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} & b_{m,n,q-2}^{k,l} (\operatorname{sen}\phi)^{k-1+l-1} R_{m-k,n-l}^{q-2+k+l}((\cos\phi))\times \\
& \times \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle)\Bigg] \\
= \lim_{\phi\to 0^+} \Bigg[& b_{m,n,q-2}^{1,1} R_{m-1,n-1}^{q}((\cos\phi)) \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{1,1}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{1,1}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle)\Bigg] + \\
+ \lim_{\phi\to 0^+} \Bigg[\sum_{\substack{k=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(1,1)}}^{n} & b_{m,n,q-2}^{k,l} (\operatorname{sen}\phi)^{k-1+l-1} R_{m-k,n-l}^{q-2+k+l}((\cos\phi))\times \\
& \times \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle)\Bigg],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$b_{m,n,q-2}^{1,1} R_{m-1,n-1}^{q}(1) \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{1,1}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{1,1}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = 0, \quad (m,n)\in K, \quad \eta' \in \Omega_{2q-2}.$$

Como $b_{m,n,q-2}^{1,1} > 0$, obtemos

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{1,1}(\theta_\mu,\varphi_\mu) R_{1,1}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = 0, \quad (m,n)\in K, \quad \eta' \in \Omega_{2q-2}.$$

Esta equação corresponde a condição (v) no caso $k = l = 1$. Repetindo o processo acima um número finito de vezes obtemos todas as equações em (v). ■

3.3.2 Condições para positividade definida estrita em Ω_{2q}

Os resultados apresentados na subseção anterior e a própria definição de SPD fornecem vários resultados úteis na identificação de conjuntos que induzem SPD. O primeiro é uma condição necessária para SPD de ordem N em Ω_{2q}, similar àquela que obtivemos para SPD em Ω_2 no Teorema 3.1.5.

Teorema 3.3.9. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q em $\{2,3,\ldots,\infty\}$ e N um inteiro positivo. Se K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, então*

$$\{m-n : (m,n)\in K\} \cap (N\mathbb{Z}+j) \neq \emptyset, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Prova. Suponhamos que K induza SPD de ordem N em Ω_{2q} e que

$$\{m-n : (m,n) \in K\} \cap (N\mathbb{Z}+j) = \emptyset,$$

para algum j em $\{0,1,\ldots,N-1\}$. Seja f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$ e consideremos

$$\xi_\mu := (e^{i2\pi\mu/N}, \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{q-1\ componentes}), \quad 1 \leq \mu \leq N,$$

pontos distintos em Ω_{2q}. Tomemos $c_\mu = \exp(-i2\pi\mu j/N)$, $\mu = 1,2,\ldots,N$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu\overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu\overline{c_\nu} \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) R^{q-2}_{m,n}\left(e^{i2\pi(\mu-\nu)/N}\right) \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu\overline{c_\nu} e^{i2\pi(\mu-\nu)(m-n)/N} \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \left|\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i2\pi\mu(m-n)/N}\right|^2 \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \left|\sum_{\mu=1}^{N} e^{i2\pi\mu(m-n-j)/N}\right|^2.
\end{aligned}$$

Como os inteiros $m-n-j$, $(m,n) \in K$, não são divisíveis por N e $\exp(i2\pi/N)$ é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, segue, pelo Lema 3.1.3, que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu\overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0,$$

uma contradição. ∎

Corolário 3.3.10. *Sejam K, q e N como no Teorema 3.3.9. Se K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, então sua cardinalidade é no mínimo N.*

Corolário 3.3.11. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ e q um inteiro maior ou igual a 2. Se K induz SPD de todas as ordens em Ω_{2q}, então o conjunto $\{m-n : (m,n) \in K\}$ contém infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares.*

Exceto para os casos $q = 1$ e $q = 2$, a recíproca do Corolário 3.3.11 é verdadeira, como mostram os Teoremas 3.3.12 e 3.3.14 a seguir.

Teorema 3.3.12. *Seja q um inteiro maior ou igual a 3. Um subconjunto K de $\mathbb{N}^2$ induz SPD de todas as ordens em Ω_{2q} se, e somente se, o conjunto $\{m-n : (m,n) \in K\}$ contém infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares.*

Prova. A condição é necessária pelo Corolário 3.3.11. Suponhamos então que o conjunto $\{m-n : (m,n) \in K\}$ contenha infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares. Sejam N um inteiro positivo, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_{2q} e f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Mostraremos que a matriz $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é positiva definida. Para isso assumiremos que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = 0,$$

e mostraremos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. Fixemos um índice j_0 em $\{1, 2, \ldots, N\}$. Usando um elemento apropriado de $U(q)$ podemos assumir que $\langle \xi_{j_0}, \varepsilon_1 \rangle = 0$. Representando-se agora os pontos ξ_μ como em (1.4), temos que

$$\xi_{j_0} = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi} \varepsilon_1 + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) \xi'_{j_0}, \quad \xi'_{j_0} = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \Omega_{2q-2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Pelo Lema 3.3.8,

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q_{m,n}^{k,l}(\theta_\mu, \varphi_\mu) R_{k,l}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0, \quad (m,n) \in K,\ 0 \leq k \leq m,\ 0 \leq l \leq n,\ \eta' \in \Omega_{2q-2}.$$

Em particular, quando $k = m$ e $l = n$,

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu (\operatorname{sen} \theta_\mu)^{m+n} R_{m,n}^{q-3}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle) = 0, \quad (m,n) \in K, \quad \eta' \in \Omega_{2q-2}. \tag{3.12}$$

Agora, consideramos dois casos.

Caso 1: Nenhum ξ_μ é antipodal a ξ_{j_0}, isto é, $\xi_\mu \neq -\xi_{j_0}$, $\mu \neq j_0$. Isto significa que

$$|\operatorname{sen} \theta_\mu| < 1, \quad \mu \neq j_0.$$

Seja $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \ldots$ uma seqüência no conjunto $\{(m,n) \in K : m - n \text{ é par}\}$ com $\{m_j + n_j\}_j$ crescente e seja $\eta' := (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \Omega_{2q-2}$. Pela desigualdade

$$|(\operatorname{sen} \theta_\mu)^{m_\nu + n_\nu} R_{m_\nu, n_\nu}^{q-2}(\langle \xi'_\mu, \eta' \rangle)| \leq |\operatorname{sen} \theta_\mu|^{m_\nu + n_\nu}, \quad \mu \neq j_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

obtemos

$$\lim_{\nu\to\infty} (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{m_\nu+n_\nu} R^{q-2}_{m_\nu,n_\nu}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = 0, \quad \mu \neq j_0. \tag{3.13}$$

Portanto, pelas Equações (3.12) e (3.13),

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{m_\nu+n_\nu} R^{q-3}_{m_\nu,n_\nu}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) \\ &= c_{j_0} + \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq j_0}}^{N} c_\mu (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{m_\nu+n_\nu} R^{q-3}_{m_\nu,n_\nu}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = c_{j_0}. \end{aligned}$$

Como j_0 é arbitrário, segue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$.

Caso 2: Existe um ponto ξ_{j_1} antipodal a ξ_{j_0}. Então,

$$\xi_{j_1} = \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi}\varepsilon_1 + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\xi'_{j_1}, \quad \xi'_{j_1} = (0,-1,0,\ldots,0) \in \Omega_{2q-2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Notemos que $R^{q-3}_{m,n}$ é uma função par quando $m-n$ é par. Escolhendo-se $\eta' \in \Omega_{2q-2}$ e a seqüência $(m_1,n_1),(m_2,n_2),\ldots$ como anteriormente, obtemos

$$0 = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{m_\nu+n_\nu} R^{q-3}_{m_\nu,n_\nu}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = c_{j_0} + c_{j_1}. \tag{3.14}$$

Agora, seja $(r_1,s_1),(r_2,s_2),\ldots$ uma seqüência no conjunto $\{(m,n)\in K : m-n \text{ é ímpar}\}$ com $\{r_j+s_j\}_j$ crescente. Como $R^{q-3}_{m,n}$ é uma função ímpar quando $m-n$ é ímpar, segue que

$$0 = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{r_\nu+s_\nu} R^{q-3}_{r_\nu,s_\nu}(\langle \xi'_\mu, \eta'\rangle) = c_{j_0} - c_{j_1}. \tag{3.15}$$

Aqui usamos o fato de que

$$\langle \xi'_{j_0}, \eta'\rangle = 1 = -\langle \xi'_{j_1}, \eta'\rangle.$$

Logo, as Equações (3.14) e (3.15) implicam que $c_{j_0} = 0$. Novamente, como j_0 é arbitrário, concluímos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. ■

Para obtermos um resultado análogo ao Teorema 3.3.12 no caso de Ω_∞, necessitamos do seguinte lema.

Lema 3.3.13. *Seja q um inteiro maior ou igual a 2. Para m e n inteiros não negativos, a seguinte relação vale*

$$z^m \overline{z}^n = \sum_{j=0}^{m\wedge n} c^j_{q,m,n} R^{q-2}_{m-j,n-j}(z), \quad z \in B_2,$$

onde $c^j_{q,m,n}$, $j = 0, 1, \ldots, m \wedge n$, são constantes positivas dadas por

$$c^j_{q,m,n} := \frac{m!(q+m+n-2j-1)\Gamma(q+m-j-1)\Gamma(q+n-j-1)}{(m-j)!(n-j)!\Gamma(q-1)\Gamma(q+m+n-j)}(m\wedge n)_{(m\wedge n)-j}.$$

Prova. Este resultado é a Proposição 65 em [2]. ■

Teorema 3.3.14. *Um subconjunto K de $\mathbb{N}^2$ induz SPD de todas as ordens em Ω_∞ se, e somente se, o conjunto $\{m - n : (m, n) \in K\}$ contém infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares.*

Prova. Seja N um inteiro positivo e suponhamos que $\{m - n : (m, n) \in K\}$ contenha infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares. Provaremos que K induz SPD de ordem N em Ω_∞. Pela Observação 3.0.3 podemos assumir que $N \geq 3$. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_∞ e f uma função positiva definida em Ω_∞ satisfazendo $K_\infty(f) = K$. Podemos assumir que $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\} \subset \Omega_{2N}$. Então, pelo Lema 3.3.13,

$$\begin{aligned}
f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) &= \sum_{(m,n)\in K} a^\infty_{m,n}(f)\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle^m \overline{\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle^n} \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a^\infty_{m,n}(f) \sum_{j=0}^{m\wedge n} c^j_{N,m,n} R^{N-2}_{m-j,n-j}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) \\
&= \sum_{(\alpha,\beta)\in L} d^N_{\alpha,\beta}(f) R^{N-2}_{\alpha,\beta}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) \\
&= g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle),
\end{aligned}$$

onde $L := \bigcup_{(m,n)\in K}\{(m-j, n-j) : j = 0, 1, \ldots, m \wedge n\}$, e g é uma função positiva definida em Ω_{2N} satisfazendo $K_N(g) = L$. Como

$$\{\alpha - \beta : (\alpha, \beta) \in L\} = \{m - n : (m, n) \in K\},$$

segue que L contém infinitos inteiros pares e infinitos inteiros ímpares. Pelo Teorema 3.3.12, L induz SPD de todas as ordens em Ω_{2N}. Logo, a matriz $(g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle))$ é positiva

definida e conseqüentemente $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ também é. Portanto, K induz SPD de todas as ordens em Ω_∞.
A recíproca segue diretamente do Teorema 3.3.9. ∎

O próximo resultado revela que um conjunto induz SPD em Ω_{2q} se, e somente se, seu simétrico em relação a reta $y = x$ induz SPD em Ω_{2q}. Tal simetria já havia sido observada para SPD em Ω_∞ em [47].

Lema 3.3.15. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$ e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em Ω_{2q};
(ii) $\overline{K} := \{(n, m) : (m, n) \in K\}$ induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

Prova. Se f é uma função positiva definida em Ω_{2q}, $K_q(f) = K$ e $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ são pontos distintos em Ω_{2q}, então

$$\begin{aligned} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) \\ &= \sum_{(n,m)\in \overline{K}} a^q_{m,n}(f) \overline{R^{q-2}_{n,m}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)} \\ &= \overline{\sum_{(n,m)\in \overline{K}} a^q_{m,n}(f) R^{q-2}_{n,m}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)} \\ &= \overline{g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)}, \end{aligned}$$

onde g é positiva definida em Ω_{2q} e $K_q(g) = \overline{K}$. Portanto, o resultado segue. ∎

Como no caso de SPD em Ω_2, o Teorema 3.3.17 abaixo fornece uma identificação de todos os conjuntos que induzem SPD de ordem 2 em Ω_{2q}. Antes disso, precisamos de um lema técnico.

Lema 3.3.16. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ e q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$. O sistema*

$$R^{q-2}_{m,n}(z)\overline{R^{q-2}_{k,l}(z)} = 1, \quad (m, n), (k, l) \in K \tag{3.16}$$

tem uma única solução em B_2 se, e somente se, o sistema

$$e^{i(m-n-k+l)x} = 1, \quad (m, n), (k, l) \in K \tag{3.17}$$

tem uma única solução em $[0, 2\pi)$.

Prova. Claramente o resultado é válido para $q = \infty$. Consideremos então $q < \infty$. Suponhamos que (3.16) tenha uma única solução em B_2. Se $\theta \in (0, 2\pi)$ é solução de (3.17), então $\xi := \exp(i\theta) \in B_2 \setminus \{1\}$ e

$$R^{q-2}_{m,n}(\xi)\overline{R^{q-2}_{k,l}(\xi)} = e^{i(m-n-k+l)\theta} = 1, \quad (m,n),(k,l) \in K.$$

Como $z = 1$ é uma solução de (3.16) em B_2 e $\xi \neq 1$, obtemos uma contradição. Reciprocamente, suponhamos que (3.17) tenha uma única solução em $[0, 2\pi)$. Se $\xi \in B_2 \setminus \{1\}$ é solução de (3.16), então

$$|R^{q-2}_{m,n}(\xi)||R^{q-2}_{k,l}(\xi)| = 1, \quad (m,n),(k,l) \in K.$$

Como $|R^{q-2}_{m,n}(\xi)| \leq 1$ (Lema 1.2.4-(iii)), devemos ter

$$|R^{q-2}_{m,n}(\xi)| = 1.$$

Escrevendo-se $\xi = r\exp(i\theta)$, $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, a igualdade acima equivale a

$$R^{(q-2,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2 - 1)r^{|m-n|} = 1.$$

Como $|R^{(q-2,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2 - 1)| \leq 1$, segue que $r = 1$. Portanto,

$$e^{i(m-n-k+l)\theta} = R^{q-2}_{m,n}(\xi)\overline{R^{q-2}_{k,l}(\xi)} = 1, \quad (m,n),(k,l) \in K.$$

Como $\varphi = 0$ é uma solução de (3.17) em $[0, 2\pi)$ e $\theta \neq 0$, obtemos uma contradição. ∎

Teorema 3.3.17. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ e q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$. Então, K induz SPD de ordem 2 em Ω_{2q} se, e somente se, $\{m - n - k + l : (m,n),(k,l) \in K\}$ contém um subconjunto relativamente primo.*

Prova. Pela definição de SPD, concluímos que K induz SPD de ordem 2 em Ω_{2q} se, e somente se,

$$f(1)^2 - f(z)f(\overline{z}) > 0, \quad z \in B_2 \setminus \{1\},$$

qualquer que seja a função positiva definida f em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Mas isto é equivalente à condição

$$\sum_{(m,n),(k,l)\in K} a^q_{m,n}(f)a^q_{k,l}(f)(1 - R^{q-2}_{m,n}(z)\overline{R^{q-2}_{k,l}(z)}) > 0, \quad z \in B_2 \setminus \{1\},$$

ou seja, que o sistema

$$R^{q-2}_{m,n}(z)\overline{R^{q-2}_{k,l}(z)} = 1, \quad (m,n),(k,l) \in K$$

não tenha solução em $B_2 \setminus \{1\}$. O resultado segue aplicando-se os Lemas 3.1.7 e 3.3.16. ■

Observamos que se o conjunto $\{m-n-k+l : (m,n),(k,l) \in K\}$ contém um subconjunto relativamente primo, então $\{m-n : (m,n) \in K\}$ contém um subconjunto relativamente primo. A recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo $K = \{(1,0),(10,6)\}$.

Notemos também que esse mesmo conjunto K mostra que a condição do Teorema 3.3.9 não é suficiente para garantir positividade definida estrita em Ω_{2q}. De fato,

$$\{m-n : (m,n) \in K\} \cap (2\mathbb{Z}+j) \neq \emptyset, \quad j = 0,1.$$

No entanto,

$$\{m-n-k+l : (m,n),(k,l) \in K\} = \{-3,0,3\}$$

o qual não contém um subconjunto relativamente primo. Pelo Teorema 3.3.17, K não induz SPD de ordem 2 em Ω_{2q}.

3.3.3 Conjuntos que induzem positividade definida estrita em Ω_{2q}

Identificar conjuntos que induzem SPD de ordem $N > 2$ não é tão simples como identificar conjuntos que induzem SPD de ordem 2. Nesta subseção apresentamos alguns casos nos quais é possível uma conclusão. O lema a seguir é usado na prova do Teorema 3.3.19 abaixo.

Lema 3.3.18. *Sejam q em $\{2,3,\ldots,\infty\}$, N um inteiro positivo e $z_1, z_2, \ldots, z_N$ pontos distintos em B_2. A matriz de ordem N com entrada $\mu\nu$ dada por*

$$\sum_{m=0}^{N-1} R^{q-2}_{m,0}(z_\mu)\overline{R^{q-2}_{m,0}(z_\nu)}$$

é positiva definida.

Prova. Se $c_1, c_2, \ldots, c_N$ são números complexos, então

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \sum_{m=0}^{N-1} R_{m,0}^{q-2}(z_\mu)\overline{R_{m,0}^{q-2}(z_\nu)} = \sum_{m=0}^{N-1} \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R_{m,0}^{q-2}(z_\mu) \right|^2$$

e a matriz é não negativa definida. Se a equação acima anula-se, obtemos

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R_{m,0}^{q-2}(z_\mu) = 0, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Isto equivale a dizer que o funcional linear $\mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L}(g) := \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu g(z_\mu)$$

anula as funções $R_{0,0}^{q-2}, R_{1,0}^{q-2}, \ldots, R_{N-1,0}^{q-2}$. Tais funções geram o espaço N-dimensional Π_{N-1} composto pelos polinômios de grau no máximo $N-1$ em z. Como $z_1, z_2, \ldots, z_N$ são pontos distintos, existe um polinômio p em Π_{N-1} ([7, p. 24]) tal que

$$p(z_\mu) = \overline{c_\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq N.$$

Logo,

$$0 = \mathcal{L}(p) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu p(z_\mu) = \sum_{\mu=1}^{N} |c_\mu|^2.$$

Portanto, $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ e a matriz é positiva definida. ■

O Teorema 3.3.19 abaixo fornece exemplos de conjuntos que induzem SPD em Ω_{2q}.

Teorema 3.3.19. *Sejam* q *em* $\{2, 3, \ldots, \infty\}$, N *um inteiro positivo e* s *um inteiro não negativo. O conjunto*

$$K := \{(s, s), (s+1, s), \ldots, (s+N-1, s)\}$$

induz SPD de ordem N *em* Ω_{2q}.

Prova. O caso $q = \infty$ está contido em [47]. Assumamos $q < \infty$ e sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_{2q} e f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Primeiro escolhamos um ponto p em Ω_{2q} de forma que

$$\langle p, \xi_\mu \rangle \neq \langle p, \xi_\nu \rangle, \quad \mu \neq \nu,$$

e escrevamos

$$\xi_\mu = (\cos\theta_\mu)\, e^{i\varphi_\mu}\, p + (\operatorname{sen}\theta_\mu)\, \zeta_\mu,$$

onde $\theta_\mu \in [0, \pi/2]$, $\varphi_\mu \in [0, 2\pi)$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ são pontos distintos em Ω_{2q-2} e ortogonais a p. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$p \neq \pm\, e^{-i\varphi_\mu}\xi_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq N.$$

Então,

$$\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle = \cos\theta_\mu\, \cos\theta_\nu\, e^{i(\varphi_\mu - \varphi_\nu)} + \operatorname{sen}\theta_\mu \operatorname{sen}\theta_\nu\, \langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle.$$

Pela Fórmula de Adição (1.21), temos que

$$\begin{aligned} R^{q-2}_{m,n}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\nu\, e^{-i\varphi_\nu}) \\ &+ \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) \overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle), \end{aligned}$$

onde cada $b^{k,l}_{m,n,q-2}$ é positivo. Se $A_{\mu\nu} := f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)$, então

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\nu\, e^{-i\varphi_\nu}) \\ &+ \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) \overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle). \end{aligned}$$

Agora, escrevamos $A = E + F$, onde

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &:= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\nu\, e^{-i\varphi_\nu}), \\ F_{\mu\nu} &:= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{l=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{n} b^{k,l}_{m,n,q-2} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) \overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle). \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1.2.14 aplicado em Ω_{2q-2}, a matriz $(R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle))$ é não negativa definida, qualquer que seja o par (k, l). Ainda, se $c_1, c_2, \ldots, c_N$ são números complexos, então, para cada par (k, l),

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) \overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} = \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu) \right|^2 \geq 0,$$

isto é, a matriz com entrada $\mu\nu$ dada por $Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)}$ é não negativa definida. Sendo F uma soma de produtos de Schur de matrizes não negativas definidas, segue que ela é não negativa definida. Da mesma forma

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} E_{\mu\nu} &= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu})\overline{R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu})} \\ &= \sum_{(m,n)\in K} a^q_{m,n}(f) \left|\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu R^{q-2}_{m,n}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu})\right|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

ou seja, E é não negativa definida. Então, se

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} A_{\mu\nu} = 0,$$

podemos concluir que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} F_{\mu\nu} = 0,$$

Como cada $a^q_{m,n}(f)$ é positivo e cada $b^{k,l}_{m,n,q-2}$ é positivo,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{k,l}_{m,n}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu\rangle) = 0,$$

para $(m,n) \in K$, $k = 1, 2, \ldots, m$ e $l = 1, 2, \ldots, n$. Equivalentemente,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} Q^{k,l}_{m,s}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{k,l}_{m,s}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{k,l}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu\rangle) = 0,$$

para $m = s, s+1, \ldots, s+N-1$, $k = 1, 2, \ldots, m$ e $l = 1, 2, \ldots, s$. Em particular,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} Q^{s,s}_{m,s}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{s,s}_{m,s}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{s,s}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu\rangle) = 0, \quad s \leq m \leq s+N-1.$$

Segue que

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} Q^{s,s}_{m+s,s}(\theta_\mu, \varphi_\mu)\overline{Q^{s,s}_{m+s,s}(\theta_\nu, \varphi_\nu)} R^{q-3}_{s,s}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu\rangle) = 0, \quad 0 \leq m \leq N-1,$$

isto é,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{2s}(\operatorname{sen}\theta_\nu)^{2s} R^{q-2+2s}_{m,0}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu})\overline{R^{q-2+2s}_{m,0}(\cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu})} R^{q-3}_{s,s}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu\rangle) = 0,$$

para $m = 0, 1, \ldots, N-1$. Somando-se em m, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu=1}^{N} & c_\mu \overline{c_\nu} (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{2s} (\operatorname{sen}\theta_\nu)^{2s} \times \\ & \times \left(\sum_{m=0}^{N-1} R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) \overline{R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu})} \right) R_{s,s}^{q-3}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle) = 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pela escolha de p, temos que

$$\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu} \neq \cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu}, \quad \mu \neq \nu.$$

Logo, pelo Lema 3.3.18, a matriz

$$\left(\sum_{m=0}^{N-1} R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) \overline{R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu})} \right)$$

é positiva definida. Como o produto de Schur de uma matriz positiva definida por uma não negativa definida com diagonal constante não nula resulta em uma matriz positiva definida ([13, p. 480]), concluímos que a matriz

$$\left[\left(\sum_{m=0}^{N-1} R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\mu\, e^{i\varphi_\mu}) \overline{R_{m,0}^{q-2+2s}(\cos\theta_\nu\, e^{i\varphi_\nu})} \right) R_{s,s}^{q-3}(\langle \zeta_\mu, \zeta_\nu \rangle) \right]$$

é positiva definida. Logo, pela Equação (3.18),

$$c_\mu (\operatorname{sen}\theta_\mu)^{2s} = 0, \quad 1 \leq \mu \leq N.$$

Novamente pela escolha de p, $\operatorname{sen}\theta_\mu \neq 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Assim, $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ e, portanto, f é estritamente positiva definida de ordem N em Ω_{2q}. ■

Observação 3.3.20. *No caso $s = 0$ a condição $p \neq \pm \exp(-i\varphi_\mu)\xi_\mu$ é desnecessária. Conseqüentemente, a prova do teorema fica ligeiramente mais curta neste caso.*

Pelo Lema 3.3.15, obtemos

Corolário 3.3.21. *Sejam q, N e s como no Teorema 3.3.19. O conjunto*

$$\{(s,s), (s,s+1), \ldots, (s,s+N-1)\}$$

induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

O próximo resultado revela que sob certas condições todos os conjuntos que induzem SPD em Ω_{2q} automaticamente geram conjuntos que induzem SPD em Ω_2.

Teorema 3.3.22. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$ e N um inteiro positivo. Para cada inteiro l assumamos que o conjunto*

$$\{(m, n) \in K : m - n = l\}$$

tenha cardinalidade finita. Se K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, então

$$L := \{m - n : (m, n) \in K\}$$

induz SPD de ordem N em Ω_2.

Prova. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_2 e f uma função positiva definida em Ω_2 satisfazendo $K_1(f) = L$. Escrevendo-se $\xi_\mu = \exp(i\theta_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, temos

$$R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = R_{m,n}^{q-2}(e^{i(\theta_\mu - \theta_\nu)}) = e^{i(m-n)(\theta_\mu - \theta_\nu)}.$$

Seja N_l a cardinalidade de $K_l := \{(m, n) \in K : m - n = l\}$. Se $l \in L$, então

$$e^{il(\theta_\mu - \theta_\nu)} = \sum_{(m,n) \in K_l} \frac{1}{N_l} R_{m,n}^{q-2}\left(e^{i(\theta_\mu - \theta_\nu)}\right).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= f(e^{i(\theta_\mu - \theta_\nu)}) = \sum_{l \in L} a_l^1(f) e^{il(\theta_\mu - \theta_\nu)} \\
&= \sum_{l \in L} a_l^1(f) \sum_{(m,n) \in K_l} \frac{1}{N_l} R_{m,n}^{q-2}\left(e^{i(\theta_\mu - \theta_\nu)}\right) \\
&= \sum_{(m,n) \in K} c_{m,n}^q(f) R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle),
\end{aligned}$$

onde $c_{m,n}^q(f) > 0$ para todo (m, n). Dessa forma, $f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle)$, onde

$$g(z) := \sum_{(m,n) \in K} c_{m,n}^q(f) R_{m,n}^{q-2}(z)$$

é uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(g) = K$. Como K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, segue que a matriz $(g(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é positiva definida. Conseqüentemente, a matriz $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é positiva definida e L induz SPD de ordem N em Ω_2. ■

Nosso próximo resultado fornece uma condição suficiente para SPD em Ω_{2q}.

Teorema 3.3.23. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q em $\{2,3,\ldots,\infty\}$ e N um inteiro positivo. Suponhamos que K satisfaça as seguintes propriedades:*

(i) Para quaisquer pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q}, existem inteiros positivos r, s e um polinômio p em $\mathcal{H}^q_{r,s}$ tais que $p(\xi_\mu) \neq 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, $p(\xi_\mu) \neq p(\xi_\nu)$, $\mu \neq \nu$, e

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial p(z)}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial p(z)}{\partial \overline{z^i}} = 0, \quad z = (z^1, z^2, \ldots, z^q) \in \mathbb{C}^q; \tag{3.19}$$

(ii) O conjunto $\{(r,s), (2r,2s), (3r,3s), \ldots, (Nr,Ns)\}$ é um subconjunto de K.

Então, K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

Prova. O caso $q = \infty$ já foi investigado em [47]. Suponhamos então $q < \infty$ e sejam $d_1, d_2, \ldots, d_N$ dados arbitrários associados aos pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q}. Pela hipótese (i), existe $p \in \mathcal{H}^q_{r,s}$ tal que $p(\xi_\mu) \neq 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, e $p(\xi_\mu) \neq p(\xi_\nu)$, $\mu \neq \nu$. Como a matriz $(p(\xi_\mu)^\nu)$ é do tipo de Vandermonde associada aos N pontos distintos $p(\xi_1), p(\xi_2), \ldots, p(\xi_N)$, existe uma única função da forma

$$h(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j p(z)^j, \quad c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C},$$

tal que $h(z_\mu) = d_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Agora, mostraremos que $h \in \mathcal{H}^q_K$. Fixando-se j em $\{1, 2, \ldots, N\}$ e diferenciando-se em relação a z e $\overline{z}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p(z)^j}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} &= \frac{\partial}{\partial z^i}\left(\frac{\partial p(z)^j}{\partial \overline{z^i}}\right) = \frac{\partial}{\partial z^i}\left(j p(z)^{j-1} \frac{\partial p(z)}{\partial \overline{z^i}}\right) \\
&= j(j-1)p(z)^{j-2} \frac{\partial p(z)}{\partial z^i} \frac{\partial p(z)}{\partial \overline{z^i}} + j p(z)^{j-1} \frac{\partial^2 p(z)}{\partial z^i \partial \overline{z^i}}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 p(z)^j}{\partial z^i \partial \overline{z^i}} = j(j-1)p(z)^{j-2} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial p(z)}{\partial z^i} \frac{\partial p(z)}{\partial \overline{z^i}} + j p(z)^{j-1} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 p(z)}{\partial z^i \partial \overline{z^i}}.$$

Como o polinômio p é harmônico, a segunda parcela da soma acima é nula, e por (i), a primeira parcela é nula. Logo, $p(z)^j$ é harmônico. Portanto, sendo homogêneo de grau rj em z e de grau sj em $\overline{z}$, $p(z)^j$ é um elemento de $\mathcal{H}^q_{rj,sj}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Por (ii),

$$h \in \sum_{j=1}^{N} \mathcal{H}^q_{rj,sj} \subset \sum_{(m,n) \in K} \mathcal{H}^q_{m,n} = \mathcal{H}^q_K.$$

Pelo Teorema 3.3.1, K induz SPD de ordem N em Ω_{2q}. ∎

Corolário 3.3.24. *Nas mesmas condições do Teorema 3.3.23, o conjunto*

$$K + (l,l) := \{(m+l, n+l) : (m,n) \in K\}, \quad l \geq 0,$$

induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

Prova. Consideremos $d_1, d_2, \ldots, d_N$ dados arbitrários associados aos N pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q}. Usando o mesmo raciocínio do teorema anterior, existe uma única função da forma

$$h(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j p(z)^{j+l}$$

tal que $h(\xi_\mu) = d_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Como

$$p(z)^{j+l} \in \mathcal{H}^q_{rj+l,sj+l}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

segue que

$$h \in \sum_{j=1}^{N} \mathcal{H}^q_{rj+l,sj+l} \subset \sum_{(m,n)\in K} \mathcal{H}^q_{m+l,n+l} = \sum_{(m,n)\in K+(l,l)} \mathcal{H}^q_{m,n} = \mathcal{H}^q_{K+(l,l)}.$$

Pelo Teorema 3.3.1, $K + (l,l)$ induz SPD de ordem N em Ω_{2q}. ■

Corolário 3.3.25. *Sejam q e N como no Teorema 3.3.23 e $K := \{(m,0) : m \in R\}$, onde R é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Suponhamos que K satisfaça as seguintes propriedades:*

(i) Para quaisquer pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2q}, existem um inteiro r e um polinômio p em $\mathcal{H}^q_{r,0}$ tais que $p(\xi_\mu) \neq 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, e $p(\xi_\mu) \neq p(\xi_\nu)$, $\mu \neq \nu$;

(ii) O conjunto $\{r, 2r, 3r, \ldots, Nr\}$ é um subconjunto de R.

Então, $K + (l,0)$, $l \geq 0$, induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

Prova. Este é o Corolário 3.3.24 reescrito para o conjunto K definido no enunciado. Como polinômios que não dependem da variável $\overline{z}$ satisfazem automaticamente (3.19), esta condição pode ser excluída da hipótese (i). ■

Observação 3.3.26. *Pela Observação 1.1.1-(ii), a condição* (3.19)*, nas variáveis reais correspondentes, torna-se*

$$\sum_{i=1}^{q} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y_i} \right)^2 \right] = 0.$$

3.4 Conexão entre positividade definida estrita em Ω_{2q} e em S^{2q-1}

Positividade definida estrita em S^{2q-1}, $q = 2, 3, \ldots, \infty$, como descrita na Introdução, pode ser caracterizada de várias formas. Uma delas é a seguinte ([38]): Um subconjunto K de $\mathbb{N}$ induz SPD de ordem N em S^{2q-1} se toda função positiva definida f em S^{2q-1} satisfazendo $K(f) := \{k \in \mathbb{N} : a_k^{2q-1}(f) > 0\} = K$ é estritamente positiva definida de ordem N em S^{2q-1}. O Teorema 3.4.1 abaixo fornece um método para construirmos conjuntos que induzem SPD em Ω_{2q} a partir de conjuntos que induzem SPD em S^{2q-1} e vice-versa.

Teorema 3.4.1. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}$, q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$ e N um inteiro positivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) K induz SPD de ordem N em S^{2q-1};
(ii) $\mathcal{K} := \bigcup_{k\in K}\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m + n = k\}$ induz SPD de ordem N em Ω_{2q}.

Prova. Suponhamos que (i) vale. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_{2q}, $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos e f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = \mathcal{K}$. Se

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0,$$

então

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0, \quad (m,n) \in \mathcal{K}.$$

Pelo Lema 2.5.1,

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\mathrm{Re}\,\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0, \quad k \in K. \tag{3.20}$$

Escrevendo-se $\xi_\mu = (x_\mu^1 + iy_\mu^1, \ldots, x_\mu^q + iy_\mu^q)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, temos

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle = \langle w_\mu, w_\nu\rangle,$$

onde $w_\mu := (x_\mu^1, y_\mu^1, \ldots, x_\mu^q, y_\mu^q)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, são pontos distintos em S^{2q-1}. Logo, a Equação (3.20) é equivalente a

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0, \quad k \in K.$$

Escrevendo-se $c_\mu = a_\mu + ib_\mu$, $a_\mu, b_\mu \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}(a_\mu a_\nu + b_\mu b_\nu)R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\langle w_\mu, w_\nu\rangle)+$$
$$+\, i\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}(b_\mu a_\nu - a_\mu b_\nu)R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0, \quad k \in K.$$

Logo,

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}(a_\mu a_\nu + b_\mu b_\nu)R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0, \quad k \in K.$$

Isto mostra que

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} a_\mu a_\nu g(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} b_\mu b_\nu g(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0,$$

onde g é uma função positiva definida em S^{2q-1} satisfazendo $K(g) = K$. Como K induz SPD de ordem N em S^{2q-1}, $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = b_1 = b_2 = \cdots = b_N = 0$. Isto mostra que (i) implica (ii).

Reciprocamente, sejam g uma função positiva definida em S^{2q-1} satisfazendo $K(g) = K$, $w_1, w_2, \ldots, w_N$ pontos distintos em S^{2q-1} e $d_1, d_2, \ldots, d_N$ números reais. Se

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} d_\mu d_\nu g(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0,$$

então

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} d_\mu d_\nu R_k^{(q-3/2,q-3/2)}(\langle w_\mu, w_\nu\rangle) = 0, \quad k \in K. \tag{3.21}$$

Como anteriormente, escrevendo-se $w_\mu = (x_\mu^1, y_\mu^1, \ldots, x_\mu^q, y_\mu^q)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, temos

$$\langle w_\mu, w_\nu\rangle = \operatorname{Re}\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle,$$

onde $\xi_\mu := (x_\mu^1 + iy_\mu^1, \ldots, x_\mu^q + iy_\mu^q)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, são pontos distintos em Ω_{2q}. Pelo Lema 2.5.1, a Equação (3.21) equivale a

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} d_\mu d_\nu R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0, \quad (m, n) \in \mathcal{K}.$$

Isto mostra que

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} d_\mu d_\nu f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0,$$

para qualquer função f positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, $d_1 = d_2 = \cdots = d_N = 0$. Isto mostra que (ii) implica (i). ■

Os Teoremas 2.9 e 2.14 em [26] estabelecem que um subconjunto K de $\mathbb{N}$ induz SPD de ordem $N < 2q$ em S^{2q-1} se, e somente se, ele contém um inteiro par e um inteiro ímpar, ambos maiores ou iguais a $[N/2] - 1$. Estes resultados juntamente com o Teorema 3.4.1 fornecem o seguinte corolário.

Corolário 3.4.2. *Sejam N um inteiro maior ou igual a 2 e q um inteiro maior ou igual a $(N+1)/2$ (incluindo-se $q = \infty$). Sejam $\mathcal{K}$ e K como no Teorema 3.4.1. Então, $\mathcal{K}$ induz SPD de ordem N em Ω_{2q} se, e somente se, $\{k \in K : k \geq [N/2] - 1\}$ contém um inteiro par e um inteiro ímpar.*

3.5 Considerações finais

Encontrar funções estritamente positivas definidas f em Ω_{2q} pode ser difícil quando os pontos a serem interpolados estão arbitrariamente espalhados. Se a distribuição possui alguma particularidade especial, a possibilidade de resolvermos o problema de interpolação através de funções positivas definidas aumenta. Uma maneira é considerarmos todos os pontos contidos em um espaço de dimensão inferior a q.

Sejam p e q inteiros tais que $1 \leq p \leq q$. Dizemos que K *pertence à classe* $SPD_N^p(\Omega_{2q})$ se para toda função positiva definida f em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$ e se para todos pontos distintos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ em Ω_{2p}, a matriz $(f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle))$ é positiva definida.

Teorema 3.5.1. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q em $\{2, 3, \ldots, \infty\}$ e N um inteiro positivo. Se $\{m - n : (m, n) \in K\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2, então K pertence à classe $SPD_N^1(\Omega_{2q})$.*

Prova. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos, $\xi_\mu = \exp(i\theta_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, pontos distintos em Ω_2 e f uma função positiva definida em Ω_{2q} satisfazendo $K_q(f) = K$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{m,n}^{q-2}(e^{i(\theta_\mu-\theta_\nu)}) \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} e^{i(\theta_\mu-\theta_\nu)(m-n)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu(m-n)} \sum_{\nu=1}^{N} \overline{c_\nu} e^{-i\theta_\nu(m-n)} \\
&= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^q(f) \left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu(m-n)} \right|^2.
\end{aligned}$$

Se a forma quadrática acima é nula, então

$$\left| \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu e^{i\theta_\mu(m-n)} \right|^2 = 0, \quad (m,n) \in K.$$

Como o conjunto $\{m - n : (m,n) \in K\}$ induz SPD de ordem N em Ω_2, o Lema 3.1.1 garante que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. ■

Teorema 3.5.2. *Sejam K um subconjunto de $\mathbb{N}^2$, q um inteiro maior ou igual a 2, N um inteiro positivo e*

$$L := \bigcup_{(m,n)\in K} \{(m-j, n-j) : 0 \leq j \leq m \wedge n\}.$$

Se L induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, então K pertence à classe $SPD_N^q(\Omega_\infty)$.

Prova. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_N$ números complexos, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pontos distintos em Ω_{2q} e f uma função positiva definida em Ω_∞ satisfazendo $K_\infty(f) = K$. Então, pelo Lema

3.3.13,

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^{\infty}(f) \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle^m \overline{\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle^n} \\ &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^{\infty}(f) \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} \sum_{j=0}^{m\wedge n} c_{q,m,n}^{j} R_{m-j,n-j}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) \\ &= \sum_{(m,n)\in K} a_{m,n}^{\infty}(f) \sum_{j=0}^{m\wedge n} c_{q,m,n}^{j} \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{m-j,n-j}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle).\end{aligned}$$

Se a forma quadrática acima é nula, então

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{m-j,n-j}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0, \quad (m,n)\in K, \quad 0 \le j \le m\wedge n,$$

ou seja,

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} c_\mu \overline{c_\nu} R_{\alpha,\beta}^{q-2}(\langle \xi_\mu, \xi_\nu\rangle) = 0, \quad (\alpha,\beta)\in L.$$

Como L induz SPD de ordem N em Ω_{2q}, segue que $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$. ■

Geometricamente, os pontos do conjunto L do Teorema 3.5.2 estão nas retas $m = n+r$, $r \in \{k-l : (k,l)\in K\}$, e para cada $r = k-l$ a soma de suas coordenadas não excede $k+l$ (na figura abaixo está ilustrado um exemplo em que L induz SPD de ordem 2 em Ω_{2q}).

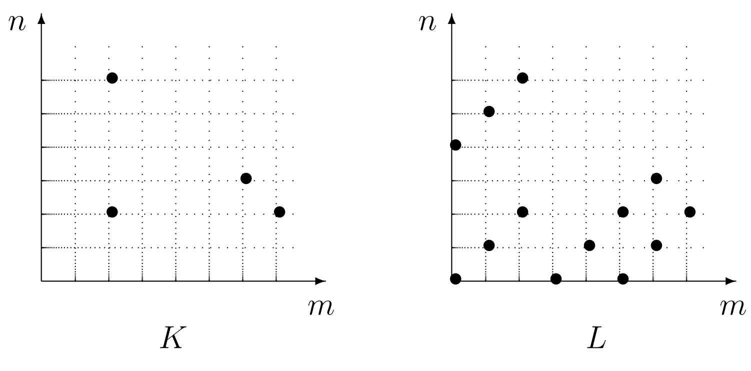

Figura 3.1: K pertence à classe $SPD_2^q(\Omega_\infty)$

Apêndice A

Elementos de superfície

Provaremos a Fórmula (1.7) que relaciona os elementos de superfície $d\omega_{2q}$ para diferentes valores de q. Na seção A.1, mostraremos tal relação no caso real e então, na Seção A.2, faremos uma analogia para o caso complexo. Além disso, mostraremos que de uma certa forma as medidas nas esferas reais e complexas coincidem (este fato foi usado implicitamente na prova da Proposição 1.2.7).

A.1 Elemento de superfície em S^{q-1}

Denotaremos por σ_{q-1} a medida usual de S^{q-1} e por $d\sigma_{q-1}$ o elemento de superfície em S^{q-1} ([33, 43]). O elemento de superfície $d\sigma_{q-1}$ é usualmente interpretado como a $(q-1)$-forma diferencial ([32])

$$d\sigma_{q-1}(\xi) := \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\xi^j \, d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{j-1} \wedge \widehat{d\xi^j} \wedge d\xi^{j+1} \wedge \cdots \wedge d\xi^q, \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^q),$$

onde o símbolo $\widehat{d\xi^j}$ significa que tal fator é excluído.

Fazendo-se uma mudança de variáveis da forma $\xi^j = \xi^j(u)$, onde $u = (u^1, u^2, \ldots, u^{q-1})$, obtemos

$$\begin{aligned} d\sigma_{q-1}(\xi) &= \left(\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\xi^j \left|\frac{\partial(\xi^1, \ldots, \widehat{\xi^j}, \ldots, \xi^q)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^{q-1})}\right|\right) du^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^{q-1} \\ &= \begin{vmatrix} \xi^1 & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^{q-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^q & \frac{\partial \xi^q}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \xi^q}{\partial u^{q-1}} \end{vmatrix} du^1 \wedge du^2 \wedge \cdots \wedge du^{q-1}, \end{aligned}$$

onde estamos escrevendo

$$\left|\frac{\partial(\xi^1,\ldots,\widehat{\xi^j},\ldots,\xi^q)}{\partial(u^1,u^2,\ldots,u^{q-1})}\right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^{q-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\xi^q}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^{q-1}} \end{vmatrix}.$$

Usando a mudança de variáveis

$$\xi = t\varepsilon_q + \sqrt{1-t^2}\eta,$$

onde $t \in [-1,1]$, $\eta := (\eta^1,\eta^2,\ldots,\eta^{q-1},0) \in S^{q-2}$, obtemos

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial u^j} = (1-t^2)^{1/2}\frac{\partial\eta^i}{\partial u^j}, \quad 1 \le i \le q, \quad 1 \le j \le q-2, \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial\xi^q}{\partial t} = 1 \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial t} = -t(1-t^2)^{-1/2}\eta^i, \quad 1 \le i \le q-1 \tag{A.3}$$

$$\xi^i - t\frac{\partial\xi^i}{\partial t} = (1-t^2)^{-1/2}\eta^i, \quad 1 \le i \le q. \tag{A.4}$$

Usando estas fórmulas, temos que

$$\begin{vmatrix} \xi^1 & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^1}{\partial t} \\ \xi^2 & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi^q & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^q}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^1 - t\frac{\partial\xi^1}{\partial t} & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^1}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^1}{\partial t} \\ \xi^2 - t\frac{\partial\xi^2}{\partial t} & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^2}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi^q - t\frac{\partial\xi^q}{\partial t} & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^1} & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial\xi^q}{\partial u^{q-2}} & \frac{\partial\xi^q}{\partial t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (1-t^2)^{-1/2}\eta^1 & (1-t^2)^{1/2}\frac{\partial\eta^1}{\partial u^1} & \cdots & (1-t^2)^{1/2}\frac{\partial\eta^1}{\partial u^{q-2}} & -t(1-t^2)^{-1/2}\eta^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (1-t^2)^{-1/2}\eta^{q-1} & (1-t^2)^{1/2}\frac{\partial\eta^{q-1}}{\partial u^1} & \cdots & (1-t^2)^{1/2}\frac{\partial\eta^{q-1}}{\partial u^{q-2}} & -t(1-t^2)^{-1/2}\eta^{q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-t^2)^{-1/2}(1-t^2)^{(q-2)/2} \begin{vmatrix} \eta^1 & \frac{\partial\eta^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\eta^1}{\partial u^{q-2}} & -t(1-t^2)^{-1/2}\eta^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta^{q-1} & \frac{\partial\eta^{q-1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\eta^{q-1}}{\partial u^{q-2}} & -t(1-t^2)^{-1/2}\eta^{q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-t^2)^{(q-3)/2}\begin{vmatrix} \eta^1 & \frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \eta^1}{\partial u^{q-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta^{q-1} & \frac{\partial \eta^{q-1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \eta^{q-1}}{\partial u^{q-2}} \end{vmatrix}.$$

Portanto, concluímos que

$$d\sigma_{q-1}(\xi) = (1-t^2)^{(q-3)/2} dt d\sigma_{q-2}(\eta).$$

A.2 Elemento de superfície em Ω_{2q}

Seja q um inteiro maior ou igual a 2. De forma análoga ao caso real, escrevemos

$$\xi = (\cos\theta)e^{i\varphi}\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\theta)\xi',$$

onde $\theta \in (0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\xi' \in \Omega_{2q-2}$ e usamos a mudança de variáveis $\xi^j = \xi^j(u)$, onde $u = (u^1, u^2, \ldots, u^{2q-3})$. Identificando-se $\mathbb{C}^q$ com $\mathbb{R}^{2q}$, o ponto ξ identifica-se com a $2q$-upla

$$x(\xi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, (\operatorname{sen}\theta)\, x^1(\xi'), \ldots, (\operatorname{sen}\theta)\, x^{2q-2}(\xi'))$$

e obtemos

$$\frac{\partial x(\xi)}{\partial\theta} = (-\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, (\cos\theta)x^1(\xi'), \ldots, (\cos\theta)x^{2q-2}(\xi')), \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial x(\xi)}{\partial\varphi} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0, \ldots, 0), \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial x(\xi)}{\partial u^j} = \left(0, 0, (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^j}, \ldots, (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^j}\right), \quad 1 \le j \le 2q-3, \tag{A.7}$$

$$x(\xi) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial x(\xi)}{\partial\theta} = (0, 0, (\operatorname{sen}\theta)^{-1}x^1(\xi'), \ldots, (\operatorname{sen}\theta)^{-1}x^{2q-2}(\xi')). \tag{A.8}$$

Usando estas fórmulas, temos que

$$\begin{vmatrix} x^1(\xi) & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial\theta} \\ x^2(\xi) & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial\theta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{2q}(\xi) & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial\theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^1(\xi) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x^1(\xi)}{\partial\theta} & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^1(\xi)}{\partial\theta} \\ x^2(\xi) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x^2(\xi)}{\partial\theta} & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^2(\xi)}{\partial\theta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{2q}(\xi) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial\theta} & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial u^{2q-3}} & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial\varphi} & \frac{\partial x^{2q}(\xi)}{\partial\theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ (\operatorname{sen}\theta)^{-1}x^1(\xi') & (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & 0 & (\cos\theta)x^1(\xi') \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\operatorname{sen}\theta)^{-1}x^{2q-2}(\xi') & (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & (\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & 0 & (\cos\theta)x^{2q-2}(\xi') \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & 0 & (\cos\theta)x^1(\xi') \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & 0 & (\cos\theta)x^{2q-2}(\xi') \end{vmatrix}$$

$$= -\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-4}\operatorname{sen}\varphi\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & (\cos\theta)x^1(\xi') \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & (\cos\theta)x^{2q-2}(\xi') \end{vmatrix}$$

$$-\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-4}\cos\varphi\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & (\cos\theta)x^1(\xi') \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} & (\cos\theta)x^{2q-2}(\xi') \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-4}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\begin{vmatrix} x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$+\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-4}\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\begin{vmatrix} x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}\,(\operatorname{sen}\varphi)^2 \begin{vmatrix} x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$+ \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}(\cos\varphi)^2 \begin{vmatrix} x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3} \begin{vmatrix} x^1(\xi') & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2q-2}(\xi') & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^{2q-2}(\xi')}{\partial u^{2q-3}} \end{vmatrix}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$d\omega_{2q}(\xi) = \cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{2q-3}d\theta d\varphi d\omega_{2q-2}(\xi').$$

O objetivo a seguir é verificar que a medida de superfície $d\omega_{2q}$ em Ω_{2q} coincide com a medida de superfície $d\sigma_{2q-1}$ em S^{2q-1}. Consideremos então, a transformação $T : \mathbb{R}^{2q} \to \mathbb{C}^q$ dada por

$$T(x^1, y^1, \dots, x^q, y^q) := (x^1 + iy^1, \dots, x^q + iy^q).$$

Definamos a medida positiva de Borel μ em S^{2q-1} por

$$\mu(A) := d\omega_{2q}(T(A)), \quad A \subset S^{2q-1}.$$

Então, μ é invariante em relação a $O(2q) := \{S : \mathbb{R}^{2q} \to \mathbb{R}^{2q} : SS^t = I\}$. De fato, seja $S \in O(2q)$ e definamos $\Psi : \Omega_{2q} \to \Omega_{2q}$ por

$$\Psi(T(x)) := T(S(x)), \quad x \in S^{2q-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\Psi(T(x))||^2 &= \langle \Psi(T(x)), \Psi(T(x)) \rangle = \langle T(S(x)), T(S(x)) \rangle \\ &= [S(x), S(x)] = [x, x] = \langle T(x), T(x) \rangle = ||T(x)||^2, \quad x \in S^{2q-1}. \end{aligned}$$

Aqui estamos denotando o produto interno usual em $\mathbb{C}^q$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e o produto interno usual em $\mathbb{R}^{2q}$ por $[\cdot, \cdot]$. Portanto, $\Psi \in U(q)$. Assim, usando-se a invariância de $d\omega_{2q}$ em relação a $U(q)$, obtemos

$$\mu(S(A)) = d\omega_{2q}(T(S(A))) = d\omega_{2q}(\Psi(T(A))) = d\omega_{2q}(T(A)) = \mu(A), \quad S \in O(2q), \quad A \subset \mathbb{R}^{2q},$$

e μ é invariante em relação a $O(2q)$. Portanto, como $d\sigma_{2q-1}$ é a única medida em S^{2q-1} invariante por todos os elementos de $O(2q)$, concluímos que $d\sigma_{2q-1}$ coincide com $d\omega_{2q}$ ([32]).

Referências Bibliográficas

[1] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P., Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions. *Springer-Verlag, New York-Berlin,* 1984.

[2] Boyd, J. N., Orthogonal polynomials on the disc. Thesis, University of Virginia, 1972.

[3] Boyd, J. N.; Raychowdhury, P. N., Zonal harmonic functions from two-dimensional analogs of Jacobi polynomials. *Applicable Anal.* **16** (1983), no. 3, 243–259.

[4] Cheney, E. W.; Approximation using positive definite functions. *Approximation theory VIII, Vol. 1*, 145–168, Ser. Approx. Decompos., 6, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ*, 1995.

[5] Cheney, E. W.; Light. W. A., A Course in Approximation Theory, *Brooks Cole*, 1999.

[6] Christensen, J. P. R.; Ressel, P., Positive definite kernels on the complex Hilbert sphere. *Math. Z.* **180** (1982), no. 2, 193–201.

[7] Davis, P. J., Interpolation and approximation. *Dover Publications, Inc., New York,* 1975.

[8] Dreseler, B.; Hrach, R., Summability of Fourier expansions in terms of disc polynomials. *Functions, Series, Operators, Vol. I, II,* 375–384, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 35, *North-Holland, Amsterdam-New York,* 1983.

[9] Dyn, N., Interpolation and approximation by radial and related functions. *Approximation theory VI, Vol. I,* 211–234, *Academic Press, Boston, MA,* 1989.

[10] Fasshauer, G. E.; Hermite interpolation with radial basis functions on spheres. *Adv. Comput. Math.* **10** (1999), no. 1, 81–96.

[11] Folland, G. B., Spherical harmonic expansion of the Poisson-Szegő kernel for the ball. *Proc. Amer. Math. Soc.* **47** (1975), 401–408.

[12] Freeden, W., A spline interpolation method for solving boundary value problems of potential theory from discretely given data. *Numer. Methods Partial Differential Equations* **3** (1987), no. 4, 375–398.

[13] Horn, R. A.; Johnson, C. R., Matrix analysis. *Cambridge University Press, Cambridge-New York,* 1985.

[14] Ikeda, M., On spherical functions for the unitary group. I. General theory. *Mem. Fac. Engrg. Hiroshima Univ.* **3** no. 1, 17–29 (1967).

[15] Ikeda, M., On spherical functions for the unitary group. II. The case of two dimensions. *Mem. Fac. Engrg. Hiroshima Univ.* **3** no. 1, 31–53 (1967).

[16] Ikeda, M., On spherical functions for the unitary group. III. The case of three dimensions. *Mem. Fac. Engrg. Hiroshima Univ.* **3** no. 1, 55–75 (1967).

[17] Ikeda, M.; Kayama, T., On spherical functions for the unitary group IV. The case of higher dimensions. *Mem. Fac. Engrg. Hiroshima Univ.* **3** no. 1, 77–100 (1967).

[18] Koornwinder, T. H., The addition formula for Jacobi polynomials, II. The Laplace type integral representation and the product formula. *Math. Centrum Afd. Toegepaste Wisk.,* Report TW133 (1972).

[19] Koornwinder, T. H., The addition formula for Jacobi polynomials, III. Completion of the proof. *Math. Centrum Afd. Toegepaste Wisk.,* Report TW135 (1972).

[20] Koornwinder, T. H., The addition formula for Laguerre polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **8** (1977), no. 3, 535–540.

[21] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. *John Wiley & Sons, Inc., New York,* 1982.

[22] Light, W. A.; Cheney, E. W., Interpolation by periodic radial basis functions. *J. Math. Anal. Appl.* **168** (1992), no. 1, 111–130.

[23] Menegatto, V. A., Approximation by spherical convolution. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **18** (1997), no. 9–10, 995–1012.

[24] Menegatto, V. A., Fundamental sets of functions on spheres. *Methods Appl. Anal.* **5** (1998), no. 4, 387–398.

[25] Menegatto, V. A., Interpolation on the complex Hilbert sphere using positive definite and conditionally negative definite kernels. *Acta Math. Hungar.* **75** (1997), no. 3, 215–225.

[26] Menegatto, V. A., Strict positive definiteness on spheres. *Analysis* **19** (1999), no. 3, 217–233.

[27] Menegatto, V. A., Strictly positive definite kernels on the Hilbert sphere. *Appl. Anal.* **55** (1994), no. 1–2, 91–101.

[28] Menegatto, V. A.; Peron, A. P., A complex approach to strict positive definiteness on spheres, aceito para publicação em *Integral Transform. Spec. Funct.* **11** (2000), no. 4, 377–396.

[29] Menegatto, V. A.; Peron, A. P., Generalized interpolation on spheres using positive definite and related functions. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **18** (1997), no. 1–2, 189–200.

[30] Menegatto, V. A.; Peron, A. P., Positive definite kernels on complex spheres, aceito para publicação em *J. Math. Anal. Appl.* **254** (2001), no. 1, 219–232.

[31] Micchelli, C. A., Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constr. Approx.* **2** (1986), no. 1, 11–22.

[32] Müller, C., Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces. Applied Mathematical Science, 129, *Springer-Verlag, New York,* 1998.

[33] Müller, C., Spherical harmonics. Lecture Notes in Mathematics, 17 *Springer-Verlag, Berlin-New York* 1966.

[34] Narcowich, F. J., Generalized Hermite interpolation and positive definite kernels on a Riemannian manifold. *J. Math. Anal. Appl.* **190** (1995), no. 1, 165–193.

[35] Narcowich, F. J., Recent Developments in Approximation via Positive Definite Functions, in Approximation Theory IX, Volume 2: Computational Aspects, C. K. Chui and L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1998, 197–204.

[36] Powell, M. J. D., The theory of radial basis function approximation in 1990. *Advances in numerical analysis, Vol. II (Lancaster, 1990)*, 105–210, Oxford Sci. Publ., *Oxford Univ. Press, New York*, 1992.

[37] Rainville, E. D., Special functions. *The Macmillan Co., New York* 1960.

[38] Ron, A.; Sun, X., Strictly positive definite functions on spheres in Euclidean spaces. *Math. Comp.* **65** (1996), no. 216, 1513–1530.

[39] Šapiro, R. L., Special functions connected with representations of the group SU(n), of class I relative to SU($n-1$) ($n \geq 3$). *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **113** (1979), 201–211.

[40] Schreiner, M., On a new condition for strictly positive definite functions on spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 2, 531–539.

[41] Schoenberg, I. J., Positive definite functions on spheres. *Duke Math. J.* **9**, (1942). 96–108.

[42] Stein, E. M., Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Mathematical Notes, no. 11. *Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo*, 1972.

[43] Stein E. M.; Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton Mathematical Series, no. 32. *Princeton University Press, Princeton, N.J.,* 1971.

[44] Sun, X., Scattered Hermite interpolation using radial basis functions. *Linear Algebra Appl.* **207** (1994), 135–146.

[45] Sun, X., The fundamentality of translates of a continuous function on spheres. *Numer. Algorithms* **8** (1994), no. 1, 131–134.

[46] Sun, X.; Cheney, E. W., Fundamental sets of continuous functions on spheres. *Constr. Approx.* **13** (1997), no. 2, 245–250.

[47] Sun, X.; Menegatto, V. A., Strictly positive definite functions on the complex Hilbert sphere. Radial basis functions and their applications. *Adv. Comput. Math.* **11** (1999), no. 2-3, 105–119.

[48] Szegő, G., Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23. Revised ed. *American Mathematical Society, Providence, R.I.* 1959.

[49] Xu, Y.; Cheney, E. W., Strictly positive definite functions on spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), no. 4, 977–981.

[50] Young, W. H., A note on a class of symmetric functions and on a theorem required in theory of integral equations. *Messenger of Mathematics,* 40 (1910), 37–43.

[51] Zernike F.; Brinkman, H. C., Hypersphärische funktionen und die in sphärischen bereichen orthogonalen polynome. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.,* 38 (1935), 161–173.

Tabela de Símbolos

Ordem alfabética

B_{2q}	disco unitário fechado em $\mathbb{C}^q$
$b^{k,l}_{m,n,\alpha}$	ver Fórmula da Adição
$\mathbb{C}^q$	espaço vetorial complexo q-dimensional
d_q	distância geodésica em S^q
$d\omega_{2q}$	medida de Lebesgue esférica em Ω_{2q}
$d\sigma_{q-1}$	elemento de superfície em S^{q-1}
$\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}$	conjunto dos polinômios em $\Pi^{o,q}_{m,n}$, que são harmônicos
$\mathcal{H}^q_{m,n}$	conjunto das restrições a Ω_{2q} dos elementos de $\mathcal{H} \cap \Pi^{o,q}_{m,n}$
$\mathcal{H}^q_K$	soma direta dos $\mathcal{H}^q_{m,n}$, $(m,n) \in K$
$K_q(f)$	ver p. 32
$L^2(B_2, dw_\alpha)$	espaço de Hilbert de funções de quadrado integráveis em B_2
$m \wedge n$	menor elemento do conjunto $\{m, n\}$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}^q$	conjunto das q-uplas de números naturais
$N(q; m, n)$	dimensão de $\mathcal{H}^q_{m,n}$
$\mathcal{P}_q(z, \zeta)$	núcleo de Poisson-Szegő
$P(r, \theta - \varphi)$	núcleo de Poisson convencional
$P^{(q-1)/2}_k$	polinômio de Gegenbauer ou ultraesférico de grau k associado com $(q-1)/2$
$Q^{k,l}_{m,n}$	ver Fórmula da Adição
$\mathbb{R}^q$	espaço Euclideano q-dimensional
$\mathrm{Re}\, z$	parte real de z
$R^{(\alpha,\beta)}_k$	polinômio de Jacobi de grau k associado a α, β

$R^{\alpha}_{m,n}$	polinômio no disco
SPD	positividade definida estrita
S^q	esfera unitária em $\mathbb{R}^{q+1}$
S^{∞}	esfera de Hilbert real
$S^q_{m,n}(r)$	ver p. 23
T^*	operador adjunto de T
$U(q)$	grupo dos operadores lineares unitários sobre $\mathbb{C}$
$U_{\zeta}(q-1)$	subgrupo de $U(q)$ formado pelos elementos que fixam ζ
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\overline{z}$	conjugado complexo de z

Símbolos

$(a)_k$	símbolo de Pochhammer (ver p. 19)
$\partial/\partial z$	derivada parcial em relação a z
$[x]$	maior inteiro menor ou igual a x
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno usual em $\mathbb{R}^q$ (ou $\mathbb{C}^q$, ou ℓ^2)
$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$	produto interno em $\mathcal{H}^q_{m,n}$ (ver p. 11)

Letras gregas

Γ	função Gamma
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_j	j-ésimo elemento da base canônica ordenada de $\mathbb{C}^q$
$\Pi^q_{m,n}$	espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dos polinômios nas variáveis $z, \overline{z} \in \mathbb{C}^q$
$\Pi^{o,q}_{m,n}$	conjunto dos polinômios homogêneos de grau m em z e de grau n em $\overline{z}$
σ_{q-1}	medida usual de S^{q-1}
Υ	ver p. 47
Ω_{2q}	esfera unitária em $\mathbb{C}^q$
Ω_{∞}	esfera de Hilbert complexa
ω_{2q}	superfície total de Ω_{2q}