I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

TEOREMA DE ROHLIN:
GENERALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

EDSON DE OLIVEIRA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA
S. Carlos

TEOREMA DE ROHLIN:
GENERALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

EDSON DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE CIÊCNIAS
MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
DA UNIVERSIDADE DE SÃO
PAULO, PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE
"MESTRE EM MATEMÁTICA"

ORIENTADOR: Prof. Dr. JANEY ANTONIO DACCACH

São Carlos
-1978-

Class. - T
Cutt. - 048 t
e. 2
Tombo -

TEOREMA DE ROHLIN: GENERALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

EDSON DE OLIVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. JANEY ANTONIO DACCACH
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO PAULO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

À

MÁRCIA,

MELISSA

E A MEUS

PAIS

AGRADECIMENTOS

Ao nosso orientador e amigo Professor Dr. Janey Antonio Daccach, pela confiança em mim depositada e pela orientação neste trabalho.

Aos Professores Alice Kimie Miwa Libardi, Pedro Luiz Queiroz Pergher e Nelio Baldin pelo apoio amigo e pelos vários seminários realizados.

Aos Professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo incentivo constante nesta primeira etapa.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

Theorem of Rohlin: Generalization and Applications

Edson de Oliveira

Adviser: Janey Antonio Daccach

The object of this work is to prove the following Theorem of Rohlin: "Let M^4 be a compact oriented differentiable 4-manifold with Stiefel-Whitney class w_2 equal to zero. Then the signature $I(M^4)$ is congruent to zero modulo 16", and also, the Theorem of Kervaire and Milnor: "Let M^4 be a compact oriented differentiable 4-manifold. Let $\xi \in H^2(M,Z)$ be dual to the Stiefel-Whitney classe $w_2(M)$. If ξ is represented by a differentiably imbedded 2-sphere in M then, the self-intersection number $\xi.\xi$ must be congruent to I(M) modulo 16".

Applications and examples is shown in the last chapter of this work.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

§1. Fibrados Vetoriais 1

§2. Produtos: Cup e Cap 2

§3. Classes de Stiefel-Whitney 4

§4. Fibrado de Hopf 6

§5. Cobordismo 7

§6. Fibrados Orientados e o Isomorfismo de Thom 8

§7. Classe de Euler 10

§8. Fibrados de Stiefel 12

§9. Obstrução e Classes de Chern 13

§10. Classes de Pontrjagin 15

§11. O isomorfismo de Hurewicz 16

§12. Dualidade de Poincaré e de Lefschetz 17

§13. Classificação de Fibrados 18

CAPÍTULO 2

§1. Índice de uma Variedade 19

§2. Espaços de Eilenberg-MacLane 21

§3. Representação de $\eta \in H^2(M,Z)$ por uma subvariedade 25

CAPÍTULO 3

§1. Teorema de Rohlin 28

§2. Teorema de Kervaire e Milnor 52

CAPÍTULO 4

§1. Sequência Multiplicativa 57

§2. Exemplos de Subvariedades que satisfazem o Teorema de Rohlin 68

§3. Aplicações do Teorema de Kervaire e Milnor 71

BIBLIOGRAFIA 74

INTRODUÇÃO

Em 1952, Rohlin demonstrou o seguinte teorema: "Se M é uma variedade diferenciável compacta e orientada de dimensão 4, com classe de Stiefel-Whitney $w_2(M) = 0$, então o índice de M é congruente a zero módulo 16".

Em 1958, Kervaire e Milnor apresentaram a demonstração desse teorema no artigo "Bernoulli Numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin".

Posteriormente, em 1961, eles apresentaram no artigo "On 2-spheres in 4-manifolds", a seguinte versão generalizada do teorema demonstrado por Rohlin: "Seja M uma variedade diferenciável compacta e orientada de dimensão 4 e, suponhamos $\xi \varepsilon H^2(M,Z)$ dual à classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$. Se ξ é representada por um mergulho diferenciável da esfera S^2 em M, então o número de intersecções $\xi.\xi$ deve ser congruente ao índice de M módulo 16".

O objetivo desta dissertação é detalhar, na medida do possivel, os artigos de Kervaire e Milnor. A compreensão dos mesmos não é facil e envolvem o estudo de diversos outros trabalhos.

No capítulo 1 do nosso trabalho, estão os pré-requisitos necessários para a leitura do mesmo.

No capítulo 2, apresentamos a definição do índice de uma variedade e algumas de suas propriedades; a definição

e a construção dos espaços de Eilenberg-MacLane e a representação de uma classe $\eta \varepsilon H^2(M,Z)$, por uma subvariedade.

O capítulo 3 trata da demonstração do teorema de Rohlin e do teorema de Kervaire e Milnor.

No capítulo 4, encontram-se exemplos de variedades que satisfazem o teorema de Rohlin e algumas aplicações do teorema de Kervaire e Milnor.

CAPÍTULO 1

Neste capítulo foram colocadas noções preliminares e notações que serão utilizadas nos demais capítulos.

§1. Fibrados Vetoriais

1.1. Variedades Diferenciáveis:

A palavra variedade diferenciável indica diferenciável de classe C^∞.

Uma função entre duas variedades diferenciáveis será suposta diferenciável de classe C^∞.

O bordo de uma variedade diferenciável M, com bordo, será denotado por ∂M.

O fibrado tangente de uma variedade diferenciável M será denotado por τ_m .

1.2. Fibrado Normal de uma Imersão:

Dada uma imersão $f: M \to N$ é possivel construir um fibrado vetorial ν_f sobre M, chamado fibrado normal da imersão f e, cujo espaço total também será denotado por ν_f, com a seguinte propriedade:

$$\tau_n \oplus \nu_f \cong f^*(\tau_n)$$

onde $f^*(\tau_n)$ denota o fibrado induzido através de f pelo fi

brado tangente de N.

1.3. Teorema:

Se $f: M^n \to N^n$ é transversal a N'^k, então $f^{-1}(N'^k)$ é uma subvariedade diferenciável de M de dimensão $m-(n-k)$. Além disso, o fibrado normal de $f^{-1}(N')$ em M é induzido do fibrado normal de N' em N.([13], pag 23, apêndice 2).

§2. *Produtos: Cup e Cap*

1.4. Definição do Produto Cup:

Dadas as cocadeias $a \varepsilon C^p(X)$ e $b \varepsilon C^q(X)$, o produto cup $a.b = a \cup b \ \varepsilon \ C^{p+q}(X)$ é definido como segue:

Seja $\sigma: \Delta_{p+q} \to X$ um simplexo singular. Consideremos as composições $\sigma \circ F_p: \Delta_p \to X$ onde

$$F_p(t_0, t_1, \ldots, t_p) = (t_0, t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots 0) \quad \text{e}$$

$\sigma \circ B_q: \Delta_q \to X$ onde

$$B_q(t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) = (0, \ldots, 0, t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}).$$

Então, definimos $a \cup b = a.b$ como a $(p+q)$-cocadeia que a todo $\sigma \varepsilon C_{p+q}(X)$ associa:

$$< a \cup b, (\sigma) > = (-1)^{p \cdot q} < a, \sigma \circ F_p > . < b, \sigma \circ B_q >$$

Como $\delta(a \cup b) = (\delta a) \cup b + (-1)^p a \cup (\delta b)$, existe uma operação correspondente:

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X)$$

também chamada produto cup e denotada por $\cup$.

1.5. Definição do Produto Cap:

Para todo espaço topológico X e para todo anel de coeficientes R, existe uma aplicação bilinear:

$$\cap : C^i(X,R) \otimes C_n(X,R) \to C_{n-i}(X,R)$$

caracterizada como segue. Para cada cocadeia $b \in C^i(X,R)$ e para cada cadeia $\xi \in C_n(X,R)$ o produto cap $b \cap \xi$ é o único elemento de $C_{n-i}(X,R)$ tal que $\langle a, b \cap \xi \rangle = \langle a.b, \xi \rangle$ para todo $a \in C^{n-i}(X)$.

Como $\partial(b \cap \xi) = (\delta b) \cap \xi + (-1)^{\dim b} b \cap \partial \xi$, existe uma operação correspondente:

$$H^i(X,R) \otimes H_n(X,R) \to H_{n-i}(X,R)$$

também chamada produto cap e denotada por $\cap$.

Maiores detalhes das definições acima se encontram em [9], apêndice A.

Observação: Sejam $f: X \to Y$ tal que $f(A_1) \subset B_1$ e $f(A_2) \subset B_2$, $\mu \varepsilon H^q(Y,B_1)$ e $Z \varepsilon H_n(X, A_1 \cup A_2)$. Sejam $f_1:(X,A_1) \to (Y,B_1)$, $f_2:(X,A_2) \to (Y,B_2)$ e $\tilde{f}: (X, A_1 \cup B_2) \to (Y, B_1 \cup B_2)$ aplicações definidas por f. Então em $H_{n-q}(Y,B_2)$, temos que:

$$f_{2*}(f_1^* \mu \cap Z) = \mu \cap \tilde{f}_* Z$$

([11], pag 254)

§3. *Classes de Stiefel-Whitney*

O material deste parágrafo pode ser encontrado em [9], §4.

1.6. Definição das Classes de Stiefel-Whitney:

Para cada fibrado vetorial real ξ sobre um espaço base paracompacto $B(\xi)$, corresponde uma sequência de classes de cohomologia $w_i(\xi) \varepsilon H^i(B(\xi), Z_2)$, $i = 0,1,2,\ldots$ chamadas as classes de Stiefel-Whitney de ξ, satisfazendo os axiomas a seguir.

A classe $w_0(\xi)$ é igual ao elemento unidade 1 e pertence a $H^0(B(\xi), Z_2)$ e, as classes $w_i(\xi)$ são mulas para $i>n$ se ξ é um fibrado vetorial real de fibra R^n.

SW_1 Axioma da Naturalidade - se $f: B(\xi) \to B(N)$ é cober

ta por uma aplicação fibrada de ξ em η então

$$w_i(\xi) = f^*(W_i(\eta)),\ i = 0,1,2,\ldots$$

SW_2-Axioma do Produto de Whitney -

$$W_j(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{j} W_i(\xi).W_{j-i}(\eta)$$

SW_3-Para o Fibrado Canônico γ_1^1 de dimensão 1, sobre a circunferência $S^1 \cong RP(1)$, a classe de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1) \varepsilon H^1(S^1, Z_2)$ é não nula.

A classe total de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial real ξ de dimensão n é:

$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \ldots + w_n(\xi) + 0 + \ldots \varepsilon H^*(B(\xi), Z_2)$ onde $B(\xi)$ é o espaço base de ξ.

O axioma do produto de Whitney pode ser expresso por $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi).W(\eta)$.

A classe total de Stiefel-Whitney de ξ possui um elemento inverso em relação ao produto cup, denotado por $\bar{w}(\xi) = 1 + \bar{w}_1(\xi) + \bar{w}_2(\xi) + \ldots$ que pode ser construida indutivamente pelo algoritmo:

$$\bar{w}_i(\xi) = w_1(\xi)\ \bar{w}_{i-1}(\xi) + w_2(\xi).\bar{w}_{i-2} + \ldots + w_i(\xi)$$

As classes de Stiefel-Whitney de uma variedade diferenciável M são por definição, as classes de Stiefel-

-Whitney do fibrado tangente τ_M.

1.7. Definição dos Números de Stiefel-Whitney:

Seja M uma variedade diferenciável, compacta, de dimensão n. Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$, números inteiros não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n$. Um números de Stiefel-Whitney de M é:

$$w_1(M)^{r_1} \ldots w_n(M)^{r_n}[M] \in Z_2$$

onde [M] é a classe fundamental de homologia de M.

1.8. Teorema:

Uma variedade diferenciável M^n compacta e sem bordo, é bordo de uma variedade diferenciável W^{n+1} compacta se, e somente se, os números de Stiefel-Whitney de M são nulos. ((9), pag 53).

§4. Fibrado de Hopf

1.9. Definição do Fibrado de Hopf:

Seja $S^{2n+1} = \{(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) \in C^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} |Z_i|^2 = 1\}$. Seja CP(n) o espaço projetivo complexo, representado como as (n+1)-uplas de números complexos não todos nulos, com a re

lação de equivalência:

$$(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) \sim (\lambda Z_0, \lambda Z_1, \ldots, \lambda Z_n) \quad \text{onde} \quad \lambda \in C \text{ e } \lambda \neq 0$$

A aplicação de Hopf $H: S^{2n+1} \to CP(n)$ é definida por $H(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) = (Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ para cada $(Z_0, Z_1, \ldots Z_n) \in S^{2n+1}$.

S^{2n+1} se fibra sobre $CP(n)$ com fibra S^1, relativamente a H. ([12],pag.106,107,108).

Esse fibrado $\begin{array}{l} S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \\ \qquad\quad \downarrow H \\ \qquad\quad CP(n) \end{array}$ é chamado fibrado de Hopf.

Em particular quando $n = 1$, $CP(1)$ pode ser identificado com a esfera S^2 e o fibrado de Hopf fica:

$$\begin{array}{l} S^1 \hookrightarrow S^3 \\ \qquad\quad \downarrow H \\ \qquad\quad S^2 \end{array}$$

§5. *Cobordismo*

1.10. Definição de União Disjunta:

Sejam M e N espaços topológicos tais que $M \cap N = \phi$.

Definimos a união disjunta de M e N, denotada por $M + N$, como sendo o espaço topológico constituido pelo conjunto $M \cup N$ com a seguinte topologia:

$\overline{U} \subset M + N$ é aberto $\Longleftrightarrow$ $U \cap M$ é aberto em M e $U \cap N$ é aberto em N.

É claro que M e N conservam suas próprias topologias e são abertos em M + N.

Se τ e τ' definem uma estrutura diferenciável em M e N respectivamente, então $\tau \cup \tau'$ define uma estrutura diferenciável em M + N.

1.11. Definição de Cobordismo:

Sejam M e N variedades diferenciáveis compactas de dimensão n. Diremos que elas são cobordantes, ou que pertencem à mesma classe de cobordismo não orientado se, existe uma variedade compacta W de dimensão n + 1 tal que ∂W é difeomorfa a M + N.

O cobordismo é uma relação de equivalência sobre o conjunto das variedades diferenciáveis compactas sem bordo de mesma dimensão.

Duas variedades diferenciáveis M e N compactas e orientadas de dimensão n, pertencem à mesma classe de cobordismo orientado se, existe uma variedade diferenciável W compacta de dimensão n + 1 orientada, com bordo, tal que $\partial W = M + (-N)$ onde $-N$ é N com orientação oposta.

§6. Fibrados Orientados e o Isomorfismo de Thom.

1.12. Definição de Fibrado Orientado:

Um fibrado vetorial real orientado ξ de dimensão n,

é um fibrado vetorial real $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ munido de uma orientação para cada fibra, tal que essas orientações são localmente compatíveis no seguinte sentido: para cada ponto b_0 do espaço base existe uma vizinhança N e n seções $c_1, c_2, \ldots, c_n$: $N \to E$, tal que para cada $b \in N$ os vetores $c_1(b), \ldots, c_n(b)$ formam uma base para a fibra F_b que é compativel com a dada orientação de F_b.

Em termos de cohomologia, isto significa que para cada fibra F existe associado um gerador pré-fixado $u_F \in H^n(F, F_0, Z)$ onde $F_0 = E_0 \cap F$ e E_0 é o conjunto de todos os elementos não nulos de E.

A condição de compatibilidade local implica que para todo ponto da base, existe uma vizinhança N e uma classe de cohomologia $u \in H^n(\pi^{-1}(N), \pi^{-1}(N)_0, Z)$ de modo que para toda fibra F sobre B, a restrição de $u|_{(F,F_0)} \in H^n(F, F_0, Z)$ é igual a u_F.

1.13. Teorema:

Um fibrado ξ é orientado se, e somente se, $w_1(\xi) = 0$ ([12], pag 199).

1.14. Classe de Thom:

Seja ξ um fibrado vetorial real orientado de dimensão n, com espaço total E. Então $H^i(E, E_0, Z) = 0$ para $i<n$

e $H^n(E,E_0,Z)$ contém uma, e somente uma classe de cohomologia μ, chamada classe de Thom cuja restrição $\mu|_{F,F_0} \varepsilon H^n(F,F_0,Z)$ é o gerador escolhido μ_F para cada fibra F. ((9), pag 110).

1.15. Teorema do Isomorfismo de Thom:

Seja ξ um fibrado vetorial real orientado de dimensão n com espaço base B, espaço total E e projeção π: $E \to B$. Então os homomorfismos:

$$\phi: H^r(B) \to H^{r+n}(E,E_0), \ \phi(x) = \pi^*(x) \cup \mu, \ x \varepsilon H^r(B)$$

e

$$\Psi: H_{r+n}(E,E_0) \to H_r(B), \ \Psi(x) = \pi_*(\mu \cap x), \ x \varepsilon H_{r+n}(E,E_0)$$

são isomorfismos. ((14), pag 309).

§7. *Classes de Euler*

1.16. Definição da Classe de Euler:

A classe de Euler de um fibrado vetorial real ξ orientado de dimensão n, com espaço total E, espaço base B e projeção π: $E \to B$, é a classe de cohomologia $e(\xi) \varepsilon H^n(B,Z)$ que corresponde a $\mu|_E$ pelo isomorfismo canônico $\pi^*: H^n(B,Z) \to H^n(E,Z)$ induzido pela projeção π, onde μ é a classe de Thom.

Ou seja, se considerarmos o homomorfismo

$$i^*: H^n(E,E_0,Z) \to H^n(E,Z)$$
$$\mu \to \mu|_E$$

induzido pela inclusão $i: E \to E,E_0$ e se $e(\xi)$ for a classe de Euler do fibrado ξ, então: $\pi^*(e(\xi)) = \mu|_E = i^*(u)$

$$\begin{array}{ccc} H^n(B,Z) & \xrightarrow{\pi^*} & H^n(E,Z) \\ & & \uparrow i^* \\ & & H^n(E,E_0,Z) \end{array}$$

1.17. Propriedade (Naturalidade):

Se $f: B(\xi) \to B(\eta)$ é coberta por uma aplicação fibrada que preserva a orientação de ξ em η, então $e(\xi) = f^*(e(\eta))$.

1.18. Teorema:

O homomorfismo redução módulo 2:

$$H^n(B,Z) \to H^n(B,Z_2)$$

leva a classe de Euler $e(\xi)$ na classe de Stiefel-Whitney $w_n(\xi)$. ([9], pag 99).

1.19. Teorema:

Se M é uma variedade diferenciável compacta e orien

tada então, o índice de Kronecker $e(\tau_m).[M]$, usando coeficientes racionais ou inteiros, é igual à característica de Euler $X(M)$. ([9], pag 130).

§8. *Fibrados de Stiefel*

1.20. Definição:

Seja ξ um fibrado vetorial real de dimensão n, com espaço base B. Para cada $r<n$, temos associado um fibrado $\tilde{V}_{n,n-r}(\xi)$ com espaço base B e fibra a variedade de Stiefel $Y^r = V_{n,n-r} = \frac{O(n)}{O(r)}$, consistindo de todas as (n-r)-uplas de vetores ortonormais no espaço R^n.

Esse fibrado $\tilde{V}_{n,n-r}(\xi)$ é chamado fibrado de Stiefel associado à variedade de Stiefel Y^r.

Por definição o espaço total de $\tilde{V}_{n,n-r}(\xi)$ consiste de todos os pares $(x,(v_1,v_2,\ldots,v_{n-r}))$ onde $(v_1,v_2,\ldots,v_{n-r})$ é uma (n-r)-upla de vetores ortonormais na fibra sobre x.

1.21. Teorema:

A variedade de Stiefel Y^r é conexa por caminho e $\pi_i(Y^r) = 0$ para $i<r$ e:

$$\pi_r(Y^r) = \begin{cases} Z & \text{se } r \text{ é par ou } n-r = 1 \\ Z_2 & \text{se } r \text{ é impar e } n-r > 1 \end{cases}$$

([12], pag 132).

1.22. Teorema:

Sejam $Y'^q = V'_{n,n-q} = \frac{U(n)}{U(q)}$ as variedades de Stiefel complexas, consistindo das (n-q)-uplas de vetores ortonormais no espaço complexo C^n.

Então,

$$\pi_i(Y'^q) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i < 2q + 1 \\ Z, & \text{se} \quad i = 2q + 1 \end{cases}$$

([12], pag 133).

§9. *Obstrução e Classes de Chern*

A teoria de Obstrução, se encontra em [12], capítulo 3.

Enunciaremos apenas o seguinte teorema, bastante utilizado em nosso trabalho.

1.23. Teorema:

Seja ξ um fibrado $Y \hookrightarrow \begin{matrix} B \\ \downarrow \\ K \end{matrix}$ onde K é um complexo finito (como definido em [12], pag 100) e Y é q-simples. Seja L um sub-complexo de K e seja f uma seção de ξ restrita a $L \cup K^q$; K^q indica o q-esqueleto de K.

Suponhamos $\pi_q(Y) \neq 0$. Então, o anulamento da classe de obstrução $c(f,\xi) \in H^{q+1}(K,L,\pi_q(Y))$ é condição necessá

ria e suficiente para que haja uma extensão de f em LUK^{q+1}.

1.24. As Classes de Chern Definidas como Obstrução:

Seja η um fibrado vetorial complexo de dimensão m com espaço base um complexo celular K. Consideremos η' o fibrado em esferas S^{m-1} associado.

Seja η'_q o fibrado de Stiefel associado, que tem como fibra a variedade de Stiefel $Y'^q = \frac{U(m)}{U(q)}$.

Como $U(0) \subset U(1) \subset \ldots \subset U(m-1)$, temos as projeções naturais:

$$U(m) = Y'^0 \to Y'^1 \to \ldots \to Y'^{m-1} = S^{2m-1}$$

e Y'^{q-1} é um fibrado vetorial complexo em esferas S^{2q-1}, sobre Y'^q.

Essas projeções induzem projeções entre os espaços totais:

$$B'^0 \to B'^1 \to \ldots \to B'^{m-1} \to K$$

e, qualquer composição delas é a projeção de um fibrado sobre K, com fibra uma variedade de Stiefel ([12], pag 210).

Por exemplo, a composição $B'^q \to B'^{q+1} \to \ldots \to K$ é a projeção do fibrado η'_q.

De acordo com o teorema 1.22., temos que

$$\pi_{4q-1}(Y'^{2q-1}) = Z$$

é o primeiro grupo de homotopia não nulo de Y'^{2q-1}. Existe uma seção f de η'_{2q-1} restrita ao (4q-1)-esqueleto e, portanto, a obstrução $c(\eta'_{2q-1},f)$ para a extensão de f ao 4q--esqueleto de K é um elemento de $H^q(K,\pi_{4q-1}(Y'^{2q-1})) \simeq H^{4q}(K,Z)$

Definimos a classe de Chern $C_{2q}(\eta')\varepsilon H^{4q}(K,Z)$ como sendo a obstrução $c(\eta'_{2q-1},f)$.

Analogamente, usando o grupo O(m) em vez de U(m), podemos definir as classes de Stiefel-Whitney como obstruções.

§10. Classes de Pontrjagin

1.25. Definição das Classes de Pontrjagin:

Seja ξ um fibrado vetorial real de dimensão n com espaço base B.

Seja $\xi_c = \xi \otimes C$ o fibrado complexificação de ξ.

A i-ésima classe de Pontrjagin $p_i(\xi)\varepsilon H^{4i}(B,Z)$ é definida por:

$$p_i(\xi) = (-1)^i C_{2i}(\xi_c)$$

A classe total de Pontrjagin é:

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \ldots + p_{[\frac{n}{2}]}(\xi) ,$$

onde $[\frac{n}{2}]$ indica o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

1.26. Teorema:

i) Se ε^k é o fibrado vetorial trivial de dimensão k, então $p(\xi \oplus \varepsilon^k) = p(\xi)$.

ii) Se ξ e η são fibrados vetoriais reais, $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi).p(\eta)$ + (elementos de ordem 2)

iii) Se ξ é um fibrado vetorial real orientado de dimensão 2k, então $p_k(\xi) = e(\xi).e(\xi)$. ([9],pag 174, 175,179).

1.27. Lema (Naturalidade):

Se $f: B \to B'$ é coberta por uma aplicação fibrada entre os fibrados vetoriais ξ e η, então $f^*p(\eta) = p(\xi)$.

1.28. Lema:

Seja CP(n) o espaço projetivo complexo.

Então, $p(CP(n)) = (1+\alpha^2)^{n+1}$ onde $\alpha \varepsilon H^2(CP(n),Z)$ é gerador. Em outras palavras, $p_k(CP(n)) = \binom{n+1}{k} \alpha^{2k}$ ([9],pag 177).

§11. O Isomorfismo de Hurewicz

1.29. Teorema:

Seja X um espaço conexo com $\pi_i(X) = 0$ para todo

$i<n$ $(n\geq 2)$. Então, $H_i(X) = 0$ para todo $i<n$ e $\pi_n(X) \simeq H_n(X,Z)$ ([10], pag 78).

§12. *Dualidade de Poincaré e Lefschetz*

1.30. Teorema de Dualidade:

Seja M uma variedade sem bordo diferenciável compacta e orientada de dimensão n e seja (A,B) um par de subvariedades compactas de M. Então,

$$D: H_q(M-B, M-A) \to H^{n-q}(A,B)$$

é um isomorfismo ([11], pag 296).

1.31. Corolário (Dualidade de Poincaré):

Se M for uma variedade diferenciável compacta (sem bordo) orientada de dimensão n, então:

$$D: H^i(M) \to H_{n-i}(M)$$

definida por $D(\alpha) = \alpha \frown [M]$ é um isomorfismo.([11], pag 297).

1.32. Teorema da Dualidade de Lefschetz:

Se Ω^n é uma variedade diferenciável compacta e orien

tada, com bordo, então:

$$H_r(\Omega) \cong H^{n-r}(\Omega, \partial\Omega)$$

([16], pag 156).

§13. Classificação de Fibrados

1.33. Teorema:

As classes de equivalência de fibrados η sobre S^n com grupo G, estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência de $\pi_{n-1}(G)$ sob as operações de $\pi_0(G)$. Tal correspondência é dada por $\eta \to X(\alpha)$ onde α é um gerador de $\pi_n(S^n)$ e $X: \pi_n(S^n) \to \pi_{n-1}(G)$ é um homomorfismo característico de η. ([12], pag 99).

CAPÍTULO 2

Neste capítulo, definiremos o índice de uma variedade e enunciaremos algumas de suas propriedades. Dentre elas demonstraremos a seguinte:

$$I(M \# N) = I(M) + I(N)$$

Definiremos ainda os espaços de Eilenberg MacLane $K(G,n)$ e mostraremos a sua construção. Como exemplo, construiremos o complexo CW, $K(Z,2)$.

Em seguida demonstraremos que: dada uma classe $\eta \in H^2(M^4,Z)$, onde M^4 é uma variedade diferenciável compacta e orientada, existe um mergulho $g: N^2 \longrightarrow M^4$ tal que $g_*(N^2) = \eta \cap (M^4)$.

§1. *Indice de uma Variedade*

2.1. Definição:

O índice de uma variedade diferenciável M^n compacta e orientada, denotado por $I(M)$, é definido como:

a) $I(M) = 0$ se $n \neq 4k$ para algum inteiro k.

b) Se $n = 4k$ então $I(M)$ é o índice da forma bilinear simétrica não singular:

$$\phi: H^{2k}(M,R) \times H^{2k}(M,R) \to R$$

$$(x,y) \to \phi(x,y) = \langle x \cup y, [M] \rangle$$

2.2. Propriedades do Índice:

a) $I(M+N) = I(M) + I(N)$; $I(-M) = -I(M)$.

b) $I(M \times N) = I(M).I(N)$.

c) Se M é uma variedade diferenciável compacta e orientada então, $I(M) = X(M) \bmod 2$ ([16], pag 170).

d) $I(CP(2k)) = 1$

e) Se M é uma variedade diferenciável de dimensão $(4n+1)$, compacta e orientada então, $I(\partial M) = 0$ ([16],169).

f) $I(M \# N) = I(M+N) = I(M) + I(N)$.

Demonstração de f:

Antes, vamos definir a variedade de $X(M,\phi)$. Dada uma variedade M de dimensão n-1 e um mergulho $\phi: S^{\lambda-1} \times \overset{o}{D}{}^{n-\lambda} \to M$, seja $M' = M - \phi(S^{\lambda-1} \times 0)$ e $W' = M' \cup (\overset{o}{D}{}^{\lambda} \times S^{n-\lambda-1})$. Definamos em W' uma relação de equivalencia E, identificando $\phi(u,\theta v)$ com $(\theta u, v)$ para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0<\theta<1$.

Seja $W = \frac{W'}{E}$. Denotaremos $W = X(M,\phi)$ e diremos que W foi obtida de M por meio de uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$.

Seja Q a união disjunta das variedades M e N, denotada

por M + N. Se considerarmos o mergulho ϕ: $\overset{o}{S} \times \overset{o}{D}^{n-1} \to Q$ tal que:

$$\phi(-1 \times \overset{o}{D}^{n-1}) \subset M \quad \text{e} \quad \phi(1 \times \overset{o}{D}^{n-1}) \subset N.$$

então,

$$X(Q,\phi) = \frac{Q-\phi(\overset{o}{S} \times 0) \cup (\overset{o}{D}^{1} \times S^{n-2})}{E} = M \# N$$

Como M + N é uma variedade diferenciável e $M \# N$ é obtida de M + N por uma cirurgia então, M + N e $M \# N$ são cobordantes ([2], pag 33).

Desde que variedades cobordantes tem o mesmo índice, segue que $I(M \# N) = I(M+N) = I(M) + I(N)$.

§2. *Espaços de Eilenberg-MacLane*

2.3. Definição:

Seja G um grupo abeliano. Um complexo CW é chamado espaço de Eilenberg-MacLane do tipo (G,n) e, é denotado por K(G,n), se:

$$\pi_i(K(G,n)) = \begin{cases} 0 \ , \ i \neq n \\ G \ , \ i = n \end{cases}$$

2.4. Construção:

Consideremos um grupo abeliano G e um número inteiro

n, $n \geq 2$. Vamos construir um complexo CW, $K(G,n)$.

Seja $0 \to R \to F \to G \to 0$ uma resolução livre de G, isto é, uma sequência exata onde R e F são grupos abelianos livres. Sejam $\{a_i\}_{i \in I}$ e $\{b_j\}_{j \in J}$ bases de R e F respectivamente. Seja X o espaço obtido da reunião por um ponto, das n-eferas S_j^n, $j \in J$. Para cada a_i, tomemos uma (n+1)- célula e_i, e consideremos o espaço Y que se obtém colando cada uma dessas (n+1)-células aX, através da aplicação $f_i: \dot{e}_i \to X$, onde $[f_i] = a_i \in \pi_n(X) = F$ e, $\dot{e}_i$ denota o bordo de e_i. Temos que $\pi_n(Y) \cong G$.

Estamos assim, no seguinte estágio:

$$\pi_i(Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } i < n \\ G & \text{se } i = n \end{cases}$$

Para que Y seja um $K(G,n)$, é necessário que $\pi_j(Y) = 0$ para todo $j>n$.

Suponhamos que $\pi_r(Y) \neq 0$ para algum $r>n$. Então existe $f: S^r \to Y$ representando $[f] \in \pi_r(Y)$. Seja $Y' = Y \cup_f e^{r+1}$, onde e^{r+1} é uma (r+1)-célula. Fazendo isto para todos os geradores de $\pi_r(Y)$, obteremos o espaço $\bar{Y}$ tal que $\pi_r(\bar{Y}) = 0$ e $\pi_i(Y) \cong \pi_i(\bar{Y})$ para todo $i<r$.

2.5. Exemplos:

Como aplicação de 2.4., vamos construir o complexo CW, $K(Z,2)$.

Consideremos a sequência $0 \to 0 \to Z \xrightarrow{id} Z \to 0$ que é uma resolução livre de Z e, seja $\{a_1\}$ uma base de Z.

Temos então que $Y = S^2 \cong CP(1)$ e, portanto,

$$\pi_i(cP(1)) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ Z & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

Conhecemos que $\pi_3(S^2) \cong Z(h_1)$, onde h_1 é a fibração de Hopf $\begin{array}{l} S^1 \hookrightarrow S^3 \\ \quad\quad\;\; \downarrow h_1 \\ \quad\quad\;\; S^2 \end{array}$.

Chamemos de $Y_1 = S^2 \cup_{h_1} e^4$. Sabemos que $Y_1 = CP(2)$.

Considerando o fibrado de Hopf $\begin{array}{l} S^1 \hookrightarrow S^5 \\ \quad\quad\;\; \downarrow h_2 \\ \quad\quad\;\; cP(2) \end{array}$, temos a sequência exata de homotopia:

$$\ldots \to \pi_2(S^5) \to \pi_2(CP(2)) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^5) \to \ldots$$

Desde que $\pi_2(S^5) \cong \pi_1(S^5) = 0$ então, $\pi_2(CP(2) \cong \pi_1(S^1)$.

Como $\pi_1(S^1) \cong Z$, concluimos que $\pi_2(CP(2)) \cong Z$.

Analogamente decorre da sequência exata de homotopia acima que:

$$\pi_1(CP(2)) = 0, \pi_3(CP(2)) = 0, \pi_4(CP(2)) = 0, \pi_5(CP(2)) \cong Z(h_2).$$

Portanto,

$$\pi_i(cP(2)) = \begin{cases} Z & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \leq 4 \text{ e } i \neq 2 \end{cases}$$

Chamemos $Y_2 = CP(2) \cup_{h_2} e^6$. Sabemos que $Y_2 \cong CP(3)$.

Considerando o fibrado de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^7$, $\downarrow h_3$, $CP(3)$, temos a sequência exata de homotopia:

$$\ldots \to \pi_2(S^7) \to \pi_2(CP(3)) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^7) \to \ldots$$

Desde que $\pi_2(S^7) = 0$ e $\pi_1(S^7) = 0$ então $\pi_2(CP(3)) \cong \pi_1(S')$

Como $\pi_1(S^1) \cong Z$, concluimos que $\pi_2(CP(3)) \cong Z$.

Analogamente decorre da sequência acima que:

$\pi_1(CP(3)) = 0, \pi_3(CP(3)) = 0, \pi_4(CP(3)) = 0, \pi_5(CP(3)) = 0,$
$\pi_6(CP(3)) = 0, \pi_7(CP(3)) \cong Z(h_3)$.

Assim,

$$\pi_i(CP(3)) = \begin{cases} Z & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \leq 6 \text{ e } i \neq 2. \end{cases}$$

Repetindo esse raciocínio sucessivamente, obteremos o complexo CW, $CP(\infty)$, tal que:

$$\pi_i(CP(\infty)) = \begin{cases} Z & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \neq 2 \end{cases}$$

Portanto, $CP(\infty)$ é um espaço Eilenberg MacLane do tipo $K(Z,2)$.

2.6. Exemplo:

$RP(\infty)$ é um espaço de Eilenberg Maclane do tipo $K(Z_2,1)$.

2.7. Exemplo:

S^1 é um espaço de Eilenberg MacLane do tipo $K(Z,1)$.

§3. *Representação de $\eta \varepsilon H^2(M,Z)$ Por uma Subvariedade*

2.8. Teorema:

Existe uma correspondência biunívoca:

$$[X,K(\pi,n)] \leftrightarrow H^n(X,\pi)$$

dada por $[f] \leftrightarrow f^*(1_n)$ onde, $1_n \varepsilon H^n(K(\pi,n),\pi)$ é uma classe fundamental de $K(\pi,n)$. ([10], pag 3).

2.9. Teorema:

Seja M^4 uma variedade diferenciável compacta, orientada e seja $\eta \varepsilon H^2(M,Z)$. Então, existe um mergulho $g: N^2 \to M^4$ tal que $g_*[N] = \eta \cap [M]$.

Neste caso, dizemos que N é uma variedade dual de η.

Demonstração:

Por 2.8., existe uma correspondência biunívoca

$$H^2(M,Z) \leftrightarrow [M,K(Z,2)] \cong [M,CP(\infty)]$$

Como $\eta \varepsilon H^2(M,Z)$, existe $f: M \to CP(\infty)$ tal que $f^*(\alpha') = \eta$ onde $\alpha' \varepsilon H^2(CP(\infty),Z)$ é um gerador.

Desde que M é compacta, im $f \subset CP(N)$ para algum N.

Temos então $f: M \to CP(N)$ com $f^*(\alpha'') = \eta$ onde,

$\alpha'' \varepsilon H^2(CP(N),Z)$ é um gerador.

Sendo CP(N-1) uma subvariedade fechada de CP(N), de codimensão 2, existe $h: M \to CP(N)$ diferenciável, transversal a CP(N-1) e homotópica a f. ([14], pag 224).

Assim, $h^*(\alpha'') = \eta$. Logo $h^{-1}(CP(N-1)) = N^2$ é uma subvariedade compacta de M, de dimensão 2, e assim, existe um mergulho $g: N^2 \to M$.

Falta demonstrar que $g_*[N] = \eta \frown [M]$.

Como M e CP(N) são complexos CW, decorre que h é homotópica a uma aplicação celular $q: M \to CP(2)$.([14],pag 91).

Consideremos $\begin{array}{c}\nu_g \\ \downarrow\pi \\ N\end{array}$ o fibrado normal de N em M e seja $g': N \to \nu_g$ a seção nula de ν_g.

Podemos então, formar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\nu_g, \partial\nu_g) \arrow[r, "e"] & (M, M-N) \\
\nu_g \arrow[u, "j"] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[u, "j_M"'] \\
N \arrow[u, bend left, "g'"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

onde j, j_M, e, i, são inclusões naturais.

O teorema do isomorfismo de Thom, garante que a aplicação

$$\psi: H_4(\nu_g, \partial\nu_g) \to H_2(N)$$

dada por $\psi(Z) = \pi_*(\mu \cap Z)$ onde $\mu \varepsilon H^2(\nu_g, \partial\nu_g)$ é a classe de Thom, é um isomorfismo.

Assim, denotando por $[\ ]$ o gerador de $H_4(\nu_g, \partial\nu_g)$, temos que $\psi([\ ]) = \pi_*(\mu \cap [\ ]) = [N]$. Logo,

$$g_*\pi_*(\mu \cap [\ ]) = g_*[N],$$

Como $g = i o g'$, então: $i_* g'_* \pi_*(\mu \cap [\ ]) = g_*[N]$ ou seja, $i_*(\mu \cap [\ ]) = g_*[N]$.

O isomorfismo excisão $e^*: H^2(M, M-N) \to H^2(\nu_g, \partial\nu_g)$, nos fornece que $\mu = e^*(\mu_M)$ onde, $\mu_M \varepsilon H^2(M, M-N)$.

Portanto, $i_*(e^*\mu_M \cap [\ ]) = g_*[N]$.

Da definição de produto cap (ver observação de 1.6.), decorre que:

$$\mu_M \cap e_*[\ ] = g_*[N].$$

Como $j_{M_*}: H_4(M) \to H_4(M, M-N)$ é também um isomorfismo (a demonstração deste fato não é obvia), temos em decorrência que $e_*[\ ] = j_{M_*}[M]$.

Logo, $\mu_M \cap j_{M_*}[M] = g_*[N]$

ou seja,

$$j_M^*(\mu_M) \cap [M] = g_*[N].$$

Da naturalidade da classe de Thom, segue que $j_M^*(\mu_M) = \eta$.

Assim,

$$g_*[N] = \eta \cap [M]$$

e o teorema está provado.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do teorema de Rohlin e do teorema de Kervaire e Milnor.

Todas as variedades consideradas neste parágrafo, serão supostas orientadas.

§1. Teorema de Rohlin

3.1. Proposição:

Seja M^4 uma variedade diferenciável compacta com $w_2(M^4) = 0$. Então, M^4 é quase paralelizável.

Demonstração:

Seja $\begin{array}{c}\tau_M\\ \downarrow\\ M\end{array}$ o fibrado tangente da variedade M. Consideremos $\tilde{V}_{4,4-r}(\tau_M)$, $0 \leq r < 4$, o fibrado de Stiefel associado, com fibra a variedade de Stiefel $Y^r = V_{4,4-r}$.

Para r = 1 temos, por 1.21. que Y^1 é o-conexo e portanto, existe uma seção do fibrado $\tilde{V}_{4,3}(\tau_M)$ sobre o 1-esqueleto K^1 de M.

Essa seção se estende ao 2-esqueleto de M se, e somente se, a obstrução $c(\tau_M) \varepsilon H^2(M, \pi_1(Y^1))$ for nula.

Como $\pi_1(Y^1) = Z_2$ então $\pi_1(Y^1)$ é canonicamente isomor

fo a Z_2. Desde que M é orientável, o fibrado de coeficientes é trivial e por conseguinte, $c(\tau_M) = w_2(M) \varepsilon H^2(M, Z_2)$.

Da hipótese, temos que $w_2(M) = 0$; então $c(\tau_M) = 0$.

Logo, o fibrado τ_M admite um campo de tres vetores linearmente independentes sobre o 2-esqueleto K^2 de M e portanto, $\tau_M\big|_{K^2} \cong \xi^1 \oplus \theta^3$ onde θ^3 é trivial.

Assim $w_1(\tau_M\big|_{K^2}) = w_1(\xi^1 \oplus \theta^3) = w_1(\xi^1)$.

O fato de $\tau_M\big|_{K^2}$ ser orientável $\Rightarrow w_1(\tau_M\big|_{K^2}) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow w_1(\xi^1) = 0 \Rightarrow \xi^1$ é orientável e, como consequência, o grupo estrutural de ξ^1 é um grupo com um só elemento; disso resulta que ξ^1 é trivial. Como implicação desse fato, temos que $\begin{array}{c}\tau_M\\ \downarrow\\ K^2\end{array}$ é trivial. Podemos então construir o fibrado η sobre $K^3/_{K^2}$, colapsando K^2. Mas $K^3/_{K^2}$ é um bouquet finito de esferas S^3, digamos $S_1^3, S_2^3, \ldots, S_n^3$ unidas por um ponto e η é trivial se, e somente se, as restrições $\eta_i = \eta\big|_{S_i^3}$ são triviais. Por outro lado $\eta\big|_{S_i^3}$ é trivial se, e somente se, o fibrado principal associado:

$$\begin{array}{ccc} SO(4) \hookrightarrow & \tilde{\eta}_i & \text{é trivial} \\ & \downarrow & \\ & S_i^3 & \end{array}$$

Pelo teorema 1.33., as classes de equivalência dos fibrados sobre S^3 com grupo SO(4), estão em correspondência

biunívoca com as classes de equivalência dos elementos de $\pi_2(SO(4))$. Porém, $\pi_2(SO(4)) = 0$ ([12], pag 118).

Logo, $\tau_{M|_{K^3}}$ é trivial.

Como M-x tem o mesmo tipo de homotopia de um subcomplexo do 3-esqueleto de M então $\tau_{M|_{M-x}}$ é trivial e assim, M é quase paralelizável.

3.2. Definição de Join:

Sejam X e Y dois espaços topológicos e I = [0,1].O Join de X e Y, denotado por $X * Y$, é o espaço quociente $\frac{X \times I \times Y}{\sim}$ onde $\sim$ é a relação de equivalência $(x,0,y) \sim (x',0,y)$, $(x,1,y) \sim (x,1,y')$ para todo $x,x' \varepsilon X$ e todo $y,y' \varepsilon Y$.

A classe de equivalência de (x,y,t) será denotada por $<x,t,y>$.

Podemos então pensar do Join $X * Y$ como sendo o espaço parametrizado por t onde, para t = 0 temos Y,para t = 1 temos X e, para $0<t<1$ temos $X \times Y$.

Exemplo: $S^n * S^n \cong S^{n+m+1}$

3.3. Definição de Suspensão:

Seja I = [0,1]. Para qualquer espaço topológico X a suspensão de X, indicada por SX, é o quociente $\frac{X \times I}{\sim}$ onde $\sim$ é a relação de equivalência $(x,0)\sim(x',0)$,$(x,1)\sim(x',1)$

para todo $x,x' \varepsilon X$.

A classe de equivalência de (x,t) será denotada por $\langle x,t\rangle$.

Exemplo: $S(S^n) \cong S^{n+1}$

3.4. Construção Hopf:

Dada uma função $f: X \times Y \to Z$, a construção de Hopf associada a f é a função: $H(f): X * Y \to SZ$, definida por $H(f)\langle x,t,y\rangle = \langle f(x,y),t\rangle$.

3.5. Definição:

O J-homomorfismo é um homomorfismo

$$J: \pi_r(SO(n)) \to \pi_{r+n}(S^n)$$

definido da seguinte maneira:

Seja $\alpha \varepsilon \pi_r(SO(n))$ representada por uma função $f: S^r \to SO(n)$.

$SO(n)$ atua em R^n com uma ação $\theta: SO(n) \times R^n \to R^n$ dada por $\theta(A,v) = A.v$. Esta ação se restringe à uma ação,

$$\bar{\theta}: SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$
$$(A,v) \to A.v$$

Temos então uma função bem definida:

$$\tilde{f}: S^r \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

dada por $\tilde{f}(x,y) = f(x).y$

A construção de Hopf asssociada a $\tilde{f}$ nos fornece

$$H(\tilde{f}): S^r * S^{n-1} \cong S^{r+n} \to S(S^{n-1}) \cong S^n$$

Seja $[H(\tilde{f})] \in \pi_{r+n}(S^n)$ a classe de homotopia de $H(\tilde{f})$. Definimos $J(\alpha) = [H(\tilde{f})]$ ([5], pag , 212).

3.6. Observação:

Sejam $i: V^{k-1} \to R^{m+k-1}$ um mergulho de uma variedade diferenciável compacta V^{k-1} no espaço euclidiano R^{m+k-1} e ν^m o fibrado normal de V^{k-1} em R^{m+k-1}.

Então ν^m admite um campo de vetores ortonormais $F_m = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Um ponto $Z \in R^{m+k-1}$ numa vizinhança tubular B de V, de raio ρ, pertence a um plano π normal a V^{k-1} em R^{m+k-1}, tal que $\pi \cap V^{k-1} = \{x\}$.

Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ as coordenadas de Z em relação aos vetores $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x)$, $\sum_{i=1}^{m} (Z_i)^2 \leq \rho^2$. Podemos então associar a (V^{k-1}, F_m) uma aplicação:

$$\phi: S^{m+k-1} \to S^m, \quad \text{definida por:}$$

$$\phi(sZ) = (1-2y^2, 2y_1(1-y^2)^{1/2}, \ldots, 2y_m(1-y^2)^{1/2}) \text{para } Z \in B$$

$$\phi(S^{m+k-1} - sB) = (-1, 0, \ldots, 0)$$

onde $y_i = \frac{1}{\rho} Z_i$, $y^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i)^2$ e $s: R^{m+k-1} \to S^{m+k-1}$ é definida por:

$$s(t_1, t_2, \ldots, t_{m+k-1}) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t_1}{1+t^2}, \ldots, \frac{2t_{m+k-1}}{1+t^2}\right) \quad \text{com}$$

$$t^2 = \sum_{i=1}^{m+k-1} (t_i)^2$$

3.7. Observação:

ϕ é homotopia a zero se, e somente se, existe uma variedade diferenciável Q^k, com bordo V^{k-1}, mergulhada em R^{m+k-1}, tal que:

i) a restrição a V^{k-1} do mergulho de Q^k é o mergulho $i: V^{k-1} \to R^{m+k-1}$.

ii) Q^k encontra R^{m+k-1} ortogonalmente de modo que, a restrição a V^{k-1} do fibrado normal de Q^k em R^{m+k}, é exatamente o fibrado normal de V^{k-1} em R^{m+k-1}.

iii) a seção f pode ser estendida a Q^k como uma seção F do fibrado principal associado ao fibrado normal de Q^k em R^{m+k}.

Esses fatos seguem de [15], capítulo I e lemas IV-5 e IV-5'.

3.8. Proposição:

Seja $\alpha \varepsilon \pi_{k-1}(SO(m))$. Consideremos $M^k \subset R^{m+k}$ uma variedade diferenciável quase paralelizável e ν o fibrado normal de M^k em R^{m+k}. Seja f uma seção do fibrado principal associado ao fibrado normal ν restrito a $M-x_0$, tal que $c(\nu,f) = \alpha$ onde $c(\nu,f)$ é a obstrução para a extensão de f.

Então $J\alpha = 0$.

Demonstração:

Sejam M^k uma variedade diferenciável mergulhada em R^{m+k} e f uma seção do fibrado normal de M^k em R^{m+k}, restrito a M^k-x_0.

Modificando esse mergulho por um difeomorfismo de R^{m+k}, podemos assumir que alguma vizinhança de x_0 em M^k é um hemisfério num dos semi-espaços determinados pelo hiperplano R^{m+k-1}, enquanto que a parte restante de M^k está contida no outro lado do hiperplano R^{m+k-1}.

Removendo essa vizinhança, obtemos uma variedade $Q^k \subset R^{m+k}$ com bordo $S^{k-1} \subset R^k \subset R^{m+k-1}$, cuja restrição a S^{k-1} é o mergulho $i: S^{k-1} \longrightarrow R^{m+k-1}$.

A seção f restrita a S^{k-1}, nos fornece uma aplicação $q: S^{k-1} \to SO(m)$ que representa a classe de homotopia $c(\nu,f) = \alpha$, isto é, $(q) = \alpha \varepsilon \pi_{k-1}(SO(m))$.

A interpretação do J-homomorfismo

$$J: \pi_{k-1}(SO(m)) \to \pi_{m+k-1}(S^n)$$

dada em [6], *§1.* pag 349, nos fornece $Jc(\nu,f) = [\phi]$ onde $\phi: S^{m+k-1} \to S^m$ é a aplicação definida na observação 3.6.

Como Q^k é uma variedade diferenciável que satisfaz as condições i,ii,iii da observação 3.7., segue que ϕ é homotópica a zero, ou seja: $J\alpha = Jc(\nu,f) = 0$.

3.9. Observação:

Seja ξ um fibrado com fibra F, grupo estrutural G, espaço base K e projeção p. Seja a aplicação $h: F \to H$, onde H é um G-espaço e h é equivariante.

Então, é possivel construir o fibrado associado ξ' com fibra H, espaço base K e projeção p'. Podemos supor que os fibrados ξ e ξ' tem as mesmas vizinhanças coordenadas $U_j, j\varepsilon J$. Para cada $j\varepsilon J$ sejam $\phi_j: U_j \times F \to p^{-1}(U_j)$ e $\phi'_j: U_j \times H \to p'^{-1}(U_j)$ as funções coordenadas de ξ e ξ' respectivamente.

Nessas condições, temos uma aplicação $\bar{h}$ do espaço total de ξ no espaço total de ξ', definida por $\bar{h} = \phi'_j o g o \phi_j^{-1}$ onde $g(x) = (x,h(x))$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
U_j \times F \arrow[r, "g=(i,h)"] \arrow[d, "\phi_j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U_j \times H \arrow[d, "\phi'_j"] \\
\xi \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & \xi' \arrow[dl, "p'"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

Seja f uma seção de ξ restrita ao r-esqueleto de K e $c(\xi,f)$ a obstrução para a extensão de f ao (r+1)-esqueleto de K. A aplicação $f' = \bar{h}of$ é uma seção de ξ' restrita ao r-esqueleto de K. Se $c(\xi',f')$ é a obstrução para a extensão de f', temos:

3.10. Proposição:

$h_*c(\xi,f) = c(\xi',f')$, onde h_* é um homomorfismo na cohomologia de K induzido pelo homomorfismo $\tilde{h}: \pi_r(F) \to \pi_r(H)$ e onde $\tilde{h}$ é o homomorfismo induzido em homotopia pela aplicação $h: F \to H$.

Demonstração:

Seja σ uma r-célula do r-esqueleto de K. Os fibrados ξ e ξ' restritos a σ são triviais. Assim, temos aplicações fibradas:

$$\phi_\sigma: \sigma \times F \to \xi_\sigma \quad \text{e} \quad \phi'_\sigma: \sigma \times H \to \xi'_\sigma$$

e aplicações

$$p_\sigma: \xi_\sigma \to F \quad \text{e} \quad p'_\sigma: \xi'_\sigma \to H$$

tais que:

$$\phi_\sigma(p(b), p_\sigma(b)) = b \quad \text{para} \quad b \varepsilon \xi_\sigma$$

$$\phi'_\sigma(p'(b'), p'_\sigma(b')) = b' \quad \text{para} \quad b' \varepsilon \xi'_\sigma$$

Então:

$$(p(b),p_\sigma(b)) = \phi_\sigma^{-1}(b) \quad \text{e} \quad (p'(b'),p'_\sigma(b')) = \phi_\sigma'^{-1}(b')$$

Sendo π_2 a projeção no segundo fator, temos que:

$$p_\sigma(b) = \pi_2 o \phi_\sigma^{-1}(b) \quad \text{e} \quad p'_\sigma(b') = \pi_2 \phi_\sigma'^{-1}(b')$$

Se $b = f(x)$ e $b' = f'(x)$, onde $x \varepsilon \sigma$ e $\dot{\sigma}$ denota o bordo de σ então,

$$p_\sigma f(x) = \pi_2 o \phi_\sigma^{-1} f(x) \quad \text{e} \quad p'_\sigma o f'(x) = \pi_2 o \phi_\sigma'^{-1} f'(x).$$

Portanto, podemos escrever o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] & & H \\
\sigma \times F \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[rr, "g=(i,h)"] \arrow[d, "\phi_\sigma"'] & & \sigma \times H \arrow[u, "\pi_2"'] \arrow[d, "\phi'_\sigma"] \\
\xi_\sigma \arrow[rr, "\bar{h}"] \arrow[dr, "p"] & & \xi'_\sigma \arrow[dl, "p'"'] \\
& \sigma \arrow[ul, bend left, "f"] \arrow[ur, bend right, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja, $h o \pi_2 o \phi_\sigma^{-1} o f = \pi_2 o \phi_\sigma'^{-1} o f'$

Desde que $c(\xi,f) = [p_\sigma o f/\dot{\sigma}]$ e $c(\xi',f') = [p'_\sigma o f'/\dot{\sigma}]$.

então:

$$h_* c(\xi,f) = h_*[p_\sigma o f/\dot{\sigma}] = [h o p_\sigma o f/\dot{\sigma}] = [h o \pi_2 o \phi_\sigma^{-1} o f/\dot{\sigma}] =$$

$$= [\pi_2 o \phi_\sigma'^{-1} o f'/\dot{\sigma}] = [p_\sigma' o f'/\dot{\sigma}] = c(\xi',f').$$

3.11. Proposição:

Seja ξ um fibrado com fibra $SO(m)$ e espaço base uma variedade diferenciável compacta K de dimensão $4n<m$.

Seja f uma seção de ξ restrita ao $(4n-1)$ esqueleto de K.

Então a classe de obstrução $c(\xi,f) \varepsilon H^{4n}(K,\pi_{4n-1}(SO(m)))$ relaciona-se com a classe de Pontrjagin $p_n(\xi)$, através da identidade:

$$p_n(\xi) = \pm\, a_n (2n-1)!\; c(\xi,f)$$

onde a_n é igual a 1 se n for par e a_n é igual a 2 se n for ímpar.

Demonstração:

Consideremos o fibrado complexo ξ' com fibra $U(m)$ e espaço base K associado a ξ. Denotemos por ξ'' o fibrado com fibra $\frac{U(m)}{U(2n-1)}$ e espaço base K associado a ξ'.

Seja $h: SO(m) \longrightarrow U(m)$ a inclusão natural e $q: U(m) \longrightarrow \frac{U(m)}{U(2n-1)}$ a projeção natural.

Pela proposição 3.10., a seção f induz seções f' e f" restritas ao (4n-1) esqueleto de K, tais que $h_*c(\xi,f) = c(\xi',f')$ e $q_*c(\xi',f') = c(\xi'',f'')$ ou seja, $q_*h_*c(\xi,f) = c(\xi'',f'')$ onde h_* e q_* são homomorfismos na cohomologia de K, induzidos pelos homomorfismos

$$h: \pi_{4n-1}(SO(m)) \to \pi_{4n-1}(U(m)) \quad \text{e}$$

$$\tilde{q}: \pi_{4n-1}(U(m)) \to \pi_{4n-1}\left(\frac{U(m)}{U(2n-1)}\right)$$

respectivamente.

De acordo com a definição 1.24., a classe de Chern $c_{2n}(\xi')$ é igual à obstrução $c(\xi'',f'')$ ou seja,

$$c_{2n}(\xi') = c(\xi'',f'').$$

Por definição, $p_n(\xi) = \pm\, c_{2n}(\xi')$. Logo,

$$p_n(\xi) = \pm\, q_*h_*c(\xi,f).$$

SO(m) é um subgrupo de U(m). Considerando o quociente $\frac{U(m)}{SO(m)}$, temos o fibrado

$$\begin{array}{ccc} SO(m) & \hookrightarrow & U(m) \\ & & \downarrow p \\ & & \frac{U(m)}{SO(m)} \end{array}$$

Seja:

$$\ldots \to \pi_{4n-1}(SO(m)) \xrightarrow{\tilde{h}} \pi_{4n-1}(U(m)) \xrightarrow{p_\#} \pi_{4n-1}\left(\frac{U(m)}{SO(m)}\right) \to$$

$$\to \pi_{4n-2}(SO(m)) \to \ldots$$

a sequência exata de homotopia desse fibrado.

Usando as computações de R. Bott:

$$\pi_{4n-1}(U(m)) \cong Z, \ \pi_{4n-2}(SO(m)) = 0, \ \pi_{4n-1}\left(\frac{U(m)}{SO(m)}\right) \cong Z_{a_n} \text{ onde}$$

$a_n = 1$ se n for ímpar e $a_n = 2$ se n for par, temos que a aplicação p_* é sobrejetora. Portanto, $\tilde{h}$ é a multiplicação por a_n.

Também, $U(2n-1)$ é um subgrupo de $U(m)$. Considerando o quociente $\frac{U(m)}{U(2n-1)}$ temos o fibrado

$$\begin{array}{ccc} U(2n-1) & \longleftrightarrow & U(m) \\ & & \downarrow q \\ & & \frac{U(m)}{U(2n-1)} \end{array}$$

Seja:

$$\ldots \to \pi_{4n-1}(U(m)) \xrightarrow{\tilde{q}} \pi_{4n-1}\left(\frac{U(m)}{U(2n-1)}\right) \xrightarrow{\Delta} \pi_{4n-2}(U(2n-1) \to$$

$$\to \pi_{4n-2}(U(m)) \to \ldots$$

a sequência exata de homotopia desse fibrado.

Usando as computações de R. Bott:

$\pi_{4n-2}(U(2n-1)) \approx Z_{(2n-1)!}$, $\pi_{4n-2}(U(m)) = 0$, temos que a aplicação Δ é sobrejetora. Portanto, $\tilde{q}$ é a multiplicação por $(2n-1)!$

Podemos então formar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{4n}(K,\pi_{4n-1}(SO(m)) & \cong & \pi_{4n-1}(SO(m)) & \cong & Z \\
\downarrow h_* & & \downarrow \tilde{h} & & \\
H^{4n}(K,\pi_{4n-1}(U(m)) & \cong & \pi_{4n-1}(U(m)) & \cong & Z \\
\downarrow q_* & & \downarrow \tilde{q} & & \\
H^{4n}(K,\pi_{4n-1}(\frac{U(m)}{U(2n-1)})) & \cong & \pi_{4n-1}(\frac{U(m)}{U(2n-1)}) & \cong & Z
\end{array}$$

e concluir que $q_* h_* c(\xi,f) = a_n(2n-1)!c(\xi,f)$.

Assim, $p_n(\xi) = \pm\, a_n(2n-1)!c(\xi,f)$ onde $a_n = 1$ se n for ímpar e $a_n = 2$ se n for par.

3.12. Definição:

Definimos j_n como sendo a ordem do grupo cíclico finito $J\pi_{4n-1}(SO(m))$, $m>4n$.

3.13. Teorema:

O número de Pontrjagin $p_1(M)$ de uma variedade diferenciável compacta quase paralelizável M de dimensão 4, é divisivel por 48.

Demonstração:

A variedade M^4 pode ser mergulhada diferenciavelmente em R^{4+m}, $m \geq 5$.

Seja ν o fibrado normal de M^4 em R^{4+m} e f uma seção do fibrado principal associado ao fibrado normal restrito a $M-x_0$.

Pela proposição 3.8., $Jc(\nu,f) = 0$ onde $c(\nu,f) \varepsilon \pi_3(SO(m)) \cong Z$ é a obstrução para a extensão de f. Logo $c(\nu,f)$ é divisivel por j_1, onde j_1 é a ordem do grupo cíclico finito $J\pi_3(SO(m)) = \pi_{m+3}(S^m)$.

Desde que $m>5$, temos que $\pi_{m+3}(S^m) \simeq Z_{24}$. ([4], pag 330).

Logo, $c(\nu,f)$ é divisivel por 24.

Pela proposição 3.11., decorre que:

$$p_1(\nu) = \pm a_1 \, c(\nu,f)$$

Sendo $a_1 = 2$, pois 1 é ímpar, segue que $p_1(\nu)$ é divisivel por 48.

Sabemos que $\tau_m \oplus \nu$ é trivial. Então $p(\tau_m \oplus \nu) = 1$. Como $p_1(\tau_m \oplus \nu) \varepsilon H^4(M,Z) \cong Z$ e Z é um grupo sem torção, temos que $p_1(M) = -p_1(\nu)$.

Portanto, $p_1(M)$ é divisivel por 48.

3.14. Teorema de Rohlin:

Seja M^4 uma variedade diferenciável compacta de dimensão 4. Se a classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ é nula, então $I(M) \equiv 0 \mod 16$.

Demonstração:

Sendo M variedade orientável com $w_2(M) = 0$, temos pela proposição 3.1. que M é quase paralelizável.

Pelo teorema 3.13, temos que $p_1(M)$ é divisivel por 48. Como $I(M) = \frac{1}{3} p_1(M)$ (esse fato segue do teorema 4.7 e do corolário 4,6 que serão demonstrados no capítulo 4), então $I(M)$ é divisivel por 16, isto é, $I(M) \equiv 0 \mod 16$.

§2. *Teorema de Kervaire e Milnor*

3.15. Definição:

Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão 4. Consideremos o homomorfismo redução módulo 2:

$$\rho_2 : H^2(M,Z) \to H^2(M,Z_2)$$

Diremos então que uma classe de homologia $\xi \varepsilon H^2(M,Z)$ é dual à classe de Stiefel-Whitney $w_2(M) \varepsilon H^2(M,Z_2)$ se, e somente se, $\rho_2(\xi) = w_2(M)$.

3.16. Lema:

Sejam $\xi \varepsilon H^2(M,Z)$ dual à classe de Stiefel - Whitney $w_2(M) \varepsilon H^2(M,Z_2)$ e $g: N^2 \longrightarrow M^4$ um mergulho diferenciável representando ξ. Seja B vizinhança tubular de N^2 em M^4.

Então $w_2(M-B) = 0$.

Demonstração:

A inclusão $i: M-B \to M$ é coberta por uma aplicação fibrada

$$\begin{tikzcd} \tau_{M-B} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tau_M \arrow[d] \\ M-B \arrow[r, "i"] & M \end{tikzcd}$$

entre os fibrados tangentes τ_{M-B} e τ_M.

Pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney $i^*(w_2(M)) = w_2(M-B)$.

A hipótese nos fornece que $\rho_2(\xi) = w_2(M)$ e $g_*[N] = \xi \cap [M]$.

Então $g_*[N] = w_2(M) \cap [M]$ com coeficientes em Z_2.

As inclusões $M-B \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} (M,M-B)$ induzem a sequência exata

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H^2(M,M-B,Z_2) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "D_1"] & H^2(M,Z_2) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "D_2"] & H^2(M-B,Z_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_3"] & \ldots \\ \to & H_2(B,Z_2) \arrow[r, "k_*"] & H_2(M,Z_2) \arrow[r, "\ell_*"] & H_2(M,B,Z_2) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

onde D_1, D_2, D_3 são os isomorfismos fornecidos pelo Teorema de Dualidade.

POrtanto, $D_3 i^*(w_2(M)) = \ell_* D_2(w_2(M))$ ou seja $D_3(w_2(M-B)) = \ell_*(w_2(M) \cap [M])$.

Como N e B têm o mesmo tipo de homotopia, temos que $k_*[B] = g_*[N] = w_2(M) \cap [M]$. Logo, $D_3(w_2(M-B)) = \ell_* k_*[B]$.

O fato da segunda sequência do diagrama acima ser exata, implica que $\ell_* k_*[B] = 0$.

Assim, $D_3(w_2(M-B)) = 0$. Sendo D_3 um isomorfismo, temos em decorrência que $w_2(M-B) = 0$.

3.17. Lema:

O complementar de um disco aberto $\overset{\circ}{D}{}^{2n+2}$ em $CP(N+1)$ é o espaço total de um fibrado sobre $CP(N)$, com fibra D^2.

Demonstração:

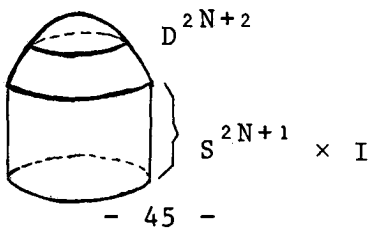
Por 1.9., sabemos que S^{2n+1} se fibra sobre $CP(N)$ com fibra S^1 relativamente a H, onde H é a aplicação de Hopf.

Seja $A = S^{2n+1} \times I \cup_H CP(N)$, onde H é a fibração de Hopf no nivel 0 e $I = [0,1]$. Definamos $\tilde{H}: A \to CP(N)$ por $\tilde{H}(x,t) = H(x)$.

Então, $D^2 \hookrightarrow A \xrightarrow{\tilde{H}} CP(N)$ é o fibrado em disco associado do fibrado: $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \xrightarrow{H} CP(N) \simeq \partial A$.

Se mostrarmos que A é o complementar de $\overset{\circ}{D}{}^{2n+1}$ em $CP(N+1)$ ou seja, se mostrarmos que $A \cup_i \overset{\circ}{D}{}^{2n+2} \cong CP(N+1)$ onde $i: S^{2n+1} \to S^{2n+1} \times \{1\}$, o lema estará provado.

Colemos D^{2n+2} a $S^{2n+1} \times I$ usando i; obtemos assim, uma variedade difeomorfa ao disco D^{2n+2}



Em seguida, colemos tal disco a CP(N) via $H: S^{2n+1} \times \{0\} \to CP(N)$.

Obtemos assim o espaço $CP(N) \cup_H D^{2n+2}$ tal que $CP(N) \cup_H D^{2n+2} \cong CP(N+1)$.

Logo, $A \cup_i D^{2n+2} \cong CP(N+1)$

3.18. Proposição:

Sejam ξ_1 e ξ_2 dois fibrados sobre S^2 com fibra S^1 e grupo estrutural S^1. Então ξ_1 é equivalente a ξ_2 se, e somente se, as classes de Euler dos fibrados em disco associados são iguais.

Demonstração:

Pelo teorema 1.33., as classes de equivalência dos fibrados sobre S^2 com grupo S^1, estão em correspondência biunívoca com as classes de equivalência dos elementos de $\pi_1(S^1) \cong Z$. Essa correspondência é dada por $\xi \to X(\alpha)$ onde α é um gerador de $\pi_2(S^2) \cong Z$ e $X: \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1)$ é o homomorfismo característico do fibrado

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xhookrightarrow{k} & \xi \\ & & \downarrow \\ & & S^2. \end{array}$$

No caso em questão, X se identifica com o homomorfismo Δ da sequência exata de homotopia:

$$\ldots \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(S^1) \xrightarrow{k_*} \pi_1(\xi) \longrightarrow \pi_1(S^2).$$

Seja $D^2 \hookrightarrow \bar{\xi}$ o fibrado em disco associado ao fibrado ξ.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ S^2 \end{array}$$

Pela dualidade de Lefschetz, $H_2(\bar{\xi},Z) \cong H^2(\bar{\xi},\partial\bar{\xi}=\xi,Z) \cong Z$.

A classe de Thom é definida como sendo a única classe $\mu \in H^2(\bar{\xi},\xi,Z)$, cuja restrição $\mu\big|_{(D^2,S^1)} \in H^2(D^2,S^1,Z)$ é o gerador escolhido μ_{D^2} para cada fibra D^2 de $\bar{\xi}$.

Seja $\tilde{i}^*: H^2(\bar{\xi},\xi,Z) \longrightarrow H^2(D^2,S^1,Z)$,

$$\mu \longrightarrow \tilde{i}^*(\mu) = \mu_{D^2}$$

induzido pela inclusão da fibra $\tilde{i}: (D^2,S^1) \longrightarrow (\bar{\xi},\xi)$.

Desde que $H^2(D^2,S^1,Z) \simeq Z$ e $\tilde{i}^*(\mu) = \mu_{D^2}$ onde μ_{D^2} é gerador de $H^2(D^2,S^1,Z)$ então $\tilde{i}^*$ é sobrejetora.

Assim, μ é um gerador de $H^2(\bar{\xi},\xi,Z)$.

As inclusões $\xi \xrightarrow{i} \bar{\xi} \xrightarrow{j} (\bar{\xi},\xi)$ induzem a sequência exata:

$$\ldots H^1(\xi,Z) \to H^2(\bar{\xi},\xi,Z) \xrightarrow{j^*} H^2(\bar{\xi},Z) \xrightarrow{i^*} H^2(\xi,Z) \to H^3(\bar{\xi},\xi,Z) \to \ldots$$

Pela dualidade de Lefschetz temos que $H^3(\bar{\xi},\xi,Z) \cong H_1(\bar{\xi},Z) = 0$. Logo, i^* é sobrejetora e a sequência acima se resume em:

$$\ldots \to H^2(\bar{\xi},\xi,Z) \xrightarrow{j^*} H^2(\bar{\xi},Z) \xrightarrow{i^*} H^2(\xi,Z) \to 0$$

Analisemos mais adequadamente a sequência exata de homotopia do fibrado ξ:

$$\ldots \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(\xi) \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(S^1) \xrightarrow{k^*} \pi_1(\xi) \to 0$$

Sendo $\pi_1(S^1) \cong Z$ e k^* sobrejetora, temos que $\pi_1(\xi)$ é abeliano e mais ainda, $\pi_1(\xi) \cong Z_n$ para algum n.

Sabemos que o quociente de $\pi_1(\xi)$ pelo seu subgrupo comutador é isomorfo a $H_1(\xi,Z)$. Então, $\pi_1(\xi) \cong H_1(\xi,Z)$.

Pela dualidade de Poincaré temos que $H^2(\xi,Z) \cong H_1(\xi,Z)$. Logo, $H^2(\xi,Z) \cong Z_n$ para algum inteiro n e portanto j^* é multiplicação por n ou seja, $j^*(\mu) = n\alpha$ onde α é um gerador de $H^2(\bar{\xi},Z)$.

A menos do isomorfismo de Hurewicz $h: H_2(S^2,Z) \leftrightarrow \pi_2(S^2)$, o homomorfismo Δ é um elemento pertencente ao $\mathrm{Hom}(H_2(S^2,Z),Z)$ que pelo teorema dos coeficientes universais é isomorfo a $H^2(S^2,Z)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S^2) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"'] & \pi_1(S^1) \cong Z \\
H_2(S^2,Z) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Decorre ainda da sequência exata de homotopia do fibrado ξ que $\dfrac{\pi_1(S^1)}{\ker k^*} \simeq \pi_1(\xi) \cong Z_n$. Como $\ker k^* = \mathrm{im}\,\Delta$ então $\Delta(\gamma) = n$ onde $\gamma \in \pi_2(S^2)$ é um gerador.

Se provarmos que $\Delta oh = e(\bar{\xi})$ onde $e(\bar{\xi})$ é a classe de Euler do fibrado $\bar{\xi}$, estará provado que o fibrados ξ sobre S^2 com fibra S^1 e grupo estrutural S^1, podem ser classificados pelas classes de Euler dos respectivos fibrados $\bar{\xi}$ em disco associados isto é, se ξ_1 e ξ_2 são fibrados com fibra S^1 e grupo estrutural S^1 sobre S^2 então, eles são equivalentes $\Longleftrightarrow$ $e(\bar{\xi}_1) = e(\bar{\xi}_2)$.

Provemos pois que $\Delta oh = e(\bar{\xi})$. Para isto, basta avaliar ambas as classes num gerador de $H_2(S^2,Z)$.

Antes, observemos que $e(\bar{\xi}) = \phi^* j^*(\mu)$ onde ϕ^* é o inverso do isomorfismo $p^*: H^2(S^2,Z) \to H^2(\bar{\xi},Z)$, induzido pela projeção $p: \bar{\xi} \to S^2$.

Assim, $e(\bar{\xi}) = \phi^* j^*(\mu) = \phi^*(n\alpha) = n\phi^*(\alpha) = n\alpha'$ onde α' é um gerador $H^2(S^2,Z)$.

$$\begin{tikzcd}
H^2(S^2,Z) \arrow[dr, dashed, "p^*"'] & H^2(\bar{\xi},Z) \arrow[l, "\phi^*"'] \arrow[d, "j^*"] \\
& H^2(\bar{\xi},\xi,Z)
\end{tikzcd}$$

Portanto, $< e(\bar{\xi}), [S^2] > = < n\alpha', [S^2] > = n$.

Sendo $[S^2] \in H_2(S^2,Z)$ um gerador e h um isomorfismo, temos que $h[S^2] = \gamma$ onde γ é um gerador de $\pi_2(S^2)$.

Logo, $\Delta oh[S^2] = \Delta(\gamma) = n$.

3.19. Lema:

Consideremos o mergulho $i: CP(N) \to CP(N+1)$, $N \geq 1$. Se $\alpha \in H^2(CP(N+1),Z)$ é um gerador então:

a) $i^*(\alpha) = e(\nu_i)$ onde $e(\nu_i)$ denota a classe de Euler do fibrado normal de $CP(N)$ em $CP(N+1)$.

b) $e(\nu_i) \in H^2(CP(N),Z)$ é um gerador.

Demonstração:

Consideremos $\begin{array}{c}\nu_i \\ \downarrow \\ CP(N)\end{array}$ o fibrado normal de $CP(N)$ em $CP(N+1)$

cujo bordo $\partial\nu_i$, considerado como fibrado normal em esferas, é a fibração de Hopf.

Do lema 3.17, temos que $\begin{array}{c}CP(N+1) - \overset{o}{D}{}^{2n+2} \\ \downarrow \\ CP(N)\end{array}$ é o fibrado em disco associado ao fibrado de Hopf. Assim, $\nu_i \cong CP(N+1) - \overset{o}{D}{}^{2n+2}$

Se $e(\nu_i)$ é a classe de Euler do fibrado normal de $CP(N)$ em $CP(N+1)$ então por definição, $e(\nu_i) = \pi^{*-1} j^*(\mu)$ onde $\mu \in H^2(\nu_i, \partial\nu_i, Z) \cong H^2(CP(N+1),Z)$ é a classe de Thom e $j^*: H^2(\nu_i, \partial\nu_i, Z) \to H^2(\nu_i, Z)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão natural $j: \nu_i \to (\nu_i, \partial\nu_i)$.

Desde que a aplicação $c: (\nu_i, \partial\nu_i) \to \frac{\nu_i}{\partial\nu_i}$ induz o isomorfismo $c^*: H^2(\nu_i, \partial\nu_i, Z) \to H^2(\frac{\nu_i}{\partial\nu_i}, Z)$, podemos formar

o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^2(CP(N),Z) \arrow[r, "\pi^*"] & H^2(\nu_i,Z) \\
 & H^2(\nu_i,\partial\nu_i,Z) \arrow[u, "j^*"] \\
 & H^2\left(\frac{\nu_i}{\partial\nu_i},Z\right) \simeq H^2(CP(N+1),Z) \arrow[u, "c^*"] \arrow[ul, "i^*"]
\end{tikzcd}$$

Assim, se $\alpha\varepsilon\ H^2(CP(N+1),Z)$ é um gerador então:

$$i^*(\alpha) = \pi^{*^{-1}} j^* c^*(\alpha) = \pi^{*^{-1}} j^*(\mu) = e(\nu_i)$$

Falta mostrar que $e(\nu_i)\varepsilon\ H^2(CP(N),Z)$ é um gerador.

Consideremos as inclusões:

$$CP(N) \xrightarrow{i} CP(N+1) \xrightarrow{k} (CP(N+1),CP(N))$$

Elas induzem em nivel de cohomologia a sequência exa ta:

$$\ldots \to H^2(CP(N+1),CP(N)) \xrightarrow{k^*} H^2(CP(N+1)) \xrightarrow{i^*} H^2(CP(N)) \to$$

$$\to H^3(CP(N+1),CP(N)) \to \ldots$$

Temos que:

$$H^2(CP(N+1),CP(N)) \cong H^2(\frac{CP(N+1)}{CP(N)}) \cong H^2\left(\frac{CP(N)\cup_H D^{2n+2}}{CP(N)}\right) \cong$$

$$H^2(S^{2n+2}) = 0.$$

$$H^3(CP(N+1),CP(N)) \cong H^3(S^{2n+2}) = 0$$

Portanto, i^* é um isomorfismo. Como $\alpha \varepsilon H^2(CP(N+1),Z)$ é um gerador e i^* leva gerador em gerador, concluimos que $e(\nu_i)$ é um gerador de $H^2(CP(N),Z)$.

3.20. Teorema de Kervaire e Milnor:

Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão 4. Seja $\xi \varepsilon H^2(M,Z)$ a classe de homologia dual à classe de Stiefel-Whitney $w_2(M) \varepsilon H^2(M,Z_2)$. Se ξ é representada por um mergulho diferenciável de esfera S^2 em M então, o número de auto-intersecções $\xi.\xi$ deve ser congruente a I(M) módulo 16.

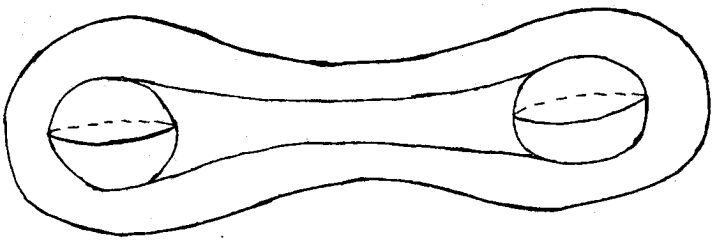
Demonstração:

Suponhamos $\xi.\xi$ não positivo. Podemos supor isso pois se $\xi.\xi>0$, consideramos $\tilde{M} = -M$.

Chamemos $s = -\xi\xi$. Seja $L = CP_1(2) \# \ldots \# CP_{s+1}(2)$ a soma conexa de (s+1) cópias do CP(2), com $\alpha_i \varepsilon H^2(CP_i(2),Z)$

um gerador. Seja $M_1 = M \# L$.

Para cada $CP_i(2)$, temos um mergulho da esfera S^2 em $CP_i(2)$ representando α_i. Assim, temos um mergulho da esfera S^2 em L representando $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_{s+1}$. Por hipótese, ξ é representada por um mergulho da esfera S^2 em M.



Conectemos essas duas eferas por uma vizinhança tubular de um caminho que as une. Usando o isomorfismo natural:

$$t: H^2(M,Z) \oplus H^2(CP_1(2),Z) \oplus \ldots \oplus H^2(CP_{s+1}(2),Z) \to$$

$\to H^2(M_1,Z)$ seja $\eta = t(\xi \oplus \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_{s+1})$. Notemos que $\eta.\eta = \xi.\xi + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 = -s + s + 1 = 1$.

Assim, concluimos que η pode ser representada por um mergulho diferenciável $g: S^2 \longrightarrow M_1$.

Consideremos o mergulho $S^2 \cong CP(1) \xhookrightarrow{i} CP(2)$ e seja ν_i o fibrado normal de CP(1) em CP(2) cujo bordo $\partial\nu_i$, con-

$$\begin{array}{c} \nu_i \\ \downarrow \\ CP(1) \end{array}$$

siderado como o fibrado normal em esferas S^1, é a fibração de Hopf.

Do lema 3.17., temos que $CP(2) - \overset{o}{D}{}^4$ se fibra sobre CP(1) com fibra D^2 e que, o fibrado em esferas associado, é

a fibração de Hopf.

Então $\nu_i \cong CP(2) - \overset{o}{D}{}^4$.

Seja $\begin{array}{c}\nu_g\\ \downarrow\\ S^2\end{array}$ o fibrado normal de S^2 em M_1. Afirmamos que

a classe de Euler $e(\nu_g) \varepsilon\ H^2(S^2,Z)$ é um gerador.

De fato, pelo lema 3.19., temos que $i^*(\alpha) = e(\nu_i)$;pelo teorema 2.9., temos que $g_*[S^2] = \eta \cap [M_1]$ e pelo teorema 1.3. que, $j^*(e(\nu_i)) = e(\nu_g)$.

Assim, $e(\nu_g) = j^*(e(\nu_i)) = j^*(i^*(\alpha)) = (ioj)^*(\alpha) =$

$= (qog)^*(\alpha) = g^*q^*(\alpha) = g^*(\eta)$. isto é,

$e(\nu_g)[S^2] = g^*(\eta)[S^2] = \langle g^*(\eta),[S^2]\rangle = \langle \eta, g_*[S^2]\rangle =$

$= \langle \eta, \eta \cap [S^2]\rangle = \langle \eta,\eta,[S^2]\rangle = 1.$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\ q\ } & CP(2) \\ g\uparrow & & \uparrow i \\ S^2 & \xrightarrow[\ j\ ]{} & CP(1) \cong S^2 \end{array}$$

Agora, pela proposição 3.18., concluimos que o fibrado normal em esferas S^1 associado a ν_g é a fibração de Hopf.

Logo, $\nu_g \cong CP(2) - \overset{o}{D}{}^4$.

Seja $M_2 = (M_1 - \overset{o}{\nu}_g) \cup_{I_{S^3}} D^4$. Temos que:

$M_2 \# CP(2) \cong (M_2 - \overset{o}{D}{}^4) \cup (CP(2) - \overset{o}{D}{}^4) \cong (M_2 - \overset{o}{D}{}^4) \cup \overset{o}{\nu}_g \cong M_1$ ou

seja, M_1 é difeomorfa à soma conexa $M_2 \# CP(2)$.

Então, $I(M_1) = I(M_2) + 1$, pois $I(CP(2)) = 1$.

A inclusão $k: M_1 - \mathring{\nu}_g \longrightarrow M_2$ é coberta por uma aplicação fibrada de $\tau_{M_1-\mathring{\nu}_g}$ em τ_{M^2}.

$$\begin{tikzcd}
\tau_{M_1-\mathring{\nu}_g} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tau_{M_2} \arrow[d] \\
M_1-\mathring{\nu}_g \arrow[r, "k"'] & M^2
\end{tikzcd}$$

Pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney, $k^*(w_2(M_2)) = w_2(M_1-\mathring{\nu}_g)$.

Pelo lema 3.16., temos que $w_2(M_1-\mathring{\nu}_g) = 0$. Assim, $k^*(w_2(M_2)) = 0$.

Consideremos a sequência exata:

$$\ldots \to H^1((M_1-\mathring{\nu}_g) \cap D^4) \to H^2((M_1-\mathring{\nu}_g) \cup_{I_{S^3}} D^4) \xrightarrow{k^*} H^2(M_1-\mathring{\nu}_g) \to \ldots$$

Como $H^1((M_1-\mathring{\nu}_g) \cap D^4) \cong H^1(S^3) = 0$, segue que k^* é injetiva. Por conseguinte, $w_2(M_2) = 0$.

Portanto, pelo teorema de Rohlin, $I(M_2) \equiv 0 \bmod 16$ e daí $I(M_1) \equiv 1 \bmod 16$.

Sendo $M_1 = M \# L$ e L a soma conexa de $s + 1$ cópias do espaço projetivo complexo, temos que:

$$I(M_1) = I(M) + s + 1 = I(M) - \xi\xi + 1$$

ou seja, $I(M) - \xi\xi + 1 \equiv 1 \mod 16$, isto é,

$$\xi\xi \equiv I(M) \mod 16 \qquad \text{c.q.d.}$$

CAPÍTULO 4

Neste capítulo apresentaremos exemplos de variedades que satisfazem o Teorema de Rohlin e faremos algumas aplicações do Teorema de Kervaire e Milnor.

Antes, porém, reuniremos alguns fatos básicos sobre sequência multiplicativa, os quais constituem ferramentas básicas para o desenvolvimento deste capítulo.

§1. Sequência Multiplicativa

4.1. Definição:

Seja A um anel comutativo com elemento unidade. Sejam $p_0 = 1$ e $p_1, p_2, \ldots$ indeterminadas.

Consideremos $\mathcal{A} = A[p_1, p_2, \ldots]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $p_1, p_2, \ldots$ com coeficientes em A.

O produto $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_r^{j_r}$ tem peso $j_1 + 2j_2 + \ldots + rj_r$ e $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k$ onde $\mathcal{A}_k$ é o grupo aditivo desses polinômios que contém somente termos de peso k e $\mathcal{A}_0 = A$. O grupo $\mathcal{A}_k$ é um módulo sobre A, cujo posto é igual ao número $\pi(k)$ de partições de k.

4.2. Definição:

Seja $\{K_j\}$ uma sequência de polinômios nas indeterminadas p_i com $K_0 = 1$ e $K_j \in \mathcal{A}_j (j=0,1,\ldots)$. A sequência $\{K_j\}$ é chamada uma sequência multiplicativa (ou m-sequência), se toda igualdade:

$$1 + p_1 Z + p_2 Z^2 + \ldots = (1+p_1' Z + p_2' Z^2 + \ldots)(1+p_1'' Z + p_2'' Z^2 + \ldots)$$

com Z, p_i', p_i'' indeterminadas, implicar na igualdade

$$\sum_{r=0}^{\infty} K_r(p_1,\ldots,p_r)Z^r = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(p_1',\ldots,p_i')Z^i . \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1'',\ldots,p_j'')Z^j$$

Numa notação abreviada, podemos escrever:

$$K(\sum_{j=0}^{\infty} p_i Z^i) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_j)Z^j$$

4.3. Definição:

A série de potencias $K(1+Z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i Z^i$ $(b_0 = 1, b_i = K_i(1,0,\ldots 0) \in A)$ é chamada série de potências característica da m-sequência $\{K_j\}$.

4.4. Lema:

A m-sequência $\{K_j\}$ é completamente determinada por sua série de potencias característica $Q(Z) = K(1+Z)$.

Demonstração:

Consideremos a fatorização:

$$1 + p_1 Z + \ldots + p_m Z^m, = \prod_{i=1}^{m} (1+\beta_i Z^m).$$

Os elementos p_i são pois, olhados como funções simétricas elementares em $\beta_1,\ldots,\beta_m$. O anel $\mathcal{A}$ é então o anel de todos os polinômios simétricos em $\beta_1,\ldots,\beta_m$ com coeficientes em A.

Temos que:

$$\sum_{j=0}^{m} K_j(p_1,\ldots,p_j)Z^j + \sum_{j=m+1}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_m,0,\ldots,0)Z^j.$$

$$1 + K_1(p_1)Z + K_2(p_1,p_2)Z^2 + \ldots + K_m(p_1,\ldots,p_m)Z^m +$$

$$+ K_{m+1}(p_1,\ldots,p_m,0)Z^{m+1} + K_{m+2}(p_1,\ldots,p_m,0,0)Z^{m+2} + \ldots =$$

$$K(1+p_1Z+p_2Z^2+\ldots+p_mZ^m+0Z^{m+1}+0Z^{m+2}+\ldots) =$$

$$= K(\sum_{i=1}^{m} p_i Z^i) = K(\prod_{i=1}^{m} (1+\beta_i Z) = \prod_{i=1}^{m} K(1+\beta_i Z) = \prod_{i=1}^{m} Q(\beta_i Z)$$

Assim, qualquer polinômio K_j com $j \leq m$ é determinada como um polinômio simétrico em β_i e assim como um polinômio simétrico em p_i. Isso vale para todo m.

Logo, a prova está completa.

4.5. Lema:

Para toda série de potências $Q(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i Z^i (b_0 = 1, b_i \varepsilon A)$, existe uma m-sequência $\{K_j\}$ associada, com $K(1+Z) = Q(Z)$.

Demonstração:

Consideremos a fatorização: $1 + p_1 Z + p_2 Z^2 + \ldots + p_m Z^m = \prod_{i=1}^{m} (1+\beta_i Z)$ e o produto $\prod_{i=1}^{m} Q(\beta_i Z)$.

O coeficiente de Z^j neste produto é simétrico nos β_i e homogêneo de peso j. Então, pode ser expresso como um polinômio $K_j^{(m)}(p_1, \ldots, p_j)$ de peso j, de um único modo. Como K_j^m não depende de m para $m \geq j$, definimos $K_j = K_j^m$ para $m \geq j$. A sequência $\{K_j\}$ é a sequência multiplicativa procurada.

(para maior detalhes, consultar [3], pag 10).

Observação:

Os lemas 4.4 e 4.5, mostram que existe uma correspondência biuníboca entre as m-sequências e as séries de potências com primeiro termo constante e igual a 1.

4.6. Corolário:

Dada a série de potências:

$$Q(Z) = \frac{\sqrt{Z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{Z}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{K-1} \frac{2^{2K}}{(2K)!} B_K Z^K =$$

$$= 1 + 2B_1 Z - \frac{2}{3} B_2 Z^2 + \frac{4}{45} B_3 Z^3 - \frac{2}{315} B_4 Z^4 + \ldots$$ onde os coeficientes B_K são os números de Bernoulli: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, etc ... então, existe uma e somente uma sequência multiplicativa com $Q(Z)$ como série de potências característica. Essa sequência multiplicativa é denotada por $\{L_j(p_1,\ldots,p_j)\}$ e os quatro primeiros termos dela são:

$$L_1 = \frac{1}{3} p_1$$

$$L_2 = \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2)$$

$$L_3 = \frac{1}{3^3.5.7} (62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)$$

$$L_4 = \frac{1}{3^4.5^2.7} (381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4)$$

Demonstração:

A existência e unicidade da sequência multiplicativa $\{L_j(p\ ,\ldots,p_j)\}$ decorrem imediatamente dos lemas 4.4 e 4.5.

Vamos usar o lema 4.5, e calcular os dois primeiros

termos L_1 e L_2 da m-sequência $\{L_j\}$.

Seja m = 1. Então $L_j = L_j^1$ para $1 \geq j$, isto é $L_1 = L_1^1$.

Considerando a fatorização $1 + p_1 Z = 1 + \beta_1 Z$, temos que:

$$1 + L_1(p_1)Z + \sum_{j=2}^{\infty} L_j(p_1,0,\ldots,0)Z^j = Q(\beta_1 Z) = Q(p_1 Z) =$$

$$= 1 + 2B_1 p_1 Z - \frac{2}{3} B_2 p_1^2 Z^2 + \ldots.$$

Então $L_1(p_1) = 2B_1 p_1 = 2.\ \frac{1}{6}\ p_1$ e portanto $L_1(p_1) = \frac{1}{3}\ p_1$

Seja m = 2. Então $L_j = L_j^2$ para $2 \geq j$, isto é, $L_1 = L_1^2$, $L_2 = L_2^2$.

Considerando a fatorização $1 + p_1 Z + p_2 Z^2 = (1+\beta_1 Z)(1+\beta_2 Z)$ temos:

$$1 + L_1(p_1)Z + L_2(p_1,p_2)Z^2 + \sum_{j=3}^{\infty} L_j(p_1,p_2,0,\ldots,0)Z^j =$$

$$= Q(\beta_1 Z)Q(\beta_2 Z) =$$

$$= (1+2B_1\beta_1 Z - \frac{2}{3} B_2\beta_1^2 Z^2 + \ldots)(1+2B_1\beta_2 Z - \frac{2}{3} B_2\beta_2^2 Z^2 + \ldots) =$$

$$= 1 + 2B_1(\beta_1+\beta_2)Z + (-\frac{2}{3} B_2\beta_1^2 + 4B_1^2\beta_1\beta_2 - \frac{2}{3} B_2\beta_2^2) + \ldots.$$

Então,

$$L_1 = 2B_1(\beta_1+\beta_2) = 2.\ \frac{1}{6}.(\beta_1+\beta_2) = \frac{1}{3}\ (\beta_1+\beta_2)$$

e

$$L_2 = -\frac{2}{3} B_2\beta_1^2 + 4B_1^2\beta_1\beta_2 - \frac{2}{3} B_2\beta_2^2 = -\frac{2}{3} B_2(\beta_1^2+\beta_2^2) + 4B_1^2\beta_1\beta_2 =$$

$$= -\frac{1}{45} (\beta_1^2+\beta_2^2) + \frac{1}{9} \beta_1\beta_2.$$

Sendo $1 + p_1Z + p_2Z^2 = (1+\beta_1 Z)(1+\beta_2 Z) = 1 +(\beta_1+\beta_2)Z +$

$+ \beta_1\beta_2 Z^2$, temos:

$$\begin{cases} p_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ p_2 = \beta_1 \cdot \beta_2 \end{cases}$$

Isso implica que $\beta_1^2 + \beta_2^2 = p_1^2 - 2p_2$.

Como $L_1 = \frac{1}{3} (\beta_1+\beta_2)$ então $L_1 = \frac{1}{3} p_1$

e

como $L_2 = -\frac{1}{45} (\beta_1^2+\beta_2^2) + \frac{1}{9} \beta_1\beta_2$ então

$$L_2 = -\frac{1}{45} (p_1^2-2p_2) + \frac{1}{9} p_2$$

ou seja, $L_2 = \frac{1}{45} (7p_2-p_1^2)$.

4.7. Teorema do Índice de Hirzebruch:

Seja $\{L_j(p_1,\ldots,p_2)\}$ a sequência multiplicativa cuja série de potências característica é $Q(Z) = \dfrac{\sqrt{Z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{Z}}$. Então o índice $I(M^{4k})$ de uma variedade diferenciável compacta e

orientada M^{4k} é dado por: $I(M^{4k}) = L_k(p_1,\ldots,p_k)(M^{4k})$

onde p_i é i-ésima classe de Pontrjagin da variedade M. ([9], pag 225).

4.8. Teorema:

Sejam M^n uma variedade diferenciável compacta e orientada e $j: V^{n-2} \to M^n$ um mergulho de uma subvariedade orientada V^{n-2} de M^n. Seja $v \in H^2(M^n,Z)$ a classe de cohomologia dual da classe de homologia representada por V^{n-2} ou seja, $j_*(V^{n-2}) = v \cap (M^n)$. Então:

$$I(V^{n-2}) = x^n(\mathrm{tgh}\ v \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(M^n),\ldots,p_i(M^n)))$$

onde x^n é definido por $x^n(\mu) = \mu^n(M^n)$ e μ^n é a n-ésima componente de um elemento $\mu \in \sum_{k=0}^{\infty} H^k(M^n,Z)$.

Demonstração:

Se $\tau_{V^{n-2}}$ e τ_{M^n} são os fibrados tangentes de V^{n-2} e M^n respectivamente e ν é o fibrado normal de V^{n-2} em M^n, então: $j^* \tau_{M^n} = \tau_{V^{n-2}} \oplus \nu$.

Sejam $p(V^{n-2})$ e $p(M^n)$ as classes de Pontrjagin (total) de V^{n-2} e M^n respectivamente.

De 1.26, temos que $p_1(\nu) = e^2(\nu)$. Como $p(\nu) = 1 + p_1(\nu)$

segue que $p(\nu) = 1 + e^2(\nu)$.

Desde que $j^*v = e(\nu)$ ([3], pag 69) então, $p(\nu) = 1 + e^2(\nu) = 1 + (j^*v)^2 = j^*(1+v^2)$.

Portanto, $j^*p(M^n) = p(V^{n-2}).\ j^*(1+v^2)$.

isto é,

$$p(V^{n-2}) = j^*[(1+v^2)^{-1}.p(M^n)].$$

Sendo $\{L_j(p\ ,\ldots,p_j)\}$ uma m-sequência que corresponde à série de potências $\dfrac{\sqrt{Z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{Z}}$, a definição de m-sequência implica que:

$$L(\sum_{i=0}^{\infty} p_i(V^{n-2})) = j^*[L(1+v^2)^{-1}.\ L(\sum_{i=0}^{\infty} p_i(M))]$$

isto é,

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_1(p_1(V^{n-2}),\ldots,p_i(V^{n-2})) = j^*(\frac{\operatorname{tgh}v}{v}.\sum_{i=0}^{\infty} L_i(P_1(M),\ldots,p_i(M))$$

O mergulho $j\colon V^{n-2} \hookrightarrow M^n$ induz o homomorfismo $j^*\colon H^{n-2}(M,Z) \to H^{n-2}(V^{n-2},Z)$.

Assim,

$$\langle j^*(x),[V^{n-2}]\rangle = \langle x,j_*[V^{n-2}]\rangle = \langle x,v \cap [M^n]\rangle = \langle v.x,[M^n]\rangle$$

isto é, $j^*(x)[V^{n-2}] = v.x[M^n]$.

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(V^{n-2}),\ldots,p_i(V^{n-2}))[V^{n-2}] =$$

$$= j^*[\frac{tghv}{v} \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(M),\ldots,p_i(M))][V^{n-2}] =$$

$$= v.[\frac{tghv}{v} \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(M),\ldots,p_i(M))][M^n] =$$

$$= (tghv. \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(M),\ldots,p_i(M)))[M^n].$$

Então, pelo teorema do índice de Hirzebruch:

$$I(V^{n-2}) = x^n[tghv. \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1(M^n),\ldots,p_i(M^n))]$$

4.9. Observação:

Se $n = 6$, então $I(V^4) = \frac{1}{3}(-v^3+p_1(v))[M^6]$. onde $v \in H^2(M,Z)$ e $p_1 \in H^4(M,Z)$.

De fato,

$$I(V^4) = x^6[tghv. \sum_{i=0}^{\infty} L_i(p_1,\ldots,p_i)] =$$

$$= x^6[(v- \frac{1}{3} v^3+ \frac{2}{15} v^5-\ldots)(1+L_1(p_1)+L_2(p_1,p_2)+\ldots)]$$

Por 4.6. temos que $L_1(p_1) = \frac{1}{3} p_1$ e $L_2(p_1,p_2) = \frac{1}{45}(7p_2-p_1^2)$.

Então,

$$I(V^4) = x^6\{(v-\frac{1}{3}v^3+\frac{2}{15}v^5\ldots)(1+\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2)+\ldots)\} =$$

$$= x^6(v-\frac{1}{3}v^3+\ldots+\frac{1}{3}p_1v-\frac{1}{9}p_1v^3+\ldots) = (-\frac{1}{3}v^3+\frac{1}{3}p_1v)[M^6]$$

ou seja, $I(V^4) = \frac{1}{3}(p_1v-v^3)[M^6]$.

4.10. Definição:

Seja CP(3) o espaço projetivo complexo.

Chamaremos de V(n) as subvariedades $V(n) \underset{j}{\hookrightarrow} CP(3)$ de dimensão 4, tais que $j_*[V(n)] = n\alpha \cap [CP(3)]$ onde

$$\alpha \in H^2(CP(3),Z)$$

é um gerador.

4.11. Teorema:

O índice de V(n) é dado por:

$$I(V(n)) = \frac{n(4-n^2)}{3}$$

Demonstração:

Pela observação 4.9.,

$$I(V(n)) = \frac{1}{3}[p_1(CP(3))n\alpha - n^3\alpha^3][CP(3)]$$

Sabemos que:

$$p_1(CP(3)) = 4\alpha^2 \quad \text{onde} \quad \alpha \in H^2(CP(3),Z)$$

é um gerador.

Assim,

$$I(V(n)) = \frac{1}{3}(4n\alpha^3 - n^3\alpha^3)[CP(3)] = \frac{1}{3}n(4-n^2)\alpha^3[CP(3)].$$

Portanto,

$$I(V(n)) = \frac{1}{3}n(4-n^2)$$

§2. *Exemplos de Variedades que Satisfazem o Teorema de Rohlin:*

4.12. Proposição:

As variedades V(n), com n par, satisfazem o Teorema de Rohlin:

Demonstração:

Mostremos primeiramente que, se n é par então

$$w_2(V(n)) = 0$$

Sejam $\tau_{V(n)}$ e $\tau_{CP(3)}$ os fibrados tangentes de V(n) e CP(3) respectivamente. Seja ν o fibrado normal de V(n) em CP(3). Então, $j^*\tau_{CP(3)} = \tau_{V(n)} \oplus \nu$.

Sejam $w(V(n))$ e $w(CP(3))$ as classes de Stiefel-Whitney (total) de $V(n)$ e $CP(3)$ respectivamente.

Assim, $j^*w(CP(3)) = w(V(n)).w(\nu)$.

Desde que $j^*(n\alpha) = e(\nu)$ segue que, $j^*(1+n\alpha) = 1+e(\nu)$.

Como a redução módulo 2 leva a classe de Euler $e(\nu)$ na classe de Stiefel-Whitney $w_2(\nu)$, temos que,

$$\rho_2 j^*(1+n\alpha) = 1 + w_2(\nu)$$

Desde que ν é orientado, $w_1(\nu) = 0$ e por conseguinte, $w(\nu) = 1 + w_2(\nu) = \rho_2 j^*(1+n\alpha) = j^*\rho_2(1+n\alpha)$.

Portanto, $j^*w(CP(3)) = w(V(n)).j^*\rho_2(1+n\alpha)$ e então, $w(V(n)) = j^*[\rho_2(1+n\alpha)^{-1}.w(CP(3))]$.

Sendo $w(CP(3)) = 1$, segue que:

$$w(V(n)) = j^*\rho_2(1+n\alpha)^{-1} = j^*\rho_2(1+n\alpha+n^2\alpha^2+n^3\alpha^3)$$

Logo, $w_2(V(n)) = j^*\rho_2(n\alpha)$ e dai temos que, se n é par então $w_2(V(n)) = 0$.

Mostremos agora que, se n é par então $I(V(n)) \equiv 0 \mod 16$.

De 4.11. segue que $I(V(n)) = \frac{1}{3}\, n(4-n^2)$. Como n é par, então $n = 2k$, $k \in Z$. Portanto, $I(V(n)) = \frac{1}{3} \cdot 2k(4-4k^2) = \frac{1}{3} \cdot 8k(1-k^2) = \frac{1}{3} \cdot 8k.(1-k)(1+k)$.

Se k é par, é imediato que $I(V(n)) \equiv 0 \mod 16$.

Se k é impar então $k + 1$ é par e também para esse caso, $I(V(n)) \equiv 0 \mod 16$.

Assim, para todo n par temos $I(V(n)) \equiv 0 \bmod 16$.

Como consequência dos resultados acima, podemos exibir exemplos de variedades diferenciáveis $V(n)$ que bordam uma variedade diferenciável não orientável Ω^5 compacta, mas, que não bordam uma variedade diferenciável compacta Ω^5 orientável. Assim, temos :

4.13. Corolário:

Se n é par, então $V(n)$ é bordo de uma variedade diferenciável compacta Ω^5 de dimensão 5. Para $n \neq 2$, Ω^5 é necessariamente não orientável.

Demonstração:

Sejam $n_1 = w_1^4(V(n))$, $n_2 = w_1^2 \cdot w_2(V(n))$, $n_3 = w_1 \cdot w_3(V(n))$, $n_4 = w_2^2(V(n))$ e $n_5 = w_4(V(n))$ os números de Stiefel-Whitney tney da variedade $V(n)$.

Como $V(n)$ é orientada, então $w_1(V(n) = 0$. Logo, $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Na proposição 4.12. foi visto que, se n é par então $w_2(V(n) = 0$.

Por hipotese, n é par; assim $n_4 = 0$.

Por 1.19. temos que $e(V(n))(V(n)) = \chi(V(n))$. Como a redução módulo 2 leva a classe de Euler $e(V(n))$ na classe de Stiefel-Whitney $w_4(V(n))$ então, $w_4(V(n))(V(n)) = \chi(V(n)))$ mod 2 isto é, $n_5 = \chi(V(n))$ mod 2. Por 2.2.c, temos que

$I(V(n)) \equiv \chi(V(n)) \bmod 2$. Desde que por hipótese n é par, segue de 4.12 que $I(V(n)) \equiv 0 \bmod 16$. Portanto, $n_5 = 0$.

Assim, se n é par temos que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 0$ e pelo teorema 1.8. podemos concluir que V(n) é bordo de uma variedade diferenciável compacta de dimensão 5.

Sabemos que $I(V(n)) = \frac{1}{3} n(4-n^2)$. Se n é par e $n \neq 2$, então $I(V(n)) \neq 0$. Logo, pela propriedade 2.2.e., concluimos que Ω^5 é necessariamente não orientável.

§3. *Aplicações do Teorema de Kervaire e Milnor*

4.14. Proposição:

Não existe mergulho diferenciável $S^2 \underset{e}{\hookrightarrow} CP(2)$ representando a classe 3α.

Demonstração:

Como $w_2(CP(2)) = \alpha \in H^2(CP(2), Z_2)$ e $\rho_2(3\alpha) = \alpha = w_2(CP(2))$ temos que, 3α é classe de homologia dual da classe de Stiefel-Whitney $w_2(CP(2)) \in H^2(CP(2), Z_2)$.

Desde que $I(CP(2)) = 1$ e $\xi.\xi[CP(2)] = \langle 3\alpha \cup 3\alpha, [CP(2)]\rangle = \langle 9\alpha^2, [CP(2)]\rangle = 9$, então:

$$\xi.\xi \not\equiv I(CP(2)) \mod 16.$$

Assim, pelo teorema de Kervaire e Milnor, a classe 3α não pode ser representada por qualquer mergulho diferen

ciável e: $S^2 \hookrightarrow CP(2)$.

4.15. Proposição:

A classe de homologia $\xi = 5\alpha \in H^2(CP(2),Z)$ não pode ser representada por qualquer mergulho diferenciável e: $S^2 \hookrightarrow CP(2)$.

Demonstração:

Temos que $\xi = 5\alpha$ é classe de homologia dual da classe de Stiefel-Whitney $w_2(CP(2)) \in H^2(CP(2),Z_2)$, pois $w_2(CP(2)) = \alpha = \rho_2(5\alpha)$.

Como $I(CP(2)) = 1$ e $\xi.\xi[CP(2)] = \langle 5\alpha \cup 5\alpha, [CP(2)] \rangle = \langle 25\alpha^2, [CP(2)] \rangle = 25$ então $\xi\xi \not\equiv I(CP(2)) \bmod 16$.

Portanto, pelo teorema de Kervaire e Milnor, segue a tese.

Observação:

A classe de homologia $\xi = 7\alpha \in H^2(CP(2),Z)$ é dual da classe de Stiefel-Whitney $w_2(CP(2)) \in H^2(CP(2),Z_2)$ pois, $\rho_2(7\alpha) = \alpha = w_2(CP(2))$.

Sendo $I(CP(2) = 1$ e $\xi.\xi.[CP(2)] = \langle 7\alpha \cup 7\alpha, [CP(2)] \rangle = \langle 49\alpha^2, [CP(2)] \rangle = 49$, então:

$$\xi.\xi \equiv I(CP(2)) \mod 16.$$

Neste caso, no entanto, o teorema de Kervaire e Milnor não nos permite concluir nada.

BIBLIOGRAFIA

(1) BOTT, R. - The Stable Homotopy of the Classical Groups, Proc.Nat. Acad. Sci. Wash. 43,933-935,1957.

(2) DACCACH, J.A. - Cirugia e Aplicações. Tese apresentada ao ICM de São Carlos, USP, para obtenção do título de Mestre, 1974.

(3) HIRZEBRUCH. F. - Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer-Verlag, N. York, 1966.

(4) HU, S.T. - Homotopy Theory - Academic Press, 1959.

(5) HUSEMOLLER, D. - Fibre Bundles, Mcgraw Hill, Series in Higher Mathematics, N.Y., 1966.

(6) KERVAIRE, M.A. - An interpretation of G.Whitehead's Generalization of Hopf's invariant. Ann Math (2), 69,345-365, 1959.

(7) KERVAIRE, M.A. and MILNOR, J. - On 2-Spheres in 4-manifolds, Proc.Nat. Acad. Sci,47(1961), 1651--1657.

(8) MILNOR, J.and KERVAIRE, M.A. - Bernoulli, Numbers,homotopy groups and a Theorem of Rohlin. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958.

(9) MILNOR, J.and STASHEFF, J.D. - Characterist Classes, Princeton University Press, N.J., 1974.

(10) MOSHER-TANGORA. Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper and Row Publisher, 1968.

(11) SPANIER, E.H. - Algebraic Topology, Mcgraw Hill Book Company, N.Y. 1966.

(12) STEENROD, N. - The Topology of fibre bundles, Princeton University Press, N.J., 1951.

(13) STONG, R.E. - Notes on Cobordism Theory,Princeton University Press, N.J., 1968.

(14) SWITZER, R.M. - Algebraic Topology: Homotopy an Homology, Springer-Verlog, 1957.

(15) THOM, R. - Quelqués propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helvet. 28, 17-86(1954).

(16) VICK, J. - Homology Theory, N. York and London Academic Press, 1973.