

---

Estudo global de sistemas polinomiais planares  
no disco de Poincaré

*Caio Augusto de Carvalho Pena*

---

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23/11/2015

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Caio Augusto de Carvalho Pena**

## Estudo global de sistemas polinomiais planares no disco de Poincaré

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dr. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

**USP – São Carlos**  
**Novembro de 2015**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P397e Pena, Caio Augusto de Carvalho  
Estudo global de sistemas polinomiais planares  
no disco de Poincaré / Caio Augusto de Carvalho  
Pena; orientadora Regilene Delazari dos Santos  
Oliveira; co-orientador Alex Carlucci Rezende. --  
São Carlos, 2015.  
45 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. sistemas diferenciais polinomiais planares.  
2. curvas algébricas invariantes. 3. compactificação  
de Poincaré. 4. classificação topológica local dos  
pontos singulares. 5. retrato de fase global. I.  
Oliveira, Regilene Delazari dos Santos, orient. II.  
Rezende, Alex Carlucci, co-orient. III. Título.

**Caio Augusto de Carvalho Pena**

**Global study of planar polynomial systems on the Poincaré  
disk**

Master dissertation submitted to the Instituto de  
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-  
USP, in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of the Master Program in Mathematics.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos  
Oliveira

Coadvisor: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

**USP – São Carlos  
November 2015**

*Para meus pais, minha esposa e filhos*



# Agradecimentos

---

Agradeço a Deus por me dar paciência e força para enfrentar os desafios da vida.

Agradeço a toda minha família. Em especial a minha mãe, por ter me ensinado a sempre perseverar e pelas diversas vezes que me estendeu a mão. Ao meu pai, por me ensinar a respeitar e a ser honesto.

A minha esposa Claudia que esteve junto comigo nos momentos mais difíceis da minha vida e lutou ao meu lado incansavelmente para, juntos, superar essa etapa. Aos meus filhos, Guilherme e Javier, por serem tão sorridentes.

Agradeço a professora Regilene, minha orientadora e ao Alex, meu coorientador pelo incentivo e principalmente pela paciência e respeito que sempre tiveram durante o meu mestrado.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram, em especial a Malu, ao Gabriel e a Thalita, que me ajudaram com palavras de incentivos e com churrascos periódicos. Agradeço a todos os professores e funcionários do ICMC.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.



*“Nada pode impedi-lo quando você estabelece um objetivo.  
Ninguém pode impedi-lo, a não ser você mesmo. Eu acredito nisso.”*

SIDNEY SHELDON



# Resumo

---

PENA, C. A. de C.. **Estudo global de sistemas polinomiais planares no disco de Poincaré**. 2015. 45 pp. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Dado um sistema diferencial no plano, muito se questiona sobre o comportamento de suas soluções. Nas vizinhanças dos pontos singulares existem ferramentas que nos indicam o tipo e a estabilidade estrutural de cada um deles; são as chamadas formas normais. No entanto, o interesse vai mais além do conhecimento local das soluções em cada singularidade. Nesse trabalho apresentamos algumas ferramentas clássicas da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias empregadas na investigação global dos campos de vetores polinomiais planares e as empregamos na investigação de duas famílias paramétricas de campos quadráticos encontradas no estudo dos campos com hipérbolos invariantes. Dentre as ferramentas estudadas destacamos a classificação local das soluções em pontos singulares elementares e semi-elementares e a técnica de compactificação de Poincaré.

**Palavras-chave:** sistemas diferenciais polinomiais planares; curvas algébricas invariantes; compactificação de Poincaré; classificação topológica local dos pontos singulares; retrato de fase global



# Abstract

---

PENA, C. A. de C.. **Estudo global de sistemas polinomiais planares no disco de Poincaré**. 2015. 45 pp. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Given a planar differential system, many questions are raised about the behavior of their solutions. In the neighborhood of singular points there exist many tools which indicate their type and their structural stability; they are known as normal forms. However, the interest goes beyond the local behavior in the neighborhood of each singularity. In this dissertation we present some classical tools from the qualitative theory of ordinary differential equations which are usually applied to the global investigation of planar polynomial vector fields and we apply them to the investigation of two parametric families of quadratic fields from the study of the vector fields with invariant hyperbolas. Among the studied tools we highlight the local classification of the solutions around elementary and semi-elementary singular points and the technique known as Poincaré's compactification.

**Key-words:** planar polynomial differential systems; invariant algebraic curves; Poincaré's compactification; local classification of singular points; global phase portraits



# Sumário

---

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>3</b>
1.1 Campos vetoriais e fluxos . . . . .	3
1.2 Equivalência topológica e conjugação topológica . . . . .	4
1.3 Reparametrização do tempo . . . . .	5
1.4 Retrato de fase . . . . .	6
1.5 Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	9
<b>2 Estrutura local em pontos singulares</b>	<b>13</b>
2.1 Equações lineares . . . . .	13
2.2 Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	16
2.3 Singularidades semi-hiperbólicas . . . . .	17
2.4 Singularidades nilpotentes . . . . .	20
2.5 Índice de uma singularidade . . . . .	22
<b>3 Compactificação de Poincaré</b>	<b>29</b>
3.1 Construção da compactificação de Poincaré . . . . .	29
3.1.1 Cartas locais na esfera $\mathbb{S}^2$ . . . . .	30
3.1.2 A expressão do campo de vetores compactificado $p(X)$ . . . . .	31
3.1.3 Pontos singulares infinitos . . . . .	32
3.2 Exemplos . . . . .	33
3.2.1 Exemplo I . . . . .	33
3.2.2 Exemplo II . . . . .	34
<b>4 Aplicações</b>	<b>37</b>
4.1 Exemplo I: sistema com um parâmetro e duas hipérbolas invariantes . . . . .	37
4.2 Exemplo II: sistema com dois parâmetros e uma hipérbole invariante . . . . .	40
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>



# Introdução

---

Em muitas áreas das ciências podemos encontrar as equações diferenciais ordinárias (EDOs), por exemplo na Astronomia, na Física e na Química, assim como nas Engenharias, Economia, Ecologia, Epidemiologia e Neurociência; todas elas fazem uso das equações diferenciais ordinárias para expressarem seus fenômenos ou para modelá-los. No entanto, durante algum tempo, a investigação das equações diferenciais ordinárias estiveram voltadas para a busca de soluções explícitas para tais equações diferenciais, porém esse estudo se tornou inviável, visto que muitas das soluções possuem expressões muito complicadas ou nem mesmo podem ser expressas por meio de funções elementares. Henry Poincaré, no final do século XVIII, propôs uma abordagem diferente para o problema. Esta abordagem qualitativa ou geométrica para a investigação das equações diferenciais ordinárias deu origem à teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias.

A teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias tem por objetivo a investigação de propriedades inerentes às soluções das equações que definem o problema sem se preocupar com as possíveis expressões que tais soluções venham a ter.

Um dos problemas pertencentes a essa teoria no plano é o de apresentar, para uma dada família de sistemas diferenciais, a classificação topológica global de seus retratos de fase. Esta dissertação tem por objetivo contribuir com esta investigação.

Iniciamos esta dissertação com a apresentação, no Capítulo 1, dos conceitos básicos das equações diferenciais ordinárias e alguns resultados fundamentais dessa teoria, como o Teorema do Fluxo Tubular, que nos possibilita conhecer o comportamento das soluções de uma EDO na vizinhança de um ponto regular, e o Teorema de Poincaré-Bendixson, que descreve o comportamento dos conjuntos limites de uma solução. Apresentamos ainda nesse capítulo inicial, os conceitos de equivalência topológica e conjugação topológica.

O Capítulo 2 foi dedicado ao estudo da estrutura local das soluções próximas aos pontos singulares. Iniciamos o capítulo com o estudo dos sistemas lineares planares, apresentamos o Teorema de Hartman-Grobman e a teoria do índice de uma singularidade.

Para estudar o comportamento global das soluções de um sistema de EDOs empregaremos a compactificação de Poincaré, técnica descrita no Capítulo 3. Dado um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano, a esta associamos um campo de vetores  $X$  e, por meio da compactificação de Poincaré, construímos o campo compactificado de  $X$  na esfera  $S^2$ , representada como a compactificação do plano euclidiano.

Utilizando a compactificação de Poincaré, no Capítulo 4, classificamos os retratos de fase de duas famílias paramétricas de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Ambas famílias são parte da investigação sobre os sistemas quadráticos com cônicas invariantes e foram propostas no trabalho de Oliveira, Rezende e Vulpe [8] sobre as possíveis configurações de um sistema quadrático planar com pelo menos uma hipérbole invariante.



# Pré-requisitos

Neste capítulo serão apresentados os resultados clássicos e particularmente importantes para o desenvolvimento da dissertação. Por fugir do objetivo principal do trabalho, muitos resultados são enunciados sem demonstração e, apesar de serem mais gerais, são apresentados aqui para sistemas planares, centro do nosso estudo.

## 1.1 Campos vetoriais e fluxos

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto. Um **campo vetorial de classe  $C^k$** ,  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ , em  $U$  é uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$ , onde  $C^\omega$  denota o conjunto das funções analíticas. Ao campo vetorial  $X$  associamos a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x). \tag{1.1}$$

Uma **solução** da equação diferencial (1.1) é, por definição, uma curva  $\varphi : I \rightarrow U$ , onde  $I$  representa um intervalo aberto da reta e  $\varphi$  satisfaz

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo  $t \in I$ . Esta curva recebe o nome de **curva integral** da equação (1.1).

Geometricamente, se  $\varphi : I \rightarrow U$  é solução de (1.1) então para cada  $t_0 \in I$ , o vetor tangente  $\varphi'(t_0)$  de  $\varphi$  em  $t_0$  coincide com o vetor do campo  $X$  no ponto  $\varphi(t_0)$ , conforme a Figura 1.1.

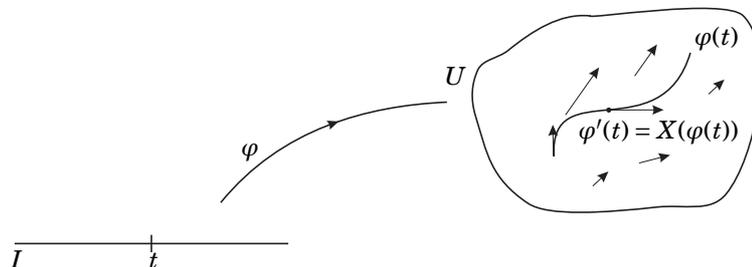


Figura 1.1: Uma curva integral

Dado  $x_0 \in U$ , se  $X(x_0) = 0$  dizemos que  $x_0$  é um **ponto singular (ou ponto crítico, ou singularidade)** da equação diferencial (1.1), caso contrário  $x_0$  é chamado de **ponto regular**.

Se  $x_0$  é uma singularidade então  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow U$  dada por  $\varphi(t) = x_0$  é solução de (1.1). De fato, temos que  $\varphi'(t) = 0 = X(x_0) = X(\varphi(t))$ . Vale observar que a recíproca é verdadeira, ou seja, se  $\varphi(t) = x_0$  é solução do sistema (1.1), então  $x_0$  é uma singularidade.

Uma solução  $\varphi$  é dita **solução maximal** de (1.1) se  $\varphi : I \rightarrow U$ , com  $\varphi(0) = x_0$  for solução de (1.1) e, além disso, se  $\psi : J \rightarrow U$  é solução de (1.1), com  $I \subset J$  e  $\psi|_I = \varphi$  então  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\psi = \varphi$ . Nesse caso, o intervalo aberto  $I$  recebe o nome de **intervalo maximal**.

Se  $\varphi : I_{x_0} \rightarrow U$  é solução maximal de (1.1), sua imagem  $\gamma_\varphi := \{\varphi(t); t \in I_{x_0}\}$  recebe o nome de **trajetória**, **órbita** ou **curva integral maximal**.

Os próximos resultados resumem as principais propriedades das soluções das equações diferenciais e suas demonstrações podem ser encontradas em [12].

**Teorema 1.1.1.** *Se  $X$  é um campo vetorial de classe  $C^k$ , com  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ , então:*

- (i) *(Existência e unicidade de soluções maximais) Para cada  $x_0 \in U$  existe um intervalo aberto  $I_0$  no qual uma única solução maximal  $\varphi_{x_0}$  de (1.1) está definida e satisfaz a condição  $\varphi_{x_0}(0) = x_0$ ;*
- (ii) *(Propriedade de fluxo) Se  $y = \varphi_{x_0}(t)$  com  $t \in I_{x_0}$ , então  $I_y = I_{x_0} - t = \{r - t : r \in I_{x_0}\}$  e  $\varphi_y(s) = \varphi_{x_0}(t + s)$  para cada  $s \in I_y$ ;*
- (iii) *(Continuidade com respeito à condição inicial) Seja  $\Omega = \{(t, x) : x \in U, t \in I_x\}$ . Então  $\Omega$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é uma aplicação  $C^k$ . Além disso,  $\varphi$  satisfaz*

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x),$$

para cada  $(t, x) \in \Omega$ , onde  $D_1$  representa a derivada com respeito ao tempo,  $D_2$  representa a derivada com respeito a  $x$ , e  $DX$  é a parte linear do campo de vetores.

**Definição 1.1.2.** *A função  $\varphi$  em (iii) é chamada de **fluxo** gerado pelo campo de vetores  $X$ .*

**Corolário 1.1.3.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$  definido em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $x \in U$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  é tal que  $\omega_+(x) < \infty$  então  $\varphi_x(t)$  tende a  $\partial U$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$ , isto é, para todo compacto  $K \subset U$  existe  $\epsilon = \epsilon(K) > 0$  tal que se  $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x))$  então  $\varphi_x(t) \notin K$ . Resultado análogo vale para  $\omega_-(x)$ .*

**Proposição 1.1.4.** *Se  $U = \mathbb{R}^2$  e  $|X(x)| < c$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , então  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .*

## 1.2 Equivalência topológica e conjugação topológica

É comum em matemática buscarmos formas de comparar dois objetos dentro de uma determinada teoria. O objetivo, quando comparamos tais objetos, é o de relacionar o comportamento dos elementos centrais dessa teoria. Em equações diferenciais temos como objetos os sistemas de equações e como elementos centrais suas soluções ou órbitas. Nosso objetivo agora é buscar mecanismos que nos permitam encontrar a relação existente, num certo sentido, entre as soluções de um sistema de equações. Para isso definimos duas relações no conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis no plano.

Denote por  $\mathcal{X}^k(U, \mathbb{R}^2)$  o conjunto de todos os campos de vetores de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $\omega$ , definidos no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.2.1** (Equivalência topológica). *Dados dois campos  $X_1 \in \mathcal{X}^k(U_1, \mathbb{R}^2)$  e  $X_2 \in \mathcal{X}^k(U_2, \mathbb{R}^2)$ , dizemos que  $X_1$  é topologicamente equivalente (respectivamente  $C^k$ -equivalente) a  $X_2$  se existir um homeomorfismo (respectivamente um  $C^k$ -difeomorfismo)  $h : U_1 \rightarrow U_2$  que leva órbitas de  $X_1$  em órbitas de  $X_2$  mantendo a orientação, ou seja, se  $p \in U_1$  e  $\gamma_p^1$  é uma órbita orientada de  $X_1$ , então  $h(\gamma_p^1)$  é órbita orientada de*

$X_2$  passando por  $h(p)$ . A aplicação  $h$  que satisfaz tal condição é chamada de **equivalência topológica** (respectivamente  $C^k$ -equivalência topológica) entre  $X_1$  e  $X_2$ . Diremos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente equivalentes.

**Definição 1.2.2** (Conjugação topológica). Sejam  $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fluxos gerados por  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente conjugados (respectivamente  $C^k$ -conjugados) se existir  $h : U_1 \rightarrow U_2$  homeomorfismo (respectivamente  $C^k$ -difeomorfismo) tal que  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$  para cada  $(t, x) \in \Omega_1$ . O homeomorfismo (respectivamente  $C^k$ -difeomorfismo)  $h$  recebe o nome de **conjugação topológica** (respectivamente  $C^k$ -conjugação topológica).

**Proposição 1.2.3.** Sobre conjugação e equivalência topológicas, temos:

- (i) Toda conjugação topológica é uma equivalência topológica;
- (ii) Equivalência topológica e conjugação topológica são relações de equivalência;
- (iii) Sejam  $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campos de vetores de classe  $C^k$  e  $h : U_1 \rightarrow U_2$  um difeomorfismo de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ . Então  $h$  será uma conjugação topológica entre  $X_1$  e  $X_2$  se, e somente se,

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)), \text{ para cada } p \in U_1. \quad (1.2)$$

**Observação 1.2.4.** Usaremos os conceitos de equivalência topológica e conjugação topológica também para sistemas de equações. Diremos que dois sistemas de equações são topologicamente equivalentes (conjugados) quando os campos associados a eles forem topologicamente equivalentes (conjugados).

## 1.3 Reparametrização do tempo

Nesta seção apresentaremos o conceito de reparametrização do tempo em um sistema diferencial. Tal reparametrização funciona como uma equivalência topológica entre tais sistemas e é muitas vezes empregada por permitir obter um novo sistema que seja mais fácil de analisar do que o original.

**Definição 1.3.1.** Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita de classe  $C^1$ , ou apenas  $c^1$  se  $f$  for contínua e sua derivada também for contínua.

Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função  $C^1$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$  e **positiva**, ou seja,  $g(x) > 0$  para todo  $x$  em  $U$ . Considere as equações diferenciais

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{e} \quad \dot{x} = g(x)f(x). \quad (1.3)$$

Existe alguma relação entre os sistemas de equações dados em (1.3)? O próximo resultado nos mostra que ambos sistemas são topologicamente equivalentes.

**Proposição 1.3.2** (Reparametrização do tempo). Se  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto contendo a origem e  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma solução da primeira equação diferencial de (1.3) com  $\gamma(0) = x_0 \in U$ , então a função  $B : J \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$B(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\gamma(s))} ds,$$

é inversível sobre sua imagem  $K \subset \mathbb{R}$ . Se  $\rho : K \rightarrow J$  é a inversa de  $B$ , então a igualdade

$$\rho'(s) = g(\gamma(\rho(s))),$$

é válida para todo  $s \in K$ , e a função  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma(s) = \gamma(\rho(s))$  é solução da segunda equação diferencial de (1.3) com condição inicial  $\sigma(0) = x_0$ .

*Demonstração.* Como o quociente de duas funções contínuas é uma função contínua, exceto no conjunto dos zeros da função no denominador, segue que a função  $s \mapsto 1/g(\gamma(s))$  é contínua em  $J$ . Assim,  $B$  está definida em  $J$  e sua derivada é dada por

$$B'(t) = \left( \int_0^t \frac{1}{g(\gamma(s))} ds \right)' = \frac{1}{g(\gamma(t))} \neq 0, \text{ para todo } t \in J.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa,  $B$  é inversível sobre sua imagem  $K \subset \mathbb{R}$ . Seja  $\rho$  sua inversa, para cada  $s \in K$  temos

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \frac{1}{B'(\rho(s))} = g(\gamma(\rho(s))), \\ \sigma'(s) &= \gamma(\rho(s))' = \gamma'(\rho(s))\rho'(s) \\ &= f(\gamma(\rho(s)))g(\gamma(\rho(s))) = f(\sigma(s))g(\sigma(s)). \end{aligned}$$

Portanto,  $\sigma$  é solução do segundo sistema em (1.3) e  $\sigma(0) = \gamma(\rho(0)) = \gamma(0) = x_0$ , pois  $B(0) = 0$  implica  $\rho(0) = 0$ .  $\square$

Pela Proposição 1.3.2, conclui-se que o retrato de fase dos sistemas em (1.3) são topologicamente equivalentes, já que todas as órbitas o são.

A reparametrização de um sistema de equações diferenciais pode ser empregada para simplificar a expressão de um sistema relativamente complicado (veja o Exemplo 1.3.3). Vale ressaltar que no estudo qualitativo das equações diferenciais não estamos buscando as expressões explícitas de uma ou mais soluções de uma equação.

**Exemplo 1.3.3.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = -1 + \frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = \frac{-kx}{x^2 + y^2}, \quad (1.4)$$

onde  $k \neq 0$ , que está presente em [7]. Esse sistema não está definido para  $x = y = 0$ . Afirmamos que o sistema (1.4) pode ser reescrito de uma forma mais simples.

De fato, note que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , assume valores positivos em  $\mathbb{R}^2$  e é  $C^\infty$ . Logo, pela Proposição 1.3.2, temos que o sistema

$$\dot{x} = -x^2 - y^2 + ky, \quad \dot{y} = -kx, \quad (1.5)$$

é topologicamente equivalente ao sistema (1.4). No Capítulo 3 apresentamos o estudo completo deste sistema.

## 1.4 Retrato de fase

Dado  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores, chamamos de **retrato de fase** de  $X$  à decomposição de  $U$  em órbitas de  $X$ . Para representar o retrato de fase de um sistema de equações, desenhamos um conjunto de órbitas *significativas* em  $U$  e em cada órbita colocamos uma flecha que indica o sentido de  $\gamma_p$  em  $U$  à medida que  $t$  cresce.

A fim de esboçar o retrato de fase de um sistema, quanto mais informações soubermos sobre o campo de vetores associado, mais preciso será o retrato de fase desse campo.

O próximo resultado caracteriza o comportamento das soluções maximais de um campo de vetores  $C^r$ .

**Teorema 1.4.1.** Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma solução maximal do sistema associado ao campo de vetores  $X$ , de classe  $C^r$ , então vale uma das seguintes afirmações:

- (i)  $\varphi$  é uma bijeção sobre sua imagem.
- (ii)  $I = \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  é uma função constante, e  $\gamma_\varphi$  é um ponto.
- (iii)  $I = \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  é uma função periódica de período mínimo  $\tau$  (isto é, existe um valor  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ ).

A demonstração do Teorema 1.4.1 pode ser encontrada em [4], p. 4-5.

Agora vamos entender como é o comportamento local dos pontos regulares, ou seja, dos pontos  $x \in U$  tal que  $X(x) \neq 0$ . O Teorema 1.4.2, conhecido como **Teorema do Fluxo Tubular** nos dará tal informação.

Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^k$  em  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $A \subset \mathbb{R}$  subconjuntos abertos. Uma aplicação  $f : A \rightarrow U$  de classe  $C^k$  é chamada **seção transversal local** de  $X$  quando para cada  $a \in A$ ,  $f'(a)$  e  $X(f(a))$  forem linearmente independentes. Seja  $\Sigma = f(A)$  com a topologia induzida. Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo (isto é,  $f$  é um mergulho) dizemos que  $\Sigma$  é uma **seção transversal** de  $X$ .

**Teorema 1.4.2** (Fluxo Tubular). *Seja  $p$  um ponto regular do campo de vetores  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$ , com  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ , e seja  $f : A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal de  $X$  de classe  $C^k$  com  $f(0) = p$ . Então, existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e um difeomorfismo  $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  de classe  $C^k$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $B$  é um intervalo aberto com centro na origem tal que*

- (i)  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;
- (ii)  $h$  é uma  $C^k$ -conjugação entre  $X|_V$  e o campo de vetores constante  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $Y = (1, 0)$ . Veja a Figura 1.2.

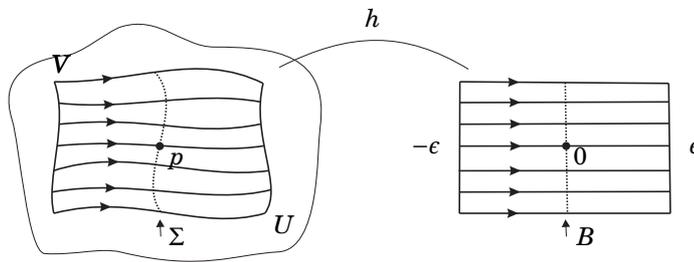


Figura 1.2: Teorema do Fluxo Tubular

*Demonstração.* Seja  $\varphi : \Omega \rightarrow U$  o fluxo de  $X$ . Seja  $F : \Omega_A = \{(t, u) : (t, f(u)) \in \Omega\} \rightarrow U$  definida como  $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$ , tal que  $F$  aplica linhas paralelas em curvas integrais de  $X$ . Provaremos que  $F$  é um difeomorfismo local em  $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pelo Teorema da Função Inversa é suficiente mostrar que  $DF(0)$  é um isomorfismo. Temos que

$$D_1F(0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(0))|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p),$$

e  $D_2F(0) = D_1f(0)$  porque  $\varphi(0, f(u)) = f(u)$  para todo  $u \in A$ . Assim, os vetores  $D_1F(0)$  e  $D_2F(0)$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}^2$  e  $DF(0)$  é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa, existem  $\epsilon > 0$  e uma vizinhança  $B$  em  $\mathbb{R}$  em torno da origem tal que  $F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$  é um difeomorfismo sobre o conjunto aberto  $V = F((-\epsilon, \epsilon) \times B)$ . Seja  $h = (F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$ . Então,

$h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ , uma vez que  $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$  para todo  $u \in B$ , o que prova (i). Por outro lado,  $h^{-1}$  conjuga  $Y = (1, 0)$  e  $X$ :

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u)Y(t, u) &= DF(t, u)(1, 0) = D_1F(t, u) = X(\varphi(t, f(u))) \\ &= X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

para cada  $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$ . □

O Teorema 1.4.2 nos diz que localmente, o comportamento do campo de vetores numa vizinhança de um ponto regular é semelhante ao de retas paralelas.

**Corolário 1.4.3.** *Se  $\gamma$  é uma solução maximal de um sistema diferencial associado a um campo de vetores  $X$  de classe  $C^r$  e  $\gamma$  não é um ponto singular, então  $\gamma$  é  $C^r$  difeomorfo a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^1$ .*

Uma classe de sistemas diferenciais amplamente discutida e estudada é a família dos sistemas diferenciais polinomiais no plano. Dirigimos, agora, nossa atenção a essa classe.

Um campo vetorial planar  $X$  é dito **polinomial** se  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , com  $P$  e  $Q$  polinômios.

Ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{1.6}$$

chamamos de **sistema diferencial polinomial**.

Outro elemento que nos ajuda no esboço do retrato de fase de um sistema (1.6) são as curvas algébricas invariantes em relação ao fluxo.

**Definição 1.4.4.** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  não identicamente nula. A curva algébrica  $f(x, y) = 0$  é uma **curva algébrica invariante** do sistema (1.6) se para algum  $K \in \mathbb{C}[x, y]$*

$$Xf = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{1.7}$$

O polinômio  $K$  é chamado de cofator da curva algébrica  $f = 0$ .

Em outras palavras, a Definição 1.4.4 diz que se  $\gamma$  é uma curva algébrica invariante de (1.6) e se  $\varphi$  é uma solução de (1.6) com  $\varphi(0) = p_0 \in \gamma$ , então  $\varphi \subset \gamma$ , isto é, toda órbita que começa em um ponto de uma curva algébrica invariante permanece nela para todo tempo.

**Observação 1.4.5.** *Observamos que escrever  $\varphi \subset \gamma$  é um abuso de notação, já que  $\varphi$  não representa um conjunto e sim uma função. Implicitamente estamos dizendo que  $\varphi(t) \in \gamma$  para todo  $t \in I$ .*

**Definição 1.4.6.** *Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que uma função não constante  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **integral primeira** do sistema (1.6) sobre  $U$  se  $H(x(t), y(t))$  é constante ao longo das soluções  $(x(t), y(t))$  de (1.6) contidas em  $U$ , ou seja, toda trajetória de  $X$ , contida em  $U$  pertence a uma curva de nível de  $H$ .*

Em outras palavras, dizer que  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $H$  e  $U$  como na Definição 1.4.6, é uma integral primeira do sistema (1.6) é equivalente a

$$XH = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

**Exemplo 1.4.7.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = -\frac{a}{2} - \frac{3}{4}xy, \quad \dot{y} = -a - xy + \frac{y^2}{4}. \tag{1.8}$$

O sistema (1.8) aparece na investigação dos sistemas quadráticos com hipérbolas invariantes presentes em [8]. Tal sistema possui duas hipérbolas invariantes:

$$f_1(x, y) = a + xy = 0 \quad e \quad f_2(x, y) = a - x^2 + xy = 0,$$

cujos cofatores são  $K_1(x, y) = -x - y/2$  e  $K_2(x, y) = -y/2$ , respectivamente.

**Observação 1.4.8.** Recordamos que uma hipérbole é uma curva planar cujos pontos satisfazem a seguinte propriedade: o módulo da diferença entre as distâncias de qualquer ponto da hipérbole a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles.

De acordo com este conceito, hipérbole é uma cônica irredutível e, a menos de uma mudança de coordenadas lineares ou uma rotação, ela pode ser escrita de uma das seguintes formas, com  $a \neq 0$ :

(i)  $a + bx + cy + 2xy = 0$ ;

(ii)  $a + bx + cy + 2x(x - y) = 0$ ; e

(iii)  $a + bx + dy + 2y(x - y) = 0$ .

## 1.5 Teorema de Poincaré-Bendixson

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^k$ , com  $1 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ . Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p) = \varphi_p(t)$  uma curva integral de  $X$  passando pelo ponto  $p$  e definida no intervalo maximal  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$ , definimos

$$\omega(p) = \{q \in U : \text{existe } \{t_n\}, \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Da mesma forma, se  $\omega_-(p) = -\infty$  definimos

$$\alpha(p) = \{q \in U : \text{existe } \{t_n\}, \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados de  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite de  $p$ , respectivamente.

**Exemplo 1.5.1.** Seja  $\gamma$  uma órbita periódica associada à curva integral  $\varphi$ . Neste caso,  $\omega(p) = \alpha(p) = \gamma$ , para todo  $p \in \gamma$ . De fato, sejam  $\tau$  o período de  $\gamma$  e  $p$  um ponto em  $\gamma$ . Considere as sequências  $t_0 \pm n\tau$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $\varphi(t_0) = p$ . Temos que  $\varphi(t_0 \pm n\tau) = p$ , para todo  $n$ . Assim,  $\gamma \subset \omega(p)$ . Seja  $q \in \omega(p)$  tal que  $q \notin \gamma$ . Sendo  $\{q\}$  um conjunto fechado e  $\gamma$  compacto, a distância entre eles será positiva, impossibilitando que exista a convergência de pontos de  $\gamma$  para  $q$ , portanto  $\omega(p) \subset \gamma$ . De forma análoga mostramos que  $\alpha(p) = \gamma$ .

O próximo teorema resume as principais propriedades sobre os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite. Sua demonstração pode ser encontrada em [12].

**Teorema 1.5.2.** Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de vetores de classe  $C^k$  definido no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$  (respectivamente  $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p) : t \leq 0\}$ ) a semi-órbita positiva (respectivamente, semi-órbita negativa) do campo de vetores  $X$  pelo ponto  $p$ . Se  $\gamma^+(p)$  (respectivamente  $\gamma^-(p)$ ) está contida em um subconjunto compacto  $K \subset U$ , então

(i)  $\omega(p) \neq \emptyset$  (respectivamente  $\alpha(p)$ );

(ii)  $\omega(p)$  é compacto (respectivamente  $\alpha(p)$ );

- (iii)  $\omega(p)$  é invariante por  $X$  (respectivamente  $\alpha(p)$ ), isto é, se  $q \in \omega(p)$ , então uma curva integral passando por  $q$  está contida em  $\omega(p)$ ;
- (iv)  $\omega(p)$  é conexo (respectivamente  $\alpha(p)$ );
- (v) Se  $\omega(\gamma) \subset \gamma$  (respectivamente  $\alpha(\gamma) \subset \gamma$ ), então  $\omega(\gamma) = \gamma$ , e  $\gamma$  será ou uma órbita periódica ou um ponto singular.

*Demonstração.* (i)  $\omega(p) \neq \emptyset$ . Considere uma sequência  $t_n$ , com  $t_n \rightarrow \infty$ , e  $n \in \mathbb{N}$ . Por hipótese temos que  $\{\varphi(t_n)\} \subset K$ . Como  $K$  é compacto existe uma subsequência  $\varphi(t_{n_k})$  que converge para um ponto  $q \in K$ . Por definição,  $q \in \omega$ .

- (ii)  $\omega(p)$  é **compacto**. Temos que  $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$ , logo  $\omega(p)$  é limitado. Basta mostrar que  $\omega(p)$  é fechado. Considere  $q_n \rightarrow q$ , com  $q_n \in \omega(p)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Provaremos que  $q \in \omega(p)$ . Como  $q_n \in \omega(p)$ , existe para cada  $q_n$  uma sequência  $\{t_m^{(n)}\}$  tal que  $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Para cada sequência  $\{t_m^{(n)}\}$  nós escolhemos um ponto  $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$  tal que  $d(\varphi(t_n, p), q_n) < 1/n$ . Então, temos que

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) < 1/n + d(q_n, q).$$

Portanto, segue que  $d(\varphi(t_n, p), q_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ . Como  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $q \in \omega(p)$ .

- (iii)  $\omega(p)$  é **invariante sobre  $X$** . Seja  $q \in \omega(p)$  e seja  $\psi: I(q) \rightarrow U$  uma curva integral de  $X$  passando pelo ponto  $q$ . Seja  $q_1 = \varphi(t_0, q) = \psi(t_0)$ . Provaremos que  $q_1 \in \omega(p)$ . Como  $q \in \omega(p)$ , existe uma sequência  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\varphi$  é contínua, segue que

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim \varphi(t_n, p)) \\ &= \lim \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) = \lim \varphi(t_0 + t_n, p). \end{aligned}$$

Temos que a sequência  $\{s_n\} = \{t_0 + t_n\}$  é tal que  $s_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(s_n, p) \rightarrow q_1$  quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,  $q_1 \in \omega(p)$ .

- (iv)  $\omega(p)$  é **conexo**. Suponha que  $\omega(p)$  não seja conexo. Então  $\omega(p) = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são fechados, não vazios e  $A \cap B \neq \emptyset$ . Como  $A \neq \emptyset$ , existe uma subsequência  $\{t'_n\}$  tal que  $t'_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t'_n) \rightarrow a \in A$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, como  $B \neq \emptyset$ , existe  $\{t''_n\}$  tal que  $t''_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t''_n) \rightarrow b \in B$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Podemos construir uma sequência  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e tal que  $d(\varphi(t_n), A) < d/2$  e  $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$  para cada  $n$  ímpar. Como a função  $g(t) = d(\varphi(t), A)$ , para  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  para todo  $n$  ímpar, é contínua, e  $g(t_n) < d/2$  e  $g(t_{n+1}) > d/2$ , segue (pelo Teorema do Valor Intermediário) que existe  $\{t_n^*\}$ , com  $t_n < t_n^* < t_{n+1}$  tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*)) = \frac{d}{2}.$$

Como a sequência  $\{\varphi(t_n^*)\}$  está contida no conjunto compacto  $\mathcal{Q} = \{x \in U; d(x, A) = 1/2\}$ , possui uma subsequência convergente, que a denotamos por  $\{\varphi(t_n^{**})\}$ . Seja  $p^* = \lim \varphi(t_n^{**})$ . Então,  $p^* \in \omega(p)$ . Mas  $p^* \notin A$ , pois  $d(p^*, A) = d/2 > 0$  e  $p^* \notin B$ , pois  $d(p^*, B) \geq d(A, B) - d(p^*, A) = d/2$ , o que nos leva a uma contradição.

- (v) **Se**  $\omega(\gamma) \subset \gamma$  **então**  $\omega(\gamma) = \gamma$ . Seja  $q \in \gamma$ , temos que  $\omega(q) \subset \omega(\gamma) \subset \gamma$  e por (ii) temos que  $\gamma \subset \omega(q)$ , logo  $q \in \omega(\gamma)$ , o que prova (v). □

O próximo teorema, conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson, caracteriza os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite de um ponto  $p$  para campos de vetores definidos em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.5.3.** *Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  uma curva integral de  $X$  definida para todo  $t \geq 0$ , tal que  $\gamma_p^+$  está contida em um compacto  $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$ . Assuma que o campo de vetores  $X$  tenha um número finito de singularidades em  $K$ . Então, vale uma das seguintes afirmações:*

- (i) *Se  $\omega(p)$  contém apenas pontos regulares de  $X$ , então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica de  $X$ ;*
- (ii) *Se  $\omega(p)$  contém ambos pontos regulares e singularidades de  $X$ , então  $\omega(p)$  é formado por um conjunto de órbitas regulares de  $X$  e de singularidades tal que cada uma das órbitas tende a uma singularidade de  $\omega(p)$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ;*
- (iii) *Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares de  $X$ , então  $\omega(p)$  é uma única singularidade de  $X$ .*

Também obtemos resultados análogos aos do Teorema 1.5.3 para  $\alpha(p)$  se supusermos que  $\gamma_p^-$  está contida em um compacto  $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$ .

Para a demonstração do Teorema 1.5.3 faremos uso de quatro lemas.

**Lema 1.5.4.** *Se  $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ , sendo  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  e  $\gamma = \{\varphi(t)\}$  uma órbita de  $X$ , então  $p$  pode ser expresso como limite de uma sequência de pontos,  $\varphi(t_n)$ , de  $\Sigma$ , onde  $t_n \rightarrow \infty$ .*

**Lema 1.5.5.** *Seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  contida em  $\Delta$ . Se  $\gamma$  é uma órbita de  $X$  e  $p \in \Sigma \cap \gamma$ , então  $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t > 0\}$  intercepta  $\Sigma$  numa sequência monótona  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$*

**Lema 1.5.6.** *Se  $\Sigma$  é uma seção transversal ao campo  $X$  e  $p \in \Delta$ , então  $\Sigma$  intercepta  $\omega(p)$  no máximo em um ponto.*

**Lema 1.5.7.** *Sejam  $p \in \Delta$ , com  $\gamma^+$  contida num compacto, e  $\gamma$  uma órbita de  $X$  com  $\gamma \subset \omega(p)$ . Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares então  $\gamma$  é uma órbita fechada e  $\omega(p) = \gamma$*

*Demonstração do Teorema 1.5.3.* Seja  $q \in \omega(p)$  um ponto regular de  $X$ . Assim,  $\gamma_q \subset \omega(p)$ . Uma vez que  $\omega(p)$  é compacto, temos que  $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$ . Segue imediatamente do Lema 1.5.7 que  $\omega(p) = \gamma_q$  é uma órbita periódica, o que prova o item (i). Ver Figura 1.3.

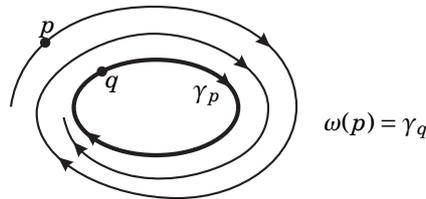


Figura 1.3: Caso (i) do Teorema 1.5.3

Sob as hipóteses do item (ii), seja  $\gamma$  uma órbita regular contida em  $\omega(p)$ . Então, pelo Lema 1.5.7 e por  $\alpha(\gamma)$  e  $\omega(\gamma)$  serem ambos conexos, segue que  $\alpha(\gamma)$  e  $\omega(\gamma)$  são ambos pontos singulares do campo  $X$ . Note que  $X$  tem apenas um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ . Ver Figura 1.4.

Assumindo que  $\omega(p)$  não contém pontos regulares de  $X$ , temos que, como  $\omega(p)$  é conexo e  $X$  tem apenas um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ , então  $\omega(p)$  é um único ponto, que é uma singularidade de  $X$ . Ver Figura 1.5.  $\square$

Pelo Teorema da Curva de Jordan, uma curva fechada simples  $\gamma$  (isto é,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , injetiva) divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada. Chamaremos de interior de  $\gamma$  e denotaremos por  $Int(\gamma)$  a componente conexa limitada por  $\gamma$ .

Uma importante aplicação do Teorema 1.5.3 é o Teorema 1.5.8 a seguir. Esse resultado nos diz que no interior de uma órbita periódica de  $X$ , sempre haverá uma singularidade do campo.

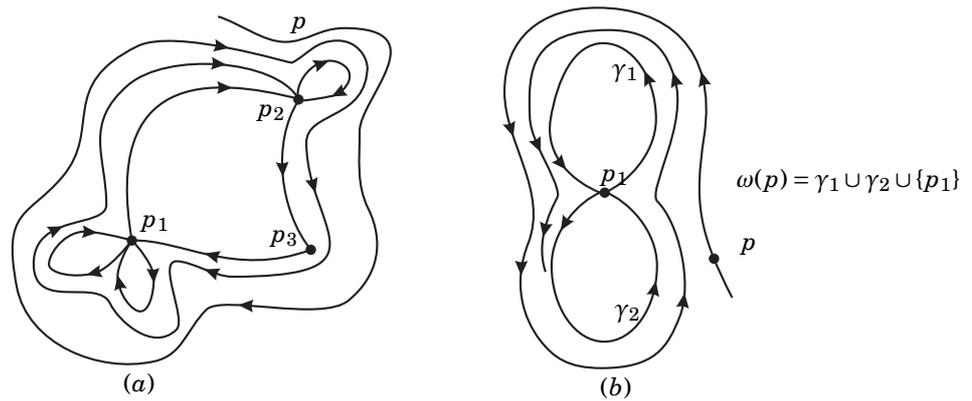


Figura 1.4: Caso (ii) do Teorema 1.5.3

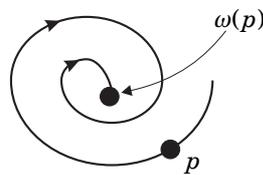


Figura 1.5: Caso (iii) do Teorema 1.5.3

**Teorema 1.5.8.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$  definido em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\gamma$  é uma órbita fechada de  $X$  tal que  $\text{Int}(\gamma) \subset U$  então existe uma singularidade de  $X$  contida em  $\text{Int}(\gamma)$ .*

As demonstrações dos Teoremas 1.5.3 e 1.5.8 podem ser encontradas em [4].

# Estrutura local em pontos singulares

No Capítulo 1 apresentamos o Teorema do Fluxo Tubular, que descreve o comportamento local das soluções de um sistema de equações diferenciais numa vizinhança de um ponto regular do sistema diferencial. Um trabalho mais complexo está em caracterizar o comportamento das soluções numa vizinhança de um ponto singular. Neste capítulo apresentamos resultados que caracterizam localmente as soluções de um sistema de equações diferenciais de acordo com o tipo topológico do ponto singular. Destacamos o Teorema de Hartman-Grobman, que descreve o comportamento das soluções próximas a singularidades hiperbólicas. Esse teorema nos motivou a estudar os sistemas lineares planares.

## 2.1 Equações lineares

Os sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes têm seu comportamento bem conhecido. É possível inclusive encontrar as expressões das soluções de sistemas lineares analisando somente a matriz associada ao sistema.

Considere o sistema linear planar dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Também podemos escrever o sistema (2.1) como  $\dot{x} = Ax$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e dizemos que a matriz  $A$  é a matriz associada ao sistema (2.1).

**Exemplo 2.1.1.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \tag{2.2}$$

*cuja matriz associada ao sistema é a matriz identidade. Utilizando a notação matricial, podemos reescrever esse sistema como*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O fluxo de (2.2) é dado por

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, y)) &\mapsto (xe^t, ye^t).\end{aligned}$$

Antes de prosseguir com a discussão sobre sistemas lineares, vamos fixar a notação que empregaremos neste capítulo. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Denotamos por  $\delta = \det A$  e  $\rho = \text{tr} A$  o determinante e o traço da matriz  $A$ , respectivamente. Além disso, utilizamos, como é comum na literatura, a letra  $I$  para representar a matriz identidade de ordem dois.

Todos os detalhes sobre o estudo de sistemas lineares podem ser encontrados em [3] e [12].

Suponha que  $\delta \neq 0$  (esta condição nos diz que os autovalores são ambos não nulos) e seja

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr} A \lambda + \det A \lambda,$$

conhecido como polinômio característico associado ao sistema (2.1). Temos três possíveis conjuntos soluções para a equação  $p(\lambda) = 0$ :

- (i) Duas raízes reais e distintas:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Neste caso podemos encontrar uma base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  do plano de forma que a matriz  $A$  nesta base seja dada por

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

O fluxo do sistema associado à matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  é

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, y)) &\mapsto (xe^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t}),\end{aligned}$$

e os possíveis retratos de fase para o caso (i) são dados pela Figura 2.1.

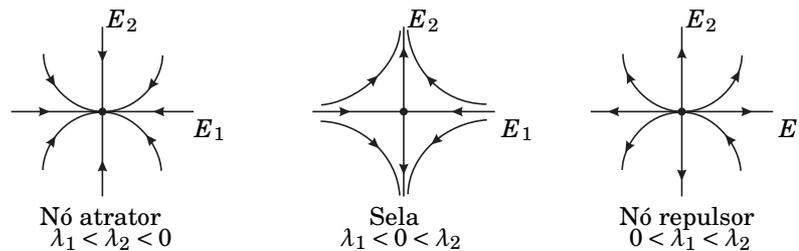


Figura 2.1: Possíveis retratos de fase para o caso (i)

- (ii) Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , temos os casos:

(ii.a) Se a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é 2, podemos encontrar uma base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  do plano de forma que a matriz  $A$  nesta base seja dada por

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

O fluxo do sistema associado à matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  neste caso tem a mesma expressão encontrada no item (i).

(ii.b) Se a multiplicidade geométrica é 1, podemos encontrar uma base  $\mathcal{B}$  do plano, formada por autovetores generalizados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  obtidos da seguinte forma:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad \text{e} \quad A\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{v}, \quad \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ sendo linearmente independente.}$$

A matriz  $A$  nessa nova base é

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

e neste caso, o fluxo do sistema associado á matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  é dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, y)) &\mapsto ((x + yt)e^{\lambda t}, ye^{\lambda t}). \end{aligned}$$

Os possíveis retratos de fase para o caso (ii) são mostrados na Figura 2.2.

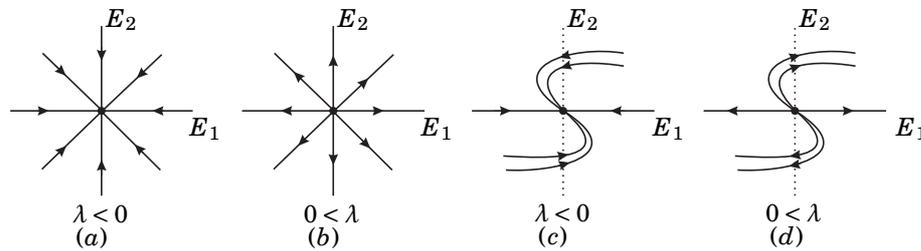


Figura 2.2: Os retratos de fase (a) e (b) dizem respeito ao caso (ii.a) e os retratos de fase (c) e (d) dizem respeito ao caso (ii.b)

(iii) As raízes são complexas e conjugadas:  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ . Neste caso, podemos encontrar uma base  $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  tal que  $A(\vec{u} - i\vec{v}) = (\alpha + \beta i)(\vec{u} - i\vec{v})$ . A matriz  $A$  nessa nova base é

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

O fluxo do sistema associado a matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  neste caso é dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, y)) &\mapsto e^{\alpha t}(x \cos \beta t - y \sin \beta t, y \cos \beta t + x \sin \beta t) \end{aligned}$$

e os possíveis retratos de fase para o caso (iii) são dados na Figura 2.3.

Da Álgebra Linear sabemos que, dada uma matriz  $A$  de ordem dois qualquer, podemos encontrar uma matriz  $P$  dada pelos autovetores associados a  $A$  tal que  $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$ , onde  $[A]_{\mathcal{B}} = J$  é a forma canônica de Jordan para a matriz  $A$ . A matriz  $J$  tem uma das formas apresentadas nos itens (i), (ii) e (iii).

**Definição 2.1.2.** *Sejam  $x \mapsto Ax$  e  $x \mapsto Bx$  campos de vetores lineares em  $\mathbb{R}^2$ . Estes campos, seus respectivos fluxos  $\varphi$  e  $\psi$  ou seus sistemas de equações lineares associados são ditos **conjugados** se existe uma bijeção  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  chamada de **conjugação** tal que para todo  $t \in \mathbb{R}$  tem-se*

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Se  $h$  é, respectivamente, um isomorfismo linear, um  $C^k$ -difeomorfismo e um homeomorfismo, dizemos que os

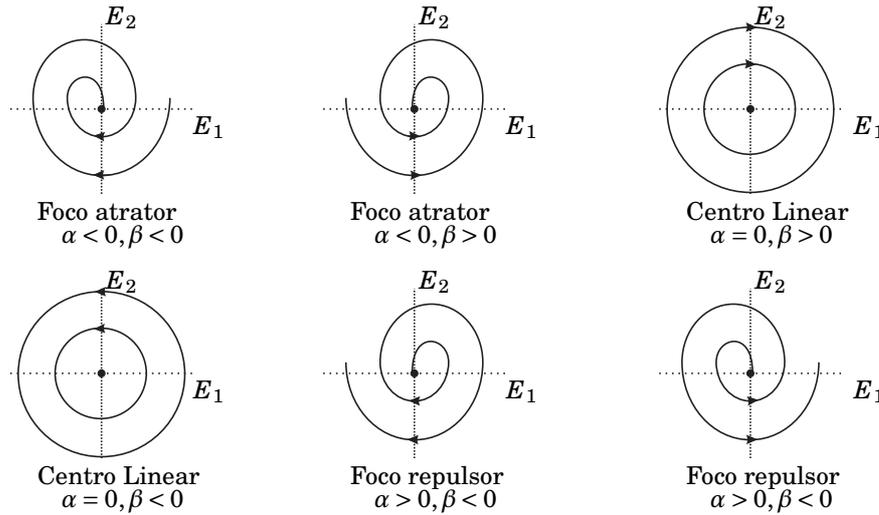


Figura 2.3: Os retratos fase para o caso (iii)

sistemas são **linearmente conjugados**,  $C^k$ -**diferencialmente conjugados** e **topologicamente conjugados**.

**Proposição 2.1.3.** A transformação linear  $h : x \mapsto Cx$  é uma conjugação linear entre  $x \mapsto Ax$  e  $x \mapsto Bx$  se, e somente se, a matriz  $C$  satisfaz  $CA = BC$ .

A Proposição 2.1.3 nos diz que uma matriz qualquer e sua forma canônica de Jordan são linearmente equivalentes. Como fizemos um estudo das possíveis formas que a matriz de Jordan de uma matriz de ordem dois pode ter, apresentando seus fluxos e retratos de fase, o estudo para os sistemas lineares com coeficientes constantes está completo.

**Exemplo 2.1.4.** Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

que tem uma única singularidade na origem. Os autovalores associados à matriz do sistema são  $\lambda_1 = 5$  e  $\lambda_2 = -1$ . Assim, o sistema (2.3) é linearmente equivalente ao sistema que tem a matriz associada

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, de acordo com a classificação feita acima, a origem é um ponto de sela e seu retrato de fase é topologicamente equivalente ao retrato de fase na Figura 2.1(sela).

## 2.2 Teorema de Hartman-Grobman

Seja  $p$  uma singularidade de  $X = (P, Q)$ , onde  $X$  é um campo vetorial planar de classe  $C^k$ . Dizemos que

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix},$$

é a *parte linear* do campo de vetores  $X$  na singularidade  $p$ .

**Definição 2.2.1.** *Sejam  $X$  um campo de vetores e  $p$  uma singularidade de  $X$ . Dizemos que:*

- (i)  $p$  é uma singularidade **não-degenerada** se  $DX(p)$  não possui autovalor nulo;
- (ii)  $p$  é uma singularidade **hiperbólica** se os autovalores de  $DX(p)$  possuem parte real diferente de zero;
- (iii)  $p$  é uma singularidade **semi-hiperbólica** se exatamente um autovalor de  $DX(p)$  é igual a zero;
- (iv)  $p$  é uma singularidade **nilpotente** se ambos os autovalores de  $DX(p)$  são nulos, mas  $DX(p) \neq 0$ ;
- (v)  $p$  é uma singularidade **linearmente zero** se  $DX(p) \equiv 0$ ;
- (vi)  $p$  é chamada de **centro**, se existe uma vizinhança de  $p$  contendo apenas órbitas periódicas, exceto pelo ponto  $p$ . A singularidade do tipo centro é dita ser um **centro linear** se os autovalores de  $DX(p)$  são autovalores imaginários puros.

As singularidades hiperbólicas e semi-hiperbólicas também são chamadas de **singularidades elementares** e **semi-elementares**, respectivamente.

O próximo teorema nos diz qual é a estrutura local das singularidades hiperbólicas. A demonstração do Teorema 2.2.2 pode ser encontrada em [3].

**Teorema 2.2.2** (Hartman-Grobman). *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^k$  e  $p$  uma singularidade hiperbólica. Então, existem vizinhanças  $W$  de  $p$  e  $V$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $X|_W$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_V$ .*

O Teorema de Hartman-Grobman descreve o comportamento das soluções de um sistema de equações diferenciais da forma (1.1) na vizinhança de uma singularidade hiperbólica. O próximo exemplo mostra como esse teorema pode ser aplicado.

**Exemplo 2.2.3.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = -x - \frac{x^3}{3} - 2\operatorname{sen} y, \quad \dot{y} = y - \frac{y^3}{3}. \quad (2.4)$$

A origem é uma singularidade para esse sistema e sua parte linear é descrita pela matriz

$$DX(0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $DX(0)$  são  $-1$  e  $1$ . Logo, a origem é uma singularidade hiperbólica e, pelo estudo feito sobre sistemas lineares, a origem do sistema associado à matriz  $DX(0)$  é um ponto de sela. O Teorema 2.2.2 nos garante que as soluções do sistema (2.4) são localmente topologicamente conjugadas às soluções do sistema  $\dot{x} = DX(0)x$ . Assim, a origem do sistema (2.4) é uma singularidade do tipo sela.

## 2.3 Singularidades semi-hiperbólicas

Continuando o estudo da estrutura local dos pontos singulares, ou seja, o estudo sobre o comportamento das soluções de um sistema diferencial planar na vizinhança de um ponto singular, vamos analisar agora as singularidades semi-hiperbólicas. Andronov *et al.* [2] estabeleceram um resultado que nos ajuda a identificar o comportamento na vizinhança de tais pontos singulares e o apresentamos no próximo teorema. Sua demonstração pode ser encontrada em [2], p. 340-346.

**Teorema 2.3.1** (Singularidades Semi-hiperbólicas). [2] *Seja  $(0,0)$  uma singularidade isolada do campo de vetores  $X$  dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x,y), \\ \dot{y} &= \lambda y + B(x,y),\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde  $A$  e  $B$  são analíticas em uma vizinhança da origem com  $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$  e  $\lambda > 0$ . *Seja  $y = f(x)$  solução da equação  $\lambda y + B(x,y) = 0$  em uma vizinhança do ponto  $(0,0)$ , e suponha que a função  $g(x) = A(x, f(x))$  seja da forma  $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$ , onde  $m \geq 2$  e  $a_m \neq 0$ . Então, sempre existe uma curva analítica invariante, chamada variedade instável forte, tangente em 0 ao eixo- $y$ , no qual  $X$  é analiticamente conjugado a*

$$\dot{y} = \lambda y,$$

que tem um comportamento repulsor, pois  $\lambda > 0$ . Além disso, vale uma das seguintes afirmações.

- (i) *Se  $m$  é ímpar e  $a_m < 0$ , então  $(0,0)$  é uma **sela topológica** (veja Figura 2.4(a)). Tangente ao eixo- $x$  existe uma única curva invariante  $C^\infty$ , chamada variedade central, na qual  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a*

$$\dot{x} = -x^m(1 + ax^{m-1}),\tag{2.6}$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ . *Se esta curva invariante é analítica, então o campo  $X$  é  $C^\omega$ -conjugado a (2.6). O sistema  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^m(1 + ax^{m-1}), \\ \dot{y} &= \lambda y,\end{aligned}$$

e é  $C^0$ -conjugado a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

- (ii) *Se  $m$  é ímpar e  $a_m > 0$ , então  $(0,0)$  é um **nó topológico instável** (ver Figura 2.4(b)). Cada ponto não pertencente à variedade instável forte pertence a uma curva invariante  $C^\infty$ , chamada variedade central, tangente ao eixo- $x$  na origem, e na qual  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a*

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}),\tag{2.7}$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ . *Todas essas variedades centrais são mutuamente infinitamente tangentes entre si, e consequentemente no máximo uma delas pode ser analítica, no caso em que  $X$  é  $C^\omega$ -conjugado a (2.7). O sistema  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^m(1 + ax^{m-1}), \\ \dot{y} &= \lambda y,\end{aligned}$$

e é  $C^0$ -conjugado a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

- (iii) *Se  $m$  é par, então  $(0,0)$  é uma **sela-nó**, ou seja, um ponto singular cuja qualquer vizinhança é a união de um setor parabólico e dois hiperbólicos (veja Figura 2.4(c)). Mudando  $x$  para  $-x$ , supomos que  $a_m > 0$ . Cada ponto da direita da variedade forte instável (lado  $x > 0$ ) está sobre uma curva invariante  $C^\infty$ , chamada de variedade central, tangente ao eixo- $x$  na origem, e na qual  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a*

$$\dot{x} = x^m(1 + ax^{m-1}),\tag{2.8}$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Todas essas variedades centrais coincidem no lado  $x \leq 0$  e são conseqüentemente infinitamente tangentes na origem. No máximo uma dessas variedades centrais pode ser analítica, neste caso  $X$  é  $C^\omega$ -conjugado a (2.8). O sistema  $X$  é  $C^\infty$ -conjugado a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^m(1 + ax^{m-1}), \\ \dot{y} &= \lambda y,\end{aligned}$$

e é  $C^0$ -conjugado a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

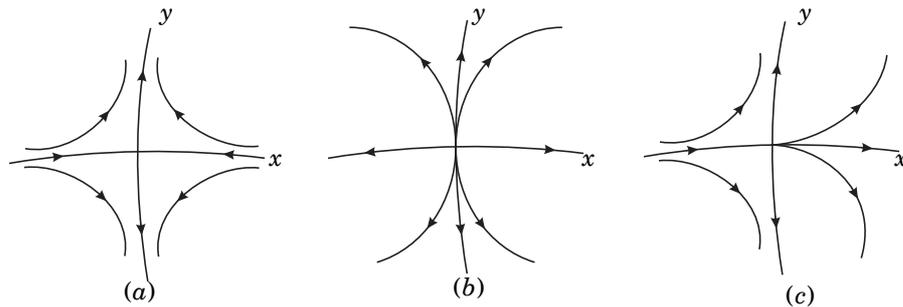


Figura 2.4: Retrato de fase de singularidades semi-hiperbólicas

**Observação 2.3.2.** O caso  $\lambda < 0$  pode ser reduzido ao  $\lambda > 0$  mudando  $X$  por  $-X$ .

Os exemplos que seguem são aplicações direta do Teorema 2.3.1.

**Exemplo 2.3.3.** Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y, \\ \dot{y} &= y^4.\end{aligned}\tag{2.9}$$

A única singularidade para esse sistema de equações é a origem. Os autovalores de  $DX(0)$  são 1 e 0, logo a origem é uma singularidade semi-hiperbólica. A fim de aplicar o Teorema 2.3.1 ao sistema (2.9) fazemos a mudança de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (y, x)$ . A nova configuração do sistema (2.9) é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^4, \\ \dot{y} &= x + y.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Temos que  $f(x) = -x$  e  $g(x) = x^4$ . Como  $m = 4$ , concluímos pelo Teorema 2.3.1 que o ponto singular  $(0, 0)$  é uma **sela-nó**. O retrato de fase local para o sistema (2.9) é dado pela Figura 2.5.

Outra observação relevante sobre o Teorema 2.3.1 diz respeito ao fato de que a singularidade deve estar na origem. Quando a singularidade não está na origem construímos um novo campo, que é topologicamente equivalente ao original, tal que a singularidade esteja na origem. Mostramos agora como é feita tal construção.

Seja  $p = (x_0, y_0)$  uma singularidade do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2.11}$$

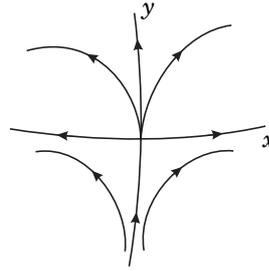


Figura 2.5: Retrato de fase local do sistema (2.9)

então o ponto  $(0,0)$  será uma singularidade para o sistema de equações

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= P(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} &= Q(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde  $x = \bar{x} + x_0$  e  $y = \bar{y} + y_0$ . Como essa mudança de coordenadas é linear, os sistemas (2.11) e (2.12) são topologicamente equivalentes.

**Exemplo 2.3.4.** Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x-1)^3, \\ \dot{y} &= y-2.\end{aligned}\tag{2.13}$$

O ponto  $(1,2)$  é uma singularidade para o sistema (2.13) e os autovalores associados a  $DX(1,2)$  são 0 e 1. Portanto, o ponto singular  $(1,2)$  é semi-hiperbólico. Neste caso a singularidade não está na origem. A fim de aplicar o Teorema 2.3.1 fazemos a mudança de coordenadas  $x = \bar{x} + 1$  e  $y = \bar{y} + 2$ .

Analisamos agora o sistema (2.14) que é topologicamente equivalente ao sistema (2.13), porém a singularidade no sistema (2.14) foi transladada para a origem.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{x}^3, \\ \dot{\bar{y}} &= \bar{y}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Temos que  $f(\bar{x}) = 0$  e  $g(\bar{x}) = \bar{x}^3$ . Pelo Teorema 2.3.1 a origem do sistema (2.14) é um **nó topológico instável** (veja Figura 2.4(b)).

## 2.4 Singularidades nilpotentes

Assim como podemos estudar o comportamento na vizinhança de um ponto singular semi-hiperbólico usando o Teorema 2.3.1, também existe um resultado que nos permite obter informações sobre o comportamento local em singularidades nilpotentes. Esse resultado ao qual nos referimos é devido a Andreev [1] e o apresentamos no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

**Teorema 2.4.1** (Singularidades Nilpotentes). [1] *Seja  $(0,0)$  uma singularidade isolada do campo de vetores  $X$  dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + A(x, y), \\ \dot{y} &= B(x, y),\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde  $A$  e  $B$  são analíticas em uma vizinhança do ponto  $(0,0)$  e  $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$ . Seja  $y = f(x)$  a solução da equação  $y + A(x, y) = 0$  na vizinhança da origem, e considere  $F(x) = B(x, f(x))$  e

$G(x) = (\partial A/\partial x + \partial B/\partial y)(x, f(x))$ . Então vale uma das seguintes afirmações:

- (1) Se  $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$ , então o retrato de fase de  $X$  é dado pela Figura 2.6(a);
- (2) Se  $F(x) \equiv 0$  e  $G(x) = bx^n + o(x^n)$  para  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 1$  e  $b \neq 0$ , então o retrato de fase de  $X$  é dado pela Figura 2.6(b) ou (c);
- (3) Se  $G(x) \equiv 0$  e  $F(x) = ax^m + o(x^m)$  para  $m \in \mathbb{N}$  com  $m \geq 1$  e  $a \neq 0$ , então
  - (i) Se  $m$  é ímpar e  $a > 0$ , então a origem de  $X$  é uma sela (Figura 2.6(d)) e se  $a < 0$ , então é um centro ou um foco (Figura 2.6(e)-(g));
  - (ii) Se  $m$  é par então a origem de  $X$  é uma cúspide como na Figura 2.6(h).
- (4) Se  $F(x) = ax^m + o(x^m)$  e  $G(x) = bx^n + o(x^n)$  com  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , então temos
  - (i) Se  $m$  é par, e
    - (i1)  $m < 2n + 1$ , então a origem de  $X$  é uma cúspide como na Figura 2.6(h);
    - (i2)  $m > 2n + 1$ , então a origem de  $X$  é uma sela-nó como na Figura 2.6(i) ou (j);
  - (ii) Se  $m$  é ímpar e  $a > 0$  então a origem de  $X$  é uma sela como na Figura 2.6(d);
  - (iii) Se  $m$  é ímpar,  $a < 0$  e
    - (iii1) Ou  $m < 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) < 0$ , então a origem de  $X$  é um centro ou um foco 2.6(e)-(g);
    - (iii2)  $n$  é ímpar e ou  $m > 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ , então o retrato de fase da origem de  $X$  consiste de um setor hiperbólico e um setor elíptico como na Figura 2.6(k);
    - (iii3)  $n$  é par e ou  $m > 2n + 1$ , ou  $m = 2n + 1$  e  $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ , então a origem de  $X$  é um nó como na Figura 2.6(l)-(m). O nó é atrator se  $b < 0$  e repulsor se  $b > 0$ .

A demonstração do Teorema 2.4.1 também pode ser encontrada em [4].

**Exemplo 2.4.2.** Considere o sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^3. \quad (2.16)$$

O ponto  $(0,0)$  é uma singularidade para o sistema (2.16) e a matriz jacobiana associada ao sistema na origem é dada por

$$JX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a origem é uma singularidade nilpotente. Observamos que o sistema (2.16) está na forma (2.15). Utilizando a notação do Teorema 2.4.1, temos

$$A(x,y) = 0, \quad B(x,y) = x^3.$$

Seja  $f(x) = y$  solução de  $y + A(x,y) = 0$ . Neste caso, temos que  $f(x) = 0$  e assim  $F(x) = x^3$  e  $G(x) = 0$ . Como  $m = 3$  e  $a = 1$ , concluímos do Teorema 2.4.1 que a origem é uma sela.

Assim como para aplicar o Teorema 2.3.1, também temos que ser cautelosos na aplicação do Teorema 2.4.1. Em ambos os resultados, a singularidade precisa estar localizada na origem e o sistema deve estar na forma normal proposta.

**Observação 2.4.3.** Os itens 3(i) e 4(iii1) do Teorema 2.4.1 não nos permitem distinguir se o ponto singular é um centro ou um foco. Dessa forma, o teorema não responde ao conhecido problema do centro-foco para

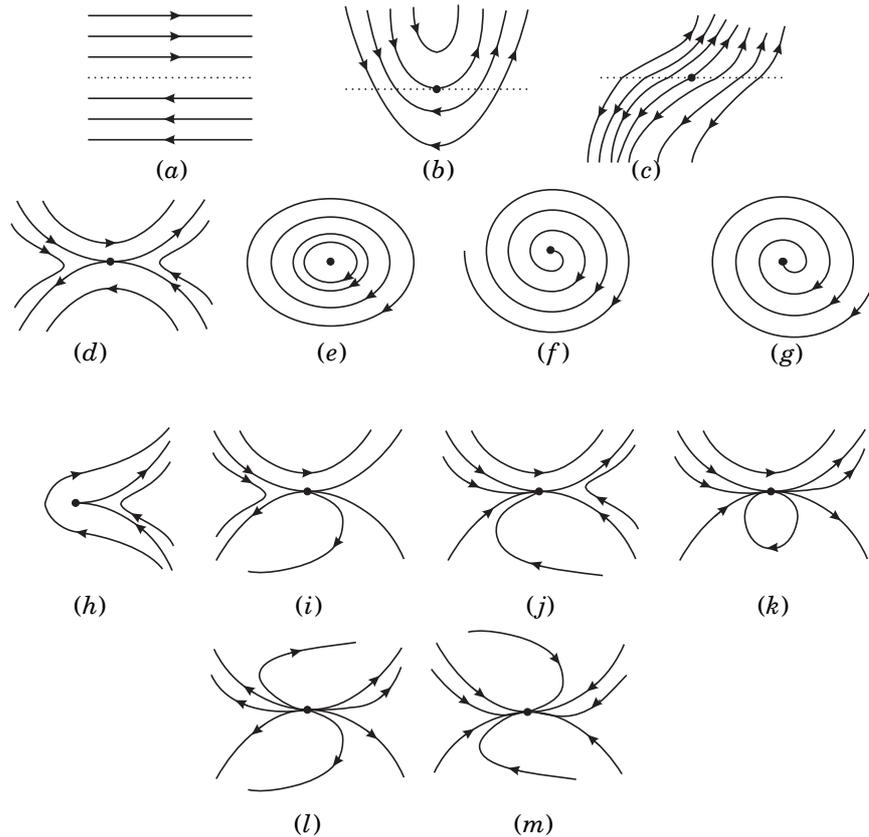


Figura 2.6: Retrato de fase das singularidades nilpotentes

singularidades nilpotentes, cuja versão original é distinguir se um dado sistema não linear com singularidade na origem possuindo autovalores imaginários puros é um centro ou um foco. Entre os resultados conhecidos para a investigação desse problema está o Teorema de Poincaré-Lyapunov. Mais informações sobre esse resultado pode ser encontrado no livro de Romanovski e Shafer [10].

## 2.5 Índice de uma singularidade

Nesta seção definimos o índice de uma singularidade de um campo de vetores  $X$  de classe  $C^k$  definido em uma superfície bidimensional compacta e diferenciável  $S$ . Estamos particularmente interessado em estudar a teoria de índice na superfície  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , visto que construiremos em  $\mathbb{S}^2$  a compactificação de Poincaré, objeto principal desse dissertação.

Mostraremos nesta seção que, se um campo  $X$  possui uma quantidade finita de pontos singulares, o índice do campo vetorial  $X$  em  $S$ , que será denotado por  $I_X(S)$ . Este índice será a soma dos índices em cada ponto singular. Também mostraremos que o índice depende somente da topologia da superfície, ou seja, o índice  $I_X(S)$  não depende do campo  $X$ . Este resultado é conhecido como Teorema do Índice de Poincaré.

Começamos definindo o índice de Poincaré para uma curva de Jordan  $J$  relativo a um campo de vetores  $X$ .

Seja  $\sigma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Definimos a função  $\bar{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  que a cada  $t \in I$  associa o ângulo formado entre o eixo  $x$  e o segmento de reta  $\overline{(0,0)\sigma(t)}$ . Podemos cobrir a função  $\bar{\varphi}$  por uma função contínua  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Chamamos  $\varphi$  de **função ângulo**.

**Definição 2.5.1.** O *índice*  $I_X(J)$  de uma curva de Jordan  $J$  ( $J = \sigma(I)$ , com  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) relativa ao campo de vetores  $X$ , onde  $X$  não possui singularidades em  $J$ , é o número inteiro

$$I_X(J) = \frac{\Delta\theta}{2\pi},$$

onde  $\Delta\theta$  é a variação do ângulo  $\theta$  que o campo forma com o eixo  $x$ , ou seja,  $\Delta\theta = \varphi(1) - \varphi(0)$ .

O índice de uma curva  $J$  relativa a um campo de vetores  $X$  pode ser calculado pela fórmula

$$I_X(J) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}, \quad (2.17)$$

como demonstrado em [2], p. 197.

**Exemplo 2.5.2.** Considere os campos lineares

$$f(x, y) = (x, y), \quad g(x, y) = (-x, -y), \quad h(x, y) = (-y, x) \quad e \quad k(x, y) = (x, -y).$$

Pelo estudo feito na Seção 2.1 sabemos que as singularidades desses campos são nó repulsor, nó atrator, centro e sela, respectivamente. Considere agora a curva de Jordan  $\mathbb{S}^1 = (\cos t, \sin t)$  onde  $t \in [0, 2\pi]$ . Aplicando a fórmula dada em (2.17), concluímos que  $I_f(\mathbb{S}^1) = 1$ ,  $I_g(\mathbb{S}^1) = 1$ ,  $I_h(\mathbb{S}^1) = 1$  e  $I_k(\mathbb{S}^1) = -1$ .

Descreveremos a seguir alguns resultados importantes na teoria de índice de campos de vetores. Suas demonstrações podem ser encontradas em [9].

**Teorema 2.5.3.** Sejam  $X$  um campo de vetores definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $J$  uma curva de Jordan em  $U$ . Se  $X$  não possui pontos críticos em  $J \cup \text{Int}J$ , então  $I_X(J) = 0$ .

O Teorema 2.5.3 nos diz que, para fins de cálculo do índice de uma curva de Jordan relativa a um campo de vetores  $X$ , devemos nos preocupar apenas com as singularidades que estejam em  $J \cup \text{Int}J$ .

**Exemplo 2.5.4.** Considere o campo  $X(x, y) = (x, y+2)$  e a curva  $\mathbb{S}^1$ . Pelo Teorema 2.5.3 temos que  $I_X(\mathbb{S}^1) = 0$ , visto que o único ponto crítico  $(0, -2) \notin \mathbb{S}^1 \cup \text{Int}\mathbb{S}^1$ .

**Corolário 2.5.5.** Nas condições do Teorema 2.5.3, se  $J_1$  e  $J_2$  são curvas de Jordan contidas em  $U$  com  $J_1 \subset \text{Int}(J_2)$ , e se não existem singularidades de  $X$  em  $\text{Int}(J_2) \cap \text{Ext}(J_1)$ , então  $I_X(J_1) = I_X(J_2)$ .

**Definição 2.5.6.** Sejam  $X$  um campo de vetores definido em um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $x_0$  uma singularidade isolada de  $X$  em  $U$ . Definimos o índice da singularidade  $x_0$  em relação ao campo  $X$ , e denotamos por  $I_X(x_0)$ , como o índice  $I_X(J)$  da curva  $J$  em relação ao campo  $X$ , onde  $J$  é uma curva de Jordan contida em  $U$  tal que  $x_0 \notin J$ , e  $x_0$  é a única singularidade em  $\text{Int}(J)$ .

Vale observar que, como  $U$  é um aberto, é sempre possível encontrar  $\mathbb{S}_{(x_0, r)}^1$ , onde  $\mathbb{S}_{(x_0, r)}^1$  é um círculo com centro em  $x_0$  e raio  $r$ , com  $r$  suficientemente pequeno para que  $\mathbb{S}_{(x_0, r)}^1 \subset U$ .

Temos agora duas definições relacionadas a índice, uma para índice de uma curva de Jordan, e para esta temos inclusive uma fórmula que nos permite calcular tal índice relativo a um campo de vetores, e a outra definição é de índice de singularidade. O Teorema 2.5.7 a seguir nos diz como podemos relacionar essas duas definições.

**Teorema 2.5.7.** Seja  $X$  um campo de vetores definido no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  contendo uma curva de Jordan  $J$ . Se  $X$  possui somente uma quantidade finita de singularidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  no interior de  $J$ , então

$$I_X(J) = \sum_{j=1}^n I_X(x_j).$$

Apresentamos agora a primeira relação entre teoria do índice e o estudo de sistemas de equações diferenciais.

**Teorema 2.5.8.** *Suponha que  $X$  seja um campo de vetores de classe  $C^1$  e que  $\Gamma$  seja uma órbita periódica do sistema*

$$\dot{x} = X(x). \quad (2.18)$$

Então,  $I_X(\Gamma) = 1$ .

**Corolário 2.5.9.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.5.8, a órbita periódica  $\Gamma$  contém pelo menos uma singularidade em seu interior. Assumindo que o sistema (2.18) possui somente um número finito de singularidades no interior de  $\Gamma$ , a soma dos índices dessas singularidades deverá ser 1.*

Relacionaremos agora o índice de  $DX(0,0)$  e o índice  $I_X(0,0)$ , onde  $(0,0)$  é uma singularidade hiperbólica do campo de vetores  $X$ . Em outras palavras, relacionaremos o índice da parte linear de um campo em um ponto singular hiperbólico com o índice do próprio campo de vetores nesse ponto.

Para os próximos teoremas escrevemos o campo de vetores  $X$  como

$$X(x) = DX(0,0)x + g(x,y),$$

onde  $DX(0,0)$  representa a parte linear do campo de vetores  $X$  no ponto  $(0,0)$ .

**Teorema 2.5.10.** *Seja  $X$  um campo de vetores definido em um aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo a origem. Se a origem é uma singularidade hiperbólica para o campo de vetores  $X$  e  $|g(x,y)|/r \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , então  $I_X(0,0) = I_{DX(0,0)}(0,0)$ .*

O Teorema 2.5.10 nos dá informações sobre o índice de singularidades hiperbólicas.

**Definição 2.5.11.** *Seja  $p$  um ponto singular. Uma **órbita característica**  $\gamma(t)$  em  $p$  é uma órbita tendendo a  $p$  para tempo positivo (respectivamente para tempo negativo) com um declive bem definido, isto é,  $\gamma(t) \rightarrow p$  para  $t \rightarrow \infty$  (respectivamente  $t \rightarrow -\infty$ ) e o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma(t) - p) / \|\gamma(t) - p\|$  (respectivamente  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\gamma(t) - p) / \|\gamma(t) - p\|$ ) existe.*

**Definição 2.5.12.** *Seja*

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ e^{2\pi} &\mapsto \rho(e^{2\pi}), \end{aligned}$$

com  $\rho$  de classe  $C^1$ ,  $\rho' \neq 0$  em todo ponto e  $\rho$  injetiva. Chamamos  $\rho$  de **parametrização permissível do círculo**.

Seja  $X$  um campo de vetores de classe  $C^1$  definido em uma vizinhança compacta de  $p$ , da qual  $\partial V$  é a imagem de uma parametrização permissível do círculo  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial V$  de classe  $C^2$ , e suponha que  $X(p) = 0$  e  $X(q) \neq 0$  para todo ponto  $q \in \partial V \setminus \{p\}$ .

- (i) Dizemos que  $X|_V$  é um **centro** se  $\partial V$  é uma órbita periódica e todas as órbitas em  $V \setminus \{p\}$  são periódicas.
- (ii) Dizemos que  $X|_V$  é um **nó/foco atrator** se em todos os pontos de  $\partial V$  o campo de vetores aponta para dentro e para todos  $q \in V \setminus \{p\}$ ,  $\omega(q) = \{p\}$  e  $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ .
- (iii) Dizemos que  $X|_V$  é um **nó/foco repulsor** se em todos os pontos de  $\partial V$  o campo de vetores aponta para fora e para todos  $q \in V \setminus \{p\}$ ,  $\alpha(q) = \{p\}$  e  $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ .

(iv) Dizemos que  $X|_V$  tem uma decomposição setorial finita não trivial se não estamos nos casos (i), (ii) ou (iii) e se existe um número finito de órbitas características  $c_0, \dots, c_{n-1}$ , cada uma cortando  $\partial V$  transversalmente em um ponto  $p_i$ , no sentido de que  $\partial V$  é uma seção transversal perto de  $p_i$ , e com a propriedade que entre  $c_i$  e  $c_{i+1}$  (com  $c_n = c_0$  e ordenada de tal modo que  $p_0, \dots, p_{n-1}$  siga a ordem cíclica de  $\rho$ ), temos um dos seguintes caso com respeito ao setor  $S_i$ , definido como a região compacta limitada por  $\{p\}$ ,  $c_i$ ,  $c_{i+1}$  e a parte de  $\partial V$  entre  $p_i$  e  $p_{i+1}$ :

- (1) **Setor parabólico atrator:** Em todos os pontos de  $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$  o campo de vetores aponta para dentro, e para todo  $q \in S_i \setminus \{p\}$ ,  $\omega(p) = \{p\}$  e  $\gamma^- \cap \partial V \neq \emptyset$ .
- (2) **Setor parabólico repulsor:** Em todos os pontos de  $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$  o campo de vetores aponta para fora, e para todo  $q \in S_i \setminus \{p\}$ ,  $\alpha(p) = \{p\}$  e  $\gamma^+ \cap \partial V \neq \emptyset$ .
- (3) **Setor hiperbólico:** Existe um ponto  $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$  com a propriedade de que em todos os pontos de  $[p_i, q_i)$  o campo de vetores aponta para fora (respectivamente para dentro); no ponto  $q_i$  o campo de vetores é tangente a  $\partial V$  e a tangência é externa no sentido de que a  $x$ -órbita de  $q_i$  permanece fora de  $V$ ; e para todo  $q \in S_i \setminus \overline{c_i \cup c_{i+1} \cup q_i}$  temos que  $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ .
- (4) **Setor Elíptico:** Existe um ponto  $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$  com a propriedade de que  $\gamma(q_i) \subset V$  com  $\omega(q_i) = \alpha(q_i) = \{p\}$ ; em todos os pontos  $q \in [p_i, q_i)$  o campo de vetores aponta para dentro,  $\gamma^+(q) \subset V$  e  $\omega(q) = \{p\}$ . Denotamos por  $S_{[p_i, q_i]} = \bigcup_{q \in [p_i, q_i]} \omega^+(q)$ ; em todos os pontos  $q \in (q_i, p_{i+1}]$  o campo de vetores aponta para fora,  $\gamma^-(q) \subset V$  e  $\alpha(q) = p$ . Denotamos por  $S_{[q_i, p_{i+1}]} = \bigcup_{q \in [q_i, p_{i+1}]} \omega^-(q)$ ; em todos os pontos  $q \in S \setminus S_{[q_i, p_{i+1}]} \cup S_{[p_i, q_i]} \cup \{p\}$  temos que  $\gamma(q) \subset V$  com  $\omega(q) = \alpha(q) = p$ .

O mesmo ocorre para  $[q_i, p_{i+1}]$  ao invés de  $[p_i, q_i]$ .

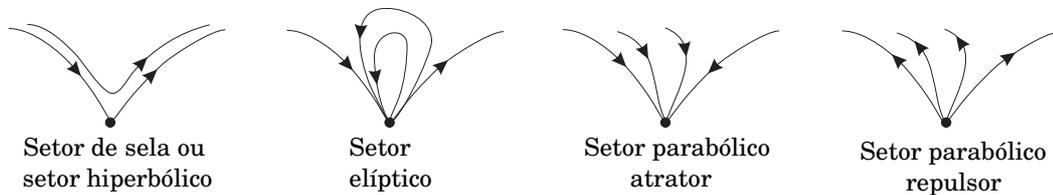


Figura 2.7: Setores na vizinhança de um ponto singular

O Teorema 2.5.13 relaciona índice de uma singularidades com o número de setores hiperbólicos, que denotamos por  $h$ , e o número de setores elípticos, que denotamos por  $e$ .

**Teorema 2.5.13** (Bendixson). *Se a origem for uma singularidade isolada de um sistema planar analítico (2.18), então*

$$I_X(0) = 1 + \left( \frac{e - h}{2} \right). \quad (2.19)$$

Concluimos do Teorema 2.5.13 que, se uma singularidade isolada para o sistema (2.18) é uma sela-nó, então seu índice é 0.

**Proposição 2.5.14.** *Se  $X$  em  $p$  e  $Y$  em  $q$  são localmente  $C^1$ -conjugados, com  $p$  e  $q$  singularidades isoladas, então  $I_X(p) = I_Y(q)$ .*

Seja  $X$  um campo de vetores na esfera unitária  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , isto é, associamos a cada vetor  $X(p) = (X_1(p), X_2(p), X_3(p))$  um ponto de  $\mathbb{S}^2$  tal que as componentes  $X_1(p)$ ,  $X_2(p)$  e  $X_3(p)$  dependem continuamente do ponto  $p$ . O campo de vetores  $X$  é chamado de **campo de vetores tangente a  $\mathbb{S}^2$**  se para cada  $p \in \mathbb{S}^2$ ,  $X(p)$  pertence ao plano tangente  $T_p \mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{S}^2$  no ponto  $p$ .

Seja  $X$  um campo de vetores tangente a  $\mathbb{S}^2$  e  $q$  uma singularidade isolada de  $X$ ; isto é,  $X(q) = 0$ , e existe uma vizinhança suficientemente pequena de  $q$  tal que  $X$  não possui outras singularidades nessa vizinhança. A projeção estereográfica em  $\mathbb{S}^2$  de  $-q$  para  $E = T_p\mathbb{S}^2$  define um difeomorfismo analítico de uma vizinhança aberta de  $q$  em  $\mathbb{S}^2$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $q$  em  $E$ . Esse difeomorfismo transforma  $X$  em um campo de vetores planar  $X'$  em  $U$  e tem  $q$  como uma singularidade isolada. Definimos o **índice  $I_q$  de um ponto singular  $q$  de um campo de vetores tangente  $X$**  como o índice de  $q$  para o campo de vetores planar projetado  $X'$ . Pela Proposição 2.5.14 fica claro que qualquer sistema de coordenadas  $C^1$  ao redor de  $q$  pode ser usado para definir  $I_q$ , sem alterar a definição.

O próximo teorema trata do índice de um campo de vetores definido em  $\mathbb{S}^2$  e será bastante útil nos próximos capítulos. Sua demonstração seguirá os passos descritos em [4], p.177-178.

**Teorema 2.5.15** (Teorema de Poincaré-Hopf). *Todo campo de vetores tangente a  $\mathbb{S}^2$  com um número finito de pontos singulares tem índice  $I_X = 2$ .*

*Demonstração.* Como o campo de vetores tem um número finito de singularidades, podemos encontrar um círculo  $\mathbb{S}^1$  de raio máximo em  $\mathbb{S}^2$  que não contém pontos singulares. Seja  $E^2$  o plano contendo  $\mathbb{S}^1$ . Podemos projetar estereograficamente o campo de vetores  $X$  restrito ao hemisfério sul em  $E^2$  pelo polo norte, e obter um campo de vetores  $X'$  em  $E^2$ . De forma similar podemos definir um campo  $X''$  em  $E^2$  com a projeção estereográfica no hemisfério norte.

Se  $q_1, q_2, \dots, q_n$  são pontos singulares de  $X$  no hemisfério sul com índices  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , e  $q'_1, q'_2, \dots, q'_m$  são pontos singulares de  $X$  no hemisfério norte com índices  $I'_1, I'_2, \dots, I'_m$ , então pela Proposição 2.5.7, o campo de vetores  $X'$  e  $X''$  tem em  $E^2$  um número de voltas igual a  $I(X') = I_1 + I_2 + \dots + I_n$  e  $I(X'') = I'_1 + I'_2 + \dots + I'_m$ .

Calcularemos  $I(X') + I(X'')$  estudando a relação entre  $X'$  e  $X''$ .

Sejam  $\varphi'$  e  $\varphi''$  a função ângulo de  $X'$  e  $X''$ , respectivamente, sobre os pontos de  $\mathbb{S}^1$ . Para cada ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{S}^1$  por construção o campo de vetores  $X'$  e  $X''$  são simétricos com respeito à reta tangente a  $\mathbb{S}^1$  em  $\alpha(t)$ ; veja a Figura 2.8.

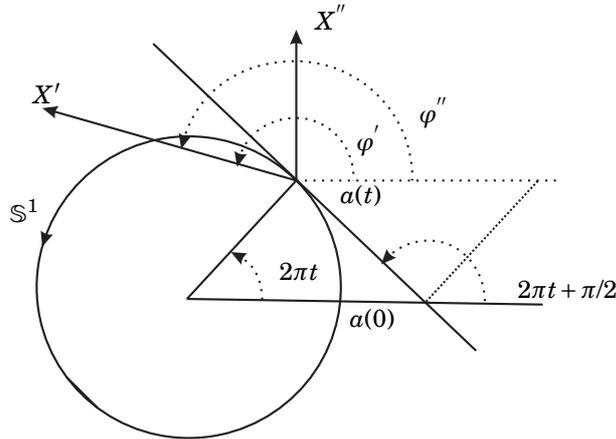


Figura 2.8: Os campos de vetores  $X'$  e  $X''$  em  $\mathbb{D}^2$

Então,

$$\frac{\varphi'(t) + \varphi''(t)}{2} = 2\pi t + \frac{\pi}{2},$$

e conseqüentemente

$$\varphi'(t) + \varphi''(t) = 4\pi t + \pi.$$

Portanto,

$$I(X') + I(X'') = \frac{\varphi'(1) - \varphi'(0) + \varphi''(1) - \varphi''(0)}{2\pi} = \frac{\varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(0) + \varphi''(0))}{2\pi} = \frac{4\pi + \pi - \pi}{2\pi} = 2,$$

o que prova o resultado. □



# Compactificação de Poincaré

Dado um sistema diferencial

$$\dot{x} = X(x),$$

onde  $X$  é um campo de vetores definido em  $\mathbb{R}^2$ , gostaríamos de conhecer o comportamento das trajetórias desse campo quando essas estão perto do infinito. Esse trabalho é complicado por vários fatores, sendo um deles o fato do plano  $\mathbb{R}^2$  não ser compacto. Neste capítulo, apresentamos uma técnica de compactificação do plano na esfera de Poincaré. Vale ressaltar que, embora existam outras técnicas de compactificação, como a projeção estereográfica, em geral a compactificação torna-se mais vantajosa à medida que as singularidades do infinito ficam espalhadas no equador da esfera de Poincaré. Desse modo, a análise desses pontos singulares fica mais simples do que na compactificação feita por meio da projeção estereográfica, na qual o infinito do plano  $\mathbb{R}^2$  é identificado com um único ponto. No entanto, apesar dessa vantagem da compactificação de Poincaré, às vezes os pontos singulares infinitos podem apresentar uma estrutura local complicada, necessitando, assim, ferramentas adicionais, como o *blow-up* (veja [11] para mais detalhes dessa técnica).

Neste capítulo apresentaremos a construção da compactificação de Poincaré para sistemas de equações diferenciais polinomiais planares. Conceitos análogos são empregados na compactificação de Poincaré no  $\mathbb{R}^n$ , para  $n > 2$ , veja detalhes em [5].

## 3.1 Construção da compactificação de Poincaré

Sejam  $(x_1, x_2)$  as coordenadas do plano  $\mathbb{R}^2$ . Consideramos o campo vetorial  $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ , onde  $P$  e  $Q$  são polinômios, e o sistema associado

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = Q(x_1, x_2).$$

Seja  $d$  o máximo dos graus de  $P$  e  $Q$ , diremos que  $d$  do campo vetorial  $X$  e do sistema associado.

Identificamos o plano  $\mathbb{R}^2$  no espaço  $\mathbb{R}^3$  com o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Seja  $\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ , a qual será chamada de **esfera de Poincaré**. Utilizaremos indistintamente as notações  $x \equiv (x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2, 1)$  e  $y \equiv (y_1, y_2, y_3)$ . Apresentamos agora a ideia da construção da compactificação de Poincaré.

Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^2$ , consideramos a reta  $r$  passando por  $(x_1, x_2)$  e o ponto  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Essa reta

intercepta a esfera de Poincaré nos pontos  $y^+$  e  $y^-$ , onde  $y^+$  está no **hemisfério norte**  $H^+ = \{y \in \mathbb{S}^2, y_3 > 0\}$  e  $y^-$ , no **hemisfério sul**  $H^- = \{y \in \mathbb{S}^2, y_3 < 0\}$ . Definimos as **projeções centrais**  $f^+$  e  $f^-$  por  $f^+(x) = y^+$  e  $f^-(x) = y^-$ , cujas expressões são dadas por

$$f^+(x) = \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \quad \text{e} \quad f^-(x) = - \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

onde  $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ .

Consideramos o campo induzido  $\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x)$ , onde  $f^+(x) = y$ , definido em  $H^+$ . De forma análoga definimos  $\bar{X}(y) = Df^-(x)X(x)$ , onde  $f^-(x) = y$ , no hemisfério sul. Pela Proposição 1.2.3, o campo  $\bar{X}$  é analiticamente conjugado ao campo  $X$  em cada hemisfério.

É importante observar que o campo  $\bar{X}$  está definido em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ , onde  $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2, y_3 = 0\}$  é chamado de **equador da esfera de Poincaré**, e é tangente a  $\mathbb{S}^2$  em todo ponto. Outro fato importante é que os pontos no infinito de  $\mathbb{R}^2$  estão em correspondência bijetiva com o equador da esfera de Poincaré.

Nosso objetivo é conhecer o comportamento das trajetórias do campo também no infinito. Precisamos estender o campo  $\bar{X}$  a toda  $\mathbb{S}^2$ . Para conseguir tal extensão do campo  $\bar{X}$ , multiplicamo-lo pelo fator  $\rho(y) = y_3^{d-1}$ , onde  $d$  é o grau do campo de vetores  $X$ . O novo sistema  $\rho(y)\bar{X}(y)$  é chamado de **compactificação de Poincaré** do campo de vetores  $X$  em  $\mathbb{R}^2$  e denotamos por  $p(X)$ . A justificativa para uso do fator  $\rho(y)$  será melhor explicado posteriormente quando realizarmos os cálculos para obter as expressões da compactificação de Poincaré.

Observamos que o campo  $p(X)$  não é topologicamente conjugado ao campo  $X$ , porém é topologicamente equivalente a  $X$  e, para a finalidade deste trabalho, que é desenhar retrato de fase e estudar o comportamento do sistema no infinito, a equivalência topológica é suficiente.

Apresentamos a seguir os cálculos para encontrar a expressão da compactificação de Poincaré.

### 3.1.1 Cartas locais na esfera $\mathbb{S}^2$

Considerando a esfera  $\mathbb{S}^2$  como uma variedade suave compacta, conseguimos cobrir toda sua superfície com seis cartas locais que a parametrizam, a saber:

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2, y_k > 0\}, \quad \text{com} \quad \phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_k(y) = \left( \frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right), \quad m < n, \quad m, n \neq k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$V_k = \{y \in \mathbb{S}^2, y_k < 0\}, \quad \text{com} \quad \psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_k(y) = -\phi_k(y) \quad k = 1, 2, 3.$$

Utilizamos indistintamente  $z = (u, v)$  para as imagens das cartas  $\phi_k(y)$  e  $\psi_k(y)$ . Observe que, para qualquer uma das cartas locais que contêm o equador ou parte dele, os pontos em  $\mathbb{S}^1$  são da forma  $(u, 0)$ . De fato, se  $y \in \mathbb{S}^1$ , então  $y = (y_1, y_2, 0)$ . Dada  $\phi_k$  com  $k = 1, 2$ , temos

$$\text{para } k = 1: \quad \phi_1(y_1, y_2, 0) = \left( \frac{y_2}{y_1}, \frac{0}{y_1} \right) = (u, 0),$$

$$\text{para } k = 2: \quad \phi_2(y_1, y_2, 0) = \left( \frac{y_1}{y_2}, \frac{0}{y_2} \right) = (u, 0).$$

A Figura 3.1 nos diz qual a disposição de  $u$  e  $v$  em relação a cada carta local na esfera de Poincaré.

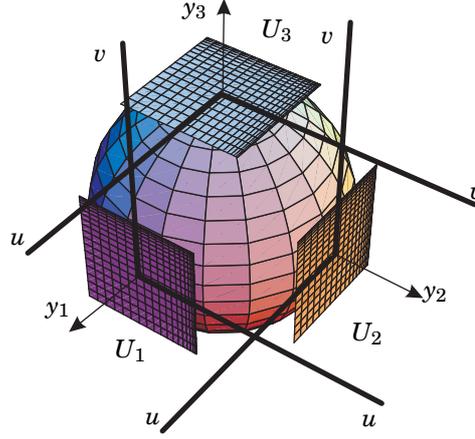


Figura 3.1: As cartas locais  $(U_k, \phi_k)$  para  $k = 1, 2, 3$  na esfera de Poincaré

### 3.1.2 A expressão do campo de vetores compactificado $p(X)$

Apresentamos agora os cálculos para a carta local  $(U_2 \cap H^+, \phi_2)$ . O cálculo é análogo para as demais cartas locais. Consideramos o campo induzido  $\bar{X}|_{U_2}(y) = D\phi_2(y)\bar{X}(y)$ . Temos:

$$\begin{aligned} D\phi_2(y)\bar{X}(y) &= D\phi_2(f^+(x))Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_2 \circ f^+)(x)X(x), \end{aligned}$$

onde

$$(\phi_2 \circ f^+)(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) = (u, v),$$

o que implica  $x_1 = u/v$  e  $x_2 = 1/v$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{X}|_{U_2} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2}P(x_1, x_2) - \frac{x_1}{x_2^2}Q(x_1, x_2), -\frac{1}{x_2^2}Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \left( vP\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uvQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), -v^2Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right). \end{aligned}$$

Observe que, pelo fato do campo vetorial  $X$  ser polinomial, um termo de ordem  $v^{d-1}$  possivelmente pode aparecer no denominador da expressão de  $\bar{X}|_{U_2}$ , o que torna o campo não definido em  $v = 0$ , ou seja, nos pontos do equador da esfera de Poincaré. Porém, quando multiplicamos o campo pelo fator  $\rho(y)$ , os possíveis termos  $v^{d-1}$  do denominador desaparecem e, assim, o sistema fica definido em  $\mathbb{S}^1$ .

A expressão de  $\rho(y)$  é dada por

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)} = v^{d-1}m(z), \quad \text{onde } m(z) = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}.$$

Assim, a compactificação de Poincaré para o campo  $X$  na carta  $U_2$  é dada por

$$p(X|_{U_2}) = v^{d-1}m(z) \left( vP\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uvQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), -v^2Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right). \quad (3.1)$$

Como  $m(z) > 0$ , a compactificação de Poincaré é topologicamente equivalente a

$$\frac{1}{m(z)}p(X|_{U_2}) = v^{d+1} \left( \frac{1}{v}P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - \frac{u}{v}Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right), -Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right).$$

Obtemos, então, a expressão da compactificação de Poincaré para a carta local  $U_2$ . Os cálculos para as demais cartas locais são análogos e suas expressões são dadas a seguir.

Para a carta  $U_1$ , temos:

$$\dot{u} = v^d \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1}Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \quad (3.2)$$

Para a carta  $U_2$ , temos:

$$\dot{u} = v^d \left[ P \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - uQ \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d-1}Q \left( \frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right). \quad (3.3)$$

E para a carta  $U_3$ , temos:

$$\dot{u} = P(u, v), \quad \dot{v} = Q(u, v). \quad (3.4)$$

As expressões para a compactificação de Poincaré nas cartas  $V_k$  são semelhantes às expressões da compactificação de Poincaré nas cartas  $U_k$ , alterando somente a multiplicação pelo termo  $(-1)^{d-1}$ . Sendo assim, para estudar o comportamento do campo  $X$ , incluindo seu comportamento próximo ao infinito, é suficiente trabalhar em  $H^+ \cup \mathbb{S}^1$ , que será chamado de **disco de Poincaré**. Dessa forma, todos os cálculos podem ser feitos utilizando-se somente as cartas  $U_1, U_2$  e  $U_3$  e suas respectivas expressões.

Vale observar que a expressão da compactificação de Poincaré em cada carta local é polinomial e que  $f_1(u, v) = v$  é uma curva algébrica invariante para a compactificação de Poincaré nas cartas  $U_1$  e  $U_2$ , ou seja, toda solução que estiver no equador da esfera de Poincaré permanecerá por lá.

**Definição 3.1.1.** Dizemos ponto singular **finito** (respectivamente, **infinito**) de  $X$  ou de  $p(X)$  ao ponto singular de  $p(X)$  que está em  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  (respectivamente,  $\mathbb{S}^1$ ).

Note que se  $y$  é uma singularidade infinita, então  $-y$  também a será, visto que as expressões nas cartas  $U_k$  e  $V_k$  se distinguem apenas pelo fator  $(-1)^{d-1}$ . Assim, o grau  $d$  do campo ajuda a determinar a estabilidade das trajetórias perto da singularidade  $-y$  a partir do comportamento das trajetórias perto da singularidade  $y$ . Por exemplo, se  $y$  for um nó atrator e o grau do polinômio for par, então  $-y$  seria um nó repulsor, e se o grau  $d$  for ímpar,  $-y$  seria um nó atrator.

Por praticidade, quando desenhamos o retrato de fase de um sistema polinomial planar, projetamos o disco de Poincaré em  $\{x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Como essa projeção é contínua, o campo induzido é topologicamente equivalente à compactificação de Poincaré no disco de Poincaré.

### 3.1.3 Pontos singulares infinitos

Sabemos que uma singularidade será infinita se é da forma  $(u, 0)$ . Assim,  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$  se, e somente se,

$$\dot{u} = v^d \left[ -uP \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right] = 0, \quad (3.5)$$

que é equivalente a  $v^{d-1}[-uP(1, u) + Q(1, u)] = 0$ .

Seja  $d$  o grau do campo  $X = (P, Q)$ . Podemos decompor  $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$  e  $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$ , onde  $P_i$  e  $Q_i$  são polinômios homogêneos de grau  $i$ , com  $i = 0, 1, \dots, d$ . Como  $v^{d-1}P_i = 0$  e  $v^{d-1}Q_i = 0$  se  $v = 0$  e

$i < d$ , podemos reescrever a equação (3.5) como

$$F(u) = -uP_d(1, u) + Q_d(1, u). \quad (3.6)$$

Assim,  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$  é uma singularidade infinita de  $X$  se, e somente se,  $F(u) = 0$

De forma análoga, concluímos que  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$  é uma singularidade infinita de  $X$  se, e somente se,

$$G(u) = P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Também podemos calcular a expressão para o Jacobiano do campo de vetores  $p(X)$  nos pontos da forma  $(u, 0)$ . Para singularidades  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ , temos:

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(1, u) - uP_{d-1}(1, u) \\ 0 & -P_d(1, u) \end{pmatrix}.$$

E para singularidades  $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ , temos:

$$Jp(X)(u, 0) = \begin{pmatrix} G'(u) & P_{d-1} - uQ_{d-1}(u, 1) \\ 0 & -Q_d(u, 1) \end{pmatrix}.$$

Na maioria das vezes, as singularidades do equador são isoladas, mas pode acontecer de  $\mathbb{S}^1$  ser formado apenas por singularidades. Neste trabalho, priorizamos o estudo de casos onde as singularidades são isoladas.

A seguir são apresentados alguns exemplos do estudo global de sistemas polinomiais planares utilizando a técnica de compactificação de Poincaré. Em cada exemplo apresentamos os retratos de fase no disco de Poincaré projetado em  $\{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . As singularidades infinitas são estudadas pelas cartas  $U_1$  e  $U_2$  e as singularidades finitas pela carta  $U_3$ . Por abuso de notação, utilizamos para a compactificação de Poincaré da carta  $U_3$  a notação  $(x, y)$  ao invés de  $(u, v)$ .

## 3.2 Exemplos

Nesta seção vamos apresentar dois exemplos utilizando a técnica apresentada neste capítulo.

### 3.2.1 Exemplo I

Apresentamos o estudo global do sistema a um parâmetro apresentado na Seção 1.3.

Considere o sistema (1.5) dado por

$$\dot{x} = ky - (x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -kx. \quad (3.7)$$

Este sistema admite integral primeira, a saber,  $H(x, y, k) = k \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - y$ .

Começamos a análise do sistema (3.7) pela parte finita. Quando  $k \neq 0$ , este sistema possui duas singularidades finitas, a saber  $(0, 0)$  e  $(0, k)$ , e não possui singularidades finitas quando  $k = 0$ . Os autovalores de  $DX(0, 0)$  são  $ik$  e  $-ik$ , e a origem será um **centro** (como mostrado em [7]). Para a singularidade  $(0, k)$  os autovalores são  $-k$  e  $k$  e os autovetores são  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ , respectivamente. Como os autovalores da singularidade  $(0, k)$  têm sinais opostos, este ponto singular é uma **sela**.

Vamos agora estudar a parte infinita. Para a carta  $U_1$ , a compactificação de Poincaré é dada por

$$\dot{u} = (1 + u^2)(u - kv), \quad \dot{v} = v(1 + u^2 - kuv). \quad (3.8)$$

A única singularidade real para o sistema (3.8) é a origem e o autovalor associado a  $Dp(X|_{U_1})(0,0)$  é 1, com multiplicidade dois. Logo, a origem de  $U_1$  é um **nó repulsor**.

Para a carta  $U_2$ , estudamos somente o ponto  $(0,0)$ . A compactificação para esta carta é

$$\dot{u} = (1 + u^2)(-1 + kv), \quad \dot{v} = kuv^2. \quad (3.9)$$

Neste caso, a origem não é uma singularidade para o sistema (3.9).

Note que o comportamento deste sistema no infinito independe do valor de  $k$ . Na Figura 3.2 apresentamos os retratos de fase para o sistema (3.7) de acordo com a variação do parâmetro  $k$ . Observamos que os retratos de fase para  $k < 0$  e para  $k > 0$  são topologicamente equivalentes (a menos de uma reparametrização). Logo, o sistema (3.7) possui dois retratos de fase topologicamente distintos.

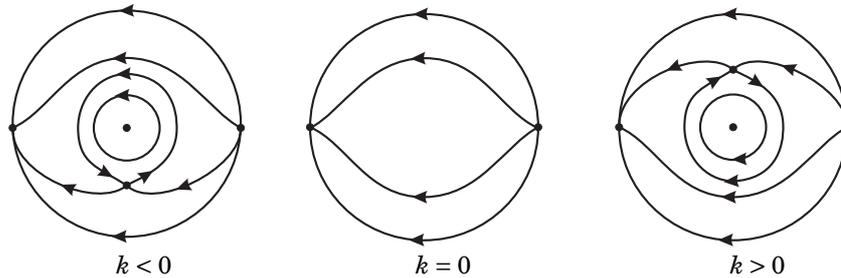


Figura 3.2: Retratos de fase para o sistema (1.5)

### 3.2.2 Exemplo II

Faremos agora o estudo global do sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = x^2 - 1, \quad \dot{y} = 1 + 2y + y^2. \quad (3.10)$$

As singularidades finitas para esse sistema são  $(-1, -1)$  e  $(1, -1)$  e os autovalores associados a  $DX(\pm 1, -1)$  são  $\mp 2$  e 0. Logo, as singularidades finitas do sistema (3.10) são semi-hiperbólicas.

A fim de aplicar o Teorema 2.3.1, temos que transladar essas singularidades para a origem. Para a singularidade  $(1, -1)$ , realizamos a mudança de coordenadas  $x = \bar{x} + 1$  e  $y = \bar{y} - 1$ , obtendo o seguinte sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{x}^2 + 2\bar{x}, \quad \dot{\bar{y}} = \bar{y}^2, \quad (3.11)$$

que é topologicamente equivalente ao sistema (3.10), mas com a singularidade  $(1, -1)$  transladada à origem. Por fim, fazemos a mudança de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{y}, \bar{x})$ .

Utilizando a notação do Teorema 2.3.1, temos  $f(\bar{x}) = 0$  e  $g(\bar{x}) = \bar{x}^2$ . Como  $m = 2$  e  $a_2 = 1$ , concluímos do Teorema 2.3.1 que  $(1, -1)$  é uma sela-nó. Analogamente, mostramos que  $(-1, -1)$  também é uma sela-nó.

Analisamos agora a parte infinita começando pela carta  $U_1$ . A compactificação de Poincaré na carta  $U_1$  é dada por

$$\dot{u} = u^2 + v^2 + u(-1 + v(2 + v)), \quad \dot{v} = v(-1 + v^2). \quad (3.12)$$

As singularidades infinitas do sistema (3.12) são  $(0,0)$  e  $(1,0)$ . O autovalor associado a  $DpX|_{U_1}(0,0)$  é  $-1$  e os autovalores associados a  $DpX|_{U_1}(1,0)$  são  $-1$  e 1. Logo, o ponto singular  $(0,0)$  é um nó atrator e o ponto singular  $(1,0)$  é uma sela.

Na carta  $U_2$ , a compactificação de Poincaré é dada por

$$\dot{u} = u^2 - v^2 - u(1+v)^2, \quad \dot{v} = -v(1+v)^2. \quad (3.13)$$

Estamos interessados em estudar somente o comportamento do sistema (3.13) na origem, que é uma singularidade para esse sistema. O autovalor associado a  $DpX|_{U_2}(0,0)$  é  $-1$  e, logo, o ponto singular  $(0,0)$  é um nó atrator.

Note que o sistema (3.10) tem duas curvas algébricas invariantes, a saber  $f_1 = x^2 - 1 = 0$  e  $f_2 = 1 + 2y + y^2 = 0$ , com cofatores  $k_1 = 2x$  e  $k_2 = 2(1 + y)$ , respectivamente. Além disso, este sistema não possui ciclos limites, uma vez que não apresenta centros nem focos.

O retrato de fase global do sistema (3.10) é dado pela Figura 3.3.

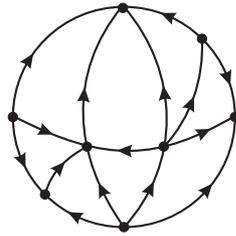


Figura 3.3: Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (3.10)



# Aplicações

Neste capítulo faremos algumas aplicações da teoria apresentada nos capítulos anteriores com a finalidade de desenhar retratos de fase globais de alguns sistemas quadráticos planares que apresentam hipérbolas invariantes. Os exemplos analisados a seguir fazem parte da classificação de Oliveira, Rezende e Vulpe [8] dos sistemas quadráticos planares possuindo pelo menos uma hipérbole invariante.

## 4.1 Exemplo I: sistema com um parâmetro e duas hipérbolas invariantes

Considere o sistema

$$\dot{x} = -\frac{a}{2} - \frac{3}{4}xy, \quad \dot{y} = -a - xy + \frac{y^2}{4}. \quad (4.1)$$

Como mostramos no Exemplo 1.4.7 este sistema possui duas hipérbolas invariantes:

$$f_1(x, y) = a + xy = 0 \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = a - x^2 + xy = 0.$$

Com o objetivo de obter o retrato de fase global no disco de Poincaré do sistema (4.1), começamos o estudo local desse sistema investigando suas singularidades finitas. Note que, para  $a \neq 0$ , o sistema (4.1) tem as seguintes singularidades finitas:

$$(x_1, y_1) = \left( \sqrt{a}/\sqrt{3}, -2\sqrt{a}/\sqrt{3} \right) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = \left( -\sqrt{a}/\sqrt{3}, 2\sqrt{a}/\sqrt{3} \right).$$

Se  $a = 0$ , o sistema tem a reta de singularidades  $y = 0$  e, se  $a < 0$ , o sistema não possui singularidades finitas.

A matriz jacobiana associada ao sistema (4.1) no ponto  $(x_0, y_0)$  é dada por

$$JX(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}y_0 & -\frac{3}{4}x_0 \\ -y_0 & -x_0 + \frac{y_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Sendo assim,  $\det JX(x_0, y_0) = -3y_0^2/8 < 0$ , para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Dessa maneira, para  $a > 0$ , as duas

singularidades finitas são **selas**. Além disso, os autovalores associados à singularidade  $(x_1, y_1)$  são

$$\lambda_1 = \frac{(-3 - \sqrt{57})\sqrt{a}}{4\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(-3 + \sqrt{57})\sqrt{a}}{4\sqrt{3}}$$

com os autovetores  $v_1 = ((9 - \sqrt{57})/8, 1)$  e  $v_2 = ((9 + \sqrt{57})/8, 1)$ , respectivamente. E para a singularidade  $(x_2, y_2)$ , os autovalores são  $\lambda'_1 = -\lambda_1$  e  $\lambda'_2 = -\lambda_2$  com autovetores  $v'_1 = v_1$  e  $v'_2 = v_2$ , respectivamente. Além disso, verificamos que  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pertencem a ramos distintos da hipérbole invariante  $f_2(x, y) = a - x^2 + xy = 0$ .

Dadas as conclusões anteriores é natural questionarmos a existência de uma conexão entre as duas selas. Vejamos que isso não pode ocorrer. De fato, considere a reta  $r : y + 2x = 0$  que passa pelas singularidades  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Observe que o campo de vetores  $X$  associado ao sistema (4.1) restrito à reta  $r$  é dado por

$$X|_r = \left( \frac{3x^2 - a}{2}, 3x^2 - a \right).$$

Como, para  $x \in (x_2, x_1)$  e  $a > 0$  temos  $3x^2 - a < 0$ , segue que o campo  $X|_r$  possui suas duas componentes negativas. Esse fato impede a existência de conexão de separatrizes entre as selas. Com efeito, se houvesse uma conexão entre as selas, ela seria uma solução partindo de  $(x_1, y_1)$  e chegando em  $(x_2, y_2)$  com a mesma inclinação. Isto implica que tal solução interceptaria a reta  $r$  em pelo menos um ponto no qual o campo teria ao menos uma componente positiva, contradizendo o sentido do fluxo.

Considere agora o caso  $a = 0$ . Neste caso, aplicando a reparametrização  $ds = ydt$ , o sistema (4.1) é topologicamente equivalente ao sistema

$$x' = -\frac{3}{4}x, \quad y' = -x + \frac{y}{4}, \quad (4.2)$$

onde  $x'$  e  $y'$  denota a derivada de  $x$  e  $y$  com respeito à variável  $s$ , respectivamente. Dessa maneira, a origem é a única singularidade finita do sistema (4.2) e sua matriz jacobiana na origem é dada por

$$Jp(X|_{U_1})(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Logo, a origem é um ponto de **sela**.

Passamos agora ao estudo das singularidades infinitas. Começamos pela carta local  $U_1$ . A compactificação de Poincaré  $p(X|_{U_1})$  do campo  $X$  é

$$\dot{u} = \frac{a}{2}uv^2 + u^2 - av^2 - u, \quad \dot{v} = \frac{a}{2}v^3 + \frac{3}{4}uv, \quad (4.3)$$

e possui as singularidades  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  se  $a \neq 0$ .

A matriz jacobiana de  $p(X|_{U_1})$  no ponto  $(1, 0)$  é

$$Jp(X|_{U_1})(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

e como os autovalores de  $Jp(X|_{U_1})(1, 0)$  são distintos e positivos, a singularidade  $(1, 0)$  é um **nó repulsor**. Por outro lado, a matriz jacobiana de  $Jp(X|_{U_1})(0, 0)$  é

$$Jp(X|_{U_1})(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, portanto, a origem é uma singularidade semi-hiperbólica do sistema (4.3) para  $a \neq 0$  (para  $a = 0$ , o sistema (4.3) possui a reta  $u = 0$  de singularidades).

A fim de investigar o comportamento local do ponto semi-hiperbólico, utilizaremos o Teorema 2.3.1. Considere a mudança de coordenadas  $(u, v) \rightarrow (v, u)$ , que leva o sistema (4.3) ao sistema

$$\dot{u} = \frac{a}{2}u^3 + \frac{3}{4}vu, \quad \dot{v} = \frac{a}{2}vu^2 + v^2 - au^2 - v. \quad (4.4)$$

Usando a notação do Teorema 2.3.1, temos  $\lambda = -1$ ,  $v = f(u) = -au^2 + o(u^2)$  e  $g(u) = -au^3/4 + o(u^3)$ . Portanto, para  $a > 0$ , a origem é um **nó topológico**, e para  $a < 0$ , a origem é uma **sela topológica**.

Para  $a = 0$ , aplicamos a reparametrização  $d\tau = udt$  ao sistema (4.3), que passa a ser escrito como

$$u' = u - 1, \quad v' = \frac{3}{4}v, \quad (4.5)$$

onde  $u'$  e  $v'$  indicam a derivada de  $u$  e  $v$  com respeito à variável  $\tau$ , respectivamente. Esse sistema possui o ponto  $(1, 0)$  como única singularidade, que é um **nó repulsor**. Note que no caso  $a = 0$  a origem também é uma singularidade da carta local  $U_1$  associada à existência da reta de singularidades  $u = 0$ .

A compactificação de Poincaré  $p(X|_{U_2})$  de  $X$  na carta  $U_2$  é

$$\dot{u} = -\frac{a}{2}v^2 - u + auv^2 + u^2, \quad \dot{v} = av^3 + uv - \frac{v}{4}. \quad (4.6)$$

Nesta carta estamos interessados em estudar somente a origem, que neste caso é uma singularidade cuja matriz jacobiana é

$$Jp(X|_{U_2})(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores são distintos e negativos, a origem é um **nó atrator**. Vale observar que a estrutura local da origem na carta  $U_2$  independe do valor atribuído ao parâmetro  $a$ .

Os retratos de fase do sistema (4.1) estão na Figura 4.1.

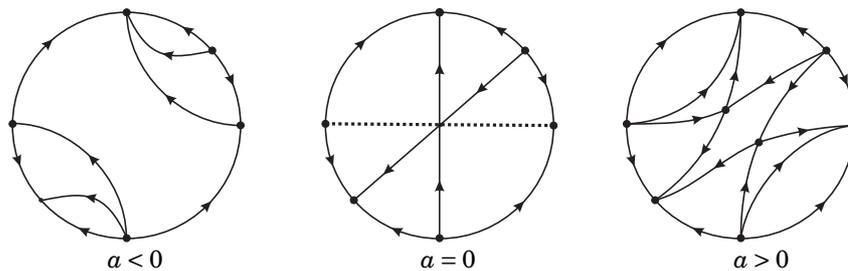


Figura 4.1: Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (4.1)

Segue das considerações acima que temos três retratos de fase distintos no disco de Poincaré, um para  $a < 0$ , outro para  $a > 0$  e um terceiro para  $a = 0$ . Veja a Figura 4.1. O retrato de fase para  $a = 0$  foi obtido do sistema linear (4.2) cujo retrato de fase está representado na Figura 4.2 ao qual adicionamos a reta de singularidades  $y = 0$ .

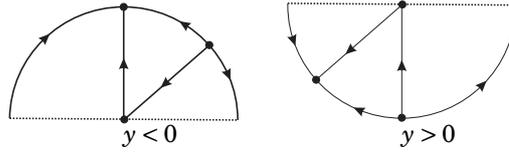


Figura 4.2: Retrato de fase no disco de Poincaré do sistema (4.1) quando  $a = 0$

## 4.2 Exemplo II: sistema com dois parâmetros e uma hipérbole invariante

Considere o sistema

$$\dot{x} = a(2h - 1) + x + \frac{x^2}{2} + (h - 1)xy, \quad \dot{y} = y + \frac{xy}{2} - \frac{hy^2}{2}, \quad (4.7)$$

com condições

$$a(h - 1)(2h - 1)(2h + 1)(3h - 1)(6h - 5) \neq 0.$$

Tais condições foram obtidas durante a investigação dos sistemas quadráticos com hipérbolas invariantes apresentado em [8], tais condições impedem que o sistema e as cônicas invariantes sejam degenerados. Com o intuito de construir retratos de fase globais do sistema (4.7), restringiremo-nos ao caso

$$1 - 2ah < 0.$$

As curvas algébricas invariantes para o sistema (4.7) são:

$$\Phi(x, y) = a + xy = 0 \quad \text{e} \quad L(x, y) = y = 0,$$

uma hipérbole e uma reta, respectivamente.

Começamos a análise do sistema (4.7) pela parte finita. As singularidades finitas para o sistema (4.7) são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(-1 - \sqrt{1 + a(2 - 4h)}, 0\right), & x_2 &= \left(-1 + \sqrt{1 + a(2 - 4h)}, 0\right), \\ x_3 &= \left(-1 - \sqrt{1 - 2ah}, \frac{1 - \sqrt{1 - 2ah}}{2h}\right), & x_4 &= \left(-1 + \sqrt{1 - 2ah}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2ah}}{2h}\right). \end{aligned}$$

Vemos que os pontos singulares  $x_1$  e  $x_2$  pertencem à reta invariante  $L(x, y) = 0$ , enquanto que as singularidades  $x_3$  e  $x_4$ , à hipérbole invariante. Como estamos restritos ao caso  $1 - 2ah < 0$ , os pontos singulares  $x_3$  e  $x_4$  são complexos.

Agora, para cada singularidade finita  $x_1$  e  $x_2$ , estudaremos o comportamento dos seus autovalores.

(a) Para a singularidade  $x_1$ . Os autovalores associados a  $DX(x_1)$  são

$$\lambda_{1,1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + a(2 - 4h)}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_{2,1} = -\sqrt{1 + a(2 - 4h)}.$$

Temos:

- (a.1)  $\lambda_{1,1} < 0$ , se  $a < 0$  e  $(1 + 2a)/(4a) \leq h < 1/2$  ou  $a > 0$  e  $1/2 < h \leq (1 + 2a)/(4a)$ ;
- (a.2)  $\lambda_{1,1} = 0$ , se  $a = 0$  ou  $h = 1/2$ ;
- (a.3)  $\lambda_{1,1} > 0$ , se  $a < 0$  e  $h > 1/2$  ou  $a > 0$  e  $h < 1/2$ ;

(a.4)  $\lambda_{2,1} < 0$ , se  $a < 0$  e  $h > (1+2a)/(4a)$  ou  $a = 0$  ou  $a > 0$  e  $h < (1+2a)/(4a)$ ;

(a.5)  $\lambda_{2,1} = 0$ , se  $h = (1+2a)/(4a)$ .

(a.6)  $\lambda_{2,1}$  não assume valores positivos.

(b) Para a singularidade  $x_2$ . Os autovalores associados a  $DX(x_2)$  são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{1+a(2-4h)}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_{2,2} = \sqrt{1+a(2-4h)}.$$

Temos:

(b.1)  $\lambda_{1,2} < 0$ , se  $a < 0$  e  $h \geq (1+2a)/(4a)$  ou  $a = 0$  ou  $a > 0$  e  $h \leq (1+2a)/(4a)$ ;

(b.2)  $\lambda_{1,2}$  não assume valores maiores ou iguais a zero;

(b.3)  $\lambda_{2,2} = 0$ , se  $h = (1+2a)/(4a)$ ;

(b.4)  $\lambda_{2,2} > 0$ , se  $a < 0$  e  $h > (1+2a)/(4a)$  ou  $a = 0$  ou  $a > 0$  e  $h < (1+2a)/(4a)$ ;

(b.5)  $\lambda_{2,2}$  não assume valores negativos.

Concluimos que as singularidades  $x_1$  e  $x_2$  só existem (isto é, são pontos reais), se  $a < 0$  e  $h > (1+2a)/(4a)$  ou  $a = 0$  ou  $a > 0$  e  $h < (1+2a)/(4a)$ .

Vamos agora analisar as singularidades infinitas do sistema (4.7).

Na carta  $U_1$ , a compactificação de Poincaré é dada por

$$\dot{u} = u(-1 + u + v(-2 + av(1 - 2h))), \quad \dot{v} = -\frac{1}{2}v(1 + 2(h-1)u + 2v(1 + a(2h-1)v)). \quad (4.8)$$

As singularidades infinitas do sistema (4.8) são os pontos (0,0) e (1,0). Os autovalores associados a  $DpX|_{U_1}(0,0)$  são  $-1$  e  $-1/2$ . Logo, o ponto singular (0,0) é sempre um nó atrator. Os autovalores associados a  $DpX|_{U_1}(1,0)$  são  $1$  e  $(-1 - 2(h-1))/2$ . Assim, o ponto singular (1,0) será uma sela, se  $h > 1/2$ , e será um nó repulsor, se  $h < 1/2$ .

Na carta  $U_2$ , a compactificação de Poincaré é dada por

$$\dot{u} = (u-1)u + 2uv + a(2h-1)v^2, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}v(u + 2v - 2h). \quad (4.9)$$

Nessa carta analisamos somente a origem que, neste caso, é um ponto singular. Os autovalores associados a  $DpX|_{U_2}(0,0)$  são  $-1$  e  $-h$ . Assim, o ponto singular (0,0) será uma sela, se  $h < 0$ , e será um nó atrator, se  $h > 0$ .

A Figura 4.3 representa as restrições em  $a$  e  $h$  para o sistema (4.7) e figura-se como seu diagrama de bifurcação. Ela está dividida em regiões e faremos o estudo do sistema (4.7) em cada uma dessas regiões.

Para a região (I), onde  $a < 0$  e  $h < 1/2$ , não temos singularidades finitas. As singularidades na carta  $U_1$  são um nó atrator e um nó repulsor. Na carta  $U_2$  a origem é uma sela e o retrato de fase dessa região é mostrado pela Figura 4.4(i).

Para a (II), onde  $a > 0$  e  $1/(2a) < h < 1/2$ , temos duas singularidades finitas e ambas são selas. As singularidades na carta  $U_1$  são um nó atrator e um nó repulsor. Na carta  $U_2$  a origem é um nó atrator, como na Figura 4.4(ii).

Para a região (III), onde  $a > 0$  e  $1/2 < h < (1+2a)/(4a)$ , temos duas singularidades finitas: a singularidade  $x_1$  é um nó atrator e a singularidade  $x_2$  é uma sela. Na carta  $U_1$  temos duas singularidades, sendo uma sela e um nó atrator. A origem na carta  $U_2$  é um nó atrator. Veja a Figura 4.4(iii).

Na região (IV), onde  $a > 0$ ,  $h > (1+2a)/(4a)$  e  $h > 1/(2a)$ , o sistema (4.7) não possui singularidades finitas. Na carta  $U_1$  temos um nó atrator e uma sela e na carta  $U_2$  a origem é um nó atrator como mostra a Figura 4.4(iv).

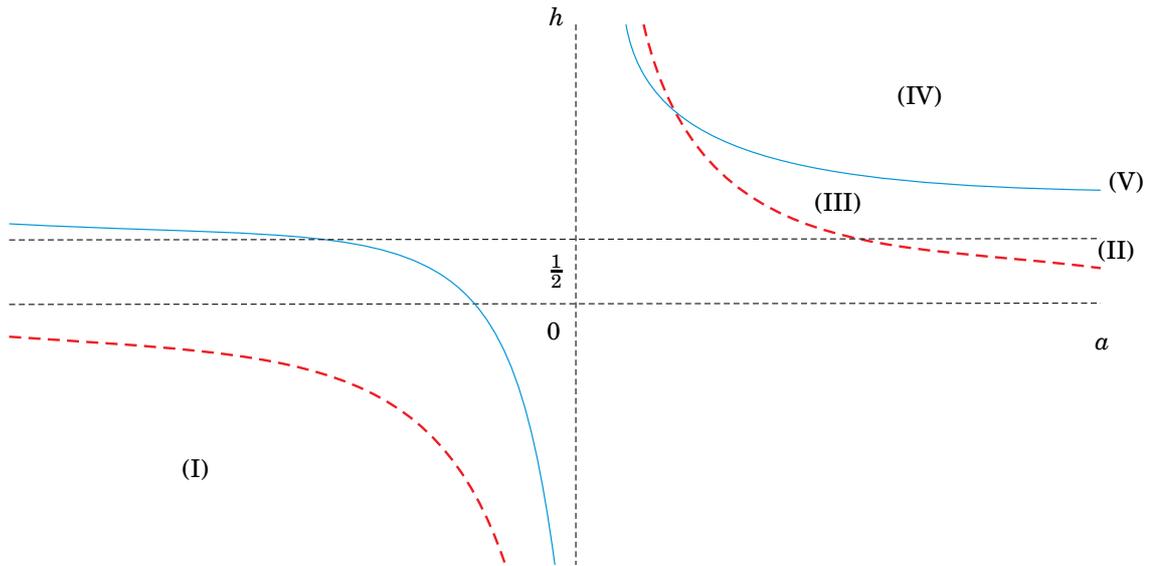


Figura 4.3: Diagrama de bifurcação do sistema (4.7)

Na região (V), onde  $a > 0$  e  $h = (1+2a)/(4a)$ , temos uma singularidade finita, a saber, o ponto  $(-1, 0)$ . Os autovalores associados a  $DX(-1, 0)$  são  $0$  e  $-1/2$  com autovetores  $(1, 0)$  e  $((1-2a)/2a, 1)$ , respectivamente. Logo, o ponto singular finito  $(-1, 0)$  é semi-hiperbólico. Temos que as singularidades infinitas na carta  $U_1$  são uma sela e um nó atrator e na carta  $U_2$  um nó atrator. Dessa forma, a soma dos índices das singularidades finitas é  $1$ , que é igual ao índice do campo de vetores (4.7) no disco. Assim, a singularidade finita  $(-1, 0)$  tem índice  $0$  e, por ser um ponto semi-hiperbólico, ele é uma singularidade do tipo sela-nó. Geometricamente podemos falar que esta sela-nó é o resultado da colisão do nó atrator e da sela que estão sobre o eixo- $x$ . A Figura 4.4(v) mostra o retrato de fase para este caso.

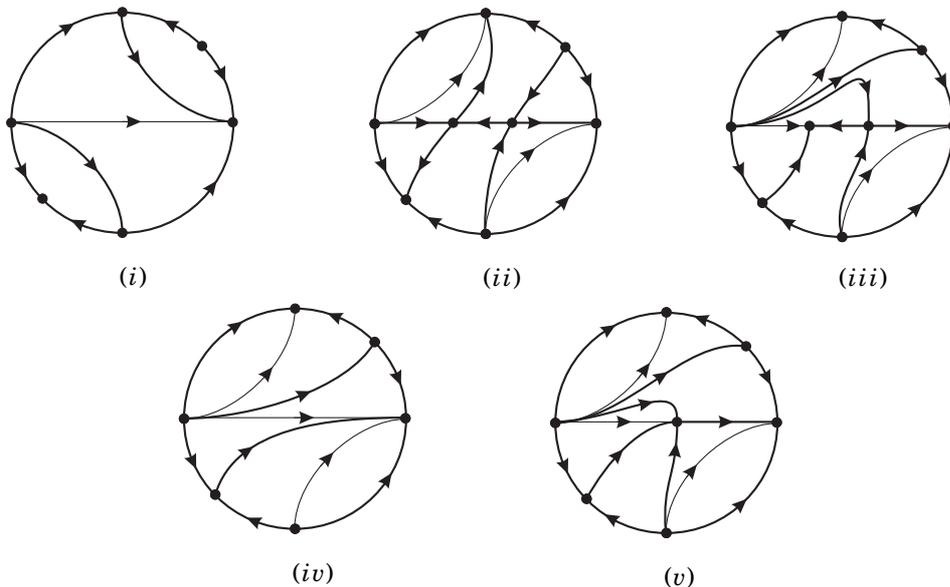


Figura 4.4: Retratos de fase do sistema (4.7)

Nos retratos de fase apresentados na Figura 4.4 desenhamos as separatrizes com espessura maior em

relação a outras órbitas que foram desenhadas para dar mais informações aos retratos de fase, por exemplo hipérbole e reta invariantes que não são separatrizes.

Por fim, afirmamos que quatro dos cinco retratos de fase mostrados na Figura 4.4 são topologicamente distintos.

Para mostrar isso, vamos definir dois invariantes topológicos que serão essenciais nessa nossa classificação. Tais invariantes terão valores inteiros e gerarão uma classificação geométrica que é mais fácil de compreender.

**Definição 4.2.1.** Denotamos por  $I_1$  o número de singularidades reais finitas presentes no retrato de fase.

**Definição 4.2.2.** Denotamos por  $I_2$  a soma dos índices das singularidades reais finitas e isoladas.

A Tabela 4.1 apresenta a classificação geométrica dos retratos de fase da família (4.7).

Tabela 4.1: Classificação geométrica para a família (4.7)

$$I_1 = \begin{cases} 0 (i), \\ 1 (v), \\ 2 \text{ \& } I_2 = \begin{cases} -2 (ii), \\ 0 (iii). \end{cases} \end{cases}$$

Observamos que os retratos de fase (i) e (iv) da Figura 4.4 são topologicamente equivalentes e, portanto, na Tabela 4.1 mostramos somente (i). Para visualizar esse fato, basta desconsiderar a hipérbole no retrato de fase (iv), fazer um espelhamento com eixo vertical e reverter todas as órbitas para obter o retrato de fase (i). A Figura 4.5 ilustra a obtenção do retrato de fase (i) a partir de (iv) após aplicar cada uma das transformações descritas anteriormente.

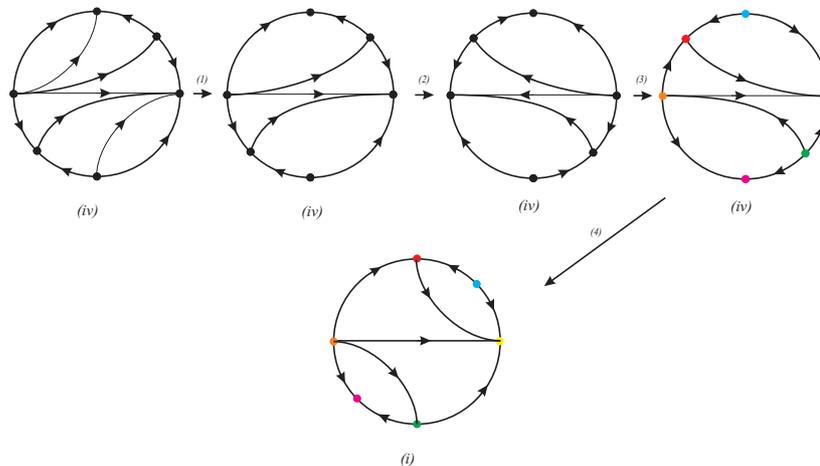


Figura 4.5: Equivalência topológica entre os retratos de fase (i) e (iv). Transformações aplicadas: (1) desconsiderar a hipérbole, (2) espelhamento com eixo vertical, (3) reversão no sentido das órbitas e (4) obtenção do retrato de fase (i) identificando cada um dos pontos singulares infinitos com seu respectivo em relação à cor



# Referências Bibliográficas

---

- [1] ANDREEV, Alexander F. *Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighbourhood of a singular point*, Trans. Amer. Math. Soc. **8** (1958), 183–207.
- [2] ANDRONOV, Aleksandr A.; LEONTOVICH, Evgeniya A.; GORDON, I. I. e MAIER, A. G. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Israel Program for Scientific Translations (Halsted Press, A division of John Wiley & Sons, NY-Toronto, Ontario), 1973.
- [3] CHICONE, Carmen. *Ordinary differential equation with applications*. Springer, 1999.
- [4] DUMORTIER, Freddy, LLIBRE, Jaume; ARTÉS, Joan C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Springer, 2006.
- [5] GONZÁLES VELASCO, Enrique A. *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*. Trans. Am. Math. Soc. **143** (1969), 201–221.
- [6] HIRSCH, Morris H; SMALE, Stephen e DEVANEY, Robert L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier academic press, 1994.
- [7] MELLO, Luis Fernando e SANTOS, Grasielle B. *Uma bifurcação sela-centro em campos hamiltonianos planares*. Revista Brasileira de Ensino de Física **26** (2004), 371–377.
- [8] OLIVEIRA, Regilene D. S.; REZENDE, Alex C. e VULPE, Nicolae. *Family of quadratic differential systems with invariant hyperbolas: a complete classification in the space  $\mathbb{R}^{12}$* , Notas do ICMC–USP – Série Matemática **393** (2014), 1–50.
- [9] PERKO, Lawrence. *Differential equations and dynamical systems*. Springer, 2000.
- [10] ROMANOVSKI, Valery e SHAFER, Douglas. *The center and cyclicity problems*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [11] ROUSSARIE, Robert. *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- [12] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.