**Comportamento assintótico de problemas
parabólicos em domínios tipo dumbbell**

German Jesus Lozada Cruz

SERVIÇO DE POSGRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 02/12/2003

Assinatura: _____

Comportamento assintótico de problemas parabólicos em domínios tipo dumbbell

German Jesus Lozada Cruz

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências- Área de Matemática

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da **FAPESP**. Processo.
00/01479 – 8

USP - São Carlos
Dezembro de 2003

Comportamento assintótico em problemas parabólicos em domínios tipo dumbbell

Este exemplar corresponde à redação final da tese
devidamente corrigida e defendida por

German Jesus Lozada Cruz

e aprovada pela comissão
julgadora.

São Carlos, Dezembro de 2003.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho (**Orientador**) - ICMC - USP
- Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes, IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho, ICMC-USP
- Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, IME-USP
- Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, DM-UFSCar

**Dedico este trabajo a:
mis padres Eduardo y Aurelia,
mis hermanas Elita y Vereny,
mis sobrinas Greyci, Camila y Sheyla
mi esposa Dulcimar y mi hijo Nicolah Henry**

“A mathematician is a machine for turning coffee into theorems”.

Paul ERDÖS, (1913-1996)

*“God not only plays dice. He also sometimes
throws the dice where they cannot be seen”.*

Stephen HAWKING, (8 January 1942-)

*“If, I were a medical man, I should prescribe a holiday to
any patient who considered his work important”.*

Bertrand RUSSELL, (1872-1970)

*“All’inizio e alla fine abbiamo il mistero.
Potremmo dire che abbiamo il disegno di Dio.
A questo mistero la matematica ci avvicina, senza penetrarlo”.*

Ennio De GIORGI, (1928-1996)

*“A mathematician’s reputation rests on the
number of bad proofs he has given”.*

Abram BESICOVICH, (1891-1970)

*“A blind man tramps at random touching the road with a stick.
He places his foot carefully and mumbles to himself.
The whole world is displayed in his dead eyes.
There are a house, a lawn, a fence, a cow
and scraps of the sky—everything he cannot see”.*

VI. KHODASEVICH

A blind Man

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a **Deus** por ser tão generoso comigo e não abandonar-me nos momentos difíceis da minha vida.

Agradecer ao Prof. **Alexandre N. de Carvalho**, pelo incentivo nos momentos difíceis, pela dedicação, pela calma e pela forma segura e paciente durante a orientação nos meu estudo de Doutorado no ICMC e na elaboração desta tese.

Gostaria também de agradecer ao professores: **Joan Solà-Morales Rubió** e **Neus Cònsul Porras** pelo convite ao Departament de Matemàtica Aplicada I da Universitat Politècnica de Catalunya (Barcelona) e também pelas interessantes discussões que tivemos la.

Agradecer ao professor **José Maria Arrieta Algarra** pelo convite ao Departamento de Matemática Aplicada da Universidad Complutense de Madrid e pelas discussões valiosas que tivemos la como também pela sua gentileza de ter respondido-me muitos de meus e-mails com boas sugestões, ajuda em algumas demonstrações do Capítulo 3.

A meus pais: **Eduardo e Aurélia** por serem o meio pelo qual existo e estou aqui.

A minhas irmãs: **Elita e Vereny** pelo seu apoio incondicional até o dia de hoje e minhas sobrinhas **Greyci, Camila e Sheyla** por serem parte da minha família.

Aos professores do Departamento de Matemática e todos os demais professores do ICMC-USP, que contribuíram de alguma maneira na minha formação acadêmica.

À **FAPESP** pelo apoio financeiro no programa de Doutorado.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidad Nacional de Trujillo.

Aos Colegas, que me suportaram e tornaram esses anos mais agradáveis, dentre eles destacarei os seguintes: Ana Lúcia, Andréa Guimarães, Benito, Vera, Raimundo, etc.

Ao Sadao pela sua pronta disposição na ajuda e dicas no Latex.

A todas as pessoas que de alguma maneira cooperaram para a conclusão este trabalho. Desde já, peço desculpas às pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

Finalmente no puedo dejar de mencionar el apoyo que en lo personal siempre recibí y continuó recibiendo de mi esposa **Dulcimar** y de mi hijo **Nicolah**. Mismo sabiendo que nada puede recompensar el tiempo que deje de dedicarles, es para mí una grande satisfacción dedicarles este trabajo.

★ Muchas gracias ★

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar a dinâmica assintótica de problemas parabólicos em domínios tipo dumbbell. Para isto primeiro estudaremos a semi-continuidade superior de atratores para problemas parabólicos com condição de fronteira do tipo Neumann homogênea e depois estudaremos a existência de equilíbrios estáveis não-constantess para problemas de reação-difusão com condições de fronteira tipo Neumann não-lineares.

Abstract

The aim of this work is to study the asymptotic dynamics of parabolic problems in dumbbell type domains. To that end firstly, we study upper semicontinuity of attractors for parabolic problems with homogeneous Neumann boundary conditions and afterwards we study the existence of stable nonconstant equilibria for reaction-diffusion problems with nonlinear Neumann boundary conditions.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos da tese	4
1.2	Descrição dos resultados	5
2	Preliminares	7
2.1	Operadores e Semigrupos	7
2.1.1	Semigrupos analíticos	8
2.1.2	Potências fracionárias de operadores setoriais	9
2.1.3	Espaços de potências fracionárias	10
2.1.4	Teoremas de imersões de Sobolev	11
2.2	Problema de Cauchy abstrato	12
2.2.1	Equação de evolução com operador setorial	12
2.2.2	Existência local de soluções	13
2.2.3	Fórmula da variação das constantes	14
2.2.4	Geração de semigrupos não-lineares	15
2.3	Atratores: Teoria geral	15
2.3.1	Existência de atrator global	17
2.3.2	Soluções de equilíbrio	18
2.3.3	Estrutura gradiente	26
2.3.4	Caracterização do atrator global	26
2.4	Equações de reação-difusão com condições de fronteira não-lineares	28
2.4.1	Formulação semilinear	28
2.4.2	Existência local de solução	31
2.4.3	Existência global de solução	33
2.4.4	Existência de atrator global	34
2.4.5	Estimativas uniformes nos atratores	34
2.4.6	Estabilidade de equilíbrios	40
3	Semi-continuidade superior de atratores	47
3.1	Introdução	47
3.2	Problema perturbado ($\mathbf{P}_\epsilon$)	49
3.3	Problema limite ($\mathbf{P}_0$)	51
3.4	Comparação dos problemas perturbado e limite	55
3.4.1	Comparação dos operadores resolventes	56
3.4.2	Comparação dos semigrupos lineares	76

3.4.3	Comparação dos semigrupos não-lineares	77
3.5	Semi-continuidade superior dos atratores	78
4	Padrões induzidos por controles não-lineares na fronteira	81
4.1	Introdução	81
4.2	Convergência de autovalores	84
4.3	Convergência de autofunções	95
4.4	Equação limite para o problema perturbado	98
4.5	Teorema de traço uniforme em Ω_ε	102
4.6	Variedades invariantes	104
4.7	Padrões	122
5	Comentários finais e problemas para estudos futuros	123
	Referências Bibliográficas	127
	Índice de Notações	131
	Índice Remissivo	133

Lista de Figuras

2.1	Variedade invariante	21
3.1	Possibilidades do domínio Ω_ε	48
4.1	Domínio tipo Dumbbell	82
4.2	Retrato de fase aproximado: $\delta = 0, g(u) = u - u^3, f = 0$	122

Introdução

Muitos sistemas dinâmicos são gerados por equações diferenciais evolutivas. Estas equações diferenciais podem ser ordinárias, parciais, funcionais ou combinações destas. Neste trabalho estudaremos sistemas dinâmicos gerados por equações diferenciais parciais do tipo parabólico.

É conhecido que os sistemas dinâmicos gerados pela equação parabólica

$$\begin{aligned} u_t &= d\Delta u + f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

em um domínio convexo Ω , não apresentam soluções de equilíbrio estáveis e espacialmente dependentes (*padrões*) (veja [36]). Posteriormente, mostrou-se (veja [36]) que é possível produzir padrões em domínios com constrições, isto é, em domínios que consistem de duas partes desconexas ligadas por um canal fino (*dumbbells*). Estes domínios se degeneram (no limite) em dois domínios desconexos ligados por um segmento de reta. O presente trabalho tem por objetivo estudar a continuidade da dinâmica assintótica de problemas parabólicos em domínios do tipo dumbbell quando o canal se degenera e com condições de fronteira não linear.

Um dos principais objetivos na construção de um modelo é prever o comportamento do fenômeno através do modelo matemático. Mais ainda, em muitas situações não estamos interessados no futuro imediato e sim no comportamento do fenômeno modelado para tempos grandes. Neste último caso, estuda-se o comportamento assintótico do sistema. Notemos a potência e interesse desta idéia: se o modelo é correto e se temos ferramentas apropriadas para o análise assintótica do sistema, poderíamos conhecer com relativa precisão o futuro real do fenômeno.

Nosso interesse é a estudar a dependência da dinâmica assintótica de problemas parabólicos

em domínios do tipo dumbbel relativamente ao parâmetro ε , que determina a espessura da seção transversal ao canal, quando ε tende a zero. O conceito de *atrator global* converteu-se, nas últimas décadas, em uma ferramenta muito útil para o estudo do comportamento assintótico das equações diferenciais (ordinárias e parciais). Grosso modo, um atrator é um conjunto compacto e invariante em direção ao qual todas as soluções do sistema se aproximam para tempos grandes.

Mais especificamente, nesta tese pretendemos contribuir com o estudo do comportamento assintótico do seguinte problema parabólico não-linear

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega_\varepsilon, \\ u(0, x) = u_0, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.0.2)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a derivada normal à $\partial\Omega_\varepsilon$, u_0 é a condição inicial dada, Ω_ε é domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N > 2$ *singularmente perturbado* da forma $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado), por exemplo um domínio tipo dumbbell (veja (b) na Figura 3.1 e Figura 4.1) com fronteira suave e f satisfaz as seguintes condições:

(i). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$,

(ii). $\limsup_{|u| \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} < 0$.

Das hipóteses acima, o problema (1.0.2) está bem posto em $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ (veja Mora [37]) e pela condição (ii) de dissipatividade da f o problema (1.0.2) tem um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$.

O problema limite para (1.0.2) quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é dado por

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + f(w) & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \\ v_t = \frac{1}{g}(gv_x)_x + f(v), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1). \end{cases} \quad (1.0.3)$$

Sob as hipóteses acima, o problema (1.0.3) está bem posto em X_0 . Além disso, pela condição de dissipatividade da f o problema (1.0.3) tem um atrator global $\mathcal{A}_0$.

Jimbo [32] mostrou a continuidade dos atratores para o problema (1.0.2) quando o canal é reto. Além disso, não existem provas dos resultados anunciados em [32].

Mostraremos a semi-continuidade superior de atratores para o problema (1.0.2) quando o canal é obtido pela revolução de uma curva suave (veja a definição de R_ε na introdução do Capítulo 3). O estudo da semi-continuidade inferior dos atratores, e conseqüentemente a

continuidade dos atratores para (1.0.2) será objeto de estudos futuros.

Em [38], Morita estudou o problema (1.0.1) quando d é parâmetro fixo muito grande e Ω um domínio não convexo da forma de um dumbbell unido por um canal fino. Ele mostra a existência de uma variedade invariante finito dimensional exponencialmente atratora e a forma reduzida das equações diferenciais na variedade invariante.

Na tentativa de obter a existência de padrões, a primeira pergunta que se faz é o que mudar no problema (1.0.1) (com Ω convexo) para que padrões sejam possíveis. Se (1.0.1) é visto como um modelo para reações químicas ocorrendo em um recipiente fechado Ω e u representa a concentração, raciocinando intuitivamente, rapidamente imaginamos como produzir tais padrões.

Observe que $d\Delta u$ na equação (1.0.1) é o termo de difusão que se opõe a existência de gradientes de concentração e faz com que os estados estáveis sejam apenas homogêneos (especialmente constantes). Uma maneira de produzir padrões é introduzir no sistema algo que se oponha à homogenização, ou seja, uma obstrução ao fluxo de concentrações. Podemos alcançar isto das seguintes maneiras: *Obstrução no domínio*, *Obstrução por membranas Permeáveis* e *Obstrução fraca provocada por difusibilidade não constante*, entre outros métodos.

É fácil comprovar que os zeros da função f são soluções de equilíbrio para (1.0.1).

Motivada pelo problema com condições de Neumann homogêneas (1.0.1), Neus Cònsul [20], na sua tese de Doutorado, estudou a existência de padrões para equações de difusão com condições de fronteira não-homogêneas do tipo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f(u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.0.4)$$

Como no problema (1.0.1), os zeros da função f são soluções de equilíbrio para o problema (1.0.4).

É conhecido que a formulação abstrata de problemas de valor inicial para equações de reação-difusão como

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \Omega, \end{cases} \quad (1.0.5)$$

num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pode ser colocada como um problema de evolução semi-linear num espaço de Banach adequado (veja por exemplo [6]).

Nesta tese também pretendemos dar nossa contribuição no estudo da existência de padrões obtidos por fluxo de concentração na fronteira num domínio tipo dumbbell para o seguinte

sistema

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u + f(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega_\varepsilon \\ \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.0.6)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada normal exterior a fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ de $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$ (ver Figura 4.1), $\Omega = \Omega^L \cup \Omega^R$ com $\Omega^L, \Omega^R \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 2$) domínios, R_ε é um canal fino que conecta Ω^L e Ω^R , $\varepsilon > 0$ é um parâmetro positivo pequeno, $\delta > 0$ é uma constante positiva, δ/ε^{N-1} é o coeficiente de difusão do sistema, f e g são funções não-lineares satisfazendo certas propriedades de dissipatividade que serão especificadas mais tarde.

Seja λ_2^ε é o segundo autovalor do Laplaciano com condição de Neumann homogênea em $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ e consideremos $\delta/\lambda_2^\varepsilon$ como sendo o coeficiente de difusão para o problema (1.0.6), cuja existência de padrões mostramos em [14]. Usando o mesmo coeficiente de difusão e considerando $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$, com $N > 2$, também obtemos a existência de padrões para problema (1.0.6) (veja [13]). Em [15], estudamos a existência de padrões para o problema (1.0.6), onde ε^{N-1} é a taxa ótima de convergência do segundo autovalor λ_2^ε do operador Laplaciano com condição de Neumann homogênea em Ω_ε . Em [16], estudamos a existência de padrões para o problema (1.0.6) quando o coeficiente de difusão é da forma $1/\varepsilon^\theta$, onde $\theta > 0$ é um parâmetro.

Em todos os trabalhos mencionados acima usamos a teoria de variedades invariantes para demonstrar que a dinâmica de (1.0.6) é equivalente a dinâmica de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias na variedade invariante. A diferença destes trabalhos com os trabalhos de Consul e Solà-Morales ([21], [22]), além da técnica utilizada, é que os equilíbrios associados ao sistema de equações diferenciais ordinárias, que corresponde ao padrões de (1.0.6), são assintoticamente estáveis.

1.1 Objetivos da tese

Nossos objetivos nesta tese são:

1. comparar a dinâmica assintótica do problema perturbado (1.0.2) e a dinâmica do problema limite (1.0.3), para isto mostraremos que os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ são semi-contínuos superiormente em $\varepsilon = 0$, isto é, a dinâmica do problema (1.0.2) entra em qualquer vizinhança de $\mathcal{A}_0$.
2. estudar a existência de padrões obtidos por fluxo de concentração na fronteira num domínio tipo dumbbell para o problema (1.0.6) quando $g \neq 0$ e difusão grande δ/ε^{N-1} , onde $\delta > 0$ é um parâmetro.

1.2 Descrição dos resultados

Esta tese está organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, reunimos os conceitos básicos para a elaboração desta tese tentando que esta seja auto-contida. Damos uma breve revisão da teoria de semigrupos lineares na seção 2.1. O problema de Cauchy abstrato é visto na seção 2.2. A teoria geral de atratores é vista na seção 2.3. Na seção 2.4 estudamos as equações de reação com condições de fronteira não-lineares.

No Capítulo 3, estudamos a semi-continuidade superior dos atratores para o problema (P_ε) de reação-difusão com condição de fronteira homogênea num domínio singularmente perturbado do tipo Dumbbell com difusibilidade homogênea. Estudamos nas seções 3.2 e 3.2 o problema perturbado e o problema limite. Logo, na seção 3.4 estudamos a comparação dos operadores resolventes, dos semigrupos lineares e dos semigrupos não-lineares associados a (1.0.2) e (1.0.3). Finalmente, na seção 3.5, estudamos a semi-continuidade superior de atratores. Este Capítulo foi iniciado na visita ao Departamento de Matemática Aplicada na Universidad Complutense de Madrid junto com o professor Jose M. Arrieta.

O capítulo 4 está dedicado ao estudo da existência de padrões para o problema parabólico (4.1.1) com condições de fronteira não-linear num domínio tipo Dumbbell com o coeficiente de difusão muito grande e reação na fronteira muito pequena. Estudamos a convergência de autovalores e autofunções do operador Laplaciano num domínio tipo dumbbell, encontrando a taxa ótima da convergência do segundo autovalor (seções 4.2 e 4.3). Na seção 4.4, estudamos a equação limite para o problema perturbado (1.0.6). Mostramos teorema de traço uniforme (em ε) e existência de variedades invariantes nas seções 4.5 e 4.6 respectivamente. Finalmente, na Seção 4.7, estudamos o padrões para (1.0.6).

No capítulo 5, fazemos algumas considerações sobre os estudos feitos nesta tese e possíveis continuações.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos a teoria básica sobre semigrupos de operadores, os resultados para problemas de evolução de reação-difusão com condições de fronteira não-linear e as notações necessárias à compreensão deste trabalho. Introduziremos adequados espaços de fase e operadores para que nosso problema possa ser escrito numa forma semilinear abstrata. Serão dadas respostas a questões sobre existência, unicidade, regularidade de solução, existência e estabilidade dos equilíbrios, entre outras. Para maiores detalhes ver Pazy [40], Henry [28], Brezis [9], Cholewa e Dlotko [19], Amann [1], entre outros.

2.1 Operadores e Semigrupos

Operadores setoriais

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado (não necessariamente limitado) num espaço de Banach X . O conjunto $\rho(A)$ dos números complexos λ para os quais $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é um operador limitado é chamado de *conjunto resolvente* de A . O operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado de operador resolvente de A associado a λ .

O conjunto complementar $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado de *espectro* de A . O *espectro pontual* $\sigma_p(A)$ é o conjunto de autovalores de A , isto é, $\lambda \in \sigma_p(A)$ se e somente se existe $0 \neq x \in D(A)$ tal que $Ax = \lambda x$. Claramente $\sigma_p(A)$ é um subconjunto de $\sigma(A)$.

Definição 2.1.1 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, dizemos que A é um operador setorial se*

- (i) *A é fechado e densamente definido,*

(ii) para algum $\phi \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, o setor

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está no conjunto resolvente de A e vale a seguinte estimativa

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para todo } \lambda \in S_{a,\phi}.$$

2.1.1 Semigrupos analíticos

Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X) = \{T : X \rightarrow X : T \text{ é linear contínuo}\}$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Tx\| : x \in X\}.$$

Definição 2.1.2 Um **semigrupo analítico** num espaço de Banach X é uma família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, satisfazendo

- (i) $T(0) = I$ (Identidade em $\mathcal{L}(X)$), $T(t)T(s) = T(t+s)$ para $t, s \geq 0$,
- (ii) $T(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$, para cada $x \in X$,
- (iii) $t \rightarrow T(t)x$ é real analítica em $0 < t < \infty$ para cada $x \in X$.

O gerador infinitesimal deste semigrupo é o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, definido por

$$\begin{aligned} Ax &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \\ \mathcal{D}(A) &= \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}. \end{aligned}$$

Usualmente escrevemos $T(t) = e^{At}$.

Uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ que satisfaz (i) e (ii) na definição 2.1.2 é chamado de *semigrupo fortemente contínuo* ou C^0 -semigrupo.

Todo C^0 -semigrupo possui uma limitação exponencial que é dada no seguinte

Teorema 2.1.1 Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C^0 -semigrupo, então existem constantes ω e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.1)$$

O seguinte resultado coleta alguns fatos importantes sobre C^0 -semigrupos, sua prova é simples e pode ser encontrada em, por exemplo, Pazy [40].

Teorema 2.1.2 *Suponha que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C^0 -semigrupo.*

1. *Para qualquer $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$.*
2. *Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$, então A é densamente definido e fechado. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \rightarrow T(t)x$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

3. $\bigcap_{m \geq 1} \mathcal{D}(A^m)$ é denso em X .

4. *Para $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, onde ω é dado pelo Teorema 2.1.1, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em Henry [28].

Teorema 2.1.3 *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-At} : t \geq 0\}$, onde*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad (2.1.2)$$

com Γ uma curva em $\rho(-A)$ e $\arg \lambda \rightarrow \pm \theta$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$ para algum $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Além disso, e^{-At} pode ser estendido analiticamente a um setor $\{t \neq 0 : |\arg \lambda| < \varepsilon\}$ contendo o eixo real positivo e se $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$, isto é, $\operatorname{Re} \lambda > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(A)$, então para $t > 0$

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-at}, \quad \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

para alguma constante C .

Finalmente $\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At}$ para $t > 0$.

2.1.2 Potências fracionárias de operadores setoriais

Definição 2.1.3 *Suponhamos que A é um operador setorial e $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Então para qualquer $\alpha > 0$*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Também definimos A^α como sendo a inversa de $A^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), $\mathcal{D}(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$ e $A^0 =$ identidade em X .

O A^α é chamado de *operador potência fracionária* associado A e valem as seguintes propriedades:

1. Se $\alpha > 0$, A^α é fechado e densamente definido,
2. Se $\alpha \geq \beta$, então $\mathcal{D}(A^\alpha) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^\beta)$,
3. $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ em $\mathcal{D}(A^\gamma)$ onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$,
4. $A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha$ em $\mathcal{D}(A^\alpha)$,

onde $\mathcal{D}(A^\alpha) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^\beta)$ é a notação para dizer que $\mathcal{D}(A^\alpha)$ está continuamente imerso em $\mathcal{D}(A^\beta)$, isto é, $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(A^\beta)$ e a inclusão $j : \mathcal{D}(A^\alpha) \rightarrow \mathcal{D}(A^\beta)$ é contínua.

2.1.3 Espaços de potências fracionárias

Definição 2.1.4 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial, definamos para cada $\alpha \geq 0$*

$$\begin{aligned} X^\alpha &= \mathcal{D}(A_1^\alpha) \quad \text{com a norma do gráfico} \\ \|x\|_\alpha &= \|A_1^\alpha x\|, \quad x \in X^\alpha, \end{aligned}$$

onde $A_1 = A + aI$ com $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$.

Se $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ como na definição 2.1.3, então podemos suprimir a escolha de a e neste caso $X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$.

O X^α é chamado *espaço de potência fracionária* associado a A .

O seguinte resultado pode ser encontrado em Henry [28].

Teorema 2.1.4 *Se A é um operador setorial num espaço de Banach X , então X^α é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$ e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$. Se A tem resolvente compacto, a imersão $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.*

O seguinte resultado pode ser encontrado em Henry [27].

Teorema 2.1.5 *Suponha que A é um operador setorial. Então $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico e suponha que $\rho(A) \supset (-\infty, 0]$. Então*

1. Se $t > 0$, $\alpha \geq 0$, $\mathcal{R}(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ e

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\alpha t^{-\alpha}, \quad 0 < t \leq 1,$$

$\alpha \mapsto M_\alpha$ é contínua em $[0, \infty)$.

2. Se $t > 0$, existem constantes $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que,

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X^\beta, X^\alpha)} \leq M t^{\beta-\alpha} e^{-\gamma t}, \quad \alpha > \beta \geq 0.$$

3. Se $\alpha > 0$, temos que $t^\alpha A^\alpha e^{-At} x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ para cada $x \in X$.

4. $\|(e^{-At} - I)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{1-\alpha} \frac{T^\alpha}{\alpha} = MT^\alpha$ se $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.

2.1.4 Teoremas de imersões de Sobolev

Nesta seção, vamos mencionar alguns resultados sobre *imersões de Sobolev*.

Para $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$, consideremos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio cuja fronteira é Lipschitz. O número *net smoothness* caracteriza as propriedades de suavidade (diferenciabilidade) dos elementos de $W^{m,p}(\Omega)$:

$$\text{net smoothness}(f) := m - \frac{n}{p} \quad \text{para toda } f \in W^{m,p}(\Omega) \quad (2.1.3)$$

O leitor pode encontrar os seguintes lemas em Brezis [9].

Lema 2.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ com fronteira limitada. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

- (i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, q^*]$ onde $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,
- (ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty]$,
- (iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Neste caso, também temos

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}),$$

onde $m - \frac{n}{p}$ não é um inteiro e $k = \left[m - \frac{n}{p} \right]$, desde que $\partial\Omega$ seja de classe $\mathcal{C}^m$.

Lema 2.1.2 *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então as seguintes imersões são compactas:*

- (i) Se $p < n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, q^*]$ onde $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,
- (ii) Se $p = n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty]$,
- (iii) Se $p > n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.1.6 *Sejam $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$ e Ω como acima. Então as seguintes imersões contínuas valem*

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{se } m - n/p \geq k - n/q, q \geq p \\ &\quad (a \text{ menos que } m - n/p = k, q = \infty) \\ W^{m,p}(\Omega) &\hookrightarrow \mathcal{C}^{k+v}(\overline{\Omega}) \quad \text{se } 0 \leq v \leq m - k - n/p < 1 \\ &\quad (a \text{ menos que } m - n/p \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Além disso, se Ω é limitado as imersões acima são compactas para o caso das desigualdades estritas, isto é, $m - n/p > k - n/q$ ou $m - n/p > k + v$, respectivamente.

O seguinte resultado, além de surpreendente é muito útil na prática (ver Henry [28]).

Teorema 2.1.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz, $1 \leq p < \infty$ e A um operador setorial em $X = L^p(\Omega)$ com $\mathcal{D}(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$ com inclusão contínua, para algum $m \geq 1$. Então para $0 \leq \alpha \leq 1$,*

$$\begin{aligned} X^\alpha &\hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \quad \text{quando } k - n/q < m\alpha - n/p, q \geq p, \\ X^\alpha &\hookrightarrow \mathcal{C}^v(\Omega) \quad \text{quando } 0 \leq v < m\alpha - n/p. \end{aligned}$$

Observação 2.1.1 *O teorema anterior pode ser lido da seguinte forma: se $X^1 \approx W^{m,p}(\Omega)$ e $X^0 = L^p(\Omega)$, então é de se esperar que $X^\alpha \approx W^{m\alpha,p}(\Omega)$. O teorema afirma que X^α verifica as mesmas inclusões que verifica $W^{m\alpha,p}(\Omega)$.*

2.2 Problema de Cauchy abstrato

Muitos problemas de valor de fronteira originados nas ciências aplicadas podem ser considerados como equações de evolução abstratas com operador setorial na parte principal.

2.2.1 Equação de evolução com operador setorial

Consideremos a seguinte equação abstrata

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

onde u é uma função de (um subconjunto de) $\mathbb{R}^+$ num espaço de Banach X , $\dot{u}$ denota sua derivada com respeito ao tempo (como uma função que toma valores num espaço de Banach), $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso, e $F : E \rightarrow X$ é um operador não-linear, com E um espaço de Banach entre $\mathcal{D}(A)$ e X .

Vamos supor que o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial com resolvente compacto. Com isto, $-A$ é gerador de um semigrupo $\{e^{-At} : t \geq 0\}$ analítico no espaço X . Suponhamos que $\operatorname{Re} \sigma(A) = \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \subset (0, \infty)$.

Suponhamos também que, para algum $0 \leq \alpha < 1$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de X^α .

Definição 2.2.1 *Sejam X um espaço de Banach, $\alpha \in [0, 1)$ e $u_0 \in X^\alpha$. Se para algum $\tau > 0$, a função $u \in \mathcal{C}([0, \tau), X^\alpha)$ satisfaz*

- (i) $u(0) = u_0$,
- (ii) $u \in \mathcal{C}^1((0, \tau), X)$,
- (iii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$,
- (iv) a equação (2.2.1) é satisfeita em X para todo $t \in (0, \tau)$,

então u é chamada de **solução local** de (2.2.1).

A função u que satisfaz a definição 2.2.1 também é chamada de **solução forte** de (2.2.1).

2.2.2 Existência local de soluções

O seguinte resultado garante existência de solução local do problema (2.2.1).

Teorema 2.2.1 *Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial, $\operatorname{Re} \sigma(A) > a > 0$ e, para algum $\alpha \in [0, 1)$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de X^α . Então para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe uma solução local $u(t, u_0)$ de (2.2.1) definida no seu intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$ o qual significa que $\tau_{u_0} = +\infty$ ou se $\tau_{u_0} < +\infty$ então $\limsup_{t \rightarrow \tau_{u_0}^-} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = +\infty$.*

Demonstração. Para os detalhes da demonstração o leitor pode consultar Cholewa e Dlotko [19]. ■

Como uma consequência das imersões dos espaços de potências fracionárias (ver Teorema 2.1.4), se $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados de X^α , então F possui esta propriedade como uma aplicação de X^β em X para cada $\alpha \leq \beta < 1$. Isto nos permite estender muitos resultados de soluções em X^α para os espaços X^β com $\beta \in [\alpha, 1)$ arbitrário. Em particular o seguinte resultado é válido

Corolário 2.2.1 *Sejam A e F como no Teorema 2.2.1. Para $\beta \in [\alpha, 1)$, $u_0 \in X^\beta$, existe uma única solução $u(t, u_0)$ em X^β de (2.2.1) definida no seu intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$.*

2.2.3 Fórmula da variação das constantes

Lema 2.2.1 (Fórmula integral de Cauchy) *Sejam A e F como no Teorema 2.2.1 e $u \in \mathcal{C}([0, \tau), X^\alpha)$. Então u é uma solução local de (2.2.1) se e, somente se, u satisfaz em X a equação integral*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(u(s))ds, \quad \text{para } t \in [0, \tau). \quad (2.2.2)$$

Demonstração. O leitor poder ver a demonstração em Cholewa e Dlotko [19]. ■

A função $u \in \mathcal{C}([0, \tau), X^\alpha)$ que satisfaz (2.2.2) é chamada se **solução fraca** de (2.2.1).

Observe que não é necessário falar de soluções fracas e fortes do problema (2.2.1), já que no Lema 2.2.1 com condições mínimas, as soluções fracas tornam-se soluções fortes. Com isto, de aqui em diante falaremos só de solução para o problema (2.2.1).

Corolário 2.2.2 *Sejam A e F como no Teorema 2.2.1 e $u \in \mathcal{C}([0, \tau), X^\alpha)$. Se u satisfaz em X a equação integral (2.2.2), então $u \in \mathcal{C}((0, \tau), X^1)$, $\dot{u} \in \mathcal{C}((0, \tau), X^\gamma)$, $\gamma \in [0, 1)$.*

O seguinte resultado mostra que as soluções de (2.2.1) que começam num conjunto limitado B existem e permanecem em B pelo menos até algum tempo positivo $\tau_B > 0$ (ver Cholewa e Dlotko [19]).

Proposição 2.2.1 *Sejam A e F como no Teorema 2.2.1. Para qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe um tempo $\tau_B > 0$ tal que as soluções $u(t, u_0)$ de (2.2.1), com $u_0 \in B$, existem e são limitadas uniformemente em X^α para $t \in [0, \tau_B]$.*

Definição 2.2.2 *Uma função $u = u(t)$ é chamada de solução global de (2.2.1), se esta cumpre os requisitos da Definição 2.2.1 com $\tau = +\infty$.*

De acordo com o resultado local de existência do Teorema 2.2.1 para a prova da solubilidade global de (2.2.1) é suficiente mostrar que a norma $\|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}$ não explode num tempo finito T , isto é,

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} < +\infty, \quad \forall T > 0.$$

Temos existência global de soluções do problema (2.2.1) se, por exemplo, o termo não-linear F satisfaz a seguinte restrição de crescimento sub-linear:

$$\|F(v)\|_{X^\alpha} \leq C(1 + \|v\|_{X^\alpha}), \quad \text{para } v \in X^\alpha \text{ e } C > 0. \quad (2.2.3)$$

2.2.4 Geração de semigrupos não-lineares

Suponhamos $F : X^\alpha \rightarrow X$ globalmente Lipschitz, limitada e continuamente diferenciável. Sob estas hipóteses, as soluções de (2.2.1), estão globalmente definidas em X^α .

Se $u(t, u_0)$ é a solução global de (2.2.1) então podemos definir uma família de operadores não-lineares $\{T(t) : t \geq 0\}$ ($T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$) via a seguinte relação

$$T(t)u_0 := u(t, u_0), \text{ com } t \geq 0 \quad (2.2.4)$$

satisfazendo as seguintes propriedades

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s), t, s \geq 0$,
- (iii) a aplicação $\mathbb{R} \times X^\alpha \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X^\alpha$ é contínua.

A família $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamada de C^0 -semigrupo não-linear (ou sistema dinâmico) associado a (2.2.1).

É sabido (ver Lema 2.2.1) que $T(\cdot)$ é dado pela fórmula de variação das constantes

$$T(t)u_0 = e^{-A(t-t_0)} + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(T(s)u_0) ds. \quad (2.2.5)$$

2.3 Atratores: Teoria geral

Seja $\{T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha, t \geq 0\}$ o semigrupo não-linear associado ao problema (2.2.1) como na seção anterior.

Para cada $u_0 \in X^\alpha$, a órbita positiva

$\gamma^+(u_0)$ por u_0 é definida como

$$\gamma^+(u_0) = \{T(t)u_0 : t \geq 0\}.$$

Uma órbita negativa por u_0 é uma função contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ tal que $\phi(0) = u_0$ e, para qualquer $s \leq 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$.

Uma órbita completa de u_0 é uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ tal que $\phi(0) = u_0$ e, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$.

Como a imagem de $T(t)$ não é todo X^α , para dizer que existe uma órbita negativa ou completa de u_0 , devemos impor restrições em u_0 . Também, como $T(t)$, em geral, não é um a um, não é necessário que uma órbita negativa seja única, se esta existe. Definimos a órbita

negativa por u_0 como a união de todas as órbitas negativas por u_0 . Então

$$\begin{aligned}\gamma^-(u_0) &= \bigcup_{t \geq 0} H(t, u_0) \\ H(t, u_0) &= \{y \in X^\alpha : \text{existe uma órbita negativa por } u_0 \text{ definida por} \\ &\quad \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha \text{ com } \phi(0) = u_0 \text{ e } \phi(-t) = y\}.\end{aligned}$$

Uma órbita completa $\gamma(u_0)$ por u_0 é definida como $\gamma(u_0) = \gamma^-(u_0) \cup \gamma^+(u_0)$. Para qualquer $B \subset X^\alpha$, definimos $\gamma^+(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma^+(u_0)$, $\gamma^-(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma^-(u_0)$, $\gamma(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma(u_0)$, respectivamente, a órbita positiva, a órbita negativa, a órbita completa por B quando estas existem.

Para qualquer $B \subset X^\alpha$, definimos o conjunto ω -limite e o conjunto α -limite de B como

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t, B)}.$$

Definição 2.3.1 Um conjunto $B \subset X^\alpha$ é dito que atrai um conjunto C sob $T(t)$, se

$$\text{dist}(T(t)C, B) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

onde ‘dist’ denota a semi-distância de Hausdorff em X definida como

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|.$$

Observação 2.3.1 Observe que esta semi-distância pode ser definida num espaço métrico (X, d) de maneira análoga, i.e.,

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Um conjunto $S \subset X^\alpha$ é dito invariante se, para cada $u_0 \in S$, existe uma órbita completa por u_0 tal que $\gamma(u_0) \subset S$ ou equivalentemente se $T(t)S = S$ para $t \geq 0$.

Definição 2.3.2 Seja $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$, $t \geq 0$ o C^0 -semigrupo não-linear associado a (2.2.1). Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **assintoticamente compacto** se, para qualquer $B \subset X^\alpha$ limitado, fechado e não vazio para o qual $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B .

Definição 2.3.3 O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito **ponto dissipativo** (**limitado dissipativo**) se existe um conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ que atrai todo ponto de X^α (cada conjunto limitado de X^α) sob $T(t)$.

Definição 2.3.4 Um conjunto $\mathcal{A} \subset X^\alpha$ é dito de **atrator global** para $\{T(t) : t \geq 0\}$ (associado a (2.2.1)) se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\mathcal{A}$ é compacto
- (ii) $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$
- (iii) $\text{dist}(T(t)C, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo conjunto limitado $C \subset X^\alpha$.

Um atrator global encontra-se dentro de um conjunto atraente B , em geral, é muito menor que B e descreve o comportamento assintótico das soluções de uma maneira mais precisa.

Analiseemos brevemente as três propriedades da definição de atrator global. O item (i) significa que o atrator é completo, isto é, podemos extrair subsequências convergentes de cada sequência em $\mathcal{A}$. Isto é realmente forte e interessante, já que $\mathcal{A}$ é um subconjunto de um espaço de dimensão infinita. O item (iii) significa que todo o comportamento assintótico do sistema acontece perto de $\mathcal{A}$ e não só dentro de B como na propriedade de atração. Finalmente, o item (ii) é determinante, já que diz que toda a dinâmica sobre o atrator $\mathcal{A}$ é *invariante*, i.e., $\mathcal{A}$ trabalha como um objeto dinâmico independente.

Da definição de atrator global é claro que todo o comportamento assintótico do sistema acontece perto deste conjunto, mas esta dinâmica pode ser extremamente complexa, inclusive totalmente caótica. Assim, toda a informação sobre a estrutura geométrica dos atratores chega a ser crucial junto com as propriedades de estabilidade e instabilidade de subconjuntos especiais do mesmo.

Por outro lado, o atrator, devido a propriedade de invariância, possui sua própria dinâmica, isto é, podemos definir com sucesso o semigrupo (sistema dinâmico) sobre o atrator $\mathcal{A}$, $T_{\mathcal{A}}(t) := T(t)|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Aqui cabe a seguinte pergunta: existe alguma relação entre $T(t)$ e $T_{\mathcal{A}}(t)$? A resposta é positiva e suas consequências são muito importantes já que, em muitos casos, podemos simplificar a análise do comportamento assintótico do sistema estudando só em $\mathcal{A}$. Este fato é importante, já que, em nosso caso, a dinâmica evoluciona num espaço de dimensão infinita.

2.3.1 Existência de atrator global

O seguinte resultado das condições suficientes para a existência de atrator global (ver Hale [26], Teorema 3.4.6).

Teorema 2.3.1 Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C^0 -semigrupo num espaço métrico X que é assintoticamente liso, ponto dissipativo e as órbitas de conjuntos limitado são limitadas, então existe um atrator global $\mathcal{A}$ para $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Vamos mostrar que as condições impostas para A e F em (2.2.1) são suficientes para garantir que $\{T(t) : t \geq 0\}$ tenha um atrator global. Começaremos com alguns lemas básicos

Lema 2.3.1 Se $S \subset X^\alpha$ é invariante sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $v \in S$, então existe uma órbita completa por v .

Lema 2.3.2 Um ponto $v \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $t_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \in B$ tais que $T(t_n)v_n \rightarrow v$.

Lema 2.3.3 Para qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, o conjunto $\gamma^+(B)$ é limitado e $T(t)\gamma^+(B)$ é compacto para qualquer $t > 0$.

Lema 2.3.4 Para qualquer $u_0 \in X^\alpha$, $\omega(u_0)$ é não-vazio, conexo, compacto, invariante e atrai u_0 .

Lema 2.3.5 A órbita de qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ é limitada e, para cada conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe um instante τ_B e uma constante N (independente de B) tais que

$$\sup_{t \geq \tau_B} \sup_{w \in T(t)B} \|w\|_{X^\alpha} \leq N. \quad (2.3.1)$$

Além disso,

$$\sup_{\substack{B \subset X^\alpha \\ B \text{ limitado}}} \sup_{v \in \omega(B)} \|v\|_{X^\alpha} \leq N. \quad (2.3.2)$$

Lema 2.3.6 Se $B \subset X^\alpha$ é um conjunto limitado, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B sob $\{T(t) : t \geq 0\}$. Além disso, se B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.

Teorema 2.3.2 Se $B_N = \{u \in X^\alpha : \|u\|_{X^\alpha} \leq N\}$, então $\omega(B_N)$ é o atrator global para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ associado a (2.2.1).

2.3.2 Soluções de equilíbrio

Agora vamos entender a estrutura do atrator para (2.2.1). Começaremos com os elementos do atrator os quais são mais óbvios, as soluções de equilíbrio (pontos fixos de $T(t)$).

Definição 2.3.5 As soluções de equilíbrios de (2.2.1) são aquelas soluções as quais são independentes do tempo, isto é, as soluções de

$$Au + F(u) = 0. \quad (2.3.3)$$

Definição 2.3.6 Dizemos que uma solução u^* de (2.3.3) é hiperbólica, se $\sigma(A + F'(u^*))$ é disjunto do eixo imaginário, isto é, $\sigma(A + F'(u^*)) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\} = \emptyset$.

Seja $\bar{A} = A + F'(u^*)$, o operador $F'(u^*) \in \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ e portanto $-\bar{A}$ está definido em $\mathcal{D}(A)$ e é setorial com resolvente compacto.

Denotemos por σ^+ a parte do espectro de $\bar{A}$ que está a direita do eixo imaginário. Este consiste de um número finito de autovalores com multiplicidade finita. Se decomposmos X^θ usando a projeção Q definida por σ^+ , temos que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|e^{\bar{A}t}Q\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\gamma t}, \quad t \leq 0, \quad (2.3.4)$$

$$\|e^{\bar{A}t}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(X^\theta, X^\phi)} \leq Mt^{\theta-\phi}e^{-\gamma t}, \quad \phi > \theta, t \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Proposição 2.3.1 *Suponhamos que todos os pontos de equilíbrios (2.2.1) são hiperbólicos. Então, existe um número finito destes.*

Demonstração. Primeiro observemos que, como $f : X^\alpha \rightarrow X$ é limitada, temos que todas as soluções de (2.2.1) satisfazem

$$u = -A^{-1}f(u)$$

e portanto $\|u\|_{X^1} \leq \|f(u)\|_X \leq M$. Como (2.2.1) tem um atrator global, temos que (2.3.3) tem ao menos uma solução (ver [26], Teorema 3.4.7). Como A tem resolvente compacto, temos que o conjunto $\mathcal{E} = \{u : Au + f(u) = 0\}$ é compacto em X^α . Se mostrarmos que toda solução (2.3.3) é isolada, então existe um número finito destas. Para mostrar isto, observamos que qualquer $u \in \mathcal{E}$ é uma solução de (2.3.3), se e, somente se, esta é ponto fixo de

$$\Phi(u) = -(A + f'(u^*))^{-1}(f(u) - f'(u^*)u).$$

Vamos mostrar que $\Phi : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$ é uma contração numa bola fechada pequena $\bar{B} \subset X^\alpha$ centrada em u^* . Neste caso, u^* é o único elemento de $\mathcal{E}$ em $\bar{B}$ e u^* é isolado. Para ver isto observe que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X^\alpha} &\leq M\|f(u) - f(v) - f'(u^*)(u - v)\|_X \\ &\leq M\|(f'(su + (1-s)v) - f'(u^*))(u - v)\|_X \\ &\leq M\|f'(su + (1-s)v) - f'(u^*)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)}\|u - v\|_{X^\alpha}. \end{aligned}$$

Como f é continuamente diferenciável, existe uma bola fechada pequena $\bar{B} \subset X^\alpha$ ao redor de u^* tal que

$$M \sup_{z \in \bar{B}} \|f'(z) - f'(u^*)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)} < 1.$$

Nesta bola Φ tem um único ponto fixo, concluindo assim a demonstração. ■

Em seguida vamos mostrar que existem muitas outras soluções além das soluções estacionárias (de equilíbrio). É fácil de ver que toda solução de (2.2.1) permanece limitada

para qualquer $u_0 \in X^\alpha$, isto é, $\sup_{t \geq 0} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} < \infty$. Se mostrarmos que uma solução $u(\cdot, u_0)$ está definida em $\mathbb{R}$, toma valores em X^α e está limitada, então esta está no atrator $\mathcal{A}$. Então é suficiente mostrar que uma solução está definida e limitada $\mathbb{R}^-$ para obter uma solução no atrator.

Definição 2.3.7 *Seja $u^* \in \mathcal{E}$. Então o conjunto instável de u^* é definido como sendo*

$$W^u(u^*) = \left\{ \eta \in X^\alpha : u(t, \eta) \text{ está definida para todo } t \leq 0 \text{ e } u(t, \eta) \rightarrow u^* \text{ quando } t \rightarrow -\infty \right\}.$$

Antes de dar maiores detalhes de como construir $W^u(u^*)$ ao menos numa vizinhança de u^* , olhemos por um momento o problema linear. Se consideramos a mudança de variáveis $v = u - u^*$ no problema (2.2.1), somando e subtraindo $f'(u^*)v$ no lado direito, obtemos

$$\begin{cases} \dot{v} &= \bar{A}v + f(v + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v \\ v(0) &= u_0 - u^* = v_0, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

onde $\bar{A} = (A + f'(u^*))$. Nesta equação, para v_0 muito pequeno, a parte não linear é muito pequena. Então é natural considerar que acontece quando desprezamos a não-linearidade, isto é, que acontece com a equação

$$\begin{cases} \dot{v} &= \bar{A}v \\ v(0) &= v_0. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Se Q é a projeção definida pelo espectro de $\bar{A}$ que está no lado direito do eixo imaginário, temos que, para $v_0 \in QX^\alpha$, a solução $v(t, v_0)$ de (2.3.7) existe para todo tempo negativo e $v(t, v_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $v + u^* \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Isso serve como inspiração ao que queremos fazer. Quando perturbamos (2.3.7) com uma não-linearidade muito pequena, devemos observar soluções de (2.3.6) que existem para todo tempo negativo. Naturalmente os dados iniciais pelos quais tais soluções existem não estarão mais em QX^α , mas estarão numa variedade não-linear perto destas.

Proposição 2.3.2 *Suponhamos que u^* é um equilíbrio hiperbólico para (2.2.1). Pela proposição 2.3.1, u^* é uma solução isolada (2.3.3). Então, existem uma vizinhança U de u^* em X^α e uma função $h : QU \rightarrow (I - Q)U$, tais que a variedade instável local $W^u(u^*)$ é dada por*

$$W_\delta^u(u^*) = \{w \in W^u(u^*), \|w - u^*\|_{X^\alpha} < \delta\} = \{(Qu, h(Qu)) : u \in U\}$$

Figura 2.1: Variedade invariante

Demonstração. Reescrevendo (2.2.1) com $w = u - u^*$, para lidar com a vizinhança de u^* chegamos em

$$\dot{w} = \bar{A}w + f(w + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)w \quad (2.3.8)$$

Agora vamos decompor a equação (2.3.8) no seguinte modo. Se w é uma solução para (2.3.8), escrevemos $v = Qw$ e $z = w - v$. Portanto, se B denota a restrição de $\bar{A}$ em QX e por $\tilde{A}$ a restrição de $\bar{A}$ em $(I - Q)X$, temos que

$$\dot{v} = Bv + Qf(v + z + u^*) - Qf(u^*) - Qf'(u^*)(v + z)$$

e

$$\dot{z}_t = \tilde{A}z + (I - Q)f(v + z + u^*) - (I - Q)f(u^*) - (I - Q)f'(u^*)(v + z).$$

Escrevemos $H(v, z) = Qf(v + z + u^*) - Qf(u^*) - Qf'(u^*)(v + z)$ e

$$G(v, z) = (I - Q)f(v + z + u^*) - (I - Q)f(u^*) - (I - Q)f'(u^*)(v + z)$$

Portanto, temos que, em $(0, 0)$, H e G são identicamente zero com derivadas nulas. Como H e G são continuamente diferenciáveis, temos que, dados $\rho > 0$ e $\delta > 0$ tais que, se $\|v\|_{X^\alpha} + \|z\|_{X^\alpha} < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|H(v, z)\|_X &\leq \rho, \\ \|G(v, z)\|_X &\leq \rho, \\ \|H(v, z) - H(\tilde{v}, \tilde{z})\|_X &\leq \rho(\|v - \tilde{v}\|_{X^\alpha} + \|z - \tilde{z}\|_{X^\alpha}), \\ \|G(v, z) - G(\tilde{v}, \tilde{z})\|_X &\leq \rho(\|v - \tilde{v}\|_{X^\alpha} + \|z - \tilde{z}\|_{X^\alpha}). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Podemos estender H, G fora da bola $B_\delta(u^*)$ de tal modo que as limitações (2.3.9) valham para todo $v \in QX^\alpha, z \in (I - Q)X^\alpha$.

Observação 2.3.2 *O procedimento para estender uma função g , definida na bola de raio $1/n$, de tal modo que esta se transforme numa função globalmente Lipschitz continua, sem mudar sua constante de Lipschitz, é o seguinte: Dada uma função $g : V \times Z \rightarrow W$, V, Z e W espaços de Banach, defina*

$$g_n(v, z) = \begin{cases} g(v, z), & \|v + z\| \leq \frac{1}{n} \\ g\left(\frac{v}{n\|v + z\|}, \frac{z}{n\|v + z\|}\right), & \|v + z\| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

As constantes de Lipschitz para g_n são as constantes de Lipschitz para g quando é restringida à bola $B_{\frac{1}{n}}$. Isto é,

$$\|g_n(v_1, z_1) - g_n(v_2, z_2)\| \leq L_{g_n} (\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|)$$

e L_{g_n} é a constante de Lipschitz para g na bola de raio $1/n$.

Este procedimento é aplicado a H e G para obter as extensões desejadas para H e G .

Com a notação acima, a equação (2.3.8) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{v} &= Bv + H(v, z) \\ \dot{z} &= \tilde{A}z + G(v, z), \end{cases} \quad (2.3.10)$$

com $v \in QX^\alpha, z \in (I - Q)X^\alpha$, onde H, G satisfazem (2.3.9) para todo $v \in QX^\alpha, z \in (I - Q)X^\alpha$. Também, para alguma constante positiva M, γ ,

$$\begin{aligned} \|e^{\tilde{A}t}z\|_{X^\alpha} &\leq Me^{-\gamma t}\|z\|_{X^\alpha}, \quad t \geq 0, \\ \|e^{\tilde{A}t}z\|_{X^\alpha} &\leq Mt^{-\alpha}e^{-\gamma t}\|z\|_X, \quad t \geq 0, \\ \|e^{Bt}v\|_{X^\alpha} &\leq Me^{\gamma t}\|v\|_X, \quad t \leq 0. \end{aligned}$$

Aqui, notamos que QX^α e QX são os mesmos subespaços de X e que a norma em X^α é equivalente em X neste subespaços. Agora vamos mostrar que, para $\rho > 0$ convenientemente pequeno, existe uma variedade instável para u^*

$$W^u = \{(v, z) : z = \mathcal{S}^*(v), v \in QX^\alpha\}$$

onde $\mathcal{S}^* : QX^\alpha \rightarrow (I - Q)X^\alpha$ é limitada e Lipschitz contínua.

Observamos que estamos olhando para uma função $\mathcal{S}^*$ tal que, se $X^\alpha \ni (\eta, \mathcal{S}^*(\eta))$ então a solução de (2.3.10), começando em $v(\tau) = \eta$, $z(\tau) = \mathcal{S}^*(\eta)$, permanece no gráfico de $\mathcal{S}^*$ para todo tempo positivo e negativo. Isto significa que $z(t) = \mathcal{S}^*(v(t))$ para todo t e que (2.3.10) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{v} &= Bv + H(v, \mathcal{S}^*(v)) \\ \dot{z} &= \tilde{A}z + G(v, \mathcal{S}^*(v)). \end{cases} \quad (2.3.11)$$

A solução $(v(t), z(t))$ deve ir a zero quando $t \rightarrow -\infty$ e em particular esta deve permanecer limitada. Como

$$z(t) = e^{\tilde{A}(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\tilde{A}(t-s)} G(v(s), \mathcal{S}^*(v(s))) ds,$$

fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$, temos que

$$z(t) = \mathcal{S}^*(v(t)) = \int_{-\infty}^t e^{\tilde{A}(t-s)} G(v(s), \mathcal{S}^*(v(s))) ds,$$

em particular

$$\mathcal{S}^*(\eta) = \mathcal{S}^*(v(\tau)) = z(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{\tilde{A}(\tau-s)} G(v(s), \mathcal{S}^*(v(s))) ds$$

indicando o caminho para provar a existência de $\mathcal{S}^*$.

Para mostrar a existência de tal função em $\mathcal{S}^*$, usaremos o princípio de contração de Banach. Para $D > 0$, $\Delta > 0$, $0 < \vartheta < 1$ dados, seja $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \rho M \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) &\leq D \\ \rho M^2 (1+\Delta) \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) &\leq \Delta \\ \frac{\gamma}{2} &\leq \gamma - \rho M (1+\Delta) \leq \gamma \\ \rho M \Gamma(1-\alpha) \gamma^{\alpha-1} \left[1 + \frac{\rho M (1+\Delta)}{\gamma - \rho M (1+\Delta)} \right] &\leq \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{S} : QX^\alpha \rightarrow (I - Q)X^\alpha$ satisfazendo

$$\|\mathcal{S}\| := \sup_{v \in QX^\alpha} \|\mathcal{S}(v)\|_{X^\alpha} \leq D, \quad \|\mathcal{S}(v) - \mathcal{S}(\tilde{v})\|_{X^\alpha} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha}. \quad (2.3.12)$$

Seja $v(t) = \psi(t, \tau, \eta, \mathcal{S})$ solução de

$$\frac{dv}{dt} = Bv + H(v, \mathcal{S}(v)), \quad \text{for } t < \tau, \quad v(\tau) = \eta, \quad (2.3.13)$$

e definamos

$$\Phi(\mathcal{S})(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{\tilde{A}(\tau-s)} G(v(s), \mathcal{S}(v(s))) ds. \quad (2.3.14)$$

Observe que

$$\|\Phi(\mathcal{S})(\cdot)\|_{X^\alpha} \leq \int_{-\infty}^{\tau} \rho M(\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} ds = \rho M \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha). \quad (2.3.15)$$

Da escolha de ρ temos que, $\|\Phi(\mathcal{S})(\cdot)\|_{X^\alpha} \leq D$. Logo, suponhamos que $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ são funções satisfazendo (2.3.12), $\eta, \tilde{\eta} \in QX^\alpha$ e denotemos $v(t) = \psi(t, \tau, \eta, \mathcal{S})$, $\tilde{v}(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\eta}, \tilde{\mathcal{S}})$. Então,

$$v(t) - \tilde{v}(t) = e^{B(t-\tau)}(\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^t e^{B(t-s)} [H(v, \mathcal{S}(v)) - H(\tilde{v}, \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v}))] ds.$$

Com alguns cálculos simples e standard, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{QX^\alpha} &\leq M e^{\gamma(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} + M \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} \|H(v, \mathcal{S}(v)) - H(\tilde{v}, \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v}))\|_{QX^\alpha} ds \\ &\leq M e^{\gamma(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{-\gamma(t-s)} \left(\|\mathcal{S}(v) - \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v})\|_{X^\alpha} + \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} \right) ds \\ &\leq M e^{\gamma(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} \left(\|\mathcal{S}(\tilde{v}) - \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v})\|_{X^\alpha} + (1+\Delta) \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} \right) ds \\ &\leq M e^{\gamma(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} \left((1+\Delta) \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} + \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|_{X^\alpha} \right) ds \\ &\leq M e^{\gamma(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} \\ &\quad + \rho M (1+\Delta) \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} ds + \rho M \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|_{X^\alpha} \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = e^{-\gamma(t-\tau)} \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{QX^\alpha}$. Então,

$$\phi(t) \leq M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} + \rho M \int_t^{\tau} e^{\gamma(\tau-s)} ds \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|_{X^\alpha} + M \rho (1+\Delta) \int_t^{\tau} \phi(s) ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{QX^\alpha} &\leq \left[M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} e^{\gamma(t-\tau)} + \rho M \int_t^{\tau} e^{\gamma(t-s)} ds \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|_{X^\alpha} \right] e^{-\rho M (1+\Delta)(t-\tau)} \\ &\leq \left[M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha} + \rho M \gamma^{-1} \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|_{X^\alpha} \right] e^{-\rho M (1+\Delta)(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\mathcal{S})(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}})(\tilde{\eta})\|_{X^\alpha} &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} \|G(v, \mathcal{S}(v)) - G(\tilde{v}, \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v}))\|_X ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} \left(\|\mathcal{S}(v) - \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{v})\|_{X^\alpha} + \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} \right) ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} \left[(1+\Delta) \|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha} + \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\| \right] ds.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} ds &\stackrel{u=\tau-s}{=} \int_0^{\infty} u^{-\alpha} e^{-\gamma u} du \stackrel{\gamma u=v}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^{-\alpha} e^{-v} \frac{dv}{\gamma} \\
&= \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \quad (2.3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-s)} e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-s)} ds &\stackrel{u=\tau-s}{=} \int_0^{\infty} u^{-\alpha} e^{(\rho M(1+\Delta)-\gamma)u} du \\
&= (\gamma - \rho M(1+\Delta))^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha). \quad (2.3.17)
\end{aligned}$$

Usando as estimativas para $\|v - \tilde{v}\|_{QX^\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\mathcal{S})(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}})(\tilde{\eta})\| &\leq \rho M \Gamma(1-\alpha) \gamma^{\alpha-1} \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{\gamma - \rho M(1+\Delta)} \right] \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\| \\
&\quad + \rho M^2(1+\Delta) \Gamma(1-\alpha) \gamma^{\alpha-1} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{QX^\alpha}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$I_{\mathcal{S}} = \rho M \Gamma(1-\alpha) \gamma^{\alpha-1} \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{\gamma - \rho M(1+\Delta)} \right]$$

e

$$I_{\eta} = \rho M^2(1+\Delta) \Gamma(1-\alpha) \gamma^{\alpha-1}.$$

É fácil ver que, dado $\vartheta < 1$, existe ρ_0 tal que, para $\rho \leq \rho_0$, $I_{\mathcal{S}} \leq \vartheta$ e $I_{\eta} \leq \Delta$ e

$$\|\Phi(\mathcal{S})(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}})(\tilde{\eta})\|_{X^\alpha} \leq \Delta \|\eta - \eta'\|_{QX^\alpha} + \vartheta \|\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}\|. \quad (2.3.18)$$

As desigualdades (2.3.15) e (2.3.18) implicam que Φ é uma contração da classe de funções que satisfazem (2.3.12) em si mesmo. Portanto, esta tem um único ponto fixo $\mathcal{S}^* = \Phi(\mathcal{S}^*)$ nesta classe.

Resta mostrar que $W^u = \{(v, \mathcal{S}^*(v)) : v \in QX^\alpha\}$ é uma variedade invariante para (2.3.10). Seja $(v_0, z_0) \in W^u$, $z_0 = \mathcal{S}^*(v_0)$. Denote por $v^*(t)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = Bv + H(v, \mathcal{S}^*(v)), \quad v(0) = v_0.$$

Isto define uma curva $(v^*(t), \mathcal{S}^*(v^*(t))) \in S$, $t \in \mathbb{R}$. Mas a única solução de

$$\dot{z} = \tilde{A}z + G(v^*(t), \mathcal{S}^*(v^*(t))),$$

a qual permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$ é

$$z^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tilde{A}(t-s)} G(v^*(s), \mathcal{S}^*(v^*(s))) ds = \mathcal{S}^*(v^*(t)).$$

Portanto, $(v^*(t), \mathcal{S}^*(v^*(t)))$ é uma solução de (2.3.10) por (v_0, z_0) e a invariância é provada. ■

2.3.3 Estrutura gradiente

Em seguida vamos assumir que o problema (2.2.1) tem estrutura gradiente.

Definição 2.3.8 Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é gradiente se existe uma função contínua $V : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

(i) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)u_0) \in \mathbb{R}$ é não-crescente,

(ii) $\mathcal{E} = \{u \in X^\alpha : Au + f(u) = 0\} = \{u_0 \in X^\alpha : V(T(t)u_0) = V(u_0), \forall t \in \mathbb{R}\}$.

A função V na Definição 2.3.8 é chamada de *função de Liapunov* para $\{T(t) : t \geq 0\}$. A idéia de função de Liapunov é muito usada para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações de evolução.

Proposição 2.3.3 Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ assintoticamente compacto em X^α , suponhamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é gradiente e que para cada $v \in X^\alpha$, a órbita $\gamma^+(v)$ é limitada em X^α . Então para cada $v \in X^\alpha$, o conjunto ω -limite $\omega(v)$ está dentro do conjunto $\mathcal{E}$. Se além disso, o conjunto $\mathcal{E}$ é limitado em X^α , então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo em X^α .

O seguinte resultado é uma consequência imediata da proposição anterior.

Corolário 2.3.1 Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C^0 -semigrupo assintoticamente compacto em X^α e suponhamos que a órbita de todo conjunto limitado é limitada. Além disso, suponhamos que o conjunto dos pontos de equilíbrio de $\{T(t) : t \geq 0\}$ está num conjunto limitado de X^α . Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é gradiente, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem um atrator global.

2.3.4 Caracterização do atrator global

Lema 2.3.7 Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é gradiente, então para qualquer $u_0 \in X^\alpha$, $\omega(u_0) = \{u^*\}$ para algum $u^* \in \mathcal{E}$. Como uma consequência disto concluímos que $T(t)u_0 \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Primeiro note que se $v \in \omega(u_0)$ então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $T(t_n)u_0 \rightarrow v$. Como $V(T(t)u_0)$ é decrescente e limitada por baixo, temos que existe um $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $V(T(t)u_0) \rightarrow \ell$ quando $t \rightarrow \infty$. É fácil ver que $V(T(t)v) = \ell$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Disto, segue que $v \in \mathcal{E}$. Como o conjunto $\mathcal{E}$ consiste só de um número finito de pontos e como $\omega(u_0)$ é conexo, então $\omega(u_0) = \{u^*\}$ para algum $u^* \in \mathcal{E}$. ■

O próximo resultado implica que se existe uma órbita negativa por u_0 que é limitada, então u_0 está na variedade instável de algum $u^* \in \mathcal{E}$.

Lema 2.3.8 *Suponhamos que $u_0 \in X^\alpha$ é tal que, existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ por u_0 e tal que $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ é compacto. Definamos*

$$\alpha_\phi(u_0) = \{v \in X^\alpha : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi(-t_n) \rightarrow v\}.$$

Então, existe um $u^ \in \mathcal{E}$ tal que $\alpha_\phi(u_0) = \{u^*\}$. Como uma consequência disto, concluímos que $\phi(t) \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow -\infty$.*

Demonstração. Primeiro notemos que se $v \in \alpha_\phi(u_0)$ então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi(-t_n) \rightarrow v$. Como $V(\phi(-t))$ é crescente e limitada por cima, temos que existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \rightarrow r$ quando $t \rightarrow \infty$. É fácil ver que $V(T(t)v) = r$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Disto segue que $v \in \mathcal{E}$. Como o conjunto $\mathcal{E}$ consiste só de um número finito de pontos e como $\alpha_\phi(u_0)$ é conexo, temos que $\alpha_\phi(u_0) = \{u^*\}$ para algum $u^* \in \mathcal{E}$. Além disso, para qualquer sequência $t_n \rightarrow \infty$, $\{\phi(-t_n)\}$ tem uma subsequência a qual converge para u^* e portanto $\phi(t) \rightarrow u^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. ■

Lema 2.3.9 *Seja S um subconjunto relativamente compacto de X^α sob $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se $v \in S$, então existem $v^+, v^- \in \mathcal{E}$ tais que $v \in W^u(v^+)$ e $v \in W^s(v^-)$.*

Demonstração. Se $v \in S$, como S é invariante, existe uma órbita completa $\mathbb{R} \ni t \mapsto T(t)v \in S$ por v . Como $\bar{S}$ é compacto, esta órbita completa é compacta. O resultado agora segue dos lemas prévios. ■

Deste lema segue o seguinte resultado.

Teorema 2.3.3 *Seja $\mathcal{A}$ o atrator para $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então $\mathcal{A} = \bigcup_{u^* \in \mathcal{E}} W^u(u^*)$, onde u^* é hiperbólico*

2.4 Equações de reação-difusão com condições de fronteira não-lineares

2.4.1 Formulação semilinear

Nesta seção, introduziremos alguns espaços de funções e operadores para que o problema (2.4.1) possa ser escrito numa forma semilinear abstrata e possamos utilizar a fórmula de variação das constantes. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e consideremos o seguinte problema de evolução de reação-difusão com condições não-lineares na fronteira

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u_\nu = g(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.4.1)$$

onde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções não-lineares com um certo grau de regularidade que precisaremos mais adiante. Denotamos por $f(u) = f(u(t, x))$, com $x \in \Omega$, $g(u) = g(u(t, x))$, com $x \in \partial\Omega$, $u : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 < t < \infty$, onde u_ν é a derivada normal exterior e a condição inicial supomos que é conhecida.

O problema parabólico não-linear (2.4.1) representa o modelo de evolução no tempo da concentração u de uma determinada substância num recipiente, a qual está exposta aos efeitos de reações, representadas pelas funções f e g , não-lineares tanto no domínio Ω como na fronteira do domínio $\partial\Omega$ e de uma difusão homogênea.

Quando $f \equiv 0$ (ou $g \equiv 0$), é fácil de comprovar que os zeros da função g (ou os zeros da função f) são soluções de equilíbrio constantes para o problema (2.4.1). A existência de soluções de equilíbrios estáveis não-constantes para o problema (2.4.1), com $N \geq 2$, é um fenômeno importante, chamado de *morfogêneses* ou *formação de padrões*.

Agora consideremos os espaços de Sobolev standard $H^1(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$, onde $\Gamma := \partial\Omega$. O símbolo $\|\cdot\|$ sempre representara a norma em $L^2(\Omega)$. Seja $0 < s < 1$ e denotemos por $H^{-s}(\Omega)$ ($H^{-s}(\Gamma)$) o espaço dual de $H^s(\Omega)$ ($H^s(\Gamma)$). Observe que este símbolo é geralmente usado para denotar o espaço dual de $H_0^s(\Omega)$. Entretanto, esta notação não dá confusão. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s, s}$ ($= \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-s}, H^s}$), o produto de dualidade entre estes espaços. Em particular, o produto escalar em $L^2(\Omega)$ será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se não há possível confusão, nós não indicaremos se os espaços produtos ou produtos de dualidade são referidos às funções em Ω ou Γ . Quando necessário, escreveremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ para diferenciar ambos casos.

Denotaremos por γ , o operador traço definido em $H^s(\Omega)$ com valores em $H^{s-1/2}(\Gamma)$, para $s > 1/2$. Além disso, para uma função dada $\varphi \in H^s(\Omega)$, identificamos seu traço, $\gamma(\varphi) \in$

$H^{s-1/2}(\Gamma)$, com a forma linear $\gamma(\varphi) \in H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Omega)$, tal que para cada $\phi \in H^1(\Omega)$

$$\langle \gamma(\varphi), \phi \rangle_{-1,1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varphi, \phi \rangle_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \gamma(\varphi) \gamma(\phi), \quad (2.4.2)$$

isto é, usamos as imersões $H^{s-1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Consideremos os seguintes operadores lineares

$$\begin{aligned} A_0 : H_N^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) & \text{e} & A_{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow (H_N^2(\Omega))' \\ u &\longmapsto -\Delta u + u & & u \longmapsto \Phi_u, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}(A_0) = \{u \in H^2(\Omega) : u_\nu = 0 \text{ em } \Gamma\} \stackrel{\text{def}}{=} H_N^2(\Omega)$ e Φ_u é a forma linear contínua definida por

$$\begin{aligned} \Phi_u : H_N^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Omega} (-u \Delta v + uv) dx. \end{aligned}$$

Observe que para $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H_N^2(\Omega)$,

$$\Phi_u(v) = \int_{\Omega} (-u \Delta v + uv) = \langle \Phi_u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) = \langle \Psi_u, v \rangle = \Psi_u(v),$$

onde Ψ_u é um funcional linear contínuo definido por

$$\begin{aligned} \Psi_u : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv). \end{aligned}$$

Na verdade o funcional linear Ψ_u é a restrição do funcional Φ_u ao espaço $H^1(\Omega)$, isto é, $\Psi_u = \Phi_u|_{H^1(\Omega)}$. Agora definamos o operador

$$\begin{aligned} A = A_{-1}|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto \Psi_u. \end{aligned}$$

Observe que $\Psi_u(v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx = \langle \Psi_u, v \rangle_{-1,1} = \langle Au, v \rangle_{-1,1}$.

Agora, seja u uma solução forte de (2.4.1). Em particular, $u(t, \cdot) \in H^2(\Omega)$ e $u_t(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$. Consideremos $v \in H^1(\Omega)$. Usando a fórmula de Green, do problema (2.4.1), obtemos

$$\int_{\Omega} u_t v dx + \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} (f(u) + u) v dx + \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(v) d\sigma. \quad (2.4.3)$$

Usando os produtos de dualidades entre os espaços $(H^1(\Omega))'$ e $H^1(\Omega)$, a equação (2.4.3) pode

ser escrita como

$$\langle u_t, v \rangle_{-1,1} + \langle Au, v \rangle_{-1,1} = \langle f(u) + u, v \rangle_{-1,1} + \langle g(\gamma(u)), \gamma(v) \rangle_{\Gamma}. \quad (2.4.4)$$

Usando a equação (2.4.2), temos que

$$\langle g(\gamma u), \gamma(v) \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(v) d\sigma = \int_{\Gamma} \gamma(g(u)) \gamma(v) d\sigma = \langle \gamma(g(u)), v \rangle_{-1,1}, \quad (2.4.5)$$

e portanto, usando a equação (2.4.5) em (2.4.4), temos

$$\langle u_t, v \rangle_{-1,1} + \langle Au, v \rangle_{-1,1} = \langle f(u) + u, v \rangle_{-1,1} + \langle \gamma(g(u)), v \rangle_{-1,1}. \quad (2.4.6)$$

Portanto, podemos escrever o problema (2.4.1) na forma abstrata

$$\begin{cases} u_t + Au &= F(u) \\ u(0) &= u_0 \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.4.7)$$

onde $A = A_{-1}|_{H^1(\Omega)}$ e $F : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é dado por $F(u) = f(u) + u + \gamma(g(u))$.

Definição 2.4.1 (Solução local) *Uma função $u : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ é uma solução local de (2.4.1) se satisfaz*

- (i) u é contínua em $[0, T]$.
- (ii) $u \in C^1((0, T), H^{-1}(\Omega))$.
- (iii) u satisfaz (2.4.3) para $t \in (0, T)$.

onde T é um número real positivo ($T > 0$).

Antes de continuarmos vamos enunciar um resultado bem conhecido com relação ao operador A_0 (ver [17], Proposição 2.1).

Proposição 2.4.1 *O operador A_0 definido acima é positivo, auto-adjunto e tem resolvente compacto em $L^2(\Omega)$. Em particular, este é um operador setorial em $L^2(\Omega)$ e seus espaços de potências fracionárias verificam $X^\alpha \subset H^{2\alpha}(\Omega)$, para $\alpha \geq 0$ e em particular*

$$X^1 = D(A_0), \quad X^{1/2} = H^1(\Omega), \quad X^0 = L^2(\Omega), \quad X^{-1/2} = H^{-1}(\Omega),$$

onde $H^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} (H^1(\Omega))'$.

Para resolver problemas com condições de fronteira não-homogêneas, é natural considerar uma classe especial de elementos $F \in H^{-1}(\Omega)$ definidas como

$$\langle F, \phi \rangle_{-1,1} = \langle f, \phi \rangle_{\Omega} + \langle g, \gamma(\phi) \rangle_{\Gamma},$$

para cada $\phi \in H^1(\Omega)$, onde $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Então, podemos escrever de uma maneira curta $F \stackrel{\text{def}}{=} f_{\Omega} + g_{\Gamma}$.

2.4.2 Existência local de solução

Suponhamos que L é um operador setorial num espaço de Hilbert X . Podemos definir as potências fracionárias L^{α} de L e os espaços de potências fracionárias $X^{\alpha} := \mathcal{D}(L^{\alpha})$, dotado com a norma do gráfico, $\alpha \in \mathbb{R}$, $X^{-\alpha} = (X^{\alpha})'$ para $\alpha > 0$. Ainda mais, L é setorial em X^{α} com domínio $X^{\alpha+1}$ para qualquer α . Para maiores detalhes ver ([1], [28]).

A prova deste resultado encontra-se em [17], Teorema 3.1.

Teorema 2.4.1 *Suponha que $F : X^{\alpha} \rightarrow X^{\beta}$ é localmente Lipschitz e limitada em conjuntos limitados, onde $0 \leq \alpha - \beta < 1$. Então, o problema parabólico abstrato*

$$\begin{cases} u_t + Lu &= F(u) \\ u(0) &= u_0 \in X^{\alpha} \end{cases} \quad (2.4.8)$$

tem uma única solução definida localmente, dada pela Fórmula da Variação das Constantes

$$u(t) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)}F(u(s))ds,$$

onde e^{-Lt} denota o semigrupo analítico gerado por $-L$. Além disso, u verifica

$$u \in C([0, T], X^{\alpha}) \cap C((0, T), X^{\beta+1}), u_t \in C((0, T), X^{\tau}),$$

para todo $\tau < \beta + 1$, e a equação é satisfeita em X^{β} . Ainda mais, ou a solução está definida para todo $t \geq 0$ ou explode em tempo finito na norma X^{α} .

Vamos aplicar este resultado ao operador A , introduzido na seção anterior, e para isto, consideramos aplicações não-lineares da forma

$$F(u) := f_{\Omega}(u) + g_{\Gamma}(u),$$

onde $f_{\Omega} : X^{\alpha} \rightarrow L^2(\Omega)$ e $g_{\Gamma} : X^{\alpha} \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ para algum $\alpha \geq 0$. Observe que F age em

funções testes $\phi \in H^r(\Omega)$ para $r > 1/2$, da seguinte maneira

$$\langle F(u), \phi \rangle = \langle f_\Omega(u), \phi \rangle_\Omega + \langle g_\Gamma(u), \gamma(\phi) \rangle_\Gamma.$$

Dependendo de propriedades extras de regularidade a função g_Γ , podemos ter

$$F : X^\alpha \longrightarrow X^\beta$$

para uma escolha adequada de $\alpha > 0$ e $\beta \leq 0$. Lembremos que para ter resultados abstratos precisamos ter $0 \leq \alpha - \beta < 1$.

Por outro lado, como queremos levar em consideração termos não-homogêneos na fronteira, isto é, o caso $g \neq 0$, isto implica que $\beta < 0$. Caso contrário, sempre podemos tomar $\beta = 0$. Como estamos interessados em ler a equação em $H^{-1}(\Omega)$, então necessitamos que $-1/2 \leq \beta < 0$.

Também, obtendo estimativas de energia na solução, estamos interessados em ter suficiente regularidade para obtermos $u, u_t \in H^1(\Omega)$, para $t > 0$ e para isto precisamos de acordo com o Teorema 2.4.1, que $\beta + 1 > 1/2$ e então $\beta > -1/2$.

Por outro lado, se queremos que o termo não-linear $g(u)$ dependa dos valores de u em Γ , então devemos ter $\alpha > 1/4$ para que o traço esteja bem definido; caso contrário, podemos tomar $\alpha \geq 0$. Como nós queremos ter dados iniciais pelo menos em $H^1(\Omega)$, devemos requerer que $\alpha \geq 1/2$.

Finalmente, observe que no caso de termos não-nulos na fronteira, há outra limitação superior natural para α e β . Aliás, $\alpha < 3/4$, desde que para $\alpha \geq 3/4$ o espaço X^α incorpora a condição de fronteira $u_\nu = 0$. Também, do resultado de regularidade no Teorema 2.4.1, devemos ter $\beta + 1 < 3/4$, isto, é, $\beta < -1/4$.

Resumindo, se $g \neq 0$, então

$$3/4 > \alpha > 1/4, \quad -1/4 > \beta > -1/2, \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1$$

enquanto que, se $g = 0$, temos o caso standard $\beta = 0, 0 \leq \alpha < 1$.

Então temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4.2 *Suponhamos que $f_\Omega, g_\Gamma, \alpha$ e β são como acima e*

$$F : X^\alpha \longrightarrow X^\beta$$

é localmente Lipschitz e limitada em conjuntos limitados. Então, para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe

uma única solução definida localmente de

$$\begin{cases} u_t + Au = F(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

dada por

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(u(s))ds$$

a qual verifica $u \in C([0, T], X^\alpha) \cap C((0, T), X^{\beta+1})$, $u_t \in C((0, T), X^\tau)$ para cada $\tau < \beta + 1$ e

$$\int_\Omega u_t \phi + \int_\Omega (\nabla u \nabla \phi) = \int_\Omega f(u) \phi + \int_\Gamma g(\gamma u) \gamma \phi \quad (2.4.10)$$

para cada $\phi \in H^1(\Omega)$. Em particular, temos

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & \text{em } \Omega \\ u_\nu - g(u) = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.11)$$

e a solução é definida para todo $t > 0$ ou explode em tempo finito na norma X^α .

Se as não linearidades f e g satisfazem a seguinte condição de crescimento

$$|j(u) - j(v)| \leq c |u - v| (1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \quad (\mathbf{G})$$

onde $j = f, g$ com expoentes ρ_f e ρ_g respectivamente, tais que

$$\rho_f \leq \rho_\Omega := \frac{N+2}{N-2} \quad \text{e} \quad \rho_g \leq \rho_\Gamma := \frac{N}{N-2}, \quad (2.4.12)$$

então as hipóteses do Teorema 2.4.2 estão satisfeitas e portanto temos existência local de solução.

2.4.3 Existência global de solução

Como vimos na seção anterior, se $X = H^1(\Omega)$, tomando $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente Lipschitzianas, temos existência local de solução para o problema (2.4.1).

Suponhamos que existem $B_0, C_0 \in \mathbb{R}$ e $B_1, C_1 \geq 0$ tais que as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} uf(u) &\leq -C_0 u^2 + C_1 |u|, \\ ug(u) &\leq -B_0 u^2 + B_1 |u|, \end{aligned} \quad (\mathbf{S})$$

para $u \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.3 *Suponhamos que f e g satisfazem a condição de crescimento $(\mathbf{G})$ e as*

condições de sinal (S) sejam satisfeitas. Então para qualquer $u_0 \in H^1(\Omega)$, a solução de (2.4.1) por u_0 existe para todo $t \geq 0$. Portanto, podemos definir em $H^1(\Omega)$ o semigrupo não-linear $\{S(t) : t \geq 0\}$ associado a (2.4.1) por $S(t)u_0 = u(t, u_0)$, $t \geq 0$.

2.4.4 Existência de atrator global

Suponhamos que (S) vale e que com C_0 e B_0 de (S), o primeiro autovalor λ_1 do seguinte problema é positivo

$$\begin{cases} -\Delta u + C_0 u &= \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u_\nu + B_0 u &= 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathbf{D})$$

Para garantir a existência de atrator global para o problema (2.4.1) iremos impor, juntamente com a condição de sinal (S), a condição de dissipatividade (D) para (2.4.1).

Teorema 2.4.4 *Suponha que a condição de crescimento (G) e condição de dissipatividade (D) sejam satisfeitas. Então o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ associado a (2.4.1) tem um atrator global $\mathcal{A}$ em $H^1(\Omega)$.*

2.4.5 Estimativas uniformes nos atratores

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados de limitação uniforme nos atratores de (2.4.1). Nesta direção, um primeiro resultado importante é a limitação pontual no atrator $\mathcal{A}$ dada pelo seguinte resultado

Proposição 2.4.2 *Suponhamos que a condição (D) vale. Denotemos por ϕ a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta \phi + C_0 \phi = C_1, & \text{em } \Omega \\ \phi_\nu + B_0 \phi = B_1 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Então, $0 \leq \phi \in L^\infty(\Omega)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x, u_0)| \leq \phi$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e u_0 em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$. Em particular, para qualquer $v \in \mathcal{A}$, temos $|v(x)| \leq \phi(x)$.

Teorema 2.4.5 *Suponhamos que as condições de crescimento (G) e dissipatividade (D) valem. Então,*

$$\sup_{v \in \mathcal{A}} \left\{ \|v\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \right\} \leq K_0,$$

onde K_0 é uma constante que depende do domínio Ω , o primeiro autovalor de (D) λ_1 , C_0 e B_0 . Além disso, se uma das seguintes condições valem:

- existe $b_0 > 0$ com $B_0 \geq b_0$
- $B_0 \geq 0$ e existe $c_0 > 0$ tal que $C_0 \geq c_0 > 0$,

então K_0 depende de $|\Omega|$ do que Ω .

As demonstrações da proposição 2.4.2 e do teorema 2.4.5 encontram-se em [7].

O seguinte resultado é utilizado nas demonstrações.

Lema 2.4.1 (Lema elíptico) *Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do seguinte problema elíptico*

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \lambda\phi = 0, & \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Então,

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K \quad (2.4.15)$$

onde $K := K(|\Omega|, \mu_1, N, p)$.

Demonstração. A demonstração deste lema será adaptada de [7]. Seja μ_1 o primeiro autovalor positivo de

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \lambda\phi = \mu\phi, & \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Seja $\phi \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema elíptico (2.4.14). Primeiramente mostraremos uma limitação em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1.$$

Para fazer isto, definamos

$$\varphi = (\phi - k)^+ \quad \text{para } k \geq 1.$$

Agora, multipliquemos por φ a equação (2.4.14), integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta\phi - \lambda\phi) \varphi &= - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 - \lambda \int_{\Omega} \phi \varphi = 0 \\ \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 - \lambda \int_{\Omega} \varphi^2 - \lambda k \int_{\Omega} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Usando o fato que o primeiro autovalor de (2.4.16) é positivo, temos

$$\mu_1 \int_{\Omega} \varphi^2 - \lambda k \int_{\Omega} \varphi \leq 0.$$

Mas, usando a desigualdade de Young temos, para $\eta > 0$,

$$\int_{\Omega} \varphi \leq |\Omega|^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\eta}{2} |\Omega| + \frac{1}{2\eta} \int_{\Omega} \varphi^2.$$

Então,

$$\left(\mu_1 - \frac{\lambda k}{2\eta}\right) \int_{\Omega} \varphi^2 - \frac{\lambda k \eta}{2} |\Omega| \leq 0,$$

e conseqüentemente

$$\left(\mu_1 - \frac{\lambda k}{2\eta}\right) \int_{\Omega} \varphi^2 \leq \frac{\lambda k \eta}{2} |\Omega|.$$

Tomando $\eta = \frac{\lambda k}{\mu_1}$, obtemos

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\lambda k}{\mu_1} |\Omega|^{1/2}$$

e portanto,

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1, \quad (2.4.17)$$

onde $K_1 := K_1(|\Omega|, \lambda, \mu_1)$.

Agora suponhamos $\frac{2N}{N+2} \leq p < \frac{N}{2}$ e consideremos

$$r := \frac{(N-2)p}{N-2p} \geq 2 \quad \text{e} \quad \varphi \quad \text{como acima.}$$

Multiplicando por $|\varphi|^{r-2}\varphi$ a primeira equação (2.4.14) e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta\varphi - \lambda\varphi) |\varphi|^{r-2}\varphi &= - \int_{\Omega} |\varphi|^{r-1} \Delta\varphi - \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^r = 0 \\ - \left[\int_{\partial\Omega} |\varphi|^{r-1} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \int_{\Omega} \nabla(|\varphi|^{r-1}) \cdot \nabla\varphi \right] &= \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^r \\ \int_{\Omega} \nabla(|\varphi|^{r-1}) \cdot \nabla|\varphi| &= \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^r. \end{aligned}$$

Observe que $\nabla(|\varphi|^{r-1}) = (r-1)|\varphi|^{r-2}\nabla(|\varphi|)$, então

$$(r-1) \int_{\Omega} |\varphi|^{r-2} \nabla(|\varphi|) \cdot \nabla(|\varphi|) = \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^r. \quad (2.4.18)$$

Por outro lado, $\nabla(|\varphi|^{r/2}) = \frac{r}{2} |\varphi|^{\frac{r-2}{2}} \nabla(|\varphi|)$. Com isto temos

$$\nabla(|\varphi|^{r/2}) \cdot \nabla(|\varphi|^{r/2}) = \frac{r^2}{4} |\varphi|^{r-2} \nabla(|\varphi|) \cdot \nabla(|\varphi|). \quad (2.4.19)$$

Substituindo (2.4.19) em (2.4.18), temos

$$\frac{4(r-1)}{r^2} \int_{\Omega} \left| \nabla(|\varphi|^{r/2}) \right|^2 = \lambda \int_{\Omega} \left(|\varphi|^{r/2} \right)^2.$$

Fazendo $v := |\varphi|^{r/2}$ e lembrando que $\frac{p'}{r} = \frac{N}{N-2}$, obtemos

$$4\frac{r-1}{r^2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \lambda \int_{\Omega} v^2 = 0.$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que

$$4\frac{r-1}{r^2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \delta \int_{\Omega} v^2 \geq \frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

então

$$\frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda_{\delta} \int_{\Omega} v^2, \quad \lambda_{\delta} = \lambda + \delta.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \lambda_{\delta} \int_{\Omega} v^2 = \lambda_{\delta} \int_{\Omega} v^{2(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})} = \lambda_{\delta} \int_{\Omega} v^{2/r} \cdot v^{2/r'} \\ &\leq \lambda_{\delta} \left[\int_{\Omega} (v^{2/r})^r \right]^{1/r} \cdot \left[\int_{\Omega} (v^{2/r'})^{r'} \right]^{1/r'} \\ &= \lambda_{\delta} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/r} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/r'} \\ &\leq \lambda_{\delta} C_1 \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/r} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}^{2/r'}. \end{aligned}$$

Como $2 - \frac{2}{r'} = \frac{2}{r}$, temos

$$\frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{2/r} \leq \lambda_{\delta} C_1 \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/r}. \quad (2.4.20)$$

Por outro lado $\frac{r-1}{r^2} \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^{2/r} = \frac{r-1}{r^2} \|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)}^{2/r}$.

Fazendo uso da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, temos

$$\frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{2/r} \geq \frac{r-1}{r^2} \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}^{2/r} = \frac{r-1}{r^2} \|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)}^{2/r}. \quad (2.4.21)$$

Voltando para (2.4.20) e usando $v := |\varphi|^{r/2}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{r^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{2/r} &\leq \lambda_{\delta} C_1 \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/r} = \lambda_{\delta} C_1 \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{1/r} \\ &= \lambda_{\delta} C_1 \left(\int_{\Omega} (|\varphi|^{r/2})^2 \right)^{1/r} \\ &= \lambda_{\delta} C_1 \|\varphi\|_{L^r(\Omega)}^{2/r}. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Juntando (2.4.21) e (2.4.22), temos

$$\frac{r-1}{r^2} \|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)} \leq \lambda_\delta C_1 \|\varphi\|_{L^r(\Omega)}.$$

Mas $2 \leq r \leq \frac{Np}{N-2}$, então para cada $\vartheta > 0$, existe $C_\vartheta(|\Omega|, N, P)$ tal que

$$\|\varphi\|_{L^r(\Omega)} \leq \vartheta \|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)} + C_\vartheta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Com isto,

$$\left(\frac{r-1}{r^2} - \lambda_\delta C_1 C_\vartheta \right) \|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)} \leq \lambda_\delta C_1 C_\vartheta \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

e portanto

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)} \leq K_2 \left[k + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

onde $K_2 := K_2(|\Omega|, N, p)$.

Agora, para todo $q \geq 2$, existe $p_0 \in \left[\frac{2N}{N+2}, \frac{N}{2} \right)$ tal que $q = \frac{Np_0}{N-2p_0}$, e consequentemente

$$\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq K_2 \left[k + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right]. \quad (2.4.23)$$

Para $k \geq 1$, consideremos o conjunto $A_k := \{x \in \Omega : \phi(x) > k\}$. Como acima, para $\varphi = (\phi - k)^+$, existe λ_δ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \lambda_\delta \int_{\Omega} \varphi^2 \geq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ainda, multiplicando a primeira equação de (2.4.14) por φ temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = \lambda \int_{\Omega} \varphi^2.$$

Pela imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, existe C_2 tal que $\|\varphi\|_{L^{\frac{Np}{N-2p}}(\Omega)} \leq C_2 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \geq \tilde{C}_1 \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\ \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |\varphi| \leq \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} |A_k|^{\frac{N+2}{2N}}, \end{aligned}$$

onde $\frac{2N}{N+2}$ é o expoente conjugado de $\frac{2N}{N-2}$. Então,

$$\begin{aligned} \left(\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} |A_k|^{-\frac{N+2}{2N}} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_2 \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^2. \end{aligned}$$

Agora, vamos estimar $\int_{\Omega} |\varphi|^2$. Por um lado temos

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 \leq \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq \left\{ \left[\int_{\Omega} \left(|\varphi|^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \right]^{\frac{q}{q-1}} \cdot |A_k|^{\frac{-1}{q-1}} \right\}^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} |A_k|^{\frac{-1}{q}}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\frac{q-1}{q}} + \frac{1}{-(q-1)} = 1$. Com isto,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)} &\leq \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} |A_k|^{\frac{-1}{q}} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} |A_k|^{\frac{N+2}{2N} - \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Então

$$\lambda \int_{\Omega} |\varphi|^2 \leq \lambda C_2 \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \cdot |A_k|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{q}},$$

onde tomando $q = 2N$ e usando (2.4.23) temos

$$\lambda \int_{\Omega} |\varphi|^2 \leq \lambda C_2 \left[k + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \cdot |A_k|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}}.$$

Portanto

$$\left(\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} |A_k|^{-\frac{N+2}{2N}} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda C_2 \left[k + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right] |A_k|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} \leq \lambda C_2 |A_k|^{1+\tau} \left[k + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

onde $\tau = \frac{3}{2N}$. Logo, usando o Lema 5.1 de [35], obtemos

$$\max \{ \phi(x) : x \in \Omega \} \leq \tilde{K} \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

onde trocando, ϕ por $-\phi$, e usando o mesmo argumento acima, obtemos

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{K} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usando (2.4.17), segue que $\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$, onde $K := K(|\Omega|, \mu_1, N, p)$. ■

O seguinte resultado é uma adaptação do Lema B.1 (iv) em [7] e sua prova é feita para melhor entendimento do leitor

Lema 2.4.2 *Sejam $f \in L^\infty(\Omega)$, com $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, e $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do seguinte problema elíptico*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega; \\ u_\nu = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Então

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k_0. \quad (2.4.25)$$

Demonstração. Definamos $k_0 := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ e $\phi := (u - k_0)^+$. Usando ϕ como uma função teste para a equação (2.4.24) e usando integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 + \int_{\Omega} \phi^2 \leq 0.$$

Disto, segue que $\phi \equiv 0$, implicando em $u(x) \leq k_0$. Com um argumento similar para $-u$, obtemos o resultado desejado. ■

2.4.6 Estabilidade de equilíbrios

Nesta seção, estudaremos as soluções de equilíbrio (ver Definição 2.3.5) para o problema de evolução (2.4.1), considerado na seção 2.4.1, isto é, estudaremos as soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em } \Omega \\ u_\nu - g(u) = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.26)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Definição 2.4.2 *Suponhamos que existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ do ponto de equilíbrio $u_0 \in X^\alpha$ tal que as soluções de (2.4.7), que começam dentro de $\mathcal{U}$, existem globalmente para $t \geq 0$.*

Dizemos que um ponto de equilíbrio u_0 é estável em X^α , se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|v(0) - u_0\|_{X^\alpha} < \delta \implies \|v(t) - u_0\|_{X^\alpha} < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $v(t)$ denota a solução global em X^α de (2.4.7) com a condição inicial $v(0)$.

Dizemos que o ponto de equilíbrio u_0 é assintoticamente estável, se é estável e

$$\|v(t) - u_0\|_{X^\alpha} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Dizemos que o ponto de equilíbrio u_0 é uniformemente assintoticamente estável, se é estável e existe uma vizinhança

$$\mathcal{V} = \{v \in X^\alpha : \|v(0) - u_0\|_{X^\alpha} < r\}$$

tal que $\|v(t) - u_0\|_{X^\alpha} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$, uniformemente para cada $v \in \mathcal{V}$.

Dizemos que o ponto de equilíbrio u_0 é instável, se não é estável.

Muitos problemas de valor de fronteira, como o problema (2.4.26), surgem de princípios variacionais na física, isto é, de problemas de minimização de certos funcionais (também chamados de *funcionais de energia*), os quais têm um significado físico. Aqui trataremos de funcionais diferenciáveis no sentido de Fréchet $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, definidos num certo espaço de Sobolev de funções X , cujos pontos críticos u coincidem com as soluções fracas de uma equação diferencial parcial. Pontos críticos de Φ são definidos como sendo as $u \in X$ satisfazendo a chamada *Equação de Euler* associada a Φ : $\Phi'(u) = 0$, isto é, $\Phi'(u)v = 0$ para toda $v \in X$. Pontos críticos de Φ são do seguinte tipo: mínimo local, máximo local ou ponto de sela.

Para estudar os pontos críticos de Φ (isto é, soluções fracas do correspondente problema de valor na fronteira), é importante saber a expressão exata para a derivada direcional de Φ , a qual é definida como

$$\Phi'(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi(u + tv) - \Phi(u)].$$

No cálculo de variações, esta expressão é chamada da *Primeira variação* do funcional $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se um problema de valor na fronteira é tal que, existe um funcional de energia cujos pontos críticos coincidem com as soluções fracas, então dizemos que o problema de valor na fronteira é do tipo variacional. Naturalmente, há muitos problemas de valor na fronteira que não são do tipo variacional.

O funcional de energia $\Phi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (2.4.26) definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \varphi(u) dx - \int_{\Gamma} \phi(u) d\sigma, \quad (2.4.27)$$

onde $\varphi(u) = \int_0^u f(s)ds$ e $\phi(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Prova-se que o funcional Φ é de classe $\mathcal{C}^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Seja u solução de (2.4.1). Em particular $u_t \in H^1(\Omega)$ e podemos derivar $\Phi(u)$ com respeito a t , obtendo

$$\frac{d}{dt}\Phi(u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx - \int_{\Omega} f(u)u_t dx - \int_{\Gamma} g(u)u_t d\sigma.$$

Como u é solução de (2.4.1) ($u \in H^2(\Omega)$), podemos usar a fórmula de Green, obtendo

$$\frac{d}{dt}\Phi(u) = - \int_{\Omega} (u_t)^2 dx \leq 0,$$

para toda solução u , com a igualdade satisfeita quando $u_t = 0$. Portanto, o funcional Φ é decrescente no tempo, exceto nos equilíbrios.

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^2$ tais que f' e g' satisfazem a seguinte condição de crescimento

$$|j(u) - j(v)| \leq c |u - v| (1 + |u|^{p-2} + |v|^{p-2}), \quad (\text{GD})$$

onde $j = f', g'$ com expoentes p_f e p_g respectivamente, satisfazendo (2.4.12), com $N \leq 6$. Então F é de classe $\mathcal{C}^1(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$.

Seja u_0 um ponto de equilíbrio de (2.4.8) e como F é de classe $\mathcal{C}^1$, temos

$$F(u_0 + v) = F(u_0) + DF(u_0)v + H(v),$$

com $\|H(v)\| = o(\|v\|_{H^1(\Omega)})$ quando $\|v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Esta decomposição nos sugere considerar a linearização do problema (2.4.8), isto é,

$$v_t + Av = DF(u_0)v \quad (2.4.28)$$

e relacionar a estabilidade do equilíbrio u_0 com o sinal do valor próprio do operador que aparece em (2.4.28).

Teorema 2.4.6 (Estabilidade e instabilidade por linearização) *Sejam u_0 um ponto de equilíbrio de (2.4.8) e $\sigma(B)$ o espectro do operador $B = DF(u_0) - A$. Então*

- (i) *se $\sigma(B) \subset \{Re \lambda < a\}$, para algum $a < 0$, temos que u_0 é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável em $H^1(\Omega)$*
- (ii) *se $\sigma(B) \cap \{Re \lambda > 0\} \neq \emptyset$, temos que u_0 é um ponto de equilíbrio instável em $H^1(\Omega)$.*

Este teorema nos dá uma caracterização sobre a estabilidade e instabilidade de um equilíbrio.

Os operadores $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $DF(u_0) : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ são operadores lineares limitados.

Como $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, então este satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) A é fechado e densamente definido ($\overline{D(A)} = H^1(\Omega)$).
- (ii) O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$ contém $(\omega, +\infty)$ e satisfaz a desigualdade

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)},$$

para todo $\lambda > \omega$, $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tais que

$$\|e^{-At}\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para } t \geq 0,$$

onde e^{-At} é o semigrupo gerado por $-A$.

Além disso, o operador $(\lambda I - A)$ é invertível se $\lambda > \omega$. Podemos considerar $DF(u_0)$ uma perturbação relativamente limitada do gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, e Pazy [40] prova que $DF(u_0) - A = B$ também é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Pelo mesmo argumento acima, temos que $\rho(B)$ contém $(\overline{\omega}, +\infty)$, para algum $\overline{\omega} \in \mathbb{R}$, e seguinte desigualdade

$$\|(\mu I + B)^{-1}\| \leq \frac{\overline{M}}{(\mu - \overline{\omega})}$$

é válida para todo $\mu > \overline{\omega}$. Além disso, o operador $(\mu I + B)$ é invertível.

Agora seja $k > \max\{\omega, \overline{\omega}\}$ tal que os seguintes operadores existam $(kI - A)^{-1}$ e $(kI + B)^{-1}$. Sabemos que $(kI - A)^{-1}$ é compacto e $(kI + B)^{-1}$ é contínuo. Com isto, temos que o operador $(kI + B)^{-1}$ é compacto, pois

$$\begin{aligned} (kI + B)^{-1} &= (kI + DF(u_0) - A)^{-1} = (kI - A + DF(u_0)(kI - A)^{-1}(kI - A))^{-1} \\ &= (kI - A)^{-1} (I + DF(u_0)(kI - A)^{-1})^{-1} \\ &= (kI - A)^{-1} ((kI - A)(kI + B)^{-1}). \end{aligned}$$

Consideremos o seguinte resultado de Kato [34].

Proposição 2.4.3 *Seja A um operador fechado num espaço de Banach E tal que o resolvente $(kI - A)^{-1}$ existe e é compacto para algum k . Então, o espectro de A consiste totalmente de valores próprios isolados com multiplicidade algébrica finita e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Do fato do operador $(kI + B)^{-1}$ ser compacto e da Proposição 2.4.3, segue que o operador B tem espectro pontual, isto é, $\sigma(B)$ consiste só de valores próprios de B . Seja $\lambda \in \sigma(B)$ é um

valor próprio de B , isto é

$$Bv = \lambda v, \quad v \in H^1(\Omega),$$

ou equivalentemente

$$DF(u_0)v - Av = \lambda v. \quad (2.4.29)$$

Agora multiplicando por $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ e usando o produto de dualidade em $L^2(\Omega)$, temos

$$-\int_{\Omega} (\nabla v \nabla \varphi + v \varphi) dx + \int_{\Omega} (f'(u_0)v \varphi + v \varphi) dx + \int_{\partial\Omega} g'(u_0)v \varphi ds = \lambda \int_{\Omega} v \varphi dx. \quad (2.4.30)$$

Se $v \in H^2(\Omega)$, podemos aplicar a fórmula de Green, obtendo

$$\int_{\Omega} \Delta v \varphi dx - \int_{\partial\Omega} v_{\nu} \varphi ds + \int_{\Omega} f'(u_0)v \varphi dx + \int_{\partial\Omega} g'(u_0)v \varphi ds = \lambda \int_{\Omega} v \varphi dx.$$

Desta última equação observamos que v é uma solução fraca do problema linear de valor próprio

$$\begin{cases} \Delta v + f'(u_0)v = \lambda v, & \text{em } \Omega \\ v_{\nu} = g'(u_0)v, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.31)$$

em $L^2(\Omega)$.

O seguinte resultado nos fala a respeito do maior valor próprio de $\sigma(B)$.

Teorema 2.4.7 *O primeiro autovalor do operador B é*

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} (-|\nabla u|^2 + f'(u_0)u^2) dx + \int_{\partial\Omega} g'(u_0)u^2 ds}{\int_{\Omega} u^2 dx}. \quad (2.4.32)$$

Para demonstrar este teorema, usamos seguinte resultado geral para espaços de Hilbert.

Proposição 2.4.4 *Sejam E um espaço de Hilbert e $j : E \hookrightarrow E'$ uma inclusão densa e contínua, que vamos supor simétrica, isto é, $j(u)[v] = j(v)[u]$. Seja $S : E \rightarrow E'$ um operador contínuo com inversa contínua, tal que a forma quadrática $S(u)[v]$ seja simétrica e coerciva, isto é, $S(u)[v] = S(v)[u]$ e $S(u)[u] \geq \alpha \|u\|_E^2$ para $\alpha > 0$, respectivamente. Então, existe um produto escalar equivalente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, tal que SJ^{-1} é um operador auto-adjunto no produto escalar dual associado $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E'}$. Além disso, o primeiro valor de seu espectro é*

$$\mu_1 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{S(u)[u]}{j(u)[u]}. \quad (2.4.33)$$

Para provar este resultado necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.4.3 *Sejam E um espaço de Hilbert e $S : D(S) \rightarrow E$ um operador auto-adjunto, positivo e invertível. Então, o primeiro ponto do espectro pode calcular-se por uma das seguintes maneiras*

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{u \in D(S) \\ u \neq 0}} \frac{\langle Su, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\langle u, u \rangle}{\langle S^{-1}u, u \rangle}. \quad (2.4.34)$$

Observação 2.4.1 *A primeira fórmula em (2.4.34) é conhecida como o **Quociente de Rayleigh**.*

O Teorema 2.4.7 nos dá uma caracterização da estabilidade do equilíbrio u_0 mais natural que a do Teorema 2.4.6. Então, a estabilidade do equilíbrio u_0 se reduz comprovar o sinal do numerador do quociente que aparece em (2.4.32) e que o denotaremos por $I(u)$.

Assim, se $I(u)$ é negativo para toda $u \in H^1(\Omega)$, temos que u_0 é estável. Por outro lado, se existe alguma $u \in H^1(\Omega)$ tal que $I(u)$ seja positivo, u_0 é instável. Nos casos que só possamos provar que $I(u) \leq 0$, para toda $u \in H^1(\Omega)$, falta algo mais para determinar a estabilidade de u_0 .

Semi-continuidade superior de atratores

Neste capítulo, vamos estudar uma equação de reação-difusão com condição de Neumann homogênea em domínios singularmente perturbados, que consistem de uma região fixa e um canal fino. Basicamente, estudaremos a semi-continuidade superior dos atratores, para estes problemas, quando a espessura do canal tende a zero.

3.1 Introdução

O protótipo de perturbação de domínio (conjunto aberto e conexo), que consideraremos neste capítulo, é o chamado de domínio tipo dumbbell o qual consiste de dois domínios disjuntos Ω^L e Ω^R unidos por um canal fino R_ε o qual se aproxima a um segmento de reta quando o parâmetro ε se aproxima a zero. Para fixar as idéias, consideremos $\mathbb{R}^N$, $N > 2$ e o canal dado por $R_\varepsilon = \{(x_1, \varepsilon y) : 0 < x_1 < 1, |y| < r(x_1)\}$, onde $x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^N$, $y = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, $r \in \mathcal{C}^1(0, 1)$ e $r(x) > 0$ para todo $x_1 \in [0, 1]$ (veja (b) na Figura 3.1).

Denotemos por $g(x_1) := |R_1^{x_1}| = r^{N-1}(x_1) \sigma_{N-1}$ a medida de Lebesgue $(N-1)$ -dimensional de $R_1^{x_1}$, onde σ_{N-1} é a medida de Lebesgue $(N-1)$ -dimensional da bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$ e $R_1^{x_1} = \{y : (x_1, y) \in R_1\}$ é a seção de R_1 . Pela suavidade de R_1 , podemos supor que g é uma função suave e que existe um $d_0 > 0$ tal que $g(x_1) \geq d_0$ para todo $x_1 \in [0, 1]$.

Seja $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$ e consideremos o seguinte problema de reação-difusão

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega_\varepsilon \\ u(0, x) = u_0, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\varepsilon)$$

onde n é o vetor normal unitário a $\partial\Omega_\varepsilon$, u_0 é a condição inicial dada e f satisfaz as seguintes condições:

(i). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$,

(ii). $\limsup_{|u| \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} < 0$.

Agora, vamos especificar o domínio singularmente perturbado Ω_ε considerado acima. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e suave fixo, tal que existe $l > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\Omega \cap \{(x_1, y) : x_1^2 + |y|^2 < l^2\} &= \{(x_1, y) : x_1^2 + |y|^2 < l^2, x_1 < 0\}, \\ \Omega \cap \{(x_1, y) : (x_1 - 1)^2 + |y|^2 < l^2\} &= \{(x_1, y) : (x_1 - 1)^2 + |y|^2 < l^2, x_1 > 1\}, \\ \Omega \cap \{(x_1, y) : 0 < x_1 < 1, |y| < l\} &= \emptyset,\end{aligned}$$

com $\{(0, y) : |y| < l\} \cup \{(1, y) : |y| < l\} \subset \partial\Omega$ e R_ε é dado como acima. Assuma que $r(x_1) < l$, para todo $x_1 \in [0, 1]$. Observe que não especificamos qualquer propriedade de conexidade em Ω . Portanto podemos ter a situação (a) ou (b) na Figura 3.1.

Definamos o segmento de reta $\ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon \approx (0, 1)$ cujos pontos finais são $p_0 = (0, 0, \dots, 0)$ e $p_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Figura 3.1: Possibilidades do domínio Ω_ε

O problema limite de $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é o seguinte

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + f(w) & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \\ v_t = \frac{1}{g} (g v_x)_x + f(v), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1). \end{cases} \quad (\mathbf{P}_0)$$

O objetivo deste capítulo é comparar a dinâmica assintótica do problema perturbado $\mathbf{P}_\varepsilon$ e a

dinâmica do problema limite $\mathbf{P}_0$.

3.2 Problema perturbado ($\mathbf{P}_\varepsilon$)

Sob as hipóteses acima, o problema ($\mathbf{P}_\varepsilon$) está bem posto em $X_\varepsilon := \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ (ver Mora [37]). Além disso, por (ii), o problema ($\mathbf{P}_\varepsilon$) tem um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$ e os atratores são limitados em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Isto nos permite cortar a não-linearidade f de tal modo que esta permaneça limitada junto com suas derivadas até segunda ordem sem mudar os atratores. Com estas considerações, podemos supor, sem perda de generalidade, que f é de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfazendo (ii) e

$$|f'(u)| \leq c_1, \quad |f''(u)| \leq c_2, \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (3.2.1)$$

para algumas constantes positivas c_1 e c_2 .

Como é usual, $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ denota o espaço de Banach consistindo de todas as funções em Ω_ε as quais são uniformemente contínuas e limitadas, com norma dada por

$$\|u\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |u(x)|.$$

Para um número inteiro $k \geq 0$, $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega_\varepsilon})$ denota o espaço de Banach de todas as funções u tal que, $D^\gamma u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ para $|\gamma| \leq k$, com a norma dada por

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{\mathcal{C}},$$

onde γ é um multi-índice.

A imersão $\mathcal{C}^l(\overline{\Omega_\varepsilon}) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega_\varepsilon})$ vale para $l > k$; quando Ω_ε é limitado esta imersão é compacta. Para um não-inteiro $\sigma = k + \eta$ (k inteiro, $0 < \eta < 1$), $\mathcal{C}^\sigma(\overline{\Omega_\varepsilon})$ denota o espaço de Banach de todas as funções que pertencem a $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega_\varepsilon})$ e tal que as derivadas $D^\gamma u$ de ordem $|\gamma| = k$ satisfazem a condição de Hölder uniforme com expoente η ; como é usual a norma deste espaço é definida como

$$\|u\|_{\mathcal{C}^\sigma} = \|u\|_{\mathcal{C}^k} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_\eta,$$

onde

$$[v]_\eta = \sup_{\substack{x, y \in \Omega_\varepsilon \\ x \neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\eta}.$$

Também temos as seguintes imersões $\mathcal{C}^{k+\zeta}(\overline{\Omega_\varepsilon}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k+\eta}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ ($k \geq 0$ inteiro, $0 < \eta < \zeta < 1$); estas imersões são compactas quando Ω_ε é limitado. Para ter a seguinte imersão $\mathcal{C}^{k+1}(\overline{\Omega_\varepsilon}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k+\eta}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ ($k \geq 0$ inteiro, $0 < \eta < 1$); quando $N > 1$, vamos impor que o domínio Ω_ε satisfaz a seguinte condição:

(**L**). Existe uma constante finita L tal que, quaisquer dois pontos $x, y \in \Omega_\varepsilon$ podem ser unidos por um arco poligonal inteiramente contido em Ω_ε de $d(x, y) \leq L|x - y|$, onde $d(x, y)$ é a distância entre os pontos x e y em $\mathbb{R}^N$.

No caso em que Ω_ε é limitado, a condição (**L**) é automaticamente satisfeita se Ω_ε é um domínio de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

O problema (**P** $_\varepsilon$) pode ser escrito como uma equação de evolução abstrata do tipo semilinear como a equação (2.2.1), isto é,

$$\begin{cases} \dot{u} + A_\varepsilon u = F_\varepsilon(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

onde u é agora uma variável que toma valores no espaço de Banach $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$, $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ é um operador linear em $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\varepsilon) &= \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega_\varepsilon) : \Delta u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon}), \partial u / \partial n = 0 \text{ em } \partial\Omega_\varepsilon\} \\ A_\varepsilon u &= -\Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$F_\varepsilon : Y_\varepsilon \rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ é um operador não-linear, onde Y_ε é um subespaço de Banach entre $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$ e $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ e $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ é o dado inicial.

O operador A_ε é setorial e a seguinte estimativa vale

$$\|(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})} \leq C/|\lambda|, \quad \text{para } \lambda \in \Sigma_\vartheta,$$

onde Σ_ϑ é um setor no plano complexo e C é uma constante que não depende de ε . Sendo A_ε setorial, então $-A_\varepsilon$ gera um semigrupo analítico $\{e^{-A_\varepsilon t} : t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ dado por

$$e^{-A_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} d\lambda, \quad t > 0, \quad (3.2.4)$$

onde $\Gamma \subset \rho(-A_\varepsilon)$ é uma curva apropriada no plano complexo e vale a seguinte estimativa (veja Teorema 2.2, [37])

$$\|e^{-A_\varepsilon t} w\|_{\mathcal{C}} \leq C \|w\|_{\mathcal{C}}, \quad t \geq 0, \quad w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon}), \quad (3.2.5)$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de ε , isto é, o semigrupo linear $e^{-A_\varepsilon t}$ é limitado de $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$.

Para maiores detalhes sobre geração de semigrupos analíticos em $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega_\varepsilon})$ e as propriedades acima, como também outras generalizações, o leitor pode consultar Mora [37].

Seja $u(\cdot, u_0) = T_\varepsilon(\cdot, u_0)$ a solução de (**P** $_\varepsilon$), onde $T_\varepsilon(\cdot)u_0 : [0, +\infty) \rightarrow X_\varepsilon$ é um semigrupo

não-linear. Pela fórmula da variação das constantes, temos

$$u_\varepsilon(t, u_0) = T_\varepsilon(t, u_0) = e^{-A_\varepsilon t} u_0 + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(T_\varepsilon(s, u_0)) ds. \quad (3.2.6)$$

3.3 Problema limite ($\mathbf{P}_0$)

Como estamos trabalhando com um domínio tipo dumbbell (ver (a) na Figura 3.1), isto é, $\Omega_\varepsilon = \Omega^L \cup \Omega^R \cup R_\varepsilon$, onde R_ε é como acima, daqui em diante pomos $\Omega_0 = \Omega \cup \ell$, $\Omega = \Omega^L \cup \Omega^R$, $\ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon \approx (0, 1)$, onde fixamos um sistema de coordenadas tais que o segmento de linha unidimensional ℓ esteja contido no eixo x_1 .

Para entender melhor o problema ($\mathbf{P}_\varepsilon$), vamos estudar primeiro o problema ($\mathbf{P}_0$) que é o limite de ($\mathbf{P}_\varepsilon$) quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Consideremos o seguinte espaço de Banach $X_0 = \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$ e definamos o operador $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_0) &= \left\{ (w, v) \in X_0 : w \in \mathcal{D}(\Delta_N^\Omega), v \in H^1(0, 1), gv_x \in H^1(0, 1), v(0) = w(0), v(1) = w(1) \right\} \\ A_0(w, v) &= \left(-\Delta w, -\frac{1}{g}(gv_x)_x \right), \quad (w, v) \in \mathcal{D}(A), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

onde Δ_N^Ω é o operador Laplaciano com condições de Neumann homogêneas em Ω .

Sob as hipóteses acima, o problema ($\mathbf{P}_0$) está bem posto em X_0 . Além disso, pela condição de dissipatividade da f , o problema ($\mathbf{P}_0$) tem um atrator global $\mathcal{A}_0$.

Proposição 3.3.1 *O operador A_0 definido por (3.3.1) satisfaz as seguintes afirmações*

- (i) $\mathcal{D}(A_0)$ é denso em X_0
- (ii) A_0 é um operador fechado
- (iii) A_0 tem resolvente compacto.
- (iv) A_0 é um operador setorial.

Demonstração.

(i) seja $(w, v) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$, isto é, $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $v \in L^2(0, 1)$. Como $\overline{\mathcal{D}(\Delta_N^\Omega)} = \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, existe $w_n \in \mathcal{D}(\Delta_N^\Omega)$ tal que $w_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} w$.

Seja $\bar{z}_n(x) = xw_n(1) + (1-x)w_n(0)$ então $(w_n, \bar{z}_n) \in \mathcal{D}(A_0)$. Seja $z_n \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$ tal que $\|z_n - (v - \bar{z}_n)\|_{L^2(0,1)} \leq 1/n$, isto é $\|v - (z_n + \bar{z}_n)\|_{L^2(0,1)} \leq 1/n$. Colocando $v_n = z_n + \bar{z}_n$, temos $v_n(0) = w_n(0)$, $v_n(1) = w_n(1)$ e $v_n \xrightarrow{L^2(0,1)} v$. Portanto $(w_n, v_n) \in \mathcal{D}(A_0)$.

(ii) Seja $(w_n, v_n) \in \mathcal{D}(A_0)$ tal que $(w_n, v_n) \rightarrow (w, v)$ e $A(w_n, v_n) \rightarrow (\phi, \psi)$. Como $w_n \in \mathcal{D}(\Delta_N^\Omega)$ e Δ_N^Ω é fechado, temos que $w \in \mathcal{D}(\Delta_N^\Omega)$ e $-\Delta w_n \rightarrow -\Delta w$. Por outro lado $v_n \rightarrow v$ e $\phi_n =$

$-\frac{1}{g}(g(v_n)x)_x \rightarrow \phi$. Agora

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g(v_n)x)_x = h_n, & x \in (0, 1) \\ v_n(0) = w_n(0), & v_n(1) = w_n(1). \end{cases}$$

Fazendo a mudança $z_n = v_n - \xi_n$, onde ξ_n é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g(\xi_n)x)_x = 0, & x \in (0, 1) \\ \xi_n(0) = w_n(0), & \xi_n(1) = w_n(1), \end{cases} \quad (3.3.2)$$

temos

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g(z_n)x)_x = h_n, & x \in (0, 1) \\ z_n(0) = z_n(1) = 0. \end{cases}$$

Não é difícil ver que

$$\xi_n = w_n(0) + \frac{w_n(1) - w_n(0)}{\int_0^1 \frac{1}{g(s)} ds} \int_0^x \frac{1}{g(s)} ds \quad (3.3.3)$$

e, como $w_n(0) \rightarrow w(0)$, $w_n(1) \rightarrow w(1)$, segue que $\xi_n \rightarrow \xi$, onde ξ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g\xi_x)_x = 0, & x \in (0, 1) \\ \xi(0) = w(0), & \xi(1) = w(1). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Donde segue que $z_n \rightarrow z = v - \xi(0)$, $z(0) = z(1) = 0$, $z \in H^1(0, 1)$, $gz_x \in H^1(0, 1)$. Então $v = z + \xi \in H^1(0, 1)$, $gv_x \in H^1(0, 1)$, $v(0) = w(0)$, $v(1) = w(1)$.

(iii). Como $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{C}_N^2(\overline{\Omega}) \oplus H^1(0, 1) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$, onde

$$\mathcal{C}_N^2(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) : \partial u / \partial n = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

e a imersão de $\mathcal{C}_N^2(\overline{\Omega}) \oplus H^1(0, 1)$ em $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$ é compacta, segue que A_0 tem resolvente compacto.

(iv). Sejam $(f, g) \in X_0$. Resolver a equação $(w, v) = (A_0 + \lambda)^{-1}(f, g)$ é equivalente resolver

$(A_0 + \lambda)(w, v) = (f, g)$, que é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta w + \lambda w = f, & x \in \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ -\frac{1}{g}(gv_x)_x + \lambda v = g, & x \in (0, 1), \\ v(0) = w(0), \quad v(1) = w(1). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Da primeira parte de (3.3.5) temos que existe um único $w \in \mathcal{D}(\Delta_N^\Omega)$ tal que

$$\|w\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \quad \lambda \in S_{a,\theta},$$

onde $S_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} - \theta < \arg(\lambda - a) < \frac{3\pi}{2} + \theta\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Fazendo a mudança de variáveis $z = v - \xi$, onde ξ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g\xi_x)_x = 0, & x \in (0, 1) \\ \xi(0) = w(0), \quad \xi(1) = w(1), \end{cases}$$

na segunda parte do problema (3.3.5), temos

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gz_x)_x + \lambda z = g - \lambda \xi, & x \in (0, 1) \\ z(0) = z(1) = 0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|g - \lambda \xi\|_{L^2(0,1)} \\ \|v\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|g\|_{L^2(0,1)} + |\lambda| \|\xi\|_{L^2(0,1)} \right) + \|\xi\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|g\|_{L^2(0,1)} + |\lambda| \|w\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right) + \|w\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|g\|_{L^2(0,1)} + C \|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right) + \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{L^2(0,1)} \right), \end{aligned}$$

com $\lambda \in S'_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} - \theta + \delta < \arg(\lambda - a) < \frac{3\pi}{2} + \theta - \delta\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\delta > 0$. Logo

$\|(w, v)\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0,1)} \leq \frac{\tilde{C}}{|\lambda|} \|(f, g)\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0,1)}$, onde $\lambda \in S_{a,\theta} \cap S'_{a,\theta}$. ■

Sendo A_0 um operador setorial, então $-A_0$ gera um semigrupo analítico $\{e^{-A_0 t} : t \geq 0\}$ em

X_0 , onde

$$e^{-A_0 t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (A_0 + \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (3.3.6)$$

com $\Gamma \subset \rho(-A_0)$ uma curva apropriada no plano complexo.

Agora vamos caracterizar os autovalores do operador A_0 . Para isto, queremos encontrar λ e $(w, v) \neq (0, 0)$ tais que

$$A_0(w, v) - \lambda(w, v) = 0. \quad (3.3.7)$$

A equação (3.3.7) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w, & x \in \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gv_x)_x &= \lambda v, & x \in (0, 1), \\ v(0) &= w(0), & v(1) = w(1). \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Denotemos, respectivamente, por $\{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty$, $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$, os autovalores de (3.3.8), (3.3.10) e por $\{\varphi_i^\Omega\}_{i=1}^\infty$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ as autofunções correspondentes

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gv_x)_x &= \tau v, & x \in (0, 1), \\ v(0) &= v(1) = 0. \end{cases} \quad (3.3.10)$$

Proposição 3.3.2 $\sigma(A_0) = \{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty \cup \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$.

Demonstração. Primeiro mostremos a inclusão $\sigma(A_0) \subset \{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty \cup \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$. De fato, se $\lambda \in \sigma(A_0)$, então existe $(w, v) \neq 0$ tal que (3.3.8), (3.3.9) valem, e portanto seguintes casos:

- $w = 0$, então $\lambda \in \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$,
- $w \neq 0$, então $\lambda \in \{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty$.

então $\lambda \in \{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty \cup \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$.

Para a inclusão $\{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty \cup \{\tau_i\}_{i=1}^\infty \subset \sigma(A_0)$ analisamos os seguintes casos:

Se $\lambda = \tau_i$ então $(w, v) = (0, \gamma_i) \neq (0, 0)$ é solução para (3.3.7). Então $\lambda \in \sigma(A_0)$.

Se $\lambda \in \{\mu_i^\Omega\}_{i=1}^\infty \setminus \{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ então $(w, v) = (\varphi_i^\Omega, \chi) \neq (0, 0)$ é solução para (3.3.7), onde χ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(g\chi_x)_x &= \mu_i^\Omega v, & x \in (0, 1), \\ \chi(0) &= \varphi_i^\Omega(0), & \chi(1) = \varphi_i^\Omega(1), \end{cases} \quad (3.3.11)$$

Então $\lambda \in \sigma(A_0)$. ■

O problema $(\mathbf{P}_0)$ também pode ser escrito como uma equação de evolução abstrata do tipo semilinear como a equação (2.2.1), isto é,

$$\begin{cases} \dot{z} &= A_0 z + F_0(z), \\ z(0) &= z_0 \end{cases} \quad (3.3.12)$$

onde z é agora uma variável que toma valores no espaço de Banach X_0 e $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ é um operador linear definido por (3.3.1).

Seja $z(\cdot, u_0) = T_0(\cdot, z_0)$ a solução de (3.3.12), onde $T_0(\cdot)u_0 : [0, +\infty) \rightarrow X_0$ é um semigrupo não-linear. Pela fórmula da variação das constantes temos

$$z(t, u_0) = T_0(t, u_0) = e^{-A_0 t} z_0 + \int_0^t e^{-A_0(t-s)} F_0(T_0(s, z_0)) ds. \quad (3.3.13)$$

3.4 Comparação dos problemas perturbado e limite

Antes de começar esta subseção, vamos apresentar alguns operadores que utilizaremos para a comparação dos problemas perturbado e limite.

Seja ψ_ε uma função de $X_\varepsilon = \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$, para comparar ψ_ε com uma função do espaço $X_0 = \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$ definimos o seguinte operador

$$\begin{aligned} M : \mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon}) &\rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1) \\ \psi_\varepsilon &\rightarrow (M\psi_\varepsilon)(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x), & x \in \Omega \\ T_\varepsilon^{x_1} \psi_\varepsilon, & x_1 \in (0, 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^{x_1} \psi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^{x_1}|} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \psi(x_1, y) dy \\ \Gamma_\varepsilon^{x_1} &= \{y : (x_1, y) \in \mathbf{R}_\varepsilon\}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Seja $\psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1)$, para considerar ψ como uma função no espaço $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$, definimos o seguinte operador contínuo

$$\begin{aligned} E : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0, 1) &\rightarrow L^2(\overline{\Omega_\varepsilon}) \\ \psi &\rightarrow (E\psi)(x) = \begin{cases} \psi(x), & \Omega \\ \psi(x_1), & (x_1, y) \in \mathbf{R}_\varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Observe que o operador E não leva o espaço $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(0, 1)$ no espaço $\mathcal{C}(\overline{\Omega_\varepsilon})$. Gostaríamos

de ter um operador que faça isto, para isto vamos necessitar do seguinte operador

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(0,1) &\rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega_{\varepsilon}}) \\ (w_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) &\rightarrow E_{\mathcal{C}}(w_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) = \begin{cases} w_{\varepsilon}, & x \in \Omega \\ \tilde{v}_{\varepsilon}, & x \in R_{\varepsilon}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

onde

$$\tilde{v}_{\varepsilon}(x) = v_{\varepsilon}(x_1) + h_{\varepsilon}(x_1) (w_{\varepsilon}(0, y) - v_{\varepsilon}(0)) + h_{\varepsilon}(1 - x_1) (w_{\varepsilon}(1, y) - v_{\varepsilon}(1)), \quad x \in R_{\varepsilon}, \quad (3.4.5)$$

$h_{\delta}(s) = h(\frac{s}{\delta})$, $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ é uma função de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ tais que

$$h(s) = \begin{cases} 1, & \text{para } s \in [0, 1/4], \\ 0, & \text{para } s \geq 3/4 \end{cases}$$

e $|h'(s)| \leq C$.

O operador $E_{\mathcal{C}}$ é necessário para ter boas estimativas em $H^1(\Omega) \oplus H^1(0, 1)$.

O objetivo desta seção é mostrar a convergência dos operadores resolvente, consequentemente a convergência dos semigrupos lineares e, com ajuda da fórmula da variação das constantes, mostrar a convergência dos semigrupos não-lineares, e portanto a semi-continuidade superior dos atratores.

3.4.1 Comparação dos operadores resolventes

Seja A um operador fechado densamente definido num certo espaço de Banach X . Se $R_{\lambda}(A) := (A + \lambda I)^{-1}$ é o operador resolvente de A vale a identidade do resolvente

$$R_{\lambda}(A) - R_{\mu}(A) = (\mu - \lambda) R_{\mu}(A) R_{\lambda}(A), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A), \quad (3.4.6)$$

onde $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A . Usando (3.4.6) temos o seguinte lema.

Lema 3.4.1 *Seja $\lambda \in \rho(A_{\varepsilon}) \cap \rho(A_0)$, então a seguinte igualdade vale*

$$R_{\lambda}(A_{\varepsilon}) - ER_{\lambda}(A_0)M = A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1} (R_0(A_{\varepsilon}) - ER_0(A_0)M) [(I - EM) + EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M]. \quad (3.4.7)$$

Demonstração. Da identidade (3.4.6), temos

$$R_{\mu}(A_{\varepsilon}) = [I + (\lambda - \mu)R_{\mu}(A_{\varepsilon})] R_{\lambda}(A_{\varepsilon}), \quad R_{\mu}(A_0) = [I + (\lambda - \mu)R_{\mu}(A_0)] R_{\lambda}(A_0).$$

Observe que $R_\mu(A_\varepsilon)$ e $R_\mu(A_0)$ estão definidos em espaços diferentes, logo não tem sentido escrever $R_\mu(A_\varepsilon) - R_\mu(A_0)$, mas tem sentido a seguinte expressão $R_\mu(A_\varepsilon) - ER_\mu(A_0)M$, onde E e M são, respectivamente, os operadores definidos em (3.4.3) e (3.4.1).

$$\begin{aligned}
 R_\mu(A_\varepsilon) - ER_\mu(A_0)M &= [I + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon)] R_\lambda(A_\varepsilon) - E [I + (\lambda - \mu)R_\mu(A_0)] R_\lambda(A_0)M \\
 &= R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon) (R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M) \\
 &\quad + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon)ER_\lambda(A_0)M - (\lambda - \mu)ER_\mu(A_0)MER_\lambda(A_0)M \\
 &= [I + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon)] (R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M) \\
 &\quad + (\lambda - \mu) [R_\mu(A_\varepsilon) - ER_\mu(A_0)M] ER_\lambda(A_0)M
 \end{aligned}$$

onde utilizamos que $ME = I$ (observe que $EM \neq I$). Desta ultima igualdade segue que

$$[R_\mu(A_\varepsilon) - ER_\mu(A_0)M] (I + (\mu - \lambda)ER_\lambda(A_0)M) = [I + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon)] (R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M),$$

e portanto

$$R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M = [I + (\lambda - \mu)R_\mu(A_\varepsilon)]^{-1} (R_\mu(A_\varepsilon) - ER_\mu(A_0)M) (I + (\mu - \lambda)ER_\lambda(A_0)M).$$

Agora tomando $\mu = 0$, temos

$$R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M = [I + \lambda R_0(A_\varepsilon)]^{-1} (R_0(A_\varepsilon) - ER_0(A_0)M) (I - \lambda ER_\lambda(A_0)M).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 [I + \lambda R_0(A_\varepsilon)]^{-1} &= [A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} + \lambda A_\varepsilon^{-1}]^{-1} = [(A_\varepsilon + \lambda) A_\varepsilon^{-1}]^{-1} = A_\varepsilon (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} \\
 I - \lambda R_\lambda(A_0) &= I - \lambda (A_0 + \lambda)^{-1} = (A_0 + \lambda)(A_0 + \lambda)^{-1} - \lambda (A_0 + \lambda)^{-1} \\
 &= A_0 (A_0 + \lambda)^{-1} \\
 I - \lambda ER_\lambda(A_0)M &= I - EM + E(I - \lambda R_\lambda(A_0))M = (I - EM) + EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M.
 \end{aligned}$$

Com isto, temos

$$R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M = A_\varepsilon (A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (R_0(A_\varepsilon) - ER_0(A_0)M) [(I - EM) + EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M].$$

■

A identidade (3.4.7) nos diz que se conhecemos boas estimativas para $(R_0(A_\varepsilon) - ER_0(A_0)M)$, então conheceremos boas estimativas para $R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M$.

Usando o operador $E_{\mathcal{C}}$ em (3.4.7) chegamos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
 R_{\lambda}(A_{\varepsilon}) - ER_{\lambda}(A_0)M &= A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1}(R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)[(I - EM) + EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M] \\
 &\quad + A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1}(E_{\mathcal{C}} - E)R_0(A_0)M[(I - EM) + EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M] \\
 &= A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1}(R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)(I - EM) \\
 &\quad + A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1}(R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M \\
 &\quad + A_{\varepsilon}(A_{\varepsilon} + \lambda)^{-1}(E_{\mathcal{C}} - E)(A_0 + \lambda)^{-1}M,
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

onde utilizamos que $ME = I$ e $R_0(A_0)A_0 = I$.

Observe que vamos precisar estimar o operador $(R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)$, isto é, vamos mostrar que

$$\|R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M\|_{\mathcal{L}(L^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}), H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_{\varepsilon}))} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0, \tag{3.4.9}$$

ou seja, para toda $f_{\varepsilon} \in L^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$ com $\|f_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})} \leq 1$,

$$\|(R_0(A_{\varepsilon}) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)f_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_{\varepsilon})} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{3.4.10}$$

Mas isto é equivalente estimar $\|u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}\|_{H^1(\mathbb{R}_{\varepsilon})}^2$, onde $u_{\varepsilon} \in H^1(\Omega_{\varepsilon})$ é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} &= f_{\varepsilon}, & \text{em } \Omega_{\varepsilon} \\ \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} &= 0, & \text{em } \partial\Omega_{\varepsilon} \end{cases} \tag{3.4.11}$$

e $(w_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \in H^1(\Omega) \oplus H^1(0, 1)$ é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w_{\varepsilon} + w_{\varepsilon} &= f_{\varepsilon}, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial n} &= 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4.12}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{g}(gv_{\varepsilon x_1})_{x_1} + v_{\varepsilon} &= Mf_{\varepsilon}, & \text{em } (0, 1) \\ v_{\varepsilon}(0) &= w_{\varepsilon}(0), & v_{\varepsilon}(1) = w_{\varepsilon}(1). \end{cases} \tag{3.4.13}$$

A seguinte proposição dá a resposta ao que estamos querendo

Proposição 3.4.1 *Sejam f_{ε} , u_{ε} , w_{ε} e v_{ε} como acima. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}\|_{H^1(\mathbb{R}_{\varepsilon})}^2 \leq C\varepsilon^N. \tag{3.4.14}$$

Para demonstrar esta proposição vamos necessitar de alguns lemas.

Alguns lemas auxiliares

Com relação ao operador M , definido em (3.4.1), vale o seguinte resultado.

Lema 3.4.2 *Existe uma constante positiva C tal que, se $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, então temos*

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 = \|\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \|M\psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \quad (3.4.15)$$

$$\|M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2. \quad (3.4.16)$$

Demonstração. Observe que $M\psi_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(0,1)$ e para considerar $M\psi_\varepsilon$ como um elemento de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^2(R_\varepsilon)$ estendemos a segunda coordenada como sendo constante na direção y .

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &= \int_{R_\varepsilon} |\psi_\varepsilon|^2 dx = \int_{R_\varepsilon} |(\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon) + M\psi_\varepsilon|^2 dx \\ &= \int_{R_\varepsilon} |\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon|^2 + 2 \int_{R_\varepsilon} (\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon) M\psi_\varepsilon + \int_{R_\varepsilon} |M\psi_\varepsilon|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} (\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon) M\psi_\varepsilon &= \int_0^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} (\psi_\varepsilon - M\psi_\varepsilon) M\psi_\varepsilon dx_1 dy \\ &= \int_0^1 M\psi_\varepsilon(x) \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} [\psi_\varepsilon(x) - M\psi_\varepsilon(x)] dy \right\} dx_1 \\ &= \int_0^1 M\psi_\varepsilon(x) \{ |\Gamma_\varepsilon^{x_1}| M\psi_\varepsilon(x) - |\Gamma_\varepsilon^{x_1}| M\psi_\varepsilon(x) \} dx_1 = 0. \end{aligned}$$

Logo a igualdade (3.4.15) segue. Observe que

$$\|M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 = \int_{R_\varepsilon} |(M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)|^2 dx = \int_0^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |(M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)|^2 dx_1 dy.$$

Então vamos estimar $\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |(M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)|^2 dy$. De fato, da caracterização variacional dos autovalores do Laplaciano com condição de Neumann homogênea em $\Gamma_\varepsilon^{x_1}$, temos

$$\lambda_2(\Gamma_\varepsilon^{x_1}) = \min \left\{ \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla \varphi|^2}{\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\varphi|^2} : \varphi \in H^1(\Gamma_\varepsilon^{x_1}), \varphi \neq 0, \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \varphi = 0 \right\}. \quad (3.4.17)$$

Tomando $\varphi = M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon$, temos

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{\lambda_2(\Gamma_\varepsilon^{x_1})} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y} \right|^2. \quad (3.4.18)$$

De (3.4.17), temos que

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Gamma_\varepsilon^{x_1}) &= \min \left\{ \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla \varphi|^2}{\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\varphi|^2} : \varphi \in H^1(\Gamma_\varepsilon^{x_1}), \varphi \neq 0, \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \varphi = 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \min \left\{ \frac{\int_{\Gamma_1^{x_1}} |\nabla \tilde{\varphi}|^2}{\int_{\Gamma_1^{x_1}} |\tilde{\varphi}|^2} : \tilde{\varphi} \in H^1(\Gamma_1^{x_1}), \tilde{\varphi} \neq 0, \int_{\Gamma_1^{x_1}} \tilde{\varphi} = 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_2(\Gamma_1^{x_1}), \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

onde $\lambda_2(\Gamma_1^{x_1})$ é o segundo autovalor do Laplaciano com condição de Neumann homogênea em $\Gamma_1^{x_1}$. Substituindo (3.4.19) em (3.4.18), temos

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |M\psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2(\Gamma_1^{x_1})} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y} \right|^2 \leq C\varepsilon^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y} \right|^2, \quad (3.4.20)$$

onde usamos o fato da aplicação $[0, 1] \ni x_1 \rightarrow \lambda_2(\Gamma_1^{x_1}) \in (0, \infty)$ variar continuamente quando x_1 varia no intervalo compacto $[0, 1]$, atingindo seu mínimo em $[0, 1]$, isto é,

$$m := \min_{0 \leq x_1 \leq 1} \lambda_2(\Gamma_1^{x_1}) = \lambda_2(\Gamma_1^{\bar{x}}) > 0, \quad \bar{x} \in [0, 1],$$

donde temos que $C := \frac{1}{m} \geq \frac{1}{\lambda_2(\Gamma_1^{x_1})}$. Agora integrando de 0 a 1 temos a desigualdade (3.4.16). ■

Denotemos por $p_0 = (0, \mathbf{0})$, $p_1 = (1, \mathbf{0})$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N-1}$ e p um ponto qualquer de $\mathbb{R}^N$. $B(p, \rho)$ representara a bola aberta centrada em p e raio ρ . Consideremos o seguinte:

$$\begin{aligned} B_\rho^l(p) &= B(p, l) \setminus \overline{B(p, \rho)}, \quad \text{para } \rho < l, \\ D_\rho^L &= B(p_0, \rho) \cap \Omega, \quad \text{para } 0 < \rho \leq l, \\ D_\rho^R &= B(p_1, \rho) \cap \Omega, \quad \text{para } 0 < \rho \leq l, \\ S_\rho^L &= \Omega \cap B_\rho^l(p_0), \quad S_\rho^R = \Omega \cap B_\rho^l(p_1), \\ \tilde{\Omega}^L &= \Omega \setminus \overline{B(p_0, l)}, \quad \tilde{\Omega}^R = \Omega \setminus \overline{B(p_1, l)}, \\ \hat{\Gamma}_\rho^0 &= \{(x_1, y) : |x_1|^2 + |y|^2 = \rho, x_1 < 0\}, \\ \hat{\Gamma}_\rho^1 &= \{(x_1, y) : |x_1 - 1|^2 + |y|^2 = \rho, x_1 > 1\} \\ (\phi, \psi)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \phi \cdot \psi, \quad (\phi, \psi)_{L^2(R_\varepsilon)} = \int_{L^2(R_\varepsilon)} \phi \cdot \psi. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Para uma função ψ_ε definida em Ω_ε , definamos

$$\hat{T}_\rho^0 \psi_\varepsilon = \frac{1}{|\hat{\Gamma}_\rho^0|} \int_{\hat{\Gamma}_\rho^0} \psi_\varepsilon, \quad \hat{T}_\rho^1 \psi_\varepsilon = \frac{1}{|\hat{\Gamma}_\rho^1|} \int_{\hat{\Gamma}_\rho^1} \psi_\varepsilon.$$

Temos o seguinte lema.

Lema 3.4.3 *Sejam $T_\varepsilon^0, T_\varepsilon^1$ como em (3.4.2), $\hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0, \hat{T}_{\varepsilon r(1)}^1$ como acima e $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$. Então, existe uma constante $C = C(N)$ tal que*

$$\begin{aligned} \left| T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right| &\leq C(N) \varepsilon^{(-N+2)/2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^L} \\ \left| T_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(1)}^1 \psi_\varepsilon \right| &\leq C(N) \varepsilon^{(-N+2)/2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(1)}^R} \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Demonstração. Provaremos somente a desigualdade para $|T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon|$, pois a outra desigualdade é similar. Observe que $\varepsilon D_{r(0)}^L = D_{\varepsilon r(0)}^L$ e $\varepsilon \Gamma_1^0 = \Gamma_\varepsilon^0$. Se $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, definamos $\bar{\psi}_\varepsilon(x, y) = \psi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon y)$ para $(x, y) \in D_{r(0)}^L$ e também $a_\varepsilon = \frac{1}{|D_{\varepsilon r(0)}^L|} \int_{D_{\varepsilon r(0)}^L} \psi_\varepsilon = \frac{1}{|D_{r(0)}^L|} \int_{D_{r(0)}^L} \bar{\psi}_\varepsilon$. Portanto,

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon - T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon| &= \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^0|} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon^0} (a_\varepsilon - \psi_\varepsilon(0, y)) dy \right| = \left| \frac{1}{|\Gamma_1^0|} \int_{\Gamma_1^0} (a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon(0, y)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Gamma_1^0|} \int_{\Gamma_1^0} |a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon| \leq C \|a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_1^0)} \\ &\leq C \|a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(D_{r(0)}^L)} = C \|a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)} + C \|\nabla \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)} \end{aligned}$$

e, da desigualdade de Poincaré, $\|a_\varepsilon - \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)} \leq C \|\nabla \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)}$, a qual implica que $|a_\varepsilon - T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon| \leq C \|\nabla \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)}$. Como $D_{r(0)}^L \subset \mathbb{R}^N$, sabemos que $\|\nabla \bar{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(D_{r(0)}^L)}^2 = \varepsilon^{-N+2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(D_{\varepsilon r(0)}^L)}^2$ e assim $|a_\varepsilon - T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon| \leq \varepsilon^{(-N+2)/2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(D_{\varepsilon r(0)}^L)}$.

Seguindo o mesmo caminho como acima podemos obter $|a_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon| \leq \varepsilon^{(-N+2)/2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(D_{\varepsilon r(0)}^L)}$ e portanto

$$\left| T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right| \leq \left| T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - a_\varepsilon \right| + \left| a_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right|.$$

Logo, substituindo $|T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - a_\varepsilon|$ e $|a_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon|$ na desigualdade anterior, a demonstração do lema é concluída. ■

Lema 3.4.4 *Existe uma constante $C = C(N)$ tal que se $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, então,*

$$\left(T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right)^2 + \left(T_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{r(0)}^1 \psi_\varepsilon \right)^2 \leq \begin{cases} C(2) |\ln \varepsilon| \|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N = 2 \\ C(N) \varepsilon^{2-N} \|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N > 2 \end{cases} \quad (3.4.23)$$

Demonstração. Provaremos o lema para $N > 2$. Para o caso $N = 2$, o leitor pode consultar Arrieta [4]. Para $i = 0, 1$, consideremos os operators $\hat{T}_\rho^i \psi_\varepsilon$ como acima, $0 < \rho \leq r(0)$.

Temos,

$$\|\nabla \psi_\varepsilon\|_\Omega^2 \geq \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{r(0)}^L}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{r(0)}^R}^2 = \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^L}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^L}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^R}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^R}^2.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^L}^2 &\geq \min \left\{ \|\nabla \chi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^L}^2 : \hat{T}_l^0 \chi_\varepsilon = \hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon, \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \chi_\varepsilon = \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right\} \\ &= \left(\hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right)^2 \min \left\{ \|\nabla \tilde{\chi}_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^L}^2 : \hat{T}_{r(0)}^0 \tilde{\chi}_\varepsilon = 0, \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \tilde{\chi}_\varepsilon = 1 \right\} \\ &= \left(\hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right)^2 C(N) \varepsilon^{N-2} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

onde utilizamos que o mínimo é atingido quando $\tilde{\chi}_\varepsilon$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\chi}_\varepsilon = 0, & S_{\varepsilon r(0)}^L \\ \hat{T}_{r(0)}^0 \tilde{\chi}_\varepsilon = 0, & \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \tilde{\chi}_\varepsilon = 1, \end{cases}$$

$$\text{e } \min \left\{ \|\nabla \chi\|_{S_\eta^L}^2 : \hat{T}_{r(0)}^0 \chi = 0, \hat{T}_\eta^0 \chi = 1 \right\} = C(N) \frac{\eta^{N-2}}{1 - \eta^{N-2}}.$$

Do Lema 3.4.3, temos

$$\|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^L}^2 \geq C(N) \varepsilon^{N-2} \left(T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right)^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^L}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^L}^2 &\geq C(N) \left[\left(\hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon - \hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right)^2 + \left(\hat{T}_{\varepsilon r(0)}^0 \psi_\varepsilon - T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon \right)^2 \right] \varepsilon^{N-2} (1 + o(1)) \\ &\geq \frac{1}{2} C(N) \left(\hat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon - T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon \right)^2 \varepsilon^{N-2} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Com um argumento similar feito acima, mostramos outra estimativa similar para $\|\nabla \psi_\varepsilon\|_{S_{\varepsilon r(0)}^R}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{D_{\varepsilon r(0)}^R}^2$. Com isto conclui-se a prova do lema. ■

Lema 3.4.5 *Existe uma constante $C = C(N)$ tal que se $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, então,*

$$|T_\varepsilon^0 \psi_\varepsilon| + |T_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon| \leq \begin{cases} C(2) |\ln \varepsilon|^{1/2} \|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N = 2 \\ C \varepsilon^{(2-N)/2} \|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}, & \text{para } N > 2. \end{cases} \quad (3.4.24)$$

Demonstração. A prova segue do lema anterior e do fato que $\left| \widehat{T}_{r(0)}^0 \psi_\varepsilon \right| + \left| \widehat{T}_{r(0)}^1 \psi_\varepsilon \right| \leq C \|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$. ■

Lema 3.4.6 *Sejam u_ε , w_ε , v_ε como na hipótese da Proposição 3.4.1 e $\tilde{v}_\varepsilon$ como em (3.4.5). Então as seguintes estimativas valem*

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^1(R_\varepsilon)}^1 &\leq C\varepsilon^{N+1} \\ \left\| \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^1(R_\varepsilon)} &\leq C\varepsilon^N \\ \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &\leq C\varepsilon^{N+2} \\ \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &\leq C\varepsilon^N \\ \left| \|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 - \|v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \right| &\leq C\varepsilon^{N+1} \\ \left| \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 - \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \right| &\leq C\varepsilon^N, \end{aligned}$$

onde $\tilde{v}_\varepsilon = E_\varphi v_\varepsilon$.

Demonstração. Observe $\tilde{v}_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x_1) = h_\varepsilon(x_1)(w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)) + h_\varepsilon(1 - x_1)(w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1))$ e portanto

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^1(R_\varepsilon)} &\leq \int_0^\varepsilon |h_\varepsilon(x_1)| \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)| dy dx_1 \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 |h_\varepsilon(1 - x_1)| \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)| dy dx_1 \\ &\leq C\varepsilon^{N+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^1(R_\varepsilon)} &\leq \int_0^\varepsilon |h'_\varepsilon(x_1)| \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)| dy dx_1 \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 |h'_\varepsilon(1 - x_1)| \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)| dy dx_1 \\ &\leq C\varepsilon^N. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &\leq C \int_0^\varepsilon |h_\varepsilon(x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)|^2 dy dx_1 \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 |h_\varepsilon(1 - x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)|^2 dy dx_1 \\ &\leq C\varepsilon^{N+1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &\leq C \int_0^\varepsilon |h'_\varepsilon(x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)|^2 dy dx_1 \\
&\quad + C \int_{1-\varepsilon}^1 |h'_\varepsilon(1-x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)|^2 dy dx_1 \\
&\quad + C \int_0^\varepsilon |h_\varepsilon(x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla_y w_\varepsilon(0, y)|^2 dy dx_1 \\
&\quad + C \int_{1-\varepsilon}^1 |h_\varepsilon(1-x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla_y w_\varepsilon(1, y)|^2 dy dx_1 \\
&\leq 2C\varepsilon^{N+1}/\varepsilon + 2C\varepsilon^{N-1}\varepsilon
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $|w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)| \leq C\varepsilon$, $|\nabla_y w_\varepsilon(0, y)| \leq C$ com $(0, y) \in \Gamma_\varepsilon^0$ e que $|w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)| \leq C\varepsilon$, $|\nabla_y w_\varepsilon(1, y)| \leq C$ com $(1, y) \in \Gamma_\varepsilon^1$.

Para as duas últimas desigualdades, observamos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 &= \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon + v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \\
&= \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + 2(\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(R_\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

e

$$\|\nabla \tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 = \|\nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 + 2(\nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)_{L^2(R_\varepsilon)} \tag{3.4.26}$$

Mas,

$$\left| (\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(R_\varepsilon)} \right| \leq \|\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^1(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{N+1}$$

e

$$\left| (\nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)_{L^2(R_\varepsilon)} \right| \leq \left\| \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^1(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^N,$$

o qual prova o lema. ■

Agora já estamos em condições de demonstrar a Proposição 3.4.1.

Demonstração da Proposição 3.4.1. As soluções dos três problemas (3.4.11), (3.4.12) e (3.4.13) podem ser obtidos pelo procedimento de minimização. Isto é, se definimos

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon &= \min_{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla \phi|^2 + \phi^2) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \phi dx \right\} \\
\mu_\varepsilon &= \min_{\phi \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 + \phi^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon \phi dx \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (g(x_1)|\phi_{x_1}|^2 + g(x_1)\phi^2) dx_1 - \int_0^1 M f_\varepsilon \phi dx_1 : \phi \in H^1(0, 1), \right. \\ \left. \phi(0) = w_\varepsilon(p_0), \quad \phi(1) = w_\varepsilon(p_1) \right\}, \end{aligned}$$

então λ_ε , μ_ε e τ_ε são atingidos nos pontos u_ε , w_ε , v_ε respectivamente, e só nestes pontos.

Vamos encontrar primeiro uma relação entre os três valores λ_ε , μ_ε e τ_ε .

Se tomamos a função

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon(x), & x \in \Omega \\ \tilde{v}_\varepsilon(x), & x \in R_\varepsilon \end{cases}$$

como uma função teste para λ_ε , obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla \varphi_\varepsilon|^2 + w_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi_\varepsilon dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w_\varepsilon|^2 + w_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon w_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 + \tilde{v}_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon dx \\ &= \mu_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 + \tilde{v}_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Usando (3.4.25) e (3.4.26), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2 + \tilde{v}_\varepsilon^2) dx &= \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon + \nabla v_\varepsilon|^2 + (\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon + v_\varepsilon)^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2) dx + O(\varepsilon^N) \\ &= \varepsilon^{N-1} \frac{1}{2} \int_0^1 (g(x_1)|v'_\varepsilon|^2 + g(x_1)v_\varepsilon^2) dx_1 + O(\varepsilon^N) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon dx &= \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon v_\varepsilon dx + \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon (\tilde{v}_\varepsilon - v_\varepsilon) dx \\ &= \varepsilon^{N-1} \int_0^1 g(x_1) M f_\varepsilon v_\varepsilon + O(\varepsilon^{N+1}) \end{aligned}$$

Em particular, obtemos

$$\lambda_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + O(\varepsilon^N). \quad (3.4.27)$$

Da definição de λ_ε temos

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon u_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon}|^2 + u_{\varepsilon}^2) dx - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} u_{\varepsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon} + \nabla w_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon} + w_{\varepsilon})^2) dx \\
& \quad - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon} + w_{\varepsilon}) dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w_{\varepsilon}|^2 + w_{\varepsilon}^2) dx - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} w_{\varepsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon})^2) dx \\
& \quad + \int_{\Omega} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}) w_{\varepsilon} + \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}) \nabla w_{\varepsilon} - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}) \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla w_{\varepsilon}|^2 + w_{\varepsilon}^2) dx - \int_{\Omega} f_{\varepsilon} w_{\varepsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon})^2) dx
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos integração por partes do termo $\int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}) \nabla w_{\varepsilon}$ e o fato que w_{ε} é a solução do problema elíptico (3.4.12) em Ω , isto é,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla w_{\varepsilon}) \nabla w_{\varepsilon} &= \int_{\partial\Omega} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}) \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial n} - \int_{\Omega} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}) \Delta w_{\varepsilon} \\
&= \int_{\Omega} (u_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}) (f_{\varepsilon} - w_{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{R_{\varepsilon}} (|\nabla u_{\varepsilon}|^2 + u_{\varepsilon}^2) dx - \int_{R_{\varepsilon}} f_{\varepsilon} u_{\varepsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{R_{\varepsilon}} (|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla v_{\varepsilon} + \nabla v_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon} + v_{\varepsilon})^2) dx \\
& \quad - \int_{R_{\varepsilon}} f_{\varepsilon} v_{\varepsilon} dx - \int_{R_{\varepsilon}} f_{\varepsilon} (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}) \\
& = \frac{1}{2} \int_{R_{\varepsilon}} (|\nabla u_{\varepsilon} - \nabla v_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon})^2) + \frac{1}{2} \int_{R_{\varepsilon}} (|\nabla v_{\varepsilon}|^2 + v_{\varepsilon}^2) \\
& \quad + \int_{R_{\varepsilon}} (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla v_{\varepsilon}) \nabla v_{\varepsilon} + \int_{R_{\varepsilon}} (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}) v_{\varepsilon} \\
& \quad - \int_{R_{\varepsilon}} f_{\varepsilon} v_{\varepsilon} dx - \int_{R_{\varepsilon}} f_{\varepsilon} (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_{R_{\varepsilon}} (\nabla u_{\varepsilon} - \nabla v_{\varepsilon}) \nabla v_{\varepsilon} &= \int_{R_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x_1} \\
&= \int_{R_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_1} - \frac{\partial M u_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x_1} + \int_{R_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial M u_{\varepsilon}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x_1} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Primeiro vamos analisar I_1 . Como estamos trabalhando com um canal de revolução $R_{\varepsilon} = \{(x_1, \varepsilon y) : |y| \leq r(x_1)\}$, temos a seguinte identidade em R_{ε} :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (M u_{\varepsilon}) = M \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_1} + \frac{r'(x_1)}{r(x_1)} y \cdot \nabla_y u_{\varepsilon} \right). \quad (3.4.28)$$

A prova desta relação é como segue. Fixado x_1 , fazemos o seguinte mudança de variáveis $y = \varepsilon r(x_1)z$ e obtemos

$$(Mu_\varepsilon)(x_1) = \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^{x_1}|} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} u_\varepsilon(x_1, y) dy = \frac{1}{\sigma_{N-1}} \int_{B(0,1)} u_\varepsilon(x_1, \varepsilon r(x_1)z) dz.$$

Tomando a derivada com relação a x_1 , temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Mu_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_{N-1}} \int_{B(0,1)} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, \varepsilon r(x_1)z) + \varepsilon r'(x_1)z \nabla_y u_\varepsilon(x_1, \varepsilon r(x_1)z) \right] dz.$$

Com a mudança de variáveis acima, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Mu_\varepsilon) = \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^{x_1}|} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, y) + \frac{r'(x_1)}{r(x_1)} y \nabla_y u_\varepsilon(x_1, y) \right] dy$$

o qual prova (3.4.28).

Em particular

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{R_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial Mu_\varepsilon}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} = \int_0^1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial Mu_\varepsilon}{\partial x_1} \right] dy dx_1 \\ &= \int_0^1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} |\Gamma_\varepsilon^{x_1}| \left[M \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1}(Mu_\varepsilon) \right] = \int_0^1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \frac{r'(x_1)}{r(x_1)} y \nabla_y u_\varepsilon(x_1, y) dy dx_1, \end{aligned}$$

onde usamos (3.4.28) na última igualdade.

Usando agora que $|r'(x_1)/r(x_1)| \leq c$ e que $|y| \leq c\varepsilon$, obtemos

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{R_\varepsilon} |v'_\varepsilon(x_1)| |\nabla_y u_\varepsilon| \leq C\varepsilon \|v'_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \|v'\|_{L^2(0,1)} \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}.$$

Mas temos estimativas uniforme de $\|v_\varepsilon\|_{H^1(0,1)}$. Portanto, temos que

$$|I_1| \leq C\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \|\nabla_y u_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{4} \|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2$$

e, observando que $\|\nabla_y u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2$, temos

$$|I_1| \leq C\varepsilon^{N+1} + \frac{1}{4} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2.$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \varepsilon^{N-1} \int_0^1 ((M_\varepsilon u_\varepsilon)' - v'_\varepsilon) g(x_1) v'_\varepsilon \\
&= -\varepsilon^{N-1} \int_0^1 (M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) (g(x_1) v'_\varepsilon)' + [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) (g(x_1) v'_\varepsilon)]_0^1 \\
&= -\varepsilon^{N-1} \int_0^1 (M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) [-g(x_1) v_\varepsilon + g(x_1) M_\varepsilon f_\varepsilon] + \varepsilon^{N-1} [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) (g(x_1) v'_\varepsilon)]_0^1 \\
&= \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) v_\varepsilon - \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - v_\varepsilon) f_\varepsilon + \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon) f_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) (g(x_1) v'_\varepsilon)]_0^1.
\end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx &= \int_{R_\varepsilon} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon v_\varepsilon dx \\
&\quad + \int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon|^2 + (u_\varepsilon - v_\varepsilon)^2) dx + \kappa(\varepsilon) + \eta(\varepsilon) + I_1,
\end{aligned}$$

onde $\kappa(\varepsilon) = \int_{R_\varepsilon} (u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon) f_\varepsilon$ e $\eta(\varepsilon) = +\varepsilon^{N-1} [(M_\varepsilon u_\varepsilon - v_\varepsilon) (g(x_1) v'_\varepsilon)]_0^1$. Por (3.4.16) (Lema 3.4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
|\kappa(\varepsilon)| &\leq \|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^1(R_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|u_\varepsilon - M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)} \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \|\nabla_y u\|_{L^2(R_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{N+1} + 1/2 \|\nabla_y u\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2 \\
&\leq C \varepsilon^{N+1} + 1/4 \|\nabla u - \nabla v_\varepsilon\|_{L^2(R_\varepsilon)}^2
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4.5,

$$|\eta(\varepsilon)| \leq C(N) \varepsilon^{N-1} [|T_\varepsilon^0(u_\varepsilon - v_\varepsilon)| + |T_\varepsilon^1(u_\varepsilon - v_\varepsilon)|] \leq C(N) \varepsilon^{N/2} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

e portanto

$$|\eta(\varepsilon)| \leq C(N) \varepsilon^N + 1/2 \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Colocando juntas todas as estimativas de $\eta(\varepsilon)$, $\kappa(\varepsilon)$ e I_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{R_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx - \int_{R_\varepsilon} f_\varepsilon u_\varepsilon dx &\geq \int_{R_\varepsilon} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + v_\varepsilon^2) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon v_\varepsilon dx \\
&\quad + 1/2 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 - C(N) \varepsilon^N.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_\varepsilon \geq \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + 1/2 \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + 1/2 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 - C(N) \varepsilon^N.$$

Como obtemos $\lambda_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + C\varepsilon^N$, então

$$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 \leq C(N) \varepsilon^N,$$

e em particular

$$\lambda_\varepsilon = \mu_\varepsilon + \varepsilon^{N-1} \tau_\varepsilon + O(\varepsilon^N).$$

■

Observação 3.4.1 A estimativa (3.4.14) com ordem ε^{N-1} não é suficiente, pois não dá nenhuma informação sobre o comportamento de u_ε no canal. Se u_ε e v_ε são uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, com ∇u_ε e ∇v_ε uniformemente limitadas (por exemplo $u_\varepsilon = 1$ e $v_\varepsilon = 0$), então vale $\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^{N-1}$. Portanto esta desigualdade não implica que u_ε e v_ε estejam próximas em algum sentido como funções definidas em R_ε .

Não obstante, a estimativa do tipo $\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^N$ dá mais informação sobre o comportamento de u_ε no canal. Esta nos diz que realmente u_ε e v_ε tem que estar próximas em algum sentido no canal. Uma norma relevante no canal seria

$$\frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \|u\|_{H^1(R_\varepsilon)}^2,$$

no sentido que, se esta norma tenda a zero para alguma função u_ε , então podemos assegurar que a função u_ε realmente tem que estar perto de zero em algum sentido no canal.

Vamos estimar o terceiro termo do lado direito de (3.4.8),

Lema 3.4.7 Existem constantes positivas $C, \tilde{C}$ tais que

$$\begin{aligned} \|(E_{\mathcal{C}} - E)(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2} + \beta}}{|\lambda|^{1 - \frac{\beta}{2}}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \\ \|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (E_{\mathcal{C}} - E)(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus (R_\varepsilon)} &\leq \tilde{C} \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

onde $0 \leq \beta = 1 - \alpha < 1$ e $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(R_\varepsilon)$.

Demonstração. Seja $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(R_\varepsilon)$ e denotemos por

$$K_\varepsilon := (E_{\mathcal{C}} - E)(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon = \tilde{z}_\varepsilon - z_\varepsilon,$$

onde $\tilde{z}_\varepsilon = E_{\mathcal{C}}(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon$ e $z_\varepsilon = E(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon$.

Observe que $(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon = (w_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \lambda w_\varepsilon = f_\varepsilon, & x \in \Omega \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \\ -\frac{1}{g}(g v_{\varepsilon x_1})_{x_1} + \lambda v_\varepsilon = M f_\varepsilon, & x_1 \in (0, 1) \\ v_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(0), v_\varepsilon(1) = w_\varepsilon(1) \end{cases} \quad (3.4.30)$$

e $z_\varepsilon(x_1, y) = v_\varepsilon(x_1)$, $\forall (x_1, y) \in \mathbf{R}_\varepsilon$ e $\tilde{v}_\varepsilon(x_1, y) = v_\varepsilon(x_1) + h_\varepsilon(x_1)(w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)) + h_\varepsilon(1 - x_1)(w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1))$, $\forall (x_1, y) \in \mathbf{R}_\varepsilon$.

Como $\|K_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \|K_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2 = \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2$, então só vamos estimar $\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2$.

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2 &= \|\tilde{z}_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2 = \int_{\mathbf{R}_\varepsilon} |\tilde{z}_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x_1)|^2 dx_1 dy \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(x_1)(w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0))|^2 dx_1 dy \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(1 - x_1)(w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1))|^2 dx_1 dy \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(x_1)|^2 |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)|^2 dx_1 dy \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(1 - x_1)|^2 |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)|^2 dx_1 dy \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 \left(\sup_{y \in \Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y} \right| \right)^2 dx_1 dy \\ &\quad + C_1 \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 \left(\sup_{y \in \Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y} \right| \right)^2 dx_1 dy \\ &\leq 2C_1 \left(\int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy \right) \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2. \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

Consideremos a transformação $S: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ dada por $S(y) = \varepsilon y = \tilde{y}$ e observe que $S(\Gamma_1^{x_1}) = \Gamma_\varepsilon^{x_1}$.

Com isto temos que

$$\int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy = \varepsilon \varepsilon^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} \left| \frac{y}{\varepsilon} \right|^2 dy = \varepsilon^3 \int_{\Gamma_1^{x_1}} \varepsilon^{N-1} |\tilde{y}|^2 d\tilde{y} = \varepsilon^{N+2} \sigma_{N-1},$$

onde σ_{N-1} é a medida de Lebesgue (N-1) dimensional da bola unitária. Analogamente se mostra que

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy = O(\varepsilon^{N+2}). \quad (3.4.33)$$

Logo

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 &\leq 2C_1 \varepsilon^{N+2} \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 \\ \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} &\leq C_2 \varepsilon^{(N+2)/2} \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

As seguintes propriedades valem (ver Mora [37])

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \quad (3.4.35)$$

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \quad (3.4.36)$$

onde C é uma constante que não depende de ε .

Usando (3.4.36) em (3.4.34), temos

$$\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_3 \frac{\varepsilon^{(N+2)/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (3.4.37)$$

Por outro lado, como em (3.4.31),

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 &= \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(x_1)|^2 |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)|^2 dx_1 dy \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |h_\varepsilon(1-x_1)|^2 |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)|^2 dx_1 dy \\ &\leq 2\tilde{C}_1 \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}^2 \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} dy + 2\tilde{C}_2 \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}^2 \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} dy \\ &\leq 2(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \varepsilon^N \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}^2 \end{aligned}$$

e

$$\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon^{N/2} \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (3.4.38)$$

Usando (3.4.35) em (3.4.38), temos a seguinte estimativa

$$\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_4 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (3.4.39)$$

Usando (3.4.37) e (3.4.39), temos a seguinte desigualdade de interpolação

$$\begin{aligned}
\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} &= \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^\alpha \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \\
&\leq \left(C_4 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right)^\alpha \left(C_3 \frac{\varepsilon^{(N+2)/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right)^{1-\alpha} \\
&\leq C_4^\alpha C_3^{1-\alpha} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}\alpha + \frac{N+2}{2}(1-\alpha)}}{|\lambda|^{\alpha + (1-\alpha)/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\
&\leq C_5 \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2} + \beta}}{|\lambda|^{1-\frac{\beta}{2}}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \quad 0 \leq \beta = 1 - \alpha < 1.
\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Isto mostra a primeira desigualdade em (3.4.29).

Para mostrar a segunda desigualdade em (3.4.29), denotemos por $D_\varepsilon = A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}K_\varepsilon = K_\varepsilon - \lambda(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}K_\varepsilon$. Como $K_\varepsilon \notin H^1(\Omega_\varepsilon)$, mas $K_\varepsilon \in H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)$, então podemos estimar $\|K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} = \|K_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)}$. Como já estimamos $\|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}$, só nos falta estimar $\|\nabla K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}$. Como $h'_\varepsilon(x_1) = \varepsilon^{-1}h'(x/\varepsilon)$, $h'_\varepsilon(1-x_1) = -\varepsilon^{-1}h'((1-x_1)/\varepsilon)$, usando (3.4.33), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 &= \|\nabla(\tilde{z}_\varepsilon - z_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 = \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} |\nabla(\tilde{z}_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x_1))|^2 dx_1 dy \\
&\leq \int_0^\varepsilon |h'_\varepsilon(x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(0, y) - v_\varepsilon(0)|^2 dx_1 dy \\
&\quad + \int_0^\varepsilon |h_\varepsilon(x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla_y w_\varepsilon(0, y)|^2 dx_1 dy \\
&\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 |h'_\varepsilon(1-x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |w_\varepsilon(1, y) - v_\varepsilon(1)|^2 dx_1 dy \\
&\quad + \int_{1-\varepsilon}^1 |h_\varepsilon(1-x_1)|^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |\nabla_y w_\varepsilon(1, y)|^2 dx_1 dy \\
&\leq C_1 \varepsilon^{-2} \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 \\
&\quad + \tilde{C}_1 \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} dx_1 dy \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 \\
&\quad + C_1 \varepsilon^{-2} \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} |y|^2 dx_1 dy \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 \\
&\quad + \tilde{C}_1 \int_{1-\varepsilon}^1 \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} dx_1 dy \|w_\varepsilon\|^2 \\
&\leq 2C_1 \varepsilon^N \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 + 2\tilde{C}_1 \varepsilon^N \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2 \\
&\leq C \varepsilon^N \|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^2,
\end{aligned}$$

onde também usamos que $\int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} dx_1 dy = O(\varepsilon^N)$.

Usando (3.4.36) nesta última desigualdade, temos

$$\|\nabla K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_6 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (3.4.41)$$

Como $\|K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 = \|K_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 = \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 + \|\nabla K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2$, usando (3.4.40) e (3.4.41), temos

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 &\leq \left(C_5 \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2} + \beta}}{|\lambda|^{1 - \frac{\beta}{2}}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right)^2 + \left(C_6 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \right)^2 \\ &\leq C_7 \frac{\varepsilon^N}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}^2 \\ \|K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} &\leq C_8 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

Por outro lado, também temos de (3.4.39) que

$$\begin{aligned} \|\lambda(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq |\lambda| \|(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq |\lambda| \frac{1}{|\lambda|^{1/2}} \|K_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ &\leq |\lambda|^{1/2} C_4 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\ &\leq C_5 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

onde usando (3.4.39), (3.4.42) e (3.4.43), temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|D_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} &\leq \|K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} + \|\lambda(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} K_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_9 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

■

Agora vamos estimar o segundo termo do lado direito em (3.4.8)

$$\|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}} R_0(A_0) M) E A_0(A_0 + \lambda)^{-1} M\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)}.$$

Para isto vamos necessitar dos seguintes resultados.

Lema 3.4.8 *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$(i) \quad \|E A_0(A_0 + \lambda)^{-1} M f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)},$$

$$(ii) \quad \|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Demonstração.

(i) O operador E na verdade depende de ε , isto é, $E = E_\varepsilon$ e

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : L^\infty(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0, 1) &\rightarrow L^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon}) \\ (w, v) &\rightarrow E_\varepsilon(w, v) = \begin{cases} w(x), & \Omega \\ v(x_1), & (x_1, y) \in \mathbf{R}_\varepsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

Logo, da definição de E_ε , temos que $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(0, 1), L^\infty(\Omega_\varepsilon))} = 1$.

O operador M também depende de ε , isto é, $M = M_\varepsilon$ e

$$\begin{aligned} M_\varepsilon : L^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon}) &\rightarrow L^\infty(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0, 1) \\ f &\rightarrow (M_\varepsilon f)(x) = \begin{cases} f(x), & \Omega \\ \frac{1}{|\Gamma_\varepsilon^{x_1}|} \int_{\Gamma_\varepsilon^{x_1}} f(x_1, y) dy, & (0, 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

Da definição de M_ε , segue que $\|M_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega_\varepsilon), L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(0, 1))} \leq 1$.

Com isso,

$$\|EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega_\varepsilon), L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq C \|A_0(A_0 + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega_\varepsilon) \oplus L^\infty(0, 1))} \quad (3.4.47)$$

Seja $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0, 1)$, tal que

$$(A_0 + \lambda)^{-1}g = (w, v). \quad (3.4.48)$$

A equação (3.4.48) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + \lambda w_\varepsilon = g, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega \\ -\frac{1}{g}(gv_{\varepsilon x_1})_{x_1} + \lambda v_\varepsilon = Mg, & \text{em } (0, 1) \\ v_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(0), \quad v_\varepsilon(1) = w_\varepsilon(1) \end{cases} \quad (3.4.49)$$

e, procedendo como na prova da Proposição 3.3.1 (iv), obtemos

$$\|w\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \quad \|v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}(0, 1)} \right).$$

Como $A_0(A_0 + \lambda)^{-1} = I - \lambda(A_0 + \lambda)^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
\|A_0(A_0 + \lambda)^{-1}g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0,1)} &= \|g - \lambda(A_0 + \lambda)^{-1}g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0,1)} \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0,1)} + C\|g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0,1)} \\
&\leq \tilde{C}\|g\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus L^\infty(0,1)}.
\end{aligned}$$

Voltando para (3.4.47), temos

$$\|EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega_\varepsilon), L^\infty(\Omega_\varepsilon))} \leq C, \quad (3.4.50)$$

onde C é uma constante que não depende de λ e ε .

(ii) Observe que $A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} = I - \lambda(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}$. Seja $f_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, então

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= \|f_\varepsilon - \lambda(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \|f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + |\lambda| \|(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}
\end{aligned}$$

Agora $(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon = u_\varepsilon$ é equivalente a resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.4.51)$$

De (3.4.51), temos $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$, isto é,

$$\|(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})},$$

onde a constante C é independente de ε . Com isto temos

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + C\|f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq (1 + C)\|f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \tilde{C}\|f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq \tilde{C}, \quad (3.4.52)$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante que não depende de λ e ε . ■

Usando o Lema 3.4.8 e a Proposição 3.4.1 temos

$$\begin{aligned} & \|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}(R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)EA_0(A_0 + \lambda)^{-1}M\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & \leq C \|R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{N/2}. \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

Agora vamos estimar o primeiro termo do lado direito em (3.4.8). De fato,

$$\begin{aligned} & \|A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}(R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M)(I - EM)f_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & \leq M \|R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega_\varepsilon) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon))} \|(I - EM)f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \\ & \leq MC\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

Logo temos o seguinte teorema.

Teorema 3.4.1 *Se $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(\mathbb{R}_\varepsilon)$, então temos*

$$\| [R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M] f_\varepsilon \|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (3.4.55)$$

Demonstração. Usando (3.4.54), (3.4.53) e o Lema 3.4.7 temos

$$\begin{aligned} & \| (R_\lambda(A_\varepsilon) - ER_\lambda(A_0)M) f_\varepsilon \|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & = \| A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M) (I - EM) f_\varepsilon \|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & + \| (A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (R_0(A_\varepsilon) - E_{\mathcal{C}}R_0(A_0)M) EA_0(A_0 + \lambda)M) f_\varepsilon \|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & + \| [A_\varepsilon(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} (E_{\mathcal{C}} - E) (A_0 + \lambda)^{-1}M] f_\varepsilon \|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & \leq C\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + C\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + C_9 \frac{\varepsilon^{N/2}}{|\lambda|^{1/2}} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\ & \leq C\varepsilon^{N/2} \|f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{aligned} \quad (3.4.56)$$

■

3.4.2 Comparação dos semigrupos lineares

Nesta seção queremos comparar os semigrupos lineares associados aos problemas $(\mathbf{P}_\varepsilon)$ e $(\mathbf{P}_0)$ respectivamente. A primeira dificuldade que enfrentamos é que os semigrupos $\{e^{-A_\varepsilon t} : t \geq 0\}$ e $\{e^{-A_0 t} : t \geq 0\}$ estão definidos em espaços diferentes, isto é $e^{-A_\varepsilon t} : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ e $e^{-A_0 t} : X_0 \rightarrow X_0$.

Com os resultados da seção anterior, estamos em condições de estimar os semigrupos lineares no sentido da proposição abaixo.

Proposição 3.4.2 *Existem um número $0 < \gamma < 1$ e uma função $\vartheta(\varepsilon)$, com $\vartheta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando*

$\varepsilon \rightarrow 0$, tais que

$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon - E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq M \vartheta(\varepsilon) e^{at} t^{-\gamma} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}, \quad t > 0, \quad (3.4.57)$$

onde $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(\mathbb{R}_\varepsilon)$ e $M > 0$.

Demonstração. Seja $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \oplus \mathcal{C}(\mathbb{R}_\varepsilon)$. Então

$$\begin{aligned} \left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon - E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} [R_\lambda(A_\varepsilon) - E R_\lambda(A_0) M] f_\varepsilon d\lambda \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma e^{\lambda t} \left\| [R_\lambda(A_\varepsilon) - E R_\lambda(A_0) M] f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{C \varepsilon^{N/2}}{2\pi} \left| \int_\Gamma e^{\lambda t} d\lambda \right| \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $\Gamma \subset \rho(-A_\varepsilon) \cap \rho(-A_0)$ é uma curva adequada no plano complexo. Como $\sigma(-A_\varepsilon), \sigma(-A_0) \subset [a, \infty)$, com $a > 0$ (perto do zero), podemos tomar

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \theta(-1 \pm i) + a, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Com esta curva Γ temos que $\left| \int_\Gamma e^{\lambda t} d\lambda \right| \leq C_{10} e^{at} t^{-1}$. Logo, temos

$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon - E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_{11} \varepsilon^{N/2} e^{at} t^{-1} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.4.58)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon - E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} &\leq \left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ &\leq C_{12} t^{-1/2} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + C_{13} t^{-1/2} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_{14} t^{-1/2} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

De (3.4.58) e (3.4.59), obtemos a seguinte desigualdade de interpolação

$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon - E e^{-A_0 t} M f_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_{15} \varepsilon^{N/2-\rho} e^{at} t^{-\gamma} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}, \quad (3.4.60)$$

onde $0 < \rho \ll 1$ e $0 < \gamma < 1$. ■

3.4.3 Comparação dos semigrupos não-lineares

Agora podemos calcular $T_\varepsilon(t, \psi_\varepsilon) - E T_0(t, M \psi_\varepsilon)$.

Proposição 3.4.3 *Existem uma constante positiva C e uma função $N(\varepsilon)$, com $N(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando*

$\varepsilon \rightarrow 0$, tais que

$$\|T_\varepsilon(t, \psi_\varepsilon) - ET_0(t, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq CN(\varepsilon)t^{-\gamma}, \quad t \in (0, \tau], \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq R, \quad (3.4.61)$$

onde $C = C(\tau, R)$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \|T_\varepsilon(t, \psi_\varepsilon) - ET_0(t, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq \|e^{-A_\varepsilon t} \psi_\varepsilon - Ee^{-A_0 t} M\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & + \int_0^t \left\| \left[e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(T_\varepsilon(s, \psi_\varepsilon)) - Ee^{-A_0(t-s)} F_0(T_0(s, M\psi_\varepsilon)) \right] \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds. \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

Somando e subtraindo o termo $e^{A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon))$ no segundo termo do lado direito de (3.4.62), e lembrando que $F_0(T_0(s, M\psi_\varepsilon)) = MF_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon))$, temos

$$\begin{aligned} & \|T_\varepsilon(t, \psi_\varepsilon) - ET_0(t, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq \|e^{-A_\varepsilon t} \psi_\varepsilon - Ee^{-A_0 t} M\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \\ & + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-s)} [F_\varepsilon(T_\varepsilon(s, \psi_\varepsilon)) - F_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon))]\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds \\ & \int_0^t \left\| \left[e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon)) - Ee^{-A_0(t-s)} MF_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon)) \right] \right\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds \\ & \leq C_{15} \varepsilon^{\frac{N}{2}-\rho} e^{at} t^{-\gamma} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + CL \int_0^t \|T_\varepsilon(s, \psi_\varepsilon) - ET_0(s, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds \\ & + C_{15} \varepsilon^{\frac{N}{2}-\rho} \int_0^t e^{a(t-s)} (t-s)^{-\gamma} \|F_\varepsilon(ET_0(s, M\psi_\varepsilon))\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds \\ & \leq C_{16} \varepsilon^{\frac{N}{2}-\rho} t^{-\gamma} e^{a^+ t} + CL \int_0^t \|T_\varepsilon(s, \psi_\varepsilon) - ET_0(s, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} ds. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall temos

$$\|T_\varepsilon(t, \psi_\varepsilon) - ET_0(t, M\psi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \leq C_{17} \varepsilon^{\frac{N}{2}-\rho} t^{-\gamma} e^{(a^++L)t}, \quad (3.4.63)$$

onde $a^+ > a$ e L é a constante de Lipschitz de F_ε . ■

3.5 Semi-continuidade superior dos atratores

Primeiro vamos enunciar a definição de semi-continuidade superior de atratores.

Definição 3.5.1 Dizemos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0\}$ é semi-continua superiormente em $\varepsilon = 0$ no espaço $H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)$ se

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \left[\inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \left\{ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \right\} \right] \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.5.1)$$

O seguinte resultado nos dá a semi-continuidade superior dos atratores

Proposição 3.5.1 *Os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ são semi-contínuos superiormente em $\varepsilon = 0$ no espaço $H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)$.*

Demonstração. Sejam $\delta > 0$ um número pequeno e $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Como os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ são limitados uniformemente em ε e $\mathcal{A}_0$ atrai conjuntos limitados, então existe um tempo $\tau > 0$ tal que

$$\text{dist}(T_0(\tau, \mathcal{A}_\varepsilon), \mathcal{A}_0) \leq \delta/2, \quad \text{uniformemente em } \varepsilon.$$

Agora, se $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$, pela propriedade de invariância dos atratores, existe $w_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$, tal que $T_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon) = u_\varepsilon$.

Em particular

$$\begin{aligned} \text{dist}(u_\varepsilon, \mathcal{A}_0) &\leq \text{dist}(u_\varepsilon, T_0(\tau, \mathcal{A}_\varepsilon)) + \text{dist}(T_0(\tau, \mathcal{A}_\varepsilon), \mathcal{A}_0) \\ &\leq \|T_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon) - ET_0(\tau, Mw_\varepsilon)\| + \text{dist}(T_0(\tau, \mathcal{A}_\varepsilon), \mathcal{A}_0) \\ &\leq CN(\varepsilon)\tau^{-\gamma} + \delta/2. \end{aligned}$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno, obtemos $\text{dist}(u_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq \delta$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$. ■

Corolário 3.5.1 *Se denotarmos por $\mathcal{E}_\varepsilon$ o conjunto de pontos de equilíbrios de $(\mathbf{P}_\varepsilon)$, com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, então*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon} \left[\inf_{u_0 \in \mathcal{E}_0} \left\{ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \right\} \right] \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.5.2)$$

Demonstração. Para mostrar a semi-continuidade superior do conjunto de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$, vamos provar que para qualquer sequência de $\varepsilon \rightarrow 0$ e para qualquer $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon$, podemos extrair uma subsequência, que ainda denotaremos por ε , e obter um $u_0 \in \mathcal{E}_0$ tal que $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, da semi-continuidade superior dos atratores dada por (3.5.1), obtemos a existência de um $u_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para mostrar que $u_0 \in \mathcal{E}_0$, observamos que para qualquer $t > 0$, $\|u_\varepsilon - ET_0(t, u_0)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \rightarrow \|u_0 - T_0(t, u_0)\|_{H^1(\Omega)}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, para $\tau > 0$ fixo e qualquer $t \in (0, \tau)$, temos que

$$\|u_\varepsilon - ET(t, u_0)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} = \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - Et_0(t, u_0)\|_{H^1(\Omega) \oplus H^1(\mathbb{R}_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde usamos (3.4.61) e o fato de u_ε ser ponto de equilíbrio. Em particular temos que para cada $t > 0$, $u_0 = T_0(t, u_0)$, o qual implica que u_0 é ponto de equilíbrio. ■

Padrões induzidos por controles não-lineares na fronteira

Neste capítulo estudaremos a existência de equilíbrios não-constantos estáveis (padrões) para equações de reação-difusão com condições de fronteira não linear em domínios pequenos conectados por canais finos. Mostraremos a convergência de autovalores e autovetores para o operador Laplaciano nestes domínios. Esta informação é usada para mostrar que a dinâmica assintótica da equação do calor neste domínio é equivalente a dinâmica assintótica de um sistema de duas equações ordinárias fracamente acopladas. As principais ferramentas usadas são a Teoria da variedade invariante e o Teorema do traço uniforme no canal fino.

4.1 Introdução

Nesta seção nosso objetivo é estudar a existência de padrões para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u + f(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega_\varepsilon \\ \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u), & \text{em } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada normal exterior a fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ de $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$ (ver Figura 4.1), com $\Omega = \Omega^L \cup \Omega^R$, $\Omega^L, \Omega^R \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 2$) domínios, R_ε um canal fino que conecta Ω^L e Ω^R , $\varepsilon > 0$ um parâmetro positivo pequeno, $\delta > 0$ uma constante positiva, e f, g são funções não-lineares satisfazendo certas propriedades de dissipatividade que serão especificadas mais tarde.

Existem vários trabalhos em existência de equilíbrios estáveis não-constantos para problemas de reação-difusão com condições de Neumann na fronteira. Matano [36], mostrou

Figura 4.1: Domínio tipo Dumbbell

um importante resultado na existência de padrões para problemas de reação-difusão com condições de Neumann homogêneas na fronteira

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + k f(u) & \text{em } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial D, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

onde D é um domínio não-convexo. Nesta direção estão também os trabalhos de Hale e Vegas [25] e Vegas [42].

Consul e Sòla-Morales ([21],[22]) estenderam os resultados de Matano provando a existência de equilíbrios estáveis não-constantes para equações de difusão com reação não-linear na fronteira

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{em } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = k f(u) & \text{em } \partial D. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Nos trabalhos de Jimbo [30, 31] foram estudados os equilíbrios de (4.1.2) com coeficiente de difusão homogêneo. Ele deu um estudo detalhado da estrutura das soluções no limite singular e, em [29], considera o canal fino que une Ω^L em Ω^R com volume pequeno quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$ e se aproxima de um segmento de reta. A técnica usada nestes trabalhos é similar a de Matano [36].

Jimbo e Morita, em [33], estudaram o problema de autovalores para o operador Laplaciano com condições de Neumann homogêneas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que consiste de k subdomínios fixos e canais finos que unem estes subdomínios. O volume de cada canal fino é controlado por um pequeno parâmetro $\varepsilon > 0$ e estes canais finos tendem a um segmento

de reta conectando estes subdomínios num certo sentido (alguns destes canais podem ser vazios). Eles caracterizaram os autovalores e autofunções para o operador $-\Delta$ neste domínio. Usando a teoria de variedades invariantes, eles mostraram que a dinâmica para o problema de reação-difusão é equivalente a dinâmica de um sistema de equações diferenciais ordinárias na variedade invariante.

Morita, em [38], estuda em detalhe o comportamento assintótico das soluções para o problema de reação-difusão de uma equação análoga a (4.1.2), em domínios parametrizados por $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$. Particularmente ele estudou a estrutura da dinâmica global deste sistema para ε pequeno. Usando a teoria das variedades invariantes, mostrou que a dinâmica deste sistema é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias reduzidas na variedade invariante.

Morita e Jimbo, em [39], estudaram a dinâmica das soluções para um sistema de reação-difusão num domínio de forma específica. Aqui, o domínio tem k regiões grandes $D_i, i = 1, \dots, k$ e os canais finos $Q_{i,j}(\varepsilon)$ conectando D_i e D_j se aproximam a um segmento de reta quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Nestes domínios, os k primeiros autovalores de $-\Delta$, com condição de Neumann homogênea na fronteira, tendem a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, enquanto que, os $(k+1)$ - autovalores tendem ao infinito. Aqui eles mostraram que o comportamento assintótico do fluxo associado ao sistema de reação-difusão é determinado por um sistema finito dimensional, isto é, toda solução se comporta assintoticamente como uma solução de uma equação diferencial ordinária. Eles mostraram sob certas condições que existe uma variedade invariante de dimensão finita que atrai exponencialmente toda solução.

Existem vários trabalhos em problemas de autovalores para o operador Laplaciano em domínios perturbados, como por exemplo [8], [25], [30], [42] etc.

Neste trabalho, usaremos a teoria de variedades invariantes e um Teorema de Traço Uniforme para mostrar que a dinâmica de (4.1.1) é equivalente a dinâmica de duas equações diferenciais ordinárias na variedade invariante.

Os padrões obtidos por condições de fronteira não-linear são, especialmente, interessantes para problemas de controle envolvendo modelos de reação-difusão, onde a fronteira é, em geral, a única parte acessível do domínio.

A diferença entre nosso trabalho, neste capítulo, com o trabalho de Consul e Sóla-Morales ([21], [22]), é que os equilíbrios associados ao sistema de duas equações diferenciais ordinárias são assintoticamente estáveis, enquanto que, em [21] e [22], estes são somente estáveis.

Agora vamos especificar o domínio singularmente perturbado $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N$ na forma $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$, onde Ω^L , Ω^R e R_ε são definidos nas seguintes condições:

- (I). Ω^L , Ω^R são domínios limitados em $\mathbb{R}^N$ com fronteiras suaves e $\overline{\Omega^L} \cap \overline{\Omega^R} = \emptyset$.
- (II). Existem coordenadas ortogonais $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_1, x') \in \mathbb{R}^N$ tais que as seguintes

condições valem para alguma constante positiva $\varepsilon_0 > 0$,

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}^L \cap \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x_1 \geq 0, |x'| < \varepsilon_0\} &= \{(0, x') \in \mathbb{R}^N : |x'| < \varepsilon_0\}, \\ \overline{\Omega}^R \cap \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : x_1 \leq 1, |x'| < \varepsilon_0\} &= \{(1, x') \in \mathbb{R}^N : |x'| < \varepsilon_0\}\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^N : 0 < x_1 < 1, |x'| < \varepsilon h(x_1)\},$$

onde $h \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \cap \mathcal{C}^1((0, 1))$ é positiva em $(0, 1)$.

Definamos o segmento de reta

$$L = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathbf{R}}_\varepsilon = \{(z, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq z \leq 1\} \cong \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1\},$$

cujos pontos finais são $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$ e $P_1 = (1, 0, \dots, 0)$, o qual é isomorfo ao segmento de reta $\{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1\}$

4.2 Convergência de autovalores

Nesta seção, vamos considerar os seguintes problemas de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^\varepsilon u & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^{N-1}} \frac{d}{dz} \left(h^{N-1} \frac{du}{dz} \right) = \tau u, & \text{em } 0 < z < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Denotemos por $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ e $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$, respectivamente os conjuntos de autovalores de (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) arranjados em forma crescente e com multiplicidade. Também denotemos por $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\varphi_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ e $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$, respectivamente, os conjuntos de autofunções ortonormalizadas de (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3).

Rearranjando $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty \cup \{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ em ordem crescente, contando a multiplicidade e denotando-os por $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, então temos a seguinte

Proposição 4.2.1 (Jimbo e Morita [33], Proposição 2.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^\varepsilon = \lambda_k, \quad k \geq 1. \quad (4.2.4)$$

O seguinte teorema dá uma caracterização para o conjunto de autovalores $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$.

Teorema 4.2.1 (Jimbo [31], Teorema 1) *O conjunto $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ pode ser escrito como*

$$\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty = \{\mu_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty \cup \{\tau_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty, \quad (4.2.5)$$

onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_n^\varepsilon = \mu_n$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_n^\varepsilon = \tau_n$, $n \geq 1$.

Observação 4.2.1 *Os autovalores τ_n de $-\frac{1}{h^{N-1}} \frac{d}{dz} (h^{N-1} \frac{d}{dz})$, em $(0, 1)$, com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira, são o limite de autovalores τ_n^ε de $-\Delta$ em R_ε com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira $\Gamma_\varepsilon = \partial R_\varepsilon \cap \partial \Omega$ e condições de Neumann homogêneas em outro lugar, isto é,*

$$\begin{cases} -\Delta u = \tau^\varepsilon u, & R_\varepsilon \\ u = 0, & \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial R_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} -\frac{1}{h^{N-1}} \frac{d}{dz} (h^{N-1} \frac{du}{dz}) = \tau u, & 0 < z < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(ver Arrieta [3] para maiores detalhes).

Definindo $Q_\varepsilon = \{(y_1, y') \in \mathbb{R}^N : 0 < y_1 < 1, |y'| < \varepsilon\}$, $y' = (y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, existe uma transformação L_ε a qual mapeia R_ε sobre Q_ε . Esta transformação é dada por

$$\begin{aligned} L_\varepsilon : Q_\varepsilon &\longrightarrow R_\varepsilon \\ (y_1, y') &\longmapsto L_\varepsilon(y_1, y'), \end{aligned}$$

onde $L_\varepsilon(y_1, y') = (y_1, h(y_1)y') = (x_1, x')$. Em outras palavras, temos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= h(y_1)y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ x_N &= h(y_1)y_N. \end{cases}$$

A matriz Jacobiana desta transformação é dada por

$$J(L_\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h'(y_1)y_2 & h(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ h'(y_1)y_3 & 0 & h(y_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h'(y_1)y_N & 0 & 0 & \cdots & h(y_1) \end{pmatrix}$$

e o Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_N)} = \frac{\partial(x_1, x')}{\partial(y_1, y')} = h^{N-1}(y_1).$$

Com isto, temos o seguinte lema (similar ao Lema 3.2 em Arrieta [4]).

Lema 4.2.1 L_ε induz uma transformação 1 – 1 entre $H^1(\mathbf{R}_\varepsilon)$ e $H^1(\mathbf{Q}_\varepsilon)$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon : H^1(\mathbf{Q}_\varepsilon) &\longrightarrow H^1(\mathbf{R}_\varepsilon) \\ u &\longmapsto \tilde{u} = u \circ L_\varepsilon \end{aligned}$$

satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1}(y_1, y') - \sum_{k=2}^N y_k \frac{h'(y_1)}{h(y_1)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}(y_1, y') \\ \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, x') = \frac{1}{h(y_1)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}(y_1, y'), \quad j = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1}(y_1, y') = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') + \sum_{k=2}^N x_k \frac{h'(x_1)}{h(x_1)} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1, x') \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}(y_1, y') = h(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, x'), \quad j = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Além disso, existem constantes c_1, c_2 , tais que, para todo $u \in H^1(\mathbf{R}_\varepsilon)$, temos

$$\int_{\mathbf{R}_\varepsilon} u(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N = \int_{\mathbf{Q}_\varepsilon} h^{N-1}(y_1) \tilde{u}(y_1, \dots, y_N) dy_1 \cdots dy_N$$

e

$$\begin{aligned} c_1 \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbf{Q}_\varepsilon)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2 \leq c_2 \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbf{Q}_\varepsilon)}^2 \\ c_1 \|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbf{Q}_\varepsilon)}^2 &\leq \|u\|_{H^1(\mathbf{R}_\varepsilon)}^2 \leq c_2 \|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbf{Q}_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Para provar o Lemma 4.2.1 veja os detalhes em Arrieta [4]. Assim, podemos facilmente provar a observação 4.2.1.

De $0 = \mu_1 = \mu_2$, $\mu_3 > 0$, $\tau_1 > 0$ e (4.2.5), podemos ver que $\lambda_1^\varepsilon = 0$, λ_2^ε tende a 0 enquanto que λ_3^ε é limitado longe do 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto é mostrado no seguinte teorema.

Teorema 4.2.2 (Convergência de Autovalores) *Se $n \in \mathbb{N}$ e λ_n^ε autovalor para o problema (4.2.2), então*

- (i) $\lambda_1^\varepsilon \equiv 0$,
- (ii) $\lambda_2^\varepsilon \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$
- (iii) 0 não é um ponto de acumulação de $\{\lambda_3^\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$.

Demonstração.

(i) É fácil ver que $\lambda_1^\varepsilon = 0$.

(ii) Seja λ_2^ε o segundo autovalor de (4.2.2). Aqui seguiremos as idéias de Carvalho e Pereira em [18]. Primeiramente, vamos exibir uma função teste $\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \cap C(\Omega_\varepsilon)$ que só depende de x_1 , onde

$$\varphi^\varepsilon = \begin{cases} c_1^\varepsilon & \text{em } \Omega^L \\ \text{linear} & \text{em } R_\varepsilon \\ c_2^\varepsilon & \text{em } \Omega_0^R, \end{cases} \quad (4.2.9)$$

com $c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon$ são soluções de

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi^\varepsilon & = 0 \\ \|\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} & = 1. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

O sistema (4.2.10) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1^\varepsilon |\Omega^L| + \int_{R_\varepsilon} \varphi^\varepsilon + c_2^\varepsilon |\Omega^R| & = 0 \\ (c_1^\varepsilon)^2 |\Omega^L| + \int_{R_\varepsilon} (\varphi^\varepsilon)^2 + (c_2^\varepsilon)^2 |\Omega^R| & = 1. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Da primeira equação de (4.2.10), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi^\varepsilon \right| &= \left| \int_{R_\varepsilon} \varphi^\varepsilon \right| \leq \int_{R_\varepsilon} |\varphi^\varepsilon| \leq \left(\int_{R_\varepsilon} |\varphi^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{R_\varepsilon} 1^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |R_\varepsilon|^{1/2} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = (\alpha \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1})^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Logo segue que $\int_{R_\varepsilon} \varphi^\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Usando o lema Elíptico (Lema 2.4.1), conclui-se que

$\|\varphi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, onde $K := K(|\Omega_\varepsilon|, N)$ é uma constante positiva. Com isto temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} |\varphi^\varepsilon|^2 &\leq \|\varphi^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 |\mathbb{R}_\varepsilon| \leq \|\varphi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}^2 |\mathbb{R}_\varepsilon| \\ &\leq K^2 |\mathbb{R}_\varepsilon| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Como $|\Omega^L|$ e $|\Omega^R|$ são números reais não negativos, da segunda equação de (4.2.11), segue que c_1^ε e c_2^ε são limitados em $\mathbb{R}$. Logo existem subseqüências que denotaremos novamente por c_1^ε e c_2^ε que convergem para c_1^0 e c_2^0 respectivamente. Da primeira equação de (4.2.11), vemos que c_1^ε e c_2^ε têm sinais opostos. Para efeitos da unicidade do limite, vamos considerar a priori c_1^ε com sinal negativo.

Assim, temos que o sistema (4.2.11) tem um sistema limite que é dado por

$$\begin{cases} c_1^0 |\Omega^L| + c_2^0 |\Omega^R| &= 0 \\ (c_1^\varepsilon)^2 |\Omega^L| + (c_2^\varepsilon)^2 |\Omega^R| &= 1. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Da primeira equação de (4.2.14), temos

$$c_1^0 = -\frac{|\Omega^L|}{|\Omega^R|} c_2^0. \quad (4.2.15)$$

Substituindo (4.2.15) na segunda equação de (4.2.14) temos

$$c_2^0 = \sqrt{\frac{|\Omega^L|}{|\Omega^R| |\Omega|}}, \quad (4.2.16)$$

onde $|\Omega| = |\Omega^L| + |\Omega^R|$.

Usando (4.2.16) em (4.2.15) temos

$$c_1^0 = -\sqrt{\frac{|\Omega^R|}{|\Omega^L| |\Omega|}}. \quad (4.2.17)$$

Com isto, temos a seguinte função

$$\phi_2 = \begin{cases} -\sqrt{\frac{|\Omega^R|}{|\Omega^L| |\Omega|}}, & \text{em } \Omega^L \\ \sqrt{\frac{|\Omega^L|}{|\Omega^R| |\Omega|}}, & \text{em } \Omega^R. \end{cases} \quad (4.2.18)$$

Claramente

$$\int_{\Omega} \phi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \|\phi_2\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Na verdade ϕ_2^0 é a autofunção associada a μ_2 .

Agora pelo princípio do min-max temos

$$\begin{aligned}\lambda_2^\varepsilon &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 = \int_{R_\varepsilon} |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 = (c_2^\varepsilon - c_1^\varepsilon)^2 \int_{R_\varepsilon} dx \\ &\leq (c_2^\varepsilon - c_1^\varepsilon)^2 \int_{Q_\varepsilon} h^{N-1}(x_1) dx_1 dy' \\ &\leq \alpha \beta \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1},\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

onde $\alpha = \int_0^1 h^{N-1}(x_1) dx_1$ e $\beta = \frac{1}{|\Omega^L|} + \frac{1}{|\Omega^R|}$.

De (4.2.19) segue que $\lambda_2^\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iii) Agora, seja λ_3^ε o terceiro autovalor de (4.2.2) e φ_3^ε a autofunção correspondente a λ_3^ε . A autofunção φ_3^ε satisfaz as seguinte condições

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_3^\varepsilon = 0 \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_3^\varepsilon \varphi_2^\varepsilon = 0 \\ \|\varphi_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1, \end{cases}\tag{4.2.20}$$

onde φ_2^ε é a autofunção associada ao segundo autovalor de (4.2.2).

Agora mostremos que λ_3^ε fica limitado longe do zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_3^\varepsilon > 0.\tag{4.2.21}$$

De fato, vamos supor que (4.2.21) não acontece. Logo existe uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ com $\varepsilon_j \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$, tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_3^{\varepsilon_j} = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^L} |\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j}|^2 &\leq \int_{\Omega_{\varepsilon_j}} |\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j}|^2 = \lambda_3^{\varepsilon_j} \|\varphi_3^{\varepsilon_j}\|^2 \\ \int_{\Omega^L} |\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j}|^2 &\leq \lambda_3^{\varepsilon_j}.\end{aligned}$$

Desta última desigualdade segue que

$$\int_{\Omega^L} |\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j}|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.\tag{4.2.22}$$

Pelo mesmo argumento acima tem-se

$$\int_{\Omega^R} |\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j}|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.2.23)$$

Portanto

$$\nabla \varphi_3^{\varepsilon_j} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.2.24)$$

Como $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, $\varphi_3^{\varepsilon_j}$ tem uma subsequência convergente, que vamos escrever de novo por $\varphi_3^{\varepsilon_j}$, tal que esta converge para φ . Assim temos

$$\begin{aligned} \varphi_3^{\varepsilon_j} &\xrightarrow{s-L^2(\Omega)} \varphi \\ \nabla \varphi_3^{\varepsilon_j} &\xrightarrow{s-L^2(\Omega)} 0. \end{aligned}$$

Como ∇ é um operador fechado temos que $\varphi \in H^1(\Omega)$ e $\nabla \varphi = 0$ e de (4.2.22) e (4.2.23) segue que

$$\varphi_3^{\varepsilon_j} \rightarrow \begin{cases} c_1, & \text{em } \Omega^L \\ c_2, & \text{em } \Omega^R, \end{cases} \quad (4.2.25)$$

onde c_1 e c_2 satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 |\Omega^L| + c_2 |\Omega^R| &= 0 \\ c_1 c_1^0 |\Omega_0^L| + c_2 c_2^0 |\Omega^R| &= 0 \\ (c_1)^2 |\Omega^L| + (c_2)^2 |\Omega^R| &= 1. \end{cases} \quad (4.2.26)$$

Mas o sistema é incompatível, i.e., não existem c_1, c_2 que satisfazem (4.2.26). Daí temos um absurdo. Portanto vale (4.2.21). ■

O seguinte resultado nos dá a taxa ótima de convergência do segundo autovalor.

Proposição 4.2.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1}} = \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1, \quad (4.2.27)$$

onde $\xi(x_1)$ é a solução do problema de valor na fronteira

$$\begin{cases} (h^{N-1} \xi')' = 0, & (0, 1), \\ \xi(0) = c_1^0, \quad \xi(1) = c_2^0 \end{cases} \quad (4.2.28)$$

e $\sigma_{N-1} = \frac{\pi^{(N-1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)}$ é a medida de Lebesgue $(N-1)$ da bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$, com Γ a função Gamma.

Demonstração. Da caracterização variacional, sabemos que

$$\lambda_2^\varepsilon = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi|^2 dx} : \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon), \varphi \neq 0, \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi dx = 0 \right\}.$$

Agora, definimos a função $\tilde{\psi}(x_1, x')$ por

$$\tilde{\psi}(x_1, x') = \begin{cases} \xi(x_1) & \text{em } R_\varepsilon \\ c_1^0 & \text{em } \Omega^L \\ c_2^0 & \text{em } \Omega^R \end{cases}$$

e $\psi(x_1, x') = \tilde{\psi}(x_1, x') - \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx'$. Como $\tilde{\psi} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, então $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \psi dx_1 dx' = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\tilde{\psi} dx_1 dx' - \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi} dx_1 dx' \right] dx_1 dx' = 0.$$

Logo temos

$$\lambda_2^\varepsilon \leq \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx}.$$

Agora vamos calcular os termos $\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx$ e $\int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx$. De fato, da definição de ψ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{R_\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx = \int_{R_\varepsilon} |\nabla \tilde{\psi}|^2 dx \\ &= \int_{R_\varepsilon} |\nabla \xi(x_1)|^2 dx_1 dx' \\ &= \int_{Q_\varepsilon} h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy' \\ &= \int_0^1 \int_{|y'| < \varepsilon} h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy' \\ &= \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 \int_{|y'| < \varepsilon} dy' \\ &= \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 \text{Vol}(B_\varepsilon^{N-1}(0)) \\ &= \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy' \end{aligned}$$

onde $B_\varepsilon^{N-1}(0)$ é a bola de raio $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}^{N-1}$, $\text{Vol}(B_\varepsilon^{N-1}(0)) = \text{Volume de } B_\varepsilon^{N-1}(0) =$

$\int_{|y'| < \varepsilon} dy' = \varepsilon^{N-1} \sigma_{N-1}$. Também,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left| \tilde{\psi}(x_1, x') - \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' \right|^2 dx_1 dx' \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{\psi}(x_1, x')|^2 dx_1 dx' - \frac{2}{|\Omega_\varepsilon|} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|^2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' \right)^2 \left(\int_{\Omega_\varepsilon} dx_1 dx' \right) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{\psi}(x_1, x')|^2 dx_1 dx' - \frac{1}{|\Omega_\varepsilon|} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' \right)^2. \end{aligned}$$

Como $\int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' = \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \tilde{\psi}(x_1, x') dx_1 dx' = O(\varepsilon^{N-1})$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx &= \int_{\Omega} |\tilde{\psi}(x_1, x')|^2 dx_1 dx' + \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} |\tilde{\psi}(x_1, x')|^2 dx_1 dx' \\ &= 1 + \int_{\mathbb{R}_\varepsilon} |\xi(x_1)|^2 dx_1 dx' + O(\varepsilon^{N-1}) \\ &= 1 + \int_{Q_\varepsilon} h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 dy' + O(\varepsilon^{N-1}) \\ &= 1 + \int_0^1 \int_{|y'| < \varepsilon} h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 dy' + O(\varepsilon^{N-1}) \\ &= 1 + \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 \int_{|y'| < \varepsilon} dy' + O(\varepsilon^{N-1}) \\ &= 1 + \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 V(B_\varepsilon^{N-1}(0)) + O(\varepsilon^{N-1}) \\ &= 1 + \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 + O(\varepsilon^{N-1}). \end{aligned}$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^2 dx} &= \frac{\sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy'}{1 + \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi(x_1)|^2 dx_1 + O(\varepsilon^{N-1})} \\ &= \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy' + O(\varepsilon^{N-1}), \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\lambda_2^\varepsilon \leq \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1 dy' + O(\varepsilon^{2(N-1)})$$

que implica em

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1}} \leq \int_0^1 h^{N-1} |\xi'(x_1)|^2 dx_1. \quad (4.2.29)$$

Resta mostrar que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1}} \geq \int_0^1 h^{N-1} |\xi'(x_1)|^2 dx_1. \quad (4.2.30)$$

Para isto, consideramos a seguinte família de funções $\xi_\varepsilon(x_1, x') = \varphi_2^\varepsilon(x_1, \varepsilon x')$, onde $(x_1, x') \in R_1 = \{(x_1, x') : 0 \leq x_1 \leq 1, |x'| < h(x_1)\}$. Então

$$\int_{R_1} \left[\left(\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_{x'} \xi_\varepsilon|^2 \right] dx_1 dx' \leq \int_{R_\varepsilon} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 / \varepsilon^{N-1} dx_1 dx'. \quad (4.2.31)$$

Como $\int_{R_\varepsilon} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 = \lambda_2^\varepsilon$, usando (4.2.29), temos

$$\int_{R_1} \left[\left(\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_{x'} \xi_\varepsilon|^2 \right] dx_1 dx' \leq M \quad (4.2.32)$$

para uma certa constante M independente de ε . Desta última desigualdade, temos

$$\int_{R_1} \left[\left(\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + |\nabla_{x'} \xi_\varepsilon|^2 \right] dx_1 dx' \leq M.$$

Desta desigualdade e da desigualdade de Poincaré, concluímos que a família de funções $\{\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ é uniformemente limitada em $H^1(R_1)$. Portanto, podemos encontrar uma subsequência $\{\varepsilon_n\}$, com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e uma função $\xi_0 \in H^1(R_1)$ tais que $\xi_{\varepsilon_n} \rightarrow \xi_0$ fracamente em $H^1(R_1)$ e fortemente em $H^s(R_1)$ para todo $s < 1$.

De (4.2.32), concluímos que ξ_0 é independente de x' . De fato, a equação (4.2.32) nos diz que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R_1} |\nabla_{x'} \xi_\varepsilon|^2 \leq M,$$

portanto, temos que

$$\int_{R_1} |\nabla_{x'} \xi_\varepsilon|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.2.33)$$

Como $\nabla_{x'} \xi_\varepsilon \rightarrow \nabla_{x'} \xi_0$ fracamente em $L^2(R_1)$ e $\nabla_{x'} \xi_\varepsilon$ é limitada quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\|\nabla_{x'} \xi_0\| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla_{x'} \xi_\varepsilon\| = 0$$

e assim $\|\nabla_{x'} \xi_0\| = 0$. Disto concluímos que ξ_0 é independente de x' .

Seja K um conjunto convexo e fechado de $H^1(0, 1)$ definido por

$$K = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = c_1^0, u(1) = c_2^0\}.$$

Agora, mostraremos que $\xi_0 \in K$. De fato, como $\xi_0 \in H^1(R_1)$, concluímos imediatamente que $\xi_0 \in H^1(0,1)$. Para encontrar a condição de fronteira de ξ_0 , usamos o fato de que $\phi_2^\varepsilon \rightarrow \phi_2$ fortemente em $H^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entretanto da continuidade da aplicação traço $H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial R_\varepsilon \cap \Omega)$, segue que

$$\xi_{\varepsilon_n}|_{\partial R_1 \cap \Omega} \rightarrow \xi_0|_{\partial R_1 \cap \Omega} \quad \text{em } H^{1/2}(\partial R_1 \cap \Omega).$$

Assim, $\xi_0(0) = c_1^0$, $\xi_0(1) = c_2^0$, e isto prova que $\xi_0 \in K$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \lambda_2^\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi_2^\varepsilon|^2 dx_1 dx' \geq \int_{R_\varepsilon} |\nabla \phi_2^\varepsilon|^2 dx_1 dx' \\ &= \varepsilon^{N-1} \int_{R_1} \left[\left(\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_{y'} \xi_\varepsilon|^2 \right] dx_1 dx' \\ &\geq \varepsilon^{N-1} \int_{R_1} \left(\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx' \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

e que ξ é o mínimo do funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_0^1 h^{N-1} |u'(x_1)|^2 dx_1 \quad \text{para } u \in K,$$

isto é, $J(\xi) = \min_{u \in K} J(u)$ e como $\xi_0 \in K$ temos $J(\xi) \leq J(\xi_0)$.

De (4.2.34), segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^{N-1}} &\geq \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_{R_1} \left(\frac{\partial \xi_{\varepsilon_n}}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx' \\ &\geq \int_{R_1} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx' \\ &\geq \sigma_{N-1} \int_0^1 h^{N-1}(x_1) |\xi'(x_1)|^2 dx_1. \end{aligned}$$

Isto nos dá (4.2.30), a qual junto com (4.2.29) implicam em (4.2.27). Assim concluímos a demonstração. ■

Proposição 4.2.3

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1}} = \left(\frac{1}{|\Omega^L|} + \frac{1}{|\Omega^R|} \right) \theta, \quad (4.2.35)$$

onde

$$\theta = \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{h^{N-1}(x_1)} \right\}^{-1}. \quad (4.2.36)$$

Demonstração. A solução da equação (4.2.28) pode ser encontrada explicitamente

$$\xi(x_1) = c_1^0 + (c_2^0 - c_1^0) \left\{ \int_0^{x_1} \frac{dt}{h^{N-1}(t)} \right\} \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{h^{N-1}(x_1)} \right\}^{-1}, \quad (4.2.37)$$

e assim

$$\begin{aligned} |\xi'(x_1)|^2 &= (c_2^0 - c_1^0)^2 \left\{ \frac{1}{h^{N-1}(t)} \right\}^2 \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{h^{N-1}(x_1)} \right\}^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{|\Omega^L|} + \frac{1}{|\Omega^R|} \right) \left\{ \frac{1}{h^{N-1}(t)} \right\}^2 \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{h^{N-1}(x_1)} \right\}^{-2}. \end{aligned}$$

Então substituindo esta última igualdade no lado direito da equação (4.2.27), chegamos a equação (4.2.35). ■

4.3 Convergência de autofunções

Nesta seção, estudaremos a convergência das autofunções do problema (4.2.2), tendo como resultado principal o seguinte teorema.

Teorema 4.3.1 (Convergência de Autofunções) *Se $n \in \mathbb{N}$ e φ_n^ε são autofunções para o problema (4.2.2), então*

- (i) $\varphi_1^\varepsilon \rightarrow \phi_1$ em $H^k(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $k \geq 1$.
- (ii) $\varphi_2^\varepsilon \rightarrow \phi_2$ em $L^2(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (iii) $\varphi_2^\varepsilon \rightarrow \phi_2$ em $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

- (i) Observe que $\varphi_1^\varepsilon = |\Omega_\varepsilon|^{-1/2}$ e $\phi_1 = |\Omega|^{-1/2}$ são as correspondentes autofunções associadas ao autovalores $\lambda_1^\varepsilon = \mu = 0$.

Não é difícil mostrar que $\varphi_1^\varepsilon \rightarrow \phi_1$ em $H^k(\Omega)$ para todo inteiro $k \geq 0$.

- (ii) Seja λ_2^ε o segundo autovalor de (4.2.2) e φ_2^ε a correspondente autofunção associada a λ_2^ε . A autofunção φ_2^ε satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_2^\varepsilon &= 0 \\ \|\varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= 1. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Da primeira equação de (4.3.1) segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \right| &= \left| \int_{R_\varepsilon} \varphi_2^\varepsilon \right| \leq \int_{R_\varepsilon} |\varphi_2^\varepsilon| \leq \left(\int_{R_\varepsilon} |\varphi_2^\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R_\varepsilon} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |R_\varepsilon|^{1/2} \|\varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = (\alpha \sigma_{N-1} \varepsilon^{N-1})^{1/2} \|\varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

De (4.3.2) segue que $\int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e portanto $\int_{R_\varepsilon} \varphi_2^\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Também mostra-se que $\int_{R_\varepsilon} |\varphi_2^\varepsilon|^2 \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver Lema 2.4.1). Com isto, da segunda equação de (4.3.1), segue que

$$\int_{\Omega} |\varphi_2^\varepsilon|^2 \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.3)$$

Agora mostraremos que

$$\int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \phi_2 \rightarrow 1, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.4)$$

De fato, sabemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 = \lambda_2^\varepsilon, \quad (4.3.5)$$

e portanto

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_2^\varepsilon|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.6)$$

Logo,

$$\nabla \varphi_2^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.7)$$

Como $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, φ_2^ε tem subsequência, que denotaremos novamente por φ_2^ε , converge para φ .

Assim, temos

$$\begin{cases} \varphi_2^\varepsilon \rightarrow \varphi, & \text{fortemente em } L^2(\Omega) \\ \nabla \varphi_2^\varepsilon \rightarrow 0, & \text{fortemente em } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Como ∇ é um operador fechado, temos que

$$\begin{cases} \varphi \in H^1(\Omega) \\ \nabla \varphi = 0. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

De (4.3.9) e da unicidade do limite, segue que

$$\varphi = \phi_2 = \begin{cases} c_1, & \text{em } \Omega_0^L \\ c_2, & \text{em } \Omega_0^R, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

onde c_1 e c_2 satisfazem

$$\begin{cases} c_1|\Omega^L| + c_2|\Omega_0^R| = 0 \\ (c_1)^2|\Omega^L| + (c_2)^2|\Omega_0^R| = 1. \end{cases} \quad (4.3.11)$$

De (4.3.11), segue que

$$\begin{aligned} c_1 &= \pm \sqrt{\frac{|\Omega^R|}{|\Omega^L| |\Omega|}} \\ c_2 &= \pm \sqrt{\frac{|\Omega^L|}{|\Omega^R| |\Omega|}}. \end{aligned}$$

Voltando para (4.3.4), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \phi_2^0 &= \int_{\Omega^L} \varphi_2^\varepsilon \phi_2 + \int_{\Omega^R} \varphi_2^\varepsilon \phi_2^0 \\ &= \int_{\Omega^L} c_1 c_1^0 + \int_{\Omega^R} c_2 c_2^0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da primeira equação de (4.3.11), vemos que c_1 e c_2 tem sinais opostos. Primeiro consideramos c_1 com sinal negativo e c_2 com sinal positivo. Neste caso $c_1 = c_1^0$ e $c_2 = c_2^0$. Logo

$$\int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \phi_2 = (c_1^0)^2 |\Omega^L| + (c_2^0)^2 |\Omega^R| = 1, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

No caso c_1 com sinal positivo e c_2 com sinal negativo, as constantes c_1^0 e c_2^0 tem os mesmos sinais. Logo, também vale a última equação acima. Portanto, está provado (4.3.4).

Agora vamos mostrar que $\varphi_2^\varepsilon \rightarrow \phi_2$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\varphi_2^\varepsilon - \phi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega_0} \varphi_2^\varepsilon \phi_2 \\ &\leq \|\varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + 1 - 2 \int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \phi_2 \\ &\leq 2 - 2 \int_{\Omega} \varphi_2^\varepsilon \phi_2. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Usando (4.3.4) em (4.3.12), segue que

$$\|\varphi_2^\varepsilon - \phi_2\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.13)$$

(iii) De (4.3.13) e (4.3.6), conclui-se que

$$\|\varphi_2^\varepsilon - \phi_2\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.14)$$

Consideremos a seguinte norma

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in H^2(\Omega), \quad (4.3.15)$$

que é equivalente a norma em $H^2(\Omega)$.

Como $\Delta \varphi_2^\varepsilon = \lambda_2^\varepsilon \varphi_2^\varepsilon$, segue que

$$\|\Delta \varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|\lambda_2^\varepsilon \varphi_2^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \lambda_2^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.16)$$

De (4.3.16), (4.3.14), (4.3.13) e usando a norma em (4.3.15), temos a convergência em $H^2(\Omega)$.

■

4.4 Equação limite para o problema perturbado

Nesta seção, consideremos o problema de reação-difusão (4.1.1), onde $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup R_\varepsilon$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $|\Omega| = 1$.

Pelo que vimos na seção 4.2 e 4.3, nos faz acreditar que o sistema (4.1.1) pode ser aproximado por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias acopladas, as quais descrevem a média de u em Ω^L e Ω^R .

Agora vamos determinar o sistema limite para o sistema (4.1.1). Este problema pode ser visto em Carvalho e Cuminato [12] para o caso $g = 0$ e Carvalho [11] para o caso $g \neq 0$.

Antes de tudo, necessitamos compreender o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u = \tilde{\lambda}^\varepsilon u & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Denotemos por $\{\tilde{\lambda}_n^\varepsilon\}$ e $\{\tilde{\varphi}_n^\varepsilon\}$, respectivamente, o conjunto de autovalores arranjados em ordem crescente (contando a multiplicidade) e o sistema completo de autofunções ortonormalizadas do problema (4.4.1).

Então vale a seguinte proposição.

Proposição 4.4.1

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1^\varepsilon &\equiv 0, \quad \varphi_1^\varepsilon \rightarrow 1, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \tilde{\lambda}_2^\varepsilon &\rightarrow \delta C_0, \quad \varphi_2^\varepsilon \rightarrow \phi_2 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

onde $C_0 = \sigma_{N-1} \left(\frac{1}{|\Omega^L|} + \frac{1}{|\Omega^R|} \right) \theta$. Além disso $\tilde{\lambda}_3^\varepsilon \rightarrow +\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. A prova é imediata desde que

$$\tilde{\lambda}_k^\varepsilon = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \lambda_k^\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots,\tag{4.4.3}$$

onde λ_k^ε são os autovalores de (4.2.2). ■

Agora consideremos a seguinte decomposição de u

$$u(t, x) = u_1(t) \varphi_1^\varepsilon(x) + u_2(t) \varphi_2^\varepsilon(x) + \omega(t, x),$$

onde $\omega \in V^\perp$, $V = \text{span}[\varphi_1^\varepsilon, \varphi_1^\varepsilon]$,

$$u_1(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} u(t, x) \varphi_1^\varepsilon(x),\tag{4.4.4}$$

$$u_2(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} u(t, x) \varphi_2^\varepsilon(x),\tag{4.4.5}$$

$$\omega(t, x) = u(t, x) - u_1(t) \varphi_1^\varepsilon(x) - u_2(t) \varphi_2^\varepsilon(x).\tag{4.4.6}$$

Esta decomposição induz uma decomposição em (4.1.1) na seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} u_1 &= \int_{\Omega_\varepsilon} u_t \varphi_1^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u + f(u) \right] \varphi_1^\varepsilon \\ &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \varphi_1^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon \\ &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \left[\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi_1^\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_1^\varepsilon \nabla u \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_1^\varepsilon) - \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \left[\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi_1^\varepsilon}{\partial \nu} - \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \varphi_1^\varepsilon \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_1^\varepsilon) + \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \varphi_1^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_1^\varepsilon).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}u_2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} u_t \varphi_2^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u + f(u) \right] \varphi_2^\varepsilon = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \varphi_2^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \left[\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi_2^\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi_2^\varepsilon \nabla u \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon) - \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \left[\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi_2^\varepsilon}{\partial \nu} - \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \varphi_2^\varepsilon \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon) + \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \varphi_2^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon) - \delta \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} \int_{\Omega_\varepsilon} u \varphi_2^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon \\
 &= -\delta \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} u_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon),
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\omega &= \frac{d}{dt}u - \frac{d}{dt}u_1 \varphi_1^\varepsilon - \frac{d}{dt}u_2 \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta u + f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) - \left[\int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_1^\varepsilon \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_1^\varepsilon \right] \varphi_1^\varepsilon \\
 &\quad - \left[-\delta u_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_2^\varepsilon \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_2^\varepsilon \right] \varphi_2^\varepsilon \\
 &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta \omega + f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) - \left[\int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_1^\varepsilon \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_1^\varepsilon \right] \varphi_1^\varepsilon \\
 &\quad - \left[\int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_2^\varepsilon \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega) \varphi_2^\varepsilon \right] \varphi_2^\varepsilon \\
 \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \frac{\partial \omega}{\partial n} &= g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega).
 \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_1^\varepsilon) \\
 \dot{u}_2 &= -\delta \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} u_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta \omega + f(u) - \left[\int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_1^\varepsilon) \right] \varphi_1^\varepsilon \\ &\quad - \left[\int_{\Omega_\varepsilon} f(u) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi_2^\varepsilon) \right] \varphi_2^\varepsilon \\ \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \frac{\partial \omega}{\partial n} &= g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega),\end{aligned}$$

onde $\gamma(\varphi)$ denota o traço da função φ .

Como o terceiro autovalor vai para o infinito, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, acreditamos que ω não é importante no comportamento assintótico, e temos

$$\begin{cases} \dot{u}_1 \sim \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon) \varphi_1^\varepsilon \\ \dot{u}_2 \sim -\delta u_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon) \varphi_2^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.4.8)$$

Usando a convergência de autovalores e autofunções temos que o *sistema limite* seria

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \int_{\Omega} f(u_1 + u_2 \varphi_2^0) + \int_{\partial\Omega} g(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \\ \dot{u}_2 = -\delta C_0 u_2 + \int_{\Omega} f(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \varphi_2^0 + \int_{\partial\Omega} g(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \varphi_2^0, \end{cases} \quad (4.4.9)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = |\Omega^L| f(u_1 + c_1^0 u_2) + |\Omega^R| f(u_1 + c_2^0 u_2) \\ \quad + |\partial\Omega^L| g(u_1 + c_1^0 u_2) + |\partial\Omega^R| g(u_1 + c_2^0 u_2) \\ \dot{u}_2 = -\delta C_0 u_2 + |\Omega^L| c_1^0 f(u_1 + c_1^0 u_2) + |\Omega^R| c_2^0 f(u_1 + c_2^0 u_2) \\ \quad + |\partial\Omega^L| c_1^0 g(u_1 + c_1^0 u_2) + |\partial\Omega^R| c_2^0 g(u_1 + c_2^0 u_2), \end{cases} \quad (4.4.10)$$

onde

$$c_1^0 = -(|\Omega^R|/|\Omega^L|)^{1/2}, \quad c_2^0 = (|\Omega^L|/|\Omega^R|)^{1/2}.$$

As variáveis u_1, u_2 não são as melhores escolhas para estudar este problema. A melhor escolha são variáveis que reflitam as médias sobre Ω^L e Ω^R .

Para relacionar u_1, u_2 com estas médias, consideramos

$$v_1 = |\Omega^L|^{-1} \int_{\Omega^L} u(x) dx \quad \text{e} \quad v_2 = |\Omega^R|^{-1} \int_{\Omega^R} u(x) dx.$$

Assim

$$\begin{cases} u_1 = |\Omega^L| v_1 + |\Omega^R| v_2 \\ u_2 = -|\Omega^L| |\Omega^R|^{\frac{1}{2}} (v_1 - v_2) \end{cases} \quad (4.4.11)$$

e

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + c_1^0 u_2 \\ v_2 = u_1 + c_2^0 u_2. \end{cases} \quad (4.4.12)$$

Com a mudança de variáveis de (4.4.11), o sistema (4.4.10) se transforma em

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{u}_1 + c_1^0 \dot{u}_2 \\ &= |\Omega^L| f(v_1) + |\Omega^R| f(v_2) + |\partial\Omega^L| g(v_1) + |\partial\Omega^R| g(v_2) \\ &\quad + c_1^0 \left[-\delta u_2 + |\Omega_0^L| c_1^0 f(v_1) + |\partial\Omega^R| c_2^0 f(v_2) \right. \\ &\quad \left. + |\partial\Omega^L| c_1^0 g(v_1) + |\partial\Omega^R| c_2^0 g(v_2) \right] \\ \dot{v}_2 &= \dot{u}_1 + c_2^0 \dot{u}_2 \\ &= |\Omega^L| f(v_1) + |\Omega^R| f(v_2) + |\partial\Omega^L| g(v_1) + |\partial\Omega^R| g(v_2) \\ &\quad + c_2^0 \left[-\delta u_2 + \mu(\Omega^L) c_1^0 f(v_1) + |\partial\Omega^R| c_2^0 f(v_2) \right. \\ &\quad \left. + |\partial\Omega^L| c_1^0 g(v_1) + |\partial\Omega^R| c_2^0 g(v_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Observe que

$$\begin{aligned} c_1^0 c_2^0 &= -1, \quad |\Omega^L| (c_1^0)^2 = |\Omega^R|, \\ |\Omega^R| (c_2^0)^2 &= |\Omega^L|, \quad 1 + (c_1^0)^2 = \frac{1}{|\Omega^L|}, \quad 1 + (c_2^0)^2 = \frac{1}{|\Omega^R|}. \end{aligned}$$

Com isto, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\delta C_0 |\Omega^R| (v_1 - v_2) + f(v_1) + \frac{|\partial\Omega^L|}{|\Omega^L|} g(v_1) \\ \dot{v}_2 = \delta C_0 |\Omega^L| (v_1 - v_2) + f(v_2) + \frac{|\partial\Omega^R|}{|\Omega^R|} g(v_2). \end{cases} \quad (4.4.14)$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que a dinâmica de (4.1.1) pode ser descrita por (4.4.14), o que nos leva a estudar Variedades Invariantes.

4.5 Teorema de traço uniforme em Ω_ε

Antes de estudarmos variedades invariantes, vamos enunciar e demonstrar um Teorema de Traço Uniforme no domínio Ω_ε .

Teorema 4.5.1 (Teorema de Traço Uniforme) *Sejam $V = \text{span}[\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon]$, $V^\perp = \{\varphi \in L^2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \psi dx = 0, \text{ para todo } \psi \in V\}$, $X_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon) = V \oplus V^\perp$ e $X_\varepsilon^\alpha := \mathcal{D}((-A_\varepsilon)^\alpha)$.*

Consideremos $V_{1/2}^\perp = V^\perp \cap X_\varepsilon^{1/2}$ e a aplicação linear contínua $\gamma : V_{1/2}^\perp \rightarrow L^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ dada por

$\gamma(w) = w|_{\partial\Omega_\varepsilon}$ para cada $w \in V_{1/2}^\perp$. Então

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}(V_{1/2}^\perp, L^2(\partial\Omega_\varepsilon))} \leq c(\varepsilon) < c < \infty. \quad (4.5.1)$$

Demonstração. De fato, sabemos que

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}(V_{1/2}^\perp, L^2(\partial\Omega_\varepsilon))} = \sup\{ \|\gamma w\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} : \|w\|_{V_{1/2}^\perp} \leq 1 \}$$

onde

$$\|\gamma w\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq \left(\int_{\partial\Omega} |w|^2 ds + \int_{\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega} |w|^2 ds \right)^{1/2} \leq \|w\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|w\|_{L^2(\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega)}.$$

Como Ω é um domínio fixo, é fácil estimar a norma $\|w\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Portanto, só resta estimar a seguinte norma $\|w\|_{L^2(\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega)}$.

Para facilitar os cálculos, consideramos coordenadas “cilíndricas” (r, y, z) com

$$T = \begin{cases} r = & |x'| \in (0, \infty), \\ y = & \frac{x'}{r} \in \mathbb{S}^{N-2} = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| = 1\}, \\ z = & x_1 \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Assim, temos $R_\varepsilon = T(\tilde{R}_\varepsilon)$, $Q_\varepsilon = T(\tilde{Q}_\varepsilon)$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\varepsilon &= \{(z, ry) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq z \leq 1, 0 < r < \varepsilon h(z), y \in \mathbb{S}^{N-2}\} \\ \tilde{Q}_\varepsilon &= \{(z, ry) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq z \leq 1, 0 < r < \varepsilon, y \in \mathbb{S}^{N-2}\} \end{aligned}$$

com $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ função suave. Denotemos por

$$\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega = \{(z, \varepsilon h(z)y) : 0 \leq z \leq 1, y \in \mathbb{S}^{N-2}\}.$$

Se colocarmos $I = \|w\|_{L^2(\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega)}$, então, temos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\partial R_\varepsilon \setminus \partial\Omega} |w|^2 d\sigma \\ I^2 &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{N-2}} |w(z, \varepsilon h(z)y)|^2 \sqrt{1 + \tilde{h}_z^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{h}_{y_i}^2} dy_1 dy_2 \cdots dy_{N-1} dz \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{N-2}} |w(z, \varepsilon h(z)y)|^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_z^2 + (N-1)\varepsilon^2 h^2(z)} dy_1 dy_2 \cdots dy_{N-1} dz, \end{aligned}$$

onde $\tilde{h} = \varepsilon h(z)y$. Como $0 < \varepsilon \ll 1$, temos que

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_z^2 + (N-1)\varepsilon^2 h^2(z)} \leq \sqrt{1 + h_z^2 + (N-1)h^2(z)}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z' = z$, $y' = \varepsilon h(z)y$, onde $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^2 &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{S}_\varepsilon^{N-2}} |w(z, y')|^2 \sqrt{1 + h_z^2 + (N-1)h^2(z)} \frac{1}{\varepsilon^{N-1} h^{N-1}(z)} dy_1 dy_2 \cdots dy_{N-1} dz \\ &\leq \frac{a}{\varepsilon^{N-1}} \|w\|_{L^2(\partial Q_\varepsilon)}^2 \leq \frac{a k_1^2}{\varepsilon^{N-1}} \|\nabla w\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2, \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

onde a é uma constante positiva tal que $|h^{N-1}(z)|^{-1} \leq a$ para todo $z \in (0, 1)$ e k_1 é uma constante independente de ε . Agora, usando (4.2.8) em (4.5.2), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^2 &\leq \frac{a k_1^2}{\varepsilon^{N-1}} \|\nabla w\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2 \leq \frac{a k_1^2 c_1}{\varepsilon^{N-1}} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 = \frac{a k_1^2 c_1}{\delta} \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}_\varepsilon)}^2 \\ &\leq a c_1 k_1^2 \delta^{-1} \|w\|_{X_\varepsilon^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

Assim $\mathbf{I} \leq c_2 \|w\|_{X_\varepsilon^{1/2}}$, onde $c_2 = (a c_1 \delta^{-1})^{1/2} k_1$. Por outro lado, existe $c_3(|\Omega|)$ tal que $\|w\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_3(|\Omega|) \|w\|_{X_\varepsilon^{1/2}}$. Portanto, temos que

$$\|w\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \|w\|_{X_\varepsilon^{1/2}},$$

onde $c = c_2 + c_3(|\Omega|) < \infty$, concluindo, assim, a demonstração. ■

4.6 Variedades invariantes

Neste seção, enunciaremos um teorema de Variedade Invariante e um lema de Gronwall Generalizado.

Sejam X e Y espaços de Banach, $-A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial, tal que $\operatorname{Re} \sigma(-A) > 0$. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo analítico de operadores lineares limitados gerado por A e denotemos por $(-A)^\alpha$ potência fracionária de A e $X^\alpha := \mathcal{D}((-A)^\alpha)$ com a norma do gráfico.

Definição 4.6.1 *Sejam $F : X^\alpha \times Y \rightarrow X$, $G : X^\alpha \times Y \rightarrow Y$ funções localmente Lipschitzianas. Um conjunto $S \subset X^\alpha \times Y$ é uma variedade invariante para uma equação diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) \\ \dot{y} = By + G(x, y), \end{cases} \quad (4.6.1)$$

se existe $\sigma : Y \rightarrow X^\alpha$ tal que $S = \{(x, y) \in X^\alpha \times Y : x = \sigma(y)\}$ e, para qualquer $(x_0, y_0) \in S$ existe

uma solução $(x(\cdot), y(\cdot))$ de (4.6.1) sobre $\mathbb{R}$ tal que $(x(t), y(t)) \in S$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Uma variedade invariante S é dita exponencialmente atratora, se existem constantes positivas γ e K tais que

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\|_{X^\alpha} \leq K e^{-\gamma t} \|x_0 - \sigma(y_0)\|_{X^\alpha},$$

sempre que $(x(t), y(t))$ é solução de (4.6.1).

Observe que o sistema (4.4.9) escreve-se como

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \\ \dot{u}_2 &= -\delta \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} u_2 + G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \\ \dot{\omega} &= A_\varepsilon \omega + F_\varepsilon(u_1, u_2, \omega), \end{cases} \quad (4.6.2)$$

onde $A_\varepsilon = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta$, $B_\varepsilon(u_1, u_2)^\top = (0, -\delta \frac{\lambda_2^\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}} u_2)^\top$

$$\begin{aligned} G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(\cdot) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\cdot) \varphi_1^\varepsilon \\ G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(\cdot) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\cdot) \varphi_2^\varepsilon \\ F_\varepsilon(u_1, u_2, \omega) &= f(\cdot) - G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \varphi_1^\varepsilon \\ &\quad - G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \varphi_2^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Fazendo $y = (u_1, u_2)$, temos

$$\begin{cases} \dot{\omega} &= A_\varepsilon \omega + F_\varepsilon(y, \omega), \\ \dot{y} &= B_\varepsilon y + G_\varepsilon(y, \omega), \end{cases} \quad (4.6.4)$$

onde $G_\varepsilon(y, \omega) = (G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega), G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega))$.

Sejam $\varepsilon > 0$ um parâmetro positivo, X_ε um espaço de Banach e $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ um operador setorial. Seja A_ε^α potência fracionária de A_ε e $X_\varepsilon^\alpha := \mathcal{D}(A_\varepsilon^\alpha)$ com a norma do gráfico.

Lema 4.6.1 (Desigualdade de Gronwall Generalizada) *Sejam $t < r$, $\phi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $0 < \beta \leq 1$. Assuma que*

$$\phi(t) \leq a(t) + b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds, \quad t \leq r. \quad (4.6.5)$$

Então

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t), \quad (4.6.6)$$

com

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-t)^{k\beta-1} a(s) ds. \quad (4.6.7)$$

Além disso, se $a(t) = a = \text{constante}$, então temos que

$$\phi(t) \leq a E_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta})(s-t) \leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)}, \quad (4.6.8)$$

se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, $\rho > 0$, então temos que

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} [E_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta})(s-t) - 1] \leq \frac{c_0}{b} [e^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)} - 1], \quad (4.6.9)$$

e finalmente, se $\psi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$, $\rho > 0$ então temos que

$$\phi(t) \leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r (s-t)^{\beta-1} e^{\rho s} e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(s-t)} \psi(s) ds. \quad (4.6.10)$$

Demonstração. Seja

$$(B\phi)(t) = b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds.$$

Segue de (4.6.5) que

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq a(t) + (B\phi)(t) \\ &\leq a(t) + (Ba)(t) + (B^2\phi)(t) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (B^k a)(t) + (B^n \phi)(t). \end{aligned}$$

Suponha por indução que

$$(B^{n-1}\phi)(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (s-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(s) ds.$$

Então

$$\begin{aligned} B(B^{n-1}\phi)(t) &= b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \left[\int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (\theta-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(\theta) d\theta \right] ds \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{\beta-1} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} ds \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_0^{\theta-t} u^{\beta-1} (\theta-t-u)^{(n-1)\beta-1} du \right] d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{u}{\theta - t}$, temos

$$\begin{aligned} (B^n \phi)(t) &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta - t)^\beta \left[\int_0^1 z^{\beta-1} (\theta - t)^{(n-1)\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} \right] d\theta \\ &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta - t)^{n\beta-1} d\theta \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz &= B(\beta, (n-1)\beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta) \Gamma((n-1)\beta)}{\Gamma(n\beta)}, \end{aligned}$$

$$(B^n \phi)(t) = \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta - t)^{n\beta-1} d\theta. \quad (4.6.11)$$

Vamos estudar a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\beta)}$. Então, $a_n = \Gamma(n\beta)^{-1}$ e assim,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\Gamma(n\beta)}{\Gamma((n+1)\beta)} \\ &= \frac{B(\beta, n\beta)}{\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{n\beta-1} dt. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Segue que $B^n \phi(t) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t).$$

• Se $a(t) = a = \text{constante}$, então,

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} (s-t)^{n\beta-1} ds \\ &= \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{n\beta \Gamma(n\beta)} (r-t)^{n\beta} \\ &= \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)} (r-t)^{n\beta}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq aE_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta}(r-t)) \\ &\leq ace^{(b\Gamma(\beta))^{1/\beta}}(r-t).\end{aligned}$$

- Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, com $\alpha = 1 - \beta$ então

$$\begin{aligned}(B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho(\theta-r)} d\theta \right] ds \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_t^\theta u^{n\beta-1} (\theta-t-u)^{-\alpha} ds \right] d\theta.\end{aligned}$$

Fazendo $v = \frac{u}{\theta-t}$ temos

$$\begin{aligned}(B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_0^1 v^{n\beta-1} (\theta-t)^{n\beta-1} (\theta-t)^{1-\alpha} (1-v)^{-1+\beta} dv \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta B(\beta, n\beta) \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\ &\leq c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) &\leq c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} (r-t)^{(n+1)\beta}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) \leq \frac{c_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} (r-t)^{(n+1)\beta} = \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)) - 1].$$

Segue que

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)) - 1] \leq \frac{c_0}{b} [e^{b^{1/\beta} \Gamma(\beta)^{1/\beta} (r-t)} - 1].$$

- se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$ então

$$\begin{aligned}
 (B^n a)(t) &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho \theta} \psi(\theta) d\theta \right] ds \\
 &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\
 &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} B(\beta, n\beta) d\theta \\
 &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) = c_0 \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\
 &= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \frac{(\theta-t)^{n\beta}}{(\theta-t)^{\beta-1}} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
 &= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \tilde{E}_\beta((b\Gamma(\beta))^{1/\beta} (\theta-t)) e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
 &\leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r e^{d(b\Gamma(\beta))^{1/\beta} (\theta-t)} e^{\rho \theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 4.6.1 *Sejam X_ε, Y espaços de Banach, $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ um operador setorial e $B_\varepsilon \in L(Y)$. Suponha que $F_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y \rightarrow X_\varepsilon$ e $G_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y \rightarrow Y$ são funções satisfazendo:*

- (1) $\|F_\varepsilon(x, y) - F_\varepsilon(z, w)\|_{X_\varepsilon} \leq L_F(\|x - z\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y - w\|_Y),$
- (2) $\|G_\varepsilon(x, y) - G_\varepsilon(z, w)\|_{X_\varepsilon} \leq L_G(\|x - z\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y - w\|_Y),$
- (3) $\|F_\varepsilon(x, y)\|_{X_\varepsilon} \leq N_F,$
- (4) $\|G_\varepsilon(x, y)\|_{X_\varepsilon} \leq N_G,$

para todo $(x, y), (z, w)$ em $X_\varepsilon^\alpha \times Y$. Assuma que

- (5) $\|e^{-A_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_A e^{-\beta(\varepsilon)t} \|w\|_{X_\varepsilon^\alpha}, t \geq 0,$
- (6) $\|e^{-A_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_A t^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)t} \|w\|_{X_\varepsilon}, t > 0,$
- (7) $\|e^{-B_\varepsilon t} z\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_B e^{-\rho(\varepsilon)t} \|z\|_Y, t \leq 0,$
- (8) $\|e^{-B_\varepsilon t} z\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_B (-t)^{-\alpha} e^{-\rho(\varepsilon)t} \|z\|_Y, t < 0$

para qualquer $w \in X_\varepsilon^\alpha$ e $z \in Y$, onde $\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Considere o sistema fracamente acoplado

$$\begin{cases} \dot{x} &= -A_\varepsilon x + F_\varepsilon(x, y), \\ \dot{y} &= -B_\varepsilon y + G_\varepsilon(x, y). \end{cases} \quad (4.6.12)$$

Então, para ε suficientemente pequeno, existe uma variedade invariante exponencialmente atratora para (4.6.12)

$$S = \{(x, y) : x = \sigma_\varepsilon(y), y \in Y\},$$

onde $\sigma_\varepsilon : Y \rightarrow X_\varepsilon^\alpha$ satisfaz

$$\begin{aligned} s(n) &= \sup_{y \in Y_\varepsilon^\alpha} \|\sigma_\varepsilon(y)\|_{X_\varepsilon^\alpha}, \\ \|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_\varepsilon(z)\|_{X_\varepsilon^\alpha} &\leq l(n) \|y - z\|_Y \end{aligned}$$

com $s(\varepsilon), l(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se $F_\varepsilon, G_\varepsilon$ são suaves, então σ_ε é suave e sua derivada $D\sigma_\varepsilon$ satisfaz

$$\sup_{y \in Y} \|D\sigma_\varepsilon(y)\|_{\mathcal{L}(Y, X_\varepsilon^\alpha)} \leq l(\varepsilon).$$

Demonstração. O Primeiro passo é provar a existência da variedade invariante. Dados $D > 0$ e $\Delta > 0$, seja $\sigma_\varepsilon : Y_\varepsilon^\alpha \rightarrow X_\varepsilon^\alpha$ satisfazendo

$$\|\sigma_\varepsilon\| := \sup_{y \in Y} \|\sigma_\varepsilon(y)\| \leq D, \quad \|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_\varepsilon(y')\| \leq \Delta \|y - y'\|_Y. \quad (4.6.13)$$

Seja $y(t) = \psi(t, \tau, \eta, \sigma_\varepsilon)$ a solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= -B_\varepsilon y + G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y), \quad t < \tau, \\ y(\tau) &= \eta, \end{cases} \quad (4.6.14)$$

e defina

$$G(\sigma_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-A_\varepsilon(\tau-s)} F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y(s)), y(s)) ds. \quad (4.6.15)$$

Note que

$$\|G(\sigma_\varepsilon)(\cdot)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq \int_{-\infty}^{\tau} N_f M_A (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} ds. \quad (4.6.16)$$

Seja n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $\|G(\sigma_\varepsilon)(\cdot)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq D$. A seguir, suponha que σ_ε e σ'_ε são funções que satisfazem (4.6.13), $\eta, \eta' \in Y_\varepsilon^\alpha$ e denote $y(t) = \psi(t, \tau, \eta, \sigma_\varepsilon)$, $y'(t) = \psi(t, \tau, \eta', \sigma'_\varepsilon)$. Então,

$$\begin{aligned} y(t) - y'(t) &= e^{-B_\varepsilon(t-\tau)} \eta + \int_{\tau}^t e^{-B_\varepsilon(t-s)} G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y) ds \\ &\quad - e^{-B_\varepsilon(t-\tau)} \eta' - \int_{\tau}^t e^{-B_\varepsilon(t-s)} G_\varepsilon(\sigma'_\varepsilon(y'), y') ds. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(t) - y'_\varepsilon(t)\| &\leq M_B e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \\
&\quad + M_B \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \|G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon) - G_\varepsilon(\sigma'(y'_\varepsilon), y'_\varepsilon)\|_{Y_\varepsilon} ds \\
&\leq M_B e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + M_B L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \times \\
&\quad (\|\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon) - \sigma'(y'_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y_\varepsilon - y'_\varepsilon\|_{Y_\varepsilon^\alpha}) ds \\
&\leq M_B e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + M_B L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \times \\
&\quad (\|\sigma_\varepsilon(y_\varepsilon) - \sigma'(y'_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + (1+\Delta)\|y_\varepsilon - y'_\varepsilon\|_{Y_\varepsilon^\alpha}) ds \\
&\leq M_B e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + M_B L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \times \\
&\quad (|||\sigma_\varepsilon - \sigma' |||_{X_\varepsilon^\alpha} + (1+\Delta)\|y_\varepsilon - y'_\varepsilon\|_{Y_\varepsilon^\alpha}) ds \\
&\leq M_B e^{\rho(n)(\tau-t)} \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + M_B L_g (1+\Delta) \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} \times \\
&\quad \|y_\varepsilon - y'_\varepsilon\|_{Y_\varepsilon^\alpha} ds + M_B L_g |||\sigma_\varepsilon - \sigma' |||_{X_\varepsilon^\alpha} \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} ds.
\end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = e^{\rho(n)(t-\tau)} \|y_\varepsilon(t) - y'_\varepsilon(t)\|_{Y_\varepsilon^\alpha}$. Então

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq M_B \left[\|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + L_g \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(n)(s-t)} ds |||\sigma_\varepsilon - \sigma' |||_{X_\varepsilon^\alpha} \right] \\
&\quad + M_B L_g (1+\Delta) \int_t^\tau (s-t)^{-\alpha} \phi(s) ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema Gronwall Generalizado, temos

$$\|y_\varepsilon(t) - y'_\varepsilon(t)\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \leq \left[c_1 \|\eta - \eta'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} + c_2 |||\sigma_\varepsilon - \sigma' |||_{X_\varepsilon^\alpha} \right] e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-t)},$$

onde $c_\Gamma = (M_B L_g (1+\Delta) \Gamma(1-\alpha))^{-\frac{1}{1-\alpha}}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|G(\sigma_\varepsilon)(\eta) - G(\sigma'_\varepsilon)(\eta')\|_{X_\varepsilon^\alpha} &\leq M_A \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} \|F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y) - F_\varepsilon(\sigma'(y'), y')\|_{X_\varepsilon} ds \\
&\leq M_A \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} (L_F \|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma'(y')\|_{X_\varepsilon^\alpha} + L_F \|y - y'\|_Y) ds \\
&\leq M_A \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} L_F (|||\sigma_\varepsilon - \sigma' ||| + (1+\Delta)\|y - y'\|_Y) ds
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|G(\sigma_\varepsilon)(\eta) - G(\sigma'_\varepsilon)(\eta')\|_{X_\varepsilon^\alpha} &\leq M_A \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} L_F(1+c_2(1+\Delta)e^{[\rho(n)+c_\Gamma](\tau-s)} ds) \|\sigma_\varepsilon - \sigma'_\varepsilon\| \\ &\quad + c_1 M_A L_F(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-[\beta(\varepsilon)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)} ds \|\eta - \eta'\|_Y. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} I_\sigma(n) &= M_A L_F \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(\tau-s)} (1+c_2(1+\Delta)e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\tau-s)}) ds \\ I_\eta(n) &= c_1 M_A L_F (1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha} e^{-[\beta(\varepsilon)-\rho(n)-c_\Gamma](\tau-s)} ds. \end{aligned}$$

É fácil ver que, dado $\theta < 1$, existe um n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $I_\sigma(n) \leq \theta$, $I_\eta(n) \leq \Delta$ e

$$\|G(\sigma_\varepsilon)(\eta) - G(\sigma'_\varepsilon)(\eta')\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq I_\eta(n) \|\eta - \eta'\|_Y + I_\sigma(n) \|\sigma_\varepsilon - \sigma'_\varepsilon\|. \quad (4.6.17)$$

As desigualdades (4.6.16) e (4.6.17) implicam que G é uma contração da classe de funções que satisfaz (4.6.13) nela mesma. Portanto, tem um único ponto fixo $\sigma_\varepsilon^* = G(\sigma_\varepsilon^*)$ nesta classe.

Resta provar que $S = \{(y, \sigma_\varepsilon^*(y)) : y \in Y\}$ é uma variedade invariante para (4.6.12). Seja $(x_0, y_0) \in S$, $x_0 = \sigma_\varepsilon^*(y_0)$. Denote por $y_\varepsilon^*(t)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -B_\varepsilon y + G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y), y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Isto define uma curva $(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(t)), y_\varepsilon^*(t)) \in S$, com $t \in \mathbb{R}$. Mas a única solução de

$$\dot{x} = -A_\varepsilon x + F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(t)), y_\varepsilon^*(t)),$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$, é

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s)), y_\varepsilon^*(s)) ds = \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(t)).$$

Portanto, $(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(t)), y_\varepsilon^*(t))$ é uma solução de (4.6.12) através de (x_0, y_0) e a invariância está provada.

De (4.6.16)), é claro que $s(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e, de (4.6.17), que $l(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

O próximo passo é provar que, para n suficientemente grande, a variedade invariante S é exponencialmente atratora. Especificamente, se $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ é uma solução de (4.6.12),

existem constantes positivas γ e K tais que

$$\|x_\varepsilon(t) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq Ke^{-\gamma} \|x_\varepsilon(t_0) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^\alpha}.$$

Sejam $\xi(t) = x_\varepsilon(t) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t))$ e $y_\varepsilon^*(s, t)$, com $s \leq t$, solução de

$$\begin{cases} \frac{dy_\varepsilon^*}{dt} &= -B_\varepsilon y_\varepsilon^* + G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*), y_\varepsilon^*), \quad s \leq t, \\ y_\varepsilon^*(t, t) &= y_\varepsilon(t), \quad s = t \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s)\|_Y &= \|e^{-B_\varepsilon(s-t)} y_\varepsilon^*(t, t) + \int_t^s e^{-B_\varepsilon(s-\theta)} G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t)), y_\varepsilon^*(\theta, t)) d\theta \\ &\quad - e^{-B_\varepsilon(s-t)} y_\varepsilon(t) - \int_t^s e^{-B_\varepsilon(s-\theta)} G_\varepsilon(x_\varepsilon(\theta), y_\varepsilon(\theta)) d\theta\|_Y \\ &\leq M_B \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)(\theta-s)} \|G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t)), y_\varepsilon^*(\theta, t)) - G_\varepsilon(x_\varepsilon(\theta), y_\varepsilon(\theta))\|_{Y_\varepsilon} \\ &\leq M_B L_G \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)(\theta-s)} (\|\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t)) - x_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ &\quad + \|y_\varepsilon^*(\theta, t) - y_\varepsilon(\theta)\|_Y) d\theta \\ &\leq M_B L_G \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)(\theta-s)} (\|\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t)) - x_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ &\quad + (1 + \Delta) \|y_\varepsilon^*(\theta, t) - y_\varepsilon(\theta)\|_Y) d\theta \\ &\leq M_B L_G \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)(\theta-s)} ((1 + \Delta) \|y_\varepsilon^*(\theta, t) - y_\varepsilon(\theta)\|_Y + \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha}) d\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$z(s) \leq M_B L_G (1 + \Delta) \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} z(\theta) d\theta + M_B L_G \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)\theta} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} d\theta,$$

onde $z(s) = e^{\rho(\varepsilon)s} \|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s)\|_Y$. Pelo Lema de Gronwall Generalizado,

$$\|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s)\|_Y \leq c_3 \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon) + c_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha}, \quad s \leq t.$$

Seja $s \leq t_0 \leq t$. No que segue, estimativas para $\|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_Y$ são obtidas.

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_Y &\leq \|e^{-B_\varepsilon(s-t_0)} [y_\varepsilon^*(t_0, t) - y_\varepsilon(t_0)]\|_Y \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^s e^{-B_\varepsilon(s-\theta)} [G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t)), y_\varepsilon^*(\theta, t)) - G_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(\theta, t_0)), y_\varepsilon^*(\theta, t_0))] d\theta \right\|_Y \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_Y &\leq c_3 M_B e^{\rho(\varepsilon)(t_0-s)} \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\theta-t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} d\theta \\ &+ M_B L_G (1 + \Delta) \int_s^{t_0} (\theta - s)^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon)(\theta-s)} \|y_\varepsilon^*(\theta, t) - y_\varepsilon(\theta, t_0)\|_Y d\theta, \end{aligned}$$

e pelo Lema de Gronwall Generalizado

$$\|y_\varepsilon^*(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_Y \leq c_4 \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\theta-t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} d\theta.$$

A seguir, as estimativas acima são utilizadas para estimar $\|\xi(t)\|_{X_\varepsilon^\alpha}$.

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-A_\varepsilon(t-t_0)} \xi(t_0) = x_\varepsilon(t) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t)) - e^{-A_\varepsilon(t-t_0)} (x_\varepsilon(t_0) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t_0))) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) ds - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t)) + e^{-A_\varepsilon(t-t_0)} \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) ds - \int_{-\infty}^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t)), y_\varepsilon^*(s, t)) ds \\ &\quad + e^{-A_\varepsilon(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_\varepsilon(t_0-s)} F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t_0)), y_\varepsilon^*(s, t_0)) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-A_\varepsilon(t-s)} [F_\varepsilon(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) - F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t)), y_\varepsilon^*(s, t))] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_0} [F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t)), y_\varepsilon^*(s, t)) - F_\varepsilon(\sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t_0)), y_\varepsilon^*(s, t_0))] ds, \end{aligned}$$

e assim, para $z(t) = \|\xi(t) - e^{-A_\varepsilon(t-t_0)} \xi(t_0)\|_{X_\varepsilon^\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} z(t) &\leq M_A L_F \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} (x_\varepsilon(s) - \sigma_\varepsilon^*(y_\varepsilon^*(s, t)))_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y_\varepsilon(s) - y_\varepsilon^*(s, t)\|_Y ds \\ &\quad + M_A L_F (1 + \Delta) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \|y_\varepsilon^*(s, t_0) - y_\varepsilon^*(s, t)\|_Y ds \\ &\leq M_A L_F \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + c_3 M_A L_F (1 + \Delta) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \\ &\quad \times \int_s^t (\theta - s)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} d\theta ds + c_4 M_A L_F (1 + \Delta) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \\ &\quad \times \int_{t_0}^t (\theta - t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\theta-t_0)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} d\theta ds, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} z(t) \leq & M_A L_F \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + c_5 \int_{t_0}^t (t-\theta)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-\theta)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ & \times \int_{t_0}^\theta (\theta-s)^{-\alpha} e^{[-\beta(\varepsilon)-[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma]](\theta-s)} ds d\theta + c_6 \int_{t_0}^t (\theta-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](\theta-s)} \|\xi(\theta)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \\ & \times \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} e^{[-\beta(\varepsilon)-[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma]](t-s)} ds d\theta, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} z(t) \leq & [M_A L_F + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) - c_\Gamma]^{1-\alpha}}] \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-s)} \|\xi(s)\|_{X_\varepsilon^\alpha} ds \\ & + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) - c_\Gamma]^{1-\alpha}} \int_{t_0}^t (s-t_0)^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](s-t)} \|\xi(s)\|_{X_\varepsilon^\alpha} ds, \end{aligned}$$

e, se $w(t) = \sup\{\|\xi(s)\|_{X_\varepsilon^\alpha} : t_0 \leq s \leq t\}$, então

$$e^{\beta(\varepsilon)(t-t_0)} \|\xi(t)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_A \|\xi(t_0)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \gamma(\varepsilon) e^{\beta(\varepsilon)(t-t_0)} w(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\beta(\varepsilon)^{1-\alpha}} \left[M_A L_F + \frac{c_5 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) - c_\Gamma]^{1-\alpha}} \right] + \frac{c_6 \Gamma(1-\alpha)}{[\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) - c_\Gamma]^{1-\alpha}} \\ K &= \sup_{\eta \geq 0} \left(\int_0^\eta u^{-\alpha} e^{[\rho(\varepsilon)+c_\Gamma](u-\eta)} du \right). \end{aligned}$$

Escolha $n_0 > 0$ tal que $\gamma(n) \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$e^{\beta(\varepsilon)(t-t_0)} \|\xi(t)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq e^{\beta(\varepsilon)(t-t_0)} w(t) \leq M_A \|\xi(t_0)\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \gamma(n) e^{\beta(\varepsilon)(t-t_0)} w(t)$$

e

$$\|\xi(t)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq 2M_A \|\xi(t_0)\|_{X_\varepsilon^\alpha} e^{-\beta(\varepsilon)(t-t_0)}.$$

A suavidade de σ_ε^* é provada da mesma forma como em [28] e a estimativa para as derivadas segue da estimativa para suas constantes de Lipschitz. Isto conclui a demonstração. ■

Observe que nós separamos o espaço de fase em um espaço gerado pelas duas primeiras autofunções do problema (4.1.1) e seu complemento ortogonal. Depois projetamos a equação (4.1.1) sobre estes espaços e isto produz o par de equações que aparecem na afirmação do Teorema.

Vale também observar que o Teorema da Variedade Invariante é utilizado tanto para reduzir o problema a um espaço de dimensão finita, como, também, para mostrar a proximidade dos

campos vetoriais envolvidos.

Seja $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas localmente Lipschitzianas satisfazendo certas condições de crescimento para assegurar que o problema (4.1.1) esteja bem posto e suponhamos que

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} < 0, \quad \text{e} \quad \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < 0.$$

Observação 4.6.1 *Sob as afirmações acima para f e g , o problema (4.1.1) tem um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $\sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{u \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} < \infty$. Com isto, temos condições para cortar f e g tal que os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ continuem sendo os mesmos, e f, f', g, g' sejam limitadas. Daqui em diante vamos assumir (sem perda de generalidade) que f, g são funções limitadas com derivadas limitadas.*

Teorema 4.6.2 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como na observação acima. Então existe uma variedade invariante exponencialmente atratora*

$$S = \{(u_1, u_2, \omega) : \omega = \sigma(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

para o sistema (4.4.7).

O fluxo em S é dado por $u(t, x) = u_1(t)\varphi_1^\varepsilon(x) + u_2(t)\varphi_2^\varepsilon(x) + \sigma(u_1(t), u_2(t))$, onde $(u_1(t), u_2(t))$ é a solução de

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \sigma(u_1, u_2)) \\ \dot{u}_2 &= -\delta u_2 + G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \sigma(u_1, u_2)). \end{cases} \quad (4.6.18)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ em $\mathcal{C}^1(V, V^\perp)$, onde $V = \text{span} [\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon]$.

Demonstração. Definamos

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x), \quad L_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x), \quad m_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_1^\varepsilon(x)|, \\ M_2 &= \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x), \quad L_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} g'(x), \quad m_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_2^\varepsilon(x)|, \\ M_1^{f,g} &= M_1 |\Omega_\varepsilon|^{1/2} + M_2 \frac{|\partial \Omega_\varepsilon|}{|\Omega_\varepsilon|^{1/2}}, \quad M_2^{f,g} = M_1 m_2 l_1 + M_2 m_2 l_2, \\ |\Omega_\varepsilon| &= 1 + \varepsilon^{N-1} |Q_\varepsilon| \leq l_1, \quad |\partial \Omega_\varepsilon| = |\partial \Omega| + \varepsilon^{N-1} |\partial \Omega_\varepsilon| \leq l_2. \end{aligned}$$

Com esta notação temos

$$\begin{aligned}
 |G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f(a) \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(a) \varphi_1^\varepsilon \right| \\
 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f(a)| |\varphi_1^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g(a)| |\varphi_1^\varepsilon| \\
 &\leq M_1 \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon| + M_2 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon| \\
 &\leq M_1 m_1 |\Omega_\varepsilon| + M_2 m_1 |\partial\Omega_\varepsilon| \\
 &\leq M_1 m_1 l_1 + M_2 m_1 l_2 = M_1^{f,g},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f(a) \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(a) \varphi_2^\varepsilon \right| \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f(a)| |\varphi_1^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g(a)| |\varphi_2^\varepsilon| \\
 &\leq M_1 \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_2^\varepsilon| + M_2 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon| \leq M_1 m_2 |\Omega_\varepsilon| + M_2 m_2 |\partial\Omega_\varepsilon| \\
 &\leq M_1 m_2 l_1 + M_2 m_2 l_2 = M_2^{f,g}.
 \end{aligned}$$

Com isto temos que G_0^ε e G_1^ε são uniformemente limitadas.

Para obter Lipschitz continuidade global, sejam $y_1 = (u_1, u_2)$, $y_2 = (v_1, v_2)$, $\omega_1, \omega_2, a = u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega_1$, $b = v_1 \varphi_1^\varepsilon + v_2 \varphi_2^\varepsilon + \omega_2$, então temos (para alguns $\tau_1, \tau_2 \in (a, b)$)

$$\begin{aligned}
 |G_0^\varepsilon(y_1, \omega_1) - G_0^\varepsilon(y_2, \omega_2)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} [f(a) - f(b)] \varphi_1^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} [g(a) - g(b)] \varphi_1^\varepsilon \right| \\
 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f(a) - f(b)| |\varphi_1^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g(a) - g(b)| |\varphi_1^\varepsilon| \\
 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f'(\tau_1)| |a - b| |\varphi_1^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g'(\tau_2)| |a - b| |\varphi_1^\varepsilon| \\
 &\leq L_1 \int_{\Omega_\varepsilon} |a - b| |\varphi_1^\varepsilon| + L_2 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |a - b| |\varphi_1^\varepsilon| \\
 &\leq L_1 \left[|u_1 - v_1| \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon|^2 + |u_2 - v_2| \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon| |\varphi_2^\varepsilon| \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega_\varepsilon} |\omega_1 - \omega_2| |\varphi_2^\varepsilon| \right] + L_2 \left[|u_1 - v_1| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon|^2 \right. \\
 &\quad \left. + |u_2 - v_2| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\varphi_1^\varepsilon| |\varphi_2^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\omega_1 - \omega_2| |\varphi_2^\varepsilon| \right] \\
 &\leq L_1 \left[\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] \\
 &\quad + L_2 \left[C_3(|\Omega|) |y_1 - y_2| + C_2(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right] \\
 &\leq L_3(|\Omega|) \left[\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + L_4(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right],
 \end{aligned}$$

onde $L_3(|\Omega|) = L_1 + L_2 C_3(|\Omega|)$, $C_3(|\Omega|) = \max \{C_0(|\Omega|), C_1(|\Omega|)\}$, $L_4(|\Omega|) = L_1 + L_2 C_2(|\Omega|)$, e

$$\begin{aligned}
 |G_1^\varepsilon(y_1, \omega_1) - G_1^\varepsilon(y_2, \omega_2)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} [f(a) - f(b)] \varphi_2^\varepsilon + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} [g(a) - g(b)] \varphi_2^\varepsilon \right| \\
 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f(a) - f(b)| |\varphi_2^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g(a) - g(b)| |\varphi_2^\varepsilon| \\
 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f'(\tau_1)| |a - b| |\varphi_2^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g'(\tau_2)| |a - b| |\varphi_2^\varepsilon| \\
 &\leq L_1 \int_{\Omega_\varepsilon} |a - b| |\varphi_2^\varepsilon| + L_2 \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |a - b| |\varphi_2^\varepsilon| \\
 &\leq L_1 \left[\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] + L_2 \left[|u_1 - v_1| + C_3(|\Omega|) |u_2 - v_2| \right. \\
 &\quad \left. + C_4(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right] \\
 &\leq L_5 \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + L_6(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},
 \end{aligned}$$

onde $L_5(|\Omega|) = L_1 + C_6(|\Omega|) L - 2$, $C_6 = \max \{1, C_4(|\Omega|)\}$, $L_6(|\Omega|) = L_1 + C_5(|\Omega|) L_2$. Assim

$$\begin{aligned}
 \|G_\varepsilon(\omega_1, y_1) - G_\varepsilon(\omega_2, y_2)\|_{\mathbb{R}^2} &= \|(G_0^\varepsilon(\omega_1, y_1) - G_0^\varepsilon(\omega_1, y_1), G_1^\varepsilon(\omega_1, y_1) - G_1^\varepsilon(\omega_1, y_1))\|_{\mathbb{R}^2} \\
 &\leq |G_0^\varepsilon(\omega_1, y_1) - G_0^\varepsilon(\omega_1, y_1)| + |G_1^\varepsilon(\omega_1, y_1) - G_1^\varepsilon(\omega_1, y_1)| \\
 &\leq L_3(|\Omega|) \left[\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + L_4(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right] \\
 &\quad + L_5 \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + L_6(|\Omega|) \varepsilon^{\frac{N-1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq L_7(|\Omega|) \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{L_8(|\Omega|)}{\delta^{1/2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{X_\varepsilon^{1/2}(\Omega_\varepsilon)},
 \end{aligned}$$

onde $L_7(|\Omega|) = L_3(|\Omega|) + L_5(|\Omega|)$, $L_8(|\Omega|) = L_4(|\Omega|) + L_6(|\Omega|)$ e no segundo termo da última desigualdade aplicamos (4.5.1).

Também

$$\begin{aligned}
 \|G_\varepsilon(\omega, y)\|_{\mathbb{R}^2} &\leq |G_0^\varepsilon(\omega, y)| + |G_1^\varepsilon(\omega, y)| \\
 &\leq M_1^{f,g} + M_3 + M_2^{f,g} = N_G, \\
 \left| \frac{\partial}{\partial u_1} G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f'(a)| |\varphi_1^\varepsilon|^2 + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g'(b)| |\varphi_1^\varepsilon|^2 \\
 &\leq L_1 + L_2 m_1^2 |\partial\Omega_\varepsilon| \leq L_1 + L_2 m_1^2 l_2 \\
 \left| \frac{\partial}{\partial u_2} G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f'(a)| |\varphi_1^\varepsilon| |\varphi_2^\varepsilon| + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |g'(b)| |\varphi_1^\varepsilon| |\varphi_2^\varepsilon| \\
 &\leq L_1 + L_2 m_1 m_2 |\partial\Omega_\varepsilon| \leq L_1 + L_2 m_1 m_2 l_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial \omega} G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f'(a)| |\varphi_1^\varepsilon| + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} |g'(b)| |\varphi_1^\varepsilon| \\
&\leq L_1 m_1 |\Omega_\varepsilon| + L_2 m_1 |\partial \Omega_\varepsilon| \\
&\leq L_1 m_1 l_1 + L_2 m_1 l_2 \\
\left| \frac{\partial}{\partial u_1} G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq L_1 + L_2 m_1^2 l_2 \\
\left| \frac{\partial}{\partial u_2} G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq L_1 + L_2 m_2^2 l_2 \\
\left| \frac{\partial}{\partial \omega} G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega) \right| &\leq L_1 m_1 l_1 + L_2 m_1 l_2.
\end{aligned}$$

Agora para a função F_ε , temos

$$\|F_\varepsilon(\omega_1, y_1) - F_\varepsilon(\omega_2, y_2)\|_{X_\varepsilon} = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} F_\varepsilon((\omega_1, y_1)s + (\omega_2, y_2)(1-s)) ds \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (4.6.19)$$

Agora

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} F_\varepsilon((\omega_1, y_1)s + (\omega_2, y_2)(1-s)) &= \frac{d}{ds} [f((\omega_1, y_1)s + (\omega_2, y_2)(1-s)) \\
&\quad - G_0^\varepsilon((\omega_1, y_1)s + (\omega_2, y_2)(1-s)) \varphi_1^\varepsilon \\
&\quad - G_0^\varepsilon((\omega_1, y_1)s + (\omega_2, y_2)(1-s)) \varphi_1^\varepsilon] \\
&= f'(*) [(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)] - G_0^\varepsilon'(*) [(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)] \varphi_1^\varepsilon \\
&\quad - (G_1^\varepsilon)'(*) [(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)] \varphi_2^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em (4.6.19), temos

$$\begin{aligned}
\|F_\varepsilon(\omega_1, y_1) - F_\varepsilon(\omega_2, y_2)\|_{X_\varepsilon} &\leq |f'(*)| \|(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\quad + |(G_0^\varepsilon)'(*)| \|(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + |(G_1^\varepsilon)'(*)| \|(\omega_1, y_1) - (\omega_2, y_2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq L_1 \left[\|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} \right] + \tilde{L} \left[\|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} \right] \\
&\quad + \tilde{\tilde{L}} \left[\|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} \right]
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|F_\varepsilon(\omega_1, y_1) - F_\varepsilon(\omega_2, y_2)\|_{X_\varepsilon} &\leq \hat{L} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + \hat{L} \|\omega_1 - \omega_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \hat{L} \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{\hat{L}}{\delta^{1/2}} (\varepsilon^{N-1})^{\frac{1}{2}} \|\omega_1 - \omega_2\|_{X_\varepsilon^{1/2}(\Omega_0 \varepsilon)}
\end{aligned}$$

onde $\hat{L} = L_1 + \tilde{L} + \tilde{\tilde{L}}$, $\tilde{L} = \max(G_0^\varepsilon)'$, $\tilde{\tilde{L}} = \max(G_1^\varepsilon)'$ e no segundo termo da desigualdade usamos (4.5.1). Observe que $\hat{L} \varepsilon^{(N-1)/2} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(u_1, u_2, \omega)| &\leq |f(\cdot)| + |G_0^\varepsilon(u_1, u_2, \omega)| |\varphi_1^\varepsilon| + |G_1^\varepsilon(u_1, u_2, \omega)| |\varphi_2^\varepsilon| \\ &\leq M_1 + M_1^{f,g} m_1 + M_2^{f,g} m_2 = M_{f,g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |F(u_1, u_2, \omega)|^2 &\leq M_{f,g}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} 1 \leq M_{f,g}^2 |\Omega_\varepsilon| \leq M_{f,g}^2 l_1 \\ \|F(u_1, u_2, \omega)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq N_F, \end{aligned}$$

onde $N_F = M_{f,g} \sqrt{l_1}$.

Com isto, verificamos que F_ε e G_ε satisfazem as hipóteses do Teorema 4.6.1. ■

Teorema 4.6.3 *Suponhamos que o sistema (4.4.14) é estruturalmente estável. Então para ε suficientemente pequeno, o fluxo na variedade invariante dada por (4.6.18) é topologicamente equivalente a (4.4.14).*

Demonstração. Para cada ε suficientemente pequeno, consideramos o fluxo no subespaço bidimensional V dado por $v(t, x) = u_1 \varphi_1^0 + u_2 \varphi_2^0$, onde (u_1, u_2) é solução de

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= G_0^0(u_1, u_2, \sigma(u_1, u_2)) \\ \dot{u}_2 &= -\delta u_2 + G_1^0(u_1, u_2, \sigma(u_1, u_2)). \end{cases} \quad (4.6.20)$$

Como a aplicação $v \rightarrow u = v + \sigma(v)$ é uma conjugação entre as órbitas do fluxo de (4.6.20) e as órbitas de (4.6.18), só temos que mostrar que o sistema (4.6.20) é topologicamente conjugado ao sistema (4.4.14). Na verdade, devemos provar que os campos de vetores

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(u_1, u_2) &= (X_0(\varepsilon), X_1(\varepsilon)) \quad \text{e} \\ X_0(u_1, u_2) &= (X_0(0), X_1(0)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} X_0(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \sigma(u_1, u_2)) \varphi_1^\varepsilon \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \sigma(u_1, u_2)) \varphi_1^\varepsilon \\ X_1(\varepsilon) &= -\delta u_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \sigma(u_1, u_2)) \varphi_2^\varepsilon \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(u_1 \varphi_1^\varepsilon + u_2 \varphi_2^\varepsilon + \sigma(u_1, u_2)) \varphi_2^\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_0(0) &= \int_{\Omega} f(u_1 + u_2 \varphi_2^0) + \int_{\partial\Omega} g(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \\
X_1(0) &= -\delta u_2 + \int_{\Omega} f(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \varphi_2^0 + \int_{\partial\Omega} g(u_1 + u_2 \varphi_2^0) \varphi_2^0
\end{aligned}$$

são $\mathcal{C}^1$ próximos. Isto segue facilmente do fato que σ se aproxima de 0 na topologia $\mathcal{C}^1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e das propriedades dos autovalores e autofunções de $B = \frac{\delta}{\varepsilon^{N-1}} \Delta$. De fato, vamos mostrar que

$$(i) \quad \|X_{\varepsilon} - X_0\| \rightarrow 0 \quad \text{e}$$

$$(ii) \quad \|DX_{\varepsilon} - DX_0\| \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para mostrar (i), é suficiente provar que $X_0(\varepsilon) - X_0(0) \rightarrow 0$, $X_1(\varepsilon) - X_1(0) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Colocando $a_{\varepsilon} = u_1 \varphi_1^{\varepsilon} + u_2 \varphi_2^{\varepsilon} + \sigma(u_1, u_2)$ e $a_0 = u_1 + u_2 \phi_2$, como $\varphi_1^{\varepsilon} \rightarrow 1$, $\varphi_2^{\varepsilon} \rightarrow \phi_2$ e $\sigma \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, segue que $a_{\varepsilon} \rightarrow a_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo, temos

$$\begin{aligned}
X_0(\varepsilon) &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} f(a_{\varepsilon}) \varphi_1^{\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} g(a_{\varepsilon}) \varphi_1^{\varepsilon} \\
X_0(\varepsilon) &\rightarrow \int_{\Omega} f(a_0) + \int_{\partial\Omega} g(a_0) = X_0(0)
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim $X_0(\varepsilon) - X_0(0) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Analogamente mostra-se que $X_1(\varepsilon) - X_1(0) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com isto conclui-se a parte (i).

Para mostrar (ii) é suficiente mostrar que

$$\|D_{u_i} X_{\varepsilon}(u_1, u_2) - D_{u_i} X_0(u_1, u_2)\| \rightarrow 0, \quad i = 1, 2$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
D_{u_1} X_0(\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\int_{\Omega_{\varepsilon}} f(a_{\varepsilon}) \varphi_1^{\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} g(a_{\varepsilon}) \varphi_1^{\varepsilon} \right] \\
&= \int_{\Omega_{\varepsilon}} f'(a_{\varepsilon}) \left[\varphi_1^{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma(u_1, u_2) \right] \varphi_1^{\varepsilon} \\
&\quad + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} g'(a_{\varepsilon}) \left[\varphi_1^{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma(u_1, u_2) \right] \varphi_1^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_1^{\varepsilon} \rightarrow 1$, $\varphi_2^{\varepsilon} \rightarrow \phi_2$, $\frac{\partial}{\partial u_i} \sigma \rightarrow 0$, $i = 1, 2$ e $a_{\varepsilon} \rightarrow a_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Temos

$$D_{u_1} X_0(\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} f'(a_0) + \int_{\partial\Omega} g'(a_0) = D_{u_1} X_0(0)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, $D_{u_1} X_0(\varepsilon) - D_{u_1} X_0(0) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Analogamente, mostra-se que

$D_{u_i}X_1(\varepsilon) - D_{u_i}X_1(0) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$. Com isto, conclui-se a demonstração do Teorema. ■

4.7 Padrões

Nesta seção, voltamos ao sistema (4.4.14). Agora, gostaríamos de obter os padrões para (4.1.1). Para este propósito consideramos $\delta = 0$, $g(u) = u - u^3$ e $f(u) = 0$. Assim, o sistema (4.4.14) tem nove pontos de equilíbrio (ver Figura (4.2)).

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0), & P_2 &= (0,1), & P_3 &= (0,-1), \\ P_4 &= (1,0), & P_5 &= (1,1), & P_6 &= (1,-1), \\ P_7 &= (-1,0), & P_8 &= (-1,1), & P_9 &= (-1,-1). \end{aligned}$$

Todos estes pontos de equilíbrios são hiperbólicos. Os equilíbrios P_5, P_6, P_8, P_9 são estáveis. Como vimos a dinâmica de (4.4.14) é equivalente a dinâmica de (4.1.1), e por isso os pontos de equilíbrio da forma $P = (v_1, v_2)$ com $v_1 \neq v_2$ correspondem a equilíbrios estáveis não-constantos (padrões) para (4.1.1). Assim, temos dois padrões para o sistema (4.1.1).

Figura 4.2: Retrato de fase aproximado: $\delta = 0$, $g(u) = u - u^3$, $f = 0$

Comentários finais e problemas para estudos futuros

*F*elizmente esta tese só representa uma pequena parcela do que se pode fazer e é o início da minha investigação sobre a dinâmica infinito dimensional das equações de reação-difusão.

A continuação damos uma série de indicações sobre as linhas de pesquisa que ficaram estabelecidas para estudos futuros.

1. Do Capítulo 3 continuaremos com o estudo da semi-continuidade inferior dos atratores para este problema e conseqüentemente com a continuidade dos atratores ([5]).

2. Com relação ao Capítulo 4, só mostramos a existência de padrões para domínios tipo dumbbell. Como foi mencionado na introdução, uma maneira de produzir padrões é introduzir no sistema algo que se oponha à homogenização, ou seja, uma obstrução ao fluxo de concentrações. Podemos alcançar isto das seguintes maneiras:

Obstrução no domínio: Isto pode ser conseguido, por exemplo, fazendo uma constrição no domínio, ou seja, considerando domínios que possuem dois lados bem definidos separados por um canal fino (que funciona como funil ou gargalo). Este é o processo empregado para obter existência de padrões em Matano [36] e Morita [38] para a condição de fronteira homogênea.

Neste caso, pretendemos estudar o problema análogo para condições de Neumann não linear (como feito no Capítulo 4 e para canais mais gerais). As técnicas que deveremos aplicar aqui são a redução do problema a um problema com condição de fronteira homogênea introduzidas em Carvalho, Oliva, Pereira e Rodriguez-Bernal [17] e o uso de variedades invariantes.

3. *Obstrução por Membranas Permeáveis:* Neste processo se introduz no domínio uma membrana permeável que o divida em duas partes e dificulte a passagem de concentrações de

uma parte para a outra, obtendo assim um fenômeno semelhante ao obtido com a constrição do domínio. Com isto, temos que a difusibilidade é praticamente constante em ambas partes do domínio, mas na membrana esta se torna pequena. Este processo é empregado por Fusco [24], Carvalho e Pereira [18], Carvalho [10], Carvalho e Cuminato [12] para obter existência de padrões.

Pretende-se estudar o problema análogo para dimensões maiores que dois (não contemplado na literatura) e para condições de fronteira não linear.

4. Obstrução fraca provocada por difusibilidade não constante: Neste processo, sob certas condições no campo f , pode-se produzir padrões (ver do Nascimento [23] e as referências lá contidas). Este caso desperta um interesse especial pois, embora haja mais restrições no campo, os coeficientes de difusão são bastante gerais.

Pretende-se estudar o problema análogo para o caso de condições de fronteira não lineares. As técnicas que deveremos usar aqui são a redução do problema com condição de fronteira homogênea introduzidas por Carvalho, Oliva e Rodriguez-Bernal [17] e os resultados de do Nascimento [23].

Os métodos citados acima foram estudados por um número razoável de matemáticos e podemos dizer que começam a ser bem compreendidos para problemas com condições de fronteira homogênea. O objetivo é iniciar os estudos de tais problemas para condições de fronteira não linear.

5. Padrões obtidos por reações espacialmente dependentes: Neste caso, para contrabalançar o efeito de homogenização da difusão, introduzimos uma reação que seja diferente em partes diferentes do domínio. Isto pode ocasionar que, em uma das partes do domínio, a concentração se aproxime de uma constante, e em outra parte do domínio, a concentração se aproxime de uma outra constante distinta da primeira produzindo um equilíbrio estável espacialmente dependente. Em dimensão um, este é o processo utilizado em Angenent, Mallet-Parret e Peletier [2] e Rocha [41].

6. Padrões obtidos por fluxo de concentração na fronteira: Neste caso, para fixarmos idéias, assume-se que $\Omega = (0, 1)$. Se consideramos o problema (1.0.1) com a condição de fronteira homogênea substituída por um fluxo não linear de concentrações, podemos ter uma entrada de substâncias consideravelmente grande de um lado e uma perda de concentrações do outro que faça com que a concentração de um lado seja mantida a um nível diferente do nível do outro lado. Cònsul e Sòla-Morales [21] utilizam esta idéia para a obtenção de padrões.

Relativamente à continuidade de atratores, uma questão importante tem sido sistematicamente negligenciada, isto é, qual é a taxa de convergência dos atratores em problemas relativamente aos quais conhecemos a taxa de convergência dos auto-valores e auto-funções? A taxa de convergência dos autovalores e autofunções é conhecida para:

- Problemas parabólicos em domínios tipo dumbbell

-
- Perturbação da difusão em equações de reação e difusão.
 - Problemas parabólicos em domínios finos.

Em estudos futuros pretende-se também abordar estas questões.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Amman, *Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions*, Journal of Differential Equations **72** (1988), no. 2, 201–269.
- [2] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret, and L. A. Peletier, *Stable transition layers in a semilinear boundary value problem*, J. Differential Equations **67** (1987), no. 2, 212–242.
- [3] J. M. Arrieta, *Spectral properties of schrödinger operators under perturbations of the domain*, Doctoral Dissertation, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, 1991.
- [4] ———, *Rates of eigenvalues on a dumbbell domain. simple eigenvalue case*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 9, 3503–3531.
- [5] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, and G. Lozada-Cruz, *Continuity of attractor for dumbbell domains*, In Progress.
- [6] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, and A. Rodríguez-Bernal, *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities*, Journal of Differential Equations **156** (1999), 376–406.
- [7] ———, *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds*, Communications on Partial Differential Equations **25** (2000), no. 1-2, 1–37.
- [8] J. M. Arrieta, J. K. Hale, and Q. Han, *Eigenvalue problems for non-smoothly perturbed domains*, Journal Differential Equations **91** (1991), no. 1, 24–52.
- [9] H. Brezis, *Análisis funcional. Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [10] A. N. Carvalho, *Infinite-dimensional dynamics described by ordinary differential equations*, J. Differential Equations **116** (1995), no. 2, 338–404.
- [11] ———, *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions in cell tissues*, Resenhas **3** (1997), no. 1, 123–138., Workshop on Differential Equations and Nonlinear Analysis (Águas de Lindóia, 1996).

-
- [12] A. N. Carvalho and J. A. Cuminato, *Reaction-diffusion problems in cell tissues*, Journal of Dynamics and Differential Equations **9** (1997), no. 1, 93–131.
- [13] A. N. Carvalho and G. Lozada-Cruz, *Padrões em problemas parabólicos*, Atas do 53 Seminário Brasileiro de Análise (2001), 609–628, Maringá-PR.
- [14] ———, *Patterns in parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, The 5-th Americas Conference on Differential Equations and Nonlinear Dynamics (Poster) (2002), Edmonton, Canada.
- [15] ———, *Patterns in parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, Submitted to NODEA (2003).
- [16] ———, *Uma observação numa equação de reação-difusão num domínio tipo Dumbbell*, Atas do 58 Seminário Brasileiro de Análise (2003), Campinas-SP.
- [17] A. N. Carvalho, S. M. Oliva, A. L. Pereira, and A. Rodriguez-Bernal, *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **207** (1997), no. 2, 409–461.
- [18] A. N. Carvalho and A. L. Pereira, *A scalar parabolic equation whose asymptotic behavior is dictated by a system of ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations **112** (1994), no. 1, 81–130.
- [19] J. W. Cholewa and T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 278, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [20] N. Cònsul, *Equacions de Difusió amb Condições de Contorn No Lineals*, Ph.D thesis, Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, Març 1997.
- [21] N. Cònsul and J. Sòla-Morales, *Stable nonconstant equilibria in parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), no. 3, 299–304.
- [22] ———, *Stability of local minima and stable nonconstant equilibria*, Journal of Differential equations **157** (1999), no. 1, 61–81.
- [23] A. S do Nascimento, *On the role of diffusivity in some stable equilibria of a diffusion equation*, J. Differential Equations **15** (1999), no. 2, 231–244.

-
- [24] G. Fusco, *On the explicit construction of an ODE which has the same dynamics as a scalar parabolic PDE*, J. Differential Equations **69** (1987), no. 1, 85–110.
 - [25] J. Hale and J. Vegas, *A nonlinear parabolic equation with varying domain*, Arch. Rational Mech. Anal **86** (1984), no. 2, 99–123.
 - [26] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 25, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1989.
 - [27] D. Henry, *Evolution equations in Banach spaces*, Notas manuscritas, IME-USP, Março 1981.
 - [28] ———, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, 2 ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer Verlag, New York, 1981.
 - [29] S. Jimbo, *Singular perturbation of domains and semilinear elliptic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **35** (1988), no. 1, 27–76.
 - [30] ———, *Singular perturbation of domains and the semilinear elliptic equation. II*, Journal of Differential Equations **75** (1988), no. 2, 264–289.
 - [31] ———, *The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with neumann boundary condition*, Journal of Differential Equations **77** (1989), no. 2, 322–350.
 - [32] ———, *Semilinear parabolic equation in a singularly perturbed domain and the limit of the attractors*, Lecture Notes Numer. Appl. Anal. **12** (1993), 11–122, Nonlinear PDE-JAPAN Symposium 2, 1991 (Kyoto, 1991).
 - [33] S. Jimbo and Y. Morita, *Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singularly perturbed domain with several thin channels*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 3-4, 523–552.
 - [34] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition.
 - [35] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academics Press, New York-London, 1968.
 - [36] H. Matano, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (79), no. 2, 401–451.
 - [37] X. Mora, *Semilinear parabolic problems define semiflows on C^k spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), no. 1, 21–55.

- [38] Y. Morita, *Reaction-diffusion systems in nonconvex domains: invariant manifold and reduced form*, J. Dynam. Differential Equations **2** (1990), no. 1, 69–115.
- [39] Y. Morita and S. Jimbo, *Ordinary differential equations (odes) on inertial manifolds for reaction-diffusion systems in a singularly perturbed domain with several thin channels*, J. Dynam. Differential Equations **4** (1992), no. 1, 65–93.
- [40] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [41] C. Rocha, *Examples of attractors in scalar reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations **73** (1988), no. 1, 178–195.
- [42] J. M. Vega, *Bifurcations caused by perturbing the domain in an elliptic equations*, Journal of Differential Equations **48** (1983), no. 2, 189–226.

Índice de Notações

$\mathbb{N}$:	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$:	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$:	Intervalo $[0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$:	Espaço Euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}_+^n$:	$\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > 0\}$
Ω :	Conjunto aberto e conexo com fronteira suave
$\overline{\Omega}$:	Fecho de Ω
$\partial\Omega$:	Fronteira de Ω
$ \Omega $:	Medida de Lebesgue do domínio Ω
$B(p, r)$:	$\{x \in \mathbb{R}^n : x - p < r\}$
$B(r)$:	$\{x \in \mathbb{R}^n : x < r\}$
B^n :	Bola unitária n -dimensional, $\{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 1\}$
$L^p(\Omega)$:	Espaço de funções contendo todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujas p -ésima potência é integrável para $p \geq 1$
$L^\infty(\Omega)$:	Espaço de funções contendo todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ as quais são limitadas exceto num conjunto de medida nula
$\ \cdot\ _p$:	Norma L^p de uma função em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$
$W^{k,p}(\Omega)$:	Espaço de Sobolev cujas derivadas até a ordem k pertencem a $L^p(\Omega)$
$H^k(\Omega)$:	Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$:	Fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$:	Espaço de Sobolev $W_0^{k,2}(\Omega)$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$:	Espaço de funções contendo todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas até a ordem k são contínuas em Ω , $k \geq 0$
$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$:	Espaço de funções contendo todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que pertencem a $\mathcal{C}^k(\Omega)$ e cuja k -ésima derivada é Hölder contínuas com expoente α
$\partial_j u$:	Derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_j}$

$\nu(x)$:	ν é o vetor normal exterior em $x \in \partial\Omega$
$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$:	$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = u_\nu$ é a derivada normal exterior
∇u :	Gradiente da função u , $\nabla u(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x))$
Δu :	Laplaciano da função u , $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u(x)$
$H_N^2(\Omega)$:	$H_N^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$
$X \hookrightarrow Y$:	Dizemos que X está continuamente imerso em Y e significa que: $X \subset Y$ e a aplicação inclusão $j : X \rightarrow Y$ é contínua
$X \xhookrightarrow{c} Y$:	Dizemos que X está compactamente imerso em Y e significa que: $X \subset Y$ e a aplicação inclusão $j : X \rightarrow Y$ é compacta

Índice Remissivo

- Assintoticamente compacto, 16
- Atrator, 15
 - global, 17
- Comparação dos semigrupos
 - lineares, 76
 - não-lineares, 77
- Condição de
 - crescimento, 33
 - dissipatividade, 34
- Conjunto
 - α -limite, 16
 - ω -limite, 16
- Convergência de
 - autofunções, 95
 - autovalores, 84
- Desigualdade de Gronwall Generalizada, 105
- Dinâmica assintótica, 81
- Domínio tipo dumbbell, 47
- Equação de reação-difusão, 28
- Espaço de potência fracionária, 10
- Estabilidade de equilíbrios, 40
- Estrutura gradiente, 26
- Formação de padrões, 28
- Função de Liapunov, 26
- Fórmula da variação das constantes, 14
- Identidade do resolvente, 56
- Imersões de Sobolev, 11
- Intervalo maximal de existência, 13
- Lema elíptico, 35
- Net smoothness, 11
- Operador
 - potência fracionária, 10
 - resolvente, 7
 - setorial, 7
- Órbita
 - completa, 15
 - negativa, 15
 - positiva, 15
- Padrões, 122
- Ponto dissipativo, 16
- Problema
 - de Cauchy abstrato, 12
 - limite, 51
 - perturbado, 49
- Quociente de Rayleigh, 45
- Semi-continuidade superior dos atratores, 78
- Semigrupos
 - analíticos, 8
 - não-lineares, 15
- Solução
 - de equilíbrio, 18

forte, 13

fraca, 14

local, 13

Teorema de traço uniforme, 102

Variedade

instável local, 20

invariante, 104