UM RESULTADO DE PERIODICIDADE
PARA UMA EQUAÇÃO
INTEGRO-DIFERENCIAL

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Orientação:

Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

USP - São Carlos

1.992

*Aos meus pais, que acolheram o
meu coração, nos seus corações e
o geraram para a vida;*

*Às minhas irmãs, que me ensina-
ram a partilhar o amor;*

*Ao Lú, que me incentivou na arte
de viver;*

*E a Deus, pois sem Ele nada disso
existiria!*

Agradecimentos

Ao Prof. Plácido Zoéga Táboas, pela orientação neste trabalho.

À Profª Sandra Maria Semensato de Godoy, pelo apoio técnico e pelas constantes palavras de incentivo.

Aos professores do IBILCE - UNESP, que me mostraram a beleza do mundo matemático.

Ao amigo Castilho que digitou este trabalho como se fosse próprio.

Aos amigos da graduação, da pós-graduação, que tanto me estimularam, e me ajudaram a galgar todos os obstáculos até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Abstract

We are concerned with the integro-differential equation:

$$\dot{x}(t) = -2\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta, \quad \alpha > 0. \quad (E)$$

Our aim is to study the periodic solutions of (E) , which are associated to fixed points of a return map A on a closed convex set of the phase space.

We use a fixed point theorem due to R. Nussbaum to accomplish the existence of nontrivial fixed points of A , when α varies along a sequence.

Resumo

Estamos interessados na equação integro-diferencial:

$$\dot{x}(t) = -2\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta, \quad \alpha > 0. \quad (E)$$

Nosso objetivo é estudar as soluções periódicas de (E) , que estão associadas aos pontos fixos de uma aplicação de retorno A sobre um conjunto fechado convexo do espaço de fase.

Nós usamos um Teorema de R. Nussbaum para obter a existência de pontos fixos não triviais de A , quando α varia ao longo de uma sequência.

Conteúdo

1	Preliminares	3
1.1	Equação Diferencial Funcional com Retardamento	3
1.2	Existência e Unicidade de Solução para a Equação (0.2)	7
1.3	Um teorema de Periodicidade	8
2	Existência de uma Solução Periódica não Constante	12
2.1	Fatos Importantes	12
2.2	A Equação Característica	15
2.3	O Operador de Retorno A	18
2.4	Conclusão	29

Introdução

Em 1978, Chow e Hale [1] estudam a equação integro-diferencial

$$\dot{x}(t) = -\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^0 B(\theta)x(t + \theta)d\theta, \quad (0.1)$$

onde $\alpha > 0$ e $B(\theta) \geq 0$ é de classe C^1 e semelhante à função delta de Dirac, definida de modo que $B(\theta) \equiv 0$, $-\frac{1}{2} \leq \theta \leq 0$ e $\int_{-1}^0 B(\theta)d\theta = 1$ (ver Figura 0.1). Esta equação é discutida como um modelo de crescimento de uma espécie. Chow e Hale [1] afirmam que as hipóteses do Teorema 2.2 [2], pag 249, atribuído a R. Nussbaum podem ser verificadas para a equação acima a fim de se obter uma solução periódica não constante.

Inspirados nessa equação e nas afirmações de Chow e Hale, nos detemos em estudar a equação integro-diferencial:

$$\dot{x}(t) = -2\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta)d\theta, \quad \alpha > 0, \quad (0.2)$$

que é uma equação diferencial funcional com retardamento obtida a partir de (0.1) tomando $B(\theta)$, de acordo com a Figura 0.1, definida por:

$$B(\theta) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq \theta \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } -\frac{1}{2} < \theta \leq 0 \end{cases}$$

Por razões técnicas restringimos nosso estudo ao caso em que α pertence a um subconjunto enumerável da reta.

Figura 0.1:

Neste trabalho mostramos a existência de uma solução periódica não constante, usando um princípio de ponto fixo ejetivo para um operador de retorno.

O trabalho é apresentado em dois capítulos. No primeiro citamos alguns resultados básicos para o seu desenvolvimento, definimos equação diferencial funcional com retardamento e apresentamos alguns resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais. Mostramos a existência de soluções para a equação específica. Definimos ponto ejetivo e enunciamos o Teorema de Nussbaum e um lema que dá uma condição suficiente para um ponto ser ejetivo.

No segundo capítulo, verificamos que a equação específica satisfaz as hipóteses do Teorema de Nussbaum e assim, concluimos a existência de uma solução periódica não constante.

Uma questão que naturalmente se formula a partir do presente trabalho é a de estender o conjunto onde o parâmetro α varia.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns resultados básicos que serão usados no decorrer do trabalho. As demonstrações podem ser encontradas na bibliografia indicada.

1.1 Equação Diferencial Funcional com Retardamento

Consideremos $r \geq 0$ um número real dado, o espaço vetorial n -dimensional $\mathbf{R}^n$ sobre os reais com norma euclidiana $|\cdot|$, $C([a, b], \mathbf{R}^n)$, o espaço de Banach das aplicações $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ contínuas, munido da norma do supremo.

Seja $[a, b] = [-r, 0]$, e $C = C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$, onde a norma de um elemento $\phi \in C$ é dada por:

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|.$$

Definição 1.1.1 *Sejam $\tau \in \mathbf{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([\tau - r, \tau + A], \mathbf{R}^n)$. Para cada $t \in [\tau, \tau + A]$, definimos a função $x_t \in C$ por:*

$$x_t(\theta) = x(t + \theta),$$

onde $-r \leq \theta \leq 0$.

Definição 1.1.2 *Sejam $D \subset \mathbb{R} \times C$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, com “.” representando a derivada à direita. A equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.1)$$

é dita uma equação diferencial funcional com retardamento sobre D e será denotada por EDFR. Se desejarmos enfatizar que a equação é definida por f , escrevemos EDFR(f).

A equação (1.1) inclui como caso particular as equações diferenciais ordinárias, basta para isto tomar $r = 0$.

Exemplo 1.1.1 *A equação integro-diferencial*

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, x(t + \theta)) d\theta$$

é uma EDFR. Neste caso, $f(t, \phi) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, \phi(\theta)) d\theta$ para $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times C$.

Definição 1.1.3 *Se existe $\tau \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tal que $x \in C([\tau - r, \tau + A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\tau, \tau + A]$, diz-se que x é solução da equação (1.1).*

Definição 1.1.4 *Dado $\tau \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, dizemos que $x(\tau, \phi, f)$ é solução da equação (1.1) com valor inicial ϕ em τ se:*

- (i) *Existe $A > 0$ tal que $x(\tau, \phi, f)$ é solução da equação (1.1) sobre $[\tau - r, \tau + A]$,*
- (ii) *$x_\tau(\tau, \phi, f) = \phi$.*

Definição 1.1.5 Dizemos que a equação (1.1) é linear se $f(t, \phi) = L(t, \phi) + h(t)$ para $(t, \phi) \in D$, onde $L(t, \phi)$ é linear em ϕ , para cada $t \in [\tau, \tau + A)$. Dizemos que a equação (1.1) é autônoma se $f(t, \phi) = g(\phi)$, onde g não depende de t .

Lema 1.1.1 Se $\tau \in \mathbf{R}$, $\phi \in C$ são dados e $f(t, \phi)$ é contínua, então encontrar uma solução da equação (1.1) passando por (τ, ϕ) é equivalente a resolver a equação integral:

$$\begin{cases} x_\tau = \phi \\ x(t) = \phi(0) + \int_\tau^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Apresentamos a seguir alguns resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua em relação às condições iniciais, das soluções da equação (1.1). As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [2].

Se $V \subset \mathbf{R} \times C$, definimos $C^0(V, \mathbf{R}^n)$ como sendo o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de V em $\mathbf{R}^n$, munido da seguinte norma $\|f\|_V = \sup_{(t, \phi) \in V} \|f(t, \phi)\|$.

Por inspiração da teoria geral das equações diferenciais ordinárias, a teoria geral dessas equações é desenvolvida em [2], de onde são extraídos os resultados a seguir. Limitamo-nos a apresentar apenas alguns resultados básicos para comodidade do leitor.

Teorema 1.1.1 (Existência) Suponhamos que $\Omega \subset \mathbf{R} \times C$ é aberto e que $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$. Se $(\tau, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da $EDFR(f^0)$ passando por (τ, ϕ) . Em geral, se $W \subset \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ são dados, então existe uma vizinhança de W , $V = V(W) \subset \Omega$ tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbf{R}^n)$, existe uma vizinhança de f^0 , $U = U(f^0) \subset C^0(V, \mathbf{R}^n)$, e um $\alpha > 0$ tal que, para todo $(\tau, \phi) \in W$ e $f \in U$, existe uma solução $x(\tau, \phi, f)$ da $EDFR(f)$ passando por (τ, ϕ) definida em $[\tau - r, \tau + \alpha]$.

Teorema 1.1.2 (Continuidade em relação às condições iniciais) *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbf{R} \times C$ é aberto, $(\tau^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ e que a solução x^0 da $EDFR(f^0)$ passando por (τ^0, ϕ^0) existe e é única em $[\tau^0 - r, b]$. Seja $W^0 \subset \Omega$ o conjunto compacto, definido por:*

$$W^0 = \{(t, x_t^0) \mid t \in [\tau^0, b]\}$$

e seja V^0 uma vizinhança de W^0 tal que $f^0 \in C^0(V^0, \mathbf{R}^n)$. Se (τ^k, ϕ^k, f^k) para $k = 1, 2, \dots$ satisfaz $\tau^k \rightarrow \tau^0$, $\phi^k \rightarrow \phi^0$ e $\|f^k - f^0\|_{V^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então existe um $k^0 \in \mathbf{N}$, onde $EDFR(f^k)$, para $k \geq k^0$, é tal que, cada solução $x^k = x^k(\tau^k, \phi^k, f^k)$ passando por (τ^k, ϕ^k) existe em $[\tau^k - r, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\tau^0 - r, b]$. Como algumas x^k podem não estar definidas em $[\tau^0 - r, b]$ por $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\tau^0 - r, b]$, entendemos que: para todo $\varepsilon > 0$, $\exists k_1 = k_1(\varepsilon)$ tal que se $k \geq k_1$, $x^k(t)$ está definida em $[\tau^0 - r + \varepsilon, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\tau^0 - r + \varepsilon, b]$.

Definição 1.1.6 *Seja $\Omega \subset \mathbf{R} \times C$ e $f \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$. Dizemos que $f(t, \phi)$ é localmente lipschitziana com relação a ϕ em Ω se f é lipschitziana em ϕ para cada subconjunto compacto de Ω , isto é, se $W \subset \Omega$ é compacto, existe $k = k(W)$ de $\mathbf{R}$ tal que para todo $(t, \phi), (t, \psi) \in W$, temos*

$$\|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq k \|\phi - \psi\|.$$

Teorema 1.1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbf{R} \times C$ aberto e $f \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ localmente lipschitziana com relação a ϕ em Ω . Se $(\tau, \phi) \in \Omega$, então existe uma única solução da $EDFR(f)$ passando por (τ, ϕ) .*

Definição 1.1.7 *Suponhamos que f da equação (1.1) é contínua. Se x é uma solução da $EDFR(f)$ no intervalo $[\tau, a)$, $a > \tau$, dizemos que a função $\hat{x}$ é uma*

continuação (à direita) de x , se existe $b > a$, tal que $\hat{x}$ está definida em $[\tau - r, b)$, coincide com x em $[\tau - r, a)$ e satisfaz a equação (1.1) em $[\tau, b)$. Dizemos que x , solução da equação (1.1) em $[\tau, a)$, é não continuável (à direita) se não existe uma continuação dela, neste caso o intervalo $[\tau, a)$ é dito intervalo maximal de existência da solução.

O leitor encontra em [2] um estudo bastante geral sobre continuação de soluções.

1.2 Existência e Unicidade de Solução para a Equação (0.2)

Esta equação é dada por:

$$\dot{x}(t) = -2\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta, \quad \alpha > 0.$$

Dado $\phi \in C = C([-1, 0], \mathbf{R})$, vamos mostrar que (0.2) admite uma única solução $x(t)$ para $t \geq -1$, tal que $x_0 = \phi$. Fazemos a seguinte mudança de variável:

$$e^{w(t)} = 1 + x(t), \tag{1.3}$$

assim $x(t) > -1$ para $t \geq -1$. Além disso,

$$\dot{x}(t) = e^{w(t)} \cdot \dot{w}(t).$$

Por outro lado, de acordo com (0.2),

$$\dot{x}(t) = -2\alpha e^{w(t)} \int_{-1}^{-1/2} [e^{w(t+\theta)} - 1] d\theta.$$

Igualando os dois membros, temos que:

$$\dot{w}(t) = 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} [1 - e^{w(t+\theta)}] d\theta. \quad (1.4)$$

Dado $\psi \in C$, verifiquemos que a equação (1.4) admite uma única solução que a satisfaz para $t \geq 0$, com $w_0 = \psi$. Para $t \in [0, 1/2]$

$$\dot{w}(t) = 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} [1 - e^{\psi(t+\theta)}] d\theta.$$

Como o segundo membro é uma função contínua de t , $w(t)$ é determinado por quadratura em $[0, 1/2]$. Para $t \in [1/2, 1]$, $w(t)$ é determinado de modo análogo usando $w_{1/2}(\theta) = w(1/2 + \theta)$, $-1 \leq \theta \leq 0$, obtemos w sobre $[-1, \infty)$. Consequentemente, obtemos x sobre $[-1, \infty)$.

1.3 Um teorema de Periodicidade

A seguir enunciamos um resultado de Nussbaum, que nos garante a existência de um ponto fixo de uma aplicação A distinto de um ponto prefixado, denominado ejetivo.

Definição 1.3.1 *Seja K um conjunto convexo. Um ponto $x_0 \in K$ é um ponto extremo de K se não existem pontos distintos $x_1, x_2 \in K$ e $t \in (0, 1)$ de modo que $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Geometricamente, x_0 é extremo se ele não é interior de nenhum segmento contido em K .*

Exemplo 1.3.1 *Consideremos K um quadrado. Então os vértices do quadrado serão os pontos extremos de K .*

Definição 1.3.2 *Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ e $x_0 \in U$. Dada uma aplicação $A : U - \{x_0\} \rightarrow X$, o ponto $x_0 \in U$ é dito um ponto ejetivo de A se existe uma vizinhança aberta $G \subseteq X$ de x_0 tal que para todo $y \in G \cap U$, $y \neq x_0$, existe um inteiro $m = m(y)$ tal que $A^m y \notin G \cap U$.*

Exemplo 1.3.2 *Consideramos $U = X = \mathbf{R}$ e $A : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $A(x) = \frac{1}{x}$. Então $x_0 = 0$ é ponto ejetivo de A , pois tomando-se $G = G(0) = (-1, 1)$ segue que para $y \in G - \{0\}$, $Ay \notin G$, logo basta tomar $m = 1$. A vizinhança G , neste caso, pode ser qualquer intervalo aberto em $(-1, 1)$ que contenha $x_0 = 0$.*

Definição 1.3.3 *Sejam X, Y espaços de Banach e $f : A \subset X \rightarrow Y$. A função f é completamente contínua se for contínua e leva cada limitado de A em um conjunto relativamente compacto de Y , isto é, f é compacta.*

Seja K um espaço métrico compacto e M um espaço métrico. Consideramos $C(K, M)$ o conjunto das aplicações contínuas de K em M com topologia dada por:

$$d(f, g) = \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

onde $f, g \in C(K, M)$.

Definição 1.3.4 *Um conjunto $E \subset C(K, M)$ é equicontínuo se, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $y \in K$, existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, y)$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para todo $f \in E$.*

Damos a seguir uma versão do Teorema de Ascoli, útil aos nossos propósitos.

Teorema 1.3.1 (Ascoli - Arzelá) *Sejam K um espaço métrico compacto e $E \subset C(K, \mathbf{R})$. Se*

(i) Existe $N \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq N, \forall x \in K, \forall f \in E,$

(ii) E é equicontínuo,

então E é relativamente compacto.

Para qualquer $M > 0$, nós temos $S_M = \{x \in X \mid \|x\| = M\}$ e $B_M = \{x \in X \mid \|x\| < M\}$, então $S_M = \partial B_M$.

Teorema 1.3.2 (Nussbaum) *Seja X um espaço de Banach e $K \subset X$ convexo e fechado. Se $A : K - \{0\} \rightarrow K$ é completamente contínua, $0 \in K$ é um ponto ejetivo de A e existe $M > 0$ tal que se $Ax = \lambda x$, para $x \in K \cap S_M$ implicar $\lambda < 1$, então A tem um ponto fixo em $K \cap B_M - \{0\}$, se K é de dimensão infinita ou 0 é um ponto extremo de K .*

Apresentamos a seguir um lema que dá condições para que o 0 seja um ponto ejetivo de A .

Consideremos as equações diferenciais retardadas:

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(x_t) \quad (1.5)$$

$$\dot{y}(t) = Ly_t \quad (1.6)$$

onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e contínua, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é completamente contínua com a derivada contínua, $f(0) = 0$ e $Df(0) = 0$. A equação característica da equação (1.6) é dada por:

$$\det \Delta(\lambda) = 0$$

onde $\Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^\lambda I)$. Suas raízes serão chamadas indistintamente *raízes características* ou *autovalores*.

Para cada autovalor λ , o espaço de fase C é decomposto como soma direta, $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, onde P_λ e Q_λ são invariantes sob o operador solução da equação (1.6), $T(t)$, $t \geq 0$, dado por $T(t)\phi = y_t(\cdot, \phi)$, $\phi \in C$, e π_λ o operador projeção sobre P_λ definido por essa decomposição.

Lema 1.3.1 *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

- (i) *Há um autovalor λ da equação (1.6) com $\text{Re}(\lambda) > 0$.*
- (ii) *Há um subconjunto convexo fechado K de C , $0 \in K$, e uma função contínua $\tau : K - \{0\} \rightarrow [\rho, \infty)$, $\rho > 0$, tal que a aplicação $A : K \rightarrow C$ dada por:*

$$A\phi = \begin{cases} x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi), & \phi \in K - \{0\} \\ 0, & \phi = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

é completamente contínua e $AK \subset K$.

- (iii) $\inf\{\|\pi_\lambda x_t\| \mid x_t = x_t(\cdot, \phi), \phi \in K, \|\phi\| \geq \delta, 0 \leq t \leq \tau(\phi)\} > 0$
- (iv) *Se G é um subconjunto aberto de $\mathbf{R}^n$, $0 \in G$, existe uma vizinhança V de 0 em C tal que $x(t, \phi) \in G$, para qualquer $\phi \in V \cap K, \phi \neq 0$, e $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.*

Então, 0 é um ponto ejetivo de A . (ver [3])

Capítulo 2

Existência de uma Solução Periódica não Constante

Utilizando o Teorema 1.3.2 mostramos que (0.2) admite uma solução periódica não constante. Para que esta solução não seja trivial precisamos de que o ponto fixo de A não seja o zero. Nosso argumento baseia-se em que o zero é um ponto ejetivo de A em K , o Lema 1.3.1 dá as condições necessárias para isso. Primeiro enunciamos alguns fatos importantes, mostramos que as condições do Lema 1.3.1 estão satisfeitas e desta forma, o zero é ponto ejetivo.

2.1 Fatos Importantes

O subconjunto fechado e convexo de $C = C([-1, 0], \mathbf{R})$, $K_\alpha = \{\phi \in C \mid \phi(-1) \geq 0, \phi(\theta) \text{ é não decrescente em } [-1, -1/2], \phi(\theta) \text{ é não crescente em } [-1/2, 0], \phi(0) \geq e^{\frac{-\alpha}{2}(e^\alpha - 1)}[\phi(-1/2) + 1] - 1\}$ desempenha um papel importante no desenvolvimento do trabalho.

Definição 2.1.1 *Dizemos que os zeros de $x(t)$ são limitados se $x(t)$ tem somente um número finito de zeros positivos.*

Lema 2.1.1 .

Sejam $\phi \in K_\alpha$ e $x(t)$ solução da equação (0.2), temos que:

- (i) Se $\phi(0) > -1$ e os zeros de $x(t)$ são limitados, então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.
- (ii) Se $\phi(0) > -1$ e $\alpha > 1$, então os zeros de $x(t)$ não são limitados.
- (iii) Os zeros de $x(t) \not\equiv 0$ se existem, são simples e a distância de um zero de $x(t)$ ao próximo ponto de máximo, ou de mínimo é $> 1/2$.
- (iv) Se os zeros de $x(t)$ não são limitados então qualquer máximo de $x(t)$, $t > 0$ é menor do que $e^\alpha - 1$.

Prova:

(i) Suponhamos que existe $t_1 > 0$ tal que $x(t)$ tem sinal constante para $t \geq t_1 - 1$, o que sempre ocorre quando os zeros são limitados. Como $x(t) > -1$ para $t > 0$, da secção 1.2, temos que:

$$\dot{x}(t) \int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta) d\theta = -2\alpha[1+x(t)] \left[\int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta) d\theta \right]^2 < 0 \text{ para } t \geq t_1.$$

Se $x(t) > 0$ para $t \geq t_1 - 1$ então $\dot{x}(t) < 0$ para $t \geq t_1$, portanto, $x(t)$ é estritamente decrescente e não se anula para $t \geq t_1$, logo, $x(t) \rightarrow a$, quando $t \rightarrow \infty$, para algum $a \geq 0$.

Se $x(t) < 0$ para $t \geq t_1 - 1$ então $\dot{x}(t) > 0$ para $t \geq t_1$, portanto, $x(t)$ é estritamente crescente e não se anula para $t \geq t_1$, logo, $x(t) \rightarrow a$, quando $t \rightarrow \infty$, para algum $a \leq 0$.

Desta forma, $x(t)$ é limitada e aproxima-se, monotonicamente de um limite, quando $t \rightarrow \infty$. Suponhamos que $x(t) \rightarrow a$ (> 0 , para fixarmos um caso) quando

$t \rightarrow \infty$, então $\dot{x}(t) \rightarrow -\alpha[1+a]a < 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o que contraria o fato de $x(t) \rightarrow a > 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Esta contradição leva à conclusão de que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. O caso $a < 0$ é análogo.

(ii) Suponhamos que $\alpha > 1$ e os zeros de $x(t)$ são limitados, então por (i) segue que $x(t) \rightarrow 0$ monotonicamente quando $t \rightarrow \infty$, em algum intervalo $[t_1, \infty)$.

Se $x(t) > 0$ em $[t_1, \infty)$, temos que:

$$\begin{aligned} x(t_1 + 1) - x(t_1 + 1/2) &= \int_{t_1+1/2}^{t_1+1} \dot{x}(\zeta) d\zeta = \int_{t_1+1/2}^{t_1+1} \left\{ -2\alpha[1+x(\zeta)] \int_{-1}^{-1/2} x(\zeta + \theta) d\theta \right\} d\zeta \\ &< -2 \int_{t_1+1/2}^{t_1+1} \left[\int_{-1}^{-1/2} x(\zeta + \theta) d\theta \right] d\zeta \leq - \int_{t_1+1/2}^{t_1+1} x(\zeta - 1/2) d\zeta \\ &< -x(t_1 + 1/2) \end{aligned}$$

portanto $x(t_1 + 1) < 0$ (contradição). Um raciocínio análogo para $x(t) < 0$ também levará a uma contradição. Portanto, os zeros de $x(t)$ não são limitados.

(iii) Seja z_0 tal que $x(z_0) = 0$ e $\bar{\tau}$ o próximo ponto de máximo relativo de $x(t)$, então $\dot{x}(\bar{\tau}) = 0$. Logo, $\int_{-1}^{-1/2} x(\bar{\tau} + \theta) d\theta = 0 \implies x(\bar{\tau} - 1/2) > 0$. Portanto, $d(z_0, \bar{\tau}) > 1/2$. Analogamente, se $\bar{\tau}$ é o próximo ponto de mínimo relativo de $x(t)$.

Mostramos agora que os zeros de $x(t)$ são simples. Seja τ_0 um ponto de mínimo relativo de $x(t)$ e z_0 o próximo zero de $x(t)$, então $\dot{x}(\tau_0) = 0$. Logo, $\int_{-1}^{-1/2} x(\tau_0 + \theta) d\theta = 0$.

Para $\tau_0 < t \leq z_0$, temos que $\int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta < 0$. Portanto, $\dot{x}(t) > 0$ para $\tau_0 < t \leq z_0$. Assim, os zeros de $x(t)$ são simples.

O Lema seguinte é usado na demonstração de (iv).

Lema 2.1.2 *Se z_0 é um zero de $x(t)$, $\dot{x}(z_0) > 0$ e $\bar{\tau}$ é o próximo ponto de máximo de $x(t)$, então $1/2 < d(z_0, \bar{\tau}) < 1$.*

Prova: Por (iii) , temos que : $d(z_0, \bar{\tau}) > 1/2$. Supondo que $d(z_0, \bar{\tau}) \geq 1$. Concluimos que $\dot{x}(\bar{\tau}) < 0$, uma contradição. Portanto, $1/2 < d(z_0, \bar{\tau}) < 1$. $\square$

(iv) Se z_0 e $\bar{\tau}$ são como no lema 2.1.2, para $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$, mostramos que $0 \leq -\int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta)d\theta < 1/2$. Por um lado temos que $x(t+\theta) > -1$ para $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$, logo, $-\int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta)d\theta < 1/2$ para $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$. Por outro lado, $-\int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta)d\theta \geq 0$, pois $x(t)$ é crescente em $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$ e $\dot{x}(t) \geq 0$ em $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$. Portanto:

$$0 \leq -\int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta)d\theta < 1/2, \quad z_0 \leq t \leq \bar{\tau}. \quad (2.1)$$

De (2.1) e (0.2), concluímos que $\dot{x}(t) < \alpha[1 + x(t)]$. Resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \alpha[1 + y(t)] \\ y(z_0) = 0 \end{cases}, \quad z_0 \leq t \leq \bar{\tau},$$

encontramos a solução $y(t) = Me^{\alpha t} - 1$, impondo a condição inicial, temos que $Me^{\alpha z_0} = 1$, ou seja $y(t) = e^{\alpha(t-z_0)} - 1$. Sabemos que $y(t) > x(t)$ para $z_0 \leq t \leq \bar{\tau}$. Logo, $e^{\alpha(\bar{\tau}-z_0)} - 1 > x(\bar{\tau})$, como $\bar{\tau} - z_0 < 1$, segue que:

$$x(\bar{\tau}) < e^{\alpha} - 1. \square$$

2.2 A Equação Característica

Vamos obter a equação característica da parte linear, em torno de zero, da equação (0.2):

$$\dot{x}(t) = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} x(t+\theta)d\theta. \quad (2.2)$$

Assim, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial da equação (2.2), da forma $x(t) = e^{\lambda t}\mu$, $\mu \in \mathbf{R} - \{0\}$ é que μ seja uma solução não nula de:

$$\lambda e^{\lambda t}\mu = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} e^{\lambda(t+\theta)}\mu d\theta,$$

a qual nos leva à equação característica da equação (2.2), dada por:

$$\lambda^2 + 2\alpha (e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda}) = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (2.3)$$

Lema 2.2.1 *Se α assume valores ao longo da sequência:*

$$\alpha_n = -\frac{a_n^2 e^{a_n}}{\sin(a_n) - e^{a_n/2} \sin(a_n/2)}$$

onde $\pi + 2n\pi < a_n < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ é univocamente determinado, então $\lambda_n = a_n + ia_n$ é uma raiz característica de (2.3).

Prova: Seja equação (2.3) com $\alpha > 0$ fazendo $\lambda_0 = a_0 + a_0 i$, $a_0 \neq 0$, temos que:

$$(a_0 + a_0 i)^2 + 2\alpha \left(e^{\frac{-(a_0 + a_0 i)}{2}} - e^{-(a_0 + a_0 i)} \right) = 0.$$

Separando a parte real da imaginária, temos que:

$$\begin{cases} 2\alpha e^{-a_0/2} \cos(\frac{a_0}{2}) - 2\alpha e^{-a_0} \cos(a_0) = 0 \\ -2\alpha e^{-a_0/2} \sin(\frac{a_0}{2}) + 2\alpha e^{-a_0} \sin(a_0) = -2a_0^2 \end{cases}$$

Multiplicando o sistema por e^{a_0} , temos que:

$$\begin{cases} \cos(a_0) - e^{a_0/2} \cos(\frac{a_0}{2}) = 0 \\ \sin(a_0) - e^{a_0/2} \sin(\frac{a_0}{2}) = \frac{-a_0^2 e^{a_0}}{\alpha} \end{cases} \quad (2.4)$$

As equações do sistema (2.4) podem ser escritas como produto escalar:

$$(\cos(a_0), \cos(\frac{a_0}{2})) \cdot (1, -e^{a_0/2}) = 0 \quad (2.5)$$

$$(\sin(a_0), \sin(\frac{a_0}{2})) \cdot (1, -e^{a_0/2}) = \frac{-a_0^2 e^{a_0}}{\alpha} \quad (2.6)$$

Observe que o vetor $(\cos(a_0), \cos(a_0/2))$ deve ser ortogonal ao vetor $(1, -e^{a_0/2})$ e que a_0 também deve satisfazer a equação (2.6).

1o Caso : Quando $0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$ não satisfaz a equação (2.5), observe:

2o Caso : Quando $\frac{\pi}{2} < a_0 < \pi$ também não satisfaz a equação (2.5), observe:

3o Caso : Quando $\pi < a_0 < \frac{3\pi}{2}$, concluímos que: existe um único a_0 , $\pi < a_0 < \frac{4\pi}{3}$ que satisfaz a equação (2.5), observe:

Consequentemente, o vetor $(\cos(a_0), \cos(a_0/2))$ deve estar localizado entre o eixo x e a diagonal do terceiro quadrante, para que seja ortogonal ao vetor

$(1, -e^{a_0/2})$. Portanto, $\pi < a_0 < \frac{4\pi}{3}$. Verifiquemos que existe um único a_0 nessas condições. Para $a_0 = \pi$, temos que: $(\cos(a_0), \cos(a_0/2)) \cdot (1, -e^{a_0/2}) < 0$. Para $a_0 = \frac{4\pi}{3}$, temos que: $(\cos(a_0), \cos(a_0/2)) \cdot (1, -e^{a_0/2}) > 0$. Além disso, a derivada da função $F(a_0) = \cos(a_0) - e^{a_0/2}\cos(a_0/2)$ é positiva no intervalo $]\pi, \frac{4\pi}{3}[$, assim, F é crescente neste intervalo. Portanto, existe um único a_0 , $\pi < a_0 < \frac{4\pi}{3}$ que satisfaz a equação (2.5).

4o Caso Quando $\frac{3\pi}{2} < a_0 < 2\pi$ não satisfaz a equação (2.5), pois os dois vetores estão no interior do mesmo quadrante.

Para $\pi < a_0 < \frac{4\pi}{3}$ satisfaz a equação (2.6), para algum $\alpha = \alpha_0$ positivo, dado por:

$$\alpha_0 = -\frac{a_0^2 e^{a_0}}{\sin(a_0) - e^{a_0/2}\sin(a_0/2)}$$

Analogamente concluímos que: $\exists! a_n, \pi + 2n\pi < a_n < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$, onde:

$$\alpha_n = -\frac{a_n^2 e^{a_n}}{\sin(a_n) - e^{a_n/2}\sin(a_n/2)}$$

fica univocamente determinado de modo que $\lambda_n = a_n + i\alpha_n$ seja raiz da equação característica (2.3). $\square$

Observação 2.2.1 *É uma simples, embora extensa, rotina de cálculo, verificar que $\alpha_n > 1, n = 0, 1, 2, \dots$*

2.3 O Operador de Retorno A

Vamos construir um operador de retorno $A : K_\alpha \rightarrow C$, onde K_α é definido na secção 2.1, seguindo a órbita a partir de $\phi \in K_\alpha$, até o instante em que ela retorna

a K_α . Pelo Lema 2.1.1, temos que: se $\phi(0) > -1$ e $\alpha > 1$ os zeros de $x(t)$ não são limitados. Com $\alpha_n > 1$, $\phi \in K_\alpha$, $\phi \neq 0$, definimos:

$$\beta(\phi) = \min\{t > 0 \mid t \text{ é um zero com } \dot{x}(t) > 0\}$$

$$\tau_1(\phi) = \{ \text{o primeiro ponto de máximo relativo} > \beta(\phi) \}.$$

Sejam $\tau = \tau(\phi) = \tau_1(\phi) + 1/2$ e

$$A\phi = \begin{cases} x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi), & \phi \in K_\alpha - \{0\} \\ 0, & \phi = 0. \end{cases}$$

Lema 2.3.1 *A função $\tau : K_\alpha - \{0\} \rightarrow [\rho, \infty)$, $\rho > 0$, definida acima, é contínua e a aplicação $A : K_\alpha \rightarrow C$ dada por:*

$$A\phi = \begin{cases} x_{\tau(\phi)}(\cdot, \phi), & \phi \in K_\alpha - \{0\} \\ 0, & \phi = 0 \end{cases}$$

é completamente contínua e $AK_\alpha \subset K_\alpha$.

Prova: Argumentos típicos de continuidade em relação às condições iniciais levam a continuidade da τ .

Para mostrarmos que $AK_\alpha \subset K_\alpha$, precisamos primeiramente mostrar que sendo $\bar{\tau}$ um ponto de máximo relativo e $h = x(\bar{\tau})$, então:

$$x(\bar{\tau} + 1/2) \geq e^{\frac{-\alpha}{2}(e^\alpha - 1)}[x(\bar{\tau}) + 1] - 1,$$

com $\alpha > 0$. Seja

$$\dot{x}(t) = -2\alpha[1 + x(t)] \int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta$$

e façamos algumas majorações. Tomando $\bar{\tau} < t \leq \bar{\tau} + 1/2$, temos que:

$$\int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta \leq \int_{-1}^{-1/2} x(t - 1/2) d\theta = \frac{1}{2}x(t - 1/2)$$

$$x(t - 1/2) \leq x(\bar{\tau}) \leq e^\alpha - 1$$

Assim, concluímos que: $\dot{x}(t) \geq -\alpha[1+x(t)](e^\alpha - 1)$. Resolvendo a equação:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -\alpha[1+y(t)](e^\alpha - 1) \\ y(\bar{\tau}) &= h \end{cases}$$

Temos que: $\dot{y}(t) + \alpha(e^\alpha - 1)y(t) = -\alpha(e^\alpha - 1)$. Multiplicando ambos os membros por $e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}$, temos que:

$$\left(e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}y(t)\right)' = -\alpha(e^\alpha - 1)e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}.$$

Integrando de $\bar{\tau}$ a t , obtemos:

$$e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}y(t) - e^{\alpha(e^\alpha - 1)\bar{\tau}}y(\bar{\tau}) = e^{\alpha(e^\alpha - 1)\bar{\tau}} - e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}.$$

Dividindo por $e^{\alpha(e^\alpha - 1)t}$, temos:

$$y(t) - e^{\alpha(e^\alpha - 1)(\bar{\tau} - t)}y(\bar{\tau}) = e^{\alpha(e^\alpha - 1)(\bar{\tau} - t)} - 1.$$

Fazendo $t = \bar{\tau} + 1/2$, concluímos que:

$$y\left(\bar{\tau} + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{-\alpha}{2}(e^\alpha - 1)}[h + 1] - 1.$$

Portanto:

$$x\left(\bar{\tau} + \frac{1}{2}\right) \geq e^{\frac{-\alpha}{2}(e^\alpha - 1)}[x(\bar{\tau}) + 1] - 1. \quad (2.7)$$

Consequentemente, $AK_\alpha \subset K_\alpha$, pois:

- (i) $A\phi(-1) = x(\phi)(\tau_1 - 1/2) > 0$
- (ii) $A\phi(\theta) = x(\phi)(\tau_1 + 1/2 + \theta)$ é não decrescente em $[-1, -1/2]$
- (iii) $A\phi(\theta) = x(\phi)(\tau_1 + 1/2 + \theta)$ é não crescente em $[-1/2, 0]$
- (iv) De (2.7) concluímos que: $A\phi(0) = x(\phi)(\tau_1 + 1/2) \geq e^{\frac{-\alpha}{2}(e^\alpha - 1)}[x(\tau_1) + 1] - 1$

Finalmente, mostremos que A é completamente contínua.

(i) $A\phi$ é contínua, pois, a continuidade de τ e da solução em relação as condições iniciais garantem a continuidade de A em $K_\alpha - \{0\}$. Se $\phi = 0$ e $\phi_k \in K_\alpha - \{0\}$, com $\phi_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então, pela continuidade de τ , temos que: $\tau(\phi_k) \rightarrow \tau(0)$ quando $k \rightarrow \infty$. Pela continuidade em relação as condições iniciais para as soluções $x(t)$ da equação (0.2), concluímos que: $x_{\tau(\phi_k)}(\phi_k) \rightarrow x_{\tau(0)}(0) = 0$. Portanto, $A\phi$ é contínua em $\phi = 0$.

(ii) Mostremos que $A\phi$ é compacta. Seja $\bar{B}_R$ uma bola fechada de $C = C([-1, 0], \mathbf{R})$ com $V = K_\alpha \cap \bar{B}_R$ e $AV \subset C([-1, 0], \mathbf{R})$, onde:

$$AV = \{x_\tau(\phi), \phi \in K_\alpha - \{0\}, \text{ com } \|\phi\| \leq R\} \cup \{0\}.$$

Pelo Teorema 1.3.1 basta mostrar que AV é relativamente compacto, isto é, que AV é limitado e equicontínuo. Pelo Lema 2.1.1, item (iv) temos que: $x(t) < e^\alpha - 1$ para $t > 0$. Seja $L = \max(e^\alpha - 1, R)$. AV é limitado, pois $|A\phi(\theta)| = |x_\tau(\phi)(\theta)| = |x(\phi)(\tau + \theta)| < L$, $\forall \phi \in V$. Para mostrar que AV é equicontínuo, basta provar que: dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $a, b \in [-1, 0]$ e $|a - b| < \delta$ então $|x_\tau(\phi)(a) - x_\tau(\phi)(b)| < \varepsilon$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que:

$$|x_\tau(\phi)(a) - x_\tau(\phi)(b)| \leq \sup_{-1 \leq \theta \leq -1/2} |D_\theta x(\phi)(\tau(\phi) + \theta)| |a - b|$$

Fazendo estimativas para $|D_\theta x(\phi)(\tau(\phi) + \theta)|$ concluímos que :

$$\sup_{-1 \leq \theta \leq -1/2} |D_\theta x(\phi)(\tau(\phi) + \theta)| \leq M, \quad M = \alpha L(1 + L), \quad \forall \phi \in V \text{ com } \|\phi\| \leq R.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, concluímos que:

$$|x_\tau(\phi)(a) - x_\tau(\phi)(b)| < \varepsilon,$$

isto é, AV é equicontínuo. Pelo Teorema 1.3.1, temos que AV é relativamente compacto. Portanto, $A\phi$ é compacta, logo, $A\phi$ é completamente contínua. $\square$

Vamos verificar, a partir de agora, que o operador A satisfaz à hipótese (iii) do Lema 1.3.1.

Seja $L\phi = -2\alpha \int_{-1}^{-1/2} \phi(\theta) d\theta$ a transformação dada pela linearização (2.3) de (0.2) e $\eta(\theta)$ definida para $\theta \in [-1, 0]$ de forma que, sendo

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -2\alpha\theta & -1 \leq \theta \leq -1/2 \\ \alpha & -1/2 < \theta \leq 0, \end{cases}$$

tenhamos:

$$L\phi = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta),$$

para todo $\phi \in C$. Seja G o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t), t \geq 0$, definido pelas soluções de (2.3), isto é,

$$T(t)\phi = x_t(\cdot, \phi), \quad \phi \in C, \quad t \geq 0.$$

Definição 2.3.1 Dizemos que λ é autovalor simples de uma $EDFR(L)$, onde L é linear, se λ é uma raiz simples da equação característica da $EDFR(L)$.

Afirmção 2.3.1 λ_n é autovalor simples de G , $n = 0, 1, 2, \dots$

Prova: Por simplicidade de notação, denotamos $\lambda = \lambda_n$ e $\alpha = \alpha_n$. Da equação (2.3), temos que:

$$2\alpha e^{-\lambda/2} = -\lambda^2 + 2\alpha e^{-\lambda}. \quad (2.8)$$

Seja $f(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha(e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda})$, suponhamos que:

$$f'(\lambda) = 2\lambda - \alpha e^{-\lambda/2} + 2\alpha e^{-\lambda} = 0. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) em (2.9), concluímos que:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2\alpha e^{-\lambda} = 0.$$

Fazendo $\lambda = a + ai$, temos que:

$$(a + ai)^2 + 4(a + ai) + 2\alpha e^{-(a+ai)} = 0.$$

Separando a parte real da imaginária, temos que:

$$2a = -\alpha e^{-a} \cos(a) \quad (2.10)$$

$$a^2 + 2a = \alpha e^{-a} \sin(a) \quad (2.11)$$

Dividindo (2.11) por (2.10), temos que:

$$\frac{a+2}{2} = -\tan(a) \text{ para } \pi + 2n\pi < a < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ (contradição)}.$$

Portanto, $f'(\lambda) \neq 0$, isto é, λ é autovalor simples de G . $\square$

Desta forma, o subespaço P_λ é precisamente o autoespaço generalizado unidimensional associado a λ , $\mathcal{M}_\lambda(G)$. Se G^* é o operador adjunto formal de G , λ é também um autovalor de G^* e o autoespaço generalizado $\mathcal{M}_\lambda(G^*)$ é também unidimensional. Seja $C^* = C([0, 1], \mathbf{R})$. A forma bilinear de $C^* \times C$, dada por:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \psi(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \psi(\zeta - \theta) [d\eta(\theta)] \phi(\zeta) d\zeta, \quad \psi \in C^*, \quad \phi \in C,$$

surge de maneira natural na decomposição de C , veja ([2], capítulo 7). Seja μ uma solução não trivial de $\Delta(\lambda)\mu = 0$, onde $\Delta(\lambda)$, citado no capítulo 1, é tal que $\det \Delta(\lambda) = 0$ é a equação característica. Logo, μ é autovetor de (2.2). Tomemos $\mu = 1$. Então $\rho(t) = e^{\lambda t}$, $t \in [-1, 0]$, é solução da equação linearizada no espaço $\mathcal{M}_\lambda(G)$. Sendo $\nu = \mu = 1$ autovetor do operador adjunto G^* , podemos escrever que $\sigma(s) = e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$ é solução da equação linearizada no espaço $\mathcal{M}_\lambda(G^*)$. Futuramente, recairemos na decomposição $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, $\forall \phi \in C$ com $\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$, onde a componente ϕ^{P_λ} em P_λ é dada por $\phi^{P_\lambda} = \Pi_\lambda \phi = \langle \sigma, \phi \rangle \rho$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \phi \rangle &= \phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta e^{-\lambda(\zeta-\theta)} [d\eta(\theta)] \phi(\zeta) d\zeta \\ &= \phi(0) + 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-\lambda(\zeta-\theta)} \phi(\zeta) d\zeta d\theta \end{aligned}$$

Já estamos prontos para mostrar que a hipótese (iii) do Lema 1.3.1 está satisfeita.

Lema 2.3.2 $m = \inf \{ \|\langle \sigma, x_t \rangle\| \mid x_t = x_t(\cdot, \phi), \phi \in K, \|\phi\| \geq \delta, 0 \leq t \leq \tau(\phi) \} > 0$.

Prova: Vamos supor que $m = 0$. Assim, uma sequência $\psi^n \in K_\alpha$, $\|\psi^n\| \geq \delta$ para t_n , $0 \leq t_n \leq \tau(\psi^n)$, $n = 1, 2, \dots$, pode ser escolhido de maneira que se $\phi^n = x_{t_n} = x_{t_n}(\cdot, \psi^n)$, então:

$$\|\langle \sigma, \phi^n \rangle\| = \left| \phi^n(0) + 2\alpha \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-\lambda(\zeta-\theta)} \phi^n(\zeta) d\zeta d\theta \right| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Nós podemos fazer uma escolha de forma que $\phi^n(0) \rightarrow \phi(0)$ quando $n \rightarrow \infty$, e ainda, tomar $\lambda_0 = a_0 + a_0 i$ com $\pi < a_0 < 4\pi/3$, onde:

$$\alpha_0 = -\frac{a_0^2 e^{a_0}}{\text{sen}(a_0) - e^{a_0/2} \text{sen}(a_0/2)},$$

logo,

$$\begin{aligned} \|\langle \sigma, \phi^n \rangle\| &= \left| \phi(0) + 2\alpha_0 \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \cos(-a_0\zeta + a_0\theta) x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta \right. \\ &\quad \left. + i2\alpha_0 \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}(-a_0\zeta + a_0\theta) x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta \right|. \end{aligned}$$

Sejam

$$\mathcal{R}(t_n) = \phi(0) + 2\alpha_0 \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \cos(-a_0\zeta + a_0\theta) x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta,$$

$$\mathcal{I}(t_n) = 2\alpha_0 \int_{-1}^{-1/2} \int_0^\theta e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}(-a_0\zeta + a_0\theta) x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta.$$

Supondo que $\mathcal{R}(t_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, vamos mostrar que $\mathcal{I}(t_n) > c$, onde $c > 0$. Assim, chegaremos em uma contradição com a hipótese de m ser zero. Além de termos por hipótese $\|\phi\| \geq \delta$, tomemos $\|\phi\| \leq R$ com $R > \delta$. Já provamos que $x(t) < e^\alpha - 1$ para $t > 0$. Desta forma, seja $L = \max(e^{\alpha_0} - 1, R)$ e lembremos que $\alpha_0 > 1$. Portanto, $-1 < x(t_n + \zeta) \leq L$.

Figura 2.1:

(i) Para $\text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} & -2\alpha_0 \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_0^{\pi/a_0 + \theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] d\zeta d\theta < \\ & 2\alpha_0 \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_0^{\pi/a_0 + \theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta \leq \\ & 2\alpha_0 L \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_0^{\pi/a_0 + \theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta \end{aligned}$$

Como podemos ver na figura acima.

(ii) Para $\text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] < 0$, temos que:

$$\begin{aligned} & -2\alpha_0 \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_{\pi/a_0 + \theta}^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] d\zeta d\theta \\ & -2\alpha_0 \int_{-\pi/a_0}^{-1/2} \int_0^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] d\zeta d\theta > \\ & 2\alpha_0 \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_{\pi/a_0 + \theta}^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta \\ & + 2\alpha_0 \int_{-\pi/a_0}^{-1/2} \int_0^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] x(t_n + \zeta) d\zeta d\theta \geq \\ & -2\alpha_0 L \left[\int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_{\pi/a_0 + \theta}^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta + \int_{-\pi/a_0}^{-1/2} \int_0^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta \right] \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{I}(t_n) > 2\alpha_0 \left\{ - \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_0^{\pi/a_0 + \theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] d\zeta d\theta \right. \\ \left. + L \left[- \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_{\pi/a_0 + \theta}^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta - \int_{-\pi/a_0}^{-1/2} \int_0^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta \right] \right\}.$$

Seja

$$f(a_0) = - \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_0^{\pi/a_0 + \theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} \text{sen}[a_0(\theta - \zeta)] d\zeta d\theta \\ = - \frac{e^{-\pi}}{2a_0} \left[\frac{\pi}{a_0} - 1 + \frac{1}{a_0} \right] - \frac{e^{-a_0} \cos(a_0)}{2a_0^2}$$

no gráfico abaixo, observamos que $f(\pi) = 0$ e $f(a_0)$ é positiva no intervalo $a_0 \in]\pi, 4\pi/3[$.

Seja

$$g(a_0) = - \int_{-1}^{-\pi/a_0} \int_{\pi/a_0 + \theta}^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta - \int_{-\pi/a_0}^{-1/2} \int_0^{\theta} e^{-a_0\zeta + a_0\theta} d\zeta d\theta \\ = \left(\frac{-\pi + a_0}{e^{\pi} a_0^2} \right) (e^{\pi} - 1) - \frac{1}{2a_0} + \frac{1}{a_0^2} (\pi - e^{-a_0/2} + e^{-\pi}).$$

No gráfico abaixo, observamos que $g(a_0) > 0$ e $g(a_0)$ é decrescente no intervalo $a_0 \in]\pi, 4\pi/3[$.

Sendo $f(a_0) + g(a_0)$ é uma função positiva no intervalo $]\pi, 4\pi/3[$. Assim, $f(a_0) + Lg(a_0)$ também é uma função positiva neste intervalo, porque $L > 1$. Portanto, $\mathcal{I}(t_n) > c$, onde $c > 0$, no intervalo $]\pi, 4\pi/3[$ (contradição). Consequentemente, $m > 0$.

Assim, analogamente podemos concluir que $m > 0$ ao longo da sequência:

$$\alpha_n = -\frac{a_n^2 e^{a_n}}{\sin(a_n) - e^{a_n/2} \sin(a_n/2)}$$

onde $\pi + 2n\pi < a_n < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ univocamente determinado, observando que a área da região onde $\sin[a_n(\theta - \zeta)]$ é positivo tende a zero. $\square$

Verifiquemos agora a validade da hipótese (iv) do Lema 1.3.1.

Lema 2.3.3 *Se G é um dado subconjunto aberto de $\mathbf{R}$, $0 \in G$, existe uma vizinhança V de 0 em C tal que $x(t, \phi) \in G$, para todo $\phi \in V \cap K_\alpha$, $\forall t, 0 \leq t \leq \tau(\phi)$.*

Prova: Seja $\tau_0 > 0$ o primeiro ponto de mínimo relativo de $x(\cdot, \phi)$. Fazendo uma majoração em (0.2), e tomando $0 < t \leq \tau_0$,

$$\int_{-1}^{-1/2} x(t + \theta) d\theta \leq \int_{-1}^{-1/2} \phi\left(\frac{-1}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2} \phi\left(\frac{-1}{2}\right).$$

Assim, concluímos que $\dot{x}(t) \geq -\alpha[1 + x(t)]\phi(-1/2)$.

Vamos resolver o P.V.I. ordinário

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -\alpha[1 + y(t)]\phi(-1/2) \\ \phi(-1/2) &= H. \end{cases}$$

$$\dot{y}(t) + \alpha H y(t) = -\alpha H.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{\alpha H t}$, obtemos:

$$\left(e^{\alpha H t} y(t)\right)' = -\alpha H e^{\alpha H t}.$$

Integrando de 0 a t ,

$$e^{\alpha H t} y(t) - e^{\alpha H 0} y(0) = e^{\alpha H 0} - e^{\alpha H t}.$$

Dividindo por $e^{\alpha H t}$:

$$y(t) = e^{-\alpha H t} \phi(0) + e^{-\alpha H t} - 1.$$

Fazendo $t = \tau_0$, concluímos que:

$$y(\tau_0) = e^{-\alpha \phi(-1/2) \tau_0} [\phi(0) + 1] - 1.$$

Portanto, $0 \geq x(\tau_0) \geq e^{-\alpha \phi(-1/2) \tau_0} [\phi(0) + 1] - 1$. Fazendo a mesma majoração anterior em (0.2) e tomando $-1/2 < t \leq 0$, concluímos que:

$$\phi(0) \geq e^{\frac{-\alpha \phi(-1/2)}{2}} [\phi(-1/2) + 1] - 1.$$

Seja $\phi_n \in K_\alpha$ tal que $\phi_n(-1/2) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Aplicando o Teorema de Confronto concluímos que $x(\phi_n)(\tau_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Tomando τ_1 o primeiro

ponto de máximo relativo, vamos mostrar que se $x(\phi_n)(\tau_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $x(\phi_n)(\tau_1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Repetindo o processo usado anteriormente, mostramos que $x(\tau_1) \leq e^{\alpha x(\tau_0)(z_0 - \tau_1)} - 1$. Supondo que $x(\phi_n)(\tau_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e aplicando o Teorema do Confronto, concluímos que $x(\phi_n)(\tau_1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente, obtemos que:

$$x\left(\tau_1 + \frac{1}{2}\right) \geq e^{\frac{-\alpha x(\tau_1)}{2}}[x(\tau_1) + 1] - 1.$$

Usando o fato que $x(\phi_n)(\tau_1) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que:

$$x(\phi_n)\left(\tau_1 + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, tomando G aberto, $G \subset \mathbf{R}$, $0 \in G$, existe uma vizinhança de 0 em $C = C([-1, 0], \mathbf{R}) \mid x(t, \phi) \in G, \forall \phi \in V \cap K_\alpha, 0 \leq t \leq \tau(\phi)$. $\square$

2.4 Conclusão

A equação (0.2), satisfaz as condições do Lema 1.3.1, portanto, então podemos afirmar que zero é ponto ejetivo de A .

Para mostrarmos que todas as hipóteses do Teorema 1.3.2 estão satisfeitas, resta provarmos a seguinte afirmação.

Afirmação 2.4.1 *Existe $M > 0$ tal que se $Ax = \lambda x$, para $x \in K_\alpha \cap S_M$ implica que $\lambda < 1$.*

Prova: Suponhamos que para todo $M > 0$, existe $x \in K_\alpha \cap S_M(0)$ tal que $Ax = \lambda x$ e $\lambda \geq 1$. Tomando $M > L$, onde $L = \max(e^\alpha - 1, R)$, com $\|\phi\| \leq R$, temos que:

$$|Ax| = |\lambda| |x| \geq |x| = M.$$

Por outro lado, $|Ax| < L$ se $x \in K_\alpha$, isto é, $|Ax| < L < M$. Desta forma $M > |Ax| \geq M$ (Absurdo). Portanto, existe $M > 0$ tal que $Ax = \lambda x$, para todo $x \in K_\alpha \cap S_M(0)$ implica que $\lambda < 1$. $\square$

Desta maneira, temos que A tem um ponto fixo em $K_\alpha \cap B_M - \{0\}$ e portanto a equação (0.2) tem uma solução periódica não constante.

Bibliografia

- [1] CHOW S. N. ; HALE J. K. - Periodic solutions of autonomous equation.
J. Math. Analysis and Applications, v. 66, p. 495-506, 1978.
- [2] HALE J. K. - *Theory of functional differential equation*. New York, Springer, 1977
- [3] TÁBOAS P. - Periodic solution of a planar delay equation. *Proccedings of the Royal Society of Edinburgh*, v. 116A p. 85-101, 1990.