UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

TRABALHO DE MESTRADO

COMPLETAMENTO E DECIDIBILIDADE

BRASIL TERRA LEME

Orientador :

DR. MÁRIO TOURASSE TEIXEIRA

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS

1972

COMPLETAMENTO

E

DECIDIBILIDADE

BRASIL TERRA LEME

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: PROF. DR. MÁRIO TOURASSE TEIXEIRA

FACULDADE DE FILOSOFIA CIÊNCIAS E LETRAS DE RIO CLARO

Composto e Impresso no Setor Gráfi_
co da Universidade Federal de São
Carlos-Via Washington Luiz, km 235
13560 - São Carlos - SP

R E S U M O

No presente trabalho fazemos uma exposição de certos sistemas lógicos dando ênfase especial ao problema da decidibilidade. É feito um estudo algébrico topológico do sistema implicativo intuicionista e já aqui introduzimos os "tableaux sémantiques" devidos a E. Beth, visando a decidibilidade. Sob estes aspectos são examinados os sistemas pseudo-Booleanos (inclusive o Booleano) assim como o sistema modal S_4.

S U M M A R Y

This dissertation presents some logical systems, with special regard to the decidibility problem. An algebraic-topological account of the intuitionistic implicative system is given, introducing the "tableaux-sémantiques", due to E. Beth, concerning the decidibility. This approach is used to study the pseudo-boolean (and the boolean) systems, as well as the modal system S_4.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Mário Tourasse Teixeira, pela dedicação e segurança com que orientou este trabalho e, sobretudo, pelo constante incentivo dado à nossa iniciação na pesquisa científica, nosso mais sincero agradecimento.

Aos professôres e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da USP e do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Campinas, pelo apoio e incentivo dado aos nossos estudos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente conosco colaboraram.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios concedidos pelas seguintes entidades: CAPES e CNPq.

INTRODUÇÃO

No presente trabalho fazemos a exposição de certos sistemas lógicos dando ênfase especial na apresentação de algorítmos que detectam as fórmulas válidas nos respectivos cálculos proposicionais associados.

Cada capítulo se desenvolve segundo as seguintes etapas:

1. Introdução de cada sistema, via o *operador consequência*, e a algebrização correspondente.

2. Obtenção de resultados no sentido da determinação das regras para o algorítmo.

3. Aparesentação do referido algorítmo bem como de exemplos que visam a elucidar o seu uso.

No CAPÍTULO I introduzimos os sistemas de fecho implicativos; cada sistema consiste de um par (E,ϕ) onde ϕ opera nas partes de E e está sujeito às condições:

i) $\phi\phi A = \phi A$ ii) $A \subset \phi A$ iii) Se $A \subset B$ então $\phi A \subset \phi B$ e ainda iv) Para cada $(a,b) \varepsilon E^2$ existe c com $b \varepsilon \phi\{a,c\}$ e mais, se $b \varepsilon \phi(\{a\} \cup A)$ então $c \varepsilon \phi A$. Esta definição é motivada pela seguinte situação: E é uma coleção de eventos e para cada parte A de E *completamos* com os eventos que decorrem de A ou seja, com as consequências de A (ϕA). Neste sentido i) traduz a transitividade da noção de consequência. Por outro lado, iv) prevê uma dinâmica entre os eventos, isto é: dados a e b em E existe c tal que b *é alcançado através de* a *e* c e ainda c tem um mínimo de consequências para esse fim. Tais elementos c serão chamados *condicionais* e denotados por $a \rightarrow b$ (leia-se: *se a então b*)

As propriedades características dos sistemas em questão são

Regra MODUS-PONENS: Se $\{a,c\} \subset A$ então $b \in \phi A$

Teorema da DEDUÇÃO: Se $b \in \phi(\{a\} \cup A)$ então $a \to b \subset A$.

Uma forma de algebrizar a situação apresentada por um sistema (E,ϕ) é identificar elementos $x,y \in E$ tais que $\phi(\{x\} \cup A) = \phi(\{y\} \cup A)$ onde $A \subset E$. Assim, obtemos um sistema implicativo $(\dot{E},\Psi)$ (quociente de E pela identificação) onde $\dot{x} \to \dot{y}$ é unitário, sendo $\dot{x}$ a classe determinada por x. Logo $(\dot{E},\to)$ pode ser concebido como um sistema algébrico (álgebra de Hilbert) onde $\to$ é operação binária. No caso de $A = \emptyset$, $(\dot{E},\to)$ é chamada de algebrização natural de (E,ϕ).

O formal aparece quando pensamos em estudar estruturalmente composições por condicionais, esquecendo qualquer outra consideração. Isto nos leva à noção de fórmula gerada construtivamente a partir de *átomos* a,b,c... por meio da composição $\to$(para representar o condicional). Assim, a, $a\to a, a\to b, a\to(b\to a), (a\to b)\to(b\to c)$, etc são fórmulas onde a,b e c são átomos. Seja F o domínio de tais fórmulas. Uma interpretação dessas fórmulas num sistema implicativo (E,ϕ) é uma aplicação $i: F \to E$, tal que $i\,\alpha\to\beta \in i\alpha \xrightarrow[\phi]{} i\beta$, $\alpha,\beta \in F$. Ainda, $\alpha \in F$ *é válida* se $i\alpha \in \phi\emptyset$ para cada interpretação $i:F\to E$. *O estudo do sistema* (F,δ), *onde* $\alpha \in \delta A$ *se e só se* $i\alpha \in \phi\emptyset$ *desde que* $iA \subset \phi\emptyset$ *para cada interpretação* $i:F\to E$, *é o estudo do chamado Cálculo Proposicional Implicativo (intuicionista)*. A algebrização natural de (F,δ) nos fornece a álgebra de Hilbert livre tendo como *geradores* os *átomos de F*. O §2 é devotado ao estudo de tais estruturas.

No §3 apresentamos os chamados quadros semânticos, devidos a E.Beth. A idéia de tais quadros é ter um método sistemático para, dada uma fórmula α, encontrar uma interpretação $i:F\to E$ tal que $i\alpha \notin \phi\emptyset$. Se tal procura, pelo método sistemático, nos leva a contradição isto significa que α é válida, i.e, $\alpha\varepsilon\delta\emptyset$. Assim o teste de validade é este: procuramos pelo método uma interpretação com $i\alpha\notin\phi\emptyset$; se achamos, não é válida; se damos em contradição (e uma das duas hipóteses sempre se alcança em um número finito e efetivo de passos) ela é válida.

As idéias associadas aos conectivos proposicionais *e*, *ou* e *não* (conjunção, disjunção e negação) procuram ser traduzidas, no CAPÍTULO II, pelos sistemas pseudo-Booleanos. Tais são implicativos e têm as seguintes propriedades:

i) Para cada (a,b) existe (c,c') tal que $\phi\{a,b\} = \phi\{c\}$ e $\phi\{a\} \cap \phi\{b\} = \phi\{c'\}$.

ii) Existe $z\notin\phi\emptyset$ com $\phi\{z\} = E$

Os c de (i) são denotados em geral por $a\wedge b$ enquanto os c' por $a v b$. A condição (ii) prepara engenhosamente o terreno para a noção de -b(negação de b). Para cada $b \varepsilon E$, $d\varepsilon$-b se $d\varepsilon b\to z$. Disto resulta que $\phi\{b,d\} = E$ por MODUS-PONENS.

As estruturas algébricas associadas, obtidas como no caso dos sistemas implicativos, são as álgebras de Heyting ou de Brouwer que surgiram naturalmente via as algebrizações destes sistemas.

Formalmente temos agora as fórmulas construidas com $\wedge$,v,$\to$ e - a partir dos átomos a,b,c... Exemplos de tais fórmulas são av-a, a$\to$(av--a), (a$\wedge$-b)v c, etc. Para as interpretações pedimos agora que verifiquem $i\alpha\to\beta \;\varepsilon\; i\alpha\to i\beta$, $i\alpha\wedge\beta \;\varepsilon\; i\alpha\wedge i\beta$, $i\alpha\vee\beta \;\varepsilon\; i\alpha\vee i\beta$, e $i{-}\alpha \;\varepsilon\; -i\alpha$. O estudo do cálculo proposiconal intuicionista é então o estudo do sistema (F,δ) onde $\alpha \;\varepsilon\; \delta A$ se e só se $i\alpha \;\varepsilon\; \phi\emptyset$ desde que $iA \subset \phi\emptyset$ para cada interpretação.

As α de $\delta\emptyset$ são chamadas as fórmulas válidas desse cálculo. Aqui como também nos demais capítulos o método dos quadros de Beth é usado para detectar as fórmulas válidas.

G.Boole admitia que as consequências de p comuns aquelas de -p deveriam ser apenas as essenciais ou seja: $\phi\{p\}\cap\phi\{\bar{p}\}=\phi\emptyset, \bar{p}\varepsilon{-}p$.
No CAPÍTULO III damos conta desse ponto de vista. Aqui o cálculo associado recebe o nome de cálculo proposicional clássico.

Uma motivação de natureza *geométrica* para o capítulo final poderia ser a seguinte: Sejam $(E,\mathcal{a})$ espaço topológico e $(PE,\cap,\cup,C_E,int_{\mathcal{a}})$ a álgebra associada. Dado $P(x_1,\ldots,x_n)$ polinômio nessa álgebra, saber (em um número finito de passos) se P se realiza como o espaço todo ou não. Novamente os quadros de Beth são chamados e com eles resolvemos a questão. Aqui, são de interesse os resultados de conexão estabelecidos nas proposições 3 e 4.

ÍNDICE

CAPÍTULO I: "Se... então..."

§1. Sistemas de fêcho implicativos

1. Condicionais

Consideremos E conjunto e PE a coleção de todas as suas partes. Um operador de fêcho em PE é uma aplicação $\phi : PE \to PE$, satisfazendo as seguintes condições:

f_1) Para todo $A \subset E$, $\quad A \subset \phi A \quad$ e $\quad \phi\phi A = \phi A$

f_2) Se $A \subset B$ então $\phi A \subset \phi B$

Ainda, o operador é algébrico ou de tipo finito se para todo $A \subset E$ valer:

f_3) Se $x \in \phi A$, então existe parte finita $A_f \subset A$ com $x \in \phi A_f$.

Notemos que estes operadores (algébricos) são caracterizados pela propriedade

$$\phi A = \bigcup_{A_f \subset A} \phi A_f$$

De um modo geral, se $\phi : PE \to PE$ é operador de fêcho e (A_i) é uma família de partes de E, temos

$$\phi \bigcup_i A_i = \phi \bigcup_i \delta_i A_i \qquad \text{onde} \qquad \delta_i \in \{\theta, \phi\}, \quad \text{sendo} \quad \theta : PE \to PE$$

o operador identidade.

Def.1.1: Seja $\phi : PE \to PE$ operador de fêcho. Chamamos de sistema de fêcho, ou simplesmente sistema, o par (E, ϕ). Se o operador é de tipo finito, dizemos que o sistema é de tipo finito.

Def.1.2: Sejam (E, ϕ) sistema e $a, b \in E$. Consideremos $a \to b = \{x \in E : b \in \phi\{a, x\}$ e se $b \in \phi(\{a\} \cup Y)$ então $x \in \phi Y\}$. Se $a \to b \neq \emptyset$, cada x de $a \to b$ é chamado um condicional para o par (a,b).

Esta definição pode ser estendida a partes não vazias $A,B \subset E$ colocando-se

$$A \to B = \bigcup a \to b \quad \text{com} \quad (a,b) \in A \times B.$$

Por comodidade, se $A = \{a\}$ então $\{a\} \to B$ será escrito como $a \to B$, sendo que esta convenção também é adotada no caso de $B = \{b\}$.

Def.1.3: Um sistema (E,ϕ) é implicativo se $a \to b \neq \emptyset$ para todo par $(a,b) \in E^2$.

Salvo menção em contrário, nos resultados e definições que se seguem, estaremos sempre nos referindo a sistemas implicativos.

Def.1.4: Seja (E,ϕ) sistema. $A \subset E$ é conjunto condicional se A for obtido das condições i) e ii) abaixo, em um número finito de etapas.

i) $\forall a,b,c \in E$ $\quad a \to b$, $a \to (b \to c)$ e $(a \to b) \to c$ são conjuntos condicionais

ii) Se C e D são condicionais, então o é $C \to D$.

Vejamos algumas informações a respeito de tais conjuntos.

Teorema 1.1:

Se a e b são elementos de um sistema e $x,y \in a \to b$, então $\phi\{x\} = \phi a \to b = \phi\{y\}$.

Prova:

De $x,y \in a \to b$ obtemos $b \in \phi\{a,x\}$ e $b \in \phi\{a,y\}$ e então $x \in \phi\{y\}$ e $y \in \phi\{x\}$, ou seja, $\phi\{x\} = \phi\{y\}$. Para finalizar,

$$\phi a \to b = \phi \bigcup_{x \in a \to b} \phi\{x\} = \phi\phi\{x\} = \phi\{x\}.$$

Este resultado sugere a seguinte

Def.1.5: Seja A parte não vazia de um sistema. A é univalente se para cada $x \in A$ tivermos $\phi\{x\} = \phi A$.

Teorema 1.2:

Sejam (E,ϕ) sistema e $\equiv$ equivalência em E^2 dada por $x \equiv y$ se e só se $\phi\{x\} = \phi\{y\}$. Nestas condições, $a \to b = a' \to b'$ desde que $a \equiv a'$ e $b \equiv b'$.

Prova:

Consideremos z qualquer em $a \to b$. Logo, temos $\phi\{b\} \subset \phi\{a,z\}$ e $z \in \phi Y$ para cada Y com $\phi\{b\} \subset \phi(\{a\} \cup Y)$ ou $\phi\{b\} \subset \phi(\phi\{a\} \cup \{z\})$ e $z \in \phi Y$ para cada Y com $\phi\{b\} \subset \phi(\phi\{a\} \cup Y)$. Como $a \equiv a'$ e $b \equiv b'$, ficamos com $\phi\{b'\} \subset \phi(\phi\{a'\} \cup \{z\})$ e $z \in \phi Y$ para todo Y com $\phi\{b'\} \subset \phi(\phi\{a'\} \cup Y)$, isto é: $b' \in \phi\{a',z\}$ e $z \in \phi Y$ para todo Y com $b' \in \phi(\{a'\} \cup Y)$. Enfim, $a \to b \subset a' \to b'$. De forma análoga, $a' \to b' \subset a \to b$.

Tendo-se em conta os teoremas anteriores temos o

Corolário 1.1:

Se A e B são univalentes então o é $A \to B$.

Prova:

De fato, seja $x \in A \to B$, ou seja $x \in a \to b \subset A \to B$.

Temos então $\phi A \to B = \phi \bigcup_{(a,b) \in A \times B} \phi(a \to b)$

Pelo primeiro teorema, $\phi A \to B = \phi \bigcup_{\overline{x} \in a' \to b' \subset A \to B} \phi\{\overline{x}\}$

Pelo segundo, $a \to b = a' \to b'$ pois A e B são univalentes. Logo, ficamos com $\phi A \to B = \phi \bigcup_{x \in a \to b} \phi\{x\} = \phi\phi\{x\} = \phi\{x\}$.

Bastante interessante é o

Corolário 1.2:

Se A é conjunto condicional de um sistema, então A é univalente. Reciprocamente, se M é univalente maximal, então M é condicional.

Prova:

Observemos inicialmente que $a \to b$ e $\{c\}$ são univalentes, $a,b,c \in E$. Tendo-se em conta o teorema 1.2 e a definição de conjunto condicional, tiramos que todo condicional é univalente.

Para a recíproca, notemos que $\phi\emptyset$ é não vazio já que $\phi\emptyset = x \to x$, $x \in E$. Sejam então M univalente maximal e $s \in \phi\emptyset$. Mostremos que $M \subset s \to x$, $x \in M$. Se $y \in M$ temos $x \in \phi\{y\} = \phi(\emptyset \cup \{y\}) = \phi\{s,y\}$. Agora, se $x \in \phi(\{s\} \cup Y)$ temos $x \in \phi Y$ ou $y \in \phi Y$. Enfim, $y \in s \to x$ e então $M = s \to x$.

Façamos as seguintes observações relativas ao corolário acima:

1) Se A e B são condicionais, então $A \subset B$ ou $B \subset A$ são equivalentes a $A = B$. Mais ainda, até $A \cap B \neq \emptyset$ se e só se $A = B$, visto que os condicionais são univalentes maximais.

2) Um sistema topológico é um sistema de fêcho (E,ϕ) onde $\phi\emptyset = \emptyset$ e $\phi A \cup B = \phi A \cup \phi B$, $A,B \subset E$. Logo, nenhum sistema topológico é implicativo. Apesar disso, vale o seguinte resultado:

"Seja (E,Ψ) um sistema topológico $T_1 (\forall x \in E, \phi\{x\}=\{x\})$. Então existe sistema implicativo (E',Ψ') tal que $E \subset E'$ e $\Psi'(S) \cap E = \Psi(S \cap E)$, para todo $S \subset E'$."

A prova disto é baseada nos ítens abaixo:

1) Seja $E' = E \cup \{z\}$ com $z \notin E$. Logo, cada $S \subset E'$ é da forma $S_1 \cup Z$ onde $S_1 \subset E$ e $Z \subset \{z\}$.

2) $\Psi': PE' \to PE'$, tal que $S_1 \cup Z \mapsto \Psi S_1 \cup \{z\}$, é operador de fêcho e ainda, $a \to b = \{x\}$, sendo $x = b$ se $a \neq b$ e $x = z$ se $a = b$, em E'.

2. *Sistema Quociente e Partes Dedutivas*

Com alguma motivação nos sistemas topológicos, adotaremos as seguintes definições:

Def.1.6: Seja (E,ϕ) um sistema de fêcho qualquer. $A \subset E$ é fechado em (E,ϕ) se $\phi A = A$.

Def.1.7: Sejam (E,ϕ) e (G,Ψ) sistemas de fêcho e $f: E \to G$ aplicação. f é contínua se $f^{-1}F$ é fechado em (E,ϕ), com $\Psi F = F$.

Def.1.8: Sejam $g: E \to G$ aplicação e A fechado em (E,ϕ). g é A-fechada se para todo fechado $F \supset A$, gF for fechado em (G,Ψ).

Vejamos como introduzir uma estrutura de fêcho em um quociente sob a condição de que a projeção canônica seja contínua.

Antes, é útil observar os seguintes fatos:

1) Se (F_i) é uma família de fechados de um sistema, então $\bigcap_i F_i$ é fechado do mesmo.

2) Seja $G \subset PX$ tal que para cada família (G_i) de elementos de G, $\bigcap_i G_i \in G$.

Então, $\Psi: PX \to PX$ dado por

$$\Psi A = \bigcap_{G_i \supset A} G_i , \quad G_i \in \mathcal{G} , \quad \text{é}$$

operador de fêcho. Mais ainda, a coleção dos fechados de (X,Ψ) é precisamente $\mathcal{G}$.

Teorema 1.3:

Sejam F' coleção de fechados de (E,ϕ) estável para intersecções quaisquer de famílias de seus elementos, e $\equiv$ equivalência em E^2. Consideremos $\pi: E \to E/_{\equiv} = \mathcal{E}$ a projeção canônica. Seja $\Psi: P\mathcal{E} \to P\mathcal{E}$ dado por:

$$\Psi A = \bigcap (S \subset \mathcal{E}: S \supset A \text{ e } \pi^{-1}S \in F').$$

Então $(\mathcal{E},\Psi)$ é sistema de fêcho e π é contínua.

Prova:

Notemos que $\mathcal{G} = \{S \subset \mathcal{E}: \pi^{-1}S \in F'\}$ é estável para intersecções quaisquer de famílias de seus elementos. Logo, por 2), $(\mathcal{E},\Psi)$ é sistema de fêcho. A continuidade de $\pi: E \to \mathcal{E}$ resulta da definição de Ψ e da hipótese sobre F'.

O sistema $(\mathcal{E},\Psi)$ do teorema é chamado sistema quociente determinado pela coleção F' e a equivalência $\equiv$.

Teorema 1.4:

Sejam (E,ϕ) sistema e F um seu fechado. Consideremos a equivalência $x \equiv y$ se e só se $\phi(\{x\} \cup F) = \phi(\{y\} \cup F)$. Tomemos o sistema quociente $(\mathcal{E},\Psi)$ determinado pela equivalência dada e a coleção $F' = \{F': F'$ é fechado de (E,ϕ) e $F' \supset F\}$. Então $\pi: E \to \mathcal{E}$ é F-fechada e $(\mathcal{E},\Psi)$ é implicativo desde que (E,ϕ) o seja.

Prova:

Notemos que, se $G \in F'$, então para cada $g \in G$, $\pi g \subset G$, vis to que, se $y \in \pi g$, segue-se $\phi(\{y\} \cup F) = \phi(\{g\} \cup F) \subset G$, pois G é fechado. Logo, G é reunião de classes de equivalência, ou seja, G é saturado por $\equiv$. Daqui, $\pi^{-1}\pi G = G$ e então π é F-fechada.

Interrompamos momentaneamente a prova justificando que, para cada $A \subset \mathcal{E}$, $\Psi A = \pi\phi(\bigcup A \cup F)$. De fato, como $\pi^{-1}\Psi A \supset F$ e é fechado, vale $\pi^{-1}\Psi A \supset \phi(\pi^{-1}A \cup F)$. Por outro lado, $\phi(\pi^{-1}A \cup F) \supset \pi^{-1}\Psi A$ já que π é F-fechada.

Sejam então $\dot{a},\dot{b} \in E$ e mostremos que $\dot{x} \in \dot{a} \to \dot{b}$ onde $x \in a \to b$. Da continuidade de π resulta $\pi^{-1}\Psi\{\dot{a},\dot{b}\} \supset \phi\{a,x\}$ e daí $\dot{b} \in \Psi\{\dot{a},\dot{x}\}$. Continuemos, considerando $\dot{b} \in \Psi(\{a\} \cup Y)$.

Logo, $\dot{b} \in \pi\phi(\dot{a} \cup (\bigcup Y) \cup F)$, ou seja, $b \in \phi(\phi(\dot{a} \cup F) \cup (\bigcup Y)) =$
$= \phi(\{a\} \cup F \cup (\bigcup Y)) \therefore x \in \phi(F \cup (\bigcup Y))$ e então $\dot{x} \in \Psi Y$.

Uma característica notável do sistema (ε,Ψ) é que $\dot{a} \to \dot{b}$ é sempre unitário, pois de $\Psi\{\dot{x}\} = \Psi\{\dot{y}\}$ deduzimos $\pi\phi(\{x\} \cup F) =$
$= \pi\phi(\{y\} \cup F)$ que acarreta $\phi(\{x\} \cup F) = \phi(\{y\} \cup F)$ e enfim $\dot{x} = \dot{y}$. Parece-nos então razoável pensar $(\mathcal{E},\Psi)$ como um sistema algébrico $(\mathcal{E},\Rightarrow)$ onde $\dot{a} \Rightarrow \dot{b} = \dot{x} \in \dot{a} \to \dot{b}$. Por outro lado é sugestivo chamar π de F-identificação. Neste sentido temos o teorema

"Sejam π_1, π_2, $F_1 \supset F_2$ tais que π_i é F_i-identificação. Então existe uma única $h:(E_2,\Psi_2) \to (E_1,\Psi_1)$ contínua e $\pi_2 F_1$-fechada tal que $\pi_1 = h_0\pi_2$."

Prova:

Como $F_1 \supset F_2$, a lei $h\pi_2 x = \pi_1 x$ é aplicação e $\pi_1 = h_0\pi_2$. Agora de $\pi_2^{-1}{}_0 h_1^{-1} = \pi_1^{-1}$ e de π_2 ser F_2-fechada temos que h é contínua, pois $\phi(X \cup F_1) = \pi_2^{-1}.h^{-1}(\pi_1\phi(X \cup F_1))$ donde $\pi_2\phi(X \cup F_1) =$
$= h^{-1}(\pi_1\phi(X \cup F_1))$.

Seja G fechado em $\mathcal{E}_2$, $G \supset \pi_2 F_1$. Logo, $G = \pi_2\phi(X \cup F_1)$ donde $h[\pi_2\phi(X \cup F_1)] = \pi_1\phi(X \cup F_1)$ que é fechado em $\mathcal{E}_1$.

Seja $\pi_0 : E \to \mathcal{E}$ a $\phi\Phi$-identificação. O sistema algébrico $(\mathcal{E}, \Rightarrow)$ é chamado sistema algébrico canônico de (E,ϕ).

Passemos agora à definição de parte dedutiva que é motivada na seguinte propriedade que cada fechado de um sistema implicativo tem:

Modus Ponens (MP): Se A e B são univalentes com $A, A \to B \subset F$, então $B \subset F$.

- Realmente, se $b \in B$, então para algum $a \in A$ $a \to b \subset F$, e como $b \in \phi(\{a\} \cup a \to b)$, temos $b \in F$ pois F é fechado.

Def.1.9: Uma parte D de um sistema implicativo é dedutiva se $\phi\Phi \subset D$ e D tem a propriedade MP.

Como a interseção de uma família de partes dedutivas é dedutiva, é natural a:

Def.1.10: A parte dedutiva gerada por P em (E,ϕ) é $\delta P = \bigcap\limits_{D \supset P} D$, onde D é dedutiva em (E,ϕ).

Resultados advindos destas definições são:

1. Todo fechado é parte dedutiva. Em particular, $\delta\Phi = \phi\Phi$.
2. $\delta : PE \to PE$ é operador de fêcho
3. Para todo $A \subset E$ temos $\delta A \subset \phi A$.

Vejamos sob que condições teremos $\delta = \phi$.

Lema 1.1:

Em um dado sistema, $x \in \phi\,\{a_1, \ldots, a_n\}$ se e só se

$$a_n \to (a_{n-1} \to (\ldots \to (a_1 \to x))) = \phi\emptyset.$$

Prova:

Se $n = 1$, temos $x \in \phi\{a_1\} = \phi(\{a_1\} \cup \emptyset)$, ou seja $a_1 \to x \subset \phi\emptyset$ e então $a_1 \to x = \phi\emptyset$. Admitamos o resultado válido para $1 \leq k < n$. Consideremos $x \in \phi(\{a_1\} \cup \{a_2, \ldots, a_n\})$ que nos dá $a_1 \to x \subset \phi\{a_2, \ldots, a_n\}$. Logo, para cada $z \in a_1 \to x$ temos $a_n \to (a_{n-1} \to (\ldots (a_2 \to z) \ldots) = \phi\emptyset$. Como para $z, z' \in a_1 \to x$ temos $a_2 \to z = a_2 \to z'$ (Teor 1.2), obtemos finalmente $a_n \to (a_{n-1} \to (\ldots (a_2 \to (a_1 \to x) \ldots) = \phi\emptyset$. Admitamos agora que x satisfaz $a_n \to (\ldots (a_1 \to y) \ldots) = \phi\emptyset$. Como fechado é parte dedutiva e $\phi\emptyset \subset \phi\{a_1, \ldots, a_n\}$, a aplicação sucessiva de MP nos dá

$$x \in \phi\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Teorema 1.5:

Em um sistema, $\delta P = \bigcup\limits_{P_f \subset P} \phi P_f$

Prova:

Seja $\overline{P} = \bigcup\limits_{P_f \subset P} \phi P_f$ onde P_f é parte finita de P.

Sejam $X, X \to Y \subset \overline{P}$ ambos univalentes e $x \in X$ e $y \in Y$. Logo, $\{x\}, x \to y \subset \overline{P}$ e ainda $\{x, z\} \subset \overline{P}$, onde $z \in x \to y$. Segue-se então que existe $P_f \subset P$ com $\{x, z\} \subset \phi P_f$. Como $x \to y \subset \phi\{z\} \subset \phi P_f$, temos $y \in \phi P_f$ e então $Y \subset \phi P_f \subset \overline{P}$. Logo, $\overline{P}$ é dedutiva e portanto $\delta P \subset \overline{P}$ pois $\overline{P} \supset P$.

Agora, se $x \in \overline{P}$, vem $x \in \phi P_f$ com $P_f \neq \emptyset (P \neq \emptyset)$. Pelo lema acima, $p_n \to (p_{n-1} \to (\ldots (p_1 \to x) \ldots) = \phi\emptyset \subset \delta P$. Usando-se MP n vezes temos $x \in \delta P$ pois $p_i \in P$.

Corolário 1:

$x \in \delta A$ se e só se $a_n \to (a_{n-1} \to (\ldots(a_1 \to x)\ldots) = \phi\emptyset$ para $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$, $A \neq \emptyset$.

Corolário 2:

Se $A \subset E$ é finito, então $\phi A = \delta A$. Em particular, $\delta = \phi$ se e só se (E,ϕ) é de tipo finito.

Corolário 3: (Teorema de dedução):

Seja (E,ϕ) sistema e suponhamos $B \subset \delta(A \cup X)$ com A e B univalentes. Então $A \to B \subset \delta X$.

Prova:

Sejam $a \in A$ e $b \in B$. De $b \in \delta(A \cup X)$ temos $b \in \delta(A_f \cup X_f) = \phi(A_f \cup X_f) = \phi(\{a\} \cup X_f)$ $\therefore a \to b \subset \phi X_f \subset \delta X$.

O corolário acima, juntamente com o fato de que $b \in \delta(\{a\} \cup a \to b)$, nos diz que (E,δ) é sempre implicativo (de tipo finito) desde que (E,ϕ) o seja. Além disso, se U é univalente em (E,ϕ) então o será em (E,δ). Em particular, todo condicional A em (E,ϕ) é condicional em (E,δ) e reciprocamente. Segue-se então que não há perda de generalidade supor (E,ϕ) sempre de tipo finito, desde que nosso interesse se fixe nos conjuntos condicionais sobre partes dedutivas.

Nossa meta seguinte é o estudo dos sistemas algébricos oriundos de processos de F-identificação. Para isto, seja o

Teorema 1.6:

Sejam $a,b,c \in E$, (E,ϕ) sistema. Então valem:

(i) $a \to b = \phi\emptyset$ se e só se $b \in \phi\{a\}$.

(ii) $a \to (b \to a) = \phi\emptyset$

(iii) $[a \to (b \to c)] \to [(a \to b) \to (a \to c)] = \phi\emptyset$.

(iv) $[(a \to b) \to (a \to c)] \to [a \to (b \to c)] = \phi\emptyset$.

Prova:

(i) segue dos corolários 1 e 3.

(ii) Como $a \in \delta(\{b\} \cup \{a\})$, o teorema da dedução nos permite inferir $b \to a \subset \delta\{a\} = \phi\{a\}$. Tendo-se em conta (i), nós tiramos $a \to (b \to a) = \phi\emptyset$.

(iii) Observemos inicialmente que os univalentes $\{a\}$, $a \to (b \to c)$ estão contidos em $\delta(\{a\} \cup a \to (b \to c))$. Por MP obtemos $b \to c \subset \delta(\{a\} \cup a \to (b \to c))$ (I). De modo análogo, $b \in \delta(a \to b \cup \{a\})$ (II). De (I) e (II) temos $c \in \delta(\{a\} \cup a \to b \cup a \to (b \to c))$. Por fim, usando-se o teorema da dedução por três vezes terminamos com $[a \to (b \to c)] \to [(a \to b) \to (a \to c)] = \phi\emptyset$.

(iv) Notemos que $c \in \delta(\{b\} \cup \{a\} \cup (a \to b) \to (a \to c))$.

Agora, novamente, o teorema da dedução por três vezes nos permite $[(a \to b) \to (a \to c)] \to [a \to (b \to c)] = \phi\emptyset$.

§2. Álgebras de Hilbert

1. Sub-álgebras dedutivas e homomorfismos

Def.2.1: Uma álgebra de Hilbert é um sistema algébrico $(A,\to,1)$ onde "$\to$" é uma operação binária e "1" um elemento destacado de A, tal que:

H_1) $(\forall x\varepsilon A)$ $1 \to x = x$

H_2) $(\forall a,b,c\varepsilon A)$ $a \to (b\to a) = 1$ e $a\to(b\to c) = (a\to b)\to(a\to c)$

H_3) Se $a \to b = b \to a$ então $a = b$.

Algumas consequências da definição acima são as seguintes:

P_1) De H_1 e H_2 temos $x \to 1 = 1$ pois $1\to(x\to 1) = 1$

P_2) De H_2 tiramos, levando-se em conta H_1, que $(x\to 1)\to(x\to x) = 1$ e de P_1 e H_1, $x \to x = 1$

P_3) Da segunda igualdade de H_2 obtemos $a \to c = 1$, desde que $a \to b = b \to c = 1$.

Tendo-se em conta P_1, P_2, P_3 e H_3, observamos que uma álgebra de Hilbert A pode ser visualizada como um sistema parcialmente ordenado $(A,\leq)$ com último elemento 1, onde $a \leq b$, se e só se $a \to b = 1$.

Def.2.2: Uma parte $S\subset A$ é subálgebra dedutiva de (em) $(A,\to,1)$ se $1 \varepsilon S$ e valer MP em S, isto é: Se $x, x\to y \varepsilon S$ então $y \varepsilon S$.

Def.2.3: Sejam $(A,\to,1)$ álgebra, $\mathcal{D} = \{D\subset A : D \text{ é dedutiva}\}$ e P parte de A. A subálgebra dedutiva gerada por P em A é

$$\delta P = \bigcap \{D\varepsilon\mathcal{D} : D\supset P\}$$

Teorema 2.1:

(A,δ) é sistema de fêcho algébrico

Prova:

Que é sistema de fêcho é evidente. Por outro lado, $\delta P \supset \bigcup_{P_f \subset P} \delta P_f$. Sejam então $x, x \to y$ em δP_f. Disto obtemos $x, x \to y \in \delta P_{0_f}$ e então $y \in \delta P_{0_f} \subset \bigcup \delta P_f$. Da definição de δP resulta $\delta P \subset \bigcup \delta P_f$, e então $\delta P = \bigcup \delta P_f$.

Def.2.4: Sejam A e B álgebras e $f:A \to B$ aplicação. f é homomorfismo (ou simplesmente morfismo) se para quaisque $a,b \in A$ tivermos $fa \to b = fa \to fb$.

Teorema 2.2:

Seja $f:A \to B$ morfismo. Então valem:

(i) Se F é dedutiva em B então $f^{-1}F$ o é em A.

(ii) O núcleo de f, isto é, $\{x \in A | fx = 1'\} = Nf$ é dedutiva em A.

(iii) Se f é epimorfismo (morfismo sobrejetor) então fD é dedutiva em B desde que D seja dedutiva em A e $D \supset Nf$.

Prova:

Sejam $x, x \to y \in f^{-1}F$. Logo, fx, $fx \to y = fx \to fy$ são de F, ou seja, $fy \in F$ e então $y \in f^{-1}F$. É claro que $1 \in f^{-1}F$. (i) está provada.

(ii) Notemos que $Nf = f^{-1}\{1'\}$ e $\{1'\}$ é dedutiva de B.

(iii) Sejam $D \supset Nf$ e $z, z \to w \in fD$. Então existem $x, x' \in D$ com $z = fx$ e $z \to w = fx'$. Como f é epimorfismo, temos $z \to w = fx \to fy$ para $y \in A$. Logo, ficamos com $fx' = fx \to fy$, ou seja, $f\, x' \to (x \to y) = 1'$ ou então $x' \to (x \to y) \in D$ pois $D \supset Nf$. Enfim, $x \to y \in D$ e então $fy = w \in fD$ já que $y \in D$.

Teorema 2.3:

Sejam A álgebra, {a}, $P \subset A$ e $b \in \delta(\{a\} \cup P)$. Então $a \to b \in \delta P$.

Prova:

Consideremos $D = \{x \in A : a \to x \in \delta P\}$. Observemos que D é $h^{-1}P$ onde $h: A \to A$ é o morfismo $x \mapsto a \to x$. Logo, D é dedutiva e como $D \supset \{a\} \cup P$, temos $\delta(\{a\} \cup P) \subset D$. Agora, se $x \in D$ temos $a \to x \in \delta P \therefore x \in \delta(\{a\} \cup P)$. Enfim $D = \delta(\{a\} \cup P)$ e, em particular, $a \to b \in \delta P$.

Corolário 1:

Seja $(A, \to, 1)$ álgebra. Então (A, δ) é implicativo de tipo finito, e o sistema algébrico canônico associado a (A, δ) é "exatamente" $(A, \to, 1)$.

Corolário 2:

$x \in \delta\{a_1, \ldots, a_n\}$ se e só se $a_n \to (a_{n-1} \to (\ldots(a_1 \to x)\ldots) = 1$.

Def.2.5: Sejam A álgebra e $\equiv$ relação de equivalência entre seus elementos. $\equiv$ é "congruência em A" se para quaisquer $x, y, z, w \in A$ valer:

Se $x \equiv y$ e $z \equiv w$ então $x \to z \equiv y \to w$, ou o equivalente:

$\forall\ x, y, a \in A$,

Se $x \equiv y$ então $x \to a \equiv y \to a$ e $a \to x \equiv a \to y$.

Consideremos $\equiv$ congruência em A e a projeção canônica $\pi: A \to E = A/_{\equiv}$. São de verificações imediatas os seguintes fatos:

1. A lei $(\pi x, \pi y) \mapsto \pi x \to \pi y = \pi x \to y$ é operação em E e $(E, \to, \bar{1})$ é álgebra de Hilbert, onde $\bar{1} = \pi 1$.

2. $\pi: A \to E$ é epimorfismo.

Def.2.6: E é chamada a álgebra quociente determinada por $\equiv$ em A.

Teorema 2.4

Seja $f: A \to B$ um epimorfismo. Sejam as relações

$x\rho_1 y$ se e só se $fx = fy$

$x\rho_2 y$ se e só se $x \to y$ e $y \to x$ são de Nf

$x\rho_3 y$ se e só se $\delta(\{x\} \cup Nf) = \delta(\{y\} \cup Nf)$

$x\rho_4 y$ se e só se $[x] = [y]$ onde $[z] = \{f^{-1}D' : z \varepsilon f^{-1}D'$ e D' é dedutiva em $B\}$.

Então $\rho_i = \rho$, sendo ρ congruência em A e ainda, a álgebra $A/_\rho$ é isomorfa a B, ou seja, existe morfismo $b: A/\rho \to B$ que é bijeção.

Prova:

Se $fx = fy$ temos $fx \to fy = fy \to fx = 1'$, ou seja, $fx \to y = fy \to x = 1'$ $\therefore$ $x \to y$ e $y \to x$ são de Nf. Agora, se $x \to y$ e $y \to x$ estão em Nf, temos $\delta(\{x\} \cup Nf) \supset \{y\} \cup Nf$ e $\delta(\{y\} \cup Nf) \supset \{x\} \cup Nf$ e então $\delta(\{x\} \cup Nf) = \delta(\{y\} \cup Nf)$. Prosseguindo, se a igualdade anterior é assumida, então $[x] = [y]$ pois $\delta(\{z\} \cup Nf)$ é a menor dedutiva contendo $\{z\}$ e Nf em A. Suponhamos, por fim, que $[x] = [y]$. Então $y \varepsilon f^{-1}\delta'\{fx\}$, ou melhor, $fy \varepsilon \delta'\{fx\}$. Daqui temos $fx \to fy = 1'$. Por simetria, $fy \to fx = 1'$ e então $fx = fy$. Mostramos que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ e é imediato que são equivalências. Falta agora a compatibilidade. Para isto, suponhamos $x\rho_1 x_1$ e $y\rho_1 y_1$. Logo, de $fx = fx_1$ e $fy = fy_1$ tiramos $fx \to fy = fx_1 \to fy_1$ que nada mais é que $fx \to y = fx_1 \to y_1$, donde $x \to y \; \rho_1 \; x_1 \to y_1$.

Consideremos $\bar{f}: A/_{\rho_1} \to B$ tal que $\pi_1 x \mapsto fx$. É imediato verificar que $\bar{f}$ é isomorfismo e isto conclue a prova.

Corolário 1:

Se $fi: A \to Bi$ são epimorfismos de mesmo núcleo, então Bi é isomorfo a B_j, $i \in I$.

Corolário 2:

$D \subset A$ é dedutiva se e só se $D = Nf$ para algum epimorfismo f.

Prova:

É claro que $D = Nf$ é sempre dedutiva. Suponhamos D dedutiva em A e seja $x \equiv y$ se e só se $x \to y$, $y \to x \in D$. Mostremos que $\equiv$ é congruência. Vejamos a transitividade. Tomemos então $x \equiv y$ e $y \equiv z$. De $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$ e de $y \to z$, $x \to y \in D$, obtemos $x \to z \in D$. Por simetria, $z \to x \in D$ e assim $x \equiv z$.

Suponhamos, para a compatibilidade, que $x \equiv y$. Logo, para cada $a \in A$, temos de $a \in \delta(\{y\} \cup \{x \to a, y \to x\})$ e de $y \to x \in D$ que $(y \to x) \to [(x \to a) \to (y \to a)] = 1 \in D$, e então $(x \to a) \to (y \to a) \in D$. De modo análogo, $(y \to a) \to (x \to a) \in D$. Para terminar, observemos que $D = N\pi$ onde $\pi: A \to E$ é o epimorfismo canônico, pois $x \in N\pi$ se e só se $x \equiv 1$, i.e., se e só se $x \to 1$ e $1 \to x = x$ são de D.

Terminaremos esta secção com um teorema de representação e, para isto, comecemos com o

Lema 1:

Seja D dedutiva em A. Então $x \to y \in D$ se e só se $\forall D'$ dedutiva, $D' \supset D$, $y \in D'$ ou $x \notin D'$,

Prova:

Se $x \to y \in D$, para cada D' dedutiva, $D' \supset D$, de duas,uma: $x \in D'$ ou $x \notin D'$. Se $x \in D'$, via MP, $y \in D'$. Suponhamos agora que $x \to y \notin D$. Consideremos $D' = \delta(\{x\} \cup D)$. Temos $x \in D'$ e $y \notin D'$, pois se assim não o fosse $(y \in D')$, via teorema da dedução, $x \to y \in D$, contra a hipótese.

Def.2.7: Uma família $K \neq \emptyset$ de subálgebras dedutivas de A é de Kripke, se:

k) $(\forall D \in K)$ se $a \to b \notin D$ então existe $D' \supset D$, $D' \in K$, tal que $a \in D'$ e $b \notin D'$; ou de forma equivalente

k_1) $a \to b \in D$ se: $(\forall D' \in K)(D' \supset D)$ se $a \in D'$ então $b \in D'$.

Lema 2:

Seja K de Kripke em A. Então a relação $x \equiv y$ se $[x]=[y]$ é congruência em A, onde $[z] = \{D \in K: z \in D\}$.

Prova:

Basta mostrarmos que $[x] = [y]$ se e só se $x \to y$ e $y \to x$ são de $\bigcap K = D_0$. Comecemos com $x \to y$ e $y \to x$ em D_0. Logo, se $x \in D$, $D \in K$, então $y \in D$, ou seja, $[x] \supset [y]$. Analogamente, $[y] \supset [x]$. Suponhamos agora que $x \to y \notin D_0$. Segue-se a existência de $D \in K$ com $x \to y \notin D$. Enfim, temos D_1 em K com $x \in D_1$ e $y \notin D_1$ $\therefore$ $[x] \neq [y]$.

As famílias de Kripke nos proporcionam o seguinte teorema de representação:

Teorema 2.6:

Sejam A álgebra e K de Kripke em A. Então, se $K \neq \{A\}$, existe morfismo $r: A \to \mathcal{A}$, não trivial, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de conjuntos abertos.

Prova:

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das partes fechadas de K, isto é: $x \in \mathcal{A}$

se e só se, se $D \in x$ e $D' \supset D$ então $D' \in x$. Verifica-se sem dificuldades que $\mathcal{A}$ é topologia para K.

Definamos δ: $PA \to PA$ como abaixo:

$$\delta P = \{s \in A: \ s \supset \cap P_f \ \text{ com } \ P_f \subset P\}.$$

Este operador é de fêcho e de tipo finito. Ainda, (A,δ) é implicativo, bastando para isto verificar que $x \to x' = y$, onde y é o maior de A com $x \cap y \subset x'$. Sejam $Y = \{y' \in A : x \cap y' \subset x'\}$ e $y = \bigcup Y$. Logo, temos $x \cap \bigcup Y = \bigcup_{y' \in Y} x \cap y' \subset x'$. Como y é o maior, temos o que queremos. Reparemos que $Y \neq \emptyset$, pois $x' \in Y$. Como $\delta\{x\} = \delta\{y\}$ acarreta $x = y$, visualizemos A como a álgebra $(A,\to,K)$.

Como etapa final da prova, mostremos que r: $A \to A$ tal que $rx = [x] = \{D \in K : D \ni x\}$ é morfismo.

De saída, notemos que r é aplicação pois $[x] \in A$. Vejamos que $[x \to y] = [x] \to [y]$. Já temos $[x\to y] \subset [x] \to [y]$ posto que $[x] \cap [x \to y] \subset [y]$. Suponhamos que exista $D \notin [x] \to [y]$ com $D \in [x \to y]$. Logo, $x \in D'$ e $y \notin D'$ para algum $D' \supset D$. Segue-se que $D' \in [x] \cap [x] \to [y] \subset [y]$, ou seja, $D' \in [y]$ $\therefore$ $y \in D'$.

Contradição.

2. *Álgebras Livres*

Suponhamos que L seja uma álgebra sujeita às seguintes condições:

i) Existe G, $G \subset L$, tal que se S é sub-algebra de L (i,é: $S \neq \emptyset$ e se $x,y \in S$ então $x \to y \in S$) e $S \supset G$ então $S = L$. Em outras palavras dizemos que G é um conjunto de geradores para L.

ii) Para cada aplicação $f: G \to B$, B álgebra, existe um morfismo $h: L \to B$, estendendo $f: G \to B$. Esta condição nos diz que os geradores são "livres", isto é, só estão submetidos aos "vínculos" impostos pela definição de álgebra de Hilbert. Por exemplo, $g_1 \to g_1 = 1$ é um vínculo imposto pela definição ao passo que $g_1 \to g_2 = g_2$ não.

Das condições i) e ii) acima pode-se demonstrar (vide [3]) que:

a) A extensão $h: L \to B$ é única.

b) Se L' é álgebra satisfazendo i) e ii) com $G' \subset L'$ e G' equipotente a G então L e L' são isomorfas.

As observações acima nos sugerem a seguinte

Def.2.8: Uma álgebra L é livre sobre G(conjunto) se valer:

ℓ) Existe $i: G \to L$ aplicação tal que cada aplicação $f: G \to B$, B álgebra, se fatora de forma única através de um morfismo $h: L \to B$.

Em forma de diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "h"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad f = h.i$$

Uma questão natural é aquela referente a existência de tais álgebras para um dado conjunto G. A.Diego, em sua tese: Sobre Álgebras de Hilbert dá uma "definição equacional explícita" destas álgebras e por um resultado de G.Birkhoff (ver Lattice Theory, do mesmo) existem álgebras livres para cada conjunto G.

Os axiomas de tal definição são os seguintes

H_1') $(a \to a) \to a = a$ e $a \to a = b \to b$

H_2') $a\to(b\to c) = (a\to b)\to(a\to c)$

H_3') $(a\to b)\to[(b\to a)\to a] = (b\to a)\to[(a\to b)\to b]$.

No que se segue, vejamos uma construção para as álgebras em pauta.

Sejam $G \neq \emptyset$ (se $G = \emptyset$ temos $L=\{1\}$), C um conjunto unitário com $C\cap G = \emptyset$ e S o conjunto das sequências finitas de $C\cup G$. Admitindo-se que $C = \{*\}$ e que sequências finitas do tipo $s:\{0\} \to X$ são identificadas com x de X consideremos F a menor parte de S tal que:

1) $G\subset F$ (2) Se $\alpha,\beta \in F$ então $(\alpha*\beta)\in F$

Def.2.9: Cada elemento de F é chamado uma fórmula com variáveis em G e conectivo "*".

Def.2.10: O grau de $\alpha \in F$ é o número de ocorrências do conectivo * em α. Notação: $\partial\alpha$.

Def.2.11: Uma interpretação das fórmulas de F em uma álgebra $(A,\to,1)$ é uma aplicação $h:F \to A$ tal que $\forall \alpha,\beta \in F$ $h(\alpha*\beta) = h\alpha \to h\beta$. Ainda, α é válida segundo $h : F \to A$ se $h\alpha = 1$

Def.2.12: $\alpha \in F$ é válida se $h\alpha = 1$ para cada interpretação $h : F \to A$.

Denotemos por L o conjunto quociente de F pela seguinte equivalência:

$\alpha \equiv \beta$ se e só se $h\alpha = h\beta$ para cada interpretação $h: F\to A$. Sejam $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ em L e definamos $\overline{\alpha} \to \overline{\beta} = \overline{\alpha*\beta}$ e $1 = \overline{\alpha*\alpha}$. Desta definição segue-se que a lei $(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \longmapsto \overline{\alpha*\beta}$ é operação em L.

Teorema 2.7:

$(L,\to,1)$ é livre sobre G.

Prova:

Observemos inicialmente que $(L,\to,1)$ é álgebra. Por exemplo, $\overline{\alpha}\to(\overline{\beta}\to\overline{\gamma}) = (\overline{\alpha}\to\overline{\beta})\to(\overline{\alpha}\to\overline{\gamma})$. De fato, o primeiro membro é $\overline{\alpha*(\beta*\gamma)}$ e o segundo $\overline{(\alpha*\beta)*(\alpha*\gamma)}$ e disto $h\,\alpha*(\beta*\gamma) = h(\alpha*\beta)*(\alpha*\gamma)$ para cada interpretação $h : F \to A$ já que em A vale H_2. Agora notemos que $\pi : F \to L$, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$, é interpretação pois $\pi\alpha*\beta = \overline{\alpha*\beta} = \overline{\alpha} \to \overline{\beta}$.

Sejam $j : G \to F$, $jg = (g)$, $i : G \to L$ onde $i = \pi.j$ e $f : G \to A$ aplicação sendo A álgebra. Consideremos $\overline{f} : F \to A$ a interpretação tal que $\overline{f}(g) = fg$.

Temos então o seguinte diagrama

$$f=\overline{f}.j \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{f}"] & L \arrow[dl, dotted] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Vamos "preencher o pontilhado" com $h : L \to A$ assim definida: $h\overline{\alpha} = (h.\pi)\alpha = \overline{f}\alpha$. Como $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ acarreta $\overline{f}\alpha = \overline{f}\beta$ temos que h é aplicação e enfim é morfismo pois $\overline{f}$ é interpretação.

Para finalizar temos $h.i = (h.\pi).j = \overline{f}.j = f$

Observemos aqui que se G é finito então L é finita. A prova disto não é trivial e pode ser encontrada em [4].

§3. *Quadros Semânticos e Decidibilidade*

Entenderemos aqui por "Problema da Palavra" para as álgebras de Hilbert a seguinte questão:

Dadas duas palavras α e β saber se têm o mesmo significado - De forma mais precisa: saber se para cada interpretação $h: F \to A$ temos $h\alpha = h\beta$ onde α e β são fórmulas nas variáveis de V e conectivo "$\to$" e A álgebra de Hilbert. Como isto é o mesmo que saber se $\alpha \to \beta$ e $\beta \to \alpha$ são válidas, o problema acima pode ser reenunciado como se segue:

Dada $\alpha \in F$, saber se α é válida. - É claro que para algumas fórmulas particulares podemos obter prontamente a resposta, como é o caso de $\alpha = \theta \to \theta$ ou o de $\alpha = v$ onde v é variável. Por outro lado é necessário algum tempo de reflexão e algum engenho para garantirmos a validade de $\{(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \alpha) \to \alpha]\} \to \{(\beta \to \alpha) \to [(\alpha \to \beta) \to \beta]\}$.

Surge então, expontâneamente, a indagação sobre a existência de um "procedimento natural", a grosso modo um conjunto finito de regras e ordens que, aplicado sistematicamente às componentes de α, nos daria a resposta (α é válida ou não) em um número finito de etapas. Se tal procedimento existe, dizemos que o problema da Palavra é solúvel. Caso contrário, o "problema" é insolúvel. (Ver por exemplo o "problema da palavra" para grupos definidos por relações entre seus geradores).

No que se segue, exibiremos um tal "procedimento" para o caso das álgebras de Hilbert. Este é baseado essencialmente no fato de que se supusermos $h\alpha \notin D$, $h: F \to A$ interpretação e D dedutiva em A, e obtivermos contradição, então é por que α é válida.

Em linhas gerais consiste numa análise de $h\alpha$ sobre sub-álgebras dedutivas, isto é: quebramos $h\alpha$ em "sub-fórmulas" menores e examinamos criteriosamente condições de compatibilidade entre as sub-fórmulas em questão, junto às subálgebras dedutivas originárias dessa "quebra", como sugerem as versões abaixo do Lema 1.

Sejam $h : F \to A$ interpretação e D dedutiva em A.

1) Se $X \cup \{h\alpha \to \beta\} \subset D$ então $X \cup \{h\beta\} \subset D$ ou $h\alpha \notin D$

2) Seja $(Y \cup \{\alpha \to \beta\}) \cap D = \emptyset$. Então existe D' dedutiva, $D' \supset D$, com $h\alpha \in D'$ e $h\beta \notin D'$.

1) e 2) nos sugerem as regras para o procedimento que daremos a seguir.

Descrição e Análise do Procedimento

Consideremos V conjunto enumerável e F o conjunto das fórmulas nas variáveis de V e conectivo "$\to$". Sejam $P_1, Q_1, Q_1', P_1' \subset F$ e as seguintes *regras de redução:*

$$R(\to,\ )\quad \frac{\{\alpha\to\beta\}\cup Q_1 : Q_1'}{Q_1 \cup \{\beta\} : Q_1' \;\Big|\; Q_1 : Q_1' \cup \{\alpha\}} \qquad\qquad R(\ ,\to)\quad \frac{P_1 : P_1' \cup \{\alpha\to\beta\}}{P_1 \cup \{\alpha\} : \{\beta\}}$$

Dizemos que uma das regras acima se *aplica* ao par $\mathbf{P} = P:P'$, se existir $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2 \in P$ (neste caso $R(\to,\ )$ se aplica) ou existir $\beta = \beta_1 \to \beta_2 \in P'$ (aqui, $R(\ ,\to)$ se aplica).

Por uma *aplicação da regra* $R(\ ,\to)$ ao par $S:S' \cup \{\alpha\to\beta\}$, entendemos a substituição deste pelo par $S \cup \{\alpha\}:\{\beta\}$.

Por uma *aplicação da regra* $R(\to,\ )$ ao par $S \cup \{\gamma\to\delta\}:S'$, entendemos a substituição deste pela dupla de pares $S \cup \{\delta\}:S'$ e $S:S' \cup \{\gamma\}$.

Uma *configuração* C é uma coleção finita de pares $P_1,\dots P_n$, onde $P_i = P_i:P_i'$.

Um *quadro* é uma sequência $C_1C_2\dots C_n$ de configurações na qual cada C_i, $i \geq 2$, é obtida da precedente por aplicação de uma das regras de redução a um par $P \in C_{i-1}$.

Um par $P:P'$ é *incompatível* se $P \cap P' \neq \emptyset$. Uma *configuração* C *é incompatível* se cada $P \in C$ for incompatível.

Um *quadro* $C_1,\dots,C_n$ *é incompatível* se alguma C_i o for.

Um par $P:P'$ é *inconsistente* (P,P' finitos) se existir quadro incompatível $C_1,\dots,C_n$ com $C_1 = \{P\}$. Caso contrário, o par é consistente.

Seja $\alpha \in F$. Se $\emptyset:\{\alpha\}$ for inconsistente, dizemos que α é *teorema*, e um quadro incompatível $C_1,\dots,C_n$ com $C_1 = \{\emptyset:\{\alpha\}\}$ é uma *prova* para α.

Um par $P:P'$ é *realizável* se existir $h:F \to A$ interpretação e D dedutiva em A tais que $hP \subset D$ e $hP' \cap D = \emptyset$.

Uma *configuração* *é realizável* se algum de seus elementos o for.

Proposição 1

Seja $C_1,\dots,C_n$ quadro. Se C_i for realizável, então também o será C_{i+1}.

Isto é consequência imediata do Lema 1 do parágrafo anterior.

Corolário

Se α tem prova, então α é válida.

Suponhamos que α não seja válida. Logo existe interpretação $h: F \to A$ com $h\alpha \neq 1 \in \{1\} = D_0$. Então $\overline{C}_1 = \{\emptyset:\{\alpha\}\}$ é realizável. Segue-se que para qualquer quadro $\overline{C}_1,\dots,C_n, C_i$ é realizável, $1 \leq i \leq n$. Logo, não existe quadro incompatível começando por $\overline{C}_1$ e então α não tem prova.

Observemos que este corolário nos garante que o *procedimento* é correto no sentido de que cada teorema é necessariamente uma fórmula válida.

Estaremos interessados agora em provar a recíproca, ou seja: Se α é válida, então α é teorema. Para isto, algumas definições serão necessárias.

A noção de subfórmula é dada recursivamente como se segue:

i) Se α é variável, então α não tem *subfórmula imediata*.

ii) $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ tem exatamente duas *subfórmulas imediatas:* α_1 e α_2.

S_1) Cada fórmula α é *subfórmula* de si mesma.

S_2) Se α_1 é subfórmula imediata de α então α_1 é *subfórmula* de α.

S_3) Se α_2 é *subfórmula* de α_1 e α_1 é *subfórmula* de α, então α_2 é *subfórmula* de α.

Notemos que cada fórmula α tem no máximo um número finito de subfórmulas distintas. Logo, se $P \subset F$ é finito, então também o é $\sigma(P) = \{\beta \in F : \beta$ é subfórmula de alguma $\alpha \in P\}$.

Noção de Par Saturado

Seja P (finito) consistente. Se em P não ocorrer fórmulas α com $\partial\alpha \geq 1$, então $\overline{P} = P$ será o par saturado de P.

Suponhamos que em P ocorram fórmulas α tais que $\partial\alpha \geq 1$.

Sejam elas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Como $\partial\alpha_1 \geq 1$, temos $\alpha_1 = \beta_1 \to \beta_2$ e então um dos pares $P\cup\{\beta_2\}:P'$, $P: P'\cup\{\beta_1\}$ é consistente, pois $\mathcal{P}$=P:P' o é. Seja $\mathcal{P}_1 = P_1 : P_1'$ um desses, $\mathcal{P}_1$ consistente.

Como $\alpha_2 = \gamma_1 \to \gamma_2 \in P_1$, temos $P_1\cup\{\gamma_2\}:P_1'$ ou $P_1:P_1'\cup\{\gamma_1\}$ consistente, pois $\mathcal{P}_1$ o é. Seja $\mathcal{P}_2$ um destes que é consistente. Assim, sucessivamente, temos uma sequência $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_n$ de pares finitos e consistentes, tais que $\mathcal{P}_i$ é obtido de $\mathcal{P}_{i-1}$ como um consistente em $\{P_{i-1}\cup\{\theta_2\}:P_{i-1}$, $P_{i-1}:P_{i-1}\cup\{\theta_1\}\}$, onde $\alpha_i = \theta_1 \to \theta_2 \in P_{i-1}$. Ainda, $P_i\subset P_{i+1}$ e $P_i'\subset P_{i+1}'$.

Sejam $\mu_1,\ldots,\mu_p$ as fórmulas de P_n tais que $\partial\mu_i \geq 1$. Repetimos aqui o processo descrito acima (para $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in P$) para $\mu_i \in P_n$. Logo, ficamos com $\mathcal{P}_1\ldots\mathcal{P}_n,\mathcal{P}_{n+1}\ldots\mathcal{P}_{n+p}$ onde cada par é finito e consistente, e ainda, $P_j'\subset P_{j+1}'$ e $P_j\subset P_{j+1}$

Repetimos aqui o tratamento dado a $\mathcal{P}_n$, sobre $\mathcal{P}_{n+p}$, e assim sucessivamente, conseguindo desta forma uma sequência $(\mathcal{P}_s)s\geq 1$, onde $\mathcal{P}_s$ é consistente e finito, e além disso, $P_s\subset P_{s+1}$ e $P_s'\subset P_{s+1}'$. Como $\sigma(P\cup P')$ é finito, segue-se a existência de $\mathcal{P}_k$ na sequência $(\mathcal{P}_s)s\geq 1$ tal que, se $m \geq k$, então $\mathcal{P}_m$ coincide com algum $\mathcal{P}_\ell$ com $l \leq k$. Chamamos $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_k$ de *par saturado* de $\mathcal{P}$.

Notemos como observação final, que se $\alpha \to \beta \in \overline{P}$, então $\beta \in \overline{P}$ ou $\alpha \in \overline{P}'$.

A noção de *par associado* ser nos á útil na proposição que se seguirá. Para isto, seja $\mathcal{P}$ = P:P' finito e consistente. Sejam $\beta_1,\ldots,\beta_n \in P'$ tais que $\partial\beta_i \geq 1$. Se isto não for possível, então $\mathcal{P}$ será o par associado a $\mathcal{P}$. Caso contrário, para cada $\beta_i = \theta_i \to \rho_i$ de P', seja $\mathcal{HP} = \{P\cup\{\theta_i\}:\{\rho_i\}\}$, $1 \leq i \leq n$.

Cada $Q \in HP$ é chamado um par *associado* a P. Observemos ainda que Q é finito e consistente e vale:

Se $\alpha \to \beta \in P'$, então existe $Q \in HP$ com $\alpha \in Q \supset P$ e $Q' = \{\beta\}$.

Proposição 2

Se $\alpha_0 \in F$ é válida, então α_0 tem prova.

Suponhamos que α_0 não tenha prova. Então o par $P = \emptyset:\{\alpha_0\}$ é consistente. Seja $P_0 = \overline{P}$ e consideremos $HP_0 = \{U_1,\ldots,U_n\}$, assim como P_i um par saturado de U_i. Formemos $HP_1=\{U_{n+1},\ldots,U_p\}$ e seja P_{n+j} par saturado de U_{n+j}. Temos então a sequência $P_0, P_1,\ldots,P_p$.

Repitamos o processo com P_2 (formemos $HP_2\ldots$) e assim sucessivamente (com $P_3, P_4,\ldots$etc). Desta forma obtemos uma sequência $(P_s)_{s \geq 0}$. Como $\sigma(\alpha_0)$ é finito, segue-se que existe apenas um número finito de P_s's diferentes. Logo, existe k_0, tal que,se $s > k_0$ então $P_s = P_\ell$, para algum $\ell \leq k_0$.

Seja $K = (P_0,\ldots,P_{k_0})$. Vamos estender cada P_j a conjuntos mais amplos D_j em F e, para isto, consideremos a relação $\Vdash \subset F \times \{P_j\}_j$ definida indutivamente (a indução é em $\partial\alpha$) como segue:

I) Se v é variável então $v \Vdash P_j$, se $v \in P_j$

II) $\alpha\to\beta \Vdash P_j$ se para todo P_ℓ, com $P_\ell \supset P_j$, se $\alpha \Vdash P_\ell$ então $\beta \Vdash P_\ell$.

Seja $D_j = \{\alpha \in F : \alpha \Vdash P_j\}$. Observemos que se L é a álgebra de Hilbert Livre, com geradores em V, então $D^j = \{\overline{\alpha} \in L : \alpha \in D_j\}$ é dedutiva em L e ainda $(D^j)_j$ é família de Kripke.

Sejam $D = \bigcap_j D^j$ e $\pi_1 : L \to L/D$ o epimorfismo canônico. Consideremos $\pi : F \to L$, $\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$ e $h = \pi_1 \circ \pi$. É de fácil verificação que $h: F \to L$ é interpretação, e ainda, $h\alpha_0 \neq 1$ pois $\alpha_0 \not\Vdash P_0$, i.e., $\bar{\alpha}_0 \notin D^0 = D$. Logo, α_0 não é válida e concluimos a demonstração.

Corolário

Se $\alpha \in F$ não é válida, então existe $h:F \to A$ com $h\alpha \neq 1$ e A finita.

Notemos que de $D^j \supset D^0$, temos $\{\pi_1 D^j\}_j$ família de sub-álgebras dedutivas de L/D^0. Como $\{D^j\}_j$ é de Kripke, então $\{\pi_1 D^j\}$ também o será.

Logo, existe $r: L/D^0 \to A$ morfismo, onde A é a álgebra das partes fechadas de $\bar{K} = \{\pi_1 D^j\}_j$ que é finita, pois $\bar{K}$ o é. Como $\bigcap \bar{K} = \pi_1 D^0 = \{D^0\}$ temos que r é injetor e então L/D^0 é finita.

Vamos agora ilustrar, com dois exemplos, o método de decisão descrito anteriormente.

Exemplo 1

Vejamos uma prova para $\alpha = [(a\to b)\to(a\to c)]\to[a\to(b\to c)]$.

$C_1 = \{(\phi:\alpha)\}$

$C_2 = \{(\alpha_1 = (a\to b)\to(a\to c) : a\to(b\to c))\}$

$C_3 = \{(\alpha_1, a : b\to c)\}$

$C_4 = \{(\alpha_1, a, b : c)\}$

$C_5 = \{(\alpha_1, (a\to c), a, b : c), (\alpha_1, a, b : a\to b, c)\}$

$C_6 = \{P = (\alpha_1, a\to c, a, b, c : c), Q = (\alpha_1, a\to c, a, b : a, c), (\alpha_1, a, b : a\to b, c)\}$

$C_7 = \{P, Q, (\alpha_1, a, b : b)\}$

Observe-se que, mesmo que a, b e c sejam fórmulas quaisquer, α continua teorema.

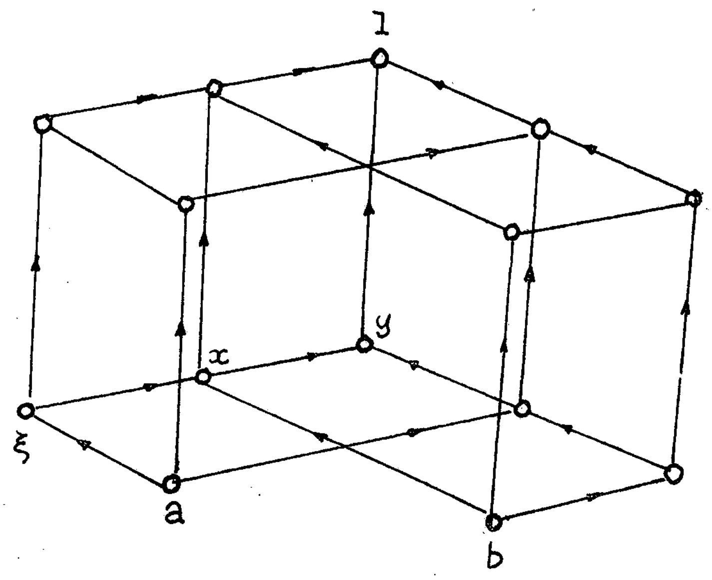
Exemplo 2

Aqui veremos que para v e w variáveis, $\alpha_0 = [(v \to w) \to v] \to v$ não é válida.

Vamos exibir $h: F \to A$ interpretação tal que $h\alpha_0 \neq 1$, onde F é o conjunto das fórmulas nas variáveis v e w. Esta restrição não é essencial visto que se considerarmos mais variáveis (distintas de v e w), bastará escolhermos $a_0 \varepsilon A$ e tomarmos $hu = a_0$, para $u \notin \{v,w\}$ u variável.

O diagrama abaixo foi obtido por T.Skolem (1952) e é o da álgebra livre com dois geradores a e b.

Na figura abaixo, o gráfico $\overset{\;\;y}{{}_{x}\nearrow}$ significa que $x \leq y$



$\xi = (a \to b) \to a$

De acordo com a prop 2 vamos fazer os cálculos para obtermos as dedutivas na álgebra livre.

$P_0 = (\phi : [(v \to w) \to v] \to v)$ ∴ $P_0 = \emptyset$

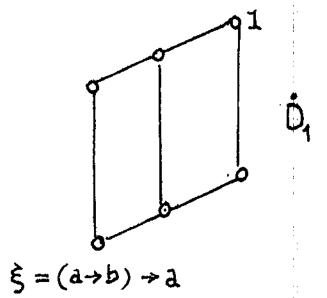
$HP_0 = \{((v \to w) \to v : v)\}$

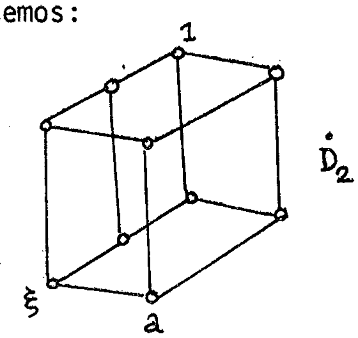
$P_1 = ((v \to w) \to v : v,\ v \to w)$ é saturado (não incompatível) do par em HP_0 ∴ $P_1 = \{(v \to w) \to v\}$

$HP_1 = \{((v \to w) \to v, v : w)\}$

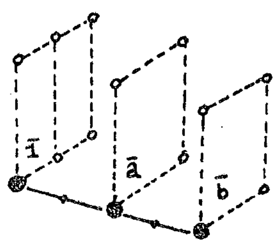
$P_2 = ((v\ w)\ v, v : w,\ v\ w)$ é saturado do par em HP_1 ∴ $P_2 = \{(v \to w) \to v, v\}$.

Como $(v \to w) \to v \dashv P_0$ vamos ter $D_0 = D_1 \subset D_2$. Fazendo-se a identificação $\dot{v} = a$ e $\dot{w} = b$ temos:





Logo, consideremos $A = L/\dot{D}_1$ cujos elementos são $\bar{b} < \bar{a} < \bar{1}$



Para terminarmos basta definirmos $h : F \to A$ interpretação tal que $hv = \bar{a}$ e $hw = \bar{b}$. Assim, como definida, $h\alpha_0 = \bar{a} \neq 1 = \bar{1}$.

CAPÍTULO II - SISTEMAS PSEUDO-BOOLEANOS

§1. Partes dedutivas e Quocientes

Def.1.1: Um sistema pseudo-Booleano é um sistema implicativo (E,ϕ) sujeito às condições adicionais:

B_1) $(\exists z \in E)(z \notin \phi\emptyset) : \phi\{z\} = E$.

B_2) Para cada $(a,b)\in E^2$ existe $(x,y)\in E^2$ tal que:

1) $a,b\in\phi\{x\}$, e se $a,b\in\phi P$ então $x\in\phi P$

2) $y \in \phi\{a\} \cap \phi\{b\}$ e se $p \in \phi\{a\}\cap\phi\{b\}$, então $p\in\phi\{y\}$.

Observemos que a condição B_2 pode ser substituida por B_2' que assegura:

Para cada $(a,b)\in E^2$ existe $(x,y)\in E^2$ tal que $\phi\{a,b\}=\phi\{x\}$ e ainda $\phi\{y\} = \phi\{a\} \cap \phi\{b\}$.

Def.1.2: Consideremos $a,b \in E$, (E,ϕ) pseudo-Booleano. Então

$a \wedge b \equiv \{x \in E: \phi\{a,b\} = \phi\{x\}\}$

$a \vee b \equiv \{y \in E: \phi\{a\} \cap \phi\{b\} = \phi\{y\}\}$

$0 \equiv \{z \in E: \phi\{z\} = E\}$

$-a \equiv a \to 0$

Ainda, para U e V univalentes de (E,ϕ),

$$U\wedge V = \bigcup_{u\in U,\, v\in V} u\wedge v$$

$$U\vee V = \bigcup_{u\in U,\, v\in V} u\vee v \quad \text{e} \quad -U = \bigcup_{u\in U} -u$$

Destas definições podemos concluir que $a\wedge b$, $a\vee b$ e 0 são univalentes maximais e, em consequência disto, também o são $U\vee V$, $U\wedge V$ e $-V$ pois $U\wedge V = u\wedge v$, $U\vee V = u\vee v$ e $-V = -v$, $u\in U$, $v\in V$.

O resultado abaixo nos indica como obter novos sistemas a partir de um dado (E,ϕ).

Teorema 1.1:

Sejam (E,ϕ) pseudo-Booleano e a equivalência em E, $x \equiv y$ se e só se $\phi(\{x\}\cup F) = \phi(\{y\}\cup F)$, onde F é um fechado do sistema e $F \neq E$. Então o sistema implicativo quociente $(\mathcal{E},\Psi)$ é pseudo-Booleano.

Prova:

Com as mesmas notações usadas no teorema 1.4 do capítulo I, mostraremos que $\Psi\{\dot{a},\dot{b}\} = \Psi\{\dot{x}\}$, $\Psi\{\dot{a}\}\cap\Psi\{\dot{b}\} = \Psi\{\dot{y}\}$ e $\Psi\{\dot{z}\} = \mathcal{E}$, onde $x \in a\wedge b$, $z \notin F$ e $\phi\{z\} = E$ e, ainda, $y \in a \vee b$.

$\Psi\{\dot{a},\dot{b}\} = \pi\phi(\dot{a}\cup\dot{b}\cup F) = \pi\phi(\phi\{a,b\}\cup F) = \pi\phi(\{x\}\cup F) = \Psi\{\dot{x}\}$.

$\Psi\{\dot{z}\} = \pi\phi(\dot{z}\cup F) = \pi\phi(\phi\{z\}\cup F) = \pi\phi E = \mathcal{E}$. Como $z \notin F$ temos $\dot{z} \notin \Psi\emptyset$.

Para mostrarmos a última parte, seja $\dot{s}$ em $\Psi\{a'\}\cap\Psi\{b'\}$. Disto temos $s \in \phi(\{a\}\cup F)$ e $s \in \phi(\{b\}\cup F)$. Logo, $a \to s \subset F$ assim como $b \to s \subset F$. Daqui podemos escrever que, para $p \in a \to s$ e $q \in b \to s$, $s \in \phi\{a,p\}$ e $s \in \phi\{b,q\}$. Mas isto acarreta $q \to s \subset \phi\{b\}$ e $p \to s \subset \phi\{a\}$ $\therefore$ $p \to s$, $q \to s \subset \phi\{y\}$ e enfim, $s \in \phi(\{y\}\cup\{p,q\}) \subset \phi(\{y\}\cup F)$. Logo, $\dot{s} \in \Psi\{\dot{y}\}$.

Seja agora $\dot{t} \in \Psi\{\dot{y}\}$. Logo, $\dot{t} \in \phi(\{y\}\cup F)$ e então $y \to t \subset F$. Em continuação, se $r \in y \to t$ temos $t \in \phi\{y,r\}$ e daqui, $r \to t \subset \phi\{y\} = \phi\{a\}\cap\phi\{b\}$. Disto resulta $r \to t \subset \phi\{a\}$ e $r \to t \subset \phi\{b\}$, ou seja, $t \in \phi\{a,r\}\cap\phi\{b,r\} \subset \phi(\{a\}\cup F)\cap\phi(\{b\}\cup F)$. Finalmente, $\dot{t} \in \pi\phi(\{a\}\cup F)$ e $\dot{t} \in \pi\phi(\{b\}\cup F)$ e então $\dot{t} \in \Psi\{\dot{a}\}\cap\Psi\{\dot{b}\}$.

Tendo-se em vista este resultado, suporemos sempre que nossos sistemas tenham a propriedade de que, se $\phi\{x\} = \phi\{y\}$ então $x = y$. Isto é, dado (E,ϕ) pseudo-Booleano, teceremos considerações sobre o sistema (E_0,Ψ_0), o quociente resultante da $\phi\phi$-identificação. Esta restrição não é essencial tendo-se em conta os propósitos deste capítulo e de certa forma deste trabalho, pois estamos sempre interessados em saber a respeito dos $x \in E$ tais que $x \in \phi\phi$. Observe-se que este fato, $x \in \phi\phi$, é preservado por $\pi_0\colon E \to E_0$ já que $x \in \phi\phi$ se e só se $\pi_0 x \in \Psi\phi$.

De outra feita, nos permitiremos escrever $a \to b = x_1$, $a \vee b = x_2$ e $a \wedge b = x_3$ em vez de $a \to b = \{x_1\}$, $a \vee b = \{x_2\}$ e $a \wedge b = \{x_3\}$ para tais sistemas, o que nos sugere interpretar imediatamente $\to, \wedge, \vee$ como operações binárias em E. Isto nos propicia uma visualização algébrica dos sistemas pseudo-booleanos.

Por fim, é bom lembrar que $a \leq b$ se e só se $a \to b = 1$ ordena parcialmente um dado sistema.

Def.1.3: Sejam (E,ϕ) sistema e $D \subset E$. D é parte dedutiva do sistema pseudo-booleano em questão se as condições abaixo se verificam:

(i) $1 \in D$ e D tem a propriedade MP.

(ii) Se $x,y \in D$ então $x \wedge y \in D$.

(iii) Se $x \in D$ e $f \in E$ então $x \vee f \in D$.

Ainda,

D é dedutiva própria se $D \neq E$ e uma tal D é prima se $x \vee y \in D$ acarretar $x \in D$ ou $y \in D$.

Teorema 1.2:

D é dedutiva no sistema pseudo-Booleano (E,ϕ) se e só se D é dedutiva em (E,ϕ) implicativo, isto é: $1 \in D$ e D tem MP.

Prova:

Suponhamos $1 \in D$ e que D tenha M.P. Verificaremos então a validade de (ii) e (iii).

Sejam $x,y \in D$. Como $\delta\{x,y\} = \phi\{x,y\} \subset D$ temos que $x \wedge y \in D$. Tomemos agora $x \in D$ e $f \in E$. Como $x \vee f \in \phi\{x\} = \delta\{x\}$, temos por fim $x \vee f \in D$.

Com este resultado podemos lançar mão, sempre que for necessário, daqueles referentes a partes dedutivas obtidos no **capítulo** anterior.

Teorema 1.3:

Sejam (E,ϕ) pseudo-Booleano e $a,b,c \in E$. Então estão satisfeitas:

(i) $a \to b \in \phi\{c\}$ se e só se $b \in \phi\{a \wedge c\}$, ou de forma equivalente, (i') $c \leq a \to b$ se e só se $a \wedge c \leq b$.

(ii) $a * b = b * a$ e $a * a = a$ com $* \in \{\vee, \wedge\}$.

(iii) $a * (b * c) = (a * b) * c$ onde $* \in \{\vee, \wedge\}$

(iv) $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$

(v) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ e $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Prova:

Como (i), (ii) e (iii) decorrem imediatamente das definições, vejamos apenas as provas de (iv) e (v).

(iv) Como a, $a \vee b$ são de $\phi\{a\}$, temos $a \wedge (a \vee b)$ é de $\phi\{a\}$, ou seja, $a \leq a \wedge (a \vee b)$. Por outro lado, $a \in \phi\{a \wedge (a \vee b)\} \therefore a \wedge (a \vee b) = a$. De forma semelhante obtemos $a \vee (a \wedge b) = a$. Vejamos, para terminar, a distributividade ((v)). Temos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \geq a \wedge b$, $a \wedge c$ e portanto de $(i)'$ obtemos $a\to[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\geq b$ e $a\to[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\geq c$. Disto concluimos que $a\to[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\geq b\vee c$ e por fim $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\geq a\wedge(b\vee c)$.

Por outro lado, de $a\wedge b\leq a\wedge(b\vee c)$ e $a\wedge c\leq a\wedge(b\vee c)$ obtemos $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leq a\wedge(b\vee c)$ concluindo a prova. A primeira igualdade de (v) é provada de forma análoga.

Este teorema nos diz que E, munido de sua ordem natural, é um reticulado distributivo, com primeiro e último elemento, satisfazendo a propriedade adicional de que o conjunto dos x de E tais que $\inf\{a,x\}\leq b$ tem supremo, $a,b\in E$. Reciprocamente, um tal retículado $(R,\leq)$ dá origem a um sistema pseudo-Booleano (R,ϕ) onde, se $A\subset R$, $A\neq\emptyset$, temos $\phi A=\{x\in R: x\geq\inf\{a_1,\dots,a_n\}, a_i\in A, n\in\mathbb{N}\}$ e $\phi\emptyset=\{\text{último elemento de } R\}$.

Com relação à caracterização algébrica dos sistemas pseudo-Booleanos (obtidos através de F - identificações) de tipo finito, A. Monteiro sugere a seguinte definição:

Uma álgebra de Heyting é um sistema algébrico $(E,\wedge,\vee,\to)$ onde "$\wedge$","$\vee$" e "$\to$" são operações binárias em E satisfazendo:

A_0) $(\exists 0\in E)(\forall x\in E)\ \ 0\wedge x=0$

A_1) $(\forall x,y\in E)\ \ x\to x=y\to y,\ \ x\to x\neq 0$

A_2) $(\forall x,y\in E)\ \ (x\to y)\wedge y=y$ e $x\wedge(x\to y)=x\wedge y$

A_3) $(\forall x,y,z\in E)\ \ x\to(y\wedge z)=(x\to z)\wedge(x\to y)$

A_4) $(\forall x,y,z\in E)\ \ (x\vee y)\to z=(x\to z)\wedge(y\to z)$

O leitor interessado poderá verificar que todo sistema E, pseudo-Booleano (obtido por F-identificação) é uma álgebra de Heyting e que, se nesta álgebra definirmos a noção de parte dedutiva (Def.1.3) gerada por $A\subset E$, recuperaremos o sistema dado se este for de tipo finito.

Tais álgebras são estudadas em [1] com o nome de álgebras pseudo-Booleanas.

Dando-se sequência ao assunto, vejamos o

Teorema 1.4:

Seja (E,ϕ) sistema. Então temos $x \in \phi\{a_1,\ldots,a_n\}$ se e só se $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$.

Prova:

Se $x \in \phi\{a_1,\ldots,a_n\}$, temos $a_1 \to (a_2 \to (a_3 \to \ldots (a_n \to x))) = 1$. Logo, $a_1 \leq a_2 \to (a_3 \to \ldots (a_n \to x))\ldots)$ e por aplicações repetidas do resultado (i') do teorema anterior obtemos $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x$. Suponhamos que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x$, ou seja $a_n \wedge (a_{n-1} \wedge \ldots \wedge a_1) \leq x$. Novamente. por aplicações repetidas de (i'), obtemos $a_1 \to (a_2 \to (\ldots (a_n \to x)\ldots) = 1$ e então $x \in \phi\{a_1,\ldots,a_n\}$. Mostramos que $\phi\{a_1,\ldots,a_n\} = \phi\{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n\}$.

Corolário

Sejam $\{a\}$, $P \subset E$, (E,ϕ) sistema. Então $\delta(\{a\} \cup P) = \{s \in E: s \geq a \wedge d,\ d \in \delta P\}$.

Prova:

Lembremos aqui que "δ" é o operador *parte dedutiva gerada por...*". Feito isto, comecemos com $s \in \delta(\{a\} \cup P)$. Via teorema da dedução, obtemos $a \to s \in \delta P$, ou melhor, $a \to s \in \delta P_f$ e então $s \in \delta(\{a\} \cup P_f) = \phi(\{a\} \cup P_f)$.Pelo teorema acima, $s \geq a \wedge (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)$ e enfim $s \geq a \wedge d$, $d \in \delta P$. Agora se $s \geq a \wedge d$, virá $s \in \delta\{a\} \cup P$ já que $\delta\{a\}, \delta P \subset \delta\{a\} \cup P$.

O teorema abaixo justifica, em parte, a introdução da noção de parte dedutiva prima.

Teorema 1.5:

Sejam (E,ϕ) sistema pseudo-Booleano e D dedutiva própria em (E,ϕ). Então $D = \bigcap_{P \supset D} P$, onde P é dedutiva prima.

Prova:

É suficiente mostrarmos que se $x_0 \notin D$ então existe dedutiva prima P com $P \supset D$ e $P \not\ni x_0$. Para isto, consideremos Z a coleção de todas as partes dedutivas de (E,ϕ) que contêm D e não têm x_0. $Z \neq \emptyset$ pois $D \in Z$. Ademais, toda cadeia C de $(Z,\subset)$ tem majorante aí, a saber $\bigcup C$. Pelo lema de Zorn, existe $P \in Z$, P maximal em $(Z,\subset)$. Mostremos que P é dedutiva prima em (E,ϕ).

Suponhamos que $a \vee b \in P$ e $a \notin P$ assim como $b \notin P$. Examinemos então as duas únicas possibilidades:

(i) $x_0 \in \delta(\{a\} \cup P) \cap \delta(\{b\} \cup P)$

(ii) $x_0 \notin \delta(\{a\} \cup P) \cap \delta(\{b\} \cup P)$

Da primeira possibilidade temos $x_0 \geq a \wedge p_1$ e $x_0 \geq a \wedge p_2$, ou seja, $x_0 \geq (a \vee b) \wedge p$, onde $p = p_1 \wedge p_2 \in P$. Como $a \vee b \in P$, temos $x_0 \in P$ o que não é possível. Suponhamos então que $x_0 \notin \delta(\{c\} \cup P)$, $c \in \{a,b\}$. Disto, $\delta(\{c\} \cup P) \in Z$. Como P é maximal, temos $\delta(\{c\} \cup P) = P$, o que também não é possível pois $c \notin P$. Enfim, a ou b é de P e então P é prima.

Corolário 1:

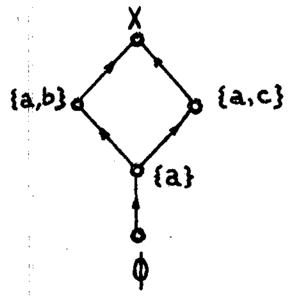
Toda parte dedutiva maximal é prima.

Corolário 2:

Cada dedutiva D de um dado sistema está contida em uma outra maximal (própria), se D for própria.

Observemos aqui que se A é topologia para um conjunto $X \neq \emptyset$, então o sistema (A,δ) é pseudo-Booleano, sendo que δ: $PA \rightarrow PA$ é tal que $\delta P = \{x \in A: x \supseteq \bigcap P_f$ com $P_f \subset P\}$. Veja-se por exemplo, teor. 2.6 Cap.I. Isto, nos dá condições de mostrarmos que a recíproca do corolário 1 acima não é válida.

Consideremos a topologia $A = \{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ para o conjunto $X = \{a,b,c\}$. O diagrama de $(A,\subset)$ é como abaixo:



É imediato constatar que $\{\{a,b\},X\}$ e $\{\{a,c\},X\}$ são dedutivas primas mas não maximais.

Com relação às dedutivas maximais, vejamos o

Teorema 1.6:

Sejam (E,δ) sistema pseudo-Booleano de tipo finito e M dedutiva própria (fechado) em (E,δ). Nestas condições as proposições abaixo são equivalentes:

(i) M é maximal.

(ii) Para cada $x \in E$, ou $x \in M$ ou $-x \in M$.

(iii) O sistema quociente (E,Ψ), via M-identificação, é trivial, i.e, $E = \{\overline{0},\overline{1}\}$.

Prova:

Assumamos (i) e consideremos $D = \delta(\{x\} \cup M)$, $x \in E$. Se $D=E$, então $0 \in D$ e assim $x \rightarrow 0 = -x \in M$. Caso contrário, $D=M$ e então

$x \in M$, já que M é maximal.

Mostremos que (iii) decorre de (ii). Seja $\bar{c} \in E$, $\bar{c} \neq \bar{1}$. Logo, $c \notin M$ e então $-c \in M$. Disto temos $-\bar{c} = \bar{1}$, ou seja, $\overline{c \to 0} = \bar{1}$ e daqui, $\bar{c} \leq \bar{0}$ e enfim $\bar{c} = \bar{0}$.

Seja agora M' dedutiva com $M' \supsetneq M$. Logo, existe $x_0 \in M'$ e $x_0 \notin M$. Disto vem que $E \subset M'$, já que $M' \supset \delta(\{x_0\} \cup M) = \delta(\{0\} \cup M) = E$. Enfim, M é maximal.

Teorema 1.7:

Seja P dedutiva prima de um dado sistema E. Então valem:

(i) $x \wedge y \in P$ se e só se x e y são de P

(ii) $x \vee y \in P$ se e só se $x \in P$ ou $y \in P$

(iii) $x \to y \in P$ se e só se para cada $D \supset P$, D prima, se $x \in D$ então $y \in D$.

(iv) $-x \in P$ se e só se para cada D prima, $D \neq E$, $x \notin D$.

Prova:

As afirmações (i) e (ii) têm provas imediatas. Por outro lado, (iii) vale obviamente no sentido de: *se $x \to y \in P$ então...* Suponhamos então que para toda Q prima, $Q \supset P$, se $x \in Q$ então $y \in Q$ e que $x \to y \notin P$. Disto resulta a existência de dedutiva $D \supset P \cup \{x\}$ e $y \notin D$. Pelo teorema 1.5, $D \subset Q_0$, Q_0 prima e $y \notin Q_0$. Isto é absurdo. Para finalizar, notemos que (iv) decorre de (iii).

Corolário:

Com as mesmas hipóteses do teorema temos:

(i) $x \wedge y \notin P$ se e só se $x \notin P$ ou $y \notin P$

(ii) $x \vee y \notin P$ se e só se $x \notin P$ e $y \notin P$

(iii) $x \to y \notin P$ se e só se existe Q prima, $Q \supset P$, com $x \in Q$ e $y \notin Q$.

(iv) $-x \notin P$ se e só se existe $Q \supset P$ prima com $x \in Q$.

Finalizaremos este parágrafo dando um teorema de representação para os sistemas pseudo-Booleanos de tipo finito.

Teorema 1.8:

Sejam (E,δ) um sistema pseudo-Booleano e $(E,\wedge,\vee,\rightarrow)$ sua álgebra de Heyting. Então existe um monomorfismo $r: E \rightarrow A$ onde A é uma álgebra de conjuntos abertos.

Prova:

Sejam P a família das partes dedutivas primas de E e A o conjunto das partes fechadas de P, i.é., $\mathbf{x} \in A$ se e só se, $D' \supset D$, $D' \in P$, e $D \in \mathbf{x}$ então $D' \in \mathbf{x}$. É imediato que A é topologia para P. Consideremos então a álgebra de Heyting $(A,\cup,\cap,\rightarrow)$ e $r: E \rightarrow A$ tal que $rx = [x]$, onde $[x] = \{D \in P : x \in D\}$. Como P é de Kripke em $(E,\rightarrow)$, já temos que $r\, x\rightarrow y = rx \rightarrow ry$ e mais, r é injetora pois $\bigcap P = \{1\}$. Resta-nos mostrar que $rx\wedge y = rx \cap ry$ e $r\, x\vee y = rx \cup ry$. Mas isto é imediato tendo-se em conta (i) e (ii) do teorema anterior (teor. 1.7).

Este resultado também poderia ser enunciado assim: Seja $(E,\leq)$ o reticulado associado ao sistema (E,δ). Então $(E,\leq)$ pode ser imerso em um reticulado de abertos $(A,\subset)$ tal que $x \leq y$ em E se e só se $rx \subset ry$ em A.

§2. *Quadros e Decidibilidade*

Nosso objetivo neste parágrafo é provar, exibindo um algoritmo, que o *problema da palavra* para as álgebras de Heyting é solúvel.

Seja V um conjunto enumerável e $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, -\}$ tais que $V \cap C = \emptyset$. Seja S o conjunto das sequências finitas de $V \cup C$ e $F \subset S$, sujeito às seguintes condições:

(i) $V \subset F$ (ii) Se $\alpha, \beta \in F$ então $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, -\alpha \in F$ (iii) F é o menor subconjunto de S com as propriedades (i) e (ii). Os elementos de F são chamados *fórmulas nas variáveis de V e conectivos de C.*

Vejamos agora a noção de interpretação das fórmulas em sistemas pseudo-Booleanos (onde $\phi\{x\} = \phi\{y\}$ acarreta $x = y$) de tipo finito, ou seja, em álgebras de Heyting.

Uma interpretação das fórmulas de F em um sistema pseudo-Booleano (A, ϕ) é uma aplicação $h: F \rightarrow A$ satisfazendo para quaisquer $\alpha, \beta \in F$ $h\,\alpha * \beta = h\alpha * h\beta$ e $h{-\alpha} = -h\alpha$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Observemos que uma interpretação é caracterizada pelos valores que assume nas variáveis, já que cada fórmula é escrita de uma única forma como composição de conectivos e variáveis. Assim, dada $f: V \rightarrow A$, aplicação, esta se estende de forma única a uma interpretação $h: F \rightarrow A$.

A soma do número de ocorrências de cada conectivo numa dada fórmula α é chamado de grau de α e denotado por $\partial\alpha$. Desta forma, se $\alpha = --s \vee t$ e $\beta = [(r \wedge t) \rightarrow s] \vee -r$, então $\partial\alpha = 3$ e $\partial\beta = 4$, $\{r, s, t\} \subset V$.

Uma fórmula α é *válida segundo a interpretação* $h:F \to A$, se $h\alpha = 1$ e ainda, α *é válida* se α for válida segundo cada interpretação $h:F \to A$.

Sejam $P,P' \subset F$. O par $P:P'$ é realizável se existir $h:F\to A$ interpretação, e D dedutiva prima de A, com $hP \subset D$ e $hP' \cap D = \emptyset$.

Consideremos $P \subset F$ e $\alpha \in F$. No que se segue, em vez de $\{\alpha\} \cup P$, escreveremos simplesmente α,P ou P,α. No caso de mais fórmulas, como o de $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \cup P$, ainda adotaremos a convenção e escreveremos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,P$.

Sejam as *regras* abaixo, sugeridas pelo teorema 1.7:

$R(\wedge,\ )$	$R(\vee,\ )$	$R(-,\ )$	$R(\to,\ )$
$\dfrac{P,\alpha\wedge\beta:P'}{P,\alpha,\beta:P'}$	$\dfrac{\alpha\vee\beta,P:P'}{P,\alpha:P' \mid P,\beta:P'}$	$\dfrac{-\alpha,P:P'}{P:\alpha,P'}$	$\dfrac{\alpha\to\beta,P:P'}{\beta,P:P' \mid P:\alpha,P'}$
$R(\ ,\wedge)$	$R(\ ,\vee)$	$R(\ ,-)$	$R(\ ,\to)$
$\dfrac{P:\alpha\wedge\beta,P'}{P:\alpha,P' \mid P:\beta,P'}$	$\dfrac{P:\alpha\vee\beta,P'}{P:\alpha,\beta,P'}$	$\dfrac{P:-\alpha,P'}{\alpha,P:\emptyset}$	$\dfrac{P:\alpha\to\beta,P'}{\alpha,P:\{\beta\}}$

Seja $\boldsymbol{P} = P:P'$ um par. Dizemos que, uma das regras acima, R, *se aplica* a P, se por apropriada escolha de $\alpha \in P \cup P'$, o par P sobre a linha da regra R assume a forma $\alpha,P:P'$ ou $P:\alpha,P'$.

Por uma *aplicação da regra* R *ao par* P entendemos a substituição de P por P_1 (ou por P' e P'' se $R \in \{R(\vee,\ ),R(\ ,\wedge),R(\to,\ )\}$) onde P é o par acima da linha na regra R e P_1 o par abaixo. Isto é feito se R se aplica a P. Caso contrário, o resultado é novamente P.

Uma *configuração* é um conjunto finito de pares.

Por uma *aplicação de uma regra* R *a uma configuração* $\{P_1,\ldots,P_n\}$ entendemos a substituição desta por outra que difere da primeira apenas por ter, em vez de P_i, o resultado (ou os resultados) da aplicação desta regra a P_i.

Um *quadro* é uma sequência finita de configurações $C_1 \ldots C_n$, tal que cada C_i é obtida de C_{i-1} por uma única aplicação de uma regra R a C_{i-1}, $i \geq 2$.

Um par $P = \mathrm{P}:\mathrm{P}'$ é *incompatível* se $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}' \neq \emptyset$.

Uma configuração C é incompatível se cada par pertencente a C o for.

Um quadro é incompatível se alguma de suas configurações o for.

Um *quadro para o par* P é um tal $C_1 \ldots C_n$ onde $C_1 = \{P\}$.

Um par P é *inconsistente* se existe quadro incompatível para P. Do contrário, P é consistente.

Seja $\alpha \in F$. Dizemos que α *é teorema*, se $\emptyset:\{\alpha\}$ for inconsistente. Um quadro incompatível para $\emptyset:\{\alpha\}$ é chamado uma *prova de* α.

Uma configuração $\{P_1, \ldots, P_n\}$ *é realizável* se algum P_i o for.

Proposição 1

Seja $C_1 \ldots C_n$ um quadro. Se C_i for realizável então C_{i+1} o será.

Aqui temos que analisar oito casos possíveis, pois ao passarmos de C_i a C_{i+1}, podemos fazê-lo por intermédio de uma das oito regras dadas. Com o auxílio do teorema 1.7 e de seu corolário, esta tarefa se torna bastante fácil, porém rotineira. Por isso, examinaremos apenas dois casos já que os demais são de análise semelhante.

Suponhamos que C_{i+1} é obtida de C_i por aplicação da regra R(,-) ao par P = $(P:P'\cup\{-\alpha\})$. Então $C_{i+1} = (C_i - \{P\})\cup\{(\alpha,P:\phi)\}$. Se $P \in C_i$ não for realizável então, como C_i é realizável, algum $P_j \in C_i$ o será. Logo, P_j figurará em C_{i+1} $\therefore$ realizável. Se P for o único par realizável de C_i, então $\alpha,P:\phi$ pertencente a C_{i+1} será realizável, pois temos:

Do fato de P ser realizável, existe D dedutiva prima em A e interpretação $h: F \to A$ com $hP\subset D$ e $h(P'\cup\{-\alpha\})\cap D = \phi$. Pelo corolário do teorema 1.7, existe D' prima contendo $h\alpha\cup D$. Logo, o par $\alpha,P:\phi$ é realizável.

Como exemplo final, consideremos o caso em que C_{i+1} é obtida de C_i por aplicação da regra R(v, ') ao par $P = \alpha v\beta,P:P'$ e este é elemento realizável de C_i. Logo, existe D dedutiva em A e $h: F \to A$ interpretação, com $h(\alpha v\beta,P)\subset D$ e $hP'\cap D = \phi$. Como $h\alpha vh\beta \in D$ e D é prima, temos $h\alpha \in D$ ou $h\beta \in D$. DIsto segue-se que $h(\alpha,P)\subset D$ ou $h(\beta,P)\subset D$. Logo, $\alpha,P:P'$ ou $\beta,P:P'$ é realizável. Como estes pares são elementos de C_{i+1}, concluimos que esta configuração é realizável.

Corolário

Se $\alpha \in F$ é teorema então α é válida.

Suponhamos que exista $h: F \to A$ interpretação com $h\alpha \neq 1$. Seja D dedutiva prima com $h\alpha \notin D$. Logo, $\overline{C}_1 = \{\phi:\{\alpha\}\}$ é realizável. Então, para qualquer quadro $\overline{C}_1 \ldots C_n$, C_i é realizável e dai α não tem prova.

A noção de subfórmula imediata é dada pelas seguintes condições.

i) Se v for variável, então v não tem subfórmulas imediatas.

ii) $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$ e $\alpha\to\beta$ tem exatamente duas subfórmulas imediatas: α e β.

iii) a única subfórmula imediata de $-\alpha$ é α.

Enfim a noção de subfórmula é definida como se segue:

i) Para cada α, α é subfórmula de α.

ii) Se α for subfórmula imediata de β, então α será subfórmula de β.

iii) Se α for subfórmula de β, e β de γ, então α é subfórmula de γ.

Observemos que se P for finito (P e P' são conjuntos finitos), então o conjunto das subfórmulas das fórmulas de $P\cup P'$, denotado por SP, será finito.

Seja P finito e consistente. Vamos definir no que se segue a importante noção de par saturado de P (para as regras $R(\wedge,)$, $R(,\wedge)$, $R(\vee,)$, $R(,\vee)$, $R(\to,)$ e $R(\to,)$).

Se nenhuma das regras anteriores se aplicar a P, então $P_0=P$ será o *par saturado de* P.

Suponhamos então que uma das regras se aplique a P.

Etapa 1:

(I) Suponhamos que $R(\wedge,)$ se aplique. Sejam $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ as fórmulas de P tais que $\alpha_i = \beta_i\wedge\gamma_i$. Então o par $\bigcup_1^n\{\beta_i,\gamma_i\}\cup P:P'$ é finito e consistente. Chamemos este par de P_1. Se $R(\wedge,)$ não se aplicar a P então $P_1 = P$.

(II) Suponhamos que $R(,\vee)$ se aplique a P_1 e sejam $u_1,\ldots,u_m$ as fórmulas de P_1' tais que $u_k = \sigma_k \vee \theta_k$. Logo, o par $P_2 = P_1: \bigcup_1^m\{\sigma_k,\theta_k\}\cup P_1'$ é finito e consistente. Se $R(,\vee)$ não se aplicar a P_1 então $P_2 = P_1$.

(III) Suponhamos que podemos aplicar $R(-,)$ a P_2, sendo que $\xi_1,\dots,\xi_p$ são as fórmulas de P_2 com $\xi_i = -\rho_i$. Então o par $P_3 = P_2: \bigcup_i^p \{\rho_i\} \cup P_2'$ é finito e consistente. Se $R(-,)$ não se aplicar, coloquemos $P_3 = P_2$.

Etapa 2:

(I) Suponhamos que $R(\to,)$ possa ser aplicada a P_3. Sejam $\delta_1,\dots,\delta_s$ em P_3 com $\delta_i = \nu_i \to \pi_i$. Como P_3 é consistente,seja $P_{13} \in \{P_3,\pi_1:P_3',P_3:P_3',\nu_1\}$ consistente. Com P_{13} é consistente e $\nu_2 \to \pi_2 \in P_{13}$, seja $P_{23} \in \{P_{13},\pi_2:P_{13}',P_{13}:P_{13}',\nu_2\}$ consistente.Assim, sucessivamente, após $n-1$ considerações sobre cada par P_{i3} e fórmula $\nu_i \to \pi_i$, chegamos a $P_{(s-1)3}$ consistente e ainda $\nu_s \to \pi_s \in P_{(s-1)3}$. Logo, existe $P_4 = P_{s3} \in \{P_{(s-1)3},\pi_s:P_{(s-1)3}', P_{(s-1)3}:P_{(s-1)3}',\nu_s\}$ que é consistente. Observe-se que P_4 é finito. Se $R(\to,)$ não se aplicar a P_3 então $P_4 = P_3$.

(II) Suponhamos que $R(,\wedge)$ seja aplicável a P_4. Procedemos como acima, ou seja, cada fórmula $\omega_j \wedge k_j \in P_4'$ vai nos fornecer um par P_{j4} finito e consistente obtido do conjunto $\{(P_{(j-1)4}:P_{(j-1)4}',\omega_j)\ ,\ (P_{(j-1)4}:\ P_{(j-1)4}',x_j)\}$. Chamemos de P_5 o par P_{r4} onde $r \geq j \geq 1$. Se $R(,\wedge)$ não se aplicar a P_4 então $P_5 = P_4$.

(III) Suponhamos que $R(\vee,)$ se aplique a P_5. Novamente, como em (I) desta etapa, destacamos as fórmulas de P_5 da forma $\varepsilon \vee \lambda$ e repetimos o processo afim de obtermos um par P_6 finito e consistente. Se $R(\vee,)$ não se aplica então $P_6 = P_5$.

Feito isto, efetuemos o procedimento explicitado na etapa 1 a P_6. Do ítem (I) obtemos P_7, do (II) P_8 e do (III) P_9 que é finito e consistente. Efetuemos agora o procedimento indicado na etapa 2, a P_9. Ao par resultante desta etapa, aplicamos novamente o procedimento da primeira e assim sucessivamente, i.e., ao par resultante de uma etapa é aplicado o procedimento da outra.

Obtemos assim uma sequência (P_n) de pares finitos e consistentes tais que $P_n \cup P'_n \subset P_{n+1} \cup P'_{n+1}$. Como $SP_n \subset SP$, temos que existe no máximo um número finito de pares, na sequência, diferentes. Logo, existe um par P_s da sequência tal que a aplicação de qualquer regra dada, com exceção de $R(,\rightarrow)$ e $R(, -)$, produz P_s novamente. Chamemos P_s de um *par saturado de P.*

Observemos que se Q for um par saturado de P, então se verifica:

Se $\alpha \wedge \beta \, \varepsilon \, Q$ então $\alpha \, \varepsilon \, Q$ e $\beta \, \varepsilon \, Q$

Se $\alpha \vee \beta \, \varepsilon \, Q'$ então $\alpha \, \varepsilon \, Q'$ e $\beta \, \varepsilon \, Q'$

Se $\alpha \vee \beta \, \varepsilon \, Q$ então $\alpha \, \varepsilon \, Q$ ou $\beta \, \varepsilon \, Q$

Se $\alpha \wedge \beta \, \varepsilon \, Q'$ então $\alpha \, \varepsilon \, Q'$ ou $\beta \, \varepsilon \, Q'$

Se $\alpha \rightarrow y \, \varepsilon \, Q$ então $y \, \varepsilon \, Q$ ou $\alpha \, \varepsilon \, Q'$

Se $-\alpha \, \varepsilon \, Q$ então $\alpha \, \varepsilon \, Q'$

Consideremos P finito e consistente. A coleção HP de seus *pares associados* é formada da seguinte maneira:

Se $-\alpha \, \varepsilon \, P'$ então $\alpha, P : \emptyset$ é um par associado.

Se $\alpha \rightarrow \beta \, \varepsilon \, P'$ então $\alpha, P : \{\beta\}$ é um par associado.

Observemos que HP é finito e seus elementos são pares finitos e consistentes. Mais ainda: se $-\alpha \, \varepsilon \, P'$, então existe $A \, \varepsilon \, HP$ com $\alpha, P \subset A$ e, se $\alpha \rightarrow \beta \, \varepsilon \, P'$, temos $B \, \varepsilon \, HP$ com $\alpha, P \subset B$ e $B' = \{\beta\}$.

Proposição 2

Cada fórmula válida tem uma prova.

Suponhamos que $\alpha_0 \in F$ não tenha prova:

Etapa I:

Estendamos o par $\phi:\{\alpha_0\}$ a um saturado P_0. Formemos $HP_0 = \{Q_1,\ldots,Q_n\}$. Seja P_i saturado de Q_i, $1 \leq i \leq n$. Formemos então $HP_1 = \{Q_{n+1},\ldots,Q_{n+p}\}$. Seja P_{n+j} saturado de Q_{n+j}. Desta forma, obtemos a sequência $P_0P_1\ldots P_n\ldots P_{n+p}$. Formemos HP_2 e continuemos o processo descrito anteriormente. Desta maneira temos uma sequência $(P_n)_{n\geq 0}$ com no máximo um número finito de pares diferentes, pois $SP_n \subset S(\phi:\{\alpha_0\})$ e $S(\phi:\{\alpha_0\})$ é finito. Consideremos $K = \{P_0,P_1,\ldots,P_j,\ldots\}$ o conjunto das primeiras coordenadas dos pares P_j da sequência (P_n).

Etapa II:

Definamos agora a relação $\Vdash\!\!\!/$, entre as fórmulas de F e os pontos de K, como segue:

1) Se α é variável $(\partial\alpha=0)$ $\alpha \Vdash\!\!\!/ P_j$ se $\alpha \in P_j$

2) Suponhamos $\Vdash\!\!\!/$ definida para pares (α,P_j) onde $\partial\alpha<n$ e seja $\partial\beta = n$.

i) $\beta = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_j$ se $\alpha_1 \Vdash\!\!\!/ P_j$ e $\alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_j$

ii) $\beta = \alpha_1 \vee \alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_j$ se $\alpha_1 \Vdash\!\!\!/ P_j$ ou $\alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_j$

iii) $\beta = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_j$ se $(\forall P_s)(P_s \supset P_j)$ se $\alpha_1 \Vdash\!\!\!/ P_s$ então $\alpha_2 \Vdash\!\!\!/ P_s$

iv) $\beta = -\alpha \Vdash\!\!\!/ P_j$ se $(\forall P_s)$ $(P_s \supset P_j)$ $\alpha \not\Vdash\!\!\!/ P_s$.

Observemos que as seguintes condições estão verificadas: Se $\alpha \in P_j$ então $\alpha \Vdash\!\!\!/ P_j$ e se $\beta \in P'_j$ então $\beta \not\Vdash\!\!\!/ P_j$. A prova destes fatos é feita por indução em $\partial\alpha$. Vejamos, como exemplo, quando $\alpha = -\beta$.

Se $-\beta \in P_j$ então $(\forall P_s)(P_s \supset P_j)$ $-\beta \in P_s$. Disto resulta que para $(\forall P_s)$ $(P_s \supset P_j)$ $\beta \in P_s'$. Da hipótese da indução $(\forall P_s)(P_s \supset P_j)$ $\beta \not\Vdash P_s$. Tendo-se em conta agora a definição de $\Vdash$ temos $-\beta \Vdash P_j$

Se $-\beta \in P_j'$ então $(\forall P_s)$ $(P_s \supset P_j)$ $\beta \in P_s$. Logo, $\beta \Vdash P_s$ e então $-\beta \not\Vdash P_j$.

Etapa III:

Consideremos A o conjunto das partes fechadas de $(K,\subset)$. No temos que (K,A) é espaço topológico. Seja então $\delta: PA \to PA$ assim definido: $\delta P = \{x \in A : x \supset \cap P\}$. Com isto temos que (A,δ) é sistema pseudo-Booleano. Seja agora $h: F \to A$ tal que $h\alpha = \{P_j : \alpha \Vdash P_j\}$. O fato de que se $\alpha \Vdash P_j$ e $P_s \supset P_j$ acarretam $\alpha \Vdash P_s$ nos justifica que h é aplicação.

Se provarmos que h é interpretação então nossa proposição estará demonstrada já que $h\alpha_0 \neq A$ pois $\alpha_0 \not\Vdash P_0$.

Que $h\alpha\wedge\beta = h\alpha \cap h\beta$ e $h\alpha\vee\beta = h\alpha \cup h\beta$ são verdadeiras, não há dúvida. Mostremos que $h\alpha \to \beta = h\alpha \to h\beta$.

Se $P_j \in h\alpha \to \beta \cap h\alpha$ então $P_j \in h\beta$ pois $\beta \Vdash P_j$. Logo, $h\alpha \to \beta \cap h\alpha \subset h\beta$. Suponhamos agora que exista $*$ com $h\alpha \cap * \subset h\beta$ e $h\alpha \to \beta \subsetneq *$. Logo, existe $P_{j_0} \in *$ com $\alpha \to \beta \not\Vdash P_{j_0}$. Isto nos diz que existe $P_k \supset P_{j_0}$ com $\alpha \Vdash P_k$ mas $\beta \not\Vdash P_k$. Como $*$ é parte fechada temos $P_k \in * \cap h\alpha$. Logo $P_k \in h\beta$. Contradição.

Por fim nos resta mostrar que $h{-\beta} = -h\beta$. Isto é feito imitando-se o procedimento acima, ie, $h{-\beta}$ é o maior de A com $h{-\beta} \cap h\beta = \emptyset$.

EXEMPLOS

1) Mostremos que as fórmulas $-(\alpha\wedge-\alpha)$, $---\alpha \rightarrow -\alpha$, $-\alpha \rightarrow ---\alpha$ e $(-\alpha v\beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ são válidas. Para isto, vejamos as provas:

$C_1\{(\phi:-(\alpha \ -\alpha))\}$	$C_1\{(\phi:-\alpha \rightarrow ---\alpha)\}$
$C_2\{(\alpha \ -\alpha:\phi)\}$	$C_2\{(-\alpha:---\alpha)\}$
$C_3\{(\alpha,-\alpha:\phi)\}$	$C_3\{(-\alpha,--\alpha;\phi)\}$
$C_4\{(\alpha:\alpha)\}$	$C_4\{(-\alpha:-\alpha)\}$

$C_1\{(\phi:---\alpha \rightarrow -\alpha)\}$	$C_1\{(\phi:(-\alpha v\beta)\rightarrow(\alpha \rightarrow \beta))\}$
$C_2\{(---\alpha: -\alpha)\}$	$C_2\{(-\alpha v\beta: \alpha \rightarrow \beta)\}$
$C_3\{(---\alpha,\alpha:\phi)\}$	$C_3\{(-\alpha:\alpha \rightarrow \beta),(\beta:\alpha \rightarrow \beta)\}$
$C_4\{(\quad \alpha:--\alpha)\}$	$C_4\{(-\alpha,\alpha:\beta),(\beta:\alpha \rightarrow \beta)\}$
$C_5\{(\alpha,-\alpha:\phi)\}$	$C_5\{(\alpha:\alpha,\beta),(\beta:\alpha \rightarrow \beta)\}$
$C_6\{(\alpha:\alpha)\}$	$C_6\{(\alpha:\alpha,\beta),(\beta,\alpha:\beta)\}$

Outras fórmulas válidas são: $--(-\alpha v\alpha)$, $-(\alpha v\beta) \rightarrow (-\alpha\wedge-\beta)$, $(-\alpha\wedge-\beta) \rightarrow -(\alpha v\beta)$ e $(-\alpha v-\beta) \rightarrow -(\alpha\wedge\beta)$.

2) Vejamos que $\alpha = (a\rightarrow b) \rightarrow (-avb)$, onde a e b são variáveis, não é válida.

Temos duas alternativas:

i) Calculamos os quadros (os possíveis) para o par $(\phi:\alpha)$ e constatamos que nenhum desses é incompatível.

ii) Exibimos $h:F \rightarrow A$, interpretação, com $h\alpha \neq 1$.

Tomemos a última alternativa.

1) $P_0 = (\phi:\alpha)$ e, seu saturado é P_0

$HP_0 = \{P_1=(a\rightarrow b:-avb)\}$

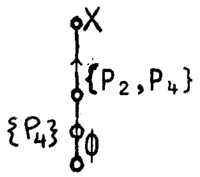
2) O saturado de P_1 que não é incompatível é

$P_2 = (a\rightarrow b: a,-a,b,-avb)$

$HP_2 = \{(a \to b, a : \emptyset)\} = \{P_3\}$

O saturado de P_3 é $P_4 = (a \to b, a, b : \emptyset)$.

Como na demonstração da proposição 2 sejam: $X = \{P_0, P_2, P_4\}$ e $A = \{\emptyset, X, \{P_2, P_4\}, \{P_4\}\}$ o conjunto de suas partes fechadas.



Seja $h: F \to A$ tal que $ha = hb = \{\ \ P_4\}$.

Como $h\text{-}a = \emptyset$ temos $h\alpha = \{\ \ P_4\} \neq X$.

CAPÍTULO III: Sistemas Booleanos

Suporemos aqui que nossos sistemas serão de tipo finito e ainda, se $\phi\{x\} = \phi\{y\}$ então $x = y$.

§1. *Generalidades*

Def.1.1: Um sistema (E,ϕ), pseudo-Booleano, é Booleano se toda parte dedutiva prima $D, D \subset E$, for maximal.

Resulta desta definição e do teorema 1.6 cap.II que (E,ϕ) é Booleano se e só se $x \vee - x = 1$, para cada $x \in E$. Por outro lado, a álgebra de Heyting $(E,\wedge,\vee,\rightarrow)$, associada a (E,ϕ), é chamada de álgebra de Boole.

Com o objetivo de enfatizar o reticulado $(E,\leq)$, associado a (E,ϕ), é costume chamar de *filtro* uma parte dedutiva de (E,ϕ),pois, em um reticulado $(R,\leq)$, um filtro é uma parte não vazia F satisfazendo:

$$(\forall a,b \in F)\ (\forall r \in R) \quad a \wedge b \in F \quad \text{e} \quad a \vee r \in F.$$

Já que nosso objetivo não é esse, pelo menos neste capítulo, não teremos oportunidade de usar a palavra *filtro*.

A prova do resultado que se segue está fortemente baseada no teorema 1.7 cap II assim como em seu corolário.

Teorema 1.1:

Sejam (E,ϕ) sistema Booleano e P a coleção de suas partes dedutivas primas (maximais). Então são verdadeiras as afirmações abaixo para cada $P \in P$ e $x,y \in E$.

i) $x \wedge y \in P$ se e só se $x \in P$ e $y \in P$

ii) $x \vee y \in P$ se e só se $x \in P$ ou $y \in P$

iii) $x \to y \in P$ se e só se $-x \in P$ ou $y \in P$

iv) $x \in P$ se e só se $--x \in P$

v) $-(x \wedge y) \in P$ se e só se $-x \in P$ ou $-y \in P$

vi) $-(x \vee y) \in P$ se e só se $-x \in P$ e $-y \in P$

vii) $-(x \to y) \in P$ se e só se $x \in P$ e $-y \in P$

Prova:

i) e ii) têm provas imediatas. Vejamos a de iv). Se $x \in P$ então $-x \notin P$ pois P é própria. Como $-x \vee -(-x) = 1$ e P é prima temos $--x \in P$. De forma análoga, se $--x \in P$ então $x \in P$. A prova de iii) é a seguinte: Se $x \to y \in P$ então $y \in P$ ou $x \notin P$. Daqui temos $y \in P$ ou $-x \in P$, posto que $x \vee -x \in P$ e P é prima. Suponhamos agora que: $-x \in P$ ou $y \in P$ e que $x \to y \notin P$. Pelo corolário do teor. 1.7 cap. II vem a existência de $P' \supset P$, com $x \in P'$ e $y \notin P'$, P' dedutiva.

Como $P = P'$, pois P é maximal, temos uma contradição.

As demais provas são feitas de maneira semelhante tendo-se sempre em mente o teor. 1.7 cap.II, seu corolário e que P é maximal.

Teorema 1.2:

Sejam (E,ϕ) Booleano e $(E,\wedge,\vee,\to)$ a álgebra de Boole associada. Então existe um monomorfismo $r: E \to A$ tal que rx é aberto e fechado de A, $x \in E$.

Prova:

Decorre do teorema 1.8 cap.II e do fato de que $P = r1 = rx \vee -x = rx \cup r-x = rx \cup Crx$.

Terminaremos este parágrafo fzendo a seguinte observação:

Teorema 1.3:

Seja $x \in E$, (E,ϕ) Booleano. Se $x \neq 0$ então existe P dedutiva maximal com $x \in P$.

Prova:

Resulta do teorema 1.5 cap.II e da definição de sistema Booleano.

§2. *Quadros e Decidibilidade*

Seja F o conjunto das fórmulas nas variáveis de V e conectivos em $C = \{\wedge, v, \rightarrow, -\}$.

Uma *interpretação Booleana* das fórmulas de F é uma interpretação $h: F \rightarrow B$ onde B é um sistema Booleano.

$\alpha \in F$ é *B-válida* se para toda interpretação Booleana $h\alpha=1$.

$H \subset F$ é *realizável* se existir $h: F \rightarrow B$ interpretação e P prima em B com $hH \subset P$.

Consideremos as regras abaixo:

$R(\wedge,\ )\ \dfrac{\alpha\wedge\beta, H}{\alpha,\beta,H}$ $\qquad R(v,\ )\ \dfrac{\alpha v\beta, H}{\alpha,H \mid \beta,H}$ $\qquad R(\rightarrow,\ )\ \dfrac{\alpha\rightarrow\beta, H}{-\alpha,\beta,H}$

$R(-,\wedge)\ \dfrac{-(\alpha\wedge\beta), H}{-\alpha,H \mid -\beta,H}$ $\qquad R(-,v)\ \dfrac{-(\alpha v\beta), H}{-\alpha,-\beta,H}$ $\qquad R(-,\rightarrow)\ \dfrac{-(\alpha\rightarrow\beta), H}{\alpha,-\beta,H}$

$$R(--,\ )\ \dfrac{--\alpha, H}{\alpha,H}$$

Seja $H_1 \subset F$. Dizemos que uma das regras anteriores, R, se *aplica* a H_1 se, por apropriada escolha de $\alpha \in H_1$, o conjunto acima da linha da regra R é α,H onde $\{\alpha\} \cup H = H_1$.

Por uma aplicação da regra R a H_1 entendemos a substituição de H_1 por H (ou por H e H' se $R \varepsilon \{R(-,), R(v,)\}$) onde H_1 é o conjunto acima da linha da regra R e H o abaixo.

Uma *configuração* é uma coleção finita de H_i's.

Por uma *aplicação de uma regra R* a uma configuração $C = \{H_1,\ldots,H_n\}$ entendemos destacar H_i em C e substituir esta por C_1, onde C_1 difere de C apenas por ter, em vez de H_i, o resultado (ou resultados) da aplicação desta regra a H_i.

Um *quadro* é uma sequência finita $C_1\ldots C_n$ tal que cada C_i é obtida de C_{i-1} por uma única aplicação de uma regra R a C_{i-1}, $i \geq 2$.

$H \subset F$ é *incompatível* se $\{\alpha,-\alpha\} \subset H$ para alguma $\alpha \varepsilon F$.

Uma configuração C é *incompatível* se cada $H_i \varepsilon C$ o for.

Um quadro é incompatível se alguma de suas configurações o for.

Um quadro para H é qualquer $C_1\ldots C_n$ (quadro) onde $C_1 = \{H\}$.

H é *inconsistente* se existe quadro para H, incompatível. Caso contrário, H é consistente.

Seja $\alpha \varepsilon F$. Dizemos que α *é teorema"* se $\{-\alpha\}$ for inconsistente. Um quadro incompatível para $\{-\alpha\}$ é chamado de uma *prova* de α.

A configuração $\{H_1,\ldots,H_n\}$ é realizável se algum H_i o for.

Proposição 1:

Seja $C_1\ldots C_n$ quadro. Se C_i for realizável então C_{i+1} o será.

Corolário

Cada teorema é uma fórmula B-válida.

Seja H conjunto finito e consistente, $H \subset F$. A noção de conjunto saturado (aqui, para todas as regras) de H é completamente análoga àquela feita no capítulo anterior.

É bom observarmos que todo H finito e consistente tem um saturado S finito e também consistente. Por outro lado, S tem as seguintes propriedades:

$\alpha \wedge \beta \in S$ implica $\{\alpha, \beta\} \subset S$

$\alpha \vee \beta \in S$ implica $\{\alpha, \beta\} \cap S \neq \emptyset$

$--\alpha \in S$ implica $\alpha \in S$

$-(\alpha\ \beta) \in S$ implica $\{-\alpha, -\beta\} \cap S \neq \emptyset$

$-(\alpha \vee \beta) \in S$ implica $\{-\alpha, -\beta\} \subset S$

$\alpha \rightarrow \beta \in S$ implica $\{-\alpha, \beta\} \cap S \neq \emptyset$.

$-(\alpha \rightarrow \beta) \in S$ implica $\{\alpha, -\beta\} \subset S$.

Proposição 2

Cada α_0 B-válida tem uma prova.

Suponhamos que α_0 não tenha prova. Seja S um saturado consistente de $\{-\alpha\}$. Consideremos agora a relação $\Dashv$ $F \times \{S\}$ definida como se segue:

i) Se v é variável, $v \Dashv S$ se $v \in S$

ii) $\alpha \wedge \beta \Dashv S$ se $\alpha \Dashv S$ e $\beta \Dashv S$

$\alpha \vee \beta \Dashv S$ se $\alpha \Dashv S$ ou $\beta \Dashv S$

$\alpha \rightarrow \beta \Dashv S$ desde que $\alpha \not\Dashv S$ ou $\beta \Dashv S$

$-\alpha \Dashv S$ se $\alpha \not\Dashv S$

Desta definição resulta que se $\alpha \in S$ então $\alpha \Dashv S$ e ainda se $-\alpha \in S$ então $\alpha \not\Dashv S$. Por outro lado é imediato que dada $\alpha \in F$ temos ou $\alpha \Dashv S$ ou $-\alpha \Dashv S$.

Seja então $h\colon \mathcal{F} \to B_0 = \{0,1\}$ tal que $h\alpha = 1$ se $\alpha \notin S$ e $h\alpha = 0$ caso contrário. É de verificação imediata que h é interpretação e que $h\alpha_0 = 0$. Logo, α_0 não é válida.

EXEMPLOS

1. As fórmulas $\alpha \to \beta \vee \beta \to \alpha$, $[(\alpha \to \beta) \to \alpha] \to \alpha$, $(\alpha \to \beta) \to (-\alpha \vee \beta)$ e $--\alpha \to \alpha$ são B-válidas.

Aqui estão suas provas:

$C_1\{\{-(\alpha\to\beta\vee\beta\to\alpha)\}\}$	$C_1\{\{-[((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha]\}\}$	$C_1\{\{-((--\alpha)\to\alpha)\}\}$
$C_2\{\{-(\alpha\to\beta),-(\beta\to\alpha)\}\}$	$C_2\{\{(\alpha\to\beta)\to\alpha,-\alpha\}\}$	$C_2\{\{--\alpha,-\alpha\}\}$
$C_3\{\{\alpha,-\beta,-(\beta\to\alpha)\}\}$	$C_3\{\{\alpha,-\alpha\},\{-(\alpha\to\beta),-\alpha\}\}$	
$C_4\{\{\alpha,-\beta,\beta,-\alpha\}\}$	$C_4\{\{\alpha,-\alpha\},\{\alpha,-\beta,-\alpha\}\}$	

$C_1\{\{-[(\alpha\to\beta)\to(-\alpha\vee\beta)]\}\}$

$C_2\{\{\alpha\to\beta,-(-\alpha\vee\beta)\}\}$

$C_3\{\{\beta,-(-\alpha\vee\beta)\},\{-\alpha,-(-\alpha\vee\beta)\}\}$

$C_4\{\{\beta,--\alpha,-\beta\},\{-\alpha,-(-\alpha\vee\beta)\}\}$

$C_5\{\{\beta,--\alpha,-\beta\},\{-\alpha,--\alpha,-\beta\}\}$.

2. Sejam a,b,c variáveis e consideremos a fórmula $\alpha = (a \vee b) \to (a \wedge b)$.
   Então α não é B-válida.
   Consideremos $H = \{-[(a \vee b) \to (a \wedge b)]\}$.

O leitor observará que $S = \{-\alpha, a \vee b, -(a \wedge b), -a, b\}$ é um saturado consistente de H.

Definamos então $h\colon \mathcal{F} \to \{0,1\}$, interpretação, com $ha = 0$, $hb = 1$. É imediato então que $h\alpha = 0$.

CAPÍTULO IV - ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

§1. *Generalidades*

No que se segue B denotará uma álgebra de Boole genérica e (B,δ) o sistema Booleano onde $\delta: PB \to PB$ é o operador *filtro gerado pela parte* $P \subset B$. Como o conceito de filtro coincide com aquele de parte dedutiva, usaremos livremente os resultados obtidos, para partes dedutivas, nos capítulos anteriores.

Def.1.1: Uma álgebra topológica é uma álgebra de Boole B munida de um *operador unário* $\Delta: B \to B$ tal que valem:

T_1) $\Delta 0 = 0$ e $\Delta 1 = 1$

T_2) $(\forall x \varepsilon B)$ $\Delta\Delta x = \Delta x$ e $\Delta x \vee x = x$

T_3) $(\forall x,y \varepsilon B)$ $\Delta(x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$.

Denotaremos uma álgebra topológica por (B,Δ).

Consideremos B álgebra de Boole e $i: B \to B$ o operador identidade. Então (B,i) é álgebra topológica. Por outro lado para a mesma álgebra B seja $k: B \to B$ tal que $k0 = 0$ e $kx = 1$ se $x \neq 0$. Então (B,k) é algebra topológica.

Estes dois exemplos nos mostram que uma mesma álgebra de Boole pode dar origem à álgebras topológicas diferentes.

Def.2.1: Sejam $x \varepsilon B$ e (B,Δ) álgebra topológica. x é *aberto* de (B,Δ) se $\Delta x = x$.

Observemos que se $x \leq y$ em B então $\Delta x \leq \Delta y$. (Basta usar a condição T_3 para ver isto). Desta observação podemos concluir que se $A = \{x: x$ é aberto de $(B,\Delta)\}$ então $(A,\leq)$ é um reticulado distributivo com primeiro e último elemento. Em particular, se

$x_1,\dots,x_n$ são abertos então o serão $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ e $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$.

Sejam $P,Q \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é a coleção de todos os filtros primos de $B,(B,\Delta)$ topológica.

Def.3.1: Q *é mais rico que* P se Q contém os abertos de P. Esta relação é indicada por $P < Q$ ou $Q > P$.

Teorema 1.1:

Sejam (B,Δ) álgebra e $\mathcal{P}$ a coleção dos filtros primos de B. Então valem as afirmações abaixo para cada $(x,y) \in B^2$ e cada $P \in \mathcal{P}$.

i) $x \vee y \in P$ se e só se $x \in P$ ou $y \in P$

ii) $x \wedge y \in P$ se e só se $x \in P$ e $y \in P$

iii) $x \to y \in P$ se e só se $-x \in P$ ou $y \in P$

iv) $--x \in P$ se e só se $x \in P$

v) $\Delta x \in P$ se e só se $(\forall Q, Q > P)$ $x \in Q$.

Prova:

(i)...(iv) já foram provadas no capítulo III. Vejamos então a prova da afirmação (v).

Se $\Delta x \in P$, é óbvio que $x \in Q$ para todo $Q > P$ já que Q é filtro e $\Delta x \leq x$ (conferir T_2).

Suponhamos agora que $\Delta x \notin P$. Consideremos F o filtro gerado pelos abertos de P. Temos que $x \notin F$, pois se $x \in F$ segue-se que $x \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, onde x_i são abertos de P, e então $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq \Delta x$ o que nos diz que $\Delta x \in P$ pois $F \subset P$. Absurdo. Logo, existe Q primo (filtro) $Q \supset F$ e $x \notin Q$. Enfim, como $F \subseteq P$, $Q > P$.

Com as mesmas hipóteses do teorema acima é de demonstração imediat· o seguinte corolário:

Corolário

$(\forall P \varepsilon P)$ $(\forall x,y \varepsilon B)$ valem:

i) $-(x v y) \varepsilon P$ se e só se $-x \varepsilon P$ e $-y \varepsilon P$

ii) $-(x \wedge y) \varepsilon P$ se e só se $-x \varepsilon P$ ou $-y \varepsilon P$

iii) $-\Delta x \varepsilon P$ se e só se $\exists Q, Q > P$ com $-x \varepsilon Q$

§2. *Quadros e decidibilidade*

Seja F o conjunto das fórmulas nas variáveis de V e conectivos em $C = \{\wedge, v, \to, -, \Delta\}$ com $V \cap C = \emptyset$. Aqui, a fórmula $\Delta\alpha$ tem como subfórmula imediata α.

Uma *interpretação* das fórmulas de F em uma álgebra topológica (B, Δ) é uma aplicação $h: F \to B$ tal que $(\forall \alpha, \beta \varepsilon F)$

$h\alpha v \beta = h\alpha \; v \; h\beta$, $h \; \alpha \wedge \beta = h\alpha \wedge h\beta$, $h\alpha \to \beta = h\alpha \to h\beta$

$h - \alpha = -h\alpha$ $\quad h\Delta\alpha = \Delta h\alpha$.

$\alpha \varepsilon F$ é *válida* se para cada interpretação $h: F \to B$ $h\alpha = 1$.

$H \subset F$ é *realizável* se existir interpretação $h: F \to B$ e P filtro primo de B com $hH \subset P$.

As regras a serem introduzidas serão aquelas do capítulo anterior $(R(\wedge,), R(v,), R(\to,), R(-, \to), R(-, v), R(-, \wedge)$ e $R(--,))$ mais as duas abaixo.

$$R(\Delta,) \; \frac{\Delta\alpha, \; H}{\alpha, \; H} \quad \text{e} \quad R(-, \Delta) \; \frac{-\Delta\alpha, \; H}{-\alpha, \; \Delta H} \quad \text{onde } \Delta H = \{\alpha' \varepsilon H: \alpha' = \Delta\beta\}.$$

Uma *configuração* é uma coleção finita de subconjuntos de F.

Por uma *aplicação de uma regra* R à uma configuração $C = \{H_1, \ldots, H_n\}$ entendemos substituir C por C_1, onde C_1

difere de C apenas por ter, no lugar de H_i, o resultado (ou resultados) da aplicação desta regra a H_i.

Vejamos um exemplo desta situação:

Seja $C = \{H_1 = \{\alpha,\beta,\alpha\vee\beta\},\ H_2 = \{\Delta\alpha,\beta,\alpha\rightarrow\beta,-\Delta\gamma\}\}$. Vamos aplicar a regra $R(-,\Delta)$ a C. Destacamos H_2 e a H_2 aplicamos $R(-,\Delta)$. Temos então $H_2' = \{\Delta\alpha,-\gamma\}$. Logo $C_1 = \{H_1,H_2'\}$.

As noções de *quadro, quadro incompatível,* subconjunto de fórmulas inconsistente, etc... são completamente análogas (praticamente as mesmas) às dadas no capítulo III. Assim, $\alpha \in \mathcal{F}$ é *teorema* se $\{-\alpha\}$ for inconsistente e um quadro incompatível para $\{-\alpha\}$ é uma *prova de* α.

Proposição 1:

Seja $C_1 \ldots C_n$ quadro. Se C_i for realizável então C_{i+1} o será.

Prova:

Temos que analisar nove casos já que temos nove regras:

Vejamos um exemplo. Suponhamos que $C_i = \{H_1,\ldots,H_i = \{-\Delta\alpha,\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_n\},..H_n\}$, H_i seja realizável e que C_{i+1} seja obtida de C_i por aplicação da regra $R(-,\Delta)$ à H_i. Logo $C_{i+1} = \{H_1,\ldots,\{-\alpha\}\cup\Delta H_i,\ldots,H_n\}$. Por hipótese, $\exists$ interpretação $h:\mathcal{F}\rightarrow B$ com $h\,H_i \subset P$, P primo. Pelo corolário do teorema 1.1 existe Q primo com $Q > P$ e $-\alpha \in Q$. Como $h\,\Delta H_i$ é subconjunto de abertos de P temos $h(\{-\alpha\}\cup\Delta H_i) \subset Q$. Enfim, C_{i+1} é realizável.

Corolário

Cada teorema é uma fórmula válida.

Seja $H \subset \mathcal{F}$, finito. A noção de conjunto saturado para todas as regras com exceção de $R(-,\Delta)$ é completamente semelhante aquela dada nos capítulos anteriores. Em particular, se H for consistente então existe um saturado de H consistente.

Vejamos, para elucidar, um exemplo.

Seja $H = \{-(avb),\Delta d,-(\Delta c),a\to b\}$ onde a,b,c e d são variáveis. Aplicando-se $R(-,v)$ a H obtemos:

$$H_1 = \{-(avb),-a,-b,\Delta d,-(\Delta c),a\to b\}$$

Via $R(\Delta,\ )$ temos:

$$H_2 = \{-(avb),-a,-b,\Delta d,d,-(\Delta c),a\to b\}.$$

Por fim por intermédio de $R(\to,\ )$ ficamos com

$$S = \{-(avb),-a,-b,\Delta d,d,-(\Delta c),a\to b\} \text{ e}$$

$$S' = \{-(avb),-a,-b,\Delta d,d,-(\Delta c),a\to b,b\}.$$

É imediato que S e S' são saturados de H. Embora S' seja incompatível, pois $\{b,-b\} \subset S'$, S não o é. Isto nos diz que H é consistente.

Uma propriedade nova que aparece num saturado S de H é que se $\Delta\alpha \in S$ então $\alpha \in S$.

Vejamos por fim a noção de *conjunto associado* a $H \subset F$.

Para cada $-\Delta\alpha \in H$ o conjunto $\{-\alpha\} \cup \Delta H$ é um associado de H. A coleção de todos os associados de H será denotada por AH.

Tendo-se em mente o teorema 1.1 e seu corolário é imediato que se H for consistente e finito então AH será finito e consistente. Ainda, se $-\Delta\alpha \in H$ então existe $A \in AH$ com $-\alpha \in A$ e $\Delta P \subset \Delta A$. Esta última relação será indicada pelo símbolo $P < A$.

Proposição 2

Cada fórmula válida α_0 tem uma prova.

Suponhamos que α_0 não tenha prova. Seja então H_0 um saturado de $\{-\alpha\}$, consistente. Consideremos $AH_0 = \{Q_1,\dots,Q_n\}$ e H_i saturado consistente de Q_i, $1 \leq i \leq n$. Obtemos então a sequência $H_0, H_1, \dots, H_n$. Tomemos $AH_1 = \{Q_{n+1},\dots,Q_m\}$ e H_{n+j} saturado consistente de Q_{n+j}. Formemos AH_2, antes observando que nossa sequência original $H_1 \dots H_n$ se ampliou para $H_1 \dots H_{m+1} \dots H_m$. Se Q_{m+k} são de AH_2 tomemos H_{m+k} seus respectivos saturados consistentes. Logo obtemos a nova sequência $H_0 \dots H_n \dots H_{m+1} \dots H_p$. Assim se procedendo (formando-se AH_i e respectivos saturados) obteremos uma sequência $(H_i)_{i \geq 0}$. Como $H_i \subset S(-\alpha_0)$ a sequência em questão tem no máximo um número finito de elementos diferentes. Seja então $K = \{H_0,\dots,H_s\}$ o conjunto dos elementos distintos da sequência anterior e $\Vdash \subset F \times K$ definida indutivamente como abaixo:

1. Se v é variável então $v \Vdash H_i$ se $v \in H_i$
2. $\alpha\wedge\beta \Vdash H_i$ se $\alpha \Vdash H_i$ e $\beta \Vdash H_i$

   $\alpha\vee\beta \Vdash H_i$ se $\alpha \Vdash H_i$ ou $\beta \Vdash H_i$

   $\alpha\to\beta \Vdash H_i$ se $\alpha \nVdash H_i$ ou $\beta \Vdash H_i$

   $-\alpha \Vdash H_i$ se $\alpha \nVdash H_i$

   $\Delta\alpha \Vdash H_i$ se $\alpha \Vdash H_j$ para cada $H_j \in K$ com $H_i < H_j$.

Segue da definição acima que se $\alpha \in H_i$ então $\alpha \Vdash H_i$, i. Consideremos a seguinte topologia em K : A é aberto se toda vez que H_i for de A e $H_i < H_j$ então $H_j \in A$. É imediato que $(PK, \cap, \cup, \to, int)$ é uma álgebra topológica onde *int* é o operador interior em PK.

Consideremos $h: F \to PK$ tal que $h\alpha = \{H_i : \alpha \Vdash H_i\}$. Vejamos que h é interpretação.

É de verificação direta que vale:

i) $h\alpha\wedge\beta = h\alpha \cap h\beta$, $h\alpha v\beta = h\alpha \cup h\beta$, $h\alpha \to \beta = h\alpha \to h\beta$ e $h - \alpha = Ch\alpha = -h\alpha$.

Mostremos agora que $h\Delta\alpha$ = int $h\alpha$.

ii) $h\Delta\alpha \subset$ int $h\alpha$

Como cada H_i é saturado temos que $h\Delta\alpha \subset h\alpha$. Por outro lado, se $H_i \in h\Delta\alpha$ e $H_i < H_j$ então $\Delta\alpha \Rightarrow\!\!\!\!/\; H_j$. Logo $h\Delta\alpha$ é aberto e portanto (ii) está verificada.

iii) int $h\alpha \subset h\Delta\alpha$

Seja $H_i \in$ int $h\alpha$. Logo, $\alpha \Rightarrow\!\!\!\!/\; H_j$, para todo H_j com $H_i < H_j$ pois int $h\alpha$ é aberto. Pela definição de $\Rightarrow\!\!\!\!/$ temos $\Delta\alpha \Rightarrow\!\!\!\!/\; H_i$ $\therefore$ $H_i \in h\Delta\alpha$.

Finalmente, como $-\alpha_0 \in H_0$ temos $\alpha_0 \not\Rightarrow H_0$ e então $h\alpha_0 \neq K$. o que nos diz que α_0 não é válida.

EXEMPLOS

1. Exibir uma prova para $-\Delta-(-av\Delta a)$, a variável.

H_1 $\{--\Delta-(-a \vee \Delta a)\}$

H_2 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a)\}$

H_3 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a)\}$

H_4 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a)\}$

H_5 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a),--a,-\Delta a\}$

H_6 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a),--a,a,-\Delta a\}$ $(R(-,\Delta))$

H_7 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-a\}$

H_8 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a),-a\}$

H_9 $\{\ \Delta-(-a \vee \Delta a),-(-a \vee \Delta a),--a,-a,-\Delta a\}$

2. Vejamos que $\alpha = (a\to b)\to(\Delta a\to\Delta b)$ não é válida, a e b variáveis.

$H = \{-[(a\to b)\to(\Delta a\to\Delta b)]\}$

O leitor poderá constatar que

$$H_0 = \{-\alpha, a\to b, b, -(\Delta a\to\Delta b), \Delta a, a, -\Delta b\}$$

é saturado de H.

$\mathcal{A}H_0 = \{\{\Delta a, -b\}\}$

$H_1 = \{\Delta a, a, -b\}$

Logo, $K = \{H_0, H_1\}$. Como $H_0 < H_1$ e $H_1 < H_0$ temos que a topologia em K é a caótica.

$$K \quad \begin{tikzcd} H_1 \arrow[d, bend left] \\ H_0 \arrow[u, bend left] \end{tikzcd} \qquad\qquad PK \quad \begin{tikzcd} & K & \\ \{H_1\} \arrow[ur] & & \{H_0\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Logo se definirmos $ha = K$ e $hb = \{H_0\}$ teremos $h\alpha = \{H_1\} \neq K$.

Para concluirmos este capítulo apresentaremos dois *resultados de conexão* que, num sentido bastante pragmático, nos motivam o estudo das álgebras topológicas.

Comecemos observando que se (B,Δ) é uma álgebra topológica então o reticulado A dos abertos de (B,Δ) tem uma estrutura natural de álgebra de Heyting onde $a \twoheadrightarrow b$ em A é precisamente $\Delta(a\to b)$.

De fato, se $a,b,x \in A$ então $a\wedge x \leq b$ se e só se $x \leq a\to b$ ou seja se e só se $\Delta x \leq \Delta(a\to b)$ e enfim se e só se $x \leq a \twoheadrightarrow b$.

Seja α uma fórmula nos *conectivos* $\wedge, \vee, \to$ *e* $-$. Definamos $\tau\alpha$, *fórmula nos conectivos* $\wedge, \vee, \to, -$ *e* Δ, indutivamente como se segue:

i) Se $\partial\alpha = 0$ então $\tau\alpha = \Delta\alpha$

ii) $\tau\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \tau\alpha_1 \wedge \tau\alpha_2$, $\tau\alpha_1 \vee \alpha_2 = \tau\alpha_1 \vee \tau\alpha_2$,

$\tau\alpha_1 \to \alpha_2 = \Delta(\tau\alpha_1 \to \tau\alpha_2)$ e $\tau-\alpha = \Delta-\tau\alpha$.

Proposição 3

α_0 é válida para interpretações em álgebras de Heyting se e somente se $\tau\alpha_0$ for válida para interpretações em álgebras topológicas.

Prova:

Suponhamos que α_0 não seja válida. Pela prop. 2 §2 - cap II existe interpretação $h: F \to A$ com $h\alpha_0 \neq 1$ sendo A álgebra de Heyting de abertos de um espaço topológico (X,A). Consideremos a álgebra topológica (PX, int) e definamos $\bar{h}: F_M \to PX$ interpretação tal que se v é variável então $\bar{h}v = hv$ sendo que F_M, é o conjunto das fórmulas nos conectivos $\wedge, v, \to$ e Δ.

Um argumento indutivo nos mostra que $\bar{h}\tau\alpha_0 = h\alpha_0$ e daqui $\tau\alpha_0$ não é válida. Vejamos por exemplo que $\bar{h}\ \tau(\alpha \to \beta) = h\ \alpha \to \beta$.

$\bar{h}\ \tau(\alpha\to\beta) = \bar{h}\Delta(\tau\alpha\to\tau\beta) = \text{int}\ \bar{h}\ \tau\alpha \to \tau\beta = \text{int}[\bar{h}\tau\alpha \to \bar{h}\tau\beta] =$

$= \text{int}[h\alpha \to h\beta] = h\alpha \to h\beta = h\ \alpha \to \beta.$

Partamos agora de $\tau\alpha_0$ não é válida. Logo, pela prop.2 deste parágrafo existe $\bar{h}$ interpretação $\bar{h}: F_M \to PX$ com $\bar{h}\ \tau\alpha_0 \neq 1$.

Seja $h: F \to A(X)$ a interpretação com $hv = \bar{h}\ \Delta v = \text{int}\ \bar{h}\ v$, para v variável. É imediato verificar que $h\alpha_0 = \bar{h}\tau\alpha_0$ e portanto α_0 não é válida.

Por exemplo:

$h - \alpha = - h\alpha = \text{int} - h\alpha = \text{int} - \bar{h}\tau\alpha = \bar{h}\Delta - \tau\alpha = \bar{h}\tau{-\alpha}$

Proposição 4

α é B-válida se e só se $\Delta\alpha$ é válida para interpretações em álgebras topológicas.

Estas duas proposições nos sugerem a seguinte simplificação:

Se tivermos em mente apenas o objetivo de *detectar as fórmulas válidas* dos sistemas anteriormente estudados é suficiente que saibamos operar com o algorítmo deste capítulo tão somente.

B I B L I O G R A F I A

[1] RASIOWA, H. and SIKORSKI, R. - Mathematics of Metamathematics. 1968 - PWN: Warszwa.

[2] FITTING, G.M. - Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing 1970 - North Holland Publishing, Co - Amsterdan.

[3] BIRKHOFF, G. - Lattice Theory - 1967 - Am. Math. Soc. Colloq. Publ. vol XXV, N.Y.

[4] DIEGO, A. - Sobre Álgebras de Hilbert - Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en 1961.

[5] MONTEIRO, A. - Filtros e Ideais (I e II) - 1959 - Notas de Matemática Nº 5, IMPA, R.J.

[6] GRÄTZER, G. - Universal Algebra - 1968 - Van Nostrand Co, Inc: Princeton, N.J.