I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ESTABILIDADE EVENTUAL

E

UMA

APLICAÇÃO

MAURÍCIO SILVEIRA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO

BRASIL

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA
- São Carlos -

ESTABILIDADE EVENTUAL

E

UMA

APLICAÇÃO

MAURÍCIO SILVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
DE
SÃO CARLOS
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. NELSON ONUCHIC

- SÃO CARLOS -

- 1978 -

Class. - T
Cutt. 5587 e
e.2
Tombo -

ESTABILIDADE EVENTUAL

E UMA

APLICAÇÃO

MAURÍCIO SILVEIRA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. NELSON ONUCHIC

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

DE SÃO CARLOS - USP

"O Universo está sempre presente a nós,
com todas as suas forças e grandezas; para o percebermos,
uma só coisa é necessária: crearmos em
nós suficientes receptividades para sintonizarmos a nossa
antena individual com as ondas da
emissora universal".

M. Gandhi

À minha mãe

A G R A D E C I M E N T O S

Os agradecimentos iniciais são dirigidos às seguintes pessoas:

Dr. NELSON ONUCHIC - cuja orientação segura, disponibilidade ímpar, relevante acolhimento; fizeram com que este trabalho chegasse à sua plena realização, bem como foram fatores integrantes na minha formação profissional e humana.

Dr. JANEY ANTONIO DACCACH - pelo exemplo constante de sobriedade profissional, e estímulo dado desde os instantes iniciais na Universidade.

Dr. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL - por ter-me dispensado atenção de um verdadeiro "gentleman" por ocasião de minha transferência do IME ao ICMSC.

Dra. ELZA FURTADO GOMIDE - pelo apoio que me foi dispensado nos momentos iniciais vividos junto ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Dr. NATALINO ADELMO DE MOLFETTA - amigo constante, que sempre me deu o apoio e confiança necessários, possibilitando a elaboração do meu programa de mestrado em breve tempo.

Dr. ORLANDO F. LOPES - pelos momentos de completa disponibilidade na discussão de alguns tópicos referentes a este trabalho.

Agradeço de forma especial aos colegas: *LUIZ CARLOS PAVLU*, e *ADALBERTO SPEZAMIGLIO*, que com valiosas críticas e oportunas sugestões, participaram construtivamente na elaboração destas notas.

Agradeço ainda: a todos os funcionários da gráfica da Universidade Federal de São Carlos, pelo acurado trabalho de impressão, e à *Srta. MARIA JOSÉ GUALTIERI* pelo esmero e a dedicação com a qual datilografou esta dissertação.

Enfim a todos os colegas do ICMSC e da UFSCar, pelo ambiente de trabalho entusiástico e acolhedor sempre encontrado.

Este trabalho só foi possível graças ao apoio das entidades *CAPES, CNPq, FAPESP, FINEP.*

A B S T R A C T

The main objective of this work is to study certain types of stability of the origin relatively to one system of Ordinary Differential Equations. We observe that the origin need not to be an equilibrium point of the system under consideration.

Such types of stability that may play an important role in the theory of adaptive control systems, are known as eventual stability.

The concept of eventual stability for systems of ordinary differential equations is a natural extension of the concept of stability in the sense of Lyapunov.

We present definitions, basic facts and qualitative properties of the solutions of the menctioned system.

We improve results and examples discussed by J.P. La Salle, R.J. Rath and V. Lakshmikanthan.

The techniques used in this dissertation are provided by the ideas contained in the theory of Lyapunov functions.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0 - APRESENTAÇÃO

CAPÍTULO 1 - ESTABILIDADE EVENTUAL 1

1.1 - Introdução 1

1.2 - Definições 1

1.3 - Exemplos 2

CAPÍTULO 2 - ALGUMAS PROPRIEDADES 9

CAPÍTULO 3 - RELAÇÕES COM A TEORIA DE LIAPUNOFF 19

3.1 - Estabilidade Eventual Uniforme 20

3.2 - Estabilidade Eventual Assintótico-
-Uniforme 23

CAPÍTULO 4 - REGIÕES DE ATRAÇÃO - EM ESTABILIDADE EVENTUAL ASSINTÓTICA 25

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO 35

5.1 - Introdução à Teoria do Controle 35

5.2 - Um Problema de Estabilidade em Controle 38

APÊNDICE

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 0

APRESENTAÇÃO

Em várias situações concretas poderemos ser levados a considerar a estabilidade de estados que não são de equilíbrio.

Tal comportamento pode não se enquadrar dentro da teoria de estabilidade proposta por Liapunoff. Aliás; a condição "ser estável" em se tratando de estabilidade da origem, está associada intrinsecamente, a exigência de que esta seja um ponto de equilíbrio.

Os tipos de estabilidade a serem abordados nestas notas, são de estabilidades de estados não necessariamente de equilíbrio, mas que com o passar do tempo, tendem a se comportar "sempre mais" como estados de equilíbrio estável, ou mesmo assintoticamente estável.

Determinado tipo de estabilidade encontra um campo de aplicação imediata na teoria de sistemas de controle adaptáveis.

Se o problema de controle for considerado com "realismo", então este é o tipo de estabilidade que esperamos encontrar.

Na parte inicial deste trabalho são dados os conceitos de estabilidade eventual.

Posteriormente algumas propriedades básicas deste tipo de estabilidade são obtidas.

Aspectos comparativos com a teoria de Liapunoff sobe

jamente conhecida são também salientados.

Como complementação apresentamos teoremas que nos dão informações da teoria qualitativa relacionada ao campo de estabilidade eventual. Por exemplo, pode-se dar uma estimativa referente a uma região de estabilidade eventual.

A parte conclusiva traz um exemplo de como a teoria pode ser aplicada.

Esta dissertação é fortemente motivada numa publicação de J.P. LASALLE e R.J. RATH.

CAPÍTULO 1

ESTABILIDADE EVENTUAL

1.1 - INTRODUÇÃO

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad \text{(I)}$$

onde $f(t,x)$ é contínua, e satisfaz alguma condição de unicidade em relação aos dados iniciais, no conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\Omega = \{(t,x) \mid t \geq 0 \text{ e } ||x|| < \rho \leq \infty\}$.

Aqui $||x||$ é a norma euclideana do $\mathbb{R}^n$ dada por

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$.

Denotamos por $x(t, t_o, x_o)$ a solução de (I) tal que $x(t_o, t_o, x_o) = x_o$. Consideramos a solução $x(t, t_o, x_o)$ estendida ao seu máximo intervalo de definição aberto à direita.

É bem conhecido que dentro das hipóteses dadas acima, as soluções de (I) são contínuas em relação às condições iniciais.

Se $J = [0,\infty)$, dizer que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ equivale a dizer que f é contínua no par (t,x) $\forall t \in J$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.2 - DEFINIÇÕES

D.1 - A origem $x = 0$ é dita *eventualmente uniformemente estável* se para cada $\varepsilon > 0$ existem números positivos

$\delta = \delta(\varepsilon)$ e $T = T(\varepsilon)$ de modo que se $||x_o|| < \delta$, então

$||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t$

tal que $t \geq t_o \geq T$.

D.2 - A origem $x = 0$ é dita *eventualmente quase uniformemente assintoticamente estável* se para cada $\varepsilon > 0$ existem números positivos δ_o, T_o e $T = T(\varepsilon)$ tal que; se $||x_o|| \leq \delta_o$, então $||x(t,t_o,x_o|| < \varepsilon \quad \forall t$ tal que $t \geq$ $\geq t_o + T$ com $t_o \geq T_o$.

D.3 - A origem $x = 0$ é dita *eventualmente uniformemente assintoticamente estável* se ela satisfaz *D.1* e *D.2* simultaneamente.

D.4 - A origem $x = 0$ é dita *eventualmente exponencialmente assintoticamente estável* se existem constantes $L > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$||x(t,t_o,x_o)|| < L||x_o|| \; e^{-\alpha(t-t_o)} \quad t \geq t_o,$

com $0 < r < ||x_o|| < \rho$ e $t_o \geq \theta(r)$ onde $\theta(r)$ é uma função decrescente de r no intervalo $(0,\rho)$.

Neste parágrafo, bem como no parágrafo precedente; D_i e E_i; $i = 1,2,3,4$ se referem às definições e exemplos dos diferentes tipos de estabilidade eventual para o sistema de equações diferenciais ordinárias (I).

1.3 - EXEMPLOS

No desenvolver deste parágrafo, faremos referência al

gumas vezes, ao espaço

$$M_o = \{\psi \in C([0,\infty), \mathbb{R}^n) \mid \int_t^{t+1} ||\psi(s)||ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty\}.$$

O seguinte lema é de interesse para o que faremos adiante.

LEMA:

Se

$$M_1 = \{\psi \in C([0,\infty), R_+) \mid \int_t^{t+1} \psi(s)ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty\},$$ então:

$$\psi \in M_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} e^{-\sigma t} \int_1^t e^{\sigma s} \psi(s)ds = 0$$

para qualquer $\sigma > 0$.

Para uma demonstração consultar uma das referências (6) ou (8).

E.1 - Consideremos o sistema (I) reduzido ao caso escalar

$$\dot{x} = -ax + \psi(t) \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} || \ a > 0 \\ || \ \psi \in M_o \ (n = 1) \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Logo, a origem $x = 0$ de (II) satisfaz a definição *D.1.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, para cada escolha de $t_o \geq 0$ temos:

$$x(t,t_o,x_o) = e^{-a(t-t_o)}x_o + e^{-at} \int_{t_o}^t e^{as}\psi(s)ds \quad (1.3.1)$$

Agora como $t \geq t_o \to t - t_o \geq 0 \to -a(t-t_o) \leq 0$; decorre então que $e^{-a(t-t_o)} \leq 1$. Por conseguinte, se escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ a primeira parcela de (1.3.1) é majorada por:

$$|e^{-a(t-t_o)}x_o| = e^{-a(t-t_o)}|x_o| \leq 1.|x_o| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.3.2)$$

De acordo com o lema

$$\psi \in M_o \rightarrow \lim_{t \to \infty} e^{-at} \int_1^t e^{as} |\psi(s)|ds = 0.$$

Portanto, existe:

$$T = T(\varepsilon) \mid e^{-at} \int_1^t e^{as} |\psi(s)|ds < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } t \geq T \geq 1. \qquad (1.3.3)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ e $T = T(\varepsilon) \geq 1$ tal que $\forall t \geq t_o \geq T$ temos:

$$|x(t,t_o,x_o)| = |e^{-a(t-t_o)}x_o + e^{-at} \int_{t_o}^t e^{as} \psi(s)ds| \leq$$

$$\leq |e^{-a(t-t_o)}x_o| + e^{-at} \int_{t_o}^t e^{as} |\psi(s)|ds \underset{(1.3.3)}{\overset{(1.3.2)}{\leq}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observe que $\psi \in M_o \rightarrow |\psi| \in M_1$, então

$$\int_{t_o}^t e^{as} |\psi(s)|ds \leq \int_1^t e^{as} |\psi(s)|ds$$

para $t \geq t_o \geq T \geq 1$.

Mais adiante veremos um caso mais geral de estabilidade eventual que tem como caso particular o *E.1*. Por ora nos detemos simplesmente nas seguintes observações:

1) No caso em que $\psi \neq 0$ o exemplo dado mostra que estabilidade uniformemente eventual não requer necessariamente que a origem seja ponto de equilíbrio.

2) Em *E.1* impondo as condições $\psi \notin M_o$ e $\psi \geq 0$ já não podemos concluir *D.1* para a origem do sistema (II).

De fato:

$$\psi \notin M_o \ (n = 1) \rightarrow \exists\ \alpha > 0$$

e uma sequência $t_n \to \infty$ com $n \to \infty$ | $\int_{t_n}^{t_n+1} \psi(s)ds \geq \alpha \ \forall n$. Logo para cada escolha de $t_o \geq 0$ e $x_o \geq 0$ temos:

$$x(t,t_o,x_o) = e^{-a(t-t_o)}x_o + e^{-at}\int_{t_o}^{t} e^{as}\ \psi(s)ds \geq$$
$$\geq e^{-at}\int_{t_o}^{t} e^{as}\ \psi(s)ds$$

Portanto para todo n suficientemente grande temos:

$$x(t_n+1,t_o,x_o) \geq e^{-a(t_n+1)}\int_{t_o}^{t_n+1} e^{as}\ x(s)ds \geq e^{-a}\ \alpha.$$

Logo para $0 < \varepsilon < e^{-a}\ \alpha$ a origem $x = 0$ do sistema (II) não satisfaz D.1.

O exemplo seguinte para o caso em que $n = 1$ coincide com E.1. Neste exemplo a origem $x = 0$ satisfaz às exigências das definições D.1, D.2 e D.3. O caso $\psi(t) \neq 0$ mostra que a origem pode satisfazer tais condições sem ser um ponto de equilíbrio para o sistema.

E.2 - Consideremos o sistema

$$\dot{x} = Ax + \psi(t) \qquad \text{(III)}$$

onde $A \in M(IR,\ n\times n)$, $\psi(t) = (\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\psi_n(t)) \in IR^n$ qualquer que seja $t \in [0,\infty)$ com ψ contínua em IR_+, $\psi \in M_o$.

Vamos ainda adicionar a exigência que a matriz A do sistema dado admita somente valores característicos com parte real negativa . (1.3.4)

Nestas condições a origem $x = 0$ do sistema (II) satisfaz D.1.

De fato, a solução $x(t) = x(t,t_o,x_o)$ do sistema é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_o)}\ x_o + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)}\ \psi(s)ds. \qquad (1.3.5)$$

Agora a condição (1.3.4) garante a existência de constantes $K > 0$ e $\alpha > 0$ com $0 < \alpha < -R_e(\alpha_J)$, $J = 1,2,\ldots,n$; tal que $||e^{tA}|| \leq K\, e^{-\alpha t}$ $t \geq 0$. Portanto;

$$||e^{A(t-t_o)}|| \leq K.\ e^{-\alpha(t-t_o)} \quad t \geq t_o \tag{1.3.6}$$

Porém

$$t \geq t_o \text{ e } \alpha > 0 \rightarrow \alpha(t-t_o) \geq 0 \rightarrow -\alpha(t-t_o) \leq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-\alpha(t-t_o)} \leq 1 \quad \rightarrow \quad K\, e^{-\alpha(t-t_o)} \leq K \tag{1.3.7}$$

Portanto dado $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$; se $||x_o|| < \delta$ a norma da primeira parcela de (1.3.5) é majorada por $\frac{\varepsilon}{2}$. De fato:

$$||e^{-A(t-t_o)}x_o|| \leq ||e^{-A(t-t_o)}||\ ||x_o|| \underset{1.3.6}{\leq}$$

$$\leq K\, e^{-\alpha(t-t_o)}||x_o|| \underset{1.3.7}{\leq} K.||x_o|| \leq K.\ \delta = \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.8}$$

Entretanto a condição $\psi \in M_o$ conjuntamente com o lema antes mencionado garantem a existência de

$$T = T(\varepsilon) \geq 1 \mid e^{-\alpha t} \int_1^t e^{\alpha s}\ ||\psi(s)||ds < \frac{\varepsilon}{2K}\ \forall t \geq$$

$$\geq T \geq 1 \tag{1.3.9}$$

Desta forma a segunda parcela da expressão (1.3.5) é majorada em norma por:

$$||\int_{t_o}^t e^{A(t-s)}\psi(s)ds|| \leq \int_{t_o}^t ||\ e^{A(t-s)}\psi(s)||ds \leq \int_{t_o}^t ||e^{A(t-s)}||.$$

$$||\psi(s)||ds \underset{1.3.6}{\leq} K \int_{t_o}^t e^{-\alpha(t-s)}||\psi(s)||ds = K\, e^{-\alpha t} \int_{t_o}^t e^{\alpha s}$$

$$||\psi(s)||ds \leq K\, e^{-\alpha t} \int_1^t e^{\alpha s}||\psi(s)||ds \underset{1.3.9}{<} K.\ \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se}$$

$$t \geq t_o \geq T \geq 1. \tag{1.3.10}$$

O uso da desigualdade triangular na relação (1.3.5); levando em conta as expressões (1.3.8) e (1.3.10) fornecem di

retamente o resultado desejado.

Vale salientar que se $T_o = 1$ e δ_o é um real qualquer fixado tal que $0 < \delta_o < \delta$, o E.2 está nas condições da definição D.3.

E.3 - Este exemplo se enquadra dentro das exigências da definição D.4.

Consideremos o sistema dado por $\dot{x} = -\alpha x + b(t)$ onde $\alpha > 0$ e b é definida como segue:

$$b(t) = \begin{cases} h(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{para } t \geq T \end{cases}$$

h sendo contínua no intervalo $[0,\infty)$ satisfazendo $h(T) = 0$ com $T > 0$.

A definição D.4 fica automàticamente verificada.

De fato; se tomarmos $\theta(r) = \frac{T}{r}$ a condição $t_o \geq \theta(r)$ fornece $t_o \geq \frac{T}{r} > T$ se $\rho = 1$ pois:

$$r < ||x_o|| < \rho = 1 \rightarrow \frac{1}{r} > 1 \rightarrow \frac{T}{r} > T.$$

Desta forma a solução do sistema dado para $t_o \geq T$ é dada por $x(t) = e^{-\alpha(t-t_o)}x_o$. Logo D.4 está verificada se escolhermos $L = 1$ e $x_o = x(t_o)$ com $o < r < ||x_o|| < 1$.

Tal exemplo pode ser facilmente estendido ao $\mathbb{R}^n$ tomando-se $\dot{x} = Ax + \psi(t)$ onde $A \in M(\mathbb{R}, n\times n)$ admite autovalores com parte real negativa e $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ é uma função contínua tal que existe $T > 0$ com $\psi_i(t) = 0$ $\forall t \geq T$ e $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

A verificação deste caso contém essencialmente a mesma linha de raciocínio usada ao se estender o exemplo E.1 ao exemplo E.2.

CAPÍTULO 2

ALGUMAS PROPRIEDADES

Este capítulo traz essencialmente algumas propriedades básicas dos sistemas eventualmente estáveis.

O último teorema trata de estabilidade do tipo "eventual assintótico - uniforme" onde o sistema (I) é alterado por uma determinada perturbação, a qual nos é mencionada uma certa propriedade.

Faremos referência neste teorema a um resultado que é abordado em detalhes no apêndice destas notas.

A definição D.1 nos diz que com o passar do tempo a origem tende a "atuar" sempre mais como um estado de equilíbrio estável.

A estabilidade eventual tem um outro sentido intuitivo. Se a origem do sistema satisfaz D.1 logo o sistema tem a propriedade que: se ele operou corretamente durante um período de tempo suficientemente grande, pode-se esperar que ele continue a operar adequadamente no futuro.

Esta interpretação de estabilidade eventual nos é dada pelo:

TEOREMA 2.1:

A origem $x = 0$ satisfaz D.1 se e somente se: dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ e $T = T(\varepsilon) > 0$ tais que se $||x(t_1, t_0, x_0)|| < \delta$ para algum $t_1 \geq T$, então $||x(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_1$.

D. - Para efeito de simplificação a notação x_1 indicará o

valor $x(t_1, t_o, x_o)$. Observamos que aquilo que o teorema propõe é algo do tipo "independência do t_o fixado". No sentido que: se t_1 e x_1 são os valores que verificam a propriedade proposta pelo teorema, estes passam a ser os novos valores de t_o e x_o da definição D.1.

$\leftarrow$) Seja $x_o \in IR^n$ satisfazendo $||x_o|| < \delta$, e consideremos $x(t, t_o, x_o)$ a solução de (I) com $t_o \geq T$.

Como existe uma certa arbitrariedade na escolha de t_1 do Teorema (2.1), tomando $t_1 = t_o$ temos:

$$||x_1|| = ||x_o|| < \delta \rightarrow ||x(t, t_o, x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_1 = t_o \geq T;$$

portanto $x = 0$ satisfaz D.1.

$\rightarrow$) $x = 0$ satisfaz D.1 $\rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ e $T = T(\varepsilon)$ números positivos tais que

$$||x_o|| < \delta \rightarrow ||x(t, t_o, x_o)|| < \varepsilon \ \forall t \geq t_o \geq T \qquad (2.1.1)$$

Vamos supor em adição que para algum $t_1 \geq T$ temos $||x_1|| < \delta$. Temos desta forma dois casos a considerar:

|| a) $t_1 \geq t_o \geq T$

|| b) $t_o \geq t_1 \geq T$

|— ocorrendo (a) temos:

$$\forall t \mid t \geq t_1 \rightarrow t \geq t_o \overset{2.1.1}{\rightarrow} ||x(t, t_o, x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_1$$

|— ocorrendo (b); consideramos a solução $y(t)$ de (I) satisfazendo $y(t_1, t_1, x_1) = x_1$.

Como $||x_1|| = ||y(t_1)|| < \delta$, a definição D.1 aplicada a solução y nos dá $||y(t, t_1, x_1)|| < \varepsilon$ para $t \geq t_1 \geq T$.

Mas $y(t_1, t_1, x_1) = x_1 \rightarrow y \equiv x$ para todo

$$t \rightarrow ||x(t, t_o, x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_1 \geq T$$

e a verificação se completa.

Descrevemos agora um teorema que possue um caso similar na teoria de estabilidade segundo Liapunov; antes, porém, necessitamos de uma:

Definição: Dizemos que $V(t,x)$ *é assintoticamente não positiva* na região Ω do R^{n+1} se $V(t,x) \leq \phi(t)$ para todo $0 \leq ||x|| < \rho$, $t \in J$ e $\phi \in M_1(E.1)$.

Definindo $\dot{v}(t,x)$ na forma habitual, ou seja:

$$\dot{v}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial t} + (grad_x\ v)\ .\ f(t,x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t,x);$$

recorrendo à definição acima, pode-se verificar o próximo teorema (vide apêndice).

TEOREMA 2.2:

Seja $v(t,x)$ definida positiva em Ω satisfazendo $v(t,x) \to 0$ quando $||x|| \to 0$ uniformemente em t para $t \geq 0$. Se $\dot{v}(t,x)$ é assintoticamente não positiva, então a origem do sistema (I) satisfaz D.1.

D. - Supondo $x = 0$ não eventualmente uniformemente estável $\to \exists\ \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0,\ \forall T > 0\ \exists\ x(t)$ solução de I de modo que $||x_0|| < \delta$, mas $||x(\bar{t}, t_0, x_0)|| \geq \varepsilon$ para algum $\bar{t} \geq t_0 \geq T$.

Como $x(t)$ é contínua $\to \exists\ V = V_\alpha(\bar{t}) \subset \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tal que $\forall t \in V$ temos $||x(t)|| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. (2.2.1)

Agora como $v(t,x)$ é definida positiva $\xrightarrow{2.2.1}$ dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists\ n = n(\varepsilon) > 0$ tal que $\frac{\varepsilon}{2} \leq ||x|| < \rho$ implica $v(t,x) \geq n$. (2.2.2)

Ainda, se $v(t,x) \to 0$ quando $||x|| \to 0$ uniformemente em $t \to$ dado $\frac{n}{2} > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $||x|| < \delta \to$

$\rightarrow v(t,x) < \frac{n}{2}$. (2.2.3)

Logo, tomando $t = t_o$ a hipótese nos dá

$$||x_o|| = ||x(t_o)|| < \delta \overset{2.2.3}{\rightarrow} v_o = v(t_o,x_o) < \frac{n}{2} \qquad (2.2.4)$$

Portanto, integrando v de t_o a $\bar{t}$ obtemos:

$$v(\bar{t},\ x(\bar{t},t_o,x_o)) = v_o + \int_{t_o}^{\bar{t}} \dot{v}(s,\ x(s))ds \rightarrow n \leq v_o +$$

$$+ \int_{t_o}^{\bar{t}} \dot{v}(s,\ x(s))ds \overset{2.2.4}{\rightarrow} \int_{t_o}^{\bar{t}} \dot{v}(s,\ x(s))ds > \frac{n}{2} > 0 \qquad (2.2.5)$$

Por hipótese, $\dot{v}(t,x)$ é assintoticamente não positiva $\rightarrow \dot{v}(t,x) \leq \phi(t) \rightarrow \int_t^{t+\sigma} \dot{v}(s,\ x(s))ds \leq \int_t^{t+\sigma} \phi(s)ds$ com $\sigma > 0$.

Dado que $\phi \in M_1 \rightarrow \int_t^{t+\sigma} \phi(s)ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para cada $\sigma > 0 \rightarrow \int_t^{t+\sigma} \dot{v}(s,\ x(s))ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Logo, $\exists\ T_o > 0$, tal que $\forall t \geq T_o$ temos

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{v}(s,\ x(s))ds < \frac{n}{2} \qquad (2.2.6)$$

Como na negação inicial temos $\forall T$, fazendo $T = T_o$, as expressões (2.2.5) e (2.2.6) nos fornecem uma contradição; e a prova se completa.

Aquilo que pretendemos agora é obter um análogo do Teorema (2.1) para o caso de estabilidade eventual assintótico - uniforme da origem.

Visando este objetivo a definição D.3 pode ser reformulada do seguinte modo:

D'.3 - A origem $x = 0$ é *dita eventualmente uniformemente assintoticamente estável* se:

i) satisfaz D.1;

ii) existe um $r > 0$ e um T_o tal que $||x_o|| < r$ e

$t_o \geq T_o$ implicam $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$.

A condição (ii) estabelece que, se depois de um tempo suficientemente longo, o sistema (I) se mantém perto da origem, então ele tenderá a origem com t tendendo ao infinito. Nesta linha de idéias se encaixa o:

TEOREMA 2.3:

A condição (ii) da definição D'.3 é equivalente a: Existe $r > 0$ e T_o tal que $||x(t_1,t_o,x_o)|| < r$ para algum $t_1 > T_o$ então $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$.

D. - $\to$) Por hipótese, existe r e T_o tal que $||x_o|| < r$ e $t_o \geq T_o$ implicam $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$. (2.3.1)

Em adição consideremos a solução $y(t,t_1,y_1)$ do sistema (I) tal que $y_1 = x(t_1,t_o,x_o) = x_1$ com $t_1 \geq T_o$ nas condições da hipótese. Logo: $||y_1|| = ||x_1|| < r$ com $t_1 \geq T_o$. Desta forma a condição (2.3.1) aplicada à solução $y(t,t_1,y_1)$ nos dá $y(t,t_1,y_1) \to 0$ quando $t \to \infty$. Dado que para $t = t_1$ temos $y_1 = y(t_1,t_1,y_1) = x_1 = x(t_1,t_o,x_o) \to y \equiv x \to x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$.

$\leftarrow$) Sejam r e T_o os elementos da hipótese. Assim se para algum $t_1 \geq T_o$ vale $||x_1|| = ||x(t_1,t_o,x_o)|| < r$, então $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$. (2.3.2)

Tomemos x_o um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $||x_o|| < r$ e consideremos a solução $x(t,t_o,x_o)$ com $t_o \geq T_o$.

Pondo $t_1 = t_o$, a condição (2.3.2) é claramente satisfeita. Decorre que $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$ e completamos a prova.

O próximo teorema possue um correspondente para o ca

so de Estabilidade Eventual Uniforme dado pelo Teorema 2.2.

TEOREMA 2.4:

Seja $v(t,x)$ satisfazendo as condições:

a) $v(t,x)$ é definida positiva em Ω;

b) $v(t,x) \to 0$ quando $||x|| \to 0$ uniformemente em t, para $t \geq 0$;

c) $\dot{v}(t,x) \leq -c(|x|) + h(t)$ em $J \times \Omega$ com

|| |— c definida positiva em Ω

|| |— $h \in M_1$

Então a origem $x = 0$ satisfaz D.3.

D. - De $\dot{v}(t,x) \leq -c(|x|) + h(t) \to \dot{v}(t,x) \leq h(t)$ com $h \in M_1 \xrightarrow[2.2]{Teor.} x = 0$ satisfaz D.1. (2.4.1)

Agora como a função $v(t,x)$ satisfaz as condições (a) e (b) $\to$ existem funções f e g na classe K tal que

$$f(|x|) \leq v(t,x) \leq g(|x|).$$

Como f e $g \in K$, então existem ρ_1 e ρ_2 satisfazendo $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$ tal que $g(\rho_1) < f(\rho_2)$. (2.4.2)

Desta forma, afirmamos que existe $T_o = T_o(\rho_2)$ tal que $||x_o|| < \rho_1 \to ||x(t)|| < \rho_2 \quad \forall t \geq t_o \geq T_o$.

De fato; caso contrário, para qualquer T_o, $\exists\ t_1, t_2$ com $T_o \leq t_o < t_1 < t_2$ com $||x_1|| = \rho_1$, $||x_2|| = \rho_2$ e $\rho_1 < ||x(t)|| < \rho_2$ para $t \in (t_1, t_2)$.

Aqui x_1 e x_2 indicam respectivamente os valores $x(t_1, t_o, x_o)$ e $x(t_2, t_o, x_o)$.

Logo:

$$v(t_1,x_1) \leq g(|x_1|) = g(\rho_1) \underset{2.4.2}{<} f(\rho_2) = f(|x_2|) \leq v(t_2,x_2)$$

e portanto:

$$0 < v(t_2,x_2) - v(t_1,x_1) \leq - \int_{t_1}^{t_2} c(|x(s)|)ds + \int_{t_1}^{t_2} h(s)ds.$$

Mas:

$$\rho_1 \leq ||x|| \leq \rho_2 \rightarrow c(|x|) \geq c(\rho_1) = \sigma > 0 \rightarrow - c(|x|) \leq -\sigma < 0$$

e assim:

$$0 < v(t_2,x_2) - v(t_1,x_1) \leq - \sigma(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} h(s)ds \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} h(s)ds >$$

$$> \sigma(t_2-t_1) > 0, \ \forall T_o,$$

com $t_2 > t_1 > t_o \geq T_o$ o que é um absurdo, pois $h \in M_1$.

Resta provar que $||x_o|| < \rho_1$ com $t_o \geq T_o = T_o(\rho_2)$, então $x(t,t_o,x_o) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$.

De fato; de (2.4.1) $x = 0$ satisfaz D.1; dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta = \delta(\varepsilon)$ e $T_o = T_o(\varepsilon)$ tal que

$$||x_o|| < \delta \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$$

para $t \geq t_o \geq T_o$. (2.4.3)

Sem perda de generalidades podemos assumir que $\delta < g^{-1}(f(\varepsilon))$ e vamos escolher $T_o = max\{T_o(\rho_2), T_o(\varepsilon)\}$. Definimos agora $T = T(\varepsilon) = \dfrac{g(\rho_1)}{c(\delta)} + \dfrac{\varepsilon}{2c(\delta)}$.

Desta forma, temos $||x_o|| < \rho_1 \rightarrow x(t,t_o,x_o) \rightarrow 0$ com $t_o \geq T_o$. De fato: afirmamos de início que existe $t_1 \in [t_o, t_o + T]$ tal que $||x(t_1,t_o,x_o)|| < \delta$.

Caso contrário teríamos $||x(t,t_o,x_o|| \geq \delta$ para cada $t \in [t_o, t_o + T]$.

Então:

$$v(t,x) - v(t_o,x_o) = \int_{t_o}^{t} \dot{v}(s, x(s))ds \leq - \int_{t_o}^{t} c(|x|)ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} h(s)ds \leq - c(\delta(\varepsilon)) (t-t_o) + \int_{t_o}^{t} h(s)ds \rightarrow v(t,x) \leq$$

$$\leq v_o - c(\delta) (t-t_o) + \int_{t_o}^{t} h(s)ds.$$

Pondo $t = t_o + T$ vem:

$$0 \leq v(t,x) \leq v_o - c(\delta).T + \int_{t_o}^{t_o+T} h(s)ds \leq g(\rho_1) -$$

$$- (g(\rho_1) + \frac{\varepsilon}{2}) + \int_{t_o}^{t_o+T} h(s)ds \rightarrow \int_{t_o}^{t_o+T} h(s)ds \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

o que contradiz novamente o fato de $h \in M_1$.

Desta forma, existe $t_1 \in [t_o, t_o+T]$ tal que

$$||x(t_1,t_o,x_o)|| < \delta \overset{2.4.3}{\rightarrow} ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$$

para $t \geq t_1$, a *forciori* para $t \geq t_o + T \rightarrow x = 0$ satisfaz D.2. (2.4.4)

(2.4.1) e (2.4.4) asseguram que $x = 0$ satisfaz a definição D.3.

Como consequência de um teorema recíproco de existência de funcionais de Liapunov e do teorema (2.4) decorre o:

TEOREMA 2.5:

Assumimos que o sistema $\dot{x} = f(t,x)$ (I) tem a origem como um ponto uniformemente assintoticamente estável; com $f(t,x)$ localmente Lipschtz em x, uniformemente com relação a t. Logo o sistema $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$ (II) é Eventualmente assintoticamente uniformemente estável se $|g(t,x)| \leq h(t)$ para $||x|| < r_o$, $r_o > 0$ e $h(t) \in M_o$.

D. Como foi referido nas preliminares deste capítulo usaremos nesta verificação um lema que está transcrito no apêndice destas notas.

De acordo com o lema [ap.], o sistema II admite um funcional v satisfazendo $\dot{v}_{II}(t,x) \leq - c(|x|)\ v(t,x) + K|g(t,x)|$ para $t \geq 0$ e $||x|| \leq r_1$.

Agora, dado que $x = 0$ (origem do sistema I) satisfaz

L.2, o item (b) do Teorema [ap.] assegura:

$$- c(|x|)\ v(t,x) \leq - c(|x|)\ |x| \text{ para } t \in J \text{ e } ||x|| < r_1 \quad (2.5.1)$$

Desta forma:

$$\dot{v}_{II}(t,x) \leq - c(|x|)\ |x| + K|g(t,x)|. \quad (2.5.2)$$

Agora, para $||x|| < r_o$ por hipótese é válida a majoração $|g(t,x)| \leq h(t)$ com $h \in M_o$. (2.5.3)

Escolhendo $r = min\{r_o, r_1\}$ temos que:

$$||x|| < r \underset{2.5.3}{\overset{2.5.1}{\rightarrow}} \dot{v}(t,x) \leq - c(|x|)\ |x| + Kh(t)$$

com $h \in M_o$.

Observamos com isto que:

$$\left.\begin{array}{l} |\!\!- \ h \in M_o \rightarrow h_1 = Kh \in M_o \\ |\!\!- \ u(x) = c(|x|)\ |x| \text{ é definida positiva} \end{array}\right\} \rightarrow \dot{v}_{II}(t,x) \leq$$

$\leq u(x) + h_1(t)$ e portanto a condição (c) do Teorema (2.4) está satisfeita.

As demais exigências (a) e (b) do Teorema (2.4) estão contidas no item (a) do teorema do apêndice.

Logo, estamos nas condições do Teorema (2.4) $\rightarrow$ $x = 0$ do sistema II satisfaz D.3 e a prova se completa.

Este teorema estabelece que se o sistema perturbado se aproxima de forma suficientemente rápida do sistema não perturbado, o qual "a priori" sabe-se que é uniformemente assintoticamente estável, então ele é eventualmente uniformemente assintoticamente estável.

CAPÍTULO 3

RELAÇÕES COM A TEORIA DE LIAPUNOFF

A idéia central deste capítulo é motivada da seguinte pergunta: "sob quais condições" o requisito "ser eventualmente estável" recai num caso clássico de estabilidade segundo Liapunoff.

Tal problema é abordado com os teoremas (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) e (3.2.2) deste capítulo.

Como deveremos estabelecer comparações com a teoria de Liapunoff se faz mister transcrever abaixo ao menos aquelas definições necessárias ao nosso propósito.

É suposto em tais definições que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema I, isto é, $f(t,0) = 0$ para cada $t \in J = [0,\infty)$.

L.1 - A solução $x = 0$ de I é dita *uniformemente estável*, se para cada $\varepsilon > 0$ e $t_0 \in J$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $||x_0|| < \delta$ então $||x(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.

L.2 - A solução $x = 0$ de I é dita *uniformemente assintoticamente estável* se satisfaz *L.1*, e existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, $t_0 \in J$ e $||x_0|| < \delta_0$ existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que se $t \geq t_0 + T$; então $||x(t,t_0,x_0)|| < \varepsilon$.

3.1 - ESTABILIDADE EVENTUAL UNIFORME

TEOREMA 3.1.1:

Se a origem é ponto de equilíbrio do sistema I então estabilidade eventual uniforme da origem é equivalente a estabilidade uniforme.

Demonstração:

Queremos verificar que se $f(t,0) = 0$; então D.1 é equivalente a L.1.

a) $L.1 \rightarrow D.1$

$x = 0$ satisfaz L.1 $\rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ | $||x(t_o)|| < \delta \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_o$

Tomemos $T = T(\varepsilon) = T_o \geq 0$ qualquer fixado. Logo, teremos: dado $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $T = T(\varepsilon)$ tal que se $||x_o|| < \delta \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_o \geq T$.

Desta forma $x = 0$ satisfaz D.1.

b) $D.1 \rightarrow L.1$

$x = 0$ satisfaz D.1 $\rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta < \varepsilon$ e $T = T(\varepsilon) > 0$ | $||x_o|| < \delta$ então $||x(t, t_o, x_o)|| < \varepsilon$ $\forall t \geq t_o \geq T$. (1)

Agora, como estamos supondo válida para o sistema I as condições de dependência contínua de cada solução, em relação aos dados iniciais, então:

Dado $\delta > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\delta) > 0$ tal que $||x_o|| < \delta_1 \rightarrow ||x(t)|| < \delta \quad \forall t$ satisfazendo $0 \leq t_o \leq t \leq T$. Como $\delta = \delta(\varepsilon)$ então $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que se

$||x_o|| < \delta_1 \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon \quad \forall t \mid 0 \leq t_o \leq t \leq T.$ (2)

Desta forma dois casos podem ocorrer:

$\vdash t \geq t_o \geq T$ então $||x_o|| < \delta$ vale(1) $\rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$

$\vdash t \geq t_o \geq 0$ com $t_o \leq T$ se $||x(t_o)|| < \delta_1 < \delta$

e em particular $||x(T)|| < \delta_1$, então vale(2) $\rightarrow ||x(t,t_o,x_o|| <$
$< \delta < \varepsilon$.

Então para $t \geq t_o \geq 0$, $||x_o|| < \delta_1 \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)||$
$< \varepsilon$.

Assim sendo $x = 0$ satisfaz L.1 e a prova está completa.

É bom ressaltar que se a origem não é ponto de equilíbrio do sistema; então D.1 $\not\rightarrow$ L.1 como mostra o seguinte exemplo.

E.4 - Consideremos o sistema $\dot{x} = \phi(t)$ com $\phi(t) > 0 \; t \in J$ e $\int_0^\infty \phi(s)ds < \infty$. A solução deste sistema satisfaz D.1 mas não satisfaz L.1.

De fato: a solução do sistema é dada por:

$$x(t) = -\int_t^\infty \phi(s)ds + c \quad (1).$$

Impondo a condição $x(t_o,t_o,x_o) = x_o$ vem $\rightarrow$ $x_o = -$
$-\int_{t_o}^\infty \phi(s)ds + c \rightarrow c = x_o + \int_{t_o}^\infty \phi(s)ds$ (2).

$$(2) \text{ em } (1) \rightarrow x(t,t_o,x_o) = x_o + \int_{t_o}^t \phi(s)ds \quad t \geq t_o \quad (3)$$

Sendo que ϕ possue integral convergente em $J \rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon) > 0 \mid \int_t^\infty \phi(s)ds < \frac{\varepsilon}{2}$ para $t \geq T$. (4)

Portanto; dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que se

$$||x_o|| < \delta \underset{(3)}{\rightarrow} |x(t,t_o,x_o)| \leq |x_o| + |\int_{t_o}^{t} \phi(s)ds| < \delta +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \phi(s)ds = \frac{\varepsilon}{2} + \int_{t_o}^{t} \phi(s)ds < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{T}^{\infty} \phi(s)ds \underset{(4)}{<}$$

$$\underset{(4)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{se} \quad t \geq t_o \geq T.$$

Desta forma a solução dada pela expressão (3) verifica a definição D.1.

A não validade da definição L.1 está ligada ao simples fato que sendo $\phi(t) > 0$ para $t \in J$, a origem $x = 0$ não será um ponto de equilíbrio do sistema dado.

TEOREMA 3.1.2:

Se o sistema I for autônomo, então estabilidade eventual uniforme da origem é equivalente a estabilidade uniforme.

Demonstração:

Vamos verificar que se $f(t,x) = f(x)$ e a origem é eventualmente uniformemente estável então necessariamente $f(0) = 0$.

De fato se $f(0) \neq 0 \rightarrow ||(f_1(0), f_2(0), \ldots, f_n(0))|| \geq$ $\geq a > 0 \rightarrow \exists\, i \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $\beta > 0 \mid |f_i(0)| > \beta > 0$.

A continuidade da f garante a existência de um real $r > 0$ $\forall x \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ temos $|f_i(x)| > \frac{\beta}{2} > 0$. (1)

Sendo que a origem $x = 0$ satisfaz D.1 $\rightarrow$ Dado $r > 0$, $\exists\, \delta = \delta(r) > 0$ e $T = T(r) > 0$ tal que $||x_o|| < \delta \rightarrow ||x(t,t_o, x_o)|| < r$ para $t \geq t_o \geq T$. (2)

Se colocarmos a solução de I na forma vetorial, e considerarmos a componente de índice i teremos:

$$x_i(t) = x_i^o + \int_{t_o}^{t} f_i(x_1(s), \ldots, x_n(s))ds. \quad (3)$$

A relação (1) nos leva a considerar dois casos:

$|\!-\!\!-\!\!-\!

A fim de assegurar a existência do T_o da definição D.2 tomamos $T_o = 0 \rightarrow x = 0$ satisfaz D.2. (2)

(1) e (2) $\rightarrow x = 0$ satisfaz D.3.

b) D.3 → L.2

A primeira parte desta verificação é inteiramente análoga àquela que realizamos na implicação anterior.

Sendo que $x = 0$ verifica D.3 $\rightarrow x = 0$ verifica D.2 $\rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existem números positivos δ_o, T_o, $T = T(\varepsilon)$ tais que: se $||x_o|| \leq \delta_o \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon \quad t \geq t_o + T$ com $t_o \geq T_o$.

Logo; dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_o$ e $T = T(\varepsilon)$ tais que: se $||x_o|| < \delta_o \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + T \rightarrow x = 0$ satisfaz a definição L.2.

TEOREMA 3.2.2:

Se o sistema I for autônomo então estabilidade eventual assintótica uniforme da origem é equivalente a estabilidade assintótica uniforme.

D. - A dificuldade essencial concentrada aqui seria a de verificar que se $f(t,x) = f(x)$, e $x = 0$ satisfaz D.3 então $f(0) = 0$.

Este tipo de dificuldade já foi contornado no Teorema 3.1.2. Os demais detalhes decorrem de um uso natural de implicações lançando-se mão dos teoremas 3.1.2, 3.2.1 e 3.2.2.

CAPÍTULO 4

O que tencionamos com este parágrafo é: dentro de determinadas condições às quais o sistema é submetido, obter regiões nas quais poderemos assegurar estabilidade do tipo eventual.

Os dois primeiros resultados seguem a linha proposta pelo teorema 2.5 do capítulo 2. A aplicação a ser proposta está fundamentada essencialmente no último teorema deste capítulo.

TEOREMA 4.1:

Seja M uma parte compacta do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Seja $N \subset M$ um subconjunto com a propriedade: As soluções da equação que partem de N para um tempo $t_o \geq T$ permanecem logo após em M.

Em adição vamos supor a existência de funções $V(t,x)$, $v(x)$ e $w(x)$, a valores reais satisfazendo:

|| (a) $V(t,x) \to v(x)$ uniformemente em x para $t \to \infty$; $x \in M$.

|| (b) $\dot{V}(t,x) \to -w(x)$ uniformemente em x para $t \to \infty$; $x \in M$.

|| (c) v e w são definidas positivas.

Então; existe $T_o > 0$ tal que $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$ para cada $x_o \in N$, $t_o \geq T_o$.

$\mathcal{D}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $m = \inf\limits_{||x|| = \varepsilon} v(x)$; logo $m > 0$.

|— De (a) dado $m = m(\varepsilon) > 0$, $\exists\ T_1 = T_1(\varepsilon)$ tal que $t \geq T_1 \rightarrow |V(t,x) - v(x)| < \frac{m}{2}$ com $||x|| = \varepsilon$. Assim $V(t,x) > \frac{m}{2}$ na superfície da esfera $S_\varepsilon(0)$, $t \geq T_1$. (4.1.1)

|— De (c) dado que $v(0) = 0$ $(v \in K)$ e v é contínua $\rightarrow \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ e $T_2 = T_2(\varepsilon)$ | $t \geq T_2$ e $||x|| \leq \delta \rightarrow V(t, x) < \frac{m}{2}$. (4.1.2)

De fato: $v(0) = 0$ e v contínua $\rightarrow$ dado $m(\varepsilon) > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ | $v(x) \leq \frac{m(\varepsilon)}{4}$ se $||x|| \leq \delta$. (4.1.3)

Agora $V \rightarrow v$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t,0) = v(0) = 0 \rightarrow$ dado $m(\varepsilon) > 0$, $\exists\ T_2 = T_2(\varepsilon) > 0$ tal que $t \geq T_2 \rightarrow |V(t,x) - v(x)| < \frac{m(\varepsilon)}{4} \rightarrow V(t,x) < v(x) + \frac{m(\varepsilon)}{4} \underset{4.1.3}{<} \frac{m(\varepsilon)}{4} + \frac{m(\varepsilon)}{4} = \frac{m(\varepsilon)}{2}$ para $t \geq T_2$ e $||x|| \leq \delta$.

|— De (c) dado que $w \in K$ considero

$$\beta = \inf_{\delta \leq ||x|| \leq \varepsilon} w(x) = \beta(\varepsilon) > 0.$$

Desta forma tendo em consideração o item (b) $\rightarrow \exists\ T_3 = T_3(\varepsilon)$ tal que $\dot{V}(t,x) < -\frac{\beta}{2}$. (4.1.4)

De fato: $\dot{V} \rightarrow -w \rightarrow$ dado $\frac{\beta}{2} > 0$ $\exists\ T_3 = T_3(\varepsilon) > 0$ | $|\dot{V}(t,x) + w(x)| < \frac{\beta}{2}$ se $t \geq T_3$.

Logo $\dot{V}(t,x) < -w(x) + \frac{\beta}{2} \leq -\beta + \frac{\beta}{2} = -\frac{\beta}{2}$ para $t \geq T_3$ e $\delta \leq ||x|| \leq \varepsilon$.

Escolhemos

$$\overline{T} = \max_{i \in \{1,2,3\}} T_i = \overline{T}(\varepsilon)$$

e vamos supor que para a solução $x(t,t_0,x_0)$ de I tenhamos para algum $t_1 \geq \overline{T}$, $||x(t_1,t_0,x_0)|| < \delta$ e que existam t_2, t_3 satisfa

x_1

zendo $\overline{T} \leq t_1 < t_2 < t_3$ com $||x_2|| = ||x(t_2,t_o,x_o)|| = \delta; ||x_3|| = ||x(t_3,t_o,x_o)|| = \varepsilon$ e $\delta \leq ||x(t)|| \leq \varepsilon$ para $t \in [t_2,t_3]$.

Desta forma de (4.1.1) e (4.1.2) vem $V(t_2,x_2) < \frac{m}{2} < V(t_3,x_3) \rightarrow V(t_3,x_3) - V(t_2,x_2) > 0 \rightarrow \exists\ s \in [t_2,t_3]$ tal que $\dot{V}(s, x(s)) > 0$. (4.1.5)

Mas na região anular $S_\delta^\varepsilon = \{x \in I\!R^n \mid \delta \leq ||x|| \leq \varepsilon\}$ o item (4.1.4) garante que $\dot{V}(t, x(t)) < 0 \quad \forall t \geq \overline{T} \geq T_3$. (4.1.6)

Os itens (4.1.5) e (4.1.6) são claramente contraditórios. Assim, se existe $t_1 \geq \overline{T}$ tal que $||x_1|| = ||x(t_1,t_o,x_o)|| < \delta \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_1$. Por conseguinte a solução $x(t,t_o,x_o)$ de I satisfaz D.1 pelo Teorema 2.1.

Resta provar o caráter assintótico, ou seja, existe $T_o > 0$ tal que $x(t,t_o,x_o) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para cada $x_o \in N$, $t_o \geq T_o$. (4.1.7)

Por hipótese, existe T tal que as soluções que partem de N para um tempo $t_o \geq T$ permanecem logo após em M.

Afirmamos que para todo $T_o \geq T$ é satisfeita a exigência dada por (4.1.7).

De fato: vamos supor $t_o \geq T_o$ e que $\nexists\ t \geq t_o \geq T_o$ tal que $x(t,t_o,x_o) \in S_\delta(0)$.

Desta forma, $\forall t \geq t_o$ temos $x(t,t_o,x_o) \notin S_\delta(0) \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| \geq \delta$.

Um raciocínio inteiramente análogo àquele efetuado na primeira parte desta demonstração nos conduz a um absurdo.

Logo, $\exists\ t \geq t_o \geq T_o$ tal que $x(t,t_o,x_o) \in S_\delta(0) \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \delta \overset{D.1}{\rightarrow} ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$, $t \geq t_o \geq T_o \rightarrow ||x(t,t_o,x_o)|| < \varepsilon$ para $t \geq t_o + \overline{T}$ e portanto a prova se completa.

TEOREMA 4.2:

Assumimos que M limitado no $\mathbb{R}^n$ é dado por $v(x) \leq L$ tal que são válidas as condições (a), (b) e (c) do Teorema 4.1. Vamos supor que para cada $\delta > 0$ M_δ é dado por $v(x) \leq L - \delta$. Logo para cada $\delta > 0$, existe T_δ tal que $x_o \in M_\delta$ e $t_o \geq T_\delta$ então $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$.

D. - De fato; dado que $v(0) = 0$, v é contínua monótona crescente, então $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x) \leq L\} = v^{-1}([0,L])$.

Portanto M é fechado, e sendo que por hipótese M é limitado $\to$ M é compacto. (4.2.1)

Ainda, para cada $\delta > 0$ $\to$ $M_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x) \leq L - \delta\} = v^{-1}([0, L - \delta]) \subset v^{-1}([0, L]) = M \to M_\delta \subset M$. (4.2.2)

As condições (4.2.1) e (4.2.2) e mais a hipótese asseguram que para cada $\delta > 0$ o conjunto M_δ se encontra nas condições do Teorema 4.1 $\to$ $\exists\, T_\delta$ tal que $x_o \in M_\delta$ e $t_o \geq T_\delta$ então $x(t,t_o,x_o) \to 0$ quando $t \to \infty$.

TEOREMA 4.3:

Para o sistema:

$$\text{II} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y) & x \in \mathbb{R}^p \\ \dot{y} = g(t,x,y) & y \in \mathbb{R}^q, \end{cases}$$

existe uma função escalar $v(x,y)$ com as seguintes propriedades:

$a)$ $v(x,y)$ é definida positiva e tem derivadas parciais contínuas para todo x e y.

$b)$ $v(x,y) \to \infty$ quando $||x||^2 + ||y||^2 \to \infty$.

c) $\dot{v}(x,y) \leq -w(x) + h(t)\, q(x,y)$ onde $w(x)$ é definida positiva; $q(x,y)$ é contínua no par (x,y) e $h \in M_o$.

d) $f(t,x,y)$ é limitada em $J \times K$, onde K: compacto do $\mathbb{R}^n$, $n = p + q$.

Então a origem $x = 0$, $y = 0$ do sistema satisfaz D.1 e correspondente a cada $r > 0$, existe T_o tal que se $||x_o||^2 + ||y_o||^2 < r^2$ para $t_o \geq T_o$ implica que $y(t)$ é limitada para $t \geq t_o$ e $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Observação:

É bem conhecido que se $B_{\delta_i}(0) \subset \mathbb{R}^p$ é um sistema fundamental de vizinhanças do zero no $\mathbb{R}^p$, e $B_{\varepsilon_i}(0) \subset \mathbb{R}^q$ é o análogo correspondente no $\mathbb{R}^q$ então $B_{\delta_i}(0) \times B_{\varepsilon_i}(0) \subset \mathbb{R}^n$ onde $n = p + q$, é um sistema fundamental de vizinhanças do zero no $\mathbb{R}^n$.

Assim no transcorrer desta verificação, se $z(t) = (x(t), y(t))$ é qualquer solução de II dizer que $z(t) \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ é equivalente a dizer que $||z(t)|| < R$, onde $||\ \ ||$ é qualquer Norma conveniente no $\mathbb{R}^n$.

Dado que $||x|| \leq ||z|| \to x(t) \in B_R(0)$ onde $B_R(0) \subset \mathbb{R}^p$. A demonstração do teorema será feita por etapas.

1ª) (0,0) satisfaz D.1.

Se $z = (x,y)$ é um vetor no $\mathbb{R}^n$ então $\dot{z} = (\dot{x},\dot{y})$ onde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são regidos pelas equações do sistema II.

O nosso trabalho agora será concentrado em colocar a origem $z = 0$ de II nas condições do Teorema 2.2.

Observamos que da condição (c) temos:

$$\dot{v} \leq -w(x) + h(t)\, q(x,y) = -w(x) + h(t)\, q(z) \leq h(t)\, q(z) \leq$$
$$\leq |h(t)|\ |q(z)|. \qquad (4.3.1)$$

Agora para os fins que nos propomos, $q(z)$ pode ser suposta limitada, ou seja $|q(z)| \leq L$ para algum $L > 0$, pois q é contínua num compacto conveniente.

De (4.3.1) concluímos então que:

$$\dot{v} \leq |h(t)| \; |q(z)| \leq |h(t)| \; L = \lambda(t).$$

É fácil constatar que se $h \in M_o \rightarrow \lambda = |h| \; L \in M_o$ com L constante. (4.3.2)

Ainda, dado que por (a) $v(z)$ é definida positiva, então $v(0) = 0$ e v é positiva fora da origem. Logo:

$\vdash$ $v(0) = 0 \rightarrow v(z) \leq a(||z||)$ com $a \in K$, isto é, v admite extremo superior infinitésimo. (4.3.3) [ap. 3].

$\vdash$ v definida positiva $\rightarrow v(z) \geq b(||z||)$ com $b \in$ $\in K$. (4.3.4)

As condições (4.3.2), (4.3.3) e (4.3.4) colocam o funcional $v(z)$ nas condições do T.2, onde o papel de $\phi(t)$ no teorema é aqui representado por $\lambda(t)$.

Decorre então que $z = 0$ satisfaz a definição D.1.

2ª) Limitação das Soluções de II

Afirmamos que $\forall r > 0$, $\exists$ $T_o^{(1)}$ tal que para toda solução $z(t) = (x(t), y(t))$ de II partindo de $z_o = z(t_o) \in B_r(0)$, $t_o \geq T_o^{(1)}$ é limitada para $t \geq t_o$.

De fato: negando a afirmação acima obtemos: $\forall$ T_o, $\exists$ $r > 0$, $\exists$ solução $z(t)$ de II tal que $z_o \in B_r(0)$ mas $z(t)$ não é limitada para $t \geq t_o \geq T_o$.

Tomemos

$$L_1 = \max_{||x||^2 + ||y||^2 = r^2} v(x,y).$$

Dado que $v(x,y) \to \infty$ quando $||x||^2 + ||y||^2 \to \infty$, então $\exists\ R > 0$ suficientemente grande tal que

$$L_2 = L_2(R) = \min_{||x||^2 + ||y||^2 = R^2} v(x,y)$$

satisfaz $\beta(R) = L_2 - L_1 > 0$.

Em adição vamos supor t_1 e t_2 tempos satisfazendo $T_o \leq t_o < t_1 < t_2$ com $||x(t_1)||^2 + ||y(t_1)||^2 = r_2$, $||x(t_2)||^2 + ||y(t_2)||^2 = R^2$ e $z(t) \in S_r^R$ para $t \in [t_1, t_2]$.

Daqui para frente a mesma linha de idéias realizada na 1ª parte da verificação do teorema 4.1 nos conduz a um absurdo.

Logo $\forall r > 0$, $\exists\ T_o^{(1)}$ tal que para toda solução $z(t)$ de II satisfazendo $z_o \in B_r(0)$, $t_o \geq T_o^{(1)}$, $z(t)$ é limitada para $t \geq t_o$.

Em particular, dado que $||y(t)|| \leq ||z(t)||$ então para cada $r > 0$ existe $T_o^{(1)}$ tal que $z_o \in B_r(0)$ então $y(t)$ é limitada para $t \geq t_o$.

É evidente que o $T_o^{(1)}$ assim obtido é função de cada $r > 0$ dado, isto é, $T_o^{(1)} = T_o^{(1)}(r)$.

Como cada solução partindo da bola de raio $r > 0$ do sistema II é limitada, resta somente verificar que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, ou seja: $\forall r > 0$, $\exists\ T_o \mid t_o \geq T_o$ e $||z_o||^2 < r^2 \to$ $\to \exists\ R > 0 \mid ||z(t)||^2 \leq R^2$ e $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Inicialmente observamos que:

$$(a)\ h \in M_o \to e^{-t} \int_o^t e^s\ |h(s)|\ ds \to 0$$

quando $t \to \infty$. (4.3.5)

(b) $||z(t)||^2 \leq R^2 \rightarrow \exists\ L > 0$ tal que $|q(x,y)| \leq L$ pois q é contínua no par (x,y). (4.3.6)

Definimos U uma nova função de Liapunoff dada por:

$$U = U(t,x,y) = e^{-\int_0^t e^{(s-t)} |h(s)|ds} \{v(x,y) + L\}$$

onde $v(x,y)$ é o funcional associado ao sistema II.

$U(t,x,y)$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$|\!-\ U(t,x,y) \geq 0 \tag{4.3.7}$$

$$|\!-\ \dot{U}(t) \leq -\frac{1}{e} w(x) \tag{4.3.8}$$

A primeira delas é óbvia. Verifiquemos então a segunda.

Temos:

$$\dot{U}(t) = -e^{-\int_0^t e^{(s-t)} |h|ds} |h(t)|\{v + L\} + \dot{v}\, e^{-\int_0^t e^{(s-t)}|h|ds}$$

$$= e^{-\int_0^t e^{(s-t)}|h|ds} \{-|h(t)|\ (v + L) + \dot{v}\} \leq$$

$$e^{-\int_0^t e^{(s-t)}|h|ds} \{-|h|v - |h|\ L - w(x) + h\ q(x,y)\}$$

$$\underset{(*)}{\leq} -e^{-\int_0^t e^{(s-t)}|h|ds} \cdot w(x). \tag{4.3.9}$$

Em (*) foi usado que $|h|v \geq 0$ e ainda que $hq - |h|L \leq 0$; observando que $h = h(t)$ e $v = v(x,y)$.

Agora, de (4.3.5) vem: Dado $\varepsilon = 1$ existe $T_0^{(2)} = T_0^{(2)}(1)$ tal que se $t \geq T_0^{(2)}$ então $\int_0^t e^{(s-t)}|h|ds < 1$ (4.3.10)

Ponhamos $f(t) = \int_0^t e^{(s-t)}|h(s)|ds$.

Logo, de (4.3.10) $t \geq T_0^{(2)} \rightarrow f(t) < 1 \rightarrow e^{f(t)} < e \rightarrow$ $\rightarrow e^{-f(t)} > e^{-1} \rightarrow -e^{-f(t)} < -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

Esta última desigualdade combinada com (4.3.9) nos leva a $\dot{U}(t) \leq -\frac{1}{e} w(x)$ para $t \geq T_o^{(2)}$.

Escolhemos $T_o = max\{T_o^{(1)}, T_o^{(2)}\}$ e afirmamos que: se $z_o \in B_r(0)$ $t_o \geq T_o$ então:

$\vdash$ $y(t)$ é limitada para $t \geq t_o$

$\vdash$ $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

A primeira destas afirmações é imediata pois é válida para $t \geq t_o \geq T_o^{(1)}$; portanto fica verificada para $T_o \geq T_o^{(1)}$. Passemos à segunda.

De fato se $x(t) \not\to 0$ quando $t \to \infty \to \exists\ \varepsilon_o$ e sequência $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que $||x(t_n)|| \geq \varepsilon_o$.

Logo:

$$||x(t) - x(t_n)|| = ||\int_{t_n}^{t} \dot{x}(s)ds|| = ||\int_{t_n}^{t} f(s,x(s),y(s)ds|| \leq$$

$$\leq M(t - t_n) \qquad (4.3.11)$$

Usamos acima a hipótese (d) do Teorema, ou seja, $f(t,x,y)$ é limitada em $J \times K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ K: compacto.

Da relação $|| \ ||x|| - ||y|| \ || \leq ||x - y||$ e da desigualdade (4.3.11) concluímos que

$$||x(t)|| \geq -M(t - t_n) + ||x(t_n)|| \geq -M(t - t_n) + \varepsilon_o \qquad (4.3.12)$$

Tomemos $I_n = [t_n, t_n + \frac{\varepsilon_o}{2M}]$ e escolhemos $t_1 \geq T_o$. Se necessário passando a uma subsequência podemos supor os I_n todos disjuntos.

Assim

$$t \in I_n \to t - t_n \leq \frac{\varepsilon o}{2M} \to -(t - t_n) \geq -\frac{\varepsilon o}{2M} \to -M(t - t_n) \geq$$

$$\geq -\frac{\varepsilon_o}{2} \qquad (4.3.13)$$

Se $t \in I_n \xrightarrow[(4.3.13)]{(4.3.12)} ||x(t)|| \geq \frac{\varepsilon_o}{2}$.

Como w é definida positiva dado $\frac{\varepsilon_o}{2}$ (fixo), $\exists\ \sigma > 0$ | se $||x(t)|| \geq \frac{\varepsilon_o}{2} \rightarrow w(x) \geq \sigma > 0$.

Por conseguinte, a integração de $\dot{U}(t)$ no intervalo $[t_1, t_N]$ onde t_1 e t_N são pontos da sequência $\{t_n\}$ fornece:

$$U(t_N + \frac{\varepsilon_o}{2M}, x(t_N + \frac{\varepsilon_o}{2M}), y(t_N + \frac{\varepsilon_o}{2M})) - U(t_1, x(t_1), y(t_1))$$

$$= \int_{t_1}^{t_N + \frac{\varepsilon_o}{2M}} \dot{U}(s, x(s), y(s))ds \leq - \int_{t_1}^{t_N + \frac{\varepsilon_o}{2M}} \frac{1}{e} w(x(s))\, ds \leq$$

$$\leq - \frac{1}{e} \cdot \sigma \cdot \sum_{J=1}^{N} \int_{t_J}^{t_{J+1} + \frac{\varepsilon_o}{2M}} ds = - \frac{1}{e} \cdot \sigma \cdot \frac{N\ \varepsilon_o}{2M} .$$

Assim quando $N \rightarrow \infty$ temos $U(t) \rightarrow -\infty$ ao longo da sequência $\{t_n\}$ o que contradiz a relação (4.3.7) e portanto a prova se completa.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO

5.1 - *INTRODUÇÃO À TEORIA DO CONTROLE*

5.1.1 - *Apresentação*

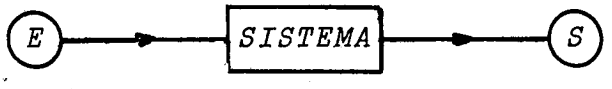
A teoria do controle é motivada no estudo de "sistemas". Intuitivamente nós podemos considerar um sistema como sendo um conjunto de componentes que se interagem, sujeito a várias "entradas" e produzindo várias "saídas".

Os tipos de sistemas com os quais estamos mais familiarizados são os sistemas mecânicos, como os relógios; sistemas mecânico-químicos, como os automóveis; sistemas biológicos, tais como o próprio corpo humano; e muitos outros. Estes simples exemplos são suficientes para mostrar a relevância do conceito de "sistemas".

5.1.2 - *Esquematização*

É frequente indicar cada intuição e exposição do conceito de um sistema em termos de um diagrama de bloco.

Uma primeira tentativa é dada pelo esboço:



(1)

Este é o caso mais simples de um diagrama. Em geral o sistema pode estar sujeito a uma mais complexa variedade de entradas e saídas.

5.1.3 - *Aperfeiçoamento do Comportamento de Sistemas*

Uma grande parte dos sistemas não possue um comporta

mento regular. De fato; é comum observar-se a existência de sistemas que não operam de forma desejável.

É o caso, por exemplo, dos sistemas econômicos, sujeitos a inflação e depressão; dos sistemas humanos sujeitos a doenças, como o câncer, moléstias do coração, etc.

Existem vários modos de melhorar o comportamento de um sistema. Podemos escolher entre a construção de um novo sistema ou a mudança de suas entradas.

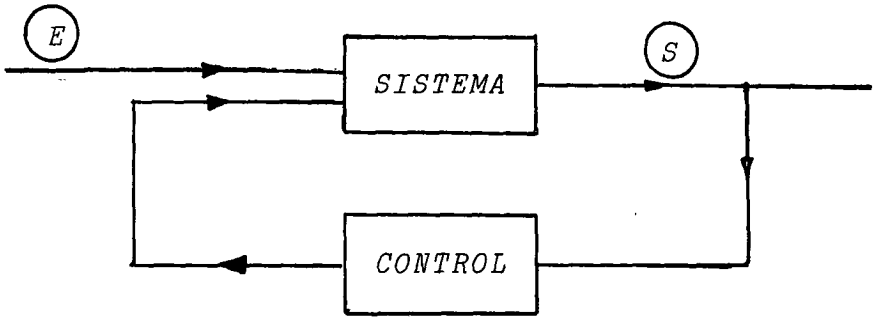
Em alguns casos, como sabemos, a solução ideal é dada por um sistema novo. Este é o caso do sistema químico-mecânico dado por um carro superado.

Em outros casos, como por exemplo quando tratamos com sistemas humanos; foge da nossa alçada uma solução semelhante à citada anteriormente.

Consequentemente nós podemos pensar em termos de um programa mais praticável de alteração do objetivo do sistema, ou então, modificando as entradas.

Um modo de realizar, isto é, observar a saída do sistema, e reformular adequadamente o esquema de acordo com o desvio da atual saída, e a saída almejada que comumente é chamada *um modelo* para o sistema.

A idéia básica do "feedback" controlado é esquematizada abaixo.

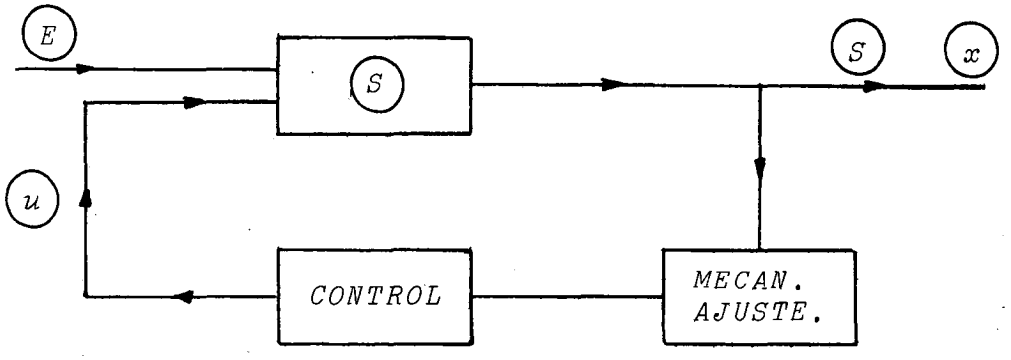


(2)

Naturalmente existe uma forma de realizar tais alterações, de modo operacional que não nos é revelada pelo simples esquema dado acima.

Nos modelos matemáticos em geral; entre os quais se enquadra a aplicação do nosso trabalho, é conveniente analisar a situação de forma mais acurada. Por exemplo a operação de observar a saída em geral é completamente distinta da operação de exercer o controle.

Por conseguinte um esquema um pouco mais detalhado pode ser apresentado, se levarmos em consideração que em geral, observamos o sistema em si mesmo, bem como a sua saída; e que o trabalho de decisão concernente a escolha de uma ação de controle é realmente uma operação distinta daquela de mostrar a ação de controle decidida. Tal comportamento justifica o diagrama abaixo.



(3)

5.1.4 - O Modelo Matemático

O modelo matemático para o estudo de estabilidade em controle requer que o sistema a ser controlado seja descrito por um sistema de equações diferenciais dado por $\dot{x}_i = x_i(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$ onde $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Na forma vetorial ele vem apresentado como $\dot{x} = X(t, x, u)$.

O objetivo é selecionar o controle u de modo que o sis

tema seja mantido próximo de algum estado desejado. É usual escolher como estado desejado a origem $x = 0$ (erro zero).

No caso geral o controle u será uma função do estado x do sistema e do tempo; com a seleção de um controle específico o sistema acima se transforma em:

$$\dot{x} = x(t,x,u(x,t)) = f(t,x).$$

Recaímos então no modelo de sistema abordado no início destas notas.

Se a planta, ou sistema em controle, estiver sujeita a perturbações e variações do ambiente, então é melhor ter o controle adaptável, fazendo com que o estado desejado comporte-se cada vez mais como um estado de equilíbrio estável ou, melhor ainda, como um estado assintoticamente estável.

Nesta operação desempenha papel importante o mecanismo de ajuste assinalado no esquema (3) do último parágrafo.

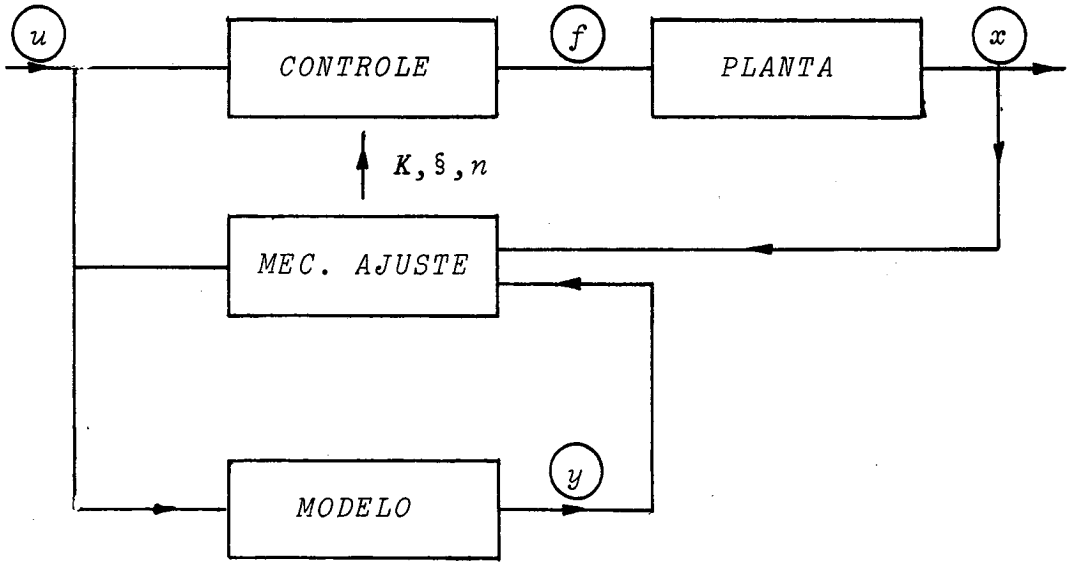
5.2 - UM PROBLEMA DE ESTABILIDADE EM CONTROLE

Este exemplo esclarece que se tivermos informações suficientes, as quais podem ser de origem estatística, sobre funções desconhecidas na planta a ser controlada, então o controle adaptável é possível. Faremos uso essencialmente do Teorema 4.3.

Nesta aplicação o estado x representa o erro e y está relacionado com certos parâmetros a serem controlados.

O que se quer, entre outras coisas, é aquilo que o Teorema 4.3 propõe, isto é; que depois do sistema ter sido operado por um determinado intervalo de tempo, o erro x tenda a zero e os parâmetros sob controle permaneçam limitados.

A forma geral do sistema de controle adaptável, como vimos no esquema (3) do parágrafo 5.1.3 é dada pelo diagrama abaixo.



O sistema associado ao diagrama é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)\, Ax + \beta(t)\, p(t,x) + f \rightarrow planta \\ \dot{y} = Ay + u(t) \rightarrow modelo \end{cases}$$

Os estados x e y são vetores do $\mathbb{R}^n$. A matriz A de ordem n admite valores característicos com parte real negativa, e $u(t)$ é contínua e limitada para $t \geq 0$. Para a planta é assumido que $p(t,x)$ seja conhecida e limitada para $t \geq 0$ e todo x.

Agora, tudo aquilo que é conhecido sobre as funções escalares $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ é que são contínuas e tem derivadas limitadas com $\alpha(t) \rightarrow \alpha_o$ e $\beta(t) \rightarrow \beta_o$ para $t \rightarrow \infty$.

Não é assumido que α_o e β_o sejam conhecidos. A questão que se põe então é: "*Determinar f tal que a planta siga o modelo ($\varepsilon(t) = x(t) - y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$) e os parâmetros de controle permaneçam limitados.*"

Existem razões heurísticas para tomar f da forma:

$$f = K[(1 - \xi)Ax - \eta p(t,x) + u]$$

onde K, ξ e η satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{K} = g_1(t,x,y,K,\xi,\eta) \\ \dot{\xi} = g_2(t,x,y,K,\xi,\eta) \\ \dot{\eta} = g_3(t,x,y,K,\xi,\eta) \end{cases} \qquad (5.2.1)$$

É claro que a fim de obtermos f precisamos conhecer as funções g_1, g_2 e g_3.

Com $\varepsilon = x - y$ a equação diferencial de ε fica:

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + (\alpha_o - \xi)Ax + (\beta_o - \eta)p + (K - 1)\, K^{-1} f$$
$$+ (\alpha - \alpha_o)Ax + (\beta - \beta_o)p \qquad (5.2.2)$$

Por hipótese A satisfaz $Re\,(\lambda_J) < 0$ $J \in \{1,2,\ldots,n\}$. Logo, para cada matriz C definida positiva, existe Q definida positiva tal que $A'Q + QA = -2C$, onde A' é a transposta de A. [5]

Selecionamos C qualquer e consequentemente Q e definimos

$$2v = \varepsilon' Q \varepsilon + c_1(K - 1)^2 + c_2(\xi - \alpha_o)^2 + c_3(\eta - \beta_o)^2 \qquad (5.2.3)$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes positivas.

Observamos inicialmente que pondo $z = (z_1, z_2, z_3)$ onde $z_1 = K - 1$, $z_2 = \xi - \alpha_o$ e $z_3 = \eta - \beta_o$, o ponto $(0,0)$ do sistema (ε, z) governados pelas equações (5.2.2) e (5.2.1) respectivamente, é dado por $\varepsilon = 0$, $\xi = \alpha_o$, $K = 1$, $\eta = \beta_o$.

Segundo esta notação fica evidente que $v(0,0) = 0$, $v(\varepsilon, z)$ é definida positiva e possue derivadas parciais contínuas em relação a ε e z, verificando-se assim o Teorema 4.3 em seu item (a).

O Teorema está sendo aplicado tomando $p = n$ e $q = 3$, além disso os papeis de x e y no teorema serão aqui representados por ε e z respectivamente.

Do modo como foi definido o funcional v o item (b) está automaticamente verificado.

A exigência dada pelo item (d) do Teorema 4.3 também é satisfeita se lembrarmos que na expressão (5.2.2) $x = \varepsilon + y$ e que o modelo em qualquer estágio do controle é sempre conhecido.

Calculando a derivada $\dot{v}$ encontramos:

$$\begin{aligned}\dot{v} = &- \varepsilon' C\varepsilon + (K - 1)(c_1 g_1 + K^{-1} f' Q\varepsilon) + \\ &+ (\xi - \alpha_o)(c_2 g_2 + \varepsilon' C\varepsilon - y' A' Q\varepsilon) + \\ &+ (\eta - \beta_o)(c_3 g_3 - p' Q\varepsilon) + \\ &+ (\alpha - \alpha_o)(y' A' Q\varepsilon - \varepsilon' C\varepsilon) + \\ &+ (\beta - \beta_o)\, p' Q\varepsilon.\end{aligned}$$

A seleção dos g_i agora se torna evidente; dado que queremos que o funcional v esteja nas condições do Teorema 4.3.

Por conseguinte pomos:

$$\begin{aligned} &|| \quad . \; g_1 = - c_1^{-1} K^{-1} f' Q \varepsilon \\ &|| \quad . \; g_2 = - c_2^{-1} (\varepsilon' C \varepsilon - y' A' Q \varepsilon) \\ &|| \quad . \; g_3 = + c_3^{-1} p' Q' \varepsilon \end{aligned}$$

e obtemos assim $\dot{v}$ dado por:

$$\dot{v} = - \varepsilon' C \varepsilon + (\alpha - \alpha_o)(y' A' Q \varepsilon - \varepsilon' C \varepsilon) + (\beta - \beta_o)\, p' Q \varepsilon.$$

A fim de completarmos a verificação que o funcional $v(\varepsilon, z)$ satisfaz às exigências do Teorema 4.3 resta conferir o item (c).

Da relação anterior temos:

$$\dot{v} = -\varepsilon' C \varepsilon + (\alpha - \alpha_o) y'A'Q\varepsilon - (\alpha - \alpha_o) \varepsilon' C \varepsilon +$$

$$+ (\beta - \beta_o) p' Q \varepsilon.$$

Logo, escolhendo $w(\varepsilon) = \varepsilon' C \varepsilon \rightarrow w$ é definida positiva.

Agora se $\bar{h}_1(t) = \alpha(t) - \alpha_o$; sendo que $\alpha \rightarrow \alpha_o$ por hipótese, decorre que $\bar{h}_1 \in M_o \rightarrow h_1 = \bar{h}_1 y'A'Q \in M_o$ pois de acordo com as hipóteses temos $||y'A'Q||$ é uma parcela limitada.

Se $q_1(\varepsilon,z) = \varepsilon$ a segunda parcela de $\dot{v}$ é do tipo $h_1(t).q_1(\varepsilon,z)$ com $h_1 \in M_o$ e $q_1(\varepsilon,z)$ contínua no par (ε,z).

Tomando $h_2(t) = -(\alpha(t) - \alpha_o) \rightarrow h_2 \in M_o$. De modo análogo se $q_2(\varepsilon,z) = \varepsilon' C \varepsilon \rightarrow q_2(\varepsilon,z)$ é contínua no par (ε,z).

A última parcela de $\dot{v}$ se comporta de forma análoga às anteriores recordando-se que $p(t,x)$ é limitada para $t \in J$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Assim $\dot{v} = -w(\varepsilon) + h_1(t) q_1(\varepsilon,z) + h_2(t) q_2(\varepsilon,z) + h_3(t) q_3(\varepsilon,z)$ com $w(\varepsilon)$ def. positiva, $h_i \in M_o$ e $q_i(\varepsilon,z)$ contínua no par (ε,z) $i = 1,2,3$.

Desta forma o funcional v definido pela expressão (5.2.3) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3 e consequentemente $\varepsilon = 0$, $K = 1$, $\xi = \alpha_o$, $\eta = \beta_o$ é eventualmente uniformemente estável e para cada $r > 0$, existe $T_o > 0$ tal que

$$||\varepsilon(t_o)||^2 + (K(t_o) - 1)^2 + (\xi(t_o) - \alpha_o)^2 + (\eta(t_o) - \beta_o)^2 < r^2$$

para qualquer $t_o \geq T_o \rightarrow \varepsilon(t) \rightarrow 0$ e as funções $K(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$ são limitadas para $t \geq t_o$.

É claro que a conclusão supera as nossas expectativas,

pois ela nos diz que, no tempo, a região na qual um comportamento satisfatório é obtido torna-se o espaço inteiro.

Não possuindo maiores informações sobre as funções desconhecidas que descrevem a planta em controle, tal resultado talvez é o melhor que possa ser obtido.

Em particular, se $\alpha \equiv \alpha_o$ e $\beta \equiv \beta_o$ então todas as soluções $\varepsilon(t)$, $K(t)$, $\xi(t)$ e $\eta(t)$ são limitadas e cada $\varepsilon(t) \to 0$ quan $t \to \infty$.

APÊNDICE

DEFINIÇÕES

1 - $v: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω aberto, é dita *definida positiva* se satisfaz as condições:

(a) $v(x)$ é contínua, bem como suas derivadas parciais.

(b) $v(0) = 0$.

(c) Para todo $x \in \Omega$, $x \neq 0$ temos $v(x) > 0$.

2 - $v: J \times \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aberto, $J = \mathbb{R}_+$ é dita *definida positiva* se satisfaz as condições:

(a) $v(t,0) = 0$.

(b) $v(t,x) \geq w(x)$ para todo $t \in J$ e para todo $x \in \Omega$; onde $w(x)$ satisfaz a definição (1).

3 - $\phi : [0,\rho) \to \mathbb{R}_+$ pertence *à classe K* se satisfaz as condições:

(a) $\phi(0) = 0$.

(b) ϕ é contínua.

(c) ϕ é monótona estritamente crescente.

Teorema:

Dado o sistema

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{I}$$

se $f(t,0) = 0$, $f(t,x)$ é localmente Lipschitziana em x uniformemente em t e a solução $x = 0$ de (I) é uniformemente assintoti

camente estável, logo existe $r_1 > 0$, $K = K(r_1) > 0$, uma função definida positiva $b(r)$, uma função positiva $c(r)$, ambas definidas para $r \in [0, r_1]$; e uma função escalar $v(t,x)$ definida e contínua para $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq r_1$; tais que:

(a) $|x| \leq v(t,x) \leq b(|x|)$

(b) $\dot{v}(t,x) \leq - c(|x|)\ v(t,x) \leq - |x|\ c\ (|x|)$.

(c) $|v(t,x) - v(t,y)| \leq K\ |x - y|$

para todo $t \geq 0$, x, y no $\mathbb{R}^n$ com $|x| \leq r_1$, $|y| \leq r_1$.

D. - Vide referência bibliográfica [3].

Lema:

Supomos f nas condições do teorema precedente, v é a função dada no teorema, $g : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função qualquer, e consideremos o sistema perturbado

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x). \qquad \text{(II)}$$

Logo, se verifica a desigualdade:

$$\dot{v}_{(II)}(t,x) \leq - c(|x|)\ v(t,x) + K|g(t,x)|.$$

D. - Referência bibliográfica [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BELMAN, RICHARD (1971). *Introduction to the Mathematical Theory of Control Process.* A. Press, New York.

[2] HALANAY, A. (1966). *Differential Equations Oscillation Time Lags.* A. Press, New York.

[3] HALE, JACK (1969). *Ordinary Differential Equations.* Wiley, New York.

[4] LAKSMIKANTHAM, V.; LEELA, S. (1961). *Differential and Integral Inequalities.* A. Press, New York.

[5] LA SALLE - LEFSCHETZ (1961). *Stability by Liapunov's Direct Method.* A. Press, New York.

[6] ONUCHIC, NELSON (1971). *Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo.* 8º Colóquio, Poços de Caldas - MG.

[7] ONUCHIC, NELSON (1970). Notas de Aula de um Curso de Equações com Retardamento no Tempo - Estabilidade Segundo Lyapunov. *Escola de Engenharia de São Carlos - USP.*

[8] STRAUSS, A. and YORKE, JAMES A. (1967). Perturbation Theorems for ordinary Differential Equations. *Reprinted from JOURNAL of Differential Equations.*