SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 19/02/2004
Assinatura: _____

Equações de reação-difusão em domínios finos¹

Olivaine Santana de Queiroz

Orientadora: *Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP processo: 01/09954-0

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Prof. Dr. Gerson Petronilho

Aos meus pais, Oliveira e Vilma,
com todo carinho, admiração
e agradecimento eterno!

“Nada acontece antes de ser sonhado”
(Carl Sandburg)

Agradecimentos

As pessoas levam consigo as marcas do convívio diário com outras tantas pessoas. Sendo assim, agradeço a todos os meus amigos que me presenteam com momentos agradáveis. Além disso, muito agradeço:

à minha orientadora, Maria do Carmo, pela orientação, paciência, atenção e amizade, além da oportunidade que me deu de desenvolver esse trabalho;

aos meus pais, Oliveira e Vilma, cujo saber está no coração, pela confiança, constante incentivo e respeito com que têm acompanhado cada uma de minhas escolhas e aos meus irmãos, Gleizelane e Odevaine, pela amizade;

também aos meus sobrinhos, Gleiceane e Dyonatha, por serem motivos de ternura e alegria;

ao Neri e à sua família, pelo apoio incondicional e pela grande amizade que me têm dedicado;

a todos os meus amigos advindos com a graduação, em especial ao Cassio e ao João Paulo que continuam compartilhando comigo situações hilárias e outras tantas;

aos amigos de mestrado com os quais cursei disciplinas compartilhando dúvidas e conhecimentos e que, com sua amizade, tornaram este período muito prazeroso;

a todos os amigos da pós-graduação aqui do ICMC-USP, mestrandos e doutorandos, todos eles “titulares” em alegria e solidariedade;

a todos funcionários e professores aqui do ICMC-USP, em especial os professores com os quais cursei disciplinas e avancei um pouquinho no conhecimento da Matemática;

a todos aqueles que conviveram comigo nos tempos de Moradia Estudantil em Presidente Prudente, em especial os amigos Fernando e Marcel;

aos professores do Departamento de Matemática da FCT-UNESP de Presidente Prudente, onde essa “aventura” começou.

Sou grato ao ensino público e gratuito, o qual poucas pessoas têm acesso, mas que possibilitou todos os meus estudos até aqui.

Agradeço a DEUS, pelo dom da vida e por estar constantemente me provando que é possível crescer diante das dificuldades e também pela felicidade de poder compartilhar com todos a conquista de mais essa etapa importante em minha vida!

Olivâine.

Resumo

Seja Ω um domínio não-vazio limitado com fronteira Lipschitz arbitrário em $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Denotemos um ponto genérico de $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ por (x, y) . Dado $\varepsilon > 0$, comprimimos o domínio Ω na direção y obtendo o domínio $\Omega_\varepsilon := \{(x, \varepsilon y) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \mid (x, y) \in \Omega\}$. Nesse trabalho consideramos a família de equações de reação-difusão

$$\begin{aligned} (\tilde{E}_\varepsilon) \quad & u_t = \Delta u + f(u), \quad t > 0, (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ & \partial_{\nu_\varepsilon} u = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

onde f é uma não-linearidade com certas condições de crescimento que garantem que $(\tilde{E}_\varepsilon)$ gera um semifluxo $\tilde{\pi}_\varepsilon$ em $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Essa família possui uma equação limite (E_0) , a qual gera um semifluxo limite $\tilde{\pi}_0$ definido em um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Impondo uma condição de dissipatividade em f , para todo $\varepsilon \geq 0$, existe um atrator global $\mathcal{A}_{\tilde{\pi}_\varepsilon}$ associado ao semifluxo $\tilde{\pi}_\varepsilon$. Apresentamos importantes resultados sobre o comportamento assintótico da família de semifluxos $(\tilde{\pi}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Em particular, mostramos que a família de atratores $(\mathcal{A}_{\tilde{\pi}_\varepsilon})_{\varepsilon \geq 0}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ num sentido apresentado no Capítulo 5. Finalizamos esse trabalho com um estudo da equação limite (E_0) quando $M = N = 1$ e Ω é um domínio bem decomposto. A elaboração dessa dissertação foi baseada nos artigos [20], [18] e [4].

Abstract

Let Ω be an arbitrary bounded nonempty domain in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ with Lipschitz boundary. We denote by (x, y) a generic point in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Given $\varepsilon > 0$, we consider the squeezed domain $\Omega_\varepsilon := \{(x, \varepsilon y) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \mid (x, y) \in \Omega\}$. In this work we consider a family of reaction-diffusion equations

$$\begin{aligned} (E_\varepsilon) \quad & u_t = \Delta u + f(u), \quad t > 0, (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ & \partial_{\nu_\varepsilon} u = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

where f is a nonlinearity with some growth conditions such that for each $\varepsilon > 0$, (E_ε) generates a semiflow $\tilde{\pi}_\varepsilon$ in $H^1(\Omega_\varepsilon)$. This family has a limit equation (E_0) which also generates a limiting semiflow $\tilde{\pi}_0$ defined on a closed subspace of $H^1(\Omega)$. A dissipativeness condition on f implies that for each $\varepsilon \geq 0$, there exists a global attractor $\mathcal{A}_{\tilde{\pi}_\varepsilon}$ related to the semiflow $\tilde{\pi}_\varepsilon$. We present important results on the asymptotic behavior of the family of semiflows $(\tilde{\pi}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ as $\varepsilon \rightarrow 0^+$. In particular, we show that the family of attractors $(\mathcal{A}_{\tilde{\pi}_\varepsilon})_{\varepsilon \geq 0}$ is upper semicontinuous at $\varepsilon = 0$ in a restrict sense to be presented in Chapter 5. We conclude with a study of the limiting equation (E_0) when $M = N = 1$ and Ω is a nice decomposed domain. This work is based on the papers [20], [18] and [4].

Conteúdo

<i>Introdução</i>	1
1 <i>Preliminares</i>	5
1.1 Teoria espectral abstrata	5
1.2 Semifluxos locais	9
1.3 Atratores globais	13
2 <i>As Equações de Reação-Difusão em Domínios Finos</i>	19
2.1 As equações de reação-difusão em domínios finos	19
2.2 Os espaços $H_s^1(O)$ e $L_s^2(O)$	29
2.3 O problema limite	36
3 <i>Convergência Espectral</i>	41
3.1 Convergência espectral	41
3.2 Monotonicidade	47
4 <i>Convergência de Semigrupos e de Semifluxos</i>	53
4.1 Convergência de semigrupos	53
4.2 Convergência de semifluxos	59
5 <i>Semicontinuidade Superior dos Atratores</i>	69
5.1 Existência de atratores	69
5.2 Semicontinuidade superior dos atratores	75
6 <i>Domínios bem Decompostos</i>	77
6.1 Domínios com seções verticais conexas	77
6.2 Domínios bem decompostos	85
6.3 Domínios em forma de C	99
<i>Bibliografia</i>	105

Introdução

Problemas envolvendo domínios finos aparecem com certa naturalidade em situações físicas. Ao se estudar a dinâmica de um oceano, por exemplo, a região onde se localiza o fluido possui um comprimento vertical fino quando comparado com as dimensões horizontais. Situação análoga aparece em Meteorologia, onde podemos analisar problemas de fluidos circulando entre duas esferas concêntricas de raios R e $R + \varepsilon$, as quais modelam a atmosfera. Neste caso, a diferença entre os raios pode ser considerada pequena ao ser comparada com a área da superfície terrestre. Há problemas envolvendo equações de reação-difusão para os quais conseguimos modelos com coeficientes de difusão grandes e, após uma mudança de variável, obtemos uma equação diferencial parcial definida em um domínio fino. Estes problemas dão origem a uma equação de evolução.

Em outras palavras, seja $Q \subset \mathbb{R}^M$ um domínio limitado com certa regularidade. Vamos supor que seja dada uma equação de evolução, com condições de fronteira do tipo Neumann, definida em $Q \times (0, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Em tal situação é natural pensarmos em ignorar a direção fina e considerar a equação apenas em Q . Espera-se, entretanto, que as informações qualitativas e quantitativas não sejam perdidas. Problemas envolvendo domínios finos têm sido considerados por diversos autores com a utilização de diferentes técnicas. Em [21] encontramos algumas referências de problemas que se enquadram nessa classe.

O estudo de equações diferenciais parciais definidas em domínios finos é um caso particular de problemas que envolvem os efeitos da variação do domínio na dinâmica de uma equação diferencial parcial. Na verdade, nessa classe de problemas a variação do domínio não é “regular” e sua análise pode se tornar complicada. Nessa dissertação estudaremos um caso particular destes problemas.

Consideremos um domínio Ω não-vazio, limitado e com fronteira Lipschitz arbitrário em $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Denotemos por (x, y) um ponto qualquer de $\mathbb{R}^{M+N}$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos $\Omega_\varepsilon := \{(x, \varepsilon y) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \mid (x, y) \in \Omega\}$. Ω_ε é obtido comprimindo o domínio Ω na direção y pelo fator ε . Consideremos em Ω_ε a equação de reação-difusão

$$(\tilde{E}_\varepsilon) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u), & t > 0, (x, y) \in \Omega_\varepsilon \\ \partial_{\nu_\varepsilon} u &= 0, & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

onde ν_ε é a normal exterior a $\partial\Omega_\varepsilon$ e f é uma não-linearidade. Aqui o domínio Ω_ε varia de acordo com o parâmetro ε . Nosso interesse é analisar o que ocorre com a dinâmica de

$(\tilde{E})_\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. É conveniente realizarmos uma mudança de variável com a qual o parâmetro ε é “transferido” para a equação do problema. De fato, há uma mudança de variável que transforma o domínio Ω_ε no domínio fixado inicialmente Ω , e a equação $(\tilde{E}_\varepsilon)$ em uma equação (E_ε) . Mais precisamente:

$$(E_\varepsilon) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta_x u + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y u + f(u), \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \\ \partial_{\nu_x} u + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\nu_y} u &= 0, \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ é a normal exterior em $\partial\Omega$. A pergunta repete-se: o que ocorre com a dinâmica de $(F)_\varepsilon$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$? Nosso próximo passo é definir uma equação limite (E_0) e comparar, de algum modo, a dinâmica da família (E_ε) , $\varepsilon > 0$, com a de (E_0) .

Se associado a cada (E_ε) , $\varepsilon > 0$, temos definido um atrator global $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$, podemos comparar a dinâmica da família $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ com a dinâmica de (E_0) analisando a semicontinuidade superior da família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ em $\varepsilon = 0$. Respostas para a pergunta acima para equações de reação-difusão em domínios finos foram estudadas em [14] e [20]. Os resultados apresentados em [20] possuem um caráter mais geral do que os encontrados em [14]. No caso bidimensional, um exemplo dos domínios considerados em [14] são os definidos por uma função suave g definida em um intervalo fechado $[a, b]$, isto é,

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, 0 < y < g(x)\}.$$

Hale e Raugel mostram em [14] que, nesse caso, a família de semifluxos $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, onde para cada $\varepsilon > 0$, π_ε é o semifluxo gerado pelas soluções de $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, possui um semifluxo limite π_0 , o qual é gerado pelo seguinte problema unidimensional em $[a, b]$:

$$\begin{aligned} u_t &= (1/g)(gu')' + f(u), \\ u'(c) &= 0, \quad c = a, b. \end{aligned}$$

Impondo uma condição de dissipatividade em f , os autores também estabeleceram um resultado de semicontinuidade superior para a correspondente família de atratores.

Infelizmente, as técnicas utilizadas em [14] não podem ser generalizadas para o caso de domínios mais gerais, por exemplo, os que contêm “buracos”. Prizzi e Rybakowski mostraram em [20] que, mesmo em situações mais complicadas, um semifluxo limite existe. Impondo certas condições de crescimento na função f , para cada $\varepsilon > 0$, a equação (E_ε) pode ser escrita na forma abstrata

$$\dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u),$$

onde $\hat{f}$ é o operador de Nemitskiĭ associado a f . Neste trabalho foram definidos um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, denotado por $H_s^1(\Omega)$, e também um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$, denotado por $L_s^2(\hat{\Omega})$, o qual é o fecho de $H_s^1(\Omega)$ na norma de $L^2(\Omega)$.

Com a definição de um operador linear $A_0: D(A_0) \subset H_s^1(\Omega) \longrightarrow L_s^2(\Omega)$, foi obtida uma equação abstrata:

$$\dot{u} + A_0 u = \hat{f}(u),$$

onde, novamente, $\hat{f}$ é o operador de Nemitskiĭ associado a f , o qual aplica subconjuntos de $H_s^1(\Omega)$ em subconjuntos de $L_s^2(\Omega)$. Tal equação define um semifluxo π_0 no espaço $H_s^1(\Omega)$, que é o semifluxo limite para a família $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Para comparar os semifluxos π_ε com π_0 , foi introduzida uma família de normas $|\cdot|_\varepsilon$ e um resultado de convergência com relação a essas normas é mostrado.

Impondo a condição de dissipatividade na não-linearidade f , temos que cada semifluxo π_ε , $\varepsilon \geq 0$, possui um atrator global $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$. Prizzi e Rybakowski mostraram em [20] que a família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ com relação a família de normas $|\cdot|_\varepsilon$. Estes resultados generalizam os resultados de [14]. Além disso, quando $M = N = 1$ e sobre certas condições na geometria de Ω , eles caracterizaram o operador A_0 e seu domínio $D(A_0)$.

Nosso estudo teve como ponto inicial o trabalho [20]. Também analisamos alguns resultados de [4] que versam sobre o comportamento da família de autovalores associados à família de problemas $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Em [4], estes resultados foram utilizados no cálculo do Índice de Conley de certos conjuntos invariantes isolados. Para nos auxiliar na análise do problema limite também estudamos alguns resultados de [18]. A caracterização do problema limite apresentada em [18] foi utilizada para demonstrar o Teorema da Variedade Inercial. Tanto a Teoria do Índice de Conley quanto o Teorema da Variedade Inercial não fizeram parte do nosso projeto de estudo.

Passamos a descrever o modo em que esse texto está organizado.

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições básicas necessárias no decorrer do texto. Introduzimos os conceitos já conhecidos de autovalor e autovetor de pares de formas bilineares simétricas, semifluxos em espaços métricos e atratores globais. Estes últimos são apresentados no contexto de equações diferenciais parabólicas.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação do problema de reação-difusão definido em domínios finos. Formulamos a equação abstrata associada ao problema $(\tilde{E}_\varepsilon)$ bem como a equação correspondente (E_ε) , obtida por mudança de variável conveniente. Demonstramos resultados que nos garantem que tais equações geram semifluxos em $H^1(\Omega)$. Mostramos que a mudança de variáveis é, na verdade, uma conjugação entre os semifluxos gerados por $(\tilde{E}_\varepsilon)$ e (E_ε) . Os espaços “limites” $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$ são apresentados e estudamos algumas propriedades dos mesmos. Por último, construímos o problema limite. Para tanto, são necessários alguns resultados adicionais sobre a função f que garantem que o semifluxo “limite” esteja bem definido no espaço $H_s^1(\Omega)$. Para comparar tais semifluxos, introduzimos uma família de normas $|\cdot|_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

O resultado de convergência dos autovalores e autovetores é apresentado no Capítulo 3. Neste capítulo também apresentamos um resultado de [4] que trata sobre uma mono-

tonicidade estrita da família de autovalores.

Tendo provado a convergência dos autovalores e autovetores, estamos prontos para “atacar” a convergência dos semigrupos lineares e dos semifluxos. Isso é feito no Capítulo 4. Demonstramos que existe uma certa convergência uniforme dos semigrupos lineares com relação à família de normas $|\cdot|_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. A seguir mostramos a convergência dos semifluxos. Finalizamos com um resultado sobre as soluções associadas aos semifluxos que muito nos auxiliará na análise da semicontinuidade superior dos atratores.

O Capítulo 5 trata da semicontinuidade superior em $\varepsilon = 0$ da família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$. Para que esse estudo seja feito é necessário antes garantir a existência dessa família, o que é feito acrescentando uma condição de dissipatividade na não-linearidade f .

Em [18] os autores fazem uma análise mais cautelosa dos espaços $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$ no caso em que Ω é um domínio com seções verticais conexas e, posteriormente, no caso mais geral em que Ω é um domínio bem decomposto, mas sempre com $M = N = 1$. Esta análise, bem como a definição de domínios bem decompostos, é apresentada no Capítulo 6. O importante teorema de caracterização do problema limite também é apresentado neste capítulo. Finalizamos o capítulo ilustrando o teorema que caracteriza o operador linear limite com os domínios em forma de C . Para estes, apresentamos um estudo dos autovalores do operador linear limite.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse primeiro capítulo iremos apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer desse trabalho. A Seção 1.1 traz um estudo sobre os autovalores e autovetores associados a um par (a, b) de formas bilineares. Nesta mesma seção também apresentamos importantes resultados sobre os operadores gerados por estas formas bilineares. Na Seção 1.2 a definição e alguns resultados sobre semifluxos são apresentados. Os atratores globais, juntamente com alguns resultados, são apresentados na Seção 1.3 no contexto das equações parabólicas semi-lineares. Para os interessados em uma bibliografia, indicamos [8], [23] e [28] para o estudo da teoria espectral. Os semifluxos em espaços métricos tal como são apresentados aqui se encontram em [25]. No estudo dos atratores globais citamos [13], [16] e [22]. Nesse capítulo e em todo texto utilizamos definições, notações e resultados sobre equações diferenciais parciais de [15].

1.1 Teoria espectral abstrata

Nessa seção apresentaremos a definição de autovalores e autovetores para pares de formas bilineares simétricas e alguns resultados relacionados com este conceito. As demonstrações podem ser encontradas em [8], [23] ou [28].

Definição 1.1.1 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineares simétricas em V . Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, com $u \neq 0$, satisfazem

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \text{ para todo } v \in V,$$

dizemos que λ é um *autovalor* do par (a, b) e que u é um *autovetor* do par (a, b) correspondente ao autovalor λ . Também dizemos que (λ, u) é um *par autovalor-autovetor* de (a, b) .

Sejam V e H dois espaços de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ de dimensão infinita. Vamos supor também que $V \subset H$ com inclusão compacta e que V seja denso em H . Denotaremos por

$|\cdot|_V$ e $|\cdot|_H$ as normas de V e H respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de H . Seja b a restrição deste produto interno a $V \times V$. É claro que o produto interno b pode ser visto como uma forma bilinear simétrica em $V \times V$.

Uma forma bilinear simétrica e contínua $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *coerciva com relação a H* , ou somente *coerciva*, se satisfaz a seguinte condição: existem constantes d , $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$ tais que

$$a(u, u) \geq \alpha |u|_V^2 - d |u|_H^2 \text{ para todo } u \in V.$$

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [23] e [8], apresenta algumas propriedades dos autovalores de um par (a, b) , onde b é como acima e $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear contínua, simétrica e coerciva. Mais precisamente:

Proposição 1.1.2 *Sejam V e H espaços de Hilbert como acima e b a restrição do produto interno de H a $V \times V$. Seja $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva e consideremos o par (a, b) . Então, o conjunto dos autovalores de (a, b) é infinito e enumerável, possui um menor elemento e cada autovalor possui multiplicidade finita. Além disso, se $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é esta sequência de autovalores, então $\lambda_k \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em V é *H -ortogonal* se $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$. A sequência H -ortogonal $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita *H -completa* se sempre que $\langle u_i, v \rangle = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $v = 0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os subespaços vetoriais k -dimensionais de V será denotado por $\mathcal{V}_k$.

No restante dessa seção, seja $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, simétrica, contínua e coerciva e sejam V , H e b como na Proposição 1.1.2. Denotemos por $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência repetida dos autovalores de (a, b) .

O próximo resultado caracteriza cada um dos autovalores do par (a, b) .

Proposição 1.1.3 ([23], Teorema 6.2-2) *Para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_k = \min_{E \in \mathcal{V}_k} \max_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{a(u, u)}{b(u, u)}.$$

Além disso, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ H -ortogonal tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, u_k é um autovetor de (a, b) correspondente ao autovalor λ_k .

Notemos que a Proposição 1.1.3 implica que a sequência de autovalores de (a, b) satisfaz

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Outro modo de caracterizar os autovalores é dado a seguir.

Proposição 1.1.4 ([23]) *Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência H -ortogonal tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, u_k é autovetor de (a, b) associado ao autovalor λ_k , então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é H -completa e para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= a(u_k, u_k)/|u_k|_H^2 \\ &= \min \{a(u, u)/|u|_H^2 \mid u \in V \setminus \{0\} \text{ com } \langle u, u_j \rangle = 0 \text{ para } j = 1, \dots, k-1\}. \end{aligned}$$

Se $k = 1$ então

$$\lambda_1 = \min \{a(v, v)/|v|_H^2 \mid v \in V \setminus \{0\}\}.$$

Além disso, o espaço V é caracterizado por

$$V = \left\{ v \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle v, u_n \rangle|^2 / |u_n|_H^2 < \infty \right\}.$$

A seguinte recíproca da Proposição 1.1.4 é válida.

Proposição 1.1.5 *Suponhamos que exista uma sequência de números reais $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma sequência de vetores $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ H -ortogonal em $V \setminus \{0\}$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \mu_k &= a(v_k, v_k)/|v_k|^2 \\ &= \min \{a(u, u)/|u|^2 \mid u \in V \setminus \{0\} \text{ com } \langle u, v_j \rangle = 0 \text{ para } j = 1, \dots, k-1\}, \end{aligned}$$

e para $k = 1$.

$$\mu_1 = \min \{a(v, v)/|v|_H^2 \mid v \in V \setminus \{0\}\}.$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que $\mu_k = \lambda_k$ e v_k é um autovetor de (a, b) correspondente ao autovalor μ_k .

Demonstração. Segue do Teorema 2.3 em [28] que, para cada $k \in \mathbb{N}$, v_k é autovetor do par (a, b) associado ao autovalor μ_k e o Teorema 3.1 em [28] implica que a sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é H -completa. Além disso,

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \quad (1.1)$$

Assim, para completar a demonstração da proposição precisamos mostrar que $\mu_k = \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $v \in V$ com $v \neq 0$, utilizaremos a notação $R(v) := a(v, v)/|v|_H^2$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, $R(v_k) = \mu_k$. É claro que $\mu_1 = \lambda_1$. Denotemos por V_m o subespaço de V gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_m$. Seja $v \in V_m$ com $v \neq 0$ arbitrário. Logo, existem números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tais que $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$. Portanto, (1.1) implica que

$$R(v) = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2} \leq \mu_m.$$

Como $R(v_m) = \mu_m$, temos que

$$\mu_m = \max_{v \in V_m \setminus \{0\}} R(v).$$

Seja agora E_m um subespaço de V de dimensão m arbitrário. Afirmamos que

$$\mu_m \leq \max_{v \in E_m \setminus \{0\}} R(v).$$

Isso é claro se $E_m = V_m$. Suponhamos então que $E_m \neq V_m$. Então existe um $v_0 \in E_m$ com $\langle v_0, v_i \rangle = 0$ para $i = 1, \dots, m-1$. Com isso, temos que $\mu_m \leq R(v_0)$ e portanto $\mu_m \leq \max_{v \in E_m \setminus \{0\}} R(v)$, demonstrando nossa afirmação.

Nossa afirmação implica que, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_k = \min_{E \in \mathcal{V}_k} \max_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{a(u, u)}{b(u, u)} = \lambda_k.$$

Isso prova a proposição. $\square$

Seja W o conjunto de todos $u \in V$ tais que existe um $w = w_u \in H$ com a propriedade

$$a(u, v) = \langle w, v \rangle \text{ para todo } v \in V.$$

Os resultados da Seção 3.2.5 do Capítulo VI em [7] mostram que $W \neq \emptyset$ e que, dado $u \in W$, o vetor w_u é determinado de modo único. Assim, podemos definir o seguinte operador linear

$$A: D(A) \subset V \longrightarrow V,$$

dado por $Au := w_u$, $u \in D(A) := W$. Além disso, as Proposições 9 e 10 da Seção 3.2.5, Capítulo VI de [7] implicam no seguinte resultado:

Proposição 1.1.6 *O conjunto $D(A)$ é um subespaço vetorial denso em V e em H . O operador A é auto-adjunto em $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com resolvente compacto.*

O operador A definido na Proposição 1.1.6 é chamado *operador linear gerado pelo par $(a, \langle \cdot, \cdot \rangle)$* . É claro que um par (λ, u) é um par autovalor-autovetor de A se, e somente se, (λ, u) é um par autovalor-autovetor de (a, b) .

Concluimos essa seção com uma importante propriedade do operador A gerado por um par de formas bilineares satisfazendo as propriedades acima.

Os conceitos e resultados sobre semigrupos analíticos, operadores setoriais e os importantes espaços de potências fracionárias podem ser encontrados em [12], [15] ou [17]. Seguiremos aqui a notação de [15]. Para uma apresentação mais detalhada destes tópicos sugerimos [5] e [6]. O próximo resultado é uma consequência, por exemplo, da Proposição 3, da Seção A6, Capítulo XVII em [9].

Proposição 1.1.7 *O operador linear A gerado pelo par (a, b) é um operador setorial em H e, portanto, $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, o qual é denotado por $\{e^{-At}, t \in [0, \infty)\}$.*

Além disso, segue, por exemplo, de resultados da Seção 3.6 do Capítulo VIII de [8] o seguinte fato:

Proposição 1.1.8 *Para cada $\alpha > 0$, seja H^α o espaço de potência fracionária associado ao operador A . Se $\alpha = 1/2$, então*

$$H^{1/2} = V.$$

Temos também a seguinte relação entre os autovalores de A e do semigrupo $\{e^{-At}, t \in [0, \infty)\}$ por ele gerado:

Proposição 1.1.9 ([17], Teorema 2.4) *Com a notação introduzida nessa seção, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *se λ é um autovalor de A , então, para cada $t > 0$, $e^{-\lambda t}$ é autovalor de e^{-At} ;*
- (2) *seja $t > 0$. Se $\mu = e^{-\lambda t}$ é um autovalor de e^{-At} , então existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda + 2\pi ki/t$ é um autovalor de A .*

1.2 Semifluxos locais

Nessa seção apresentamos o conceito de semifluxo local. Utilizaremos a notação apresentada em [25].

Definição 1.2.1 *Sejam X um espaço métrico, D um subconjunto aberto em $[0, \infty) \times X$ e $\pi: D \rightarrow X$ uma aplicação. Se $(t, x) \in D$, escreveremos $x\pi t := \pi(t, x)$. A aplicação π é chamada *semifluxo local* se as seguintes propriedades estão satisfeitas:*

- (1) *π é uma aplicação contínua;*
- (2) *para todo $x \in X$, existe um $\omega_x \in (0, \infty]$ tal que $(t, x) \in D$ se, e somente se, $0 \leq t < \omega_x$;*
- (3) *$x\pi 0 = x$, para todo $x \in X$;*
- (4) *se $(t, x) \in D$ e $(s, x\pi t) \in D$, então $(t+s, x) \in D$ e $x\pi(t+s) = (x\pi t)\pi s$.*

Se $\omega_x = \infty$ para todo $x \in X$, então π é chamado um *semifluxo global*.

Se $A \subset X$ e $S \subset [0, \infty)$ são tais que $S \times A \subset D$, definimos $A\pi S := \pi(S \times A)$. Além disso, se $A = \{x\}$ ou $S = \{t\}$, escrevemos $x\pi S := \{x\}\pi S$ e $A\pi t := A\pi\{t\}$.

Exemplo 1.2.2 ([15], Teoremas 3.3.3 e 3.4.1) Suponhamos que X seja um espaço de Banach e seja $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial. Seja $0 \leq \alpha < 1$ e consideremos um conjunto aberto $U \subset X^\alpha$ e $f: U \rightarrow X$ uma função localmente Lipschitziana. O Teorema 3.3.3 em [15] implica que, para cada $u_0 \in U$, existe um $\omega_{u_0} \in (0, \infty]$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

possui uma única solução $t \mapsto u(t, u_0)$ definida em $[0, \omega_{u_0})$. Escrevendo $u_0 \pi_f t := u(t, u_0)$, segue que π_f é um semifluxo local em U . $\square$

Dado um semifluxo local π , temos associado a este semifluxo o conceito de solução.

Definição 1.2.3 Seja π um semifluxo local e J um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma aplicação $\sigma: J \rightarrow X$ é chamada uma *solução* de π se, para todo $t \in J$ e $s \in [0, \infty)$ tais que $t + s \in J$, segue que $\sigma(t) \pi s$ está definido e $\sigma(t) \pi s = \sigma(t + s)$. Se $0 \in J$ e $\sigma(0) = x$, dizemos que σ é uma *solução passando por x* . Se $J = \mathbb{R}$, então σ é chamada uma *solução completa* com relação ao semifluxo local π (passando por $x = \sigma(0)$).

Exemplo 1.2.4 Consideremos a notação introduzida no Exemplo 1.2.2. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\sigma: J \rightarrow U$ uma solução de π_f . Afirmamos que σ é diferenciável em J . De fato, seja $s_0 \in J$ e fixemos $s_1 \in J$ com $s_1 < s_0$. Definamos $\tilde{r} := (s_0 - s_1)/2$. Logo, se $|h| < \tilde{r}$, temos que $s_0 + h > s_1$. Como J é um intervalo aberto, tomando $r > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir também que $s_0 + h \in J$ para todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < r$.

Dado $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < r$, definimos $t := (s_0 - s_1) + h$ e $t_1 := s_0 - s_1$. Segue que $t > 0$ e $t_1 > 0$. Além disso, como $s_1 + t = s_0 + h \in J$ e $s_1 + t_1 = s_0 \in J$, temos que

$$\sigma(s_1) \pi_f t = \sigma(s_1 + t) = \sigma(s_0 + h),$$

e

$$\sigma(s_1) \pi_f t_1 = \sigma(s_1 + t_1) = \sigma(s_0).$$

Definindo $u_0 := \sigma(s_1) \in U$, temos que $u_0 \pi_f t$ e $u_0 \pi_f t_1$ estão definidas e

$$\frac{\sigma(s_0 + h) - \sigma(s_0)}{h} = \frac{u_0 \pi_f t - u_0 \pi_f t_1}{t - t_1}.$$

Se $h \rightarrow 0$ temos que $t \rightarrow t_1$. Como a função $t \mapsto u_0 \pi_f t$ é diferenciável em t_1 , segue que $s \mapsto \sigma(s)$ é diferenciável em s_0 . $\square$

Outro conceito importante associado a semifluxos (locais ou globais) é o de conjuntos invariantes.

Seja Y um subconjunto de X e consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \text{Inv}_\pi^+(Y) &:= \{x \in X \mid x\pi[0, \omega_x) \subset Y\}, \\ \text{Inv}_\pi^-(Y) &:= \{x \in X \mid \text{existe uma solução } \sigma: (-\infty, 0] \rightarrow X \\ &\quad \text{passando por } x \text{ com } \sigma(-\infty, 0] \subset Y\}, \\ \text{Inv}_\pi(Y) &:= \text{Inv}_\pi^+(Y) \cap \text{Inv}_\pi^-(Y). \end{aligned}$$

Um conjunto $Y \subset X$ é chamado *invariante* se $Y = \text{Inv}_\pi(Y)$.

Notemos que se Y é um subconjunto de X e π um semifluxo local em X tais que $\omega_x = \infty$ para todo $x \in Y$, então Y é invariante se, e somente se, para todo $x \in Y$, existe uma solução completa $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow X$ passando por x .

Seja agora N um subconjunto arbitrário do espaço métrico X . Dizemos que o semifluxo π *não explode em N* se, para todo $x \in X$ tal que $x\pi[0, \omega_x) \subset N$, temos que $\omega_x = \infty$.

Lema 1.2.5 *Sejam X , A e f como no Exemplo 1.2.2 e $N \subset U$ um subconjunto fechado em X^α e limitado em X . Se $f(N)$ é limitado, então o semifluxo local π_f não explode em N .*

Demonstração. Suponhamos que a conclusão do teorema não seja verdadeira. Logo, existe um $u_0 \in X$ com $u_0\pi_f[0, \omega_{u_0}) \subset N$ e $\omega_{u_0} \in (0, \infty)$. Afirmamos que existe um $u_1 \in N$ tal que $|u_0\pi_f t - u_1|_{X^\alpha} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \omega_{u_0}^-$.

Suponhamos que nossa afirmativa seja verdadeira, e consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), \\ u(\omega_{u_0}) = u_1. \end{cases} \quad (1.3)$$

O Teorema 3.3.3 em [15] implica que existe um $\eta > 0$ tal que o problema de Cauchy (1.3) possui uma única solução em $[\omega_{u_0}, \omega_{u_0} + \eta)$. Portanto, $u_1\pi_f t$ está definido para todo $t \in [\omega_{u_0}, \omega_{u_0} + \eta)$. Definimos a seguinte função:

$$u(t) := \begin{cases} u_0\pi_f t & \text{se } 0 < t < \omega_{u_0}; \\ u_1 & \text{se } t = \omega_{u_0}; \\ u_1\pi_f t & \text{se } \omega_{u_0} < t < \omega_{u_0} + \eta. \end{cases}$$

Nossa afirmação implica que $t \mapsto u(t)$ é contínua em $[0, \omega_{u_0} + \eta)$. Além disso, para todo $t \in [0, \omega_{u_0}]$ temos que

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u_0\pi_f s)ds, \quad (1.4)$$

e para todo $t \in [\omega_{u_0}, \omega_{u_0} + \eta]$,

$$u(t) = e^{-At}u_1 + \int_{\omega_{u_0}}^t e^{-A(t-s)}f(u_1\pi_f s)ds \quad (1.5)$$

Combinando (1.4) e (1.5) temos que, para todo $t \in [0, \omega_{u_0} + \eta)$,

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u(s))ds$$

Assim, pelo Teorema 4.3.3 de [6], temos que $t \mapsto u(t)$ é uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

em $[0, \omega_{u_0} + \eta)$. Mas isso contradiz o fato de $[0, \omega_{u_0})$ ser o intervalo maximal de existência da solução passando por u_0 .

Assim, para completar a prova do teorema, basta mostrar que nossa afirmação é verdadeira. Como A é um operador setorial com resolvente compacto existe um $k > 0$ e um $\delta > 0$ tal que $\sigma(A + kI) > \delta > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|u|_{X^\alpha} = |A_1^\alpha u|_X$, onde $A_1 = A + kI$. Notemos que u é solução de

$$\begin{cases} \dot{u} + A_1 u = f(u) + ku, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

se, e somente se, u é solução de 1.2.

Definimos $f_1(u) = f(u) + ku$. Notemos que $f_1(N)$ é um conjunto limitado.

Para demonstrar nossa afirmação, mostremos inicialmente que o conjunto $\{|u_0 \pi_f t|_{X^\beta} \mid \tau_0 \leq t \leq \omega_{u_0}\}$ é limitado, onde $\tau_0 > 0$ é uma constante positiva e β é um número real tal que $\alpha \leq \beta < 1$.

Se $t \in [0, \omega_{u_0})$, pela fórmula da variação das constantes temos:

$$u_0 \pi_f t = e^{-A_1 t} u_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds.$$

Logo, para $0 \leq t < \omega_{u_0}$, segue do Teorema 1.4.3 de [15] que

$$\begin{aligned} |u_0 \pi_f t|_{X^\beta} &\leq |A_1^{\beta-\alpha} e^{-A_1 t} A_1^\alpha u_0|_{X^\beta} + \int_0^t |A_1^\beta e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s)|_X ds \\ &\leq |A_1^{\beta-\alpha} e^{-A_1 t}| |u_0|_{X^\alpha} + \int_0^t |A_1^\beta e^{-A_1(t-s)}| |f_1(u_0 \pi_f s)|_X ds \\ &\leq C_{\beta-\alpha} t^{-(\beta-\alpha)} |u_0|_{X^\alpha} + C \int_0^t (t-s)^{-\beta} ds, \end{aligned}$$

onde $C = C_\beta \sup\{|f_1(u)|_X \mid u \in N\}$ e $C_{\beta-\alpha}$ e C_β são constantes positivas como no Teorema 1.4.3 de [15]. Mas

$$\int_0^t (t-s)^{-\beta} ds = \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Assim,

$$|u_0 \pi_f t|_{X^\beta} \leq C_{\beta-\alpha} t^{-(\beta-\alpha)} |u_0|_{X^\alpha} + C \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

A expressão acima é limitada quando $t \rightarrow \omega_{u_0}^-$, isto é, existe um $C' > 0$ tal que

$$|u_0 \pi_f t|_{X^\beta} \leq C' \text{ para todo } t \in [\tau_0, \omega_{u_0}].$$

Como X^α é um espaço normado completo, para completar a demonstração basta mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $t, \tau \in [\tau_0, \omega_{u_0})$ com $|t - \tau| < \delta$, então $|u_0 \pi_f t - u_0 \pi_f \tau|_{X^\alpha} < \varepsilon$.

Primeiramente notemos, que se $0 \leq \tau < t < \omega_{u_0}$, então

$$\begin{aligned} u_0 \pi_f t - u_0 \pi_f \tau &= e^{-A_1 t} u_0 - u_0 \pi_f \tau + \int_0^\tau e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds + \int_\tau^t e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds \\ &= e^{-A_1(t-\tau)} e^{-A_1 \tau} u_0 - u_0 \pi_f \tau + \int_0^\tau e^{-A_1(t-\tau)} e^{-A_1(\tau-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds \\ &\quad + \int_\tau^t e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds \\ &= (e^{-A_1(t-\tau)} - I) u_0 \pi_f \tau + \int_\tau^t e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s) ds. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4.3 de [15] temos que

$$\begin{aligned} |u_0 \pi_f t - u_0 \pi_f \tau|_{X^\alpha} &\leq |A_1^\alpha (e^{-A_1(t-\tau)} - I) u_0 \pi_f \tau|_X + \int_\tau^t |A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} f_1(u_0 \pi_f s)|_X ds \\ &\leq |(e^{-A_1(t-\tau)} - I) A_1^\alpha u_0 \pi_f \tau|_X + C \int_\tau^t (t-s)^\alpha ds \\ &\leq C_{\beta-\alpha} (t-\tau)^{\beta-\alpha} |A_1^{\beta-\alpha} A_1^\alpha u_0 \pi_f \tau|_X + C \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= C_{\beta-\alpha} (t-\tau)^{\beta-\alpha} |u_0 \pi_f \tau|_{X^\beta} + C \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &\leq C_{\beta-\alpha} C' (t-\tau)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

A continuidade uniforme da função $x \mapsto x^{\beta-\alpha}$ para x em um intervalo limitado compacto que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|u_0 \pi_f t - u_0 \pi_f \tau|_{X^\alpha} \leq \varepsilon$ sempre que $|t - \tau| < \delta$. Logo, existe um $u_1 \in X^\alpha$ tal que $|u_0 \pi_f t - u_1|_{X^\alpha} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \omega_{u_0}$ e a demonstração está completa. $\square$

1.3 Atratores globais

Nessa seção vamos apresentar o conceito de atrator global associado a uma equação de evolução parabólica. Para tanto, vamos supor que X seja um espaço de Banach com norma $|\cdot|_X$ e que $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador setorial com resolvente compacto. Dado $\alpha \in [0, 1)$, seja $f: X^\alpha \rightarrow X$ uma função localmente Lipschitziana e suponhamos que f aplica subconjuntos limitados de X^α em subconjuntos limitados de X .

Seja π_f o semifluxo local em X^α gerado pelas soluções da equação parabólica semi-linear

$$\dot{u} + Au = f(u).$$

Dizemos que π_f é do tipo *gradiente* com relação a uma função contínua $\mathcal{L}: X \rightarrow \mathbb{R}$, ou que $\mathcal{L}$ é uma *função de Lyapunov* para π_f se, para toda solução não-constante $\sigma: J \rightarrow X$ de π_f , a função a função $t \mapsto \mathcal{L}(\sigma(t))$, $t \in J$, é estritamente decrescente.

O Lema 1.2.5 implica no seguinte resultado:

Teorema 1.3.1 *Seja π_f como acima e suponhamos que π_f seja do tipo gradiente com relação a uma função $\mathcal{L}: X \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, suponhamos que exista um $k \in [0, \infty)$ tal que*

$$|u|_{X^\alpha} \leq k(\mathcal{L}(u) + 1) \text{ qualquer que seja } u \in X^\alpha.$$

Então π_f é um semifluxo global.

Demonstração. Seja $u \in X^\alpha$ e $\omega_u \in (0, \infty]$ tais que, para todo $t \geq 0$, $u\pi_ft$ está definido se, e somente se, $t \in [0, \omega_u)$. Nossa hipótese implica que

$$|u\pi_ft|_{X^\alpha} \leq k(\mathcal{L}(u\pi_ft) + 1) \leq k(\mathcal{L}(u) + 1) =: k' \text{ para todo } t \in [0, \omega_u).$$

Seja $N := \{u \in X^\alpha \mid |u|_{X^\alpha} \leq k'\}$. Logo, N é limitado e fechado em X^α e portanto, N é limitado em X . Além disso, $u\pi_f[0, \omega_u) \subset N$ e π_f não explode em N pelo Lema 1.2.5. Logo, $\omega_u = \infty$ para todo $u \in X^\alpha$. $\square$

Seja π_f do tipo gradiente. Dizemos que $u \in X^\alpha$ é um *ponto de equilíbrio* de π_f se $u\pi_ft = u$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Teorema 1.3.2 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 1.3.1 estejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que, para todo subconjunto limitado B de X^α ,*

$$\sup_{u \in B} \mathcal{L}(u) < \infty.$$

Suponhamos ainda que o conjunto E dos pontos de equilíbrio de π_f seja limitado em X^α .

Seja $\mathcal{A}_{\pi_f}$ o conjunto de todas as órbitas completas e limitadas de π_f , isto é, o conjunto de todos os $u \in X^\alpha$ para os quais existe uma solução completa $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ de π_f com $\sigma(0) = u$ e $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma(t)|_{X^\alpha} < \infty$. As seguintes afirmativas são válidas:

- (1) π_f é um semifluxo global;
- (2) $\mathcal{A}_{\pi_f}$ é não-vazio, compacto, conexo em X^α e atrai todo conjunto limitado B de X^α , isto é, dado $\delta > 0$, existe um $t(B, \delta) > 0$ tal que

$$\inf_{v \in \mathcal{A}_{\pi_f}} |u\pi_ft - v|_{X^\alpha} < \delta \text{ para todo } u \in B \text{ e todo } t \geq t(B, \delta).$$

O conjunto $\mathcal{A}_{\pi_f}$ é chamado *atrator global de π_f* .

Notemos que a afirmativa (1) do Teorema 1.3.2 segue do Teorema 1.3.1. Para demonstrarmos a afirmativa (2) utilizamos o Teorema 3.2 de [16]. Assim, precisamos mostrar que π_f é limitado e assintoticamente compacto (no sentido de [16]). Os próximos lemas demonstram esses fatos. Vamos então assumir as hipóteses do Teorema 1.3.2.

Lema 1.3.3 *O semifluxo π_f é limitado, isto é, se B é um subconjunto limitado em X^α , então $B\pi_f[0, \infty)$ é limitado em X^α .*

Demonstração. Suponhamos que B seja um subconjunto limitado em X^α e sejam $u \in B$ e $t \geq 0$. Portanto,

$$|u\pi_ft|_{X^\alpha} \leq k(\mathcal{L}(u\pi_ft) + 1) \leq k(\mathcal{L}(u) + 1) \leq k(\sup_{u \in B} \mathcal{L}(u) + 1) = k'' \in (0, \infty).$$

Logo,

$$|u\pi_ft|_{X^\alpha} \leq k'' \text{ para todo } u \in B \text{ e todo } t \geq 0.$$

A demonstração do lema está concluída. $\square$

O próximo lema nos auxiliará na demonstração de que π_f é assintoticamente compacto.

Lema 1.3.4 *Seja $N \subset X^\alpha$ um subconjunto limitado e fechado em X^α . Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então existe um conjunto compacto $C = C(N, \varepsilon) \subset X^\alpha$ tal que, sempre que $u\pi_ft \in N$ para todo $t \in [0, t_0)$, para algum $t_0 \in (0, \infty]$, segue que $u\pi_ft \in C$ para todo $t \in [\varepsilon, t_0)$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \beta < 1$. Como N é um subconjunto fechado e limitado em X^α , temos que $f(N)$ é limitado em X . Portanto, existe um $L > 0$ tal que

$$|f(u)|_X \leq L \text{ para todo } u \in N.$$

Mostremos que existe um $b = b(N, \varepsilon) > 0$ tal que, sempre que $u\pi_ft \in N$ para todo $t \in [0, t_0)$, para algum $t_0 \in (0, \infty]$, então $|u\pi_ft|_{X^\beta} \leq b$ para todo $t \in [\varepsilon, t_0)$. Como A é um operador setorial, existe um $k > 0$ tal que $\sigma(A + kI) > \delta > 0$. Vamos assumir que $|u|_{X^\alpha} = |A_1^\alpha u|_X$, onde $A_1 = A + kI$ e $f_1(u) = f(u) + ku$, como na prova do Lema 1.2.5. Então, pela Fórmula da Variação das Constantes:

$$u\pi_ft = e^{-A_1 t} u + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} f_1(u\pi_fs) ds \text{ para } t > 0.$$

Assim, para $0 < t < t_0$, segue do Teorema 1.4.3 de [15] que

$$\begin{aligned} |u\pi_ft|_{X^\beta} &= |A_1^\beta e^{-A_1 t} u + \int_0^t A_1^\beta e^{-A_1(t-s)} f_1(u\pi_fs) ds|_X \\ &\leq |A_1^\beta e^{-A_1 t}| |u|_X + \int_0^t |A_1^\beta e^{-A_1(t-s)}| |f_1(u\pi_fs)|_X ds \\ &\leq C_\beta t^{-\beta} e^{-\delta t} L_1 + \int_0^t C_\beta (t-s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} (L + kL_1) ds, \end{aligned}$$

onde $L_1 = \sup\{|u|_X \mid u \in N\}$. Portanto, para todo $t \in [\varepsilon, t_0)$ temos que, fazendo $t - s =: z$,

$$|u\pi_f t|_{X^\beta} \leq C_\beta L_1 \varepsilon^{-\beta} e^{-\delta\varepsilon} + C_\beta (L + kL_1) \int_0^t z^{-\beta} e^{-\delta z} dz. \quad (1.6)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^t z^{-\beta} e^{-\delta z} dz &= \int_0^\varepsilon z^{-\beta} e^{-\delta z} dz + \int_\varepsilon^t z^{-\beta} e^{-\delta z} dz \\ &\leq \int_0^\varepsilon z^{-\beta} e^{-\delta z} dz + \int_\varepsilon^\infty z^{-\beta} e^{-\delta z} dz. \end{aligned}$$

Como $z^{-\beta} = e^{-\beta \ln z} \leq \varepsilon^{-\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t z^{-\beta} e^{-\delta z} dz &\leq \int_0^\varepsilon z^{-\beta} e^{-\delta z} dz + \varepsilon^{-\beta} \int_\varepsilon^\infty e^{-\delta z} dz \\ &\leq \int_0^\varepsilon z^{-\beta} dz + \varepsilon^{-\beta} \int_\varepsilon^\infty e^{-\delta z} dz =: M(\varepsilon, \delta) < \infty. \end{aligned}$$

Substituindo em (1.6) temos que

$$|u_0 \pi_f t|_{X^\beta} \leq b \text{ para todo } t \in [\varepsilon, t_0), \quad (1.7)$$

onde $b := C_\beta L_1 \varepsilon^{-\beta} e^{-\delta\varepsilon} + C_\beta (L + kL_1) M(\varepsilon, \delta)$. Isso completa a primeira parte da demonstração.

Para completar a demonstração recordemos que, como A possui resolvente compacto, a inclusão $X^\beta \hookrightarrow X^\alpha$ é compacta para $\alpha < \beta < 1$. Consideremos $C := \{u \in X^\alpha \mid |u|_{X^\beta} \leq b\}$. Segue que C é um conjunto compacto na topologia de X^α e (1.7) implica que $u_0 \pi_f t \in C$ para todo $t \in [\varepsilon, t_0)$. $\square$

Lema 1.3.5 *O semifluxo π_f é assintoticamente compacto, isto é, se B é um subconjunto limitado de X^α tal que $B\pi_f[\tau, \infty)$ é limitado para algum $\tau \geq 0$, então todo conjunto da forma $\{u_n \pi_f t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ com $u_n \in B$, $t_n \in [0, \infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ é relativamente compacto.*

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de X^α tal que existe um $\tau \geq 0$ com $B\pi_f[\tau, \infty)$ limitado. Consideremos sequências $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em B e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, \infty)$ com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Por hipótese, existe um $L > 0$ tal que

$$|u_n \pi_f t|_{X^\alpha} \leq L \text{ para todo } t \in [\tau, \infty] \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $t_n \rightarrow \infty$, podemos assumir que $t_n \geq \tau =: \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $N := \{u \in X^\alpha \mid |u|_{X^\alpha} \leq L\}$. Pelo Lema 1.3.4 existe um conjunto compacto $C \subset X^\alpha$ tal que

$$u_n \pi_f[\tau, t_n] \subset C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, a sequência $(u_n \pi_f t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. $\square$

Demonstração do Teorema 1.3.2. As hipóteses sobre f , os Lemas 1.3.3 e 1.3.5 e as hipóteses sobre π_f implicam que as hipóteses do Teorema 2.3 de [16] estão satisfeitas. Logo, obtemos as conclusões do teorema. $\square$

Observação 1.3.6 Como é ressaltado em [22] na Proposição 2.15, o conceito de semi-fluxo assintoticamente compacto apresentado aqui e definido por Ladyzhenskaya em [16] é equivalente ao conceito de semifluxo assintoticamente suave, apresentado por Hale em [13].

Capítulo 2

As Equações de Reação-Difusão em Domínios Finos

Iniciamos esse capítulo apresentando a relação entre os problemas $(\tilde{E}_\varepsilon)$ e (E_ε) apresentados na Introdução. A equivalência obtida nos permite estudar a equação de evolução abstrata associada a (E_ε) . O passo seguinte é definir o problema limite. Na Seção 2.2 apresentamos os “espaços limites” no qual a equação de evolução abstrata estará definida. Finalizamos o capítulo apresentando o problema limite para a família (E_ε) , $\varepsilon > 0$.

2.1 As equações de reação-difusão em domínios finos

Sejam M e N inteiros positivos. Identificaremos $\mathbb{R}^{M+N}$ com $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ e escreveremos (x, y) para um ponto genérico de $\mathbb{R}^{M+N}$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{M+N}$ um domínio limitado não-vazio e com fronteira Lipschitz. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos a *transformação de compressão* $T_\varepsilon: \mathbb{R}^{M+N} \rightarrow \mathbb{R}^{M+N}$ dada por $T_\varepsilon(x, y) = (x, \varepsilon y)$. Definimos $\Omega_\varepsilon := T_\varepsilon(\Omega)$. Geometricamente, T_ε comprime o domínio Ω na direção y pelo fator ε .

Consideremos a seguinte equação de reação-difusão em Ω_ε com condições de fronteira do tipo Neumann:

$$(\tilde{E}_\varepsilon) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u), & t > 0, (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\nu_\varepsilon} u &= 0, & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

onde ν_ε é a normal exterior em $\partial\Omega_\varepsilon$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma não-linearidade que satisfaz certas condições de crescimento e dissipatividade as quais iremos caracterizar mais tarde.

Nosso interesse é analisar o que ocorre com a dinâmica de $(\tilde{E}_\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Nossa hipótese de dissipatividade sobre f implicará que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um atrator global $\tilde{\mathcal{A}}_{\pi_\varepsilon}$ para $(\tilde{E}_\varepsilon)$. Assim, discutiremos o que ocorre com a família de atratores $(\tilde{\mathcal{A}}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Entretanto, temos a seguinte dificuldade técnica: o parâmetro ε aparece no domínio Ω_ε de cada equação $(\tilde{E}_\varepsilon)$. O primeiro passo, então, será obter um problema (E_ε) equivalente a $(\tilde{E}_\varepsilon)$ no qual o domínio é Ω , para todo $\varepsilon > 0$.

Fixado $\varepsilon > 0$, para cada função $u: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a aplicação $\Phi_\varepsilon(u) := u \circ T_\varepsilon$. É claro que Φ_ε é uma transformação linear. Além disso, vale o seguinte resultado:

Lema 2.1.1 *Seja $\varepsilon > 0$. As restrições $\Phi_\varepsilon: \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi_\varepsilon: H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega)$ e $\Phi_\varepsilon: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega)$ estão bem definidas e são isomorfismos lineares.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Mostremos que $\Phi_\varepsilon(L^2(\Omega_\varepsilon)) \subset L^2(\Omega)$. Dado $u \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, pelo Teorema de Mudança de Variáveis temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Phi_\varepsilon(u)(x, y)|^2 dx dy &= \int_{\Omega} |u \circ T_\varepsilon(x, y)|^2 dx dy = |\det[T_\varepsilon]|^{-1} \int_{\Omega} |u \circ T_\varepsilon(x, y)|^2 |\det[T_\varepsilon]| dx dy \\ &= |\det[T_\varepsilon]|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x, \varepsilon y)|^2 dx dy = |\det[T_\varepsilon]|^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

onde $[T_\varepsilon]$ é a matriz de T_ε em relação à base canônica de $\mathbb{R}^{M+N}$. Segue que

$$\|\Phi_\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \varepsilon^{-N} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.1)$$

Portanto, $\Phi_\varepsilon(u) \in L^2(\Omega)$, isto é, $\Phi_\varepsilon: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega)$ está bem definido. Por outro lado, dada uma função $u \in L^2(\Omega)$, consideremos $v := u \circ T_{\varepsilon^{-1}}$ e notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x, \varepsilon y)|^2 dx dy &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u \circ T_{\varepsilon^{-1}}(x, \varepsilon y)|^2 dx dy \\ &= |\det[T_{\varepsilon^{-1}}]|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} |u \circ T_{\varepsilon^{-1}}(x, \varepsilon y)|^2 |\det[T_{\varepsilon^{-1}}]| dx dy \\ &= |\det[T_{\varepsilon^{-1}}]|^{-1} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy = \varepsilon^N \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

isto é, $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Também, $\Phi_\varepsilon(v) = (u \circ T_{\varepsilon^{-1}}) \circ T_\varepsilon = u$. Sendo assim, $\Phi_\varepsilon(L^2(\Omega_\varepsilon)) = L^2(\Omega)$.

Seja $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ tal que $\Phi_\varepsilon(v) = 0$. Segue de (2.1) que $v = 0$. Como Φ_ε é linear, temos que Φ_ε é injetora e, portanto, um isomorfismo.

Consideremos agora o caso $\Phi_\varepsilon: \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$. É claro que, se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$, então $\varphi \circ T_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Verifiquemos que $\varphi \circ T_\varepsilon$ tem suporte compacto contido em Ω . Para isto, consideremos o conjunto $A := T_{\varepsilon^{-1}}(\text{supp } \varphi)$. A continuidade de $T_{\varepsilon^{-1}}$ implica que A é compacto e além disso, $A \subset \Omega$. Tomando $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus A$, temos que existe uma vizinhança aberta U de (x_0, y_0) com $U \subset \Omega \setminus A$. Observemos também que $T_\varepsilon(U) \subset \Omega_\varepsilon \setminus \text{supp } \varphi$. Portanto, $\varphi \circ T_\varepsilon(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in U$. Com isso, $\text{supp } \varphi \circ T_\varepsilon \subset A$ e assim, $\varphi \circ T_\varepsilon$ possui suporte compacto em Ω , ou seja, $\Phi_\varepsilon: \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ está bem definido. Agora, dada uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, consideramos a função $\phi := \varphi \circ T_{\varepsilon^{-1}}$ e um raciocínio análogo ao acima implica que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$. Também, se $\Phi_\varepsilon(\varphi) = 0$ temos que $\varphi = 0$ e assim, $\Phi_\varepsilon: \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ é um isomorfismo.

Seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Então $v \circ T_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $\partial_{x_i} v \circ T_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, M$, e $\partial_{y_j} v \circ T_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$,

$$\nabla(\varphi \circ T_\varepsilon) = \left(\partial_{x_1} \varphi \circ T_\varepsilon, \dots, \partial_{x_M} \varphi \circ T_\varepsilon, \varepsilon \partial_{y_1} \varphi \circ T_\varepsilon, \dots, \varepsilon \partial_{y_N} \varphi \circ T_\varepsilon \right).$$

Assim, para cada $i = 1, \dots, M$, usando novamente o Teorema de Mudança de Variáveis encontramos

$$\int_{\Omega} (v \circ T_{\varepsilon}) \partial_{x_i} (\varphi \circ T_{\varepsilon}) dx dy = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} v \circ T_{\varepsilon} (\varphi \circ T_{\varepsilon}) dx dy \text{ qualquer que seja } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{\varepsilon}).$$

Como $\Phi_{\varepsilon}: \mathcal{D}(\Omega_{\varepsilon}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ é um isomorfismo, obtemos,

$$\int_{\Omega} (v \circ T_{\varepsilon}) \partial_{x_i} \psi dx dy = - \int_{\Omega} (\partial_{x_i} v \circ T_{\varepsilon}) \psi dx dy \text{ qualquer que seja } \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

isto é,

$$\partial_{x_i} (v \circ T_{\varepsilon}) = \partial_{x_i} v \circ T_{\varepsilon}, \text{ para } i = 1, \dots, M.$$

Analogamente mostramos que

$$\partial_{y_j} (v \circ T_{\varepsilon}) = \varepsilon \partial_{y_j} v \circ T_{\varepsilon}, \text{ para } j = 1, \dots, N.$$

Procedendo como anteriormente mostramos que $\Phi_{\varepsilon}: H^1(\Omega_{\varepsilon}) \longrightarrow H^1(\Omega)$ é um isomorfismo. $\square$

Para cada $\varepsilon > 0$, a aplicação $\tilde{\Psi}_{\varepsilon}$ nos auxiliará na construção de um problema (E_{ε}) que será conjugado ao problema $(\tilde{E}_{\varepsilon})$. Para isso, começaremos com a definição das formas bilineares associadas a estes problemas.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos as formas bilineares $\tilde{a}_{\varepsilon}: H^1(\Omega_{\varepsilon}) \times H^1(\Omega_{\varepsilon}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{a}_{\varepsilon}(u, v) := \int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla u \cdot \nabla v dx dy,$$

e $a_{\varepsilon}: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a_{\varepsilon}(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v) dx dy.$$

Lema 2.1.2 *Seja Φ_{ε} , $\varepsilon > 0$, como acima. As seguintes afirmativas são válidas:*

- (1) *para cada $\varepsilon > 0$, $\tilde{a}_{\varepsilon}$ e a_{ε} são formas bilineares contínuas e simétricas;*
- (2) *para quaisquer que sejam $u, v \in H^1(\Omega_{\varepsilon})$,*

$$a_{\varepsilon}(\Phi_{\varepsilon} u, \Phi_{\varepsilon} v) = \frac{1}{|\det[T_{\varepsilon}]|} \tilde{a}_{\varepsilon}(u, v);$$

- (3) *para quaisquer que sejam $u, v \in L^2(\Omega_{\varepsilon})$,*

$$\langle \Phi_{\varepsilon} u, \Phi_{\varepsilon} v \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{|\det[T_{\varepsilon}]|} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega_{\varepsilon})}.$$

Demonstração. É claro que $\tilde{a}_\varepsilon$ e a_ε , $\varepsilon > 0$, são formas bilineares simétricas. Seja $\varepsilon > 0$. A Desigualdade de Hölder implica que

$$|\tilde{a}_\varepsilon(u, v)| \leq |u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} |v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \text{ quaisquer que sejam } u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Portanto, $\tilde{a}_\varepsilon$ é contínua.

Se $0 < \varepsilon \leq 1$, segue que

$$|a_\varepsilon(u, v)| \leq \varepsilon^{-2} |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} \text{ quaisquer que sejam } u, v \in H^1(\Omega).$$

No caso $\varepsilon \geq 1$,

$$|a_\varepsilon(u, v)| \leq |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} \text{ quaisquer que sejam } u, v \in H^1(\Omega).$$

Logo, a_ε , $\varepsilon > 0$, é uma forma bilinear contínua e a demonstração de (1) está completa.

Vamos demonstrar (2) e (3) segue de maneira análoga. Dadas $u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u, \Phi_\varepsilon v) &= \int_{\Omega} (\nabla_x \Phi_\varepsilon u \cdot \nabla_x \Phi_\varepsilon v + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_y \Phi_\varepsilon u \cdot \nabla_y \Phi_\varepsilon v) dx dy \\ &= \int_{\Omega} ((\nabla_x u \cdot \nabla_x v) \circ T_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (\nabla_y u \cdot \nabla_y v) \circ T_\varepsilon) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \circ T_\varepsilon dx dy = \frac{1}{|\det[T_\varepsilon]|} \tilde{a}_\varepsilon(u, v), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da demonstração do Lema 2.1.1. $\square$

Para cada $\varepsilon > 0$, denotemos por $\tilde{b}_\varepsilon$ a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ a $H^1(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon)$ e por b a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ a $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Vale o seguinte resultado:

Lema 2.1.3 *Seja $\varepsilon > 0$. O par (λ, u) é um par autovalor-autovetor de $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$ se, e somente se, $(\lambda, \Phi_\varepsilon u)$ é um par autovalor-autovetor de (a_ε, b) .*

Demonstração. Se (λ, u) é um par autovalor-autovetor de $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$, então $u \neq 0$ e, para qualquer que seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, temos que $\tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$. Logo, o Lema 2.1.2 implica que,

$$|\det[T_\varepsilon]| a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u, \Phi_\varepsilon v) = \tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \lambda |\det[T_\varepsilon]| \langle \Phi_\varepsilon u, \Phi_\varepsilon v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Como $\Phi_\varepsilon: H^1(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow H^1(\Omega)$ é um isomorfismo, segue que $\Phi_\varepsilon(u) \neq 0$ e

$$a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u, w) = \lambda b(\Phi_\varepsilon u, w) \text{ qualquer que seja } w \in H^1(\Omega).$$

O lema está demonstrado. $\square$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Temos

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_\varepsilon(u, u)| &= \left| \sum_{i=1}^M |\partial_{x_i} u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{j=1}^N |\partial_{y_j} u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right| \\ &= \sum_{i=1}^M |\partial_{x_i} u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \sum_{j=1}^N |\partial_{y_j} u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + |u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 - |u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &= |u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - |u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

Analogamente, se $\varepsilon > 0$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos

$$|a_\varepsilon(v, v)| = \sum_{i=1}^M |\partial_{x_i} v|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^N |\partial_{y_j} v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Se $0 < \varepsilon < 1$, segue que

$$|a_\varepsilon(v, v)| \geq \sum_{i=1}^M |\partial_{x_i} v|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^N |\partial_{y_j} v|_{L^2(\Omega)}^2 = |u|_{H^1(\Omega)}^2 - |u|_{L^2(\Omega)}^2$$

Por outro lado, se $\varepsilon \geq 1$ temos que

$$|a_\varepsilon(v, v)| \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^M |\partial_{x_i} v|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^N |\partial_{y_j} v|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} |u|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} |u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim, demonstramos o seguinte resultado:

Lema 2.1.4 *Para cada $\varepsilon > 0$, as formas bilineares $\tilde{a}_\varepsilon$ e a_ε são coercivas.*

Os Lemas 2.1.2 e 2.1.4 mostram que as hipóteses das Proposições 1.1.2 e 1.1.6 estão satisfeitas. Com isso temos:

Teorema 2.1.5 *Para cada $\varepsilon > 0$, valem:*

- (1) o par $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$ gera um operador linear auto-adjunto com resolvente compacto $\tilde{A}_\varepsilon$ em $(L^2(\Omega_\varepsilon), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)})$ tal que, se $u \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$,

$$\tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \langle \tilde{A}_\varepsilon u, v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Além disso, $D(\tilde{A}_\varepsilon)$ é um subespaço vetorial denso em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ e em $L^2(\Omega_\varepsilon)$;

- (2) o par (a_ε, b) gera um operador linear auto-adjunto com resolvente compacto A_ε em $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$ tal que, se $u \in D(A_\varepsilon)$,

$$a_\varepsilon(u, v) = \langle A_\varepsilon u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega).$$

Além disso, $D(A_\varepsilon)$ é um subespaço vetorial denso em $H^1(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$.

- (3) O conjunto dos autovalores do par $(\tilde{a}_\varepsilon, \tilde{b}_\varepsilon)$ (respectivamente, $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$) é infinito e enumerável, possui um menor elemento e cada autovalor possui multiplicidade finita.

Os operadores $\tilde{A}_\varepsilon$ e A_ε estão relacionados como mostra o próximo lema.

Lema 2.1.6 Fixemos $\varepsilon > 0$. Sejam $\tilde{A}_\varepsilon$ e A_ε como no Teorema 2.1.5. Então:

- (1) $D(A_\varepsilon) = \Phi_\varepsilon(D(\tilde{A}_\varepsilon))$;
- (2) $A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u) = \Phi_\varepsilon(\tilde{A}_\varepsilon u)$ qualquer que seja $u \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$.

Demonstração. Seja $u \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$. Temos

$$\tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \langle \tilde{A}_\varepsilon u, v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

O Lema 2.1.2 implica que

$$a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u, \Phi_\varepsilon v) = \langle \Phi_\varepsilon(\tilde{A}_\varepsilon u), \Phi_\varepsilon v \rangle_{L^2(\Omega)}, \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Como $\Phi_\varepsilon: H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega)$ é um isomorfismo, segue que

$$a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u, w) = \langle \Phi_\varepsilon(\tilde{A}_\varepsilon u), w \rangle_{L^2(\Omega)}, \text{ para qualquer que seja } w \in H^1(\Omega).$$

Ou seja, $\Phi_\varepsilon u \in D(A_\varepsilon)$ e $A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon u) = \Phi_\varepsilon(\tilde{A}_\varepsilon u)$, mostrando a parte (2) do lema e que $\Phi_\varepsilon(D(\tilde{A}_\varepsilon)) \subset D(A_\varepsilon)$.

Por outro lado, seja $u \in D(A_\varepsilon)$. Então,

$$a_\varepsilon(u, w) = \langle A_\varepsilon u, w \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ qualquer que seja } w \in H^1(\Omega).$$

Devemos mostrar que existe um $\tilde{u} \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$ tal que $\Phi_\varepsilon \tilde{u} = u$. Como $\Phi_\varepsilon: H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega)$ é um isomorfismo, existe um $\tilde{u} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que $\Phi_\varepsilon \tilde{u} = u$. Falta então mostrar que $\tilde{u} \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$. Seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Então $w := \Phi_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega)$ e, portanto,

$$a_\varepsilon(\Phi_\varepsilon \tilde{u}, \Phi_\varepsilon v) = \langle A_\varepsilon \Phi_\varepsilon \tilde{u}, \Phi_\varepsilon v \rangle_{L^2(\Omega)}, \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

O Lema 2.1.2 implica que

$$\tilde{a}_\varepsilon(\tilde{u}, v) = \langle \Phi_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon \tilde{u})), v \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \text{ para qualquer que seja } v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Logo, $\tilde{u} \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$ e $\tilde{A}_\varepsilon \tilde{u} = \Phi_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon \tilde{u}))$. Portanto $D(A_\varepsilon) \subset \Phi_\varepsilon(D(\tilde{A}_\varepsilon))$. $\square$

Consideremos agora a seguinte hipótese sobre a função f :

(HC1) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e existem constantes $C, \beta \in [0, \infty)$ tais que $|f'(s)| \leq C(|s|^\beta + 1)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Definamos $n := M + N$. Se $n > 2$, suponhamos também que $\beta \leq 2^*/2 - 1$, onde $2^* = 2n/(n - 2) > 2$.

Utilizando a teoria dos operadores de Nemitskiĭ (ver por exemplo [1], [10] ou [27]) e o Teorema das Imersões de Sobolev (ver, por exemplo, Teorema 0.4 em [1]) vamos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.7 *Suponhamos que f satisfaça (HC1) e seja $\varepsilon > 0$. Então o operador de Nemitskiĭ $\tilde{f}: H^1(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ está bem definido, é Lipschitziano em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ e aplica subconjuntos limitados de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ em subconjuntos limitados de $L^2(\Omega_\varepsilon)$.*

Demonstração. Mostremos que se $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, então $\tilde{f}(u) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Como

$$|f'(s)| \leq C(|s|^\beta + 1) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

temos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|f(s)| \leq C_1|s|^{\beta+1} + C_2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$|f(s)|^2 \leq C_1^2|s|^{2(\beta+1)} + 2C_1C_2|s|^{\beta+1} + C_2^2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

A Desigualdade de Young implica que

$$2C_1C_2|s|^{\beta+1} \leq 1/2((2C_1C_2)^2 + |s|^{2(\beta+1)}).$$

Logo, existem constantes $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$|f(s)|^2 \leq C_3|s|^{2(\beta+1)} + C_4 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Assim, se $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(u(x, y))|^2 dx dy < C_3 \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x, y)|^{2(\beta+1)} dx dy + C_5 = C_3|u|_{L^{2(\beta+1)}(\Omega_\varepsilon)}^{2(\beta+1)} + C_5,$$

onde $C_5 := \mu(\Omega_\varepsilon)C_4$.

As hipóteses sobre β e o Teorema das Imersões de Sobolev implicam que $H^1(\Omega_\varepsilon)$ está continuamente imerso em $L^{2(\beta+1)}(\Omega_\varepsilon)$. Assim, existe uma constante $C_6 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(u(x, y))|^2 dx dy \leq C_6|u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2(\beta+1)} + C_5.$$

Portanto, $\tilde{f}: H^1(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ está bem definido. Além disso,

$$|\tilde{f}(u)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left(C_6|u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2(\beta+1)} + C_5 \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

ou seja, $\tilde{f}$ aplica subconjuntos limitados de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ em subconjuntos limitados de $L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Mostremos agora que $\tilde{f}$ é uma função Lipschitziana em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega_\varepsilon)$, isto é, para quaisquer que sejam $u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tais que $|v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq R$ e $|u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq R$, com $R < \infty$, então existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq L|u - v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Para isso notemos inicialmente que, quaisquer que sejam $u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $(x, y) \in \Omega_\varepsilon$, temos

$$f(u(x, y)) - f(v(x, y)) = (u(x, y) - v(x, y)) \int_0^1 f'(tu(x, y) + (1-t)v(x, y)) dt.$$

Logo, segue de (2.2) que

$$\begin{aligned} |f(u(x, y)) - f(v(x, y))| &\leq |u(x, y) - v(x, y)| \int_0^1 |f'(tu(x, y) + (1-t)v(x, y))| dt \\ &\leq |u(x, y) - v(x, y)| \int_0^1 C(1 + (|u(x, y)| + |v(x, y)|)^\beta) dt \\ &\leq C|u(x, y) - v(x, y)| (1 + 2^\beta \max\{|u(x, y)|^\beta, |v(x, y)|^\beta\}) \\ &\leq C|u(x, y) - v(x, y)| (1 + 2^\beta |u(x, y)|^\beta + 2^\beta |v(x, y)|^\beta) \\ &\leq C_7 |u(x, y) - v(x, y)| (1 + |u(x, y)|^\beta + |v(x, y)|^\beta) \\ &\leq C_7 |u(x, y) - v(x, y)| (3 \max\{1, |u(x, y)|^\beta, |v(x, y)|^\beta\}), \end{aligned}$$

onde $C_7 = \max\{C, 2^\beta C\}$.

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade acima encontramos:

$$\begin{aligned} |f(u(x, y)) - f(v(x, y))|^2 &\leq C_7^2 |u(x, y) - v(x, y)|^2 (3^2 \max\{1, |u(x, y)|^{2\beta}, |v(x, y)|^{2\beta}\}) \\ &\leq C_8 |u(x, y) - v(x, y)|^2 (1 + |u(x, y)|^{2\beta} + |v(x, y)|^{2\beta}), \end{aligned}$$

onde $C_8 := (3C_7)^2$. Integrando em Ω_ε ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u(x, y)) - f(v(x, y))|^2 dx dy &\leq C_8 \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x, y) - v(x, y)|^2 (1 + |u(x, y)|^{2\beta} + |v(x, y)|^{2\beta}) dx dy \\ &= C_8 \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x, y) - v(x, y)|^2 dx dy + C_8 \int_{\Omega_\varepsilon} |u(x, y)|^{2\beta} |u(x, y) + v(x, y)|^2 dx dy \\ &\quad + C_8 \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x, y)|^{2\beta} |u(x, y) + v(x, y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Definamos agora $p := 2^*/(2\beta) > 1$ e $q := p/(p-1) = 2^*/(2^* - 2\beta)$. A Desigualdade de Hölder implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u(x, y)) - f(v(x, y))|^2 dx dy &\leq C_8 (|u - v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + |u|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2\beta} |u - v|_{L^{2q}(\Omega_\varepsilon)}^2 + |v|_{L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)}^{2\beta} |u - v|_{L^{2q}(\Omega_\varepsilon)}^2). \end{aligned}$$

Observemos que $2 \leq 2q \leq 2^*$. Logo, $H^1(\Omega_\varepsilon)$ está continuamente imerso em $L^{2^*}(\Omega_\varepsilon)$ e em $L^{2q}(\Omega_\varepsilon)$. Portanto, existe uma constante positiva C_9 tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(u(x, y)) - f(v(x, y))|^2 dx \leq C_9 (1 + |u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2\beta} + |v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2\beta}) |u - v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Se $u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ são tais que $|u|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, |v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq R$, segue que

$$|\tilde{f}(u) - \tilde{f}(v)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_9^{1/2} (1 + 2R^{2\beta})^{1/2} |u - v|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (2.4)$$

Portanto, $\tilde{f}$ é Lipschitziano em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega_\varepsilon)$. $\square$

No restante dessa seção vamos assumir que f satisfaça a hipótese **(HC1)**.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos a função $\hat{f}: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ por $\hat{f} := \Phi_\varepsilon \circ \tilde{f} \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$. A boa definição de $\hat{f}$ segue do seguinte diagrama:

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\Phi_\varepsilon^{-1}} H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{f} L^2(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{\Phi_\varepsilon} L^2(\Omega).$$

Notemos que $\hat{f}$ não depende do parâmetro ε . De fato, para quaisquer que sejam $u \in H^1(\Omega)$ e $(x, y) \in \Omega$,

$$\Phi_\varepsilon \circ \tilde{f} \circ \Phi_\varepsilon^{-1}(u)(x, y) = f \circ \Phi_\varepsilon^{-1} \circ u(x, \varepsilon y) = f \circ u(x, y) = f(u(x, y)).$$

A igualdade acima mostra que $\hat{f}$ é o operador de Nemitskiĭ de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ associado a f . Além disso, a hipótese **(HC1)** implica que $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{2(\beta+1)}(\Omega)$ e em $L^{2^*}(\Omega)$. Um raciocínio totalmente análogo ao utilizado no Teorema 2.1.7 nos permite concluir o seguinte resultado:

Teorema 2.1.8 *A aplicação $\hat{f}: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é Lipschitziana em subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ e aplica subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ em subconjuntos limitados de $L^2(\Omega)$.*

Os Teoremas 2.1.5, 2.1.7 e 2.1.8 implicam que as seguintes equações de evolução estão bem definidas:

$$(RD_\varepsilon) \quad \dot{u} + \tilde{A}_\varepsilon u = \tilde{f}(u)$$

$$(RD_\varepsilon) \quad \dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u)$$

Notemos que, para cada $\varepsilon > 0$, (RD_ε) é a formulação abstrata de $(\tilde{E}_\varepsilon)$. Além disso, (RD_ε) é a formulação abstrata de

$$(E_\varepsilon) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta_x u + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y u + f(u), \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \\ \partial_{\nu_x} u + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\nu_y} u &= 0, \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

As Proposições 1.1.7 e 1.1.8 implicam no seguinte fato:

Proposição 2.1.9 Para cada $\varepsilon > 0$, o operador linear $\tilde{A}_\varepsilon$ (respectivamente, A_ε) é setorial em $X = L^2(\Omega_\varepsilon)$ (respectivamente, $X = L^2(\Omega)$) e o espaço de potências fracionárias correspondente a $\alpha = 1/2$ satisfaz $X^\alpha = H^1(\Omega_\varepsilon)$ (respectivamente, $X^\alpha = H^1(\Omega)$).

A Proposição 2.1.9 e os Teoremas 2.1.7 e 2.1.8, juntamente com uma aplicação do Exemplo 1.2.2 implicam que, para cada $\varepsilon > 0$, a equação $(\tilde{R}\tilde{D}_\varepsilon)$ (respectivamente, (RD_ε)), gera um semifluxo local $\tilde{\pi}_\varepsilon$ em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ (respectivamente, π_ε em $H^1(\Omega)$). A relação entre tais semifluxos locais é expressa no próximo resultado.

Proposição 2.1.10 Para cada $\varepsilon > 0$, a aplicação Φ_ε é uma conjugação entre os semifluxos locais $\tilde{\pi}_\varepsilon$ e π_ε , isto é, dados $u \in H^1(\Omega)$ e $t > 0$, então $u\pi_\varepsilon t$ está definido se, e somente se $(\Phi_\varepsilon^{-1}u)\tilde{\pi}_\varepsilon t$ está definido e neste caso $u\pi_\varepsilon t = \Phi_\varepsilon((\Phi_\varepsilon^{-1}u)\tilde{\pi}_\varepsilon t)$.

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja $\tilde{u}_0 \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Suponhamos que $\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t$ esteja definido se, e somente se, $t \in [0, \omega_{\tilde{u}_0})$.

Definimos $u_0 := \Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0)$ e suponhamos que $u_0\pi_\varepsilon t$ esteja definido se, e somente se, $t \in [0, \omega_{u_0})$. Consideraremos duas situações.

(a) Se $t \in [0, \omega_{\tilde{u}_0})$, mostremos que $t \in [0, \omega_{u_0})$ e que

$$u_0\pi_\varepsilon t = \Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t) = \Phi_\varepsilon((\Phi_\varepsilon^{-1}u_0)\tilde{\pi}_\varepsilon t).$$

Como $t \in [0, \omega_{\tilde{u}_0})$ segue que $\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t$ está definido e satisfaz a equação de evolução

$$\dot{u} + \tilde{A}_\varepsilon u = \tilde{f}(u),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t) + \tilde{A}_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t) = \tilde{f}(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t) \quad (2.5)$$

Calculemos $\frac{d}{dt}(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t))$. É claro que $\frac{d}{dt}(\tilde{\Psi}_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) = \Phi_\varepsilon(\frac{d}{dt}(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t))$. Utilizando (2.5) e o fato de Φ_ε ser linear temos que

$$\frac{d}{dt}(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) = \Phi_\varepsilon(-\tilde{A}_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) + \Phi_\varepsilon(\tilde{f}(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) \quad (2.6)$$

Como $\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t \in D(\tilde{A}_\varepsilon)$, o Lema 2.1.6 implica que

$$\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t) \in D(A_\varepsilon) \text{ e } A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) = \Phi_\varepsilon(\tilde{A}_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)).$$

Além disso, como $\hat{f} = \Phi_\varepsilon \circ \tilde{f} \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$, segue que $\hat{f} \circ \Phi_\varepsilon = \tilde{\Psi}_\varepsilon \circ \tilde{f}$. Portanto,

$$\Phi_\varepsilon(\tilde{f}(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) = \hat{f}(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)).$$

Substituindo esses fatos em (2.6) segue que

$$\frac{d}{dt}(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) = -A_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)) + \hat{f}(\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)),$$

isto é, $\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)$ satisfaz a equação de evolução $\dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u)$. Como $\Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon 0) = u_0$, segue que $t \in [0, \omega_{u_0})$ e $u, \pi_\varepsilon t = \Phi_\varepsilon(\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t)$.

(b) Suponhamos agora que $t \in [0, \omega_{u_0})$. Do mesmo modo que em (a), demosntramos que $t \in [0, \omega_{u_0})$ e $\tilde{u}_0\tilde{\pi}_\varepsilon t = \Phi_\varepsilon^{-1}(u_0\pi_\varepsilon t)$.

Isso conclui a demonstração. $\square$

A Proposição 2.1.10 nos motiva a estudar, para cada $\varepsilon > 0$, a equação de evolução

$$(RD_\varepsilon) \quad \dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u),$$

uma vez que as propriedades de (RD_ε) são transferidas para $(\tilde{R}D_\varepsilon)$ via a conjugação Φ_ε .

2.2 Os espaços $H_s^1(O)$ e $L_s^2(O)$

Queremos apresentar o problema limite para a família de equações (RD_ε) com $\varepsilon \in (0, 1]$. Iniciamos definindo os espaços nos quais o problema limite estará definido. Tal definição será apresentada nesta seção. Antes porém necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Usaremos a notação $\nabla_y u$ significando o vetor $(\partial_{y_1} u, \dots, \partial_{y_N} u)$, onde ∂ é a derivada parcial no sentido das distribuições. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^k$ será denotada por μ_k , para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Começamos com um resultado da Teoria de Distribuições que utilizaremos.

Lema 2.2.1 (cf. [2]) *Sejam O_1 e O_2 subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^M$ e de $\mathbb{R}^N$ respectivamente. Considere o conjunto $\mathcal{D}(O_1) \otimes \mathcal{D}(O_2)$ formado pelas funções $u: O_1 \times O_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas como somas finitas*

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k \phi_i(x) \psi_i(y),$$

onde $\phi_i \in \mathcal{D}(O_1)$, $\psi_i \in \mathcal{D}(O_2)$, $i = 1, \dots, k$, e $k \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{D}(O_1) \otimes \mathcal{D}(O_2)$ é um subespaço denso de $\mathcal{D}(O_1 \times O_2)$.

Nosso primeiro resultado auxiliar é dado a seguir.

Lema 2.2.2 *Seja $O \subset \mathbb{R}^{M+N}$ um conjunto aberto da forma $O = U \times V$, onde $U \subset \mathbb{R}^M$ e $V \subset \mathbb{R}^N$ são retângulos abertos limitados. Seja $u \in L_{\text{loc}}^1(O)$ com $\nabla_y u = 0$. As seguintes propriedades estão satisfeitas:*

- (1) *existe um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e uma função $v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ tal que $u(x, y) = v(x)$ para todo $(x, y) \in O \setminus S$;*
- (2) *se $\partial_{x_i} u \in L_{\text{loc}}^1(O)$ para algum $i = 1, \dots, M$, então $\partial_{x_i} v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ e existe um conjunto de medida nula $S' \subset \mathbb{R}^{M+N}$ tal que $u(x, y) = v(x)$ e $\partial_{x_i} u(x, y) = \partial_{x_i} v(x)$ para $(x, y) \in O \setminus S'$;*

- (3) se $u \in H^1(O)$, então $v \in H^1(U)$, onde v é a função obtida em (1);
- (4) se $u \in H^1(O)$ e $M = 1$, então existe um conjunto de medida nula $S'' \subset \mathbb{R}^{1+N}$ e uma função absolutamente contínua $\tilde{v} \in H^1(U)$ tal que $u(x, y) = \tilde{v}(x)$ e $\partial_x u(x, y) = \partial_x \tilde{v}(x)$ para $(x, y) \in O \setminus S''$. Em particular, $u(x, y) = \tilde{u}(x, y)$ em $O \setminus S''$, onde $\tilde{u}: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por $\tilde{u}(x, y) := \tilde{v}(x)$ para $(x, y) \in U \times V$.

Demonstração. Como $U \subset \mathbb{R}^M$ e $V \subset \mathbb{R}^N$ são retângulos limitados, podemos representá-los por $U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_M, b_M)$ e $V = (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_N, d_N)$, onde $a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$.

Como $\nabla_y u = 0$, segue que $\partial_{y_N} u = 0$. Defina $\tilde{V} := (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_{N-1}, d_{N-1}) \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e consideremos $\phi \in \mathcal{D}(U \times \tilde{V})$ e $\psi \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$. Logo, $\phi\psi \in \mathcal{D}(U \times V)$ e

$$\int_O u(x, y) \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \psi'(y_N) dx dy = 0.$$

Seja $\alpha \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$ tal que

$$\int_{c_N}^{d_N} \alpha(y_N) dy_N = 1.$$

Então, para toda função $\beta \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$, definimos

$$\theta(s) := \int_{c_N}^s \beta(t) dt - \int_{c_N}^{d_N} \beta(s) ds \int_{c_N}^s \alpha(t) dt \text{ para } s \in (c_N, d_N).$$

Segue que $\theta \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$. Portanto, para toda função $\beta \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$, temos que

$$\beta - \left(\int_{c_N}^{d_N} \beta(s) ds \right) \alpha$$

é a derivada de uma função em $\mathcal{D}((c_N, d_N))$. Assim, tomando $\beta = \psi$ temos que

$$\int_O u(x, y) \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \left(\psi(y_N) - \left(\int_{c_N}^{d_N} \psi(s) ds \right) \alpha(y_N) \right) dx dy = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_O u(x, y) \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \psi(y_N) dx dy \\ &= \left(\int_{c_N}^{d_N} \psi(s) ds \right) \left(\int_O u(x, y) \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \alpha(y_N) dx dy \right). \end{aligned}$$

Agora definimos

$$v(x, y_1, \dots, y_{N-1}) := \int_{c_N}^{d_N} u(x, y_1, \dots, y_N) \alpha(y_N) dy_N.$$

Segue do Teorema de Fubini que $v \in L_{\text{loc}}^1(U \times \tilde{V})$. Além disso, podemos considerar v como uma função em O e neste caso $v \in L_{\text{loc}}^1(O)$. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_O u(x, y) \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \psi(y_N) dx dy \\ &= \left(\int_{c_N}^{d_N} \psi(s) ds \right) \left(\int_{U \times \tilde{V}} v(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \phi(y_1, \dots, y_{N-1}) dx dy_1 \dots dy_{N-1} \right) \\ &= \int_O v(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \phi(y_1, \dots, y_{N-1}) \psi(y_N) dx dy. \end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer que sejam $\phi \in \mathcal{D}(U \times \tilde{V})$ e $\psi \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$, temos que

$$\int_O (u(x, y) - v(x, y_1, \dots, y_{N-1})) \phi(y_1, \dots, y_{N-1}) \psi(y_N) dx dy = 0.$$

Segue do Lema 2.2.1 que o conjunto gerado por todas as funções da forma $\phi\psi$, onde $\phi \in \mathcal{D}(U \times \tilde{V})$ e $\psi \in \mathcal{D}((c_N, d_N))$ é denso em $\mathcal{D}(O)$. Logo,

$$\int_O (u(x, y) - v(x, y_1, \dots, y_{N-1})) \gamma(x, y) dx dy = 0, \text{ qualquer que seja } \gamma \in \mathcal{D}(O).$$

Assim, $u - v = 0$ quase sempre em O , isto é, existe um conjunto de medida nula $S_N \subset \mathbb{R}^{M+N}$ tal que

$$u(x, y) = v(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \text{ para todo } (x, y) \in O \setminus S.$$

Afirmamos que $\partial_{y_j} v = 0$, para $j = 1, \dots, N-1$. De fato, seja $\phi \in \mathcal{D}(U \times \tilde{V})$. Para cada $j = 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} \int_{U \times \tilde{V}} v(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \partial_{y_j} \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) dx dy_1 \dots dy_{N-1} \\ &= \int_{U \times \tilde{V}} \left(\int_{c_N}^{d_N} u(x, y_1, \dots, y_N) \alpha(y_N) dy_N \right) \partial_{y_j} \phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) dx dy_1 \dots dy_{N-1} \\ &= \int_O u(x, y) \partial_{y_j} (\phi(x, y_1, \dots, y_{N-1}) \alpha(y_N)) dx dy = 0, \end{aligned}$$

e nossa afirmativa está demonstrada.

Agora, com um processo de indução em N , obtemos um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e $v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ com $u(x, y) = v(x)$ para todo $(x, y) \in O \setminus S$. A demonstração de (1) está concluída.

Mostremos (2). Assumimos então que $\partial_{x_i} u \in L_{\text{loc}}^1(O)$ para algum $i = 1, \dots, M$. Observemos que $\nabla \partial_{x_i} u = \partial_{x_i} \nabla u = 0$ no sentido das distribuições. A primeira parte deste lema aplicada à função $\partial_{x_i} u$ implica que existe um conjunto de medida nula $S' \subset \mathbb{R}^{M+N}$

e $w \in L^1_{\text{loc}}(U)$ com $\partial_{x_i} u(x, y) = w(x)$, para todo $(x, y) \in \Omega \setminus S'$. Assim, para quaisquer que sejam $\phi \in \mathcal{D}(U)$ e $\psi \in \mathcal{D}(V)$ temos

$$\begin{aligned} \int_U \partial_{x_i} v(x) \phi(x) dx \int_V \psi(y) dy &= - \int_U v(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx \int_V \psi(y) dy \\ &= - \int_{U \times V} v(x) \psi(y) \partial_{x_i} \phi(x) dx dy \\ &= - \int_{U \times V} u(x, y) \partial_{x_i} (\phi(x) \psi(y)) dx dy \\ &= \int_{U \times V} \partial_{x_i} u(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy \\ &= \int_{U \times V} w(x) \phi(x) \psi(y) dx dy \\ &= \int_U w(x) \phi(x) dx \int_V \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Escolhendo $\psi \in \mathcal{D}(V)$ de forma que

$$\int_V \psi(y) dy = 1,$$

vemos que $\partial_{x_i} v = w$, demonstrando (2).

Agora, se $u \in H^1(O)$, então $u \in L^2(O)$ e $\partial_{x_i} u \in L^2(O)$ para $i = 1, \dots, M$. Então, o mesmo raciocínio acima nos diz que $v \in H^1(U)$ e isto prova (3).

Suponha que as hipóteses de (4) estejam verificadas. Então, segue do Teorema VIII.2 em [3] que existe um conjunto de medida nula $Z \subset U$ e uma função absolutamente contínua $\tilde{v}$ em U tal que $v(x) = \tilde{v}(x)$ em $U \setminus Z$. Como $Z \times V$ é de medida nula em $U \times V$, segue do que já foi demonstrado que $u(x, y) = \tilde{v}(x)$ em $O \setminus S''$, para algum conjunto de medida nula $S'' \subset \mathbb{R}^{M+N}$. $\square$

Na verdade, a condição (4) do Lema 2.2.2 é válida quando O é um aberto qualquer de $\mathbb{R}^{M+N}$ com $M = 1$. A demonstração desse fato é o objetivo do próximo resultado.

Proposição 2.2.3 *Seja $O \subset \mathbb{R}^{M+N}$ um conjunto aberto arbitrário com $M = 1$. Suponha que $u \in H^1(O)$ satisfaça $\nabla_y u = 0$. Então u possui um representante contínuo, isto é, existe uma função contínua $\tilde{u}: O \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^{M+N}$ tal que $u(x, y) = \tilde{u}(x, y)$ para todo $(x, y) \in O \setminus S$.*

Demonstração. Seja $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma cobertura de O onde O_n , $n \in \mathbb{N}$, é produto cartesiano de retângulos abertos, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, $O_n = U_n \times V_n$, com $U_n \subset \mathbb{R}^M$ e $V_n \subset \mathbb{R}^N$ retângulos abertos. O Lema 2.2.2 (4) implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto de medida nula $S_n \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e uma função contínua $u_n: O_n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x, y) = u_n(x, y)$ sempre que $(x, y) \in O_n \setminus S_n$. Defina o conjunto $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Segue que S possui medida

nula em $\mathbb{R}^{M+N}$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $u_m(x, y) = u(x, y) = u_n(x, y)$, para $(x, y) \in O_m \cap O_n \setminus S$.

Afirmamos que $O_m \cap O_n \setminus S$ é denso em $O_m \cap O_n$. Caso contrário, existiria um $(x_0, y_0) \in O_m \cap O_n$ e uma vizinhança aberta W desse ponto tal que $W \cap (\overline{O_m \cap O_n} \setminus S) = \emptyset$. Logo $W \subset S$, o que contradiz o fato de S possuir medida nula. Nossa afirmação está demonstrada.

A continuidade de u_m e u_n e a afirmação acima implicam que $u_m(x, y) = u_n(x, y)$ sempre que $(x, y) \in O_m \cap O_n$. Com isso, existe uma única função $\tilde{u}: O \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u}|_{O_n} = u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\tilde{u}$ é uma função contínua e $u(x, y) = \tilde{u}(x, y)$ para todo $(x, y) \in O \setminus S$. $\square$

O próximo resultado caracteriza as funções cujas derivadas direcionais com relação a uma dada coordenada é nula. A notação O_x será utilizada para denotar a secção vertical de x , isto é, dado $x \in \mathbb{R}^M$, $O_x := \{y \in \mathbb{R}^N \mid (x, y) \in O\}$. Se $x \in \mathbb{R}^M$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $O_x(\bar{y})$ denotará a componente conexa de $\bar{y}$ em O_x .

Teorema 2.2.4 *Suponhamos $M, N \in \mathbb{N}$. Sejam $O \subset \mathbb{R}^{M+N}$ um conjunto aberto e $u \in L_{\text{loc}}^1(O)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $\nabla_y u = 0$ no sentido ditribucional;
- (2) *existe um conjunto de medida nula $Z \subset \mathbb{R}^M$ e para todo $x \in \mathbb{R}^M \setminus Z$ existe um conjunto de medida nula $S_x \subset \mathbb{R}^N$ tal que, sempre que $y \in O_x$, existe uma constante $v(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}$ com a propriedade $u(x, y) = v(x, \bar{y})$ para todo $y \in O_x(\bar{y}) \setminus S_x$.*

Demonstração. Suponhamos que (1) esteja verificada. Consideremos uma cobertura de O por uma família enumerável $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos da forma $O_n = U_n \times V_n$, onde U_n e V_n são retângulos abertos limitados em $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ respectivamente. Notemos também que

$$\nabla_y(u|_{O_n}) = (\nabla_y u)|_{O_n} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O Lema 2.2.2 implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto de medida nula $S_n \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e uma função $v_n \in L_{\text{loc}}^1(U_n)$ tal que $u(x, y) = v_n(x)$ sempre que $(x, y) \in O_n \setminus S_n$. Seja $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Observe que

$$\mu_{M+N}(S) = \int_{\mathbb{R}^M} \mu_N(S_x) dx = 0.$$

Com isso, vemos que existe um conjunto de medida nula $Z \subset \mathbb{R}^M$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^M \setminus Z$, $\mu_N(S_x) = 0$. Agora, fixemos $(x, \bar{y}) \in O$ com $x \notin Z$. Então $(x, \bar{y}) \in O_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

Definamos A como sendo o conjunto de todos os $z \in O_x(\bar{y})$ para os quais existe um retângulo aberto $V := V_z \subset O_x$ com $z \in V$, tal que $u(x, y) = v_m(x)$ para todo $y \in V \setminus S_x$.

Notemos que $y \in A$. De fato, basta tomarmos $V = V_m$. Logo, $A \neq \emptyset$. O conjunto A também é aberto em $O_x(\bar{y})$ já que, se $z_0 \in A$ e $V = V_{z_0}$ é como na definição de A , então $V \subset A$. Seja agora $z \in O_x(\bar{y}) \setminus A$. Então $(x, z) \in O_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Segue que $u(x, y) = v_k(x)$ para todo $y \in V_k \setminus S_x$. Se $v_k(x) = v_m(x)$, então a definição do conjunto A implica que $z \in A$, o que é absurdo. Logo $v_k(x) \neq v_m(x)$ e também $V_k \cap A \neq \emptyset$, caso contrário, $V_k \subset A$. Logo, A é também fechado em $O_x(\bar{y})$. Da conexidade de $O_x(\bar{y})$ temos que $A = O_x(\bar{y})$.

Com isso, $O_x(\bar{y}) = \bigcup_{z \in A} V_z$. Seja $y \in O_x(\bar{y}) \setminus S_x$. Então $y \in V_z$ para algum $z \in A$ e assim $u(x, y) = v_m(x)$. Portanto, $u(x, y) = v_m(x)$ para todo $y \in O_x(\bar{y}) \setminus S_x$. Assim, a propriedade (2) está satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que a condição (2) seja válida. Considere uma função arbitrária $\phi \in \mathcal{D}(O)$, com $K := \text{supp } \phi \subset O$.

Denotemos por P a projeção canônica de $\mathbb{R}^{M+N}$ sobre $\mathbb{R}^M$. Segue que

$$\int_O u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dx dy = \int_{P(O) \setminus Z} \left(\int_{O_x} u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dy \right) dx$$

Fixemos agora $x \in P(O) \setminus Z$. Se mostrarmos que

$$\int_{O_x} u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dy = 0, \quad (2.7)$$

teremos finalizado a demonstração, pois (2.7) implica que, para toda função $\phi \in \mathcal{D}(O)$,

$$\int_O \nabla_y u(x, y) \phi(x, y) dy = \int_O u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dy = 0,$$

ou seja, $\nabla_y u = 0$. Mostremos que a igualdade em (2.7) é verificada.

O conjunto K_x é compacto em $\mathbb{R}^N$ e $K_x \subset O_x$. Assim, existem componentes conexas $\omega_1, \dots, \omega_n$ de O_x duas a duas disjuntas tais que

$$K_x \subset \omega_1 \cap \dots \cap \omega_n.$$

Como cada ω_i , $i = 1, \dots, n$, é conexo, segue que cada $K_x \cap \omega_i$ é compacto, $i = 1, \dots, n$.

Por hipótese, existem números reais $c_1(x), \dots, c_n(x)$ tais que $u(x, y) = c_k(x)$ para $y \in \omega_k \setminus S_x$, $k = 1, \dots, n$. Assim,

$$\int_{O_x} u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dy = \sum_{k=1}^n \int_{\omega_k} u(x, y) \nabla_y \phi(x, y) dy = \sum_{k=1}^n c_k(x) \int_{\omega_k} \nabla_y \phi(x, y) dy. \quad (2.8)$$

Fixando $k = 1, \dots, n$ e definindo

$$\alpha(y) := \begin{cases} \phi(x, y), & y \in \omega_k \\ 0, & y \in \mathbb{R}^N \setminus \omega_k, \end{cases}$$

temos que $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp } \alpha = K_x \cap \omega_k$ e

$$\nabla \alpha(y) := \begin{cases} \nabla \phi(x, y), & y \in \omega_k \\ 0, & y \in \mathbb{R}^N \setminus \omega_k. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{\omega_k} \nabla_y \phi(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \alpha(y) dy = 0. \quad (2.9)$$

As igualdades (2.8) e (2.9) implicam que a igualdade em (2.7) está verificada. O teorema está demonstrado. $\square$

Seja $O \subset \mathbb{R}^{M+N}$ um domínio não-vazio e limitado. Definimos

$$H_s^1(O) := \{u \in H^1(O) \mid \nabla_y u = 0\}.$$

Proposição 2.2.5 *O conjunto $H_s^1(O)$ é um subespaço fechado de $H^1(O)$. Além disso, $H_s^1(O)$ possui dimensão infinita.*

Demonstração. Notemos que $H_s^1(O)$ é claramente um subespaço de $H^1(O)$. Para mostrarmos que ele é fechado, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $H_s^1(O)$ com $u_n \rightarrow u$ na norma de $H^1(O)$. Logo, para cada $i = 1, \dots, N$

$$|\partial_{y_i} u_n - \partial_{y_i} u|_{L^2(O)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $u_n \in H_s^1(O)$, temos que $\partial_{y_i} u_n = 0$, $i = 1, \dots, N$. Logo, $\partial_{y_i} u = 0$, $i = 1, \dots, N$ e portanto $u \in H_s^1(O)$.

Sejam U e V retângulos abertos, limitado e não vazios satisfazendo $U \subset \mathbb{R}^M$ e $V \subset \mathbb{R}^N$ com $U \times V \subset O$. Vamos definir uma aplicação linear injetiva $\Gamma: \mathcal{D}(U) \rightarrow H_s^1(O)$. Como $\mathcal{D}(U)$ é de dimensão infinita, $H_s^1(O)$ também o será. Dado $\phi \in \mathcal{D}(U)$, seja $\Gamma(\phi) = u$, definida por

$$u(x, y) := \begin{cases} \phi(x), & \text{se } x \in U, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $u \in C^\infty(O)$,

$$\partial_{x_i} u = \begin{cases} \partial_{x_i} \phi, & \text{em } U, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $\partial_{y_i} u = 0$ para todo $i = 1, \dots, N$.

Notemos também que, como O é limitado, $u, \partial_{x_i} u \in L^2(O)$, $i = 1, \dots, N$. Uma aplicação do Teorema 2.2.4 implica que $u \in H_s^1(O)$. Logo, $\Gamma: \mathcal{D}(U) \rightarrow H_s^1(O)$ está bem definida e, é claro que, Γ é uma aplicação linear. Notemos ainda que, se $\Gamma(\phi) = 0$, então $\phi = 0$, ou seja, Γ é injetiva. $\square$

A Proposição 2.2.5 implica que o espaço $H_s^1(O)$ é completo para o produto escalar herdado de $H^1(O)$ e, portanto, é também um espaço de Hilbert.

Definamos agora o espaço $L_s^2(O)$ com sendo o fecho de $H_s^1(O)$ em $L^2(O)$. Assim, $L_s^2(O)$ é também um espaço de Hilbert com o produto escalar herdado de $L^2(O)$.

2.3 O problema limite

Vamos agora apresentar o problema limite para (RD_ε) , $\varepsilon > 0$. Utilizaremos a notação introduzida na Seção 2.1. Recordemos que $a_\varepsilon: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear dada por

$$a_\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla_x u \cdot \nabla_x v + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_y u \cdot \nabla_y v) dx dy.$$

Dada uma função $u \in H^1(\Omega)$, é fácil ver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a_\varepsilon(u, u) = \int_{\Omega} \nabla_x u \cdot \nabla_x u dx dy, \text{ se } \nabla_y u = 0$$

e que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a_\varepsilon(u, u) = \infty, \text{ se } \nabla_y u \neq 0.$$

Vamos definir uma forma bilinear a_0 em $H_s^1(\Omega)$. Esta será a forma bilinear “limite” que nos dará o semifluxo “limite” para a família de semifluxos $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$.

Definimos $a_0: H_s^1(\Omega) \times H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a_0(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy.$$

A definição de $H_s^1(\Omega)$ implica que

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} \nabla_x u \cdot \nabla_x v dx dy, \text{ para quaisquer } u, v \in H_s^1(\Omega).$$

Em $L_s^2(\Omega)$ estamos considerando o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{L_s^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u v dx dy.$$

Seja b_0 a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_s^2(\Omega)}$ a $H_s^1(\Omega) \times H_s^1(\Omega)$. Do mesmo modo que para o caso a_ε , temos que a_0 é contínua e coerciva. Sendo assim, as hipóteses da Proposição 1.1.2 estão satisfeitas para o par (a_0, b_0) . Também estão satisfeitas as hipóteses das Proposições 1.1.7 e 1.1.8. Estas proposições implicam no seguinte resultado:

Lema 2.3.1 *O conjunto dos autovalores de (a_0, b_0) é infinito e enumerável, possui um menor elemento e cada autovalor possui multiplicidade finita. Além disso, o par (a_0, b_0) gera um operador setorial A_0 em $X = L_s^2(\Omega)$. O espaço de potências fracionárias associado a $\alpha = 1/2$ satisfaz $X^\alpha = H_s^1(\Omega)$.*

Queremos agora mostrar que o operador $\hat{f}$ definido na Seção 2.1 associado a função f aplica $H_s^1(\Omega)$ em $L_s^2(\Omega)$. Antes porém, temos o seguinte resultado, o qual é uma adaptação do Corolário IX.5 de [3].

Lema 2.3.2 *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ uma função satisfazendo $\sup_{s \in \mathbb{R}} |G'(s)| < \infty$. Se $p \geq 1$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(G \circ u) = (G' \circ u) \nabla u$.*

Demonstração. Como $\sup_{s \in \mathbb{R}} |G'(s)| < \infty$ e $\mu(\Omega) < \infty$, temos que existe uma constante $M > 0$ tal que $|G(s)| \leq M|s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\int_{\Omega} |G \circ u|^p dx dy \leq M^p \int_{\Omega} |u|^p dx dy < \infty,$$

ou seja, $G \circ u \in L^p(\Omega)$. A limitação de G' também implica que $(G' \circ u) \partial u \in L^p(\Omega)$. Para completar a demonstração, falta mostrar que

$$\int_{\Omega} (G \circ u) \partial \psi dx dy = - \int_{\Omega} (G' \circ u) \partial u \psi dx dy, \text{ qualquer que seja } \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.10)$$

Seja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Seja $1 \leq p < \infty$. Segue do Teorema IX.2 em [3] que existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ quase sempre em Ω e, se $\omega \subset\subset \Omega$, então $\partial u_n \rightarrow \partial u$ em $L^p(\omega)$. Além disso,

$$\int_{\Omega} (G \circ u_n) \partial \psi dx dy = - \int_{\Omega} (G' \circ u_n) \partial u_n \psi dx dy \text{ qualquer que seja } \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.11)$$

Como $G \circ u_n \rightarrow G \circ u$ em $L^p(\Omega)$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que $(G' \circ u_n) \partial u_n \rightarrow (G' \circ u) \partial u$. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.11) obtemos (2.10).

Caso 2. Seja $p = \infty$ e Ω_ψ um aberto tal que $\text{supp } \psi \subset \Omega_\psi \subset\subset \Omega$. Portanto, $u \in W^{1,p}(\Omega_\psi)$ para todo $p < \infty$, e pelo Caso 1,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (G \circ u) \partial \psi dx dy &= \int_{\Omega_\psi} (G \circ u) \partial \psi dx dy \\ &= - \int_{\Omega_\psi} (G' \circ u) \partial u \psi dx dy = - \int_{\Omega} (G' \circ u) \partial u \psi dx dy, \end{aligned}$$

qualquer que seja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. A demonstração está completa. $\square$

Teorema 2.3.3 *Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que $g \circ u \in L^2(\Omega)$. Então $g \circ u \in L_s^2(\Omega)$.*

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $h_n \in C_0^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq h_n \leq 1$ e $h_n(s) = 1$ para $|s| \leq n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n := g h_n$. Segue que $g_n \in C_0^1(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{s \in \mathbb{R}} |g'_n(s)| < \infty$. Portanto, pelo Lema 2.3.2 temos que $g_n \circ u \in H^1(\Omega)$ e $\nabla_y(g_n \circ u) = (g'_n \circ u) \nabla_y u$. Como $\nabla_y u = 0$, temos que $\nabla_y(g_n \circ u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $g_n \circ u \in H_s^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $u(x, y)$ é finito para quase todo $(x, y) \in \Omega$, segue que existe um $n_0 = n_0(x, y)$ com $|u(x, y)| \leq n_0$ para quase todo $(x, y) \in \Omega$. A definição de g_n implica que $|g_n \circ u(x, y) -$

$|g \circ u(x, y)| = 0$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $|g_n \circ u(x, y) - g \circ u(x, y)| \rightarrow 0$ para quase todo $(x, y) \in \Omega$. Notemos que $|g_n \circ u| \leq |g| \circ u$ e, portanto, $|g_n \circ u - g \circ u| \leq 2|g| \circ u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|g| \circ u \in L^2(\Omega)$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $g_n \circ u \rightarrow g \circ u$ em $L^2(\Omega)$, ou seja, $g \circ u \in L_s^2(\Omega)$. O teorema está demonstrado. $\square$

O Teorema 2.3.3 implica, em particular, que $\hat{f}(H_s^1(\Omega)) \subset L_s^2(\Omega)$. Com isso, temos definido a seguinte equação de evolução:

$$(RD_0) \quad \dot{u} + A_0 u = \hat{f}(u).$$

O Lema 2.3.1 e o Teorema 2.1.8 juntamente com o Exemplo 1.2.2 implicam que a equação (RD_0) gera um semifluxo π_0 em $H_s^1(\Omega)$. Este será o semifluxo limite para a família $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Queremos tornar mais precisa a idéia de como π_0 e $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ estão relacionados. O primeiro passo é saber se $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ se aproxima, em algum sentido, do semifluxo π_0 . Para realizarmos tal análise vamos introduzir, para cada $\varepsilon > 0$, uma norma em $H^1(\Omega)$.

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos a norma $|\cdot|_\varepsilon$ em $H^1(\Omega)$ por:

$$|u|_\varepsilon := (a_\varepsilon(u, u) + |u|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Proposição 2.3.4 *Para cada $\varepsilon > 0$, as normas $|\cdot|_\varepsilon$ e $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes.*

Demonstração. Notemos que, para toda função $u \in H^1(\Omega)$, se $0 < \varepsilon \leq 1$ vale

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq |u|_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |u|_{H^1(\Omega)},$$

e se $\varepsilon > 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} |u|_{H^1(\Omega)} \leq |u|_\varepsilon \leq |u|_{H^1(\Omega)}.$$

Isso completa a demonstração. $\square$

Observemos que $|u|_\varepsilon \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ sempre que $u \in H^1(\Omega)$ é tal que $\nabla_y u \neq 0$ em $L^2(\Omega)$, pois nesse caso, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a_\varepsilon(u, u) = \infty$. Por outro lado, se $u \in H_s^1(\Omega)$, temos que $|u|_\varepsilon = |u|_{H^1(\Omega)}$, ou seja, a família $(|u|_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ possui limite finito quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Concluimos a seção com o lema que nos auxiliará na demonstração do resultado sobre convergência espectral a ser analisado no próximo capítulo.

Proposição 2.3.5 *Seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em $H^1(\Omega)$ e que existe um $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que*

$$|u_n - u|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

As seguintes propriedades são verificadas:

- (1) $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$;

(2) $|a_{\varepsilon_n}(u_n, u_n) - a_0(u, u)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Como $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. A Proposição 2.3.4 implica que

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq |u|_{\varepsilon_n} \text{ qualquer que seja } u \in H^1(\Omega) \text{ e para todo } n \geq n_0.$$

Em particular,

$$|u_n - u|_{H^1(\Omega)} \leq |u_n - u|_{\varepsilon_n} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

A desigualdade acima juntamente com (2.12) demonstram a afirmativa (1).

Para provar (2), primeiro observemos que, se $u \in H^1_x(\Omega)$, para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$|u|_{\varepsilon}^2 = \int_{\Omega} (\nabla_x u \cdot \nabla_x u) dx dy + |u|_{L^2(\Omega)}^2 = a_0(u, u) + |u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |a_{\varepsilon_n}(u_n, u_n) - a_0(u, u)| &\leq |a_{\varepsilon_n}(u_n, u_n) + |u_n|_{L^2(\Omega)}^2 - a_0(u, u) - |u|_{L^2(\Omega)}^2| \\ &\quad + ||u_n|_{L^2(\Omega)}^2 - |u|_{L^2(\Omega)}^2| \\ &= ||u_n|_{\varepsilon_n}^2 - |u|_{\varepsilon_n}^2| + ||u_n|_{L^2(\Omega)}^2 - |u|_{L^2(\Omega)}^2| \\ &= ||u_n|_{\varepsilon_n}^2 - |u|_{H^1(\Omega)}^2| + ||u_n|_{L^2(\Omega)}^2 - |u|_{L^2(\Omega)}^2|. \end{aligned}$$

Mas,

$$||u_n|_{\varepsilon_n} - |u|_{\varepsilon_n}| \leq |u_n - u|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $|u|_{\varepsilon_n} = |u|_{H^1(\Omega)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $|u_n|_{\varepsilon_n} \rightarrow |u|_{H^1(\Omega)}$ quando $n \rightarrow \infty$ e portanto, $|u_n|_{\varepsilon_n}^2 \rightarrow |u|_{H^1(\Omega)}^2$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue da desigualdade

$$||u_n|_{L^2(\Omega)} - |u|_{L^2(\Omega)}| \leq |u_n - u|_{H^1(\Omega)} \leq |u_n - u|_{\varepsilon_n}$$

que $|u_n|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow |u|_{L^2(\Omega)}^2$.

Com isso,

$$|a_{\varepsilon_n}(u_n, u_n) - a_0(u, u)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

A demonstração está concluída. $\square$

Capítulo 3

Convergência Espectral

Nesse capítulo vamos analisar o comportamento da família de autovalores e autovetores associados aos pares (a_ε, b) , $\varepsilon > 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A Seção 3.1 apresenta o resultado de convergência desses autovalores e autovetores. Sob certas condições no domínio, é possível obter uma propriedade de monotonicidade. Tal resultado é apresentado na Seção 3.2. Nesse capítulo utilizaremos a notação apresentada no Capítulo 2.

3.1 Convergência espectral

Para cada $\varepsilon > 0$, o par (a_ε, b) definido na Seção 2.1 satisfaz todas as hipóteses das Proposições 1.1.2 e 1.1.3. Denotemos por $(\lambda_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência repetida de autovalores do par (a_ε, b) e por $(w_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de autovetores $L^2(\Omega)$ -ortonormal completa correspondente. Segue da Proposição 1.1.2 que, para cada $\varepsilon > 0$

$$\lambda_{\varepsilon,1} \leq \lambda_{\varepsilon,2} \leq \lambda_{\varepsilon,3} \leq \cdots$$

Notemos ainda que o par (a_0, b_0) definido na Seção 2.3 também satisfaz as hipóteses das Proposições 1.1.2 e 1.1.3. Denotemos então por $(\lambda_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência de autovalores de (a_0, b_0) . Segue que

$$\lambda_{0,1} \leq \lambda_{0,2} \leq \lambda_{0,3} \leq \cdots$$

O próximo resultado nos mostra como, para cada $j \in \mathbb{N}$, as famílias $(\lambda_{\varepsilon,j})_{\varepsilon > 0}$ e $(w_{\varepsilon,j})_{\varepsilon > 0}$ se comportam quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. No caso da família $(w_{\varepsilon,j})_{\varepsilon > 0}$, somente conseguiremos obter alguma resposta se considerarmos a norma $|\cdot|_\varepsilon$ introduzida na Seção 2.3. Temos então o resultado mais importante deste capítulo:

Teorema 3.1.1 *Com a notação introduzida acima, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *para todo $j \in \mathbb{N}$, se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $\lambda_{\varepsilon_1,j} \geq \lambda_{\varepsilon_2,j}$. Além disso, para cada $j \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_{0,j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_{\varepsilon,j} = \sup_{\varepsilon > 0} \lambda_{\varepsilon,j};$$

(2) seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números positivos com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma subsequência de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e existe um sistema $L_s^2(\Omega)$ -ortonormal $(w_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ de autovetores de (a_0, b_0) correspondendo à sequência de autovalores $(\lambda_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ tais que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$|w_{\varepsilon_n, j} - w_{0, j}|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Nesta demonstração utilizaremos a notação $\langle u, v \rangle$ para representar $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$. Seja $\varepsilon > 0$ e $j \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.1.3 temos que

$$\lambda_{\varepsilon, j} = \min_{F \in \mathcal{V}_j} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \frac{a_\varepsilon(u, u)}{\langle u, u \rangle}, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{V}_j$ é o conjunto de todos os subespaços j -dimensionais de $H^1(\Omega)$.

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tais que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Com isso, $1/\varepsilon_1^2 > 1/\varepsilon_2^2$ e, portanto, se $u \in H^1(\Omega)$,

$$a_{\varepsilon_1}(u, u) \geq a_{\varepsilon_2}(u, u). \quad (3.2)$$

Assim, (3.1) e (3.2) implicam que $\lambda_{\varepsilon_1, j} \geq \lambda_{\varepsilon_2, j}$. Além disso, como b_0 é a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $H_s^1(\Omega) \times H_s^1(\Omega)$, segue da Proposição 1.1.3 que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_{0, j} = \min_{F \in \mathcal{U}_j} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \frac{a_0(u, u)}{\langle u, u \rangle},$$

onde $\mathcal{U}_j$ é o conjunto de todos os subespaços j -dimensionais de $H_s^1(\Omega)$. Observemos que $H_s^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ e que $a_\varepsilon(u, u) = a_0(u, u)$ para toda função $u \in H_s^1(\Omega)$ e para todo $\varepsilon > 0$. Assim, $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{V}_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $E \in \mathcal{U}_j$. Logo, $E \in \mathcal{V}_j$. Tomando $u \in E$ com $u \neq 0$, temos que

$$\frac{a_\varepsilon(u, u)}{\langle u, u \rangle} = \frac{a_0(u, u)}{\langle u, u \rangle}.$$

Com isso,

$$\min_{F \in \mathcal{V}_j} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \frac{a_\varepsilon(u, u)}{\langle u, u \rangle} \leq \min_{E \in \mathcal{U}_j} \max_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{a_0(u, u)}{\langle u, u \rangle},$$

isto é, $\lambda_{\varepsilon, j} \leq \lambda_{0, j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $\varepsilon > 0$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, a família $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ é limitada superiormente. Este fato e a desigualdade (3.2) implicam que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um $\mu_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\varepsilon, j} = \sup_{\varepsilon > 0} \lambda_{\varepsilon, j}.$$

Observemos ainda que $\mu_j \leq \lambda_{0, j}$ e que, para $j_1 < j_2$, segue que $\mu_{j_1} \leq \mu_{j_2}$.

Nosso objetivo é mostrar que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j = \lambda_{0, j}$ e também construir uma sequência $(w_{0, j})_{j \in \mathbb{N}}$ com as propriedades descritas em (2). Seja então $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Podemos assumir sem

perda de generalidade que $\varepsilon_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $j \in \mathbb{N}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $(w_{\varepsilon_n, j})_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema $L^2(\Omega)$ -ortonormal e $w_{\varepsilon_n, j}$ é um autovetor associado a $\lambda_{\varepsilon_n, j}$, temos que

$$a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j}) = \lambda_{\varepsilon_n, j} \langle w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j} \rangle = \lambda_{\varepsilon_n, j}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Também,

$$a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w) = \lambda_{\varepsilon_n, j} \langle w_{\varepsilon_n, j}, w \rangle, \text{ qualquer que seja } w \in H^1(\Omega) \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |w_{\varepsilon_n, j}|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \nabla_x w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_x w_{\varepsilon_n, j} dx dy + \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} dx dy + |w_{\varepsilon_n, j}|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j}) + 1 = \lambda_{\varepsilon_n, j} + 1 \leq \lambda_{0, j} + 1. \end{aligned}$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, $(w_{\varepsilon_n, j})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço reflexivo $H^1(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que será denotada novamente por $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma função $w_{0, j} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$w_{\varepsilon_n, j} \rightharpoonup w_{0, j} \text{ em } H^1(\Omega).$$

Como Ω possui fronteira Lipschitz, temos que $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$. Logo

$$w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow w_{0, j} \text{ em } L^2(\Omega).$$

Em particular, como $|w_{\varepsilon_n, j}|_{L^2(\Omega)} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $|w_{0, j}|_{L^2(\Omega)} = 1$. Vamos mostrar que $w_{0, j} \in H_s^1(\Omega)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Seja $j \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j}) \geq \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} dx dy \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} dx dy \leq \lambda_{\varepsilon_n, j} \leq \lambda_{0, j} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Temos então que

$$\int_{\Omega} \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_y w_{\varepsilon_n, j} dx dy \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, $\partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, para cada $i = 1, \dots, N$.

Agora, fixemos $i = 1, \dots, N$. Para toda função $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, segue da Desigualdade de Hölder que

$$\int_{\Omega} |\phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j}| dx dy \leq |\phi|_{L^2(\Omega)} |\partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j}|_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, $\phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\int_{\Omega} |w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi - w_{0, j} \partial_{y_i} \phi| dx dy \leq \|w_{\varepsilon_n, j} - w_{0, j}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{y_i} \phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow w_{0, j}$ em $L^2(\Omega)$, temos que $w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi \rightarrow w_{0, j} \partial_{y_i} \phi$ em $L^1(\Omega)$ qualquer que seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} \phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} dx dy = - \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi dx dy.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{0, j} \partial_{y_i} \phi dx dy &= \int_{\Omega} w_{0, j} \partial_{y_i} \phi dx dy + \int_{\Omega} \phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} dx dy - \int_{\Omega} \phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} dx dy \\ &= \int_{\Omega} w_{0, j} \partial_{y_i} \phi dx dy - \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi dx dy - \int_{\Omega} \phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} dx dy \\ &= \int_{\Omega} (w_{0, j} \partial_{y_i} \phi - w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi) dx dy - \int_{\Omega} \phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j} dx dy. \end{aligned}$$

Estimando o módulo da expressão acima obtemos

$$\left| \int_{\Omega} w_{0, j} \partial_{y_i} \phi dx dy \right| \leq \|w_{0, j} \partial_{y_i} \phi - w_{\varepsilon_n, j} \partial_{y_i} \phi\|_{L^1(\Omega)} + \|\phi \partial_{y_i} w_{\varepsilon_n, j}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que:

$$\int_{\Omega} w_{0, j} \partial_{y_i} \phi dx dy = 0 \text{ qualquer que seja } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou seja, mostramos que $\partial_{y_i} w_{0, j} = 0$, para cada $i = 1, \dots, N$. Portanto, $w_{0, j} \in H_s^1(\Omega)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $(\mu_j, w_{0, j})_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pares de autovalores-autovetores de (a_0, b_0) , isto é, para todo $j \in \mathbb{N}$, $a_0(w_{0, j}, w) = \mu_j b_0(w_{0, j}, w)$ qualquer que seja $w \in H_s^1(\Omega)$. De fato, seja $w \in H_s^1(\Omega)$ uma função arbitrária e fixemos $j \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla w dx dy &= \int_{\Omega} \nabla_x w_{\varepsilon_n, j} \cdot \nabla_x w dx dy \\ &= a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w) = \lambda_{\varepsilon_n, j} \langle w_{\varepsilon_n, j}, w \rangle. \end{aligned}$$

Como $w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow w_{0, j}$ em $H^1(\Omega)$, $\lambda_{\varepsilon_n, j} \rightarrow \mu_j$ e $w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow w_{0, j}$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$a_0(w_{0, j}, w) = \int_{\Omega} \nabla w_{0, j} \cdot \nabla w dx dy = \mu_j \langle w_{0, j}, w \rangle = \mu_j b_0(w_{0, j}, w),$$

o que demonstra nossa afirmação.

Mostremos agora que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $|w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $j \in \mathbb{N}$. Notemos que:

$$\begin{aligned} |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{\varepsilon_n}^2 &= a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}, w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}) + |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,j}) - 2a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n,j}, w_{0,j}) + a_0(w_{0,j}, w_{0,j}) + |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lambda_{\varepsilon_n,j} - 2a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n,j}, w_{0,j}) + \mu_j \langle w_{0,j}, w_{0,j} \rangle + |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lambda_{\varepsilon_n,j} - 2 \int_{\Omega} \nabla_x w_{\varepsilon_n,j} \cdot \nabla_x w_{0,j} dx dy + \mu_j + |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como $w_{\varepsilon_n,j} \rightarrow w_{0,j}$ em $H^1(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla_x w_{\varepsilon_n,j} \cdot \nabla_x w_{0,j} dx dy \rightarrow \int_{\Omega} \nabla_x w_{0,j} \cdot \nabla_x w_{0,j} dx dy = \mu_j \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

O fato de que $w_{\varepsilon_n,j} \rightarrow w_{0,j}$ em $L^2(\Omega)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, juntamente com (3.3) e (3.4) implicam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{\varepsilon_n}^2 = 0.$$

Aplicando a Proposição 2.3.5 obtemos que $w_{\varepsilon_n,j} \rightarrow w_{0,j}$ em $H^1(\Omega)$ e $a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,j}) \rightarrow a_0(w_{0,j}, w_{0,j})$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por meio do Processo Diagonal de Cantor (cf. [26], Teorema 3.144), podemos encontrar uma subsequência de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, novamente denotada por $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma sequência de funções $(w_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ em $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ satisfazendo as seguintes propriedades para cada $j \in \mathbb{N}$:

- (1) $(\mu_j, w_{0,j})$ é um par autovalor-autovetor de (a_0, b_0) ;
- (2) $|w_{0,j}|_{L^2(\Omega)} = 1$;
- (3) $|w_{\varepsilon_n,j} - w_{0,j}|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Mostremos que $(w_{0,j})_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema $L_s^2(\Omega)$ -ortonormal. Como $|w_{0,j}|_{L^2(\Omega)} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, basta mostrarmos que w_{0,j_1} e w_{0,j_2} são ortogonais para $j_1 \neq j_2$. Sejam $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tais que $j_1 \neq j_2$. Então

$$\int_{\Omega} w_{\varepsilon_n,j_1} w_{\varepsilon_n,j_2} dx dy = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{0,j_1} w_{0,j_2} dx dy &= \int_{\Omega} w_{0,j_1} w_{0,j_2} dx dy + \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n,j_1} w_{\varepsilon_n,j_2} dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n,j_1} w_{0,j_2} dx dy + \int_{\Omega} w_{\varepsilon_n,j_1} w_{0,j_2} dx dy \\ &= \int_{\Omega} (w_{0,j_1} - w_{\varepsilon_n,j_1}) w_{0,j_2} dx dy + \int_{\Omega} (w_{\varepsilon_n,j_2} - w_{0,j_2}) w_{\varepsilon_n,j_1} dx dy. \end{aligned}$$

Como $w_{\varepsilon_n, j} \rightarrow w_{0, j}$ em $L^2(\Omega)$, a desigualdade de Hölder implica que

$$\int_{\Omega} w_{0, j_1} w_{0, j_2} dx dy = 0.$$

Portanto w_{0, j_1} e w_{0, j_2} são ortogonais.

Para verificarmos que $\lambda_{0, j} = \mu_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, utilizaremos a Proposição 1.1.5. Assim temos somente que mostrar que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mu_j &= a_0(w_{0, j}, w_{0, j}) \\ &= \min \left\{ a_0(w, w) \mid w \in H_s^1(\Omega), |w|_{L^2(\Omega)} = 1, \langle w, w_{0, h} \rangle = 0, \text{ para } h = 1, \dots, j-1 \right\}. \end{aligned}$$

Fixemos então $j \in \mathbb{N}$ e seja $w \in H_s^1(\Omega)$ arbitrário tal que $|w|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\langle w, w_{0, h} \rangle = 0$, $h = 1, \dots, j-1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$v_n := - \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle w_{\varepsilon_n, h} + w.$$

Segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, j-1$,

$$\langle v_n, w_{\varepsilon_n, k} \rangle = \langle w, w_{\varepsilon_n, k} \rangle - \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle \langle w_{\varepsilon_n, k}, w_{\varepsilon_n, h} \rangle = 0.$$

Afirmamos que $|v_n - w|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |v_n - w|_{\varepsilon_n}^2 &= \left| \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle w_{\varepsilon_n, h} \right|_{\varepsilon_n}^2 \\ &= \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle a_{\varepsilon_n} \left(w_{\varepsilon_n, h}, \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle w_{\varepsilon_n, h} \right) + \left| \sum_{h=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle w_{\varepsilon_n, h} \right|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilizando a Identidade de Parseval temos

$$\begin{aligned} |v_n - w|_{\varepsilon_n}^2 &= \sum_{h=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, k} \rangle \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, h}, w_{\varepsilon_n, k}) + \sum_{h=1}^{j-1} |\langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle|^2 \\ &= \sum_{h=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} \langle w, w_{\varepsilon_n, k} \rangle \langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle \lambda_{\varepsilon_n, h} \langle w_{\varepsilon_n, h}, w_{\varepsilon_n, k} \rangle + \sum_{h=1}^{j-1} |\langle w, w_{\varepsilon_n, h} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Como $w_{\varepsilon_n, h} \rightarrow w_{0, h}$ em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\langle w, w_{0, h} \rangle = 0$ para cada $h = 1, \dots, j-1$, temos que $|v_n - w|_{\varepsilon_n}^2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Segue da Proposição 2.3.5 que $v_n \rightarrow w$ em $H^1(\Omega)$ e, consequentemente, em $L^2(\Omega)$. Portanto, $|v_n|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, podemos assumir que $|v_n|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos então

$$u_n := |v_n|_{L^2(\Omega)}^{-1} v_n.$$

Temos que $|w_n|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\langle w_n, w_{\varepsilon_n, h} \rangle = 0$, $h = 1, \dots, j-1$. Além disso,

$$\begin{aligned} |w_n - w|_{\varepsilon_n} &= \left\| |v_n|_{L^2(\Omega)}^{-1} v_n - w \right\|_{\varepsilon_n} = |v_n|_{L^2(\Omega)}^{-1} |v_n - |v_n|_{L^2(\Omega)} w|_{\varepsilon_n} \\ &\leq |v_n|_{L^2(\Omega)}^{-1} (|v_n - w|_{\varepsilon_n} + |w - |v_n|_{L^2(\Omega)} w|_{\varepsilon_n}) \\ &= |v_n|_{L^2(\Omega)}^{-1} (|v_n - w|_{\varepsilon_n} + |1 - |v_n|_{L^2(\Omega)}|_{\varepsilon_n} |w|_{\varepsilon_n}). \end{aligned}$$

Notemos que $|w|_{\varepsilon_n} = |w|_{H^1(\Omega)}$, já que $w \in H_s^1(\Omega)$ e recordemos que $|v_n|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 1$ e $|v_n - w|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo

$$|w_n - w|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pela Proposição 2.3.5, sabemos que $a_{\varepsilon_n}(w_n, w_n) \rightarrow a_0(w, w)$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j}) = \lambda_{\varepsilon_n, j} \rightarrow \mu_j = a_0(w_{0, j}, w_{0, j}) \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Além disso, como $(w_{\varepsilon_n, j})_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal de autovetores do par (a_{ε_n}, b_0) , temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $j \in \mathbb{N}$,

$$a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, j}, w_{\varepsilon_n, j}) \leq a_{\varepsilon_n}(w_n, w_n). \quad (3.6)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, segue de (3.5) e (3.6) que

$$a_0(w_{0, j}, w_{0, j}) \leq a_0(w, w) \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Mostramos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$a_0(w_{0, j}, w_{0, j}) = \min \left\{ a_0(w, w) \mid w \in H_s^1(\Omega), |w|_{L_s^2(\Omega)} = 1, \langle w, w_{0, h} \rangle = 0, h = 1, \dots, j-1 \right\},$$

concluindo assim a demonstração do teorema. $\square$

3.2 Monotonicidade

O Teorema 3.1.1 implica que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a família de autovalores $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ é monótona decrescente e converge para $\lambda_{0, j}$. Observemos que $\lambda_{\varepsilon, 1} = 0$ para todo $\varepsilon \geq 0$. Por outro lado, é mostrado em [4] que, se $j \geq 2$, sob condições adicionais, a família $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ é estritamente monótona decrescente. Descreveremos aqui tal resultado. Iniciamos apresentando uma condição necessária e suficiente para que a monotonicidade seja estrita. Usaremos a seguinte notação:

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx \, dy, \text{ sempre que } w, v \in H^1(\Omega).$$

Teorema 3.2.1 *Sejam $\varepsilon > 0$. Consideremos $(\lambda_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ a família de autovalores do par (a_ε, b) .*

- (1) *Suponhamos que exista um $j \in \mathbb{N}$ e números reais $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tais que $\lambda_{\varepsilon_2,j} = \lambda_{\varepsilon_1,j}$. Então existe uma função $w \in H_s^1(\Omega)$ com $w \neq 0$, tal que*

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega), \quad (3.7)$$

onde $\lambda = \lambda_{\varepsilon_2,j}$.

- (2) *reciprocamente, se existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ e um $w \in H_s^1(\Omega)$, com $w \neq 0$, tais que (3.7) esteja satisfeita, então existe um único $k \in \mathbb{N}$ com $\lambda = \lambda_{0,k} < \lambda_{0,k+1}$. Além disso, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\lambda_{\varepsilon,k} = \lambda \text{ para todo } \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Demonstração. Suponhamos que as hipóteses em (1) estejam satisfeitas. Seja E o subespaço j -dimensional de $H^1(\Omega)$ gerado pelo conjunto $\{w_{\varepsilon_2,1}, \dots, w_{\varepsilon_2,j}\}$. Pela Proposição 1.1.3, temos que

$$\lambda_{\varepsilon_1,j} \leq \max_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{a_{\varepsilon_1}(u, u)}{\langle u, u \rangle}.$$

Consequentemente, existe uma função $w \in E$, com $\langle w, w \rangle = 1$, tal que

$$\lambda_{\varepsilon_1,j} \leq a_{\varepsilon_1}(w, w).$$

Nosso primeiro passo será mostrar que $w \in H_s^1(\Omega)$, isto é, $\nabla_y w = 0$ em $L^2(\Omega)$. Notemos que

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon_1}(w, w) &= \int_{\Omega} \left(\nabla_x w \cdot \nabla_x w + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \nabla_y w \cdot \nabla_y w \right) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \int_{\Omega} \nabla_y w \cdot \nabla_y w dx dy - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \int_{\Omega} \nabla_y w \cdot \nabla_y w dx dy \\ &= a_{\varepsilon_2}(w, w) - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle. \end{aligned}$$

E assim,

$$\lambda_{\varepsilon_1,j} \leq a_{\varepsilon_2}(w, w) - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle. \quad (3.8)$$

Como para cada $k = 1, \dots, j$, $w_{\varepsilon_2,k}$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_{\varepsilon_2,k}$, $(w_{\varepsilon_2,j})_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema $L^2(\Omega)$ -ortonormal completo e $w \in E$, segue que

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon_2}(w, w) &= \sum_{k=1}^j a_{\varepsilon_2}(w, \langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle w_{\varepsilon_2,k}) \\ &= \sum_{k=1}^j \langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle a_{\varepsilon_2}(w, w_{\varepsilon_2,k}) = \sum_{k=1}^j \lambda_{\varepsilon_2,k} |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lambda_{\varepsilon_2,j} = \lambda_{\varepsilon_2,j} \langle w, w \rangle = \lambda_{\varepsilon_2,j} \sum_{k=1}^j |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2.$$

Como estamos supondo $\lambda_{\varepsilon_2,j} = \lambda_{\varepsilon_1,j}$, a desigualdade (3.8) implica que

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon_2,j} \sum_{k=1}^j |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 &= \lambda_{\varepsilon_2,j} = \lambda_{\varepsilon_1,j} \leq a_{\varepsilon_2}(w, w) - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle \\ &= \sum_{k=1}^j \lambda_{\varepsilon_2,k} |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^j (\lambda_{\varepsilon_2,j} - \lambda_{\varepsilon_2,k}) |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 \leq - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle. \quad (3.9)$$

Notemos que $\lambda_{\varepsilon_2,j} \geq \lambda_{\varepsilon_2,k}$ para cada $k = 1, \dots, j$, e que

$$- \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) < 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^j (\lambda_{\varepsilon_2,j} - \lambda_{\varepsilon_2,k}) |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 \geq 0$$

e

$$- \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle \leq 0.$$

Esses fatos e a desigualdade (3.9) implicam que devemos ter

$$\sum_{k=1}^j (\lambda_{\varepsilon_2,j} - \lambda_{\varepsilon_2,k}) |\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 = - \left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) \langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Concluimos que

$$\langle \nabla_y w, \nabla_y w \rangle = 0,$$

ou seja, $w \in H_s^1(\Omega)$. Notemos ainda que por (3.10)

$$|\langle w, w_{\varepsilon_2,k} \rangle|^2 = 0 \text{ sempre que } \lambda_{\varepsilon_2,j} - \lambda_{\varepsilon_2,k} > 0.$$

Ou seja, $w \in E$ e w é ortogonal a todos os autovetores associados a $\lambda_{\varepsilon_2,k}$, desde que $\lambda_{\varepsilon_2,k} \neq \lambda_{\varepsilon_2,j}$. Com isso, w pertence ao autocspaço gerado por $\lambda = \lambda_{\varepsilon_2,j}$. Em outras palavras, qualquer que seja $v \in H^1(\Omega)$,

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \langle \nabla_x w, \nabla_x v \rangle = \langle \nabla_x w, \nabla_x v \rangle + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \langle \nabla_y w, \nabla_y v \rangle = a_{\varepsilon_2}(w, v) = \lambda \langle w, v \rangle.$$

A demonstração de (1) está concluída.

Demonstremos a parte (2) do teorema. Seja $w \in H_s^1(\Omega)$ com $w \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que (3.7) esteja satisfeita. Segue que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$a_\varepsilon(w, v) = \langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle, \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega).$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, temos que λ é um autovalor do operador A_ε . Como $w \in H_s^1(\Omega)$, segue que

$$a_0(w, v) = \langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle.$$

Logo, λ é também autovalor de A_0 . Seja $r \in \mathbb{N}$ o maior número tal que $\lambda = \lambda_{0,r}$. Então $\lambda_{0,r} < \lambda_{0,r+1}$. O Teorema 3.1.1 implica que $\lambda_{\varepsilon_1, r+1} \geq \lambda_{\varepsilon_2, r+1}$ sempre que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Além disso, segue desse mesmo resultado que $\lambda_{0, r+1} = \sup_{\varepsilon > 0} \lambda_{\varepsilon, r+1}$, ou seja, $\lambda_{0, r+1} \geq \lambda_{\varepsilon, r+1}$, para todo $\varepsilon \geq 0$. Portanto, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\lambda_{0, r+1} \geq \lambda_{\varepsilon, r+1} > \lambda_{0, r} = \lambda$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Para completar a demonstração, basta mostrar que, para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\lambda_{\varepsilon, r} = \lambda$. Suponhamos que isso não seja verdadeiro. Então existiria um $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ tal que

$$\lambda_{\varepsilon, r} < \lambda < \lambda_{\varepsilon, r+1},$$

mas isso contradiz o fato de λ ser um autovalor de A_ε . $\square$

O próximo resultado apresenta as condições que garantem a monotonicidade estrita da família $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ para cada $j \geq 2$.

Teorema 3.2.2 *Suponhamos que exista um conjunto aberto não-vazio $J \subset \mathbb{R}^M$ e dois conjuntos abertos e disjuntos $U, U' \subset \mathbb{R}^{M+N}$ tais que $\Omega \cap (J \times \mathbb{R}^N) = U \cup U'$ e que para todo $x \in J$, a seção vertical*

$$U_x := \{y \mid (x, y) \in U\}$$

seja conexa e não-vazia. Para $x \in J$, seja $p(x) > 0$ a medida de Lebesgue N -dimensional da seção vertical U_x . Suponhamos ainda que $p \in C^1(J)$ e que $\nabla p \neq 0$ em J . Então, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 2$, a família $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ é estritamente monótona decrescente.

Demonstração. Suponhamos que as conclusões do teorema não sejam verdadeiras. Segue do Teorema 3.2.2 que existe um número real $\lambda \neq 0$ e $w \in H_s^1(\Omega)$ com $w \neq 0$, tais que

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Afirmamos que w é uma função analítica real. De fato, qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o Teorema 1.4.2 de [23] implica que

$$\int_{\Omega} w \Delta \varphi \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega} (\nabla w \cdot \nabla \varphi) \nu \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx \, dy,$$

onde σ é a medida de Hausdorff e $\nu(x, y)$ é a componente x da normal exterior a $\partial\Omega$ em $(x, y) \in \partial\Omega$. Como $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \varphi) \nu d\sigma = 0.$$

Sendo assim,

$$\int_{\Omega} w \Delta \varphi dx dy = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx dy = -\lambda \int_{\Omega} w \varphi dx dy.$$

Logo, $\Delta w = -\lambda w$. Agora, os resultados das Seções 2.1 e 4.2 do Capítulo V de [7] implicam que uma solução de $(\Delta + \lambda)u = 0$ é uma função analítica. Assim, w é uma função analítica. Como $w \in H_s^1(\Omega)$, temos que $\nabla_y w = 0$ em Ω . Como U_x é conexo para todo $x \in J$, segue que existe uma função $\tilde{w}: J \rightarrow \mathbb{R}$ com $\tilde{w}(x) = w(x, y)$ sempre que $(x, y) \in U$. Isto implica que $\tilde{w}$ é uma função analítica real em J e

$$\Delta_x \tilde{w} = -\lambda \tilde{w} \text{ em } J. \quad (3.12)$$

Agora, dada uma função $\tilde{v} \in \mathcal{D}(J)$, definimos $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$v(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}(x), & \text{se } (x, y) \in U, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso $v \in C^\infty(\Omega)$, $\nabla_y v = 0$ e

$$\nabla_x v(x, y) := \begin{cases} \nabla \tilde{v}(x), & \text{se } (x, y) \in U, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim tanto v quanto ∇v são funções limitadas em Ω e, portanto, $v \in H^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla w, \nabla v \rangle &= \int_U \nabla w \cdot \nabla v dx dy = \int_J p(x) \nabla \tilde{w}(x) \cdot \nabla \tilde{v}(x) dx \\ &= \int_J p \left(\sum_{i=1}^M \partial_{x_i} \tilde{w} \partial_{x_i} \tilde{v} \right) dx = \sum_{i=1}^M \int_J (p \partial_{x_i} \tilde{w}) \partial_{x_i} \tilde{v} dx \\ &= - \sum_{i=1}^M \int_J \partial_{x_i} (p \partial_{x_i} \tilde{w}) \tilde{v} dx = - \sum_{i=1}^M \int_J (\partial_{x_i} p \partial_{x_i} \tilde{w} + p \partial_{x_i}^2 \tilde{w}) \tilde{v} dx \\ &= - \int_J (\nabla p \cdot \nabla \tilde{w}) \tilde{v} dx - \int_J p \tilde{v} \Delta \tilde{w} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_J p \tilde{v} \Delta \tilde{w} dx = -\lambda \int_J p \tilde{v} \tilde{w} dx,$$

segue que

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \int_J p \tilde{v} \tilde{w} dx - \int_J (\nabla p \cdot \nabla \tilde{w}) \tilde{v} dx. \quad (3.13)$$

Por outro lado, (3.11) implica que

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = \lambda \int_U w v dx = \lambda \int_J p \tilde{v} \tilde{w} dx. \quad (3.14)$$

Segue de (3.13) e (3.14) que

$$\int_J (\nabla p \cdot \nabla \tilde{w}) \tilde{v} dx = 0 \text{ qualquer que seja } \tilde{v} \in \mathcal{D}(J).$$

Portanto, $\nabla p \cdot \nabla \tilde{w} = 0$ em J . Como ∇p não é identicamente nulo em J , segue que existe um aberto conexo J' de J tal que

$$\nabla \tilde{w} = 0 \text{ em } J'.$$

Como $\lambda \neq 0$, a equação (3.12) implica que $\tilde{w} = 0$ em J' . Portanto $w(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega' := U \cap (J' \times \mathbb{R}^N)$. É claro que Ω' é aberto.

Como J' é não-vazio e U_x é não-vazio para todo $x \in J$, segue que Ω' e também não-vazio. Como w é uma função analítica, segue que w é identicamente nula, o que é uma contradição. $\square$

Seja $P: \mathbb{R}^{M+N} \rightarrow \mathbb{R}^M$ dada por $P(x, y) := x$. O Teorema 3.2.2 nos diz que, se existir um conjunto aberto não-vazio $J \subset P(\Omega)$ tal que $\Omega \cap (J \times \mathbb{R}^N)$ é união de subconjuntos abertos e disjuntos, e que para pelo menos um desses conjuntos, digamos U , a seção vertical U_x é não vazia e conexa para todo $x \in J$ e a função p é não constante e $p \in C^1(J)$, então temos a monotonicidade da família $(\lambda_{\varepsilon, j})_{\varepsilon > 0}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq 2$. Os domínios considerados por Hale e Raugel em [14] satisfazem tal condição desde que a função g não seja constante. Já os domínios em forma de C , que definiremos no Capítulo 6, não satisfazem tal condição.

Capítulo 4

Convergência de Semigrupos e de Semifluxos

Nesse capítulo analisaremos o comportamento da família de semifluxos $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Recordemos que, para cada $\varepsilon > 0$, π_ε é o semifluxo gerado pelas soluções da equação de evolução

$$(RD_\varepsilon) \quad \dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u),$$

onde A_ε é o operador gerado pelo par $(a_\varepsilon, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$. Recordemos também que π_0 é o semifluxo gerado pelas soluções da equação de evolução

$$(RD_0) \quad \dot{u} + A_0 u = \hat{f}(u),$$

onde A_0 é o operador gerado pelo par $(a_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$.

Nossa análise inicia-se com o problema linear associado às equações (RD_ε) , $\varepsilon > 0$, e (RD_0) . Esse estudo é descrito na próxima seção e na Seção 4.2 analisaremos a família $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Em todo esse capítulo, utilizaremos a notação apresentada nos Capítulos 2 e 3.

4.1 Convergência de semigrupos

Recordemos que o semigrupo gerado pelo operador $-A_\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, é denotado por $e^{-A_\varepsilon t}$, $t \geq 0$.

Para o nosso primeiro resultado de convergência de semigrupos serão necessários alguns resultados preliminares.

Lema 4.1.1 *Dados $\beta \in (0, \infty)$ e $\delta > 0$, existe um $s_0 = s_0(\delta, \beta) \in \mathbb{R}$ tal que $(s+1)e^{-st} < \delta$ para todo $s \geq s_0$ e todo $t \geq \beta$.*

Demonstração. Fixemos $\beta > 0$ e seja $t \geq \beta$. Então,

$$(s+1)e^{-st} \leq (s+1)e^{-s\beta} \text{ para todo } s \geq 0 \text{ e para } t \geq \beta. \quad (4.1)$$

Sabemos que $\lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)e^{-s\beta} = 0$. Portanto, dado $\delta > 0$, existe um $s_0 = s_0(\delta, \beta) > 0$ tal que

$$(s+1)e^{-s\beta} < \delta \text{ para todo } s \geq s_0. \quad (4.2)$$

Utilizando (4.1) e (4.2) temos que $(s+1)e^{-st} \leq \delta$ para todo $s \geq s_0$ e todo $t \geq \beta$. $\square$

Lema 4.1.2 Fixemos $j \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ a projeção $L^2(\Omega)$ -ortogonal sobre o espaço gerado por $w_{\varepsilon_n,1}, \dots, w_{\varepsilon_n,j-1}$. Seja também $P: L_s^2(\Omega) \rightarrow L_s^2(\Omega)$ a projeção $L_s^2(\Omega)$ -ortogonal de $L_s^2(\Omega)$ sobre o espaço gerado por $w_{0,1}, \dots, w_{0,j-1}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $t > 0$ e toda função $u \in L^2(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u &= e^{-A_{\varepsilon_n} t} P_n u \in D(A_{\varepsilon_n}) \subset H^1(\Omega), \\ (I - P_n) e^{-A_{\varepsilon_n} t} u &= e^{-A_{\varepsilon_n} t} (I - P_n) u \in D(A_{\varepsilon_n}) \subset H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se $u \in L_s^2(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} P e^{-A_0 t} u &= e^{-A_0 t} P u \in D(A_0) \subset H_s^1(\Omega), \\ (I - P) e^{-A_0 t} u &= e^{-A_0 t} (I - P) u \in D(A_0) \subset H_s^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Demonstração. Vamos denotar apenas por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de $L^2(\Omega)$. Se $u \in L^2(\Omega)$, como $(w_{\varepsilon_n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ é um sistema $L^2(\Omega)$ -ortonormal, podemos escrever

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \geq 0$, o operador $e^{-A_{\varepsilon_n} t}$ é limitado. Portanto

$$e^{-A_{\varepsilon_n} t} u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle e^{-A_{\varepsilon_n} t} w_{\varepsilon_n,i}.$$

A Proposição 1.1.9 implica que

$$e^{-A_{\varepsilon_n} t} u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i}.$$

Logo,

$$P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle P_n w_{\varepsilon_n,i} = \sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i}. \quad (4.5)$$

Por outro lado,

$$P_n u = \sum_{i=1}^{j-1} \langle u, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i},$$

o que implica que

$$e^{-A_{\varepsilon_n} t} P_n u = \sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n, i}} \langle u, w_{\varepsilon_n, i} \rangle w_{\varepsilon_n, i}. \quad (4.6)$$

As igualdades (4.5) e (4.6) implicam a primeira igualdade em (4.3).

Agora notemos que, como $w_{\varepsilon_n, j}$ é um autovetor associado a $\lambda_{\varepsilon_n, j}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, qualquer que seja $v \in H^1(\Omega)$ temos que,

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n, i}} \langle u, w_{\varepsilon_n, i} \rangle w_{\varepsilon_n, i}, v \right) &= \sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n, i}} \langle u, w_{\varepsilon_n, i} \rangle a_{\varepsilon_n}(w_{\varepsilon_n, i}, v) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n, i}} \lambda_{\varepsilon_n, i} \langle u, w_{\varepsilon_n, i} \rangle \langle w_{\varepsilon_n, i}, v \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{j-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n, i}} \lambda_{\varepsilon_n, i} \langle u, w_{\varepsilon_n, i} \rangle w_{\varepsilon_n, i}, v \right\rangle = \langle e^{-A_{\varepsilon_n} t} P_n u, v \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u = e^{-A_{\varepsilon_n} t} P_n u \in D(A_{\varepsilon_n}) \subset H^1(\Omega)$ para toda função $u \in L^2(\Omega)$.

Analogamente demonstramos a segunda igualdade de (4.3). Para demonstrar (4.4) basta seguirmos os mesmos passos da demonstração de (4.3). $\square$

Temos então nosso resultado de convergência dos semigrupos.

Teorema 4.1.3 *Seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números positivos com $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em $L^2(\Omega)$ e que $u \in L^2_s(\Omega)$ seja tal que $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, para todo $\beta \in (0, \infty)$,*

$$\sup_{t \in [\beta, \infty)} \|e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Fixemos $\beta \in (0, \infty)$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. Pelo Lema 4.1.1 existe um $s_0 = s_0(\delta, \beta)$ tal que $(s+1)e^{-st} < \delta$ para todo $s \geq s_0$ e todo $t \geq \beta$. Existe também um $j_0 = j_0(\delta, \beta)$ tal que $\lambda_{0, j_0} > s_0$ já que, pela Proposição 1.1.2, $\lambda_{0, j} \rightarrow \infty$, quando $j \rightarrow \infty$. Como pelo Teorema 3.1.1 temos que $\lambda_{0, j_0} = \sup_{\varepsilon > 0} \lambda_{\varepsilon, j_0}$, segue que existe um $n_0 = n_0(\delta, \beta)$ tal que $\lambda_{\varepsilon_n, j_0} > s_0$ para $n \geq n_0$. Mas para cada $\varepsilon \geq 0$, a Proposição 1.1.2 implica que $\lambda_{\varepsilon, j+1} \geq \lambda_{\varepsilon, j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso obtemos

$$\lambda_{\varepsilon_n, j} \geq s_0(\delta, \beta), \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e todo } j \geq j_0. \quad (4.7)$$

Sejam $P_n: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ a projeção $L^2(\Omega)$ -ortonormal sobre o espaço gerado por $w_{\varepsilon_n, 1}, \dots, w_{\varepsilon_n, j_0-1}$ e $P: L^2_s(\Omega) \rightarrow L^2_s(\Omega)$ a projeção $L^2_s(\Omega)$ -ortonormal sobre o espaço gerado por $w_{0, 1}, \dots, w_{0, j_0-1}$. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n} &= \|(I - P_n)e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - (I - P)e^{-A_0 t} u + P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - P e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n} \\ &\leq \|P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - P e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n} + \|(I - P_n)e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n\|_{\varepsilon_n} + \|(I - P)e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vamos analisar cada uma das parcelas da soma acima. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o Lema 4.1.2 implica que

$$\begin{aligned} |P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - P e^{-A_0 t} u|_{\varepsilon_n} &= \left| \sum_{i=1}^{j_0-1} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i} - \sum_{i=1}^{j_0-1} e^{-t\lambda_{0,i}} \langle u, w_{0,i} \rangle w_{0,i} \right|_{\varepsilon_n} \\ &\leq \sum_{i=1}^{j_0-1} |e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i} - e^{-t\lambda_{0,i}} \langle u, w_{0,i} \rangle w_{0,i}|_{\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo a expressão $e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{0,i}$ obtemos,

$$\begin{aligned} |P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - P e^{-A_0 t} u|_{\varepsilon_n} & \quad (4.9) \\ &\leq \sum_{i=1}^{j_0-1} |e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle (w_{\varepsilon_n,i} - w_{0,i}) + (e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle - e^{-t\lambda_{0,i}} \langle u, w_{0,i} \rangle) w_{0,i}|_{\varepsilon_n} \\ &\leq \sum_{i=1}^{j_0-1} \left(|e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle| |w_{\varepsilon_n,i} - w_{0,i}|_{\varepsilon_n} + |e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle - e^{-t\lambda_{0,i}} \langle u, w_{0,i} \rangle| |w_{0,i}|_{\varepsilon_n} \right). \end{aligned}$$

O Teorema 3.1.1 implica que, para cada $i = 1, \dots, j_0 - 1$, $|w_{\varepsilon_n,i} - w_{0,i}|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $|w_{\varepsilon_n,i} - w_{0,i}|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para cada $i = 1, \dots, j_0 - 1$. Por hipótese temos que $|u_n - u|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, pela continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $L^2(\Omega)$ segue que $\langle u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle \rightarrow \langle u, w_{0,i} \rangle$ quando $n \rightarrow \infty$ para $i = 1, \dots, j_0 - 1$.

Afirmamos que, para $i = 1, \dots, j_0 - 1$,

$$\sup_{t \in [\beta, \infty)} |e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} - e^{-t\lambda_{0,i}}| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

De fato, fixemos $i \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$ e seja $t \in [\beta, \infty)$. É claro que a afirmação é válida se $\lambda_{0,i} = 0$. Suponhamos então que $\lambda_{0,i} > 0$. Portanto, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < \lambda_{0,i}$. Como $\lambda_{\varepsilon_n,i} \rightarrow \lambda_{0,i}$, segue que existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{\varepsilon_n,i} > \alpha$ para todo $n \geq n_1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in [\lambda_{\varepsilon_n,i}, \lambda_{0,i}]$ tal que

$$e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} - e^{-t\lambda_{0,i}} = -te^{-tc}(\lambda_{\varepsilon_n,i} - \lambda_{0,i}) \leq te^{-t\alpha}(\lambda_{0,i} - \lambda_{\varepsilon_n,i}) \text{ para todo } t \in [\beta, \infty).$$

A função $h(t) := te^{-t\alpha}$ possui um ponto de máximo em $t = \alpha^{-1}$. Logo,

$$\sup_{t \in [\beta, \infty)} (e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,i}} - e^{-t\lambda_{0,i}}) \leq (\alpha e)^{-1}(\lambda_{0,i} - \lambda_{\varepsilon_n,i}) \text{ para todo } n \geq n_1,$$

Como $\lambda_{\varepsilon_n,i} \rightarrow \lambda_{0,i}$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos (4.10).

Notemos que $|w_{0,i}|_{\varepsilon_n}^2 = \lambda_{0,i} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, voltando em (4.9) temos que

$$\sup_{t \in [\beta, \infty)} |P_n e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - P e^{-A_0 t} u|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Analisemos agora a segunda parcela de (4.8). Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_n := (I - P_n)e^{-A_{\varepsilon_n}t}u_n$, onde $t \in [0, \infty)$. Temos que

$$\begin{aligned} |v_n|_{\varepsilon_n}^2 &= a_{\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i}, \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i} \right) + |v_n|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a_{\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i}, \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\varepsilon_n,i} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle \langle w_{\varepsilon_n,i}, \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle w_{\varepsilon_n,i} \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\varepsilon_n,i} |\langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon_n,i} + 1) |\langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle v_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle &= \langle e^{-A_{\varepsilon_n}t}(I - P_n)u_n, w_{\varepsilon_n,i} \rangle = \langle e^{-A_{\varepsilon_n}t} \sum_{j=j_0}^{\infty} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,i} \rangle \\ &= \langle \sum_{j=j_0}^{\infty} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,j}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,i} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(I - P_n)e^{-A_{\varepsilon_n}t}u_n|_{\varepsilon_n}^2 &= \sum_{i=j_0}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon_n,i} + 1) \left| \langle \sum_{j=j_0}^{\infty} e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,j}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,i} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{j=j_0}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon_n,j} + 1) \left| \langle e^{-t\lambda_{\varepsilon_n,j}} \langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle w_{\varepsilon_n,j}, w_{\varepsilon_n,j} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{j=j_0}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon_n,j} + 1) e^{-2t\lambda_{\varepsilon_n,j}} |\langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \delta |\langle u_n, w_{\varepsilon_n,j} \rangle|^2 \leq \delta |u_n|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$, existe um $C_1 > 0$ tal que

$$|(I - P_n)e^{-A_{\varepsilon_n}t}u_n|_{\varepsilon_n}^2 \leq \delta C_1 \text{ para todo } n \geq n_1 \text{ e todo } t \in [0, \infty). \quad (4.12)$$

Analogamente, ao analisarmos a terceira parcela de (4.8), teremos que existe um $C_2 > 0$ tal que

$$|(I - P)e^{-A_0t}u|_{\varepsilon_n}^2 \leq \delta C_2 \text{ para todo } t \in [0, \infty) \quad (4.13)$$

Como δ é arbitrário, as desigualdades (4.7), (4.11), (4.12) e (4.13) implicam que

$$\sup_{t \in [\beta, \infty)} |e^{-A_{\varepsilon_n}t}u_n - e^{-A_0t}u|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

A demonstração do teorema está concluída. $\square$

No resultado de convergência de semifluxos necessitaremos de algumas estimativas que demonstraremos a seguir.

Lema 4.1.4 *Seja $\alpha > 0$ e definimos $C(\alpha) := (\alpha/e)^\alpha$. Então, para todo $t > 0$ e todo $\lambda > 0$*

$$\lambda^\alpha e^{-\lambda t} \leq C(\alpha) t^{-\alpha}. \quad (4.14)$$

Demonstração. Dado $\alpha > 0$, consideremos a função $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(s) := s^\alpha e^{-s}$. Tal função assume valor máximo em $s = \alpha$ e, portanto, $s^\alpha e^{-s} \leq C(\alpha)$ para todo $s \in (0, \infty)$. Em particular, se $s = \lambda t$ com $\lambda > 0$ e $t > 0$, temos que

$$\lambda^\alpha e^{-\lambda t} \leq C(\alpha) t^{-\alpha}.$$

O lema está demonstrado. $\square$

Com ajuda do Lema 4.1.4 demonstraremos o seguinte:

Lema 4.1.5 *Para cada $\varepsilon \geq 0$, seja $(\lambda_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ a sequência repetida de autovalores de A_ε e $(w_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ um sistema de autovetores $L^2(\Omega)$ -ortonormal correspondente. Definimos $C_1 := (C(1/2) + 1)^{1/2}$ e seja $r > 0$. Então valem:*

(1) *para todo $\varepsilon > 0$ e todo $u \in L^2(\Omega)$,*

$$|e^{-A_\varepsilon r} u|_\varepsilon \leq (C_1 r^{-1/2} + 1) |u|_{L^2(\Omega)}; \quad (4.15)$$

(2) *para todo $u \in L^2_s(\Omega)$,*

$$|e^{-A_0 r} u|_\varepsilon \leq (C_1 r^{-1/2} + 1) |u|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.16)$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ e suponhamos que $u \in L^2(\Omega)$. Como $(w_{\varepsilon,j})_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema $L^2(\Omega)$ -ortonormal de autovetores, podemos escrever

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle w_{\varepsilon,j}.$$

Logo,

$$|e^{-A_\varepsilon r} u|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}})^2 |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2$$

e

$$a_\varepsilon(e^{-A_\varepsilon r} u, e^{-A_\varepsilon r} u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\varepsilon,j} (e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}})^2 |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2.$$

Como para cada $j \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\varepsilon,j} \geq 0$, temos que $e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}} \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e assim

$$\begin{aligned} |e^{-A_\varepsilon r} u|_\varepsilon^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon,j} + 1) (e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}})^2 |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{\varepsilon,j}^{1/2} e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}})^2 |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Segue do Lema 4.1.4 que $\lambda_{\varepsilon,j}^{1/2} e^{-r\lambda_{\varepsilon,j}} \leq C(1/2)r^{-1/2}$. Com isso,

$$|e^{-A_\varepsilon r} u|_\varepsilon^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (C(1/2)^2 r^{-1}) |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, w_{\varepsilon,j} \rangle|^2 = (C(1/2)^2 r^{-1} + 1) |u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cosequentemente,

$$\begin{aligned} |e^{-A_\varepsilon r} u|_\varepsilon &\leq (C(1/2)^2 r^{-1} + 1)^{1/2} |u|_{L^2(\Omega)} = ((C(1/2)^2 + 1)r^{-1} + 1)^{1/2} |u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ((C(1/2)^2 + 1)^{1/2} r^{-1/2} + 1) |u|_{L^2(\Omega)} = (C_1 r^{-1/2} + 1) |u|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

demonstrando (4.15). A demonstração da segunda parte do lema é análoga. $\square$

4.2 Convergência de semifluxos

Dado $\varepsilon > 0$, sejam A_ε o operador setorial gerado pelo par (a_ε, b) e A_0 o operador setorial gerado pelo par (a_0, b) . Tomando $\alpha = 1/2$, segue que $X^\alpha = H^1(\Omega)$ quando $X := L^2(\Omega)$ e $X^\alpha = H_s^1(\Omega)$ quando $X := L_s^2(\Omega)$. Seja U um aberto em $H^1(\Omega)$ e $\hat{f}: U \rightarrow L^2(\Omega)$ uma aplicação contínua e localmente Lipschitz tal que $\hat{f}(U \cap H_s^1(\Omega)) \subset L_s^2(\Omega)$. Para todo $\varepsilon > 0$, a equação de evolução

$$\dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u) \quad (4.17)$$

está bem definida. Seja π_ε o semifluxo local gerado pelas soluções de (4.17). Também está bem definida a equação

$$\dot{u} + A_0 u = \hat{f}(u). \quad (4.18)$$

Denotemos por π_0 o semifluxo local gerado pelas soluções de (4.18). Nesta seção analisaremos o que ocorre com a família de semifluxos $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Iniciamos com o seguinte lema:

Lema 4.2.1 *Seja k uma constante positiva e consideremos*

$$\rho(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k)^n x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)},$$

onde $\beta = 1/2$ e Γ é a função Gama. Então a função $\rho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ está bem definida e é contínua.

Demonstração. Fixemos $x_0 \in [0, \infty)$ e seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \in [0, b]$. Com isso,

$$\frac{(k)^n x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)} \leq \frac{(kb^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \text{ para todo } x \in [0, b].$$

Afirmamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kb^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}$ é convergente. Supondo que nossa afirmação seja válida,

o Teste M de Weierstrass implica que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k)^n x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)}$ converge uniformemente em $[0, b]$. Portanto, ρ está bem definida e é contínua neste intervalo e em particular em x_0 . Como $x_0 \in [0, \infty)$ é qualquer, isso conclui a demonstração do lema. Portanto, basta mostrar que nossa afirmação é verdadeira.

Seja $C > 0$ tal que $C^2 = kb^\beta$. Vamos analisar as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde

$$a_n := \frac{C^{2n-1}}{\Gamma(\frac{2n-1}{2})} \text{ e } b_n := \frac{C^{2n}}{(n-1)!}.$$

Se tais séries forem convergentes, por um resultado sobre sequências numéricas (ver, por exemplo, [26]), temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots$$

Além disso, notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kb^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kb^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}$ é uma série convergente.

Mostremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Esse fato segue da seguinte igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n}}{(n-1)!} = C^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C^{2m}}{m!}.$$

Já no caso de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, notemos primeiro que para $n > 3$,

$$\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) \geq \Gamma\left(\frac{2n-2}{2}\right) = \Gamma(n-1).$$

Portanto, se $n \geq 3$, temos que

$$\frac{C^{2n-1}}{\Gamma(\frac{2n-1}{2})} \leq \frac{C^{2n-1}}{\Gamma(n-1)} = C \frac{C^{2(n-1)}}{\Gamma(n-1)} = C^3 \frac{C^{2(n-2)}}{(n-2)!},$$

e a série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C^{2m}}{m!}$ é convergente. Isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Estamos em condição de enunciar e demonstrar o principal resultado desse capítulo, a saber, a convergência da família de semifluxos $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ para o semifluxo π_0 . Mais precisamente temos:

Teorema 4.2.2 *Seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$. Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $H^1(\Omega)$ e $u \in H^1_s(\Omega)$ tais que $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos ainda que exista um $b \in (0, \infty)$ tal que $u_n \pi_{\varepsilon_n} t$ e $u \pi_0 t$ estejam definidos para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, b]$. Então, para todo $t \in (0, b]$ e toda sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, b]$ convergindo para t , temos que*

$$\|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t\|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, b]$ tal que $t_n \rightarrow t$, $t \in (0, b]$. Observe-mos inicialmente que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t\|_{\varepsilon_n} \leq \|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t_n\|_{\varepsilon_n} + \|u \pi_0 t_n - u \pi_0 t\|_{\varepsilon_n}. \quad (4.19)$$

Como $u \pi_0 t_n, u \pi_0 t \in H^1_s(\Omega)$, segue que

$$\|u \pi_0 t_n - u \pi_0 t\|_{\varepsilon_n} = \|u \pi_0 t_n - u \pi_0 t\|_{H^1(\Omega)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Da continuidade do semifluxo π_0 em $H^1(\Omega)$ temos que

$$\|u \pi_0 t_n - u \pi_0 t\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Resta mostrar que $\|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t_n\|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $t \in [0, b]$, temos pela Fórmula da Variação das Constantes que

$$\begin{aligned} u_n \pi_{\varepsilon_n} t - u \pi_0 t &= e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u \\ &+ \int_0^t e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} \hat{f}(u_n \pi_{\varepsilon_n} s) ds - \int_0^t e^{-A_0(t-s)} \hat{f}(u \pi_0 s) ds \\ &= e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u \\ &+ \int_0^t e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} (\hat{f}(u_n \pi_{\varepsilon_n} s) - \hat{f}(u \pi_0 s)) ds \\ &+ \int_0^t (e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} \hat{f}(u \pi_0 s) - e^{-A_0(t-s)} \hat{f}(u \pi_0 s)) ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u_n \pi_{\varepsilon_n} t - u \pi_0 t\|_{\varepsilon_n} &\leq \|e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u\|_{\varepsilon_n} \\ &+ \int_0^t \|e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} \hat{f}(u \pi_0 s) - e^{-A_0(t-s)} \hat{f}(u \pi_0 s)\|_{\varepsilon_n} ds \\ &+ \int_0^t \|e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} (\hat{f}(u_n \pi_{\varepsilon_n} s) - \hat{f}(u \pi_0 s))\|_{\varepsilon_n} ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Definimos agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $g_n: [0, b] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_n(t, s) := \begin{cases} |e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} \hat{f}(u\pi_0 s) - e^{-A_0(t-s)} \hat{f}(u\pi_0 s)|_{\varepsilon_n}, & \text{se } 0 < s < t, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n é contínua em $O_1 := \{(s, t) \in [0, b] \times [0, b] \mid 0 < s < t\}$ e em $O_2 := \{(s, t) \in [0, b] \times [0, b] \mid 0 < t < s\}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n é uma função mensurável em $[0, b] \times [0, b]$. Além disso, g_n é integrável em $[0, b] \times [0, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema de Fubini que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $c_n: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$c_n(t) := \int_0^t g_n(t, s) ds = \int_0^t g_n(t, s) ds$$

está bem definida quase sempre e é mensurável em $[0, b]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, b]$, definimos,

$$a_n(t) := \begin{cases} |e^{-A_{\varepsilon_n}t} - e^{-A_0t}|_{\varepsilon_n} + c_n(t), & \text{se } t \in (0, b], \\ 0, & \text{quando } t = 0. \end{cases}$$

Segue que a_n é mensurável em $[0, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, (4.21) pode ser reescrita na forma

$$|u_n \pi_{\varepsilon_n} t - u \pi_0 t|_{\varepsilon_n} \leq a_n(t) + \int_0^t |e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} (\hat{f}(u_n \pi_{\varepsilon_n} s) - \hat{f}(u \pi_0 s))|_{\varepsilon_n} ds. \quad (4.22)$$

Segue do Lema 4.1.5 que, se $0 < s < t$,

$$\begin{aligned} |g_n(t, s)| &\leq |e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)} \hat{f}(u\pi_0 s)|_{\varepsilon_n} + |e^{-A_0(t-s)} \hat{f}(u\pi_0 s)|_{\varepsilon_n} \\ &\leq 2C_2(C_1(t-s)^{-1/2} + 1), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde

$$C_2 := \sup_{s \in [0, b]} |\hat{f}(u\pi_0 s)|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Recordemos que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $(0, b]$ convergindo para algum $t \in (0, b]$. Afirmamos que $c_n(t_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, observemos que, se $0 < s < t$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ e um $\beta > 0$ tais que $t_n - s > \beta$ para todo $n \geq n_0$. Assim, pelo Teorema 4.1.3

$$\begin{aligned} g_n(t_n, s) &= |e^{-A_{\varepsilon_n}(t_n-s)} \hat{f}(u\pi_0 s) - e^{-A_0(t_n-s)} \hat{f}(u\pi_0 s)|_{\varepsilon_n} \\ &\leq \sup_{\tau \in [\beta, \infty)} |e^{-A_{\varepsilon_n}\tau} \hat{f}(u\pi_0 s) - e^{-A_0\tau} \hat{f}(u\pi_0 s)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Observemos que neste caso, $0 < s < t_n$ para todo $n \geq n_0$. Logo $(t_n - s)^{-1/2} \leq \beta^{-1/2}$ para todo $n \geq n_0$. Esse fato e a desigualdade (4.23) implicam que

$$|g_n(t_n, s)| \leq 2C_2(C_1\beta^{-1/2} + 1) =: C_3.$$

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b g_n(t_n, s) ds = \int_0^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t_n, s) ds = 0.$$

Portanto, $c_n(t_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos agora que $0 < t < s$. Então existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < s$ para todo $n \geq n_1$. Portanto $g_n(t_n, s) = 0$ para todo $n \geq n_1$. Novamente

$$c_n(t_n) = \int_0^b g_n(t_n, s) ds \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Isso demonstra nossa afirmação.

A afirmação demonstrada e o Teorema 4.1.3 implicam que

$$\begin{aligned} a_n(t_n) &= |e^{-A_{\varepsilon_n} t_n} u_n - e^{-A_0 t_n} u|_{\varepsilon_n} + c_n(t_n) \\ &\leq \sup_{t \in [\beta, \infty)} |e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u|_{\varepsilon_n} + c_n(t_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Em particular,

$$a_n(t) \rightarrow 0 \text{ para todo } t \in (0, b]. \quad (4.24)$$

Notemos que a integral imprópria $\int_0^t (t-s)^{-1/2} ds$ é convergente e que $\int_0^t (t-s)^{-1/2} ds = t^{1/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t g_n(t, s) ds &\leq \int_0^t 2C_2(C_1(t-s)^{-1/2} + 1) ds \\ &= 4C_2C_1t^{1/2} + 2C_2t \leq 4C_2C_1b^{1/2} + 2C_2b =: A_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n(t) \leq |e^{-A_{\varepsilon_n} t} u_n - e^{-A_0 t} u|_{\varepsilon_n} + A_1 \text{ para todo } t \in (0, b].$$

O Lema 4.1.5 implica que

$$a_n(t) \leq (C_1 t^{-1/2} + 1) |u_n|_{L^2(\Omega)} + (C_1 t^{-1/2} + 1) |u|_{L^2(\Omega)} + A_1.$$

Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $L^2(\Omega)$, temos que tal sequência é limitada e, portanto, existe uma constante $A_2 > 0$ tal que

$$a_n(t) \leq (C_1 t^{-1/2} + 1) A_2 + (C_1 t^{-1/2} + 1) A_2 + A_1.$$

Logo,

$$a_n(t) \leq C_4(C_1 t^{-1/2} + 1) \text{ para } t \in (0, b], \quad (4.25)$$

onde $C_4 := \max\{C_1 A_2 + C_1 A_3, A_1 + A_2 + A_3\}$.

Novamente, segue do Lema 4.1.5 que, para quaisquer que sejam $t, s \in (0, b]$ com $t - s > 0$,

$$\begin{aligned} |e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)}(\hat{f}(u_n\pi_{\varepsilon_n}s) - \hat{f}(u\pi_0s))|_{\varepsilon_n} &\leq (C_1(t-s)^{-1/2} + 1)|\hat{f}(u_n\pi_{\varepsilon_n}s) - \hat{f}(u\pi_0s)|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L(C_1(t-s)^{-1/2} + 1)|u_n\pi_{\varepsilon_n}s - u\pi_0s|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq L(C_1(t-s)^{-1/2} + 1)|u_n\pi_{\varepsilon_n}s - u\pi_0s|_{\varepsilon_n}, \end{aligned}$$

onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz de $\hat{f}$ em U . Observemos ainda que, neste caso,

$$(C_1(t-s)^{-1/2} + 1) = \frac{C_1 + (t-s)^{1/2}}{(t-s)^{1/2}} \leq \frac{C_1 + b^{1/2}}{(t-s)^{1/2}} = C_5(t-s)^{-1/2}. \quad (4.26)$$

Logo, para quaisquer que sejam $t, s \in (0, b]$ com $t - s > 0$,

$$|e^{-A_{\varepsilon_n}(t-s)}(\hat{f}(u_n\pi_{\varepsilon_n}s) - \hat{f}(u\pi_0s))|_{\varepsilon_n} \leq LC_5(t-s)^{-1/2}|u_n\pi_{\varepsilon_n}s - u\pi_0s|_{\varepsilon_n}.$$

Utilizando a desigualdade acima em (4.22) obtemos

$$|u_n\pi_{\varepsilon_n}t - u\pi_0t|_{\varepsilon_n} \leq a_n(t) + \int_0^t LC_5(t-s)^{-1/2}|u_n\pi_{\varepsilon_n}s - u\pi_0s|_{\varepsilon_n} ds.$$

Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função a_n é não negativa e a desigualdade (4.25) implica que a_n é localmente integrável para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, estamos nas condições do Lema 7.1.1 de [15]. Segue que, para cada $t \in (0, b]$,

$$|u_n\pi_{\varepsilon_n}t - u\pi_0t|_{\varepsilon_n} \leq a_n(t) + \theta \int_0^t E'_\beta(\theta(t-s))a_n(s)ds,$$

onde $E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}$, $\theta = (LC_4\Gamma(\beta))^{1/\beta}$ com $\beta = 1/2$. Assim, para cada $t \in (0, b]$,

$$|u_n\pi_{\varepsilon_n}t - u\pi_0t|_{\varepsilon_n} \leq a_n(t) + \int_0^t \tilde{\rho}(t-s)a_n(s)ds,$$

onde

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(LC_5\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} x^{n\beta-1} = \frac{1}{x}\rho(x), \text{ para } x \in (0, b],$$

sendo ρ a função do Lema 4.2.1 com $k = LC_5\Gamma(\beta)$. Pelo Lema 4.2.1 a função $\tilde{\rho}$ está bem definida e é contínua em $(0, b]$. Além disso, para todo $x \in (0, b]$,

$$\tilde{\rho}(x) \leq LC_5x^{-1/2} + b^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(LC_5\Gamma(\beta)b^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)}.$$

Definindo

$$C_6 := \max \left\{ LC_5, b^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(LC_5\Gamma(\beta)b^\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \right\},$$

temos que $\tilde{\rho}$ satisfaz a estimativa

$$\tilde{\rho}(x) \leq C_6 x^{-1/2} + C_6 \text{ para todo } x \in (0, b]. \quad (4.27)$$

Afirmamos que

$$\int_0^{t_n} \tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) ds \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

De fato, fixemos um $\delta_n > 0$ com $0 < \delta_0 < t$. Dado $\nu > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < 2\delta < \delta_0$ e $\delta^{1/2} + \delta < \nu$. Existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_n - t| < \delta$ para todo $n \geq n_1$. Notemos que $t_n - s > \delta$ para todo $s \in [0, t - 2\delta]$ e todo $n \geq n_1$. Assim, $\tilde{\rho}(t_n - s) \leq C_6(t_n - s)^{-1/2} + C_6 < C_6\delta^{-1/2} + C_6$, o que nos fornece a seguinte desigualdade:

$$\tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) \leq C_6(s^{-1/2} + 1) \text{ para todo } s \in (0, t - 2\delta] \text{ e todo } n \geq n_1.$$

Portanto, se $s \in (0, t - 2\delta]$, $\tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (cf. (4.24)). Estamos então nas condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Logo

$$\int_0^{t-2\delta} \tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) ds \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

isto é, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > n_1$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\int_0^{t-2\delta} \tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) ds < \nu.$$

Por outro lado, para todo $s \in [t - 2\delta, t_n]$ e todo $n \geq n_1$, temos que $s \geq t - 2\delta > t - \delta_0$. Segue da desigualdade (4.25) que

$$a_n(s) \leq C_4(s^{-1/2} + 1) \leq C_4((t - \delta_0)^{-1/2} + 1) =: C_7.$$

A desigualdade acima e (4.27) implicam que, para todo $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \int_{t-2\delta}^{t_n} \tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) ds &\leq C_7 \int_{t-2\delta}^{t_n} \tilde{\rho}(t_n - s) ds \leq C_7 C_6 \int_{t-2\delta}^{t_n} ((t_n - s) + 1) ds \\ &< C_7 C_6 \int_{t-2\delta}^{t_n} (\delta^{1/2} + \delta) ds < C_8(\delta^{1/2} + \delta) < C_8 \nu. \end{aligned}$$

Com isso, para todo $n \geq n_0$ temos que

$$\int_0^{t_n} \tilde{\rho}(t_n - s) a_n(s) ds < \nu + C_8 \nu.$$

E nossa afirmação está demonstrada. Isto implica que

$$|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t_n|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

As convergências em (4.20) e em (4.28) implicam que

$$|u_n \pi_{\varepsilon_n} t_n - u \pi_0 t|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

A demonstração do teorema está concluída. $\square$

Com este resultado, podemos demonstrar um resultado sobre a convergência da família $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ onde, para cada $\varepsilon > 0$, σ_ε é uma solução completa de π_ε . Demonstramos primeiro o seguinte resultado auxiliar:

Lema 4.2.3 *Seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números reais tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que existe uma constante $C > 0$ com*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\varepsilon_n} \leq C. \quad (4.29)$$

Então existe um $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que $|u_n - u|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Como $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\varepsilon_n} \leq C$, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n|_{L^2(\Omega)} \leq |u_n|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|_{\varepsilon_n} \leq C.$$

Logo, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$. A recíproca do Teorema de Eberlian-Smulian, (cf. [3], Teorema III.27), implica que existe uma subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Como $H^1(\Omega)$ está contido em $L^2(\Omega)$ com inclusão compacta, temos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente em $L^2(\Omega)$ para $u \in H^1(\Omega)$. Resta mostrar que $u \in H_s^1(\Omega)$, isto é, que $\partial_{y_j} u = 0$ para $j = 1, \dots, N$. A desigualdade (4.29) implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} \nabla_x u_n \cdot \nabla_x u_n dx dy + \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} \nabla_y u_n \cdot \nabla_y u_n dx dy = a_{\varepsilon_n}(u_n, u_n) \leq |u_n|_{\varepsilon_n}^2 \leq C^2.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla_y u_n \cdot \nabla_y u_n dx dy \leq \varepsilon_n^2 C^2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $|\partial_{y_j} u_n|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $j = 1, \dots, N$. Fixemos $j = 1, \dots, N$. Para qualquer $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} u \partial_{y_j} \phi dx dy = \int_{\Omega} (u - u_n + u_n) \partial_{y_j} \phi dx dy = \int_{\Omega} (u - u_n) \partial_{y_j} \phi dx dy + \int_{\Omega} u_n \partial_{y_j} \phi dx dy.$$

A Desigualdade de Hölder implica que

$$\int_{\Omega} u \partial_{y_j} \phi dx dy \leq |u_n - u|_{L^2(\Omega)} |\partial_{y_j} \phi|_{L^2(\Omega)} + |\partial_{y_j} u_n|_{L^2(\Omega)} |\phi|_{L^2(\Omega)}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $\partial_{y_j} u = 0$ para $j = 1, \dots, N$, e, portanto, $u \in H_s^1(\Omega)$. $\square$

Uma consequência do teorema que acabamos de demonstrar é o seguinte resultado de convergência das soluções:

Corolário 4.2.4 *Seja $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\sigma_n: \mathbb{R} \rightarrow H^1(\Omega)$ uma solução completa de π_{ε_n} . Assumimos que existe uma constante $C \in [0, \infty)$ tal que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma_n(t)|_{\varepsilon_n} \leq C.$$

Assumimos também que $\hat{f}$ seja uma função Lipschitz em $B_C := \{u \in H^1(\Omega) \mid |u|_{H^1(\Omega)} \leq C\}$ e que, se $u \in B_C$, então $u\pi_0 t$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$.

Então existe uma subsequência de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma solução completa $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow H_s^1(\Omega)$ do semifluxo π_0 tal que

$$|\sigma_n(t) - \sigma(t)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(\sigma_n(-k))_{n \in \mathbb{N}}$ está nas condições do Lema 4.2.3. Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um $u_{-k} \in H_s^1(\Omega)$ e uma subsequência de $(\sigma_n(-k))_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(\sigma_n(-k))_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $|\sigma_n(-k) - u_{-k}|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ e $\sigma_n(-k) \rightarrow u_{-k}$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Utilizando o Procedimento da Diagonal de Cantor, existe uma subsequência de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sigma_n(-k) &\rightarrow u_{-k} \text{ em } H^1(\Omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty, \\ |\sigma_n(-k) - u_{-k}|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Além disso, $|u_{-k}|_{H^1(\Omega)} \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [-k, \infty)$. Como $u_{-k}\pi_0(t+k)$ está definido, podemos definir

$$\tau_k(t) := u_{-k}\pi_0(t+k) \text{ para todo } t \in [-k, \infty).$$

Como

$$\sigma_n(t) = \sigma_n(-k)\pi_{\varepsilon_n}(t+k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e todo } t \in [-k, \infty),$$

o Teorema 4.2.2 implica que

$$|\sigma_n(t) - \tau_k(t)|_{\varepsilon_n} = |\sigma_n(-k)\pi_{\varepsilon_n}(t+k) - \sigma_n(-k)\pi_{\varepsilon_n}(t+k)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Em particular, se $l, k \in \mathbb{N}$ com $l > k$, temos que, para $t \in [-k, \infty)$,

$$\begin{aligned} |\tau_l(t) - \tau_k(t)|_{H^1(\Omega)} &= |\tau_l(t) - \tau_k(t)|_{\varepsilon_n} \\ &\leq |\tau_l(t) - \sigma_n(t)|_{\varepsilon_n} + |\tau_k(t) - \sigma_n(t)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $\tau_l(t) = \tau_k(t)$ para todo $t \in [-k, \infty)$. Segue que existe uma única função $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow H_s^1(\Omega)$ tal que $\sigma(t) = \tau_k(t)$, $t \in [-k, \infty)$. Consequentemente, σ é uma solução de π_0 tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$|\sigma_n(t) - \sigma(t)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

A demonstração está completa. $\square$

No próximo capítulo o Corolário acima será utilizado na demonstração da semicontinuidade superior da família de atratores globais.

Capítulo 5

Semicontinuidade Superior dos Atratores

Na primeira seção deste capítulo mostraremos a existência de atratores globais para os semifluxos π_ε , $\varepsilon \geq 0$, gerados pelas soluções da equação de evolução

$$\dot{u} + A_\varepsilon u = \hat{f}(u),$$

impondo condições adicionais em f , além da hipótese **(HC1)**. Para cada $\varepsilon \geq 0$, obteremos um atrator global $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$. Estamos interessados no comportamento da família $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Na Seção 5.2 analisaremos este comportamento. Mais precisamente, apresentaremos um resultado de semicontinuidade superior da família $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Utilizaremos a notação apresentada no Capítulo 2, em particular, das Seções 2.1 e 2.3.

5.1 Existência de atratores

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a hipótese **(HC1)**, isto é, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e existem constantes $C, \beta \in [0, \infty)$ tais que $|f'(s)| \leq C(|s|^\beta + 1)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, se $M + N =: n > 2$, suponhamos também que $\beta \leq 2^*/2 - 1$, onde $2^* = 2n/(n-2) > 2$.

Definimos $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(y) := \int_0^y f(s) ds \text{ para todo } y \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Teorema 5.1.1 *Seja $\hat{F}$ o operador de Nemitskiĭ associado a F . Então $\hat{F}(H^1(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$, $\hat{F}$ aplica subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ em subconjuntos limitados de $L^1(\Omega)$ e é Fréchet-diferenciável em $H^1(\Omega)$ com $D\hat{F}(u)(v) = \hat{f}(u) \cdot v$ para quaisquer u e v em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração. Pela definição de F e pela Desigualdade de Young, existem constantes $K_1, K_2 \in (0, \infty)$ tais que

$$|F(y)| \leq K_1 |y|^{\beta+2} + K_2 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Logo, $\hat{F}(u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in L^{\beta+2}(\Omega)$. Como $\beta \leq 2^*/2 - 1$, segue que $\beta + 2 \leq 2^*$ e assim $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{\beta+2}(\Omega)$ e $\hat{F}(u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H^1(\Omega)$, ou seja, o operador de Nemitskiĭ $\hat{F}: H^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ está bem definido.

Mostremos que a imagem de subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ pelo operador $\hat{F}$ é também um subconjunto limitado $L^1(\Omega)$. Integrando em Ω ambos os lados de (5.2) obtemos:

$$|\hat{F}(u)|_{L^1(\Omega)} \leq K_3(|u|_{L^{\beta+2}(\Omega)}^{\beta+2} + 1) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega),$$

onde $K_3 = \max\{K_1, K_2\mu(\Omega)\} > 0$. Usando que $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{\beta+2}(\Omega)$ temos

$$|\hat{F}(u)|_{L^1(\Omega)} \leq K_3(|u|_{H^1(\Omega)}^{\frac{\beta+2}{2}} + 1) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega).$$

Observemos que $F' = f$ e como $\mu(\Omega) < \infty$, temos que as aplicações

$$\hat{F}: L^{2(\beta+1)}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega) \text{ e } \hat{f}: L^{2(\beta+1)}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

estão bem definidas. O Teorema 2.6 de [10] implica que $\hat{F}$ é Fréchet-diferenciável em $L^{2(\beta+1)}(\Omega)$ com $D\hat{F}(u).v = \hat{f}(u).v$, quaisquer que sejam $u, v \in L^{2(\beta+1)}(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ está imerso em $L^{2(\beta+1)}(\Omega)$, o resultado segue. $\square$

Seja F definida por (5.1). Para cada $\varepsilon > 0$, definimos $\mathcal{L}_\varepsilon: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) - \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy,$$

e $\mathcal{L}_0: H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}_0(u) := \frac{1}{2}a_0(u, u) - \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy.$$

Lema 5.1.2 Para cada $\varepsilon \geq 0$, o semifluxo global π_ε é do tipo gradiente com relação à função $\mathcal{L}_\varepsilon$.

Demonstração. O Teorema 5.1.1 implica que $\mathcal{L}_\varepsilon$ é Fréchet-diferenciável para cada $\varepsilon \geq 0$ e, em particular, contínua. Fixemos $\varepsilon > 0$. Pelo Exemplo 1.2.2 temos que, se $\sigma: J \rightarrow H^1(\Omega)$ é uma solução não-constante de π_ε , então σ é diferenciável em J . Mostremos que $\mathcal{L}_\varepsilon \circ \sigma$ é estritamente decrescente em J . Para isto, definimos

$$G(v) := \int_\Omega v dx dy \text{ qualquer que seja } v \in L^1(\Omega).$$

Assim,

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) - G \circ \hat{F}(u).$$

Sabemos pela Regra da Cadeia que

$$(\mathcal{L}_\varepsilon \circ \sigma)'(t) = \mathcal{L}'_\varepsilon(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \text{ para todo } t \in J.$$

Por outro lado, se $h \in H^1(\Omega)$, temos pela Regra da Cadeia que, para todo $u \in H^1(\Omega)$,

$$\mathcal{L}'_\varepsilon(u) \cdot h = a_\varepsilon(u, h) - G'(\hat{F}(u)) \circ \hat{F}'(u) \cdot h = a_\varepsilon(u, h) - G(\hat{f}(u) \cdot h).$$

Logo,

$$(\mathcal{L}_\varepsilon \circ \sigma)'(t) = a_\varepsilon(\sigma(t), \sigma'(t)) - \int_\Omega \hat{f}(\sigma(t)) \sigma'(t) dx dy \text{ para todo } t \in J.$$

Como σ é solução de π_ε , temos que $\hat{f}(\sigma(t)) = \sigma'(t) + A_\varepsilon \sigma(t)$ para todo $t \in J$, e assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \hat{f}(\sigma(t)) \sigma'(t) dx dy &= \int_\Omega |\sigma(t)|^2 dx dy + \int_\Omega (A_\varepsilon \sigma(t)) \sigma'(t) dx dy \\ &= |\sigma'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle A_\varepsilon \sigma(t), \sigma'(t) \rangle \\ &= |\sigma'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + a_\varepsilon(\sigma(t), \sigma'(t)). \end{aligned}$$

Assim,

$$(\mathcal{L}_\varepsilon \circ \sigma)'(t) = -|\sigma'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0 \text{ para todo } t \in J.$$

Em particular, se $u \in H^1(\Omega) \setminus E$, onde E é o conjunto dos pontos de equilíbrio de π_ε , segue que a função $t \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon(\sigma(t))$, $t \in J$ é estritamente decrescente. O caso $\varepsilon = 0$ possui demonstração análoga. $\square$

Lema 5.1.3 Dado $C \in [0, \infty)$, definimos

$$\theta = \theta(C) := \sup_{|u|_{H^1(\Omega)} \leq C} |\hat{F}(u)|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

(1) Para todo $\varepsilon \in (0, 1]$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que $|u|_\varepsilon \leq C$, temos que $\mathcal{L}_\varepsilon(u) \leq \frac{1}{2}|u|_\varepsilon^2 + \theta$;

(2) para todo $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq C$, segue que $\mathcal{L}_0(u) \leq \frac{1}{2}|u|_{H^1(\Omega)}^2 + \theta$.

Demonstração. Mostremos (1). Suponhamos que $u \in H^1(\Omega)$ seja tal que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Então

$$\left| \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy \right| \leq \int_\Omega |\hat{F}(u)| dx dy \leq \theta. \quad (5.3)$$

Como $\varepsilon \in (0, 1]$, a Proposição 2.3.4 implica que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq |u|_\varepsilon$. Segue que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Utilizando (5.3) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) - \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy < \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) + \theta \\ &\leq \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) + \frac{1}{2}|u|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta = \frac{1}{2}|u|_\varepsilon^2 + \theta. \end{aligned}$$

Seja agora $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que $|u|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Utilizando (5.3) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(u) &= \frac{1}{2}a_0(u, u) - \int_{\Omega} \hat{F}(u) dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla_x u \cdot \nabla_x u dx dy + \frac{1}{2}|u|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta = \frac{1}{2}|u|_{H^1(\Omega)}^2 + \theta. \end{aligned}$$

A demonstração do lema está concluída. $\square$

Para continuarmos, vamos assumir que a não-linearidade f satisfaça, além de **(HC1)**, a seguinte condição de *dissipatividade*:

(HC2) existe um $\xi > 0$ tal que $\overline{\lim}_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} \leq -\xi$.

Portanto, dado $\eta > 0$, existe um $M = M(\eta) > 0$ tal que

$$\frac{f(s)}{s} \leq -\xi + \eta \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ com } |s| > M.$$

Logo,

$$f(s)s \leq (-\xi + \eta)s^2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ com } |s| > M.$$

Como

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt \text{ para todo } s \in \mathbb{R},$$

segue que

$$F(s) = \int_0^M f(t) dt + \int_M^s \frac{1}{t} f(t) t dt \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

A função f é contínua em $[-M, M]$. Logo, existe um $c_1 = c_1(M) > 0$ tal que $f(t) \leq c_1$, para todo $s \in [-M, M]$. Portanto,

$$\begin{aligned} F(s) &\leq c_1 M + \int_M^s \frac{1}{t} (-\xi + \eta) t^2 dt = c_1 M + \frac{1}{2} (-\xi + \eta) s^2 - \frac{1}{2} (-\xi + \eta) M^2 \\ &= \frac{1}{2} (-\xi + \eta) s^2 + c_2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ com } |s| > M, \end{aligned}$$

onde $c_2 = c_2(\eta) := c_1 M - \frac{1}{2} (-\xi + \eta) M^2$.

Por outro lado, para $s \in \mathbb{R}$ com $|s| \leq M$, existem constantes $c_3 = c_3(\eta)$ e $c_4 = c_4(\eta)$ tais que

$$\begin{aligned} f(s)s - (-\xi + \eta)s^2 &\leq c_3, \\ F(s) - \frac{1}{2} (-\xi + \eta) s^2 &\leq c_4, \end{aligned}$$

já que ambas as funções do lado direito das desigualdades acima são contínuas em $[-M, M]$.

Assim, tomando $c' = c'(\eta) := \max\{c_2, c_3, c_4\}$, temos que

$$f(s)s \leq (-\xi + \eta)s^2 + c' \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$F(s) \leq (-\xi + \eta)s^2 + c' \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Utilizaremos as desigualdades (5.4) e (5.5) no que segue.

Lema 5.1.4 *Existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|u|_\varepsilon \leq K(\mathcal{L}_\varepsilon(u) + 1) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega) \text{ e todo } \varepsilon \in (0, 1], \quad (5.6)$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq K(\mathcal{L}_0(u) + 1) \text{ para todo } u \in H_s^1(\Omega). \quad (5.7)$$

Demonstração. Fixemos $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta < \xi$. Utilizando (5.5) temos que, para todo $\varepsilon \in (0, 1]$ e todo $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) - \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy \\ &\geq \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) - \frac{1}{2}(-\xi + \eta) \int_\Omega |u|^2 dx dy - c'(\eta) \int_\Omega dx dy \\ &= \frac{1}{2}a_\varepsilon(u, u) + \frac{1}{2}(\xi - \eta)|u|_{L^2(\Omega)}^2 - c'(\eta)\mu(\Omega). \end{aligned}$$

Para todo $u \in H_s^1(\Omega)$,

$$\mathcal{L}_0(u) = \frac{1}{2}a_0(u, u) - \int_\Omega \hat{F}(u) dx dy \geq \frac{1}{2}a_0(u, u) + \frac{1}{2}(\xi - \eta)|u|_{L^2(\Omega)}^2 - c'(\eta)\mu(\Omega).$$

Definimos $c := c'(\eta)\mu(\Omega)$ e $k := \frac{1}{2} \min\{1, \xi - \eta\}$. Para todo $\varepsilon \in (0, 1]$, obtemos que

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u) \geq ka_\varepsilon(u, u) + k|u|_{L^2(\Omega)}^2 - c'(\eta)\mu(\Omega) = k|u|_\varepsilon^2 - c.$$

Ou seja,

$$|u|_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{k}(\mathcal{L}_\varepsilon(u) + c) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega) \text{ e todo } \varepsilon \in (0, 1]. \quad (5.8)$$

Analogamente mostramos que, para todo $u \in H_s^1(\Omega)$,

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{k}(\mathcal{L}_0(u) + c). \quad (5.9)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u|_\varepsilon &\leq \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon(u) + c)^{1/2} \text{ para todo } u \in H^1(\Omega) \text{ e todo } \varepsilon \in (0, 1], \\ |u|_{H^1(\Omega)} &\leq \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2}(\mathcal{L}_0(u) + c)^{1/2} \text{ para todo } u \in H_s^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young segue que

$$|u|_\varepsilon \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\varepsilon(u) + c) \text{ para todo } u \in H^1(\Omega) \text{ e todo } \varepsilon \in (0, 1],$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_0(u) + c) \text{ para todo } u \in H_s^1(\Omega).$$

Definindo $K := \max\{1/2k + c/2, 1/2\}$, temos que

$$|u|_\varepsilon \leq K(\mathcal{L}_\varepsilon(u) + 1), \text{ para todo } u \in H^1(\Omega) \text{ e todo } \varepsilon \in (0, 1],$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} \leq K(\mathcal{L}_0(u) + 1), \text{ para todo } u \in H_s^1(\Omega).$$

O lema está demonstrado. $\square$

Lema 5.1.5 *Seja $\varepsilon \in [0, 1]$ e u um ponto de equilíbrio de π_ε . Então, se $\varepsilon \in (0, 1]$,*

$$|u|_\varepsilon^2 \leq \frac{c}{k}. \quad (5.10)$$

Se $\varepsilon = 0$,

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{c}{k}. \quad (5.11)$$

Demonstração. Seja u um ponto de equilíbrio de π_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$. Então $u \in D(A_\varepsilon)$ e $A_\varepsilon u = \hat{f}(u)$. Usando (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, u) &= \langle A_\varepsilon u, u \rangle = \langle \hat{f}(u), u \rangle = \int_\Omega f(u)u \, dx dy \\ &\leq \int_\Omega ((-\xi + \eta)|u|^2 + c') \, dx dy = (-\xi + \eta)|u|_{L^2(\Omega)}^2 + c, \end{aligned} \quad (5.12)$$

isto é,

$$a_\varepsilon(u, u) + (\xi - \eta)|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c.$$

Lembremos que $k \leq \xi - \eta$ e $k \leq 1$. Portanto,

$$k|u|_\varepsilon^2 \leq ka_\varepsilon(u, u) + k|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a_\varepsilon(u, u) + (\xi - \eta)|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c,$$

e segue (5.10). Analogamente demonstramos a desigualdade (5.11). $\square$

Estes resultados demonstrados nos possibilita apresentar o seguinte resultado sobre a existência de atratores globais:

Teorema 5.1.6 *Suponhamos que a função f satisfaça (HC1) e (HC2) e seja $\varepsilon \in [0, 1]$. Então o semifluxo local π_ε em $H^1(\Omega)$ é um semifluxo global em $H^1(\Omega)$ para cada $\varepsilon > 0$ e o semifluxo local π_0 em $H_s^1(\Omega)$ é um semifluxo global em $H_s^1(\Omega)$. Além disso, o conjunto $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$ de todas as órbitas limitadas de π_ε é um atrator global em $H^1(\Omega)$ para $\varepsilon > 0$ e em $H_s^1(\Omega)$ se $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. O Teorema 2.1.8, os Lemas 5.1.2, 5.1.3 e 5.1.5 juntamente com as desigualdades (5.6) e (5.7) implicam que $\hat{f}$ e π_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, satisfazem todas as hipóteses do Teorema 1.3.2. $\square$

5.2 Semicontinuidade superior dos atratores

Nessa seção vamos assumir que as hipóteses do Teorema 5.1.6 estejam satisfeitas. Nossos esforços agora serão para mostrar um resultado de semicontinuidade superior em $\varepsilon = 0$ da família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon \in [0,1]}$ com relação à família de normas $|\cdot|_\varepsilon$. Começamos com um lema auxiliar.

Lema 5.2.1 *Seja $\theta = \theta(c/k)$ como no Lema 5.1.3. Definimos*

$$K' := (c/2)(1 - (\xi - \eta)/k) + \theta \in (0, \infty).$$

Então

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \sup_{u \in \mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}} |u|_\varepsilon^2 \leq \left(\frac{1}{k}\right)(K' + c)$$

e

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_{\pi_0}} |u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{k}\right)(K' + c).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon \in (0,1]$ e $u \in \mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$ arbitrário. Como $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$ é invariante, existe uma solução completa σ_ε de π_ε com $\sigma_\varepsilon(0) = u$ e $\sigma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$. Como $\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}$ é um conjunto compacto, existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, \infty)$ e uma função $v \in H^1(\Omega)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\sigma_\varepsilon(-t_n) \rightarrow v$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema 3.2 de [16] temos que v é um ponto de equilíbrio de π_ε , e como $\mathcal{L}_\varepsilon$ é não crescente ao longo de σ_ε e contínua, temos que $\mathcal{L}_\varepsilon(u) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v)$. Assim, utilizando as desigualdades (5.10) e (5.12) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(u) &\leq \frac{1}{2} a_\varepsilon(v, v) - \int_\Omega \hat{F}(v) dx dy \leq \frac{1}{2} a_\varepsilon(v, v) + \int_\Omega |\hat{F}(v)| dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} a_\varepsilon(v, v) + \sup_{|v|_{H^1(\Omega)} \leq c/k} |\hat{F}(v)|_{L^1(\Omega)} = \frac{1}{2} a_\varepsilon(v, v) + \theta \\ &\leq \frac{1}{2} ((-\xi + \eta) |v|_{L^2(\Omega)}^2 + c) + \theta \leq \frac{1}{2} ((-\xi + \eta) c/k + c) + \theta = K'. \end{aligned}$$

A desigualdade (5.8) implica que

$$|u|_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{k}(K' + c), \text{ para todo } u \in \mathcal{A}_{\pi_\varepsilon} \text{ e para todo } \varepsilon \in (0,1].$$

Para o caso $\varepsilon = 0$, a demonstração é análoga. Nesse caso, $v \in H_s^1(\Omega)$ e utilizamos as desigualdades (5.11) e (5.9) no lugar de (5.10) e (5.8). A demonstração está terminada. $\square$

Podemos agora apresentar o resultado de semicontinuidade superior em $\varepsilon = 0$ da família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon \in [0,1]}$.

Teorema 5.2.2 *A família de atratores $(\mathcal{A}_{\pi_\varepsilon})_{\varepsilon \in [0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ com relação à família de normas $|\cdot|_\varepsilon$, isto é,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{A}_{\pi_\varepsilon}} \inf_{v \in \mathcal{A}_{\pi_0}} |u - v|_\varepsilon = 0.$$

Demonstração. Vamos provar o resultado por contradição. Suponhamos que existam $\delta > 0$, uma sequência $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, 1]$, com $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, e, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução limitada σ_n de π_{ε_n} tais que,

$$\inf_{v \in \mathcal{A}_{\pi_0}} |u_n - v|_{\varepsilon_n} > \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (5.13)$$

onde $u_n := \sigma_n(0)$.

Pelo Lema 5.2.1 segue que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma_n(t)|_{\varepsilon_n}^2 \leq \frac{1}{k}(K' + c) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

O Corolário 4.2.4 implica que existe uma subsequência de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada novamente por $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma solução completa σ de π_0 tal que

$$|\sigma_n(t) - \sigma(t)|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Segue de (5.14) e (5.15) que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{k}(K' + c).$$

Logo, $\sigma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{\pi_0}$. Fazendo $t = 0$ em (5.15) temos que

$$|u_n - v|_{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde $v := \sigma(0) \in \mathcal{A}_{\pi_0}$, contradizendo (5.13). □

Capítulo 6

Domínios bem Decompostos

Em [20], os autores introduziram a classe dos chamados domínios bem decompostos. Eles mostraram que para essa classe de domínios, tanto o operador A_0 quanto seu domínio de definição podem ser explicitamente caracterizados. Neste capítulo apresentaremos a definição destes domínios e o resultado de [20] que caracteriza o problema limite. Na Seção 6.1 combinamos resultados de [20] e [18] e caracterizamos os espaços $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$ no caso em que Ω é um domínio com seções verticais conexas. Com estes resultados caracterizamos os espaços $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$ no caso em que Ω é um domínio bem decomposto. Isso é realizado na Seção 6.2. Finalizamos com um exemplo de domínio bem decomposto e uma análise dos autovalores de A_0 por meio de resultados de [4].

6.1 Domínios com seções verticais conexas

Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{M+N}$ possui *seções verticais conexas* se, para todo $x \in \mathbb{R}^M$, a seção vertical $\Omega_x := \{y \in \mathbb{R}^N \mid (x, y) \in \Omega\}$ é conexa. Denotaremos por $P: \mathbb{R}^{M+N} \rightarrow \mathbb{R}^M$ a projeção na primeira coordenada, isto é, $P(x, y) := x$. Vemos que Ω_x é não-vazio se, e somente se, $x \in P(\Omega)$. Neste caso, definimos $J := P(\Omega)$ e a função $p: J \rightarrow (0, \infty)$ por $p(x) := \mu_N(\Omega_x)$, onde μ_N é a medida de Lebesgue N -dimensional. Observemos que o conceito de seções verticais conexas já apareceu na Seção 3.2.

A próxima proposição, demonstrada em [20] caracteriza as funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $\nabla_y u = 0$ para o caso em que Ω possui seções verticais conexas.

Proposição 6.1.1 *Suponhamos que Ω possua seções verticais conexas. Seja $u \in L^2(\Omega)$ satisfazendo $\nabla_y u = 0$ no sentido das distribuições.*

- (1) *Existe um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e uma função $v \in L_{\text{loc}}^1(J)$ tal que $u(x, y) = v(x)$, para todo $(x, y) \in \Omega \setminus S$. Além disso, $p^{1/2}v \in L^2(J)$.*
- (2) *Se $u \in H^1(\Omega)$, então $\partial_{x_i} v \in L_{\text{loc}}^1(J)$ para $i = 1, \dots, M$. Mais ainda, podemos escolher o conjunto S de (1) de forma que $u(x, y) = v(x)$ e $\partial_{x_i} u(x, y) = \partial_{x_i} v(x)$*

para todo $(x, y) \in \Omega \setminus S$ e $i = 1, \dots, M$. Além disso, $p^{1/2} \partial_{x_i} v \in L^2(J)$, $i = 1, \dots, M$.

- (3) Se $M = 1$, então a função v pode ser escolhida como sendo absolutamente contínua em J . Neste caso, a função $\tilde{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{u}(x, y) := v(x)$ é um representante contínuo de u .

Demonstração. Como no Teorema 2.2.4, podemos cobrir Ω com uma família enumerável $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\Omega_n = U_n \times V_n$, onde U_n e V_n são retângulos abertos limitados. Observemos que

$$\nabla_y(u|_{\Omega_n}) = (\nabla_y u)|_{\Omega_n} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, como no Teorema 2.2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto de medida nula $S_n \subset \mathbb{R}^{M+N}$ e uma função $v_n \in L^1_{\text{loc}}(U_n)$ tal que $u(x, y) = v_n(x)$, para todo $(x, y) \in \Omega_n \setminus S_n$. Definimos $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Notemos que

$$\mu_{M+N}(S) = \int_{\mathbb{R}^M} \mu_N(S_x) dx = 0.$$

Assim, existe um conjunto de medida nula $Z \subset \mathbb{R}^M$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^M \setminus Z$, $\mu_N(S_x) = 0$. Além disso, podemos supor que $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Agora, se $x \in J \setminus Z$, então existe um $y \in \Omega_x \setminus S_x$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ com $x \in U_m$, temos que $u(x, y) = v_m(x)$. Em particular

$$v_m|_{(U_m \cap U_n) \setminus Z} = v_n|_{(U_m \cap U_n) \setminus Z} \text{ quaisquer que sejam } m, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, existe uma única função $v: J \setminus Z \rightarrow \mathbb{R}$ com $v(x) = v_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in U_n \setminus Z$. Afirmamos que estendendo v trivialmente a J , isto é, definindo $v(x) = 0$ se $x \in Z$, obtemos uma função $v \in L^1_{\text{loc}}(J)$ tal que $u(x, y) = v(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega \setminus S$. De fato, suponhamos que A seja um conjunto mensurável tal que $A \subset J$. Então existem $U_{k_1}, \dots, U_{k_j}$ de forma que $A \subset \bigcup_{i=1}^j U_{k_i}$ e ainda $A \cap U_{k_i} \subset \subset U_{k_i}$. Logo,

$$\int_A |v(x)| dx \leq \sum_{i=1}^j \int_{A \cap U_{k_i}} |v_{k_i}(x)| dx < \infty$$

e a demonstração de nossa afirmativa está completa. Como $u \in L^2(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} u^2 dx dy = \int_J p v^2 dx = \int_J (p^{1/2} v)^2 dx$$

e, assim, $p^{1/2} v \in L^2(J)$. A demonstração de (1) está concluída.

Mostremos (2). Seja $u \in H^1(\Omega)$. O Lema 2.2.2 implica que podemos tomar um conjunto de medida nula S de forma que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $v_m \in L^1_{\text{loc}}(U_m)$, $u(x, y) = v_m(x)$ e $\partial_{x_i} u(x, y) = \partial_{x_i} v_m(x)$ para todo $i = 1, \dots, M$ e todo $(x, y) \in \Omega_m \setminus S$. Agora observemos que, para cada $i = 1, \dots, M$, existe um conjunto de medida nula Z_i e uma função $w_i: J \setminus Z_i \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\partial_{x_i} v_n(x) = w_i(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in U_n$.

Tomando $Z := \bigcup_{i=1}^M Z_i$ e estendendo trivialmente cada w_i a J , teremos que $\partial_{x_i} v = w_i$ e (2) segue.

Suponhamos que $M = 1$. O Lema 2.2.2 implica que cada v_m é absolutamente contínua em U_m , para cada $m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $v_m(x) = v_n(x)$ sempre que $x \in U_n \cap U_m$ (ver a demonstração da Proposição 2.2.3). Sendo assim, a extensão v de todas as funções v_m é determinada de modo único e é absolutamente contínua em J . $\square$

No restante dessa seção vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^{M+N}$ seja um aberto limitado com seções verticais conexas e que $1/p \in L^1(J)$. Apresentamos alguns resultados auxiliares.

Lema 6.1.2 *A função $p: J \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $p \in L^\infty(J)$ e $p(x) > 0$ para quase todo $x \in J$.*

Demonstração. Como Ω é limitado, temos que p é limitada em J , isto é, $p \in L^\infty(J)$. Suponhamos agora que exista um conjunto aberto $A \subset J$ com $\mu_N(A) > 0$ e tal que $p(x) = 0$ para todo $x \in A$. Porém isso contradiz o fato de $\int_A 1/p(x) dx = \infty$. $\square$

Lema 6.1.3 *Suponhamos que $v: J \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função tal que $p^{1/2}v \in L^2(J)$. Dado $\delta > 0$ existe um $\psi \in \mathcal{D}(J)$ tal que*

$$\int_J p(v - \psi)^2 dx < \delta.$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Como $p^{1/2}v \in L^2(J)$, existe um $\phi \in \mathcal{D}(J)$ tal que

$$\|p^{1/2}v - \phi\|_{L^2(J)} < \sqrt{\delta}/2.$$

Notemos que

$$\int_J |p^{1/2}v - \phi|^2 dx = \int_J p|v - p^{1/2}\phi|^2 dx = \int_\Omega |v - p^{1/2}\phi|^2 dx dy.$$

Assim,

$$\|v - p^{1/2}\phi\|_{L^2(\Omega)} < \sqrt{\delta}/2. \quad (6.1)$$

Observemos ainda que

$$\int_\Omega (p^{-1/2}\phi)^2 dx dy = \int_\Omega p^{-1}\phi^2 dx dy = \int_J \phi^2 dx.$$

Portanto, $p^{-1/2}\phi \in L^2(\Omega)$. Como $\phi \in L^\infty(J)$ e $p^{-1} \in L^1(J)$, temos também que

$$\int_J (p^{-1/2}\phi)^2 dx = \int_J p^{-1}\phi^2 dx < \|\phi^2\|_{L^\infty(J)} \int_J p^{-1} dx,$$

ou seja, $p^{-1/2}\phi \in L^2(J)$. Logo, existe uma função $\psi \in \mathcal{D}(J)$ tal que

$$\|p^{-1/2}\phi - \psi\|_{L^2(J)} < \sqrt{\delta}/(2\sqrt{k}), \quad (6.2)$$

onde $k := \sup_{x \in J} p(x) > 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |p^{-1/2}\phi - \psi|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |p^{-1/2}\phi - \psi|^2 dx dy = \int_J p |p^{-1/2}\phi - \psi|^2 dx \\ &\leq k \int_J |p^{-1/2}\phi - \psi|^2 dx = k |p^{-1/2}\phi - \psi|_{L^2(J)}^2. \end{aligned}$$

Temos

$$|p^{-1/2}\phi - \psi|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{k} |p^{-1/2}\phi - \psi|_{L^2(J)}. \quad (6.3)$$

Como

$$|v - \psi|_{L^2(\Omega)} \leq |v - p^{-1/2}\phi|_{L^2(\Omega)} + |p^{-1/2}\phi - \psi|_{L^2(\Omega)},$$

utilizando (6.1), (6.2) e (6.3) obtemos $|v - \psi|_{L^2(\Omega)}^2 < \sqrt{\delta}$. Mas

$$|v - \psi|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |v - \psi|^2 dx dy = \int_J p |v - \psi|^2 dx.$$

O lema está demonstrado. $\square$

Nossas hipóteses sobre p e sobre Ω implicam a seguinte caracterização do espaço $L_s^2(\Omega)$:

Proposição 6.1.4 *Se Ω possui seções verticais conexas, então*

$$L_s^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla_y u = 0\}.$$

Demonstração. Seja $u \in L_s^2(\Omega)$ e tomemos uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $H_s^1(\Omega)$ tal que $|u_n - u|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue que, para qualquer $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e para cada $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \partial_{y_i} \phi dx dy &= \int_{\Omega} (u - u_n + u_n) \partial_{y_i} \phi dx dy \\ &= \int_{\Omega} (u - u_n) \partial_{y_i} \phi dx dy + \int_{\Omega} u_n \partial_{y_i} \phi dx dy \\ &= \int_{\Omega} (u - u_n) \partial_{y_i} \phi dx dy. \end{aligned}$$

A Desigualdade de Hölder implica que

$$\int_{\Omega} u \partial_{y_i} \phi dx dy \leq |u - u_n|_{L^2(\Omega)} |\partial_{y_i} \phi|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, $\nabla_y u = 0$.

Por outro lado, suponhamos que $u \in L^2(\Omega)$ satisfaz $\nabla_y u = 0$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. A Proposição 6.1.1 implica que existe um $v \in L_{\text{loc}}^1(J)$ com $p^{1/2}v \in L^2(J)$ tal que $u(x, y) = v(x)$ para quase todo $(x, y) \in \Omega$. Pelo Lema 6.1.3, existe um $\psi \in \mathcal{D}(J)$ tal que

$$\int_J p(v - \psi)^2 dx < \delta,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (v - \psi)^2 dx dy < \delta.$$

Definimos $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(x, y) := \psi(x)$. Segue que $\Phi \in H^1(\Omega)$ e que $\nabla_{\mathbf{z}} \Phi = 0$, isto é, $\Phi \in H_s^1(\Omega)$. Além disso,

$$\int_{\Omega} (u - \Phi)^2 dx dy = \int_{\Omega} (v - \psi)^2 dx dy < \delta.$$

Como $\delta > 0$ e $\Phi \in H_s^1(\Omega)$, temos que $u \in L_s^2(\Omega)$. O lema está demonstrado. $\square$

O Lema 6.1.2 e a Proposição 6.1.1 implicam que os espaços vetoriais

$$H_p := \{u \in L_{\text{loc}}^1(J) \mid p^{1/2}u \in L^2(J)\}$$

e

$$V_p := \{u \in H_p \mid \partial_{x_i} u \in L_{\text{loc}}^1(J), p^{1/2} \partial_{x_i} u \in L^2(J), i = 1, \dots, M\}$$

estão bem definidos. Definimos em H_p e V_p os seguintes produtos:

$$\langle u, v \rangle_{H_p} := \int_J p(x) u(x) v(x) dx, \text{ para } u, v \in H_p$$

e

$$\langle u, v \rangle_{V_p} := \int_J p(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_J p(x) u(x) v(x) dx, \text{ para } u, v \in V_p.$$

Proposição 6.1.5 *Os produtos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_p}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_p}$ definem uma estrutura de espaço de Hilbert em H_p e em V_p respectivamente.*

Demonstração. Observemos que, qualquer que seja $u \in H_p$,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx dy = \int_J p(x) |u(x)|^2 dx = \int_J |p^{1/2}(x) u(x)|^2 dx < \infty$$

isto é, $u \in L^2(\Omega)$. Além disso, para $u, v \in H_p$

$$\langle u, v \rangle_{H_p} = \int_J p(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx dy = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (6.4)$$

Com isso, $H_p \subset L^2(\Omega)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_p}$ é a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ a $H_p \times H_p$. A Proposição 6.1.4 implica que $H_p \subset L_s^2(\Omega)$. Para mostrarmos que H_p munido com a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_p}$ é completo, basta mostrarmos que H_p é fechado em $L^2(\Omega)$. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em H_p e $u \in L^2(\Omega)$ tal que $|u_n - u|_{H_p} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Temos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $L_s^2(\Omega)$ e que $L_s^2(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$. Logo, $u \in L_s^2(\Omega)$.

A Proposição 6.1.4 implica que $\nabla_y u = 0$. Sendo assim, a Proposição 6.1.1 implica que existe um conjunto de medida nula S em uma função $v \in L^1_{\text{loc}}(J)$ tal que $u(x, y) = v(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega \setminus S$ e $p^{1/2}v \in L^2(J)$. Como

$$\int_J p^{1/2}v dx = \int_J p^{1/2}u dx,$$

segue que $p^{1/2}u \in L^2(J)$, isto é, $u \in H_p$.

No caso do espaço V_p , notemos que se $u \in V_p$, então $u \in L^2(\Omega)$, $\partial_{x_i} u \in L^2(\Omega)$ para $i = 1, \dots, M$ e $\nabla_y u = 0$, ou seja, $u \in H^1_s(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Observemos também que

$$\langle u, v \rangle_{V_p} = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} \text{ quaisquer que sejam } u, v \in V_p.$$

Como $H^1_s(\Omega)$ é fechado, um raciocínio análogo ao do caso do espaço H_p implica que V_p é também um espaço de Hilbert. $\square$

Definimos a aplicação $\iota: L^2_s(\Omega) \rightarrow H_p$ por $\iota(u) := v$, onde v é a função dada pela Proposição 6.1.1. Segue das Proposições 6.1.1 e 6.1.4 que ι está bem definida.

Lema 6.1.6 *A aplicação ι é uma isometria de $L^2_s(\Omega)$ sobre H_p . Além disso, ι se restringe a uma isometria de $H^1_s(\Omega)$ sobre V_p . Assim, V_p é denso em H_p .*

Demonstração. Sejam $u \in L^2_s(\Omega)$ e $v = \iota(u)$. Temos que

$$\|v\|_{H_p}^2 = \int_J p(x)|v(x)|^2 dx = \int_\Omega |v(x)|^2 dx dy = \int_\Omega |u(x, y)|^2 dx dy = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja, ι é uma isometria.

Por outro lado, se $v \in H_p$, definimos $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com $u(x, y) := v(x)$, para todo $(x, y) \in \Omega$. Daí $u \in L^2(\Omega)$ satisfaz $\nabla_y u = 0$. A Proposição 6.1.4 implica que $u \in L^2_s(\Omega)$. Além disso, $\iota(u) = v$ e portanto ι é uma aplicação sobrejetora.

Seja $u \in H^1_s(\Omega)$. Então a Proposição 6.1.1 (2) implica que $\iota(u) = v$, onde $v \in V_p$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_p}^2 &= \sum_{i=1}^M \int_J p(x)|\partial_{x_i} v(x)|^2 dx + \int_J p(x)|v(x)|^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^M \int_\Omega |\partial_{x_i} u(x, y)|^2 dx dy + \int_\Omega |u(x, y)|^2 dx dy = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, ι restrita a $H^1_s(\Omega)$ é uma isometria em V_p . Verifiquemos que essa restrição é sobrejetora. Isso segue do fato de que, se $v \in V_p$, então $u \in H^1_s(\Omega)$, onde $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $u(x, y) := v(x)$. Isso conclui a demonstração do lema. $\square$

Vamos agora assumir que $M = 1$ e assim, $J = (a, b)$ para alguns $a, b \in \mathbb{R}$. Nessas condições vamos mostrar que $V_p \hookrightarrow H_p$ com imersão compacta. Para demonstrar esse resultado necessitamos de uma lema técnico.

Lema 6.1.7 *Seja $u \in V_p$ e suponhamos que exista uma função $v \in C^0(a, b)$ tal que $u = v$ quase sempre em (a, b) . Então v pode ser estendida a uma função contínua em $[a, b]$.*

Demonstração. Sejam $x, x' \in (a, b)$ com $x < x'$. Então

$$|v(x) - v(x')| = \left| \int_x^{x'} p^{-1/2}(s) p^{1/2}(s) v'(s) ds \right| \leq \int_x^{x'} |p^{-1/2} p^{1/2} v'(s)| ds.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} |v(x) - v(x')| &\leq \left(\int_x^{x'} p^{-1}(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_x^{x'} p(s) |v'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq |v|_{V_p} \left(\int_x^{x'} p^{-1}(s) ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Como $1/p \in L^1(a, b)$, temos que $|v(x) - v(x')| \rightarrow 0$ quando $x, x' \rightarrow a$ (respectivamente $x, x' \rightarrow b$). Portanto, existem os limites $v(a) := \lim_{x \rightarrow a} v(x)$ e $v(b) := \lim_{x \rightarrow b} v(x)$. Assim, $v \in C^0([a, b])$. $\square$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 6.1.8 *Suponhamos que $u \in V_p$. Então existe uma função $v \in C^0([a, b])$ tal que $u = v$ quase sempre em (a, b) . Além disso, as imersões $V_p \hookrightarrow C^0([a, b])$ e $V_p \hookrightarrow H_p$ são compactas.*

Demonstração. Seja $\eta > 0$ arbitrário tal que $a + \eta < b - \eta$. Afirmamos que existe um $\delta = \delta(\eta) > 0$ tal que $p(x) \geq \delta$ para quase todo $x \in (a + \eta, b - \eta)$. De fato, caso contrário, existe um $\eta_1 > 0$ com $a + \eta_1 < b - \eta_1$ de forma que $p(x) < \delta$, para todo $\delta > 0$ e todo $x \in (a + \eta_1, b - \eta_1)$, contrariando o fato de que $1/p \in L^1(a, b)$. Com isso, observemos que, para todo $u \in V_p$,

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} |u(x)|^2 dx = \int_{a+\eta}^{b-\eta} p^{-1}(x) (p^{1/2}(x) u(x))^2 dx \leq \delta \int_{a+\eta}^{b-\eta} (p^{1/2}(x) u(x))^2 dx < \infty.$$

Analogamente,

$$\int_{a+\eta}^{b-\eta} |u'(x)|^2 dx < \infty.$$

Portanto, $u|_{(a+\eta, b-\eta)} \in H^1(a+\eta, b-\eta)$. Como, para todo $\eta > 0$, $H^1(a+\eta, b-\eta) \hookrightarrow C^0([a+\eta, b-\eta])$ com imersão contínua, temos que existe uma função $v \in C^0(a, b)$ tal que $u = v$ quase sempre em (a, b) . Pelo Lema 6.1.7, v pode ser estendida a uma função contínua em $[a, b]$.

Mostremos que as imersões apresentadas no enunciado da proposição são compactas. Seja $u \in V_p$ e seja v como na primeira parte dessa proposição.

Fixemos $\eta' > 0$ com $a + \eta' < b - \eta'$ e seja $\delta' > 0$ tal que $p(x) \geq \delta'$ para quase todo $x \in (a + \eta', b - \eta')$. Como no caso de u , temos que $v|_{(a+\eta', b-\eta')} \in H^1(a + \eta', b - \eta')$. Segue que existe uma constante $K_1 > 0$ tal que $|v|_{L^\infty(a+\eta', b-\eta')} \leq K_1 |v|_{H^1(a+\eta', b-\eta')}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |v|_{H^1(a+\eta', b-\eta')}^2 &= \int_{a+\eta'}^{b-\eta'} |v(x)|^2 dx + \int_{a+\eta'}^{b-\eta'} |v'(x)|^2 dx \\ &= \int_{a+\eta'}^{b-\eta'} p^{-1}(x) |p^{1/2}(x)v(x)|^2 dx + \int_{a+\eta'}^{b-\eta'} p^{-1}(x) |p^{1/2}(x)v'(x)|^2 dx \leq \delta' |v|_{V_p}^2. \end{aligned}$$

Segue que existe uma constante $K_2 > 0$ tal que $|v|_{L^\infty(a+\eta', b-\eta')} \leq K_2 |v|_{V_p}$.

Agora, observemos que a desigualdade (6.5) na demonstração do Lema 6.1.7 é válida para todo $x \in (a, b)$. Assim, se $x \in (a, b) \setminus (a + \eta', b - \eta')$ e $x' \in (a + \eta', b - \eta')$ temos que

$$|v(x)| \leq |v(x) - v(x')| + |v(x')| \leq |v|_{V_p} \left(\int_x^{x'} p^{-1}(s) ds \right)^{1/2} + K_2 |v|_{V_p} \leq K_3 |v|_{V_p},$$

para alguma constante $K_3 > 0$. Logo, definindo $K_4 := \max\{K_2, K_3\}$ temos que

$$|v|_{L^\infty(a,b)} \leq K_4 |v|_{V_p}, \quad (6.6)$$

ou seja, $V_p \hookrightarrow C^0([a, b])$ com imersão contínua. Mostremos que essa inclusão é compacta. Seja $F \subset V_p$ um subconjunto limitado. Então F é limitado em $C^0([a, b])$ por 6.6. Seja $M > 0$ tal que $|v|_{L^\infty([a,b])} \leq M$, para todo $v \in F$. É claro que, para cada $x \in [a, b]$, o conjunto $\{v(x) \mid v \in F\}$ é limitado em $\mathbb{R}$, isto é, F é pontualmente limitado. Notemos que F é equicontínuo. De fato, fixemos $x \in [a, b]$ e seja $\eta > 0$ arbitrário. Logo, existe um $x' \in [a, b]$ tal que

$$\left(\int_x^{x'} p^{-1}(x) dx \right)^{1/2} < \eta.$$

Portanto, por (6.5) temos que

$$|v(x) - v(x')| \leq M\eta \text{ qualquer que seja } v \in F.$$

Estamos então nas condições do Teorema de Ascoli-Arzelá, que implica que F é um conjunto relativamente compacto em $C^0([a, b])$, demonstrando que a imersão $V_p \hookrightarrow C^0([a, b])$ é compacta.

Para finalizarmos, observemos que, para todo $u \in C^0([a, b])$, temos que $u \in H_p$ e

$$|u|_{H_p} = \left(\int_a^b p(x) |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq (|p|_{L^\infty(a,b)} \mu(a, b))^{1/2} |u|_{L^\infty([a,b])} = K |u|_{L^\infty([a,b])},$$

onde $K := (|p|_{L^\infty(a,b)} \mu(a, b))^{1/2}$. Sendo assim, $C^0([a, b]) \hookrightarrow H_p$ com imersão contínua e, portanto, $V_p \hookrightarrow H_p$ com imersão compacta. A proposição está demonstrada. $\square$

6.2 Domínios bem decompostos

Nessa seção vamos apresentar uma classe de domínios Ω contidos em $\mathbb{R}^2$. Iniciamos observando que, se Ω é um domínio não-vazio e limitado em $\mathbb{R}^{M+N}$ e P é a projeção na primeira coordenada, então $J_\Omega := P(\Omega)$ é um domínio não-vazio e limitado de $\mathbb{R}^M$. Em particular, se $M = 1$, $J_\Omega = (a_\Omega, b_\Omega)$, onde $-\infty < a_\Omega < b_\Omega < \infty$.

Vamos estabelecer mais algumas notações. Dado $a \in \mathbb{R}$ e $\delta \in (0, \infty)$, definimos:

$$\begin{aligned} I_\delta(a) &:= (a - \delta, a + \delta), \\ I_\delta^-(a) &:= (a - \delta, a), \\ I_\delta^+(a) &:= (a, a + \delta). \end{aligned}$$

Definição 6.2.1 Suponhamos que $M = N = 1$ e que Ω , Ω_1 e Ω_2 sejam domínios limitados não-vazios em $\mathbb{R}^{M+N}$. Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que Ω_1 se une a Ω_2 no ponto c em Ω se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

- (1) existem números reais positivos $\beta := \beta_{\Omega_1, \Omega_2}$ e $\gamma := \gamma_{\Omega_1, \Omega_2}$, com $\beta < \gamma$, tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{c\} \times [\beta, \gamma]$;
- (2) $c = a_{\Omega_2} = b_{\Omega_1}$;
- (3) $\{c\} \times (\beta, \gamma) \subset \Omega$;
- (4) sempre que $d \in (\beta, \gamma)$, existe um $\delta = \delta(d) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_\delta(d) &\subset (\beta, \gamma), \\ I_\delta^-(c) \times I_\delta(d) &\subset \Omega_1, \\ I_\delta^+(c) \times I_\delta(d) &\subset \Omega_2. \end{aligned}$$

Dizemos que Ω_1 e Ω_2 se unem no ponto c em Ω se Ω_1 se une a Ω_2 no ponto c em Ω ou se Ω_2 se une a Ω_1 no ponto c em Ω .

Figura 1: Ω_1 se une a Ω_2 no ponto $c = 1$ em $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$.

Exemplo 6.2.2 Sejam $\Omega = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ e $\Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Na Figura 1 encontramos a representação geométrica de Ω , Ω_1 e Ω_2 . Observemos que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{1\} \times [0, 1]$ e $1 = a_{\Omega_2} = b_{\Omega_1}$. Além disso, para todo $d \in (0, 1)$, existe um $\delta = \delta(d) > 0$ tal que as inclusões da condição (4) da Definição 6.2.1 estão satisfeitas, ou seja, Ω_1 se une a Ω_2 no ponto $c = 1$ em Ω . $\square$

No restante dessa seção vamos assumir que $M = N = 1$. Apresentamos a seguinte definição técnica importante no que segue:

Definição 6.2.3 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, aberto, não-vazio e com fronteira Lipschitz e seja $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada. Uma *boa decomposição* de Ω é uma coleção $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ de subconjuntos de Ω , abertos e não-vazios, conexos e dois a dois disjuntos, com seção vertical conexa satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $\Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^r \Omega_k) \subset Z$, onde $Z := \bigcup_{k=1}^r (\{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R})$;
- (2) para cada $k = 1, \dots, r$, $\partial\Omega_k \subset \partial\Omega \cup (\{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R})$ e para $c \in \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\}$, $\partial\Omega_k \cap (\{c\} \times \mathbb{R}) = \{c\} \times I$, onde I é um intervalo compacto (podendo ser degenerado) em $\mathbb{R}$;
- (3) sempre que $k, l = 1, \dots, r$, $k \neq l$ e $(c, d) \in \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l$ é um ponto arbitrário, então, ou Ω_k e Ω_l se unem no ponto c em Ω ou existe um $m \in \{1, \dots, r\}$ tal que Ω_k e Ω_l se unem no ponto c em Ω e Ω_l e Ω_m se unem no ponto c em Ω ;
- (4) para cada $k = 1, \dots, r$, a função $p_k: J_{\Omega_k} \rightarrow (0, \infty)$ definida por $p_k(x) := \mu_1((\Omega_k)_x)$ é tal que $1/p_k \in L^1(J_{\Omega_k})$.

Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é *bem decomposto* se existe uma boa decomposição de Ω .

Intuitivamente, a Definição 6.2.3 nos diz que, a menos de um conjunto de medida nula contido em um conjunto Z , o qual é união finita de retas verticais, Ω pode ser decomposto em uma quantidade finita de domínios Ω_k , $k = 1, \dots, r$, de maneira que os vários conjuntos Ω_k e Ω_l se “unem” em Z de um modo “bom”. Os pontos de $\bar{\Omega} \cap Z$ são aqueles nos quais as componentes conexas das seções verticais Ω_x se bifurcam.

Proposição 6.2.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio bem decomposto. Se $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ é uma boa decomposição de Ω , então $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^r \bar{\Omega}_k$.*

Demonstração. É claro que $\bigcup_{k=1}^r \Omega_k \subset \bar{\Omega}$. Seja $z \in \bar{\Omega}$. Então existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Ω com $z_n \rightarrow z$. Podemos supor que $z_n \notin Z$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, se $z_n \in Z$ então existe um $\xi_n \in \mathbb{R}^2$ com $z_n + \xi_n \in \Omega \setminus Z$ e $|\xi_n| \leq n^{-1}$. Se $z_n \notin Z$, então definimos $\xi_n := 0$. Neste caso, temos uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

Figura 2: Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 é uma boa decomposição de Ω .

$\xi_n \rightarrow 0$, $z_n + \xi_n \in \Omega$, $z_n + \xi_n \notin Z$ e $z_n + \xi_n \rightarrow z$. Portanto, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que existe um $l \in \{1, \dots, r\}$ tal que $z_n \in \Omega_l$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, $z \in \bar{\Omega}_l$. $\square$

Exemplo 6.2.5 Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dado pela Figura 2 e sejam Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 subconjuntos em $\mathbb{R}^2$ dados pela mesma figura. Temos que Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 é uma boa decomposição de Ω . De fato, as condições (1)–(3) da Definição 6.2.3 são verificadas facilmente. No caso de (4), observemos que, existe um $\delta > 0$ tal que $p(x) > \delta$ para x próximo aos pontos a_{Ω_1} , b_{Ω_2} e b_{Ω_3} . Portanto $1/p$ é integrável em alguma vizinhança desses pontos. $\square$

Figura 3: Um exemplo mais geral de domínio bem decomposto.

Na figura 3 apresentamos mais uma representação de um domínio bem decomposto.

O próximo exemplo apresenta um caso específico de domínios bem decompostos. Os domínios em forma de C , que serão estudados na Seção 6.3, são casos particulares deste

exemplo.

Exemplo 6.2.6 Sejam $R_1, \dots, R_s$ retângulos fechados e limitados em $\mathbb{R}^2$ com interior não-vazio e com lados paralelos aos eixos coordenados. Seja Ω_R o interior de $\bigcup_{k=1}^s R_k$. Então qualquer componente conexa Ω de Ω_R é um domínio bem decomposto com fronteira Lipschitz. $\square$

Dada uma boa decomposição $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ de Ω , definimos o conjunto

$$E := \bigcup_{k=1}^r ((\{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R}) \cap \partial\Omega_k).$$

O Lema 6.1.7 nos auxiliará a demonstrar o seguinte resultado técnico:

Proposição 6.2.7 *Seja $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ uma boa decomposição de Ω . Então toda função $v \in H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ pode ser estendida de maneira única a uma função contínua $\tilde{v}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. A função $\tilde{v}$ é constante em cada componente conexa de E . Além disso, para cada componente conexa Q de E , existe uma função $v \in H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ tal que $\tilde{v}|_{Q^+} = 1$ e $\tilde{v}|_{E \setminus Q} = 0$.*

Demonstração. Seja $v \in H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ uma função arbitrária. Pela Proposição 6.1.1, para cada $k = 1, \dots, r$, existe uma função absolutamente contínua $v_k: J_{\Omega_k} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(x, y) = v_k(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega_k$. O Lema 6.1.7 implica que cada v_k pode ser estendida continuamente a uma função em $[a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}]$.

Afirmamos que, quaisquer que sejam $k, l = 1, \dots, r$ com $k \neq l$, se Ω_k e Ω_l se unem no ponto $c \in \mathbb{R}$ em Ω , então $v_k(c) = v_l(c)$. De fato, podemos assumir que

$$\bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l = \{c\} \times [\beta, \gamma],$$

onde $\beta = \beta_{\Omega_k, \Omega_l}$ e $\gamma = \gamma_{\Omega_k, \Omega_l}$ são como na Definição 6.2.1 e $c = a_{\Omega_l} = b_{\Omega_k}$. Tomemos $d \in (\beta, \gamma)$ arbitrário e $\delta = \delta(d)$ como na Definição 6.2.1. Como $v(x, y) = v_k(x)$ para $x \in I_\delta^-(c)$ e $v(x, y) = v_l(x)$ para $x \in I_\delta^+(c)$, da continuidade de v , v_k e v_l segue que $v_k(c) = v(c, d) = v_l(c)$, provando nossa afirmação.

Como $\bar{\Omega}_k \subset [a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}] \times \mathbb{R}$, segue que a função $\tilde{v}_k: \bar{\Omega}_k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{v}_k(x, y) := v_k(x)$ está bem definida e é contínua.

Vamos mostrar agora que para $k, l = 1, \dots, r$ com $k \neq l$,

$$\tilde{v}_k(c, d) = \tilde{v}_l(c, d) \text{ para } (c, d) \in \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l.$$

De fato, seja $(c, d) \in \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l$ um ponto arbitrário. Então Ω_k e Ω_l se unem no ponto c em Ω ou, caso contrário, existe um $m \in \{1, \dots, r\}$ tal que Ω_k e Ω_m se unem no ponto c em Ω e Ω_l e Ω_m se unem no ponto c em Ω . A afirmação demonstrada acima implica que, no primeiro caso, $v_k(c) = v_l(c)$ e no segundo, $v_k(c) = v_m(c) = v_l(c)$. Assim, $v_k(c) = v_l(c)$ e, portanto, $\tilde{v}_k(c, d) = v_k(c) = v_l(c) = \tilde{v}_l(c, d)$. Portanto, existe uma única função $\tilde{v}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que

estende todas as funções $\tilde{v}_i$. Além disso, $\tilde{v}$ é a única extensão contínua de v , o que prova a primeira parte de proposição.

Provemos agora que $\tilde{v}$ é constante em qualquer componente conexa Q de E . A propriedade (2) da Definição 6.2.3 implica que toda componente conexa Q de E é da forma $Q = \{c\} \times I$, onde $I = [\xi, \eta]$ é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Tal intervalo é união de um número finito de intervalos I_j , com j variando em um subconjunto de $\{1, \dots, r\}$, de forma que $c \in \{a_{\Omega_j}, b_{\Omega_j}\}$ e $\tilde{v} = \tilde{v}_j = v(c)$ em $\{c\} \times I_j$. Assim, a função contínua $\tilde{v}$ assume um número finito de valores no conjunto conexo Q . Como $\tilde{v}(Q)$ é conexo temos que $\tilde{v}$ deve ser constante em Q .

Passemos à demonstração da última parte da proposição. Seja $Q = \{c\} \times I$ uma componente conexa de E .

Afirmamos que existe um $\delta_1 > 0$ tal que o intervalo $J := [\xi - 2\delta_1, \eta + 2\delta_1]$ satisfaz $(\{c\} \times J) \cap \bar{\Omega} = Q$. De fato, suponhamos que a afirmação não seja verdadeira. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $J_n := [\xi - 2/n, \eta + 2/n]$ é tal que $(\{c\} \times J_n) \cap \bar{\Omega} \neq Q$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $(c, y_n) \in (\{c\} \times J_n) \cap \bar{\Omega}$ com $y_n \notin I$. Como $2/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $y_n \rightarrow y$ para algum $y \in I$. Pela Proposição 6.2.4, podemos assumir que existe um $l \in \{1, \dots, r\}$ tal que $(c, y_n) \in \Omega_l$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(c, y) \in \Omega_l$.

Por outro lado, a definição do conjunto E implica que existe um $k \in \{1, \dots, r\}$ tal que $(c, y) \in \partial\Omega_k \cap (\{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R})$. Segue que $(c, y) \in \bar{\Omega}_k \cap \Omega_l$. Consideremos agora dois casos:

Caso 1: Suponhamos que $k = l$. Então $c \in \{a_{\Omega_l}, b_{\Omega_l}\}$.

Caso 2: Suponhamos $k \neq l$. Então a propriedade (3) da Definição 6.2.3 nos dá novamente que $c \in \{a_{\Omega_l}, b_{\Omega_l}\}$.

Consequentemente, $y_n \in I_l$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde I_l é um intervalo tal que $\{c\} \times I_l = \partial\Omega_l \cap (\{c\} \times \mathbb{R})$. Como $y_n \in I_l$, a conexidade de Q implica que $I_l \subset I$ e, portanto, $y_n \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição.

A afirmação demonstrada implica que existe um $\delta_2 > 0$ tal que o conjunto $[c - 2\delta_2, c + 2\delta_2] \times ([\xi - 2\delta_1, \xi - \delta_1] \cup [\eta + \delta_1, \eta + 2\delta_1])$ é disjunto de Ω e $[c - 2\delta_2, c + 2\delta_2] \times [\xi - 2\delta_1, \eta + 2\delta_1]$ é disjunto de $E \setminus Q$. Sejam $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^∞ tais que ψ possui suporte em J e vale 1 em uma vizinhança de $[\xi - \delta_1, \eta + \delta_1]$ e ϕ possui suporte em $[c - 2\delta_2, c + 2\delta_2]$ e vale 1 em $[c - \delta_2, c + \delta_2]$. Definimos a função $w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ por $w(x, y) = \phi(x)\psi(y)$. Segue que w é contínua e que $v := w|_\Omega$ pertence a $H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Também,

$$\partial_y v(x, y) = \phi(x)\psi'(y) = 0, \text{ para todo } (x, y) \in \Omega.$$

Portanto, $w = \tilde{v} \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Observemos que, pela modo que w foi construída, $w = 1$ em Q e $w = 0$ em $E \setminus Q$, o que finaliza a demonstração da última parte da proposição. $\square$

O próximo resultado, que é o mais importante desse capítulo, caracteriza o operador A_0 quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio bem decomposto.

Teorema 6.2.8 *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja um domínio bem decomposto. Sejam $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções arbitrárias. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) *u pertence ao domínio de definição de A_0 e $A_0 u = v$;*
- (2) *existem funções $u_k: J_{\Omega_k} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v_k: J_{\Omega_k} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, r$, e um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^2$, tais que as seguintes propriedades são verificadas:*
 - (a) *para cada $k = 1, \dots, r$, temos que $u_k \in V_{p_k}$ e $v_k \in H_{p_k}$. A derivada no sentido das distribuições $(p_k u'_k)'$ de $p_k u'_k$ pertence a $L^1_{\text{loc}}(J_{\Omega_k})$ e $(p_k u'_k)' = -p_k v_k$. Além disso, $u(x, y) = u_k(x)$ e $v(x, y) = v_k(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega_k \setminus S$;*
 - (b) *os limites $u_k(c) := \lim_{x \rightarrow c} u_k(x)$ e $u_l(c) := \lim_{x \rightarrow c} u_l(x)$ existem e são iguais sempre que $k, l \in \{1, \dots, r\}$ com $k \neq l$, e Ω_k e Ω_l se unem no ponto c em Ω ;*
 - (c) *sempre que Q for uma componente conexa de E , a qual é necessariamente da forma $Q = \{c\} \times I$, onde $c \in \bigcup_{k=1}^r \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\}$ e I é um intervalo, então*

$$\sum_{k \in \sigma_+} (p_k u'_k)(c) = \sum_{k \in \sigma_-} (p_k u'_k)(c),$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \sigma_+(Q) := \{k \mid \bar{\Omega}_k \cap (\{b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R}) \subset Q, b_{\Omega_k} = c\}, \\ \sigma_- &= \sigma_-(Q) := \{k \mid \bar{\Omega}_k \cap (\{a_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R}) \subset Q, a_{\Omega_k} = c\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponhamos que $u \in D(A_0)$ e que $A_0 u = v$. Pela Proposição 6.1.1, podemos assumir que u é uma função contínua. Fixemos $k = 1, \dots, r$ arbitrariamente. Notemos que a mesma proposição implica que existem funções absolutamente contínuas $u_k: J_{\Omega_k} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v_k: J_{\Omega_k} \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto de medida nula $S_k \subset \mathbb{R}^2$ tais que $u(x, y) = u_k(x)$ e $v(x, y) = v_k(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega_k \setminus S_k$. Além disso, podemos assumir que $u'_k \in L^1_{\text{loc}}(J_{\Omega_k})$, onde a derivada é tomada no sentido das distribuições, e ainda $\partial_x u(x, y) = u'_k(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega_k \setminus S_k$. A Proposição 6.1.1 também implica que $p_k^{1/2} u_k$, $p_k^{1/2} v_k$ e $p_k^{1/2} u'_k$ pertencem a $L^2(J_{\Omega_k})$.

Mostremos que $(p_k u'_k)' = -p_k v_k$ no sentido das distribuições. Para isso, tomemos $\phi \in \mathcal{D}(J_{\Omega_k})$ arbitrária e definamos $L := \text{supp } \phi \subset J_{\Omega_k}$. Queremos mostrar que

$$\int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' \phi dx = - \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k \phi dx.$$

Definimos uma função $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$w(x, y) := \begin{cases} \phi(x), & \text{se } (x, y) \in \Omega_k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que $w \in H_s^1(\Omega)$. De fato, observemos que w é de classe C^∞ em cada Ω_l , $l = 1, \dots, r$. Como tais conjuntos são disjuntos, w é de classe C^∞ em $\bigcup_{l=1}^r \Omega_l$. Seja $(x, y) \in \Omega \setminus (\bigcup_{l=1}^r \Omega_l)$ arbitrário. Logo, $(x, y) \in Z$ e, em particular, $x' \notin L$, para todo (x', y') em uma vizinhança de (x, y) . Agora, para qualquer que seja (x', y') dessa forma, segue que $w(x', y') = 0$, isto é, w é nula em uma vizinhança de (x, y) e portanto de classe C^∞ nessa vizinhança. Com isso, concluímos que $w \in C^\infty(\Omega)$, e assim, $w \in H_s^1(\Omega)$. Segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx dy &= \int_{\Omega_k} \nabla u \cdot \nabla w dx dy = \int_{J_{\Omega_k}} p_k \nabla u_k \cdot \nabla w dx \\ &= \int_{J_{\Omega_k}} p_k u'_k \phi' dx = - \int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' \phi dx. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} v w dx dy = \int_{\Omega_k} v w dx dy = \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k \phi dx.$$

Por outro lado, como $u \in D(A_0)$ e $A_0 u = v$, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega dx dy = \int_{\Omega} v \omega dx dy, \text{ qualquer que seja } \omega \in H_s^1(\Omega),$$

Em particular,

$$- \int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' \phi dx = \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k \phi dx,$$

Isso conclui a demonstração da parte (a).

Pela prova da Proposição 6.2.7 vemos que, para cada $k = 1, \dots, r$, e para $c \in \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\}$, o limite $u_k(c) := \lim_{x \rightarrow c} u_k(x)$ existe. Se $k \neq l$ e Ω_k se une a Ω_l em algum ponto $c \in \mathbb{R}$ em Ω , então $c = a_{\Omega_l} = b_{\Omega_k}$. Seja $d \in (\beta, \gamma)$ arbitrário e $\delta = \delta(\vec{a})$ como na Definição 6.2.1. A continuidade de u implica que

$$\begin{aligned} u_k(c) &= \lim_{x \rightarrow b_{\Omega_k}^-} u_k(x) = \lim_{x \rightarrow b_{\Omega_k}^-} u(x, d) \\ &= u(c, d) = \lim_{x \rightarrow a_{\Omega_l}^+} u(x, d) = \lim_{x \rightarrow a_{\Omega_l}^+} u_l(x) = u_l(c), \end{aligned}$$

provando assim a parte (b).

Seja agora $w \in H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ arbitrária e w_k , $k = 1, \dots, r$, e $\tilde{w}$ como na Proposição 6.2.7. Pela parte (a) já provada, para cada $k = 1, \dots, r$ e $c \in \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\}$, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} (p_k u'_k)(x) =: (p_k u'_k)(c).$$

Além disso, a prova da Proposição 6.2.7 implica que existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} w_k(x) =: w_k(c).$$

Assim, para cada $k = 1 \dots, r$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{J_{\Omega_k}} p_k u'_k w'_k dx &= (p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) - \int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' w_k dx \\ &= (p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) + \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k w_k dx. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} p_k u'_k w'_k dx = \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) + \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k w_k dx \right)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} u' w' dx dy &= \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} v w dx dy. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx dy = \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) + \int_{J_{\Omega}} v w dx dy.$$

Como $A_0 u = v$, temos que

$$\sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) = 0. \quad (6.7)$$

Pela prova da Proposição 6.2.7, vemos que, para cada $k = 1, \dots, r$, $w_k(a_{\Omega_k}) = \tilde{w}(a_{\Omega_k}, y_k^-)$ e $w_k(b_{\Omega_k}) = \tilde{w}(b_{\Omega_k}, y_k^+)$, onde $\tilde{w}$ é a extensão contínua de w a Ω e y_k^- e y_k^+ são números arbitrários tais que $(a_{\Omega_k}, y_k^-) \in \bar{\Omega}_k \cap (\{a_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R})$ e $(b_{\Omega_k}, y_k^+) \in \bar{\Omega}_k \cap (\{b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R})$.

Seja Q uma componente conexa de E e escolhamos w tal que $\tilde{w}|_Q = 1$ e $\tilde{w}|_{E \setminus Q} = 0$. Tal escolha é possível pela Proposição 6.2.7. Para essa particular escolha de w obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) &= \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) \tilde{w}(b_{\Omega_k}, y_k^+) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) \tilde{w}(a_{\Omega_k}, y_k^-) \right) \\ &= \sum_{k \in \sigma_+(Q)} (p_k u'_k)(c) - \sum_{k \in \sigma_-(Q)} (p_k u'_k)(c). \end{aligned}$$

Segue da igualdade (6.7) que

$$\sum_{k \in \sigma_+(Q)} (p_k u'_k)(c) = \sum_{k \in \sigma_-(Q)} (p_k u'_k)(c),$$

provando (c).

Suponhamos que as hipóteses de (2) estejam satisfeitas.

Definimos $u(x, y) = u_k(x)$, $w(x, y) = u'_k(x)$ e $v(x, y) = v_k(x)$ para $k = 1, \dots, r$, e $(x, y) \in \Omega_k$. Como Z tem medida nula em $\mathbb{R}^2$, temos que u , v e w estão bem-definidas quase sempre e pela parte (a),

$$\int_{\Omega} u^2 dx dy = \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} p_k u_k^2 dx,$$

isto é, $u \in L^2(\Omega)$. De modo análogo mostramos que $v, w \in L^2(\Omega)$.

Vamos mostrar que $u \in H_s^1(\Omega)$ com $\partial_x u = w$. Para isso, mostremos que, para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um $\xi > 0$ tal que $I_{\xi}(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega$ e que, para quaisquer $\phi \in \mathcal{D}(I_{\xi}(x_0))$ e $\psi \in \mathcal{D}(I_{\xi}(y_0))$, temos que

$$\int_{\Omega} u \phi' \psi dx dy = - \int_{\Omega} w \phi \psi dx dy, \quad (6.8)$$

e

$$\int_{\Omega} u \phi \psi' dx dy = 0. \quad (6.9)$$

Consideremos dois casos:

Caso 1: Suponhamos que $(x_0, y_0) \in \bigcup_{k=1}^r \Omega_k$. Nesse caso $\partial_x u(x_0, y_0) = w(x_0, y_0)$ e $\partial_y u(x_0, y_0) = 0$. Portanto, as igualdades (6.8) e (6.9) estão verificadas.

Caso 2: Suponhamos que $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^r \Omega_k)$ seja arbitrário. Segue que $(x_0, y_0) \in Z$. Portanto, existe um $\xi > 0$ tal que $I_{\xi}(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega$ e $(I_{\xi}(x_0) \times I_{\xi}(y_0)) \cap Z \subset \{x_0\} \times \mathbb{R}$. Com isso, $I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \bigcup_{k=1}^r \Omega_k$ e $I_{\xi}^+(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \bigcup_{k=1}^r \Omega_k$. Como $I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0)$ é conexo, existe um $k \in \{1, \dots, r\}$ tal que $I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega_k$. Similarmente, existe um $l \in \{1, \dots, r\}$ tal que $I_{\xi}^+(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega_l$.

Afirmamos que $k \neq l$. De fato, caso contrário, $(x_0, y_0) \in \partial \Omega_k \cap \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\} \times \mathbb{R}$ e então $x_0 \in \{a_{\Omega_k}, b_{\Omega_k}\}$. Entretanto, se $x_0 = a_{\Omega_k}$, temos que $I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0)$ é disjunto de $\widehat{\Omega}_k$ e se $x_0 = b_{\Omega_k}$, segue que $I_{\xi}^+(x_0) \times I_{\xi}(y_0)$ é disjunto de Ω_k . Em ambos os casos temos uma contradição, já que $I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega_k$ e $I_{\xi}^+(x_0) \times I_{\xi}(y_0) \subset \Omega_l$.

Assim, Ω_k se une a $\widehat{\Omega}_l$ no ponto x_0 em Ω e a parte (b) de (2) implica que $u_k(x_0) = u_l(x_0)$.

Sejam $\phi \in \mathcal{D}(I_{\xi}(x_0))$ e $\psi \in \mathcal{D}(I_{\xi}(y_0))$ funções arbitrárias. Temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \phi' \psi dx dy &= \int_{I_{\xi}^-(x_0) \times I_{\xi}(y_0)} u \phi' \psi dx dy + \int_{I_{\xi}^+(x_0) \times I_{\xi}(y_0)} u \phi' \psi dx dy \\ &= \int_{I_{\xi}(y_0)} \psi \left(\int_{I_{\xi}^-(x_0)} u \phi' dx \right) dy + \int_{I_{\xi}(y_0)} \psi \left(\int_{I_{\xi}^+(x_0)} u \phi' dx \right) dy \\ &= \left(\int_{I_{\xi}^-(x_0)} u_k \phi' dx + \int_{I_{\xi}^+(x_0)} u_l \phi' dx \right) \int_{I_{\xi}(y_0)} \psi dy. \end{aligned}$$

Integrando por partes a última expressão acima e usando o fato de $\phi \in \mathcal{D}(I_\xi(x_0))$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \phi' \psi dx dy &= - \left(\int_{I_\xi^-(x_0)} u'_k \phi dx + \int_{I_\xi^+(x_0)} u'_l \phi dx \right) \int_{I_\xi(y_0)} \psi dy \\ &= \left(- \int_{I_\xi(x_0)} w \phi dx \right) \int_{I_\xi(y_0)} \psi dy = - \int_{\Omega} w \phi \psi dx dy. \end{aligned}$$

Isso mostra a igualdade (6.8). Como $\psi \in \mathcal{D}(I_\xi(y_0))$, temos que $\int_{I_\xi(y_0)} \psi' dy = 0$. Portanto,

$$\int_{\Omega} u \phi \psi' dx dy = \int_{I_\xi^-(x_0) \times I_\xi(y_0)} u \phi \psi' dx dy + \int_{I_\xi^+(x_0) \times I_\xi(y_0)} u \phi \psi' dx dy = 0.$$

O que conclui a demonstração de (6.9). Logo, $u \in H_s^1(\Omega)$.

Afirmamos que $v \in L_s^2(\Omega)$. Para cada $k = 1, \dots, r$, o Lema 6.1.3 implica que existe uma sequência $(\phi_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(J_{\Omega_k})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_{\Omega_k}} p_k (v_k - \phi_n^k)^2 dx = 0.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos a função $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por $\xi_n(x, y) := \phi_n^k(x)$, $(x, y) \in \Omega_k$ e $k = 1, \dots, r$. O mesmo raciocínio que utilizamos para demonstrar que $u \in H_s^1(\Omega)$ permite concluir que $\xi_n \in H_s^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\int_{\Omega} |v - \xi_n|^2 dx dy = \sum_{k=1}^r \int_{\Omega_k} |v - \xi_n|^2 dx dy = \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} p_k (v_k - \phi_n^k)^2 dx.$$

Portanto, $\xi_n \rightarrow v$ em $L^2(\Omega)$. Assim, $v \in L_s^2(\Omega)$.

Para concluirmos a demonstração do teorema devemos mostrar que $u \in D(A_0)$ e que $A_0 u = v$.

Seja $w \in H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ arbitrário. Consideremos w_k , $k = 1, \dots, r$, e $\tilde{w}$ como na Proposição 6.2.7. Com a mesma notação da primeira parte da demonstração deste teorema, temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) \tilde{w}(b_{\Omega_k}, y_k^+) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) \tilde{w}(a_{\Omega_k}, y_k^-) \right) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{P}} \left(\sum_{k \in \sigma_+(Q)} (p_k u'_k)(c_Q) \tilde{w}(c_Q, y_k^+) - \sum_{k \in \sigma_-(Q)} (p_k u'_k)(c_Q) \tilde{w}(c_Q, y_k^-) \right), \quad (6.10) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto finito de componentes conexas de E e, para cada $Q \in \mathcal{P}$, c_Q é o único número tal que $Q \subset \{c_Q\} \times \mathbb{R}$. Como $\tilde{w}$ é constante em cada $Q \in \mathcal{P}$, segue de (c)

e de (6.10) que

$$\sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) \right) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx \, dy &= \sum_{k=1}^r \int_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \nabla w_k \, dx \, dy = \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} p_k u'_k w'_k \, dx \\ &= \sum_{k=1}^r \left((p_k u'_k)(b_{\Omega_k}) w_k(b_{\Omega_k}) - (p_k u'_k)(a_{\Omega_k}) w_k(a_{\Omega_k}) - \int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' w_k \, dx \right) \\ &= - \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} (p_k u'_k)' w_k \, dx = \sum_{k=1}^r \int_{J_{\Omega_k}} p_k v_k w_k \, dx = \int_{\Omega} v w \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Como $H_s^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ é um conjunto denso em $H_s^1(\Omega)$, segue que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \int_{\Omega} v w \, dx \, dy \text{ para todo } w \in H_s^1(\Omega).$$

Logo, (1) está demonstrado. $\square$

Seja Ω um domínio bem decomposto e $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ uma boa decomposição deste domínio. Suponhamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função satisfazendo as hipóteses **(HC1)**. Com isso, temos que a equação abstrata

$$(RD_0) \quad \dot{u} + A_0 u = \hat{f}(u)$$

está bem definida. Então, o Teorema 6.2.8 sugere que esta equação é equivalente ao seguinte sistema unidimensional de equações de reação-difusão:

$$u'_k = (1/p_k)(p_k u'_k)' + \hat{f}(u_k) \text{ em } J_{\Omega_k}, \text{ para } k = 1, \dots, r,$$

com as condições de compatibilidade

$$u_k(c) = u_l(c)$$

sempre que $b_{\Omega_k} = a_{\Omega_l} = c$ e Ω_k e Ω_l se unem no ponto c . Além disso, sempre que Q é uma componente conexa de E , temos as seguintes condições, conhecidas como *condições de balanço do tipo Kirchhoff*:

$$\sum_{k \in \sigma_+(Q)} (p_k u'_k)(c) = \sum_{k \in \sigma_-(Q)} (p_k u'_k)(c).$$

Observemos que este sistema pode ser interpretado como uma equação de reação-difusão em um grafo. As arestas desse grafo são os intervalos J_{Ω_k} , para $k = 1, \dots, r$ e os vértices são os extremos destes intervalos. Além disso, cada intervalo deverá ser repetido no grafo o número de vezes que ele aparece na sequência $(J_{\Omega_k})_{k=1}^r$. Os vértices por sua vez serão repetidos o número de vezes que ele ocorre como projeção de uma componente conexa de E . A Figura 4 apresenta o que seria o grafo no caso do domínio bem decomposto da Figura 3.

Figura 4: o grafo associado ao domínio Ω da Figura 3.

Exemplo 6.2.9 (Conjuntos Ordenados) Vamos analisar um caso particular dos domínios considerados em [14]. Seja $J = (a, b)$ com $-\infty < a < b < \infty$. Consideremos uma função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in C^1(a, b) \cap C^0([a, b])$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Definimos:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in J \text{ e } 0 < y < g(x)\},$$

e para cada $\varepsilon > 0$ definimos:

$$\Omega_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in J \text{ e } 0 < y < \varepsilon g(x)\}.$$

Observemos que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que Ω_ε colapsa no intervalo J .

Consideremos a equação de reação-difusão em Ω_ε

$$(E_\varepsilon) \quad \begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u), & t > 0, (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\nu_\varepsilon} u &= 0, & t > 0, (x, y) \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Neste caso, para cada $x \in [a, b]$, $g(x)$ é a medida da seção vertical $U_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Omega\}$. Com isso, aplicando o Teorema 6.2.8, temos que as soluções de (E_ε) devem ser comparadas com as soluções da seguinte equação em J :

$$u_t = \frac{1}{g}(gu')' + \hat{f}(u),$$

e com as condições de fronteira

$$u'(a) = u'(b) = 0,$$

que é justamente o que foi apresentado em [14]. Observamos que, pela teoria de Sturm-Liouville, os autovalores da equação limite acima têm multiplicidade simples. $\square$

O Teorema 6.2.8 nos possibilita analisar com mais detalhes os espaços $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$.

No restante desta seção consideraremos um domínio bem decomposto Ω e $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ uma boa decomposição deste domínio. Começamos observando que:

Lema 6.2.10 *Para cada $k = 1, \dots, r$, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (1) se $u \in L_s^2(\Omega)$, então $u|_{\Omega_k} \in L_s^2(\Omega_k)$;

(2) se $u \in H_s^1(\Omega)$, então $u|_{\Omega_k} \in H_s^1(\Omega_k)$.

Demonstração. É claro que se $u \in H_s^1(\Omega)$, então $u|_{\Omega_k} \in H_s^1(\Omega_k)$. Suponhamos então que $u \in L_s^2(\Omega)$. Então existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $H_s^1(\Omega_k)$ tal que u_n converge para u na norma de $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Neste caso, para cada $k = 1, \dots, r$, $u_n|_{\Omega_k}$ converge para $u|_{\Omega_k}$ na norma de $L^2(\Omega_k)$ quando $n \rightarrow \infty$, mostrando que $u|_{\Omega_k} \in L_s^2(\Omega_k)$. $\square$

Sendo $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ uma boa decomposição de Ω , temos que $1/p_k \in L^1(J_{\Omega_k})$ para $k = 1, \dots, r$. Assim, o Lema 6.1.2 e a Proposição 6.1.1 implicam que os espaços H_{p_k} e V_{p_k} associados às funções p_k estão bem definidos para cada $k = 1, \dots, r$. Já vimos que estes espaços são espaços de Hilbert com produtos internos dados respectivamente por:

$$\langle u, v \rangle_{H_{p_k}} := \int_{J_{\Omega_k}} p_k(x) u(x) v(x) dx, \text{ para } u, v \in H_{p_k},$$

e

$$\langle u, v \rangle_{V_{p_k}} := \int_{J_{\Omega_k}} p_k(x) u'(x) v'(x) dx + \int_{J_{\Omega_k}} p_k(x) u(x) v(x) dx, \text{ para } u, v \in V_{p_k}.$$

Além disso, a inclusão $V_{p_k} \hookrightarrow H_{p_k}$ é densa e compacta para cada $k = 1, \dots, r$.

Definimos agora os espaços

$$H_{\oplus} := H_{p_1} \oplus \dots \oplus H_{p_r} := \{[u] = (u_1, \dots, u_r) \mid u_k \in H_{p_k}, k = 1, \dots, r\}$$

e

$$V_{\oplus} := V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_r} := \{[u] = (u_1, \dots, u_r) \mid u_k \in V_{p_k}, k = 1, \dots, r\}.$$

O Lema 6.2.10 implica que estes espaços estão bem-definidos.

Definimos em $H_{\oplus}$ e $V_{\oplus}$ os produtos

$$\langle [u], [v] \rangle_{H_{\oplus}} := \sum_{k=1}^r \langle u_k, v_k \rangle_{H_{p_k}}, \text{ para } u, v \in H_{\oplus},$$

e

$$\langle [u], [v] \rangle_{V_{\oplus}} := \sum_{k=1}^r \langle u_k, v_k \rangle_{V_{p_k}}, \text{ para } u, v \in V_{\oplus}.$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 6.2.11 *Os produtos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\oplus}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_{\oplus}}$ definem uma estrutura de espaço de Hilbert em $H_{\oplus}$ e $V_{\oplus}$ respectivamente. Além disso, a inclusão $V_{\oplus} \hookrightarrow H_{\oplus}$ é densa e compacta.*

Demonstração. É claro que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\oplus}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_{\oplus}}$ definem uma estrutura de espaço de Hilbert em $H_{\oplus}$ e $V_{\oplus}$ respectivamente. Para provarmos que $V_{\oplus} \hookrightarrow H_{\oplus}$ com imersão densa e compacta, basta lembrarmos que, pela Proposição 6.1.8, para cada $k = 1, \dots, r$, a imersão $V_{p_k} \hookrightarrow H_{p_k}$ é densa e compacta. $\square$

Lembremos que, para cada $k = 1, \dots, r$, a aplicação $\iota_k: L_s^2(\Omega_k) \rightarrow H_{p_k}$ dada por $\iota_k(u) = v$, onde v é a função dada pela Proposição 6.1.1, é uma isometria de $L_s^2(\Omega_k)$ sobre H_{p_k} . Além disso, ι_k restrita a $H_s^1(\Omega_k)$ é uma isometria sobre V_{p_k} .

Definimos a aplicação $\iota_\oplus: L_s^2(\Omega) \rightarrow H_\oplus$ por $\iota_\oplus(u) = (\iota_1(u|_{\Omega_1}), \dots, \iota_r(u|_{\Omega_r}))$. Segue do Lema 6.2.10 que $\iota_\oplus$ está bem definida.

Lema 6.2.12 *A aplicação $\iota_\oplus: L_s^2(\Omega) \rightarrow H_\oplus$ é uma isometria de $L_s^2(\Omega)$ em $H_\oplus$. Além disso, $\iota_\oplus$ restrita a $H_s^1(\Omega)$ é uma isometria em $V_\oplus$.*

Demonstração. Para mostrar que $\iota_\oplus: L_s^2(\Omega) \rightarrow H_\oplus$ é uma isometria de $L_s^2(\Omega)$ em $H_\oplus$, basta usar que $\iota_k: L_s^2(\Omega_k) \rightarrow H_{p_k}$ é uma isometria e proceder como na demonstração do Lema 6.1.6. Analogamente demonstramos que $\iota_\oplus$ restrita a $H_s^1(\Omega)$ é uma isometria em $V_\oplus$. $\square$

Definimos agora

$$\tilde{V}_\oplus := \{[u] \in V_\oplus \mid u_k(b_{\Omega_k}) = u_l(a_{\Omega_l}) \text{ sempre que } b_{\Omega_k} = a_{\Omega_l} = c \text{ e } \Omega_k \text{ e } \Omega_l \text{ se unem em } c\}.$$

O seguinte resultado está implicitamente contido na demonstração do Teorema 6.2.8. Ele apresenta uma caracterização dos espaços $H_s^1(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$.

Proposição 6.2.13 *As seguintes propriedades são válidas:*

- (1) $\iota_\oplus(L_s^2(\Omega)) = H_\oplus$;
- (2) $\iota_\oplus(H_s^1(\Omega)) = \tilde{V}_\oplus$.

Demonstração. Mostremos (2). Seja $u \in H_s^1(\Omega)$. Então $\iota_\oplus(u) \in V_\oplus$. Suponhamos que existam $k, l \in \{1, \dots, r\}$ tais que $b_{\Omega_k} = a_{\Omega_l} = c$ e Ω_k e Ω_l se unem no ponto c . Precisamos mostrar que $\iota_k(u|_{\Omega_k})(c) = \iota_l(u|_{\Omega_l})(c)$. Para isso definimos $v_k := \iota_k(u|_{\Omega_k})$ e $v_l := \iota_l(u|_{\Omega_l})$. Então, pela demonstração da Proposição 6.2.7 temos que $v_k(c) = v_l(c)$. Logo, $\iota_\oplus(u) \in \tilde{V}_\oplus$.

Por outro lado, seja $[u] \in \tilde{V}_\oplus$. Mostremos que existe um $v \in H_s^1(\Omega)$ tal que $\iota_\oplus(v) = [u]$. Definimos $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x, y) := \begin{cases} u_k(x), & \text{para } (x, y) \in \Omega_k, k = 1, \dots, r, \\ 0, & \text{para } (x, y) \in \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^r \Omega_k). \end{cases}$$

Como na prova do Teorema 6.2.8, temos que $v \in H_s^1(\Omega)$. Além disso, $v_x(x, y) = u'_k(x)$ para quase todo $(x, y) \in \Omega_k$ com $k = 1, \dots, r$ e $v_y(x, y) = 0$ para quase todo $(x, y) \in \Omega$. Pela construção de v temos que $\iota_\oplus(v) = [u]$. Isso conclui a demonstração de (2).

Vamos mostrar (1). Temos que $\iota_\oplus(L_s^2(\Omega)) \subset H_\oplus$. Seja $[u] \in H_\oplus$. Precisamos mostrar que existe um $v \in L_s^2(\Omega)$ tal que $\iota_\oplus(v) = [u]$. Definimos $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$v(x, y) := \begin{cases} u_k(x), & \text{para } (x, y) \in \Omega_k, k = 1, \dots, r, \\ 0, & \text{para } (x, y) \in \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^r \Omega_k). \end{cases}$$

Como $u_k \in H_{p_k}$ para cada $k = 1, \dots$ segue que $v \in L^2(\Omega)$. Afirmamos que $v \in L_s^2(\Omega)$. De fato, para cada $k = 1, \dots, r$, pelo Lema 6.1.3, existe uma sequência $(\phi_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(J_{\Omega_k})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_{\Omega_k}} p_k(u_k - \phi_n^k)^2 dx = 0.$$

Como na demonstração do Teorema 6.2.8, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $\psi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x, y) := \begin{cases} \phi_n^k(x), & \text{para } (x, y) \in \Omega_k, k = 1, \dots, r, \\ 0, & \text{para } (x, y) \in \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^r \Omega_k). \end{cases}$$

Segue que $\psi_n \in H_s^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para v na norma de $L^2(\Omega)$. Portanto, $v \in L_s^2(\Omega)$. Além disso, do modo que v foi definida temos que $\iota_{\mathbb{B}}(v) = [u]$. Isso conclui a demonstração da proposição. $\square$

6.3 Domínios em forma de C

Nesta seção apresentaremos uma classe bem simples de domínios, os quais satisfazem todas as propriedades que necessitamos para aplicar os resultados da Seção 6.2. Ilustramos como tais resultados permitem uma análise dos autovalores do operador A_0 .

Sejam a_i e b_i , $i = 1, 2, 3$, números reais com $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ e $0 < b_1 < b_2 < b_3$. O domínio em forma de C com parâmetros a_i e b_i , $i = 1, 2, 3$, é definido como

$$\Omega := ((a_1, a_2) \times (0, b_1)) \cup ((a_1, 0) \times (0, b_3)) \cup ((a_1, a_3) \times (b_2, b_3)).$$

Na Figura 5 temos uma representação geométrica de tal domínio. Definindo $\Omega_1 := (a_1, 0) \times (0, b_3)$, $\Omega_2 := (0, a_2) \times (0, b_1)$, $\Omega_3 := (0, a_3) \times (b_2, b_3)$ e $Z := \{0\} \times \mathbb{R}$, obtemos uma boa decomposição de Ω . Observemos neste caso que $J_{\Omega_1} = (a_1, 0)$, $J_{\Omega_2} = (0, a_2)$ e $J_{\Omega_3} = (0, a_3)$. Além disso, $p_1(x) = b_3$ para todo $x \in J_{\Omega_1}$, $p_2(x) = b_1$ para todo $x \in J_{\Omega_2}$ e $p_3(x) = b_3 - b_2$ para todo $x \in J_{\Omega_3}$. O seguinte resultado é uma consequência simples do Teorema 6.2.8.

Proposição 6.3.1 *Um par (λ, u) é um par autovalor-autovetor de A_0 se, e somente se, u é não-nulo e existirem funções $u_l: J_{\Omega_l} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3$, números reais α e β_l , $l = 1, 2, 3$, e um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^2$ tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (1) $u(x, y) = u_l(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega_l \setminus S$ e $l = 1, 2, 3$;
- (2) $u_l = \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \beta_l \sin \sqrt{\lambda} x$, para todo $x \in J_{\Omega_l}$ e $l = 1, 2, 3$;
- (3) $b_3 \sqrt{\lambda} \beta_1 = b_1 \sqrt{\lambda} \beta_2 + (b_3 - b_2) \sqrt{\lambda} \beta_3$;
- (4) $-\alpha \sqrt{\lambda} \sin a_l \sqrt{\lambda} + \beta_l \sqrt{\lambda} \cos a_l \sqrt{\lambda} = 0$ para $l = 1, 2, 3$.

Figura 5: Um domínio em forma de C.

Demonstração. O Teorema 6.2.8 implica que $A_0 u = \lambda u$ se, e somente se, u é não-nulo e existem funções absolutamente contínuas $u_l: J_{\Omega_l} \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3$, e um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^2$ tal que, sempre que $l = 1, 2, 3$, então $u(x, y) = u_l(x)$ para $(x, y) \in \Omega_l \setminus S$. Como as funções p_l são todas constantes para $l = 1, 2, 3$, temos que $u_l, u'_l \in L^2(J_{\Omega_l})$ para $l = 1, 2, 3$. Também, para $l = 1, 2, 3$, $u''_l = \lambda u_l$ no sentido das distribuições. Isto nos fornece

$$u_l(x) = \alpha_l \cos \sqrt{\lambda} x + \beta_l \sin \sqrt{\lambda} x, \quad l = 1, 2, 3 \text{ e } x \in J_{\Omega_l},$$

onde α_l e β_l são números reais arbitrários. Como $\hat{\Omega}_1$ e Ω_2 se unem no ponto 0 bem como Ω_1 e $\hat{\Omega}_3$, o item (b) do Teorema 6.2.8 implica que

$$u_2(0) = \lim_{x \rightarrow 0} u_2(x) = u_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} u_1(x) = u_3(0) = \lim_{x \rightarrow 0} u_3(x).$$

Logo,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 =: \alpha,$$

ou seja,

$$u_l(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \beta_l \sin \sqrt{\lambda} x, \quad l = 1, 2, 3 \text{ e } x \in J_{\Omega_l}.$$

Derivando esta expressão obtemos

$$u'_l(x) = -\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \beta_l \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x, \quad l = 1, 2, 3.$$

Mas as condições de balanço do item (c) do Teorema 6.2.8 implicam que

$$u'_1(a_1) = u'_2(a_2) = u'_3(a_3) = 0 \tag{6.11}$$

e

$$b_1 u'_2(0) + (b_3 - b_2) u'_3(0) = b_3 u'_1(0). \tag{6.12}$$

A propriedade (3) segue de (6.12) e as igualdades em (6.11) implicam que (4) está verificada. $\square$

Proposição 6.3.2 *Seja λ um número real.*

- (1) *Se $\lambda = 0$, então λ é um autovalor simples de A_0 ;*
- (2) *se $\lambda > 0$ é um autovalor de A_0 com $\sin a_l \sqrt{\lambda} = 0$ para cada $l = 1, 2, 3$, então λ é um autovalor simples de A_0 ;*
- (3) *se $\lambda > 0$ é um autovalor de A_0 com $\sin a_i \sqrt{\lambda} \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$, então λ possui multiplicidade no máximo 2.*

Demonstração. Observemos que a Proposição 6.3.1 implica que $\lambda = 0$ é um autovalor de A_0 , e além disso, para tal autovalor.

$$u_l(x) = \alpha, \quad l = 1, 2, 3,$$

isto é, $\lambda = 0$ é um autovalor simples de A_0 .

Suponhamos agora que $\lambda > 0$ é um autovalor arbitrário de A_0 . Se $\sin a_l \sqrt{\lambda} = 0$ para cada $l = 1, 2, 3$, então a propriedade (4) da Proposição 6.3.1 implica que $\beta_l = 0$, $l = 1, 2, 3$, e a propriedade (2) nos fornece

$$u_l(x) = \alpha \cos \sqrt{\lambda} x, \quad l = 1, 2, 3 \text{ para } x \in J_{\Omega_l},$$

isto é, λ é um autovalor simples de A_0 . Se $\sin a_i \sqrt{\lambda} \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$, então $\alpha = \beta_i \cot a_i \sqrt{\lambda}$ e como, pela propriedade (3), $b_3 \beta_1 = b_1 \beta_2 + (b_3 - b_2) \beta_3$, segue da propriedade (2) que λ possui multiplicidade no máximo 2. $\square$

A Proposição 6.3.2 implica que A_0 não possui autovalores com multiplicidade maior que 2.

O próximo resultado apresenta um critério de monotonicidade estrita para domínios em forma de C . Notemos que não podemos usar o Teorema 3.2.2 na Seção 3.2.

Proposição 6.3.3 *Sejam $\lambda > 0$ um autovalor de A_0 e $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, tais que $\lambda = \lambda_{0,j} < \lambda_{0,j+1}$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (1) *$\sin a_l \sqrt{\lambda} = 0$ para $l = 1, 2, 3$;*
- (2) *existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\lambda_{\varepsilon,j} = \lambda$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.*

Demonstração. Suponhamos que a afirmativa (1) seja satisfeita. Definimos $u(x, y) = u(x) = \cos \sqrt{\lambda} x$ para $(x, y) \in \Omega$. É claro que u é não-nulo. Fazendo $\alpha = 1$ e $\beta_l = 0$ para $l = 1, 2, 3$, segue da Proposição 6.3.1 que o par (λ, u) é um par autovalor-autovetor do operador A_0 . Em particular, $u \in H_s^1(\Omega)$. Assim, utilizando o Teorema 1.4.2 de [23],

temos que, para toda função $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u'_l(x) \partial_x v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma - \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u''_l(x) v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma + \lambda \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u(x) v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma + \lambda \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

onde σ é a medida de Hausdorff unidimensional e $\nu_l(x, y)$ é a componente x da normal exterior a $\partial\Omega_l$ em $(x, y) \in \partial\Omega_l$.

Agora, notemos que $\nu_l(x, y) = 0$ na componente horizontal de $\partial\Omega_l$, enquanto que, por hipótese, $u'_l(a_l) = \sin a_l \sqrt{\lambda} = 0$ para (x, y) na componente vertical de $\partial\Omega_l$. Com isso,

$$\sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma = 0,$$

e portanto,

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \text{ para qualquer } v \in H^1(\Omega).$$

Uma aplicação do Teorema 3.2.1 implica que a condição (2) está satisfeita.

Assumimos que a propriedade (2) esteja verificada. Segue do Teorema 3.2.1 que existe um $u \in H_s^1(\Omega)$ não nulo tal que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega). \quad (6.13)$$

Em particular, (λ, u) é um par autovalor-autovetor de A_0 . Pela Proposição 6.3.1, existem funções $u_l: J_{\Omega_l} \rightarrow \mathbb{R}$, números reais α e β_l , $l = 1, 2, 3$, e um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^2$ tais que as condições (1)–(4) daquela proposição são verificadas. Portanto, para qualquer que seja $v \in H^1(\Omega)$ temos por (6.13) que

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u'_l(x) \partial_x v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma - \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u''_l(x) v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma + \lambda \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega_l} u(x) v(x, y) dx dy \\ &= \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'_l(x) v(x, y) \nu_l(x, y) d\sigma + \lambda \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_l} u'(x)v(x,y)\nu_l(x,y)d\sigma = 0, \text{ qualquer que seja } v \in H^1(\Omega). \quad (6.14)$$

Tomemos em (6.14) uma função v que é a restrição a Ω de uma função teste não-negativa em $\mathbb{R}^2$, cujo suporte está contido na faixa horizontal $\mathbb{R} \times (b_1, b_2)$ e que é não-nula em $\{0\} \times (b_1, b_2)$. Segue que

$$\int_{b_1}^{b_2} u'_1(0)v(0,y)\nu_1(0,y)d\sigma = 0,$$

ou seja,

$$u'_1(0) \int_{b_1}^{b_2} v(0,y)\nu_1(0,y)d\sigma = 0.$$

Portanto, $u'_1(0) = 0$. Como $u'(a_1) = 0$ e $\lambda > 0$, temos que $\beta_1 = 0$. Similarmente mostramos que $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Com isso $\alpha \neq 0$. A propriedade (4) da Proposição 6.3.1 implica que $\sin a_l \sqrt{\lambda} = 0$, $l = 1, 2, 3$. $\square$

No próximo resultado escolhemos os parâmetros a_l e b_l , $l = 1, 2, 3$ de modo conveniente e, utilizando as Proposições 6.3.1 e 6.3.2, analisamos a multiplicidade dos autovalores de A_0 .

Proposição 6.3.4 *Suponhamos que $b_l = l$, $l = 1, 2, 3$, e que λ é um número real arbitrário.*

- (1) *Se $-a_1 = a_2 = a_3 = a$ e se $\cos a\sqrt{\lambda} = 0$, então λ é um autovalor de A_0 com multiplicidade 2, cujo autoespaço é formado por todas as funções u para as quais existem constantes $\beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u(x,y) := \begin{cases} (1/3)(\beta_2 + \beta_3) \sin \sqrt{\lambda}x, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ \beta_l \sin \sqrt{\lambda}x, & \text{quase sempre em } \Omega_l \text{ para } l = 2, 3; \end{cases}$$

- (2) *se $-a_1 = a_2 = a$, $\cos a\sqrt{\lambda} = 0$ e se $\cos a_3\sqrt{\lambda} \neq 0$, então λ é um autovalor simples de A_0 e seu autoespaço é formado por todas as funções u para as quais existe uma constante $\beta_2 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$u(x,y) := \begin{cases} (1/3)\beta_2 \sin \sqrt{\lambda}x, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ \beta_2 \sin \sqrt{\lambda}x, & \text{quase sempre em } \Omega_2, \\ 0, & \text{quase sempre em } \Omega_3; \end{cases}$$

- (3) *se $a_2 = a_3 = a$, $\cos a\sqrt{\lambda} \neq 0$ e se $\cos a_1\sqrt{\lambda} \neq 0$, então λ é um autovalor simples de A_0 e seu autoespaço é formado por todas as funções u para as quais existe uma*

constante $\beta_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$u(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ \beta_2 \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_2, \\ -\beta_2 \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_3. \end{cases}$$

Em todos os casos, se $j \in \mathbb{N}$ é tal que $\lambda = \lambda_{0,j} < \lambda_{0,j+1}$, então a família $(\lambda_{\varepsilon,j})_{\varepsilon>0}$ é estritamente monótona decrescente e, em particular, $\lambda_{\varepsilon,j} < \lambda$ para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Mostremos (1). Se u é uma função definida como em (1), então as condições da Proposição 6.3.1 estão satisfeitas com $\alpha = 0$ e $\beta_1 = (1/3)(\beta_2 + \beta_3)$. Tal proposição implica que λ é um autovalor de A_0 e seu autoespaço é formado por todas as funções u dessa forma. Agora observemos que $u = \beta_2 v_1 + \beta_3 v_2$, onde

$$v_1(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{3}, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_2, \\ 0, & \text{quase sempre em } \Omega_3, \end{cases}$$

e

$$v_2(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{3}, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ 0, & \text{quase sempre em } \Omega_2, \\ \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_3. \end{cases}$$

Como v_1 e v_2 são linearmente independentes, segue que λ possui multiplicidade 2.

Agora passemos ao caso (2). Suponhamos que λ seja um autovalor de A_0 e seja u um autovetor associado a λ . Então u é determinado pelas constantes α e β_l , $l = 1, 2, 3$, de forma que as condições da Proposição 6.3.1 estejam satisfeitas. Com estamos supondo $\cos a\sqrt{\lambda} = 0$, a propriedade (4) da Proposição 6.3.1 implica que $\alpha = 0$. Como $\cos a_3\sqrt{\lambda} \neq 0$, concluímos que $\beta_3 = 0$. As propriedades (4) e (3) implicam que $\beta_1 = \beta_2/3$. Utilizando as propriedades (1) e (2) dessa mesma proposição obtemos

$$u(x, y) := \begin{cases} (1/3)\beta_2 \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_1, \\ \beta_2 \sin \sqrt{\lambda} x, & \text{quase sempre em } \Omega_2, \\ 0, & \text{quase sempre em } \Omega_3. \end{cases} \quad (6.15)$$

Reciprocamente, se u é definido como em (6.15), temos que u é não-nulo e, tomando $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2/3$ e $\beta_3 = 0$, temos que as propriedades (2)–(4) da Proposição 6.3.1 estão satisfeitas e portanto (λ, u) é um par autovalor-autovetor de A_0 . É claro que λ possui multiplicidade simples. O caso (3) é análogo ao caso (2).

Suponhamos que $j \in \mathbb{N}$ seja tal que $\lambda = \lambda_{0,j} < \lambda_{0,j+1}$. Observemos que nos casos (1), (2) e (3) dessa proposição temos que $\sin a\sqrt{\lambda} \neq 0$. Logo, a Proposição 6.3.3 implica que a família $(\lambda_{\varepsilon,r})_{\varepsilon>0}$ é monótona decrescente e, em particular, $\lambda_{\varepsilon,r} < \lambda$ para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

Bibliografia

- [1] A. Ambrosetti e G. Prodi, *A Primer on Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [2] J. Barros Neto, *An Introduction to the Theory of Distributions*, Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, New York, 1981.
- [3] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos 88, Madrid, 1984.
- [4] M. C. Carbinatto e K. P. Rybakowski, Conley Index continuation and thin domains problems, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **16**, (2000), 201–251.
- [5] A. N. Carvalho, *Equações Parabólicas Semilineares*, Notas de Aula, ICMC-USP, São Carlos, 2001.
- [6] R. Czaaja, *Differential Equations with Sectorial Operators*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2002.
- [7] R. Dautray e J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [8] ———, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. III, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] ———, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. V, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [10] D. G. Figueiredo, *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [11] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, John Willey & Sons, New York, 1984.
- [12] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [13] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monographs, Vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [14] J. K. Hale e G. Raugel, Reaction-diffusion equations on thin domains, *J. Math. Pures Appl.* (9) **71** (1992), 33–95.
- [15] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [16] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.
- [17] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] M. Prizzi e K. P. Rybakowski, Inertial manifolds on Squeezed domains, *J. Dynam. Differential Equations*, **15**, No. 1 (2003), 1–48.
- [19] ———, Some recent results on thin domains problems, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **14**, (1999), 239–255.
- [20] ———, The effect of domain squeezing upon the dynamics of reaction-diffusion equations, *J. Diff. Equations*, **173**, no2, (2001), 271–320.