SERVIÇO DE POS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito. 18.02.2004

Assinatura: *Ana Paula Jampaio Jafena*

Burnside e outros Problemas em Diff (M)¹

Ana Lucia da Silva

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Rebelo

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Fevereiro de 2004**

¹ Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES/UEL-PR.

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Rebelo

Prof. Dr. André Salles de Carvalho

Profa. Dra. Suely Druck

Prof. Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon

*À minha família:
meus pais Matheus (in memorian) e Gedalva,
meus irmãos Ana Cristina e Matheus.
Voces são meu centro.
Obrigada.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Julio Rebelo pela grande ajuda neste trabalho. Ao meu co-orientador, Prof. Arraut.

Ao Prof. Gutierrez pela preocupação que se transformou em conforto e incentivo.

Ao Prof. Marcelo Saia pela compreensão e solicitude neste final de tese. Ao Prof Valdir que confiou em mim e me escutou num momento difícil. Ao Prof. Daniel Smania. Ao Prof. Jorge Ferreira (UEM) pelo incentivo e confiança no início desta jornada e mesmo antes dela.

Ao Prof. e amigo Farid pela preocupação, amizade, prontidão em todos os momentos em que precisei, principalmente quando estava fisicamente limitada.

A Nilda, Andre, Tomas, Ricardo (lembro-me sempre) que me receberam em sua casa.

Deus quer, o homem sonha, a obra nasce.

Fernando Pessoa

A Claudia e ao Dr. Paulo Motta.

A German e Luciana pela ajuda neste trabalho e principalmente pela amizade. A Sadao e Carlos, pela ajuda com o latex, pelas discussões que me ajudaram a esclarecer algumas dúvidas e por estarem sempre por perto.

A D. Di, Ernane, Glória, Dulcimar, Sr. Dorival que nem sabem que estão aqui mas me ajudaram, cada qual da sua forma, criando ao meu redor um ambiente acolhedor e carinhoso.

Aos colegas da pós-graduação, que me deram a chance de experimentar a diferença.

A Carles e Américo pela amizade distinta e tratamento de igualdade.

A Alex por estar vivendo as intempéries de um final de tese.

A Gustavo (RJ), não sei o que escrever para voce, alegro-me por pertencer ao seu conjunto de pontos de acumulação.

A Rosane que nada me cobra e me compreende mesmo sem palavras.

A Beatriz, Diego, Luana, Nathaniel, Nicolah, estas pequeninas criaturas fizeram-me ver, literalmente, que o aprendizado é um incansável e incessante exercício de cair e levantar.

Aos que seguraram o chicote por me ensinarem que existem dois lados oscilantes e vários outros caminhos.

Aos meus tão preciosos amigos, mencionados e não mencionados, por saberem que amizade é muito mais que uma citação. Agradeço a todos vocês por, de alguma forma, estarem presentes em minha vida. Tive dois grandes aprendizados nesta jornada, o primeiro ter percebido quão raro e precioso é um amigo, o segundo descobrir em mim uma fortaleza que eu desconhecia.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, aos colegas da Universidade Estadual de Londrina e aos funcionários do Instituto de Matemática da USP de São Carlos.

Agradeço a Deus por tudo.

(...)

Quem quer passar além do Bojador

Tem que passar além da dor.

(...)

Fernando Pessoa

Resumo

Neste trabalho desenvolveremos um análogo não-linear do Teorema de Schur que afirma que um subgrupo finitamente gerado de um grupo linear, cujos elementos são todos de ordem finita é, de fato, finito. No resultado principal abordaremos os grupos de difeomorfismos que preservam uma medida de probabilidade em certas variedades de dimensão 3 e grupos de symplectomorfismos de variedades de dimensão 4.

Abstract

In this paper we obtain some non-linear analogues of Schur's theorem asserting that a finitely generated subgroup of a linear group all of whose elements have finite order is, in fact, finite. The main results concern groups of diffeomorphisms preserving a probability measure of certain manifolds of dimension 3 and groups of symplectomorphisms of manifolds with dimension 4.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos de Burnside e $\text{Diff}^\omega(M)$: uma nova perspectiva	5
1.1 Variedades i.m.l.b1.	6
1.2 Um exemplo: $M = \mathbb{S}^1$	10
2 Algumas Construções com Teoria de Hodge	12
2.1 Formas harmônicas e Teorema de Hodge	12
2.2 Aplicação Jacobiana	13
2.3 Condição <i>Jac</i>	16
3 Vetor de Rotação	19
3.1 Mapping Torus	19
3.2 Conjunto de rotação	20
3.3 Vetor de rotação e translação do toro	22
4 Demonstrações dos Resultados Principais	26
4.1 Demonstração do Teorema A	27
4.1.1 Superfícies Incompressíveis	28
4.1.2 Variedade Haken	28
4.1.3 Laminação genuína	28
4.2 Demonstração do Teorema B	29
4.2.1 Topological Lefschetz pencil	30
Referências Bibliográficas	34

Introdução

Seja M uma variedade compacta, orientada e $\text{Diff}^r(M)$ o grupo de C^r -difeomorfismos de M que preservam orientação ($r = 1, \dots, \infty, \omega$). Seja μ uma medida de probabilidade em M e Diff_μ^r o subgrupo de $\text{Diff}^r(M)$ que consiste de todos os difeomorfismos que preservam a medida μ . O principal resultado deste trabalho é dado pelo teorema que segue:

Teorema A: *Seja M uma variedade compacta de dimensão 3 satisfazendo uma das seguintes condições:*

- (1) *M é Haken ou, mais geralmente, possui uma laminação genuína;*
- (2) *M é hiperbólica.*

Seja G um subgrupo de $\text{Diff}_\mu^\omega(M)$ (mais especificamente de $\text{Diff}_\mu^1(M)$) finitamente gerado, cujos elementos são todos de ordem finita e μ uma medida de probabilidade. Então G é finito.

O leitor não familiarizado com a terminologia usada no teorema A pode ler o início do capítulo 4.

Obtivemos, também um análogo do Teorema A em dimensão 4, porém, em categoria simplética. Denotaremos por $\text{Symp}^r(M)$ o grupo de symplectomorfismos de uma variedade simplética compacta M , $r = 1, \dots, \infty, \omega$.

Teorema B: *Seja M uma variedade simplética compacta de dimensão 4, denotemos $\text{Symp}^r(M)$ o grupo de symplectomorfismos analíticos de M . Suponha que $b_1(M) \geq 2$ e $\pi_2(M) \neq \mathbb{Z}$. Então todo subgrupo $G \subset \text{Symp}^\omega(M)$ finitamente gerado, que possui somente elementos de ordem finita é, de fato, finito.*

As hipóteses $b_1(M) \geq 2$ e $\pi_2(M) \neq \mathbb{Z}$ feitas em M podem, também, serem substituídas por alguma outra condição. O fundamental é que M seja uma variedade i.m.l.b1 (cf. capítulo 1). A outra condição tornar-se-a equivalente neste contexto., i.é., M não tem que ser, necessariamente, uma superfície complexa, mas nós não tentaremos provar isto.

Vamos, agora, abordar os teoremas acima, em relação a outros trabalhos. Atualmente, representação linear de grupos é uma teoria clássica, bem desenvolvida e que está presente em diversos aspectos da Matemática. Entretanto, há também, muitas situações em que um grupo age através de automorfismos numa variedade e esta ação não é linear (isto é, ela não mergulha em um grupo de Lie de dimensão finita que age em M). Isto sugere considerar uma teoria de representação “não-linear” de grupos, onde o grupo considerado, não é, um grupo de matrizes (ou um grupo de Lie de dimensão finita, mas sim o grupo de difeomorfismos de uma variedade compacta M . Aqui, não é especificado quão regulares são os difeomorfismos em questão, devemos então considerá-los analítico e real se necessário. Este problema é igualmente interessante se restrito aos grupos de difeomorfismos de uma variedade compacta M que preservam uma forma de volume ou uma estrutura simplética. Na verdade, devemos mencionar que estrutura de grupos de symplectomorfismos de uma variedade (simplética) compacta, tem sido intensivamente discutida por Polterovich (cf. [21]), contudo, o ponto de vista dele é um tanto diferente do nosso.

A possibilidade de estudar homomorfismos de grupos abstratos de um grupo da forma $\text{Diff}(M)$ foi discutida, por exemplo, em [2]. Anos antes disto, Zimmer já havia proposto um programa para estudar homomorfismos de reticulados de grupos de Lie semi-simples em $\text{Diff}(M)$, com o objetivo de obter versões “não-lineares” dos teoremas de super-rigidez de Margulis. Infelizmente estes problemas são notoriamente difíceis e o progresso nesta direção tem sido muito lento. Apesar disto, eles tem recebido especial atenção de diversos pesquisadores (para alguma leitura recente sobre este assunto ver [11] e suas referências).

Tendo em vista as dificuldades em executar o programa acima mencionado,

neste trabalho, nós retomaremos uma questão que, pelo menos em princípio, deveria ser mais simples. Nós propomos estudar grupos infinitos que possuem "muitos" elementos de torção. Os grupos que temos em mente, são grupos infinitos, nos quais todos seus elementos possuem ordem finita. Chamaremos estes grupos de *Grupos de Burnside*. O estudo das propriedades de grupos de Burnside, em particular, a existência de exemplos finitamente gerados, está relacionada com o desenvolvimento de Teoria Combinatórios de Grupos. Historicamente eles precedem os resultados mais profundos em estrutura de subgrupos de aritmética e de forma mais geral, reticulados em grupos de Lie semi-simples. Assim, parece-nos, que seja mais razoável começar o estudo de representação "não-linear" de grupos prestando uma especial atenção as possíveis ações dos grupos de Burnside em variedades compactas. O objetivo do presente trabalho é estabelecer alguns resultados iniciais a respeito da não existência de ações destes grupos em certas variedades, ou, em outras palavras, dar uma resposta positiva a pergunta de Burnside em $\text{Diff}(M)$ sobre certas hipóteses. Lembrando que um resultado clássico, devido a Schur, afirma que não é possível realizar mergulho do grupo de Burnside em qualquer que seja o grupo de matrizes de dimensão finita. Podemos também dizer que o objetivo deste trabalho é obter o análogo não linear do resultado de Schur.

Uma consequência do nosso ponto de vista, é que, em certo sentido, este trabalho se localiza na fronteira entre Dinâmica e Topologia. De fato, ações de grupos infinitos estão associados a Dinâmica no sentido que suas órbitas não são compactas. Por outro lado, ações de grupos compactos (i.e. finitos) é um assunto clássico de topologia. Desde que nossos grupos infinitos têm elementos de ordem finita (e portanto contém subgrupos compactos) suas possíveis ações tem um tempero topológico, mesmo acontecendo que todos estes subgrupos compactos sejam cíclicos.

Nossa maior referência em grupos de Burnside é [16]. Alguns exemplos deste grupos podem ser obtidos como segue. Dados dois inteiros positivos $m, n \geq 2$, seja F_m (resp. F_m^n) o grupo livre com m geradores (resp. o subgrupo de F_m gerado pela n -ésima potência). O quociente $B(m, n) = F_m/F_m^n$ é chamado grupo livre de Burnside com m geradores e expoente n . Se n é maior que 2^{48} então $B(m, n)$ é infinito (e portanto um grupo de Burnside no nosso sentido). Observe também que,

se n é ímpar, então todo subgrupo finito de $B(m, n)$ é cíclico, assim, a teoria usual de grupos compactos de transformações não dá muita informação no que se refere a uma possível ação efetiva de $B(m, n)$ numa dada variedade compacta escolhida.

Finalmente, gostaríamos de mencionar outra motivação para considerar ações de grupos de Burnside. O cerne da motivação está em [2] onde os autores sugerem que um grupo “genérico” pode não agir numa variedade compacta. Isto, exclui a possibilidade dos grupos de Burnside serem “genérico” num sentido mais amplo como foi mostrado nos trabalhos de Champetier e Ol’shanskii (ver [1] e referência correspondentes). Assim, uma resposta razoável para questão de [2] pode ser obtida mostrando que um grupo de Burnside não age numa variedade compacta qualquer. Nossos teoremas, então, podem ser vistos como uma contribuição ao último problema. Aqui, incluímos também o teorema (1.4) assegurando que um grupo de Burnside não pode ser mergulhado na componente conexa da identidade de $\text{Diff}_\mu^\omega(M)$ para uma ampla classe de variedades compactas M (cf. capítulo 1). Naturalmente, a possibilidade de um grupo “genérico” não agir numa dada variedade M é uma evidência significativa que os subgrupos de $\text{Diff}(M)$ possuem uma estrutura algébrica mais precisa que merece ser explorada mais tarde.

No decorrer deste trabalho, consideraremos principalmente, variedades analíticas, reais, compactas e orientadas e difeomorfismos analítico e real, embora a extensão das afirmações para o caso C^1 seja, frequentemente, clara. Aliás, o caráter analítico das variedades será usado somente na proposição (2.4) cuja versão diferenciável seria menos “elegante”. O restante dos argumentos também são trabalhados em classe C^1 . Mais detalhes de nossas afirmações e outros resultados serão dados no capítulo 1.

Capítulo 1

Grupos de Burnside e $\text{Diff}^\omega(M)$: uma nova perspectiva

Neste capítulo pretendemos dar uma descrição detalhada de nossos métodos e dos resultados produzidos. Para simplificar notações, vamos supor que G é um grupo contido em $\text{Diff}^\omega(M)$ (o grupo de difeomorfismos analítico e real de M que preservam orientação). Portanto, G age *efetivamente* em M . Nós visamos obter restrições à estrutura algébrica de G . Este problema é, provavelmente mais interessante no caso de uma variedade compacta M como mostra a seguinte construção. É bem conhecido que todo grupo Γ finitamente apresentado pode ser realizado no grupo fundamental de uma variedade compacta M de dimensão 4. Portanto, um grupo Γ finitamente apresentado age efetivamente em uma variedade aberta de dimensão 4, isto é, o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M . Por outro lado, de acordo com um teorema devido a Higman [13], *grupo gerado* finitamente mergulha em algum grupo Γ finitamente apresentado se e somente se o grupo em questão é recursivamente apresentado. Portanto, todo grupo recursivamente apresentado admite uma ação fiel em uma variedade compacta aberta de dimensão 4. A classe formada por estes grupos é bastante grande, em particular, engloba os grupos $B(m, n)$ de Burnside (cf. abaixo). Isto sugere que as fortes restrições na estrutura de um grupo G como acima, existam somente se M for compacta. Variações simples da construção acima também mostram que nosso resultado principal não pode ser estendido a variedades abertas (lembramos, em particular, que Gompf [12] provou que qualquer grupo finitamente apresentado é o grupo fundamental de uma variedade simplética de dimensão 4).

De fato, assumimos não somente que M é compacta, mas também que ela tem o primeiro número de Betti “muito grande”. Mais precisamente, para caracterizar as variedades as quais se aplicam nossos teoremas, nós introduzimos a definição seguinte que é, claramente, inspirada na noção de fibração singular usada em Geometria Complexa. Recordemos que M é suposta real e analítica e $\mathbb{T}^d$ denota o toro d -dimensional. Lembremos, também, que conjuntos analíticos são trianguláveis e admitem uma noção natural de dimensão (cf.[17]).

Definição 1.1 Dizemos que M é uma fibração singular se existe um conjunto analítico $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ cuja dimensão topológica é estritamente menor que a de M e a aplicação analítica e real $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ de M em $\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes condições:

- $\mathcal{P}$ não é constante, assim o conjunto de valores críticos de $\mathcal{P}$ é um suconjunto analítico próprio de $\mathcal{B}$ denotado por $C_{\mathcal{P}}$.
- $\mathcal{P}$ define uma fibração regular de $M \setminus \mathcal{P}^{-1}(C_{\mathcal{P}})$ em $\mathcal{B} \setminus C_{\mathcal{P}}$.

Note que na definição acima nós não exigimos que as fibras de $\mathcal{P}$ sejam conexas. Mas, o número de componentes conexas das fibras é finito desde que $\mathcal{P}$ é analítico e M compacto. Em particular, nós sempre suporemos que as fibras são conexas, módulo passar uma cobertura ramificada finita de $\mathcal{B}$.

Observação 1.2 A classe de homologia representada pelas fibras de $\mathcal{P}$ não é trivial no correspondente grupo de homologia de M . Desde que estas fibras obviamente possuem “auto-intersecções”, segue que as variedades de dimensão 4 cujas classes de cohomologia em $H^2(M)$ e $H^3(M)$ possuem auto-intersecções não triviais são i.m.l.b1, com $b_1(M) \geq 1$.

1.1 Variedades i.m.l.b1.

Naturalmente a fibra típica de uma fibração singular $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ nada mais é que a fibra típica da fibração regular $\mathcal{P} : M \setminus \mathcal{P}^{-1}(C_{\mathcal{P}}) \rightarrow \mathcal{B} \setminus C_{\mathcal{P}}$. Nossos resultados são aplicados a variedades M satisfazendo $H^1(M, \mathbb{Z}) \neq 0$ que não podem ser dadas como uma fibração singular tendo fibra típica F satisfazendo $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$. Tais variedades serão chamadas *variedades irredutíveis com b_1 muito grande (irreducible*

manifolds with large b_1). Para abreviar notação, também chamaremos M de i.m.l.b1. Claramente as i.m.l.b1 formam uma classe extensa, em particular, toda superfície, diferente da esfera, é i.m.l.b1. Segue, mais duas classes de exemplos.

Lema 1.3 *Seja M uma variedade analítica compacta como acima.*

(1) *Se M tem dimensão 3 e não é i.m.l.b1 então, ou M é uma esfera homológica ou ela é dada como uma fibração singular sobre o círculo, tendo a esfera (de dimensão 2) como fibra típica (módulo resolução, cf. abaixo).*

(2) *Se M tem dimensão 4 com $b_1(M) \geq 2$ e $\pi_2(M) \neq \mathbb{Z}$ então M é i.m.l.b1.*

Demonstração. Lembremos primeiro que conjuntos analíticos são estratificados e podem ter suas singularidades “resolvidas” (i.e., eles podem ser naturalmente suavizado, cf. [26]). Suponhamos que a dimensão de M é 3. Desde que a demonstração para esferas homológicas é óbvia assumimos que $b_1(M) \geq 1$. Seja $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^1$ uma fibração como indicado acima. Devido ao fato de $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$, no qual F representa a fibra típica de $\mathcal{P}$, segue que a dimensão de F é 2 e por isso a de $\mathcal{B}$ é 1. A menos de passar um recobrimento finito ramificado de $\mathcal{B}$ (também denotado por $\mathcal{B}$), podemos supor que as fibras de $\mathcal{P}$ são conexas. Afirmamos que $\mathcal{B}$ é um círculo (módulo resolução). De fato, tudo que precisamos verificar é que $\mathcal{B}$ não pode ser um “buquê de círculos” ou, mais precisamente, que $\mathcal{B}$ não tenha singularidades *redutíveis* (dado que as fibras são conexas). Suponha por contradição que $p \in \mathcal{B}$ é uma singularidade redutível. A fibra $\mathcal{P}^{-1}(p)$ sobre p é um conjunto analítico de dimensão 3. De fato, o complementar de $\mathcal{P}^{-1}(p)$ com respeito a sua vizinhança é desconexo. Desde que M é suave, a parte regular de $\mathcal{P}^{-1}$ admite uma vizinhança tubular natural (conexa e degenerada na parte singular de $\mathcal{P}^{-1}(p)$). Uma transversal (unidimensional) a $\mathcal{P}^{-1}(p)$ nesta vizinhança deve ser projetada num único ramo de $\mathcal{B}$ através de p , que parametriza uma vizinhança de $\mathcal{P}^{-1}(p)$. Em outras palavras, a projeção da vizinhança tubular em questão está inteiramente num ramo de $\mathcal{B}$. A existência de outro ramo em $\mathcal{B}$ passando por p é, portanto, impossível desde que sua pré-imagem seria interceptada por uma vizinhança tubular como mencionado acima. Concluimos, então, que módulo resolução $\mathcal{B}$ é um círculo e M é realizada como uma fibração singular sobre este círculo.

Consideraremos agora, o caso de uma variedade M de dimensão 4 que não é i.m.l.b1. A base da fibração $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ tem, claramente, dimensão 1 ou 2. Afirmamos que a dimensão é 2. Por outro lado, a base é um círculo pelo mesmo argumento usado acima (módulo resolução e módulo um recobrimento ramificado). Considere uma 1-cadeia σ em M cuja projeção no círculo é homologicamente trivial. Desde que a projeção é homologicamente trivial em $\mathbb{S}^1$, podemos deformá-la por homotopia sem encontrar os valores críticos de $\mathcal{P}$. Segue que a 1-cadeia original pode ser deformada por homotopia sem interceptar as fibras singulares de $\mathcal{P}$. Desde que $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$ resulta que $b_1(M) = b_1(\mathbb{S}^1) = 1$ o que é claramente impossível. Portanto, ambos $\mathcal{B}$ e F tem dimensão 2. Como de costume, supomos que as fibras são conexas de modo que F deve ser a esfera e assim $\pi_2(F) = \mathbb{Z}$.

Afirmamos que a base é uma superfície de gênero ≥ 1 (módulo resolução). Em particular seu segundo grupo de homotopia $\pi_2(\mathcal{B})$ é nulo. Para verificar a afirmação, primeiro observamos que o conjunto de pontos regulares de $\mathcal{B}$ possui uma componente conexa cujo fecho é homeomorfo a uma superfície de gênero ≥ 1 . Por outro lado, nós teríamos $b_1(\mathcal{B}) = 0$ o que é impossível, desde que $b_1(\mathcal{B}) = b_1(M) \geq 2$. Denotamos esta componente do conjunto de pontos regulares de $\mathcal{B}$ por S_1 . Suponha que este conjunto também contenha outra componente S_2 . Desde que a dimensão de $\mathcal{B}$ é 2, segue que a remoção de uma singularidade isolada de $\mathcal{B}$ não desconecta o complementar (cf. [18]). Então, podemos supor que S_2 está colado a S_1 ao longo de um “círculo” de singularidades C_1 . Entretanto, neste caso, a supressão de $\mathcal{P}^{-1}(C_1)$ daria origem a mais de duas componentes conexas de $U \setminus \mathcal{P}^{-1}(C_1)$ onde U representa uma vizinhança de $\mathcal{P}^{-1}(C_1) \subset M$. Isto é impossível, devido a existência de uma “vizinhança tubular” (no sentido mencionado acima) para $\mathcal{P}^{-1}(C_1)$. A afirmação está provada.

Notemos que a fibração $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ levanta a homotopia (i.e. é uma fibração no sentido de Serre). Isto pode, então, ser associado a $\mathcal{P} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ por uma sequência exata de grupos de homotopia (como para uma fibração regular) pela aplicação de uma simples variação do argumento acima citado. Usando esta sequência, concluímos que $\pi_2(F) = \pi_2(M)$ provando o lema. $\square$

Estabelecemos, agora, um dos resultados principais deste trabalho.

Teorema 1.4 *Admitamos que M é uma i.m.l.b1 e que f_1, f_2 são difeomorfismos*

de M isotópicos a identidade que preservam, em comum, uma mesma medida de probabilidade μ . Se o comutador $[f_1, f_2] = f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ tem ordem finita, então ele em que coincidir com a identidade.

Outra forma quase equivalente de formular o teorema (1.4) é como segue.

Teorema 1.5 *Admitamos que M é uma i.m.l.b1 e seja $\text{Diff}_{0,\mu}^{\omega}(M)$ a componente conexa da identidade do grupo de difeomorfismos analíticos de M que preservam uma medida de probabilidade μ . Se G é um subgrupo de $\text{Diff}_{0,\mu}^{\omega}(M)$ verificando $H^1(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 0$, então G é um grupo livre de torção.*

Note que $H^1(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 0$ nos fornece que G é perfeito (i.e. igual ao seu primeiro grupo derivado).

Além dos teoremas A e B, eis aqui mais uma aplicação do teorema (1.4).

Corolário 1.6 *Seja M uma variedade i.m.l.b1 cuja característica de Euler é diferente de zero. Então, todo grupo $G \subseteq \text{Diff}^{\omega}(M)$ finitamente gerado no qual todos seus elementos são de torsão, é de fato, finito.*

Em particular um grupo de Burnside não pode agir (C^1) em uma superfície de gênero ≥ 2 . Se nos restringirmos a grupos de difeomorfismos que preservam uma medida de probabilidade, então a afirmação também é válida para o toro. Alias, o corolário (1.6), não requer toda força de nossos argumentos. Realmente ele é uma consequência do corolário(2.3) combinado com a proposição (2.4) e com a fórmula de Lefschetz. Com estas considerações, isto é bastante semelhante aos introduzidos em [10], [6] para estudar ações de reticulados como aqueles mencionados na Introdução (note, também que os argumentos em [22] nos permitem dispensar a suposição da medida de probabilidade ser invariante no caso do toro). Infelizmente todos estes métodos colapsam em dimensão 3, especialmente na componente conexa da identidade. Então, o teorema A aparece como uma generalização não trivial de tais métodos. Uma observação semelhante se aplica ao teorema B quando a característica de Euler de M é nula. O teorema A será deduzido do teorema(1.4) por meio de fortes resultados concernentes a topologia de variedades de dimensão 3 que são devidos a Gabai e seus colaboradores. O teorema B contará com trabalho de Donaldson mostrando a existência de fibrações topológicas de Lefschetz em M . Mais detalhes podem ser encontrados no capítulo 4.

1.2 Um exemplo: $M = \mathbb{S}^1$

Para encerrar, vamos descrever a estrutura do trabalho discutindo o caso trivial onde a variedade M , é o círculo $\mathbb{S}^1$. Para tornar o problema mais simples também suporemos que a medida μ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Claramente um grupo agindo em $\mathbb{S}^1$ e preservando a medida μ é conjugado a um grupo de rotações e portanto Abeliano. Entretanto uma demonstração mais “abstrata” deste fato pode ser obtida como segue. Associado a um difeomorfismo f do círculo nós temos o clássico número de rotação $\rho(f)$. Então temos:

Fato 1. Se f tem ordem finita, então f coincide com a identidade se e somente se $\rho(f) = 0$.

Fato 2. O número de rotação de f pode ser obtido a partir do deslocamento médio de f com respeito a medida invariante.

O fato 2 facilmente implica que a aplicação associada ao número de rotação de um difeomorfismo é um homomorfismo quando restrita ao grupo em questão. Assim, o número de rotação do difeomorfismo pertencente ao primeiro grupo derivado deve ser zero. O fato1 garante que o primeiro grupo derivado é reduzido a identidade.

A estratégia deste trabalho consiste em generalizar o argumento acima. No capítulo 2 nós generalizamos o fato1: dada uma variedade compacta M e um difeomorfismo de ordem finita f de M , associamos a f um certo vetor que se anula somente se f coincide com a identidade (contanto que M seja uma i.m.l.b1, o leitor deve notar que o círculo é um exemplo de i.m.l.b1). Para obter uma versão do fato 2 em dimensões maiores somos levados a nos especializar nos trabalhos de Schwartzmann [24] e Pollicott [20] em nosso contexto particular no capítulo 3. O resultado principal do capítulo 3 estabelece a correspondência entre vetor de rotação e o vetor considerado no capítulo 2. Isto é também suficiente para mostrar que a designação de vetores dada no capítulo 2 para difeomorfismos e homomorfismos o qual na verdade coincide com o então chamado Fluxo de homomorfismo em Massa. Estaremos, então, aptos a provar as afirmações dadas acima.

Observação 1.7 Embora tenhamos usado uma medida de probabilidade absolutamente contínua em nossa discussão a respeito do círculo, é fácil mostrar que um grupo de Burnside não age em $\mathbb{S}^1$ em plena generalidade. De fato, nós precisamos

apenas complementar o fato 1 com o teorema de Hölder que afirma que um subgrupo não-abeliano de $\text{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tem pontos com centralizador não-trivial. Note, entretanto, que o teorema de Hölder conta com a ordem do círculo e portanto não pode ser estendido a dimensões maiores.

Capítulo 2

Algumas Construções com Teoria de Hodge

O ingrediente principal deste capítulo é a aplicação Jacobiana (uma versão a la Teoria de Hodge) que, no melhor de nosso conhecimento, foi introduzida por Rosenberg e Weinberger em [23].

2.1 Formas harmônicas e Teorema de Hodge

Seja M uma variedade n -dimensional compacta (orientada) e fixemos uma métrica Riemanniana g em M . Denotemos $\Omega^k(M)$ o espaço das k -formas diferenciáveis em M .

Consideremos V um espaço vetorial orientado n -dimensional e seja $V^{\wedge k}$ sua k^{th} -potência exterior. Fixemos, também uma base ortonormal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V . Podemos definir um operador estrela (linear) de $V^{\wedge k}$ a $V^{\wedge n-k}$ por

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}}$$

onde $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}$ formam uma base positiva de V . Desde que M é uma variedade Riemanniana, temos um produto escalar no espaço cotangente T_p^*M no ponto $p \in M$. Portanto, podemos considerar um operador estrela (ponto-a-ponto) $*$: $(T_p^*M)^{\wedge k} \rightarrow (T_p^*M)^{\wedge n-k}$. Sendo pontualmente definido, o operador estrela dá origem a um operador (global) de $\Omega^k(M)$ em $\Omega^{n-k}(M)$ que é, ainda, denotado por $*$ e chamado operador estrela (em formas diferenciáveis).

Recordemos, agora, que devido a métrica g , M é naturalmente dotada de uma forma de volume dada por $\ast(1)$. Em coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$ a forma de volume é dada por $\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Portanto podemos definir um produto escalar $(\cdot, \cdot)$ em $\Omega^k(M)$ fazendo

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \ast(1) = \int_M \omega_1 \wedge \ast(\omega_2),$$

onde $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ representa em $\Omega^k(M)$ uma extensão natural do produto interno induzido em $T_p^*(M)$ por g . Finalmente definimos o operador $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ como um adjunto formal do operador derivada exterior d com respeito ao produto interno $(\cdot, \cdot)$ introduzido acima. Alternativamente temos $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ dado por $(-1)^{n(k+1)+1} \ast d \ast$. O Laplaciano Δ (ou operador Laplace-Beltrami) é definido de $\Omega^k(M)$ em $\Omega^k(M)$ por $\Delta = d\delta + \delta d$. A forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita *harmônica* se e somente se $\Delta(\omega) = 0$. O clássico teorema de Hodge afirma que, fixada uma métrica Riemanniana g em M , cada classe de co-homologia $c \in H^k(M, \mathbb{Z})$ admite um único representante harmônico ω_c , $k = 1, \dots, n$.

2.2 Aplicação Jacobiana

Seja, d a dimensão do primeiro grupo de cohomologia $H^1(M, \mathbb{R})$ (igual ao posto de $H^1(M, \mathbb{Z})$). O toro de dimensão d pode ser visto como o espaço $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ consistindo dos homomorfismos de $H^1(M, \mathbb{Z})$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Consideremos um dado ponto $p \in M$ e uma Métrica Riemanniana g em M . A aplicação Jacobiana $\text{Jac} : M \rightarrow T^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ definida por $\text{Jac}(x) \in \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é caracterizado por

$$\text{Jac}(x)(c) = \int_p^x \omega_c \mod \mathbb{Z}$$

onde ω_c é o representante harmônica de $c \in H^1(M, \mathbb{Z})$. Note que a aplicação Jac está bem-definida desde que a forma fechada ω representa um elemento em $H^1(M, \mathbb{Z})$ se e somente se tem período inteiro.

Teorema 2.1 ([R-W]) *Seja M uma variedade suave e suponha que Γ é um grupo compacto agindo fielmente em M . Então, existe uma Γ -ação afim no toro $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que é equivariante com respeito a aplicação jacobiana $\text{Jac} : M \rightarrow \mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que provêm da métrica Riemanniana g em M .*

Esboço da Demonstração. Desde que Γ é compacto, podemos escolher uma métrica g tal que Γ age em M por isometria de g . Colocando $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ definimos uma Γ ação afim em $\mathbb{T}^d$ como segue. Seja $\gamma \in \Gamma$ identificado com o correspondente automorfismo de M . Dado um homomorfismo $\alpha : H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definimos um novo homomorfismo $\gamma \cdot \alpha$ pela fórmula

$$(\gamma \cdot \alpha)(c) = \alpha(\gamma^*(c)) + \int_p^{\gamma(p)} \omega_c \mod \mathbb{Z}.$$

Aqui c é uma classe de co-homologia inteira, i.e., um elemento de $H^1(M, \mathbb{Z})$, $\gamma^*(c)$ representa a classe de co-homologia inteira dada como o pull-back de c por γ com γ vista como um automorfismo de M . Finalmente ω_c é o único representante harmônico de c . Combinamos o fato que um automorfismo de M induz um homomorfismo na cohomologia (i.e. $\gamma^*(c_1 + c_2) = \gamma^*(c_1) + \gamma^*(c_2)$ com a linearidade do Laplaciano (i.e. $\Delta(\omega_1 + \omega_2) = \Delta(\omega_1) + \Delta(\omega_2)$) para mostrar que $\gamma \cdot \alpha$ é um homomorfismo de $H^1(M, \mathbb{Z})$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, isto é, um ponto em $T^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Para verificar que a equação acima dá origem a uma ação de Γ em T^d , temos que verificar que $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot (\alpha) = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \alpha)$. Isto é direto.

Finalmente podemos verificar que a Γ -ação original em M e a Γ -ação construída acima no toro $\mathbb{T}^d$ são equivariantes com respeito a aplicação Jacobiana $\text{Jac} : M \rightarrow \mathbb{T}^d$ definida por meio de g . Isto é importante para mostrar que $\text{Jac}(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot (\text{Jac}(x))$ onde o lado esquerdo se refere a ação em M e o lado direito a ação no toro $\mathbb{T}^d$. Para verificar a última equação, nós avaliamos ambos os lados na classe de co-homologia $c \in H^1(M, \mathbb{Z})$. A verificação é novamente direta, necessitamos somente de lembrar que o pull-back da forma harmônica por uma isometria é novamente harmônica. $\square$

A construção acima nos dará um critério (Lema(2.2)) para determinar, quer sim quer não, um difeomorfismo de M que tenha ordem finita e concida com a identidade. Como podemos ver, o lema (2.2) é um argumento padrão em Teoria de Smith. Porém ele requer que a aplicação Jacobiana seja um homeomorfismo local em torno de algum ponto em M . Em outras palavras, a imagem de M pelo Jac (como um espaço triangulável, mas possivelmente singular) deve ter a mesma dimensão n de M . Por enquanto assumiremos que este é o caso, e, até o final do capítulo, devemos caracterizar variedades para as quais a imagem da aplicação jacobiana tem dimensão estritamente menor que $n = \dim(M)$ (em particular mostrando que para

“mais” variedades a aplicação Jacobiana é sempre um difeomorfismo, independente da métrica escolhida).

Dado um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de ordem finita, usamos o teorema(2.1) para obter a aplicação $\text{Jac} : M \rightarrow \mathbb{T}^d$ que é equivariante com respeito a um difeomorfismo afim $h_f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ que sai da imagem de M pelo Jac tornando $\text{Im}[\text{Jac}(M)]$, invariante.

Lema 2.2 *Seja f, h_f e Jac como acima. Suponha que f age trivialmente em $H^1(M, \mathbb{Z})$. Então h_f é uma translação. Portanto, assumindo que a dimensão de $\text{Im}[\text{Jac}(M)]$ é igual a n , f coincide com a identidade se e somente se h_f coincide com a identidade.*

Demonstração. Para verificar que h_f é uma translação, é suficiente verificar que h_f age trivialmente em $H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$. Denote $H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ o primeiro grupo de co-homologia de $\text{Im}[\text{Jac}(M)]$ e observe que o mergulho $\text{Im}[\text{Jac}(M)]$ em $\mathbb{T}^d$ induz uma injeção, e portanto um isomorfismo, de $H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ em $H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$. Daí, h_f age trivialmente em $H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$ se e somente se age trivialmente em $H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$. Suponha agora que ω é uma 1-forma fechada representando uma classe de cohomologia em $H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ e tal que $h_f^* \omega \neq \omega$ em $H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$. Podemos considerar um levantamento $\tilde{\omega}$ de ω em M que é, ainda, uma 1-forma fechada. A equivariância de Jac implica que $f^* \tilde{\omega}$ é um levantamento de $h_f^* \omega$. Entretanto os elementos de $H^1(M, \mathbb{Z})$ representados respectivamente por $\tilde{\omega}$ e $f^* \tilde{\omega}$ são claramente diferentes desde que ele têm diferentes períodos quando integrados sobre o levantamento em M de 1-ciclo em $\text{Im}[\text{Jac}(M)]$. Portanto f age não trivialmente em $H^1(M, \mathbb{Z})$ que é uma contradição a nossa hipótese.

Mais geralmente, Jac induz uma injeção de $H^i(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ em $H^i(M, \mathbb{Z})$ para todo $i = 1, \dots, n = \dim(\text{Im}[\text{Jac}(M)])$. De fato, desde que Jac é uma “fibrção singular” (cf. Proposição(2.4)) podemos levantar as formas $\eta_1, \eta_2 \in H^1(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ como também os ciclos sobre os quais as integrais de η_1, η_2 diferem uma da outra.

Isto serve para mostrar que f coincide com a identidade se e somente se h_f coincide. Claramente $h_f = id$ se $f = id$ assim sendo, precisamos apenas provar o recíproco. Assumimos, então, que $h_f = id$. Seja $\text{Fix}(f) \subset M$ o conjunto dos pontos fixos de f .

Vamos supor primeiro que a ordem de f é um número primo p . A equivariância da aplicação Jac induz um homomorfismo de $H_f^i(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ em $H_f^i(M, \mathbb{Z})$ no qual $H_f^i(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ e $H_f^i(M, \mathbb{Z})$ representam os grupos de cohomologia equivariantes com respeito aos grupos cíclicos gerados respectivamente por h_f, f . O mesmo argumento empregado acima mostra que este homomorfismo é injetivo para todo i .

Por outro lado o Teorema da Localização (cf. [25], página 198) estabelece a existência de um isomorfismo entre $H_f^i(M, \mathbb{Z})$ e $H_f^i(\text{Fix}(f))$. Por composição, obtemos uma injeção de $H_f^i(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ em $H_f^i(\text{Fix}(f))$. Contudo, $H_f^i(\text{Im}[\text{Jac}(M)], \mathbb{Z})$ é não trivial para $i = n = \dim(M)$ assim, o mesmo é válido para $H_f^i(\text{Fix}(f))$. Em particular $H_f^n(\text{Fix}(f)) \neq 0$ desta forma a dimensão de $\text{Fix}(f) = n = \dim(M)$. Segue imediatamente que $\text{Fix}(f) = M$ i.e. $f = \text{id}$. Para o caso geral em que a ordem de f não é prima, necessitamos somente de argumento por indução sobre o número de primos dividindo esta ordem. $\square$

Segue um corolário que será usado posteriormente.

Corolário 2.3 *Sejam M, Jac como no lema (2.2). Então, ou f coincide com a identidade, ou f não tem pontos fixos.* $\square$

No próximo capítulo vamos interpretar a translação h_f associada a um difeomorfismo f isotópico a identidade de uma maneira mais intrínseca, a saber, como um *vetor de rotação*. Esta interpretação nos proporcionará condições suficientes para assegurar que a translação se anula sob certas condições.

2.3 Condição Jac

Fecharemos este capítulo com uma caracterização da variedade M que sempre satisfaz as hipóteses do lema (2.2). Isto é, seja M uma variedade compacta. Dizemos que M satisfaz a condição Jac se e somente se para qualquer métrica g (analítica) em M , a aplicação jacobiana resultante Jac construída acima é um homeomorfismo local (i.e., existe um conjunto aberto no qual Jac é um homeomorfismo sobre sua imagem).

Proposição 2.4 *Uma variedade compacta M i.m.l.b1. satisfaz a condição Jac .*

Demonstração. Considere uma variedade compacta M i.m.l.b1. Seja d o posto de $H^1(M, \mathbb{Z})$ e $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como anteriormente. Considere, também, a aplicação Jacobiana $\text{Jac} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ correspondendo a métrica g e coloque $\mathcal{B} = \text{Jac}(M)$. Finalmente seja $\omega_1, \dots, \omega_d$ uma base para $H^1(M, \mathbb{Z})$ consistindo de 1-formas harmônicas.

Um elemento c de $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é determinado por seus valores em $\omega_1, \dots, \omega_d$. Isto nos permite identificar $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ com $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (d vezes). Com esta identificação fica claro verificar que $\text{Jac} : M \rightarrow \mathbb{T}^d$ também pode ser dado por

$$\text{Jac}(x) = \left(\int_p^x \omega_1, \dots, \int_p^x \omega_d \right).$$

Como mostrado por Kodaira, as formas $\omega_1, \dots, \omega_d$ são reais e analíticas (cf. [5]). Portanto Jac é, ele próprio, real e analítico.

Afirmção 2.5 *Existe um ponto regular $y \in \mathcal{B}$ e um ponto $q \in \mathcal{P}^{-1}(y) \subset M$ tal que a derivada de Jac em q é sobrejetora em $T_y \mathcal{B}$.*

Demonstração da afirmação. Fixa um ponto $x \in M$ e um vetor $v \in T_x M$. A derivada de Jac em x aplicada em v é

$$D_x \text{Jac}.v = (\omega_1(v), \dots, \omega_d(v)) \in T_{\text{Jac}(x)} \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d.$$

Se $D_x \text{Jac}$ não é sobrejetora, segue que ω_d é uma combinação linear $a_1(x)\omega_1 + \dots + a_d(x)\omega_{d-1}$ de $\omega_1, \dots, \omega_{d-1}$ (aqui, suporemos sem perda de generalidade que a dimensão da imagem de $D_x \text{Jac}$ é $d-1$; podemos também supor que $\mathcal{B}$ é suave até considerar uma resolução).

Suporemos, agora, por contradição que a afirmação é falsa. Então temos, $\omega_d = \sum_{i=1}^{d-1} a_i(x)\omega_i$ para alguma função analítica $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$. Entretanto as funções a_i são geralmente conhecidas por serem harmônicas e, então, constantes pelo Princípio do Máximo, desde que M é compacta. Isto resulta que ω_d é uma combinação linear de $\omega_1, \dots, \omega_{d-1}$ com coeficientes constantes, o que é obviamente impossível porque $\omega_1, \dots, \omega_d$ forma uma base para $H^1(M, \mathbb{Z})$. $\square$

Graças a afirmação, o conjunto de pontos $\mathcal{S} \subset M$ cuja derivada de Jac não é sobrejetiva, é um conjunto analítico próprio. Desde que Jac é própria e sua imagem

contem um conjunto aberto de $\mathcal{B}$ (novamente pela afirmação), segue que $\text{Jac}(\mathcal{S})$ é um subconjunto analítico próprio de $\mathcal{B}$. Então $\text{Jac} : M \rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathbb{T}^d$ dá a M a estrutura de uma fibração singular. O isomorfismo entre $H^1(M, \mathbb{Z})$ e $H^1(\mathbb{T}^d, \mathbb{Z}) \simeq H^1(\mathcal{B}, \mathbb{Z})$ realizado por Jac implica que as fibras genéricas F de Jac são tais que $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$.

□

Capítulo 3

Vetor de Rotação

Iniciamos este capítulo, recordando os conceitos básicos à noção de conjunto de rotação introduzida por Pollicott em [20]. Seja $C^0(M, \mathbb{S}^1)$ o conjunto das funções contínuas de M em $\mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1$ é vista como o círculo unitário em $\mathbb{C}$.

Dadas as funções $f, g \in C^0(M, \mathbb{S}^1)$ a multiplicação fg é, também, uma função em $C^0(M, \mathbb{S}^1)$. O grupo $C^0(M, \mathbb{S}^1)/\sim$ de Bruschlinsky é definido como o grupo de homotopia das classes de funções em $C^0(M, \mathbb{S}^1)$ (ao nos referirmos as funções homotópicas h_1, h_2 em $C^0(M, \mathbb{S}^1)$, usaremos a notação $h_1 \sim h_2$). Sabemos que $C^0(M, \mathbb{S}^1)/\sim$ é naturalmente isomorfo ao primeiro grupo de cohomologia com coeficientes inteiros $H^1(M, \mathbb{Z})$ de M .

3.1 Mapping Torus

Consideremos um difeomorfismo f de M e assumimos que f é isotópica a identidade. O *Mapping Torus* de f é uma variedade V obtida como o quociente de $M \times [0, 1]$ por uma relação de equivalência que identifica os pontos $(x, 1)$ e $(f(x), 0)$. Desde que f é isotópica a identidade segue que a variedade V é difeomorfa ao produto $M \times \mathbb{S}^1$. Em particular temos a seguinte identificação natural: $H^1(V, \mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$ e $H^1(V, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$.

A suspensão de f (ou o fluxo suspenso relativo a f) é um fluxo $\tilde{f}$ em V cujo difeomorfismo $\tilde{f}_T : V \rightarrow V$ induz um tempo $T \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\tilde{f}_T(x, u) = (x, u+T)$ com a identificação $\tilde{f}_T(x, u) = (f^n(x), u+T-n)$ desde que $n \leq u+T \leq n+1$.

Dado $v \in V$ e $T > 0$, definimos um funcional linear em $C^0(V, \mathbb{S}^1)$ (i.e. um

elemento de $C^0(V, \mathbb{S}^1)^*$ $\Lambda_{v,T}$ por

$$\Lambda_{v,T}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \arg[k](\tilde{f}_t(v)) dt ,$$

onde $k : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma função contínua com argumento $\arg[k]$ (i.e. $k(v) = e^{i \arg[k](v)}$). Para o propósito da integral acima escolhemos o argumento de k de forma a ser contínuo ao longo da órbita de v através do fluxo suspenso $\tilde{f}$. De acordo com Schwartzmann temos:

Proposição 3.1 ([S]) *Para cada $v \in V$, família de funcionais lineares $\{\Lambda_{v,T}\}_{T>0} \subset C^0(V, \mathbb{S}^1)^*$ é equicontínua na topologia fraca*. Portanto, fixado $v \in V$ os pontos de acumulação $\mathcal{F}_v \subset C^0(V, \mathbb{S}^1)^*$ da família $\{\Lambda_{v,T}\}_{T>0}$ são constantes na classe de equivalência de homotopia. Em outras palavras, se $\Lambda_{v,\infty}$ é um elemento de $\mathcal{F}_v$, então*

$$\Lambda_{v,\infty}(k_1) = \Lambda_{v,\infty}(k_2) ,$$

desde que $k_1, k_2 : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ sejam homotópicas. □

3.2 Conjunto de rotação

Em particular, vemos que um ponto de acumulação $\Lambda_{v,\infty}$, conforme definido acima, é um elemento no dual de $C^0(V, \mathbb{S}^1)/\sim$, consequentemente em $(H^1(V, \mathbb{Z}))^* = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$. Desde que o dual de $H^1(V, \mathbb{Z})$ nada mais é que o grupo de homologia $H_1(V, \mathbb{R})$, concluímos que o funcional $\Lambda_{v,\infty}$ define um elemento no primeiro grupo de homologia de V com coeficientes reais, no qual é isotópico a $H_1(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$. Devido a construção explícita dos funcionais $\Lambda_{v,T}$, segue facilmente que a segunda componente com respeito a decomposição $H_1(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ é sempre 1, i.e., independe de qualquer escolha previamente feita. É claro que, dado $v = (x, u)$ o primeiro componente de $\Lambda_{v,T}$ depende somente de x . Então, podemos identificar os pontos de acumulação $\Lambda_{v,\infty}$ com um conjunto de elementos em $H_1(M, \mathbb{R})$ que denotaremos $\mathcal{F}_x$.

Definição 3.2 Para um dado ponto $x \in M$, o conjunto $\mathcal{F}_x \subseteq H_1(M, \mathbb{R})$ é chamado *conjunto de rotação* de $x \in M$ (relativamente ao homeomorfismo f). O conjunto de rotação de f será denotado por $\rho(f)$ e definido como a união dos conjuntos de rotação de cada ponto $x \in M$, i.e. $\rho(f) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}_x \subseteq H_1(M, \mathbb{R})$.

Observação 3.3 Quando necessário podemos pensar no conjunto de rotação como um elemento contido em $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ (i.e., não precisamos aplicar dualidade de Poincaré na discussão precedente). De fato, o conjunto de rotação deve ser interpretado, como definido módulo cohomologia inteira e portanto deve estar contido em $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (formalmente podemos considerar sua redução mod $\mathbb{Z}$ na definição acima).

Aqui um simples lema, que será usado posteriormente.

Lema 3.4 *Seja f um homeomorfismo de M que é isotópico a identidade e tem ordem finita (i.e. $f^m = \text{id}$ par algum $m \in \mathbb{N}^*$). Então o conjunto de rotação de $\rho(f)$ de f consite de um único elemento Λ_∞ .*

Demonstração. Fixemos um ponto $v = (x, u)$ em V . Vamos provar, primeiro que o limite:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\Lambda_{v,T})$$

sempre existe com respeito a topologia fraca*. Note que

$$\Lambda_{v,T}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \arg[k](f_t(v)) dt = \frac{1}{T} (\arg[k](\tilde{f}_T(v)) - \arg[k](v))$$

desde que $\tilde{f}_0(v) = v$. Seja T_0 o período de f i.e. o menor inteiro positivo tal que $f^{T_0}(x) = x$ para todo $x \in M$. Dado $T \in \mathbb{R}$ muito grande, temos $T = mT_0 + r(T)$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r(t) < T_0$. Seja $A = \arg[k](\tilde{f}_{T_0}(v)) - \arg[k](v)$ o número de voltas que o argumento de k dá em torno $\mathbb{S}^1$ quando o fluxo v varia de $T = 0$ a $T = T_0$. Com as notações acima, temos:

$$\begin{aligned} \arg[k](\tilde{f}_T(v)) - \arg[k](v) &= [\arg[k](\tilde{f}_T(v)) - \arg[k](\tilde{f}_{mT_0}(v))] \\ &\quad + \sum_{i=1}^m [\arg[k](\tilde{f}_{iT_0}(v)) - \arg[k](\tilde{f}_{(i-1)T_0}(v))] \\ &= 2\pi mA + \arg[k](\tilde{f}_{r(T)}(v)) - \arg[k](v) \end{aligned}$$

onde $0 \leq r(T) < T_0$ de modo que $0 \leq \arg[k](\tilde{f}_{r(T)}(v)) - \arg[k](v) < 2\pi A$. Então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\arg[k](\tilde{f}_T(v)) - \arg[k](v)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2\pi mA + \arg[k](\tilde{f}_{r(T)}(v)) - \arg[k](v)}{mT_0 + r(T)} = \frac{2\pi A}{T_0}.$$

Com isto, verificamos que, de fato, o limite acima não depende da escolha do ponto $v = (x, u)$. Dada a discussão acima, é suficiente verificar que o número de voltas A que o argumento de k dá ao redor de $\mathbb{S}^1$ quando o fluxo v varia de $T = 0$ a $T = T_0$ independe de v . Porém, este número é sempre um inteiro desde que $f^{T_0}(x) = x$ para todo $x \in M$. Além disto, ele varia continuamente com v , então tem que ser constante. $\square$

3.3 Vetor de rotação e translação do toro

Pensaremos no vetor de rotação $\rho(f)$ de f como um elemento de $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como explicado na observação (3.3). Consideremos uma métrica Riemanniana em M , invariante por f . Lembremos que o difeomorfismo f , sendo isotópico à identidade, também dá origem a uma translação h_f do toro $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ através da construção realizada no capítulo 2. Identifiquemos a translação h_f com um elemento (também designado por h_f) de $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Então temos:

Proposição 3.5 *Com as notações acima, temos $h_f = \rho(f)$.*

Demonstração. Consideremos uma função contínua $k : M \times \mathbb{S}^1 = V \rightarrow \mathbb{S}^1$ representando alguma classe de co-homologia $(c, 0) \in H^1(V, \mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}) \oplus H^1(\mathbb{S}^1)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que k é constante na segunda coordenada, i.e. k é uma função definida em M . Fixemos, também, um ponto base $p \in M \simeq (p, 0) \in V$. Desde que M é uma variedade Riemanniana, consideremos o correspondente espaço das formas harmônicas e denotemos ω_c o representante harmônica de c . Precisamos provar que

$$\frac{A}{T_0} = \int_p^{f^{T_0}(p)} \omega_c \mod \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

onde $T^0 = m$ é o menor inteiro positivo no qual $f^{T_0}(x) = f^m(x) = x$ para todo $x \in M$ e A é o winding number do argumento $\arg[k]$ de k sobre a órbita $\mathcal{O}_p$ de $(p, 0)$ pelo fluxo suspenso $\tilde{f}$ de 0 a T_0 .

Afirmamos que $f^*\omega_c = \omega_c$. De fato, note que $f^*\omega_c$ e ω_c pertencem a mesma classe de cohomologia desde que f é isotópica a identidade. Além disto, f é uma

isometria da métrica Riemaniana fixada no início, assim, $f^*\omega$ é também uma forma harmônica. A afirmação segue da parte de unicidade do Teorema de Hodge.

Consideremos, agora, a órbita $\mathcal{O}_p$. Desde que, o Mapping Torus de (M, f) é difeomorfo a $M \times \mathbb{S}^1$, $\mathcal{O}_p$ pode ser projetado na fibra vertical $(M, 0)$ criando um caminho c em M unindo p e $f(p)$. Com estas considerações e a afirmação acima, temos:

$$\int_p^{f(p)} \omega_c = \int_{f(p)}^{f^2(p)} \omega_c = \cdots = \int_{f^{m-1}(p)}^{f^m(p)} \omega_c, \quad (3.2)$$

onde a integral de p a $f(p)$ deve ser entendida como uma integral sobre c (semelhantemente a integral de $f(p)$ a $f^2(p)$ está sobre $f(c)$ e assim sucessivamente). Denotemos C_f o caminho obtido por concatenação dos caminhos $c, f(c), f^2(c), \dots, f^{m-1}(c)$. A integral de ω_c sobre C_f é um inteiro $\Pi_{C_f} \in \mathbb{Z}$ que chamaremos o período de ω_c sobre C_f . Das equações (3.1) e (3.2), segue a demonstração e enunciamos o lema (3.6). $\square$

Lema 3.6 *Com as notações acima, temos $\Pi_{C_f} = A$.*

Demonstração. Lembremos que o isomorfismo B entre o grupo de Bruschlinsky $C^0(M, \mathbb{S}^1)/\sim$ e $H^1(M, \mathbb{Z})$ é dado explicitamente como segue. Fixemos um elemento $\gamma \in C^0(M, \mathbb{S}^1)/\sim$ e escolhemos uma função $f : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ representando γ . A função f induz um homomorfismo $f^* : H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z})$ que depende somente de γ e não da escolha f . Colocamos, então, $B(\gamma) = f^*(\sigma)$ onde σ representa o gerador do grupo cíclico $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$ (ver [14]).

Desde que, $k : M \times \mathbb{S}^1 = V \rightarrow \mathbb{S}^1$ representa a classe $(c, 0) \in H^1(V, \mathbb{Z}) = H^1(M, \mathbb{Z}) \oplus H^1(\mathbb{S}^1)$, segue que $k^*(\sigma)$ e ω_c são os mesmos elementos de $H^1(M, \mathbb{S}^1)$. Portanto as avaliações (do par) na classe de $C_f \in H_1(M, \mathbb{Z})$ coincidem uma com a outra. Na Teoria De Rham, a avaliação de ω_c é exatamente Π_{C_f} . Na Teoria de Bruschlinsky, a avaliação é precisamente o números de voltas de k sobre a órbita de p ($p = f^n(p)$), que é A por hipótese. $\square$

Seja f como acima. O vetor de rotação também admite uma descrição alternativa semelhante a descrição da aplicação Jacobiana dada na demonstração da proposição (2.4). Chamemos $k_1, \dots, k_d$ uma base para $C^0(M, \mathbb{S}^1)/\sim$ (isomorfo a $H^1(M, \mathbb{Z})$). Com respeito a esta base, novamente obtemos uma identificação de $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ com $\mathbb{T}^d$ (cf. observação (3.3)). Agora o vetor de rotação é

simplesmente (como segue, por exemplo, na proposição (3.5))

$$\rho(f) = (\Lambda_\infty(k_1), \dots, \Lambda_\infty(k_d)) .$$

Em seguida, fixaremos a identificação acima mencionada de $\text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ e $\mathbb{T}^d$.

Vetor de rotação tem uma relação natural com medidas invariantes que será explorada no lema (3.7) abaixo. A discussão subsequente é, de fato, um caso particular de [24] que toma uma forma mais precisa no presente caso porque $\rho(f)$ é reduzido a um único vetor. Primeiro observe que há uma correspondência óbvia entre a medida μ invariante por f e a medida ν invariante pelo fluxo suspenso $\tilde{f}$. Tal correspondência nos leva a forma local $\nu = \mu \times L$ onde L representa uma medida de Lebesgue unidimensional.

Lema 3.7 *Existe um homomorfismo natural $H : \text{Diff}_{0,\mu}^1(M) \rightarrow \mathbb{T}^d$ onde $\text{Diff}_{0,\mu}^1(M)$ representa a componente conexa da identidade do grupo de difeomorfismo de C^1 que preservam a medida μ . Portanto, se $f \in \text{Diff}_{0,\mu}^1(M)$ tem ordem finita, então $H(f)$ coincide com o vetor de rotação $\rho(f)$.*

Demonstração. Considere uma das funções $k_i : M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ como anteriormente escrito, $i = 1, \dots, d$. Dado um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ isotópico a identidade, consideremos o Mapping Torus $V \simeq M \times \mathbb{S}^1$ correspondente e as identificações óbvias envolvendo V e M (μ e ν etc). Seja h uma função de M em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ e considere $\arg[h \circ \tilde{f}_t - h]$ que pode também ser pensado como a diferença $\overline{h \circ \tilde{f}_t - h}$ onde a barra horizontal denota um levantamento em $\mathbb{R}$ of $h \circ \tilde{f}_t - h$ satisfazendo $h \circ \tilde{f}_0 - h = 0$ (aqui h está identificada com uma função em V de maneira óbvia). Definimos $H(f)$ por

$$H(f) = \left(\int_M \arg[(k_1 \circ \tilde{f}_1 - k_1)] d\nu, \dots, \int_M \arg[(k_d \circ \tilde{f}_1 - k_d)] d\nu \right)$$

onde $\nu = \mu \times L$. Note também que $\tilde{f}_1$ induz $f : M \rightarrow M$. Portanto, para mostrar que H é um homomorfismo, é suficiente verificar que a implicação $f \mapsto \int_M \arg[(k_i \circ f - k_i)] d\mu$ é verdadeira. De qualquer modo, se f, g são dois elementos de $\text{Diff}_{0,\mu}^1(M)$, temos

$$\int_M \arg[(k_i \circ (g \circ f) - k_i)] d\mu = \int_M \arg[((k_i \circ g) \circ f - (k_i \circ g))] d\mu + \int_M \arg[(k_i \circ g - k_i)] d\mu .$$

Desde que g preserva a medida ν , isto resulta que $\int_M \arg[(k_i \circ g) \circ f - (k_i \circ g)] d\mu = \int_M \arg[k_i \circ f - k_i] d\mu$ provando assim que H é um homomorfismo.

Para a segunda parte da demonstração, fixemos um elemento f de $\text{Diff}_{0,u}^1(M)$ de ordem finita. Começemos com duas observações simples e gerais. Primeiro note que $\arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1+t_2} - k_i] = \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_2} - k_i] \circ \tilde{f}_{t_1} + \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1} - k_i]$ ou

$$\arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_2} - k_i] \circ \tilde{f}_{t_1} = \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1+t_2} - k_i] - \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1} - k_i]. \quad (3.3)$$

A segunda observação consiste na existência de uma constante Const tal que

$$\left| \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1+t_2} - k_i](x) - \arg[k_i \circ \tilde{f}_{t_1} - k_i](x) \right| < \text{Const} \quad (3.4)$$

para todo $t_1 \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $0 \leq t_2 \leq 1$. A estimativa (3.4) não é nada mais que uma consequência imediata da compacidade de M, V .

Para um ponto $x \in M$ consideremos, agora

$$\Lambda_\infty(k_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \arg[k_i](\tilde{f}_t(x)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\arg[k_i](\tilde{f}_T(x)) - \arg[k_i](x)).$$

De acordo com o lema (3.4) o limite acima sempre existe e não depende de x (sendo precisamente $\Lambda_\infty(k_i)$). Logo, colocamos

$$B(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \arg[k_i \circ \tilde{f}_1 - k_i] \circ \tilde{f}_t(x) dt.$$

Novamente o lema (3.4) nos garante que este limite existe e é uma constante para todo $x \in M$. Combinando com o teorema ergódico de Birkhoff, também obtemos que

$$B(x) = \int_M B(x) = \int_M \arg[k_i \circ \tilde{f}_1 - k_i] d\mu. \quad (3.5)$$

O outro lado equação (3.3) nos dá

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_0^T \arg[k_i \circ \tilde{f}_1 - k_i] \circ \tilde{f}_t(x) d\mu \\ &= \int_0^T (\arg[k_i \circ \tilde{f}_{t+1} - k_i](x) - \arg[k_i \circ \tilde{f}_t - k_i](x)) dt \\ &= \int_T^{T+1} \arg[k_i \circ \tilde{f}_t - k_i](x) dt - \int_0^1 \arg[k_i \circ \tilde{f}_t - k_i](x) dt. \end{aligned}$$

Desde que $B(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_T^{T+1} \arg[k_i \circ \tilde{f}_t - k_i](x) dt$. Não obstante, a estimativa (3.4) facilmente implica que o lema acima coincide com $\lim_{T \rightarrow \infty} \arg[k_i \circ \tilde{f}_T - k_i](x)$ que, nada mais é que $\Lambda_\infty(k_i)$. Assim $B(x) = \Lambda_\infty(k_i)$ de modo que lema resulta da equação (3.5). $\square$

Capítulo 4

Demonstrações dos Resultados Principais

Como o título indica, neste capítulo vamos completar as demonstrações dos resultados apresentados na introdução e no capítulo (1). Começamos pelo teorema (1.4).

Demonstração do Teorema (1.4). Suponha por contradição que o comutador $[f_1, f_2]$ é diferente da identidade e vamos munir M com uma métrica Riemanniana invariante por $[f_1, f_2]$. Com respeito a esta métrica construímos a aplicação Jacobiana como no capítulo (2) e uma ação equivariante cíclica em $\mathbb{T}^d = \text{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que é gerada por $h_{[f_1, f_2]}$. Desde que $[f_1, f_2]$ é isotópico a identidade, segue que $h_{[f_1, f_2]}$ é uma translação. Além disto, como a ordem de $[f_1, f_2]$ é finita, o lema (3.5) nos assegura que $h_{[f_1, f_2]}$ coincide com o vetor de rotação $\rho([f_1, f_2])$. Não obstante, o vetor $\rho([f_1, f_2])$ é trivial desde que ambos f_1, f_2 preservem alguma medida de probabilidade μ (cf. lema (3.7)). Em outras palavras, temos $h_{[f_1, f_2]} = 0$ de modo que a afirmação resulta do lema (2.2). $\square$

Demonstração do Teorema (1.5). Seja $G \subset \text{Diff}_{0, \mu}^r(M)$ um grupo como na afirmação. Suponha que $f \in G$ tem ordem finita. A nulidade de $H^1(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ significa que o único homomorfismo de G em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o trivial. Portanto o lema (3.7) implica que o vetor de rotação de f é trivial. Agora o mesmo argumento do teorema (1.4) implica que f é a identidade. $\square$

Temos agora condições de demonstrar o corolário ().

Demonstração do Corolário (1.6). Seja $G \subseteq \text{Diff}^\omega(M)$ um grupo cujos ele-

mentos são de torção e consideremos a ação fiel de G em M . Se n denota a dimensão de M , G induz um grupo G^i de automorfismos para cada grupo de co-homologia $H^i(M, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$. Portanto cada G^i é um subgrupo de $GL(N_i, \mathbb{R})$ para um certo $N_i \in \mathbb{N}$ adequado. Em seguida, lembremos que o problema de Burnside tem uma solução negativa em $GL(N, \mathbb{R})$, devida a Schur. Portanto cada G^i , $i = 1, \dots, n$ é um grupo infinito. Em outras palavras, módulo passar um subgrupo de índice finito, podemos supor sem perda de generalidade que G age trivialmente na cohomologia de M . Entretanto, se f é um difeomorfismo agindo trivialmente em $H^i(M, \mathbb{R})$ para $i = 1, \dots, n$, seu número de Lefschetz é a característica de Euler de M que é diferente de *zero* pela afirmação. Portanto a fórmula de Lefschetz nos assegura que f tem pontos fixos. Suponhamos, agora, que, além disso, f tenha ordem finita. A existência de pontos fixos para f e o fato de que M é uma i.m.l.b1 implica, que f deve ser igual a identidade (cf. corolário(2.3)). Isto resulta que o grupo G da afirmação é finito. $\square$

Como já vimos, o corolário(1.6) mostra que um grupo de Burnside não pode ter uma ação C^1 em uma superfície de gênero maior ou igual a 2. Em dimensões ímpares, porém, a característica de Euler é sempre igual a *zero*, assim a fórmula de Lefschetz não garante, *em princípio*, a existência de pontos fixos para os elementos de G . Assim, a extensão do resultado precedente para variedades de dimensão 3 não é claro e explica o interesse do teorema A.

4.1 Demonstração do Teorema A

Antes de provar o teorema A vamos lembrar de alguns resultados referentes a Mapping Class Groups em dimensão 3. Primeiro lembremos que o Mapping Class Group de uma variedade compacta M é o quociente de $\text{Diff}(M)$ obtido dizendo que $f, g \in \text{Diff}(M)$ são equivalentes se são isotópicas.

Recordemos brevemente algumas noções usadas em topologia tri-dimensional, para demonstrações e discussão detalhada ver [7], [8] e [9].

4.1.1 Superfícies Incompressíveis

Seja M uma variedade compacta de dimensão 3 (possivelmente com bordo). Uma superfície mergulhada $S \subset M$ cuja característica de Euler é não positiva é dita *incompressível* se seu grupo fundamental se injeta no grupo fundamental de M e, além disso, S não pode ser deformada no bordo de M . Uma variedade M que contém uma superfície incompressível é chamada *suficientemente grande*. Finalmente, dizemos que M é irredutível se toda esfera mergulhada é bordo de uma bola.

4.1.2 Variedade Haken

Uma variedade Haken (variedade irredutível e suficientemente grande) é uma variedade que pode, por incisão, ser reduzida a uma bola ao longo de superfícies incompressíveis. Foi provado por Johannson que o Mapping Class Group de uma variedade Haken é sempre finito.

4.1.3 Laminação genuína

Mais geralmente uma *laminação essencial* Λ em M é definida como uma laminação satisfazendo as seguintes condições:

- (1) regiões complementares são irredutíveis;
- (2) nenhuma folha é uma esfera ou um toro que seja bordo de um toro sólido;
- (3) qualquer folha contida na fronteira de uma região complementar é incompressível e de "fins incompressíveis" na região em questão.

Definição 4.1 Uma *laminação genuína* é uma laminação essencial que possui uma região complementar que não é um I -fibrado.

Onde I representa um intervalo; isto significa que uma laminação genuína não pode ser obtida por restrição de uma folheação por um conjunto compacto invariante.

Agora, está bem conhecido que a classe de variedades a que se refere o Teorema A é muito grande e uma parte significativa deste conjunto corresponde ao conjunto das variedades compactas de dimensão três. No trabalho acima citado, está provado, em particular, que todas estas variedades possuem Mapping Class Groups *finito*.

Demonstração do Teorema A. Necessitamos primeiro verificar que uma variedade M como na afirmação é uma variedade i.m.l.b1. Uma variedade hiperbólica (ou uma variedade carregando uma laminação essencial) está coberta por $\mathbb{R}^3$, então, seus maiores grupos de homotopia são triviais. Em particular $\pi_2(M) = 0$ e portanto M não pode ser uma fibração (singular) sobre o círculo tendo a esfera como fibra típica. Disto segue também que os grupos de cohomologia de M são os grupos de cohomologia de seus domínios fundamentais. Para uma variedade compacta hiperbólica, é bem conhecido que o primeiro grupo de cohomologia do grupo fundamental não é trivial. Portanto uma variedade hiperbólica de dimensão três não pode ser uma esfera homológica. Então o lema(1.3) assegura que M é uma i.m.l.b1. Um resultado similar garante o mesmo para variedades carregando uma laminação genuína, conforme trabalho de Gabai e seus colaboradores mencionados acima.

No caso de uma variedade Haken o resultado é simples. Sua construção explícita mostra que ela não é uma esfera homológica enquanto a existência de uma superfície incompressível garantir que seu grupo fundamental é “maior” do que $\mathbb{Z}$. Portanto uma variedade Haken não pode ser uma fibração singular sobre o círculo tendo uma fibra conexa simples.

Vamos agora considerar um grupo $G \subset \text{Diff}^\omega(M)$ finitamente gerado cujos elementos tem ordem finita. Usando a finitude do Mapping Class Group de M , podemos supor, sem perda de generalidade que G está contido na componente conexa da identidade. Em particular, G age trivialmente na cohomologia de M . Agora, usando o Teorema (1.4), concluímos que G é Abelian. Portanto, G tem que ser finito. $\square$

4.2 Demonstração do Teorema B

Esta seção é dedicada a demonstração do Teorema B. No que segue suporemos M uma variedade simplética de dimensão quatro. Começaremos com um breve resumo do trabalho de Donaldson relativo a existência de topological Lefschetz pencils em M (ver [3], [4]).

4.2.1 Topological Lefschetz pencil

Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão quatro. Uma *topological Lefschetz pencil* em M consiste de uma superfície Riemaniana compacta M , uma função suave $\mathcal{P} : M \setminus B \rightarrow S$ e uma estrutura quase complexa J em M satisfazendo as seguintes condições:

- (1) B é um conjunto finito. A aplicação $\mathcal{P}$ tem um número finito de valores críticos $x_1, \dots, x_l \in S$ e, para todo $j \in \{1, \dots, l\}$, existe um único ponto crítico $p_j \in \mathcal{P}^{-1}(x_j)$ no qual $\mathcal{P}$ não é degenerado por $\mathcal{P}$.
- (2) A projeção $\mathcal{P}$ é holomorfa em uma pequena vizinhança de cada p_j .
- (3) A forma simplética ω é não degenerada no espaço vertical $\text{Ker } D_p \mathcal{P}$ para todo $p \in M \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$.

Observação 4.2 Geralmente a superfície de Riemann S é simplesmente $\mathbb{CP}(1)$. Consideraremos superfícies de Riemann de gêneros maiores para podermos usar que as fibras são conexas mesmo após a realização de explosões (cf. abaixo).

Dizemos que B é o *conjunto de pontos de indeterminação* do pencil $\mathcal{P}$. Quando B é vazio então $\mathcal{P}$ define, de fato, uma *fibração topológica de Lefschetz*. Em geral um pencil $\mathcal{P}$ pode retornar a uma fibração realizando um número finito de explosões centrados nos pontos em B . Note, porém, que estas explosões tornam os conjuntos $\mathcal{P}^{-1}(x)$, $x \in S$ desconexos e esta é a principal razão pelo qual permitiremos que a base do pencil seja uma superfície Riemaniana de gênero arbitrário: módulo passar um recobrimento ramificado finito da base original, podemos considerar que as pré-imagens $\mathcal{P}^{-1}(x)$ dos pontos na nova base estão conectados novamente.

Observação 4.3 Note que a condição 3 nos permite definir uma conexão simplética (singular) em (M, ω) com respeito ao pencil $\mathcal{P}$. Tal conexão é determinada dizendo que o espaço horizontal é o complemento simplético (“ortogonal”) do complemento vertical. Usando a conexão simplética, podemos falar a respeito de monodromia do pencil tanto quanto falar sobre levantamento de caminhos contidos em S .

Como já vimos, para provar o Teorema B podemos supor, sem perda de generalidade que G age trivialmente na cohomologia de M . Começaremos com um simples lema. Consideremos uma variedade simplética de dimensão quatro equipada

com um "Lefschetz pencil" $\mathcal{P} : M \rightarrow S$ e denotemos $\text{Symp}_H^1(M)$ o grupo de C^1 -simplectomorfismos de (M, ω) agindo trivialmente na cohomologia de M .

Lema 4.4 *Suponha que $f \in \text{Symp}_H^1(M)$ fixa os pontos de indeterminação de $\mathcal{P}$. Então f preserva $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Suponha primeiro que o conjunto B de pontos de indeterminação de $\mathcal{P}$ é vazio. Então $\mathcal{P} : M \rightarrow S$ é uma fibração de Lefschetz e, em particular, a auto-intersecção de uma fibra genérica é $\mathcal{P}^{-1}(t)$ é zero. Seja, agora, f um simplectomorfismo em $\text{Symp}_H^1(M)$. Afirmamos que f preserva $\mathcal{P}$. Para verificar a afirmação, vamos supor por contradição que ela é falsa. Portanto, podemos encontrar uma fibra genérica $\mathcal{P}^{-1}(x_1)$ cuja imagem $f(\mathcal{P}^{-1}(x_1))$ tem intersecção não trivial com outra fibra genérica $\mathcal{P}^{-1}(x_2)$ (não-trivial significa, também, que $f(\mathcal{P}^{-1}(x_1)) \neq \mathcal{P}^{-1}(x_2)$). Recordemos que $\mathcal{P}^{-1}(x_1), \mathcal{P}^{-1}(x_2)$ são também curvas J -holomorfas e que o número de intersecção de $f(\mathcal{P}^{-1}(x_1)), \mathcal{P}^{-1}(x_2)$ é estritamente positivo (cada ponto de intersecção contribui com uma quantia estritamente positiva). Porém, $f(\mathcal{P}^{-1}(x_1))$ é homóloga a $\mathcal{P}^{-1}(x_1)$ desde que f age trivialmente na co-homologia de M . Por outro lado, $\mathcal{P}^{-1}(x_2)$ é homólogo a $\mathcal{P}^{-1}(x_1)$ pois, ambos são fibras regulares de uma fibração de Lefschetz. Portanto o número de intersecção de $f(\mathcal{P}^{-1}(x_1))$ e $\mathcal{P}^{-1}(x_2)$ é precisamente a auto-intersecção de $\mathcal{P}^{-1}(x_1)$ que vale zero como já vimos. Está contradição estabelece a afirmação.

Em geral, quando $B \neq \emptyset$, podemos explodir os pontos em B transformando o pencil numa fibração. O fato que os pontos em B são fixados por f assegura que f admite um levantamento natural pelo blown-up na variedade. Daí, podemos aplicar o argumento precedente neste levantamento. $\square$

O teorema B resulta da seguinte proposição.

Proposição 4.5 *Seja (M, ω) uma 4-variedade simplética, compacta. Se $G \subset \text{Symp}_H^1(M)$ é um grupo que possui somente elementos de ordem finita, então existe um subgrupo $G_0 \subset G$ de índice finito que está contido na componente conexa da identidade em $\text{Diff}^1(M)$.*

Demonstração do Teorema B. Suponha que (M, ω) e $G \subset \text{Symp}^\omega(M)$ são como na afirmação. Primeiro observemos que a ação de G possui uma medida de probabilidade invariante natural, a medida associada a forma de volume $\omega \wedge \omega$.

Por outro lado, a combinação do teorema de Schur e a proposição (4.5) nos permite reduzir a demonstração para o caso em que G é isotópico a identidade. A demonstração, então segue do Teorema (1.4), desde que M é uma variedade i.m.l.b1. (Lemma (1.3)). $\square$

Resta provar a Proposição (4.5). Considere uma aplicação pencil de Lefschetz $\mathcal{P} : M \rightarrow S$ em M e denote Mod_M (resp. Mod_S) o Mapping Class Group de M (resp. S). Considere, também, o subgrupo $\text{Diff}_{\mathcal{P}}^1(M) \subset \text{Diff}^1(M)$ que consiste dos difeomorfismos que preservam $\mathcal{P}$. Em $\text{Diff}_{\mathcal{P}}^1(M)$ dizemos que dois elementos são equivalente se eles são isotópicos através dos difeomorfismos de $\text{Diff}_{\mathcal{P}}$. O Mapping Class Group (relativo a $\mathcal{P}$), resultante, é denotado por $\text{Mod}_M^{\mathcal{P}}$.

Lema 4.6 *Todo symplectomorfismo $f \in \text{Symp}_H^1(M)$ define um elemento $[f]_{\mathcal{P}}$ em $\text{Mod}_M^{\mathcal{P}}$. Além disto $[f_1 \circ f_2]_{\mathcal{P}} = [f_1]_{\mathcal{P}}[f_2]_{\mathcal{P}}$.*

Demonstração. Um elemento $f \in \text{Symp}_H^1(M)$ define uma classe em $\text{Mod}_M^{\mathcal{P}}$ se ele fixa os pontos de indeterminação de $\mathcal{P}$, neste caso, o lema (4.4) assegura que f pertence a $\text{Diff}_{\mathcal{P}}(M)$. Em geral, seja $\{q_1, \dots, q_s\}$ os pontos de indeterminação e considere suas respectivas pré-imagens $f(q_1), \dots, f(q_s)$. Não é difícil construir um symplectomorfismo g simplecticamente isotópico a identidade “trazendo os pontos $f(q_i)$ de volta a q_i ”. Em outras palavras, g é tal que $g \circ f(q_i) = q_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Colocamos então $[f]_{\mathcal{P}}$ como a classe de $g \circ f$ em $\text{Mod}_M^{\mathcal{P}}$.

Para verificar que a aplicação $f \mapsto [f]_{\mathcal{P}}$ esta bem definida, consideremos outro elemento h de $\text{Symp}_H^1(M)$ que é simplecticamente isotópico a identidade e satisfaz $h \circ f(q_i) = q_i$, $i \in \{1, \dots, s\}$. Claramente $g \circ f$ e $h \circ f$ são simplecticamente isotópicos um ao outro. Se H é uma isotopia simplética entre $g \circ f$ e $h \circ f$, podemos construir uma família F_t , $t \in [0, 1]$, de symplectomorfismos tal que:

- $F_0 = F_1 = id$;
- $F_t \circ H_t(q_i) = q_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ e $t \in [0, 1]$.

Portanto $F \circ H$ realiza uma isotopia simplética entre $g \circ f$ e $h \circ f$ que fixa os pontos de indeterminação de $\mathcal{P}$. Isto resulta que $F \circ H$ é uma isotopia em $\text{Diff}_{\mathcal{P}}^1(M)$ mostrando que a aplicação $f \mapsto [f]_{\mathcal{P}}$ esta bem definida.

Finalmente precisamos verificar que $[f_1 \circ f_2]_{\mathcal{P}} = [f_1]_{\mathcal{P}}[f_2]_{\mathcal{P}}$. Isto é, entretanto, uma adaptação fácil do argumento acima e deixamos a cargo do leitor. $\square$

Demonstração da Proposição (4.5). Seja G como na afirmação e denote por $[G]_{\mathcal{P}}$ a imagem de G pelo homomorfismo dado no lema (4.6). A demonstração resulta de verificar que $[G]_{\mathcal{P}}$ é um grupo finito.

Claramente o subgrupo $[G]_{\mathcal{P}}$ de $\text{Mod}_M^{\mathcal{P}}$ finitamente gerado, é tal que todos os seus elementos tem ordem finita. Para provar que ele é finito nós primeiro vamos considerar sua projeção natural em Mod_S . A imagem desta nova projeção será denotada por $[G]_S$ e, novamente, o subgrupo $[G]_S$ de Mod_S terá somente elementos de ordem finita. Recorreremos a um teorema devido a Ivanov (e independentemente a McCarthy, ver [15], [18]) que diz que um subgrupo qualquer de Mod_S de dois geradores ou contém um subgrupo livre de dois geradores ou contém um subgrupo abeliano com índice finito. Desde que $[G]_S$ não pode obviamente conter grupos livres, concluímos que ele é uma extensão finita de um grupo abeliano. Sendo finitamente gerado e tendo somente elementos de ordem finita este grupo abeliano é necessariamente finito. Por esta razão $[G]_S$ é ele próprio finito.

Resumindo a discussão acima, podemos assumir sem perda de generalidade que $[G]_S$ é trivial. Em outras palavras, todo elemento $f \in [G]_{\mathcal{P}}$ se projeta sobre um difeomorfismo $h : S \rightarrow S$ o qual é isotópico a identidade. Afirmamos que podemos supor sem perda de generalidade que f preserva cada fibra de $\mathcal{P}$ (i.e. $f(\mathcal{P}^{-1}(x)) = \mathcal{P}^{-1}(x)$ para todo $x \in S$). Para verificar a afirmação escolhemos uma isotopia $H_t : [0, 1] \times S \rightarrow S$ conectando $h = H_0$ a identidade $id = H_1$. Note que para cada $x \in S$, temos um caminho $t \mapsto H_t(x)$ contido em S . Dado um ponto p em $\mathcal{P}^{-1}(x)$, a existência da conexão simplética (cf. observação(4.3)) nos permite levantar este caminho a um caminho $t \mapsto \tilde{H}_t(p)$ verificando $\tilde{H}_1(p) = p$. A família de difeomorfismos consistindo de $p \mapsto \tilde{H}_t(p)$, t fixo, claramente fornece uma isotopia de f com algum difeomorfismo $\tilde{f}$ preservando cada fibra de $\mathcal{P}$ como queríamos. Agora, para concluir que $[G]_{\mathcal{P}}$ é todo finito o que necessitamos fazer é aplicar os resultados de Ivanov-McCarthy (ver [15], [18]) para as fibras de $\mathcal{P}$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] C. CHAMPETIER, L'espace des groupes de type fini, *Topology*, **39**, (2000), 657-680.
- [2] G. D'AMBRA & M. GROMOV, Lectures on transformation groups: geometry and dynamics, *Surveys in Differential Geometry*, **1**, (1991), 19-111.
- [3] S. DONALDSON, Symplectic submanifolds and almost complex geometry, *J. Differential Geometry*, **44**, (1996), 666-705.
- [4] S. DONALDSON, Lefschetz pencils on symplectic manifolds, *J. Differential Geometry*, **53**, 2, (1999), 205-236.
- [5] G. DE RHAM, *Differentiable Manifolds*, Springer-Verlag, (1984).
- [6] B. FARB & P. SHALEN, Real-analytic actions of lattices, *Invent. Math.*, **135**, 2, (1999), 273-296.
- [7] D. GABAI, The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\text{Isom}(M^3) \simeq \text{Diff}(M^3)$, *J. Differential Geometry*, **58**, 1, (2001), 113-149.
- [8] D. GABAI & W. KAZEZ, The finiteness of the mapping class group for atoroidal 3-manifolds with genuine laminations, *J. Differential Geometry*, **50**, 1, (1998), 123-127.
- [9] D. GABAI & U. OERTEL, Essential laminations in 3-manifolds, *Ann. of Math.*, **130**, 2, (1989), 41-73.
- [10] E. GHYS, Sur les Groupes Engendrés par des Difféomorphismes Proches de L'Identité, *Bol. Soc. Bras. Mat*, **24**, 2, (1993), 137-178.

- [11] D. FISHER, Non-linear representation theory of finitely generated groups, *in preparation*, see also slides available at <http://comet.lehman.cuny.edu/fisher/>.
- [12] R. GOMPF, A new construction of symplectic manifolds, *Ann. of Math.*, **142**, (1995), 527-595.
- [13] G. HIGMAN, Subgroups of finitely presented groups, *Proc. Royal Soc. London, Serie A*, **262**, (1961), 455-475.
- [14] S. HU, *Homotopy Theory*, Academic Press, (1959).
- [15] N. IVANOV, Algebraic properties of the Teichmüller modular group, *DAN SSSR*, **275**, 4, (1984), 786-789; English transl.: Soviet Mathematics-Doklady, **29**, 2, (1984), 288-291.
- [16] S. IVANOV, On the Burnside problem for groups of even exponent, Proceeding of the ICM, Vol II, Berlin, *Doc. Math. Extra Vol. ICM-98*, (1998), 67-76.
- [17] S. LOJASIEWICZ, Triangulations of semianalytic sets, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, **18**, (1964), 449-474.
- [18] J. MCCARTHY, A “Tits-alternative” for subgroups of surface mapping class groups, *Trans. AMS*, **291**, 2, (1985), 583-612.
- [19] D. MCDUFF & D. SALAMON, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, (1998).
- [20] M. POLLICOTT, Rotation sets for homeomorphisms and homology, *Transactions of the American Mathematical Society*, **331**, 2, (1992), 881-894.
- [21] L. POLTEROVICH, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*, Lectures in Math. ETH, Birkhauser (2001).
- [22] J.C. REBELO, On nilpotent groups of real analytic diffeomorphisms, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **331**, 1, (2000), 317-322.
- [23] J. ROSENBERG & S. WEINBERGER, An equivariant Novikov conjecture, *K-theory*, **4**, (1990), 29-53.

- [24] S. SCHWARTZMANN, Asymptotic cycles, *Ann. of Math.* **66**, 2, (1957), 270-284.
- [25] T. TOM DIECK, *Transformation groups*, De Gruyter studies in mathematics, (1987).
- [26] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Ann. Math.*, **81**, 3, (1965), 496-549.
- [27] M. MISIUREWICZ & K. ZIEMIAN, Rotation Sets For Maps of Tori, *J. London Math. Soc*, Vol. 2, no. 40 (1989), 490-506.
- [28] J.C. REBELO & A.L. SILVA, On the Burnside problem in $\text{Diff}(M)$, *preprint*.