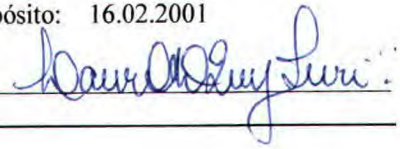


Data de Depósito: 16.02.2001

Assinatura: 

Métodos Computacionais na Teoria de Curvas Algebróides Irredutíveis

Marcelo Escudeiro Hernandes

Orientador: Prof. Dr. Abramo Hefez

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Fevereiro de 2001**



A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Abramo Hefez

Abramo Hefez

Prof. Dr. Arnaldo Leite Pinto Garcia

Arnaldo Leite Pinto Garcia

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Paulo Roberto Brumatti

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Maria Aparecida Soares Ruas

Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Daniel Levcovitz

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de fazer o que gosto.

Ao Prof. Dr. Abramo Hefez pela orientação e pela amizade consolidada nestes últimos anos.

Aos meus pais, Cláudio e Izabel, minha irmã Sheila e a pequena Gabriela, que percorreram comigo mais esta caminhada.

À Maria Elenice Rodrigues por todo o seu carinho e apoio.

Aos velhos e novos amigos, pelo companherismo.

Ao DMA-UEM, ICMC-USP e pós-graduação em Matemática da UFF, por propiciarem as condições ideais para a execução deste trabalho.

À CAPES, pelo financiamento parcial deste trabalho.

Abstract

In this work we will present algorithms that allow to compute Standard Bases for local rings and module of differentials associated to algebroid irreducible curves.

Several applications are given, as for example, the computation of the semigroup values and the set of orders of differentials of a given curve, some criteria for elimination of parameters and the classification, modulo isomorphism between local rings, of all irreducible algebroid plane curves up to multiplicity 4.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algoritmos que permitem computar Bases Standard de anéis locais e módulos de diferenciais associados a curvas algebróides irredutíveis.

Várias aplicações são dadas, como por exemplo, a determinação do semi-grupo e o do conjunto das ordens de diferenciais de uma curva, alguns critérios de eliminação de parâmetros e a classificação, a menos de isomorfismo entre anéis locais, de todas as curvas algebróides irredutíveis planas até a multiplicidade 4.

Índice

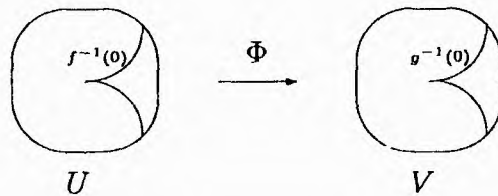
| | |
|---|-------------|
| Introdução | xiii |
| 1 Base Standard | 1 |
| 1.1 Ordens Monomiais | 1 |
| 1.2 Base Standard para Subálgebras | 3 |
| 1.3 Base Standard para Submódulos | 17 |
| 2 Equidiferenciabilidade | 25 |
| 2.1 Semigrupo de Valores de uma Curva | 25 |
| 2.1.1 Semigrupos de Curvas Planas | 35 |
| 2.2 O Módulo de Diferenciais de uma Curva | 42 |
| 2.2.1 Curvas de Interseção Completa | 51 |
| 3 Equivalência de Curvas | 59 |
| 3.1 Invariantes Aritméticos | 59 |
| 3.2 Classificação de Curvas | 63 |
| 4 Eliminação de Parâmetros | 89 |
| 5 Ramos de Gênero 1 | 103 |
| 5.1 Base Standard e Lacunas Especiais | 103 |
| 5.2 Ramos com Invariante de Zariski Fixo | 109 |
| 5.3 Ramo λ -canônico | 121 |
| 5.4 Diagramas Admissíveis | 131 |
| 6 Ramos de Multiplicidade Baixa | 141 |
| 6.1 Cuvas com Multiplicidade ≤ 3 | 142 |
| 6.2 Lacunas Especiais para Multiplicidade 4 | 143 |
| 6.3 Formas Normais para Multiplicidade 4 | 146 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.4 | Classificação das Curvas de Multiplicidade 4 | 150 |
| 6.5 | Ramos com Multiplicidade 5 | 161 |
| 6.6 | Tabelas | 166 |
| 6.7 | Resposta à uma questão de Zariski | 168 |
| A | Semigrupos do tipo $\langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$ | 181 |
| | Bibliografia | 197 |
| | Símbolos e Notações | 201 |
| | Índice Remissivo | 203 |

Introdução

O estudo local de uma singularidade isolada se mostra ainda hoje um campo vasto, com questões relevantes e que permanecem sem respostas.

Tomemos o caso mais simples, curvas analíticas planas irreduzíveis, ou seja, séries analíticas irreduzíveis de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ módulo a relação de associado. Uma questão natural que surge é reconhecer quando duas tais curvas são topologicamente equivalentes, isto é, dadas duas séries analíticas $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, como decidir se existem vizinhanças abertas U e V da origem de \mathbb{C}^2 e um homeomorfismo $\Phi : U \rightarrow V$ tais que $\Phi(U \cap f^{-1}(0)) = V \cap g^{-1}(0)$.



Tal questão foi completamente respondida por K. Brauer, W. Burau e O. Zariski, que utilizando ferramentas algébricas e topológicas, mostraram que dois germes de curvas analíticas irreduzíveis planas são topologicamente equivalentes se, e somente se, os germes possuem os mesmos pares característicos de Puiseux, ou equivalentemente, o mesmo semigrupo de valores.

O conceito de equivalência topológica, traduzido em termos de igualdade de semigrupos de valores, que Zariski denominou de equisingularidade, se estende às curvas algebróides espaciais sobre corpos arbitrários.

A primeira pergunta que surge é: Como determinar o semigrupo de valores de uma dada curva algebróide irreduzível?

Uma outra pergunta interessante é: Como decidir se dois germes de curvas analíticas irreduzíveis planas equisingulares são analiticamente equiva-

lentes; ou seja, como decidir se algum dos homeomorfismos Φ que realizam a equivalência topológica é um isomorfismo analítico?

Tal questão central da teoria de curvas irredutíveis planas ainda permanece aberta.

Na falta de invariantes discretos completos para a equivalência analítica, como é o caso do semigrupo para a equivalência topológica, uma possível estratégia para resolver o problema da classificação analítica é obter formas normais para as curvas, isto é, encontrar uma representação simples para as curvas de modo a reconhecer facilmente quando duas curvas são analiticamente equivalentes.

No entanto, vários obstáculos surgem. Por exemplo, o que é uma representação simples? Tal representação existe? Como obtê-la?

No caso de curvas algebróides irredutíveis planas (ramos) com multiplicidade baixa, encontramos na literatura respostas às questões acima e tabelas com as referidas formas normais. Em, [E] (1965), Ebey classifica os ramos com multiplicidade menor que 4 e alguns de multiplicidade 4. Bruce e Gaffney, em [BGa] (1982), utilizando métodos da teoria de Mather obtém parte dos resultados de Ebey.

A exemplo da equivalência topológica, podemos estender a relação de equivalência analítica ao caso formal e às curvas espaciais em característica arbitrária. Tal relação será denominada simplesmente de equivalência.

Em característica zero, vários invariantes com respeito à equivalência são conhecidos. Por exemplo, o invariante λ de Zariski (no caso plano), o número τ de Tjurina (no caso de interseção completa) e o conjunto Λ das ordens de diferenciais (curvas quaisquer).

Como computar tais invariantes?

O invariante λ de Zariski, que é definido para curvas irredutíveis planas, é facilmente computado quando a curva é dada por uma parametrização de Puiseux (Veja [Z2]). Quando a curva tem gênero 1 e é definida por meio de uma série $f \in K[[X, Y]]$, Peraire em [Pe2], indica como computá-lo. Mas, e para curvas com gênero superior a 1?

O número τ de Tjurina de uma série $f \in K[[X, Y]]$, é talvez um dos invariantes mais estudados por estar relacionado a vários conceitos importantes, como por exemplo, a dimensão da base da deformação miniversal de f e o comprimento do submódulo de torção do módulo de diferenciais da curva.

Quando temos uma curva específica dada por uma série $f \in K[[X, Y]]$, podemos computar τ através da codimensão do ideal Jacobiano (Veja [Z2]),

mas e quando a curva se apresenta na forma paramétrica?

Vários trabalhos sobre o número τ de Tjurina merecem destaque. Por exemplo, Delorme em [D2], 1978, descreve um algoritmo para calcular o número de Tjurina mínimo para curvas com fixado semigrupo de gênero 1, obtendo fórmulas explícitas. Briançon, Granger e Maisonobe, em [BGM], descrevem um algoritmo para computar o menor valor de τ para curvas com um semigrupo com os dois primeiros geradores fixados, estendendo assim, o resultado de Delorme. Peraire, em [Pe2], modifica tal algoritmo e computa o menor valor de τ para curvas com semigrupo de gênero 1 e invariante λ de Zariski fixo. Em [Pe1] apresenta um algoritmo para calcular τ mínimo para um semigrupo fixado de gênero qualquer.

E quanto a Λ ?

Este invariante permite obter os invariantes λ e τ e portanto é mais fino do que os anteriores. Baseado nesse invariante, define-se a relação de equidiferenciabilidade que intermedia a equisingularidade e a equivalência de curvas algebróides irredutíveis. Assim, podemos nos perguntar como decidir se duas curvas são equidiferenciáveis, ou seja, como computar Λ ? Delorme em [D2] fornece um algoritmo para calcular Λ no caso de curvas genéricas de gênero 1.

Algumas dessas questões serão respondidas neste trabalho, inúmeras permanecem e outras tantas podem ser formuladas, perpetuando assim, o estudo das curvas algebróides irredutíveis.

O objetivo central deste trabalho é o de apresentar métodos sistemáticos, que podem ser implementados, para o cálculo dos invariantes aritméticos descritos acima, unificar os resultados conhecidos que envolvem tais invariantes sob o ponto de vista dos algoritmos introduzidos e estudar algumas aplicações dos mesmos ao problema da classificação de curvas planas irredutíveis.

Passemos à descrição dos capítulos.

O Capítulo 1 contém as ferramentas gerais básicas para o nosso estudo. Apresentamos uma generalização da teoria de SAGBI desenvolvida em [RS], para subálgebras e submódulos do anel das séries de potências formais. Tais objetos serão chamados de Bases Standard.

No Capítulo 2, aplicamos a teoria desenvolvida no Capítulo 1 para o caso de curvas algebróides irredutíveis. Na primeira seção, obtemos um algoritmo que permite computar uma Base Standard para o anel local \mathcal{O} de uma curva algebróide irredutível qualquer, e a partir dessa Base obtemos o semigrupo Γ associado a curva em questão. Isto permite, entre outras coisas, decidir quando duas curvas dadas são equisingulares. No caso de curvas planas em

característica zero, otimizamos o algoritmo e o comparamos com os métodos conhecidos.

Na segunda seção, um outro algoritmo, que permite computar uma Base Standard para o módulo de diferenciais $\mathcal{O}_d\mathcal{O}$, é apresentado. A partir disso calculamos o conjunto Λ para qualquer curva algebróide irredutível sobre um corpo de característica zero. Isso possibilita, por exemplo, decidir se duas curvas são equidiferenciáveis ou não. As curvas de interseção completa mereceram um parágrafo próprio, pois para estas existe uma interessante relação entre o ideal jacobiano e o módulo de diferenciais, mais especificamente entre suas Bases Standard Mínimas.

O Capítulo 3 se restringe às curvas algebróides planas (ramos). Relacionamos o problema da classificação de ramos com isomorfismos entre Anéis de Puiseux. Apresentamos um exemplo de como os métodos desenvolvidos, permitem computar todos os possíveis conjuntos Λ para uma particular classe de equisingularidade. Introduzimos ainda o diagrama de lacunas especiais, que é também um invariante com respeito à relação de equivalência de ramos e otimizamos o algoritmo para computar parte das diferenciais não exatas minimais.

O Capítulo 4 contém generalizações dos critérios de eliminação de parâmetros contidos em [E] e [Z2].

No Capítulo 5, nos restringimos ao estudo dos ramos de gênero 1. Além de reinterpretar resultados conhecidos utilizando os algoritmos do Capítulo 2, caracterizamos todos os possíveis diagramas de lacunas especiais, ou seja, todos os conjuntos Λ que podem ocorrer para curvas de gênero 1.

No Capítulo 6 realizamos a classificação dos ramos para todas as classes de equisingularidades dadas por semigrupos de multiplicidade menor que 5 e para algumas de multiplicidade 5, o que estende a tabela até então conhecida dada por Ebey em [E]. Respondemos também a uma pergunta formulada por Zariski em [Z2] e para isto, realizamos a classificação das classes de equisingularidades dadas pelos semigrupos gerados por 6 e 7 e por 7 e 8.

Incluimos ainda um apêndice no qual estudamos os ramos com semigrupos considerados em [LuP], caracterizando todos os possíveis conjuntos Λ em função de certas lacunas.

Capítulo 1

Base Standard

A teoria de Base de Groebner e o algoritmo de Buchberger para determinar um conjunto de geradores privilegiados para ideais em anéis de polinômios e séries de potências foi estendida, com sucesso, para outras situações. Isto permite aplicar a teoria ao estudo das singularidades de curvas algebróides irredutíveis, como mostraremos no próximo capítulo.

Em [RS], Robbiano e Sweedler, introduzem o conceito de *Subálgebra Análoga to Groebner Bases for Ideals* (SAGBI). Nesse trabalho, são apresentados algoritmos para obter uma SAGBI para subálgebras finitamente geradas de um anel de polinômio sobre um corpo, sujeitas a determinadas condições. O objetivo deste capítulo é estender tais resultados para o caso do anel de séries de potências, a fim de obtermos algoritmos para gerar bases especiais para algumas subálgebras e submódulos finitamente gerados no anel de séries de potências sobre um corpo K , tais bases serão por nós chamadas de Base Standard.

1.1 Ordens Monomiais

Denotemos por $K[[\underline{X}]] = K[[X_1, \dots, X_n]]$ o anel das séries de potências em X_1, \dots, X_n , com coeficientes no corpo K . O monômio $\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}$ será representado por \underline{X}^α onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Note que $1 = X_1^0 \dots X_n^0$ é um monômio.

O conjunto de todos os monômios será denotado por \mathbb{T} .

Definição 1.1 *Uma ordem monomial sobre \mathbb{T} é uma ordem total \preceq , tal que:*

- $1 \preceq t$ para todo $t \in \mathbb{T}$.
- Se $t_1 \preceq t_2$, então $tt_1 \preceq tt_2$, para todo $t, t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Uma propriedade importante de uma ordem monomial sobre \mathbb{T} , é que com essa ordem, \mathbb{T} é bem ordenado. Isso é consequência do lema abaixo e do fato de que se $t_1 \mid t_2$, então $t_1 \preceq t_2$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Lema 1.1 (Lema de Dickson) *Todo subconjunto, não vazio, $C \subseteq \mathbb{T}$ possui um subconjunto finito $R \subseteq C$, tal que para todo $c \in C$, existe $r \in R$ com $r \mid c$.*

Dem.: Seja $C = \{t_1, t_2, \dots\} \subseteq \mathbb{T}$ e $I = \langle C \rangle$ o ideal gerado por C em $K[[\underline{X}]]$. Como $K[[\underline{X}]]$ é noetheriano, a seqüência ascendente de ideais

$$I_1 = \langle t_1 \rangle \subset I_2 = \langle t_1, t_2 \rangle \subset \dots$$

é estacionária, i.e., $I = \langle t_1, t_2, \dots, t_k \rangle$ para algum k .

Uma vez que todo $t \in C$ pode ser escrito como

$$t = \sum_{i=1}^k f_i t_i,$$

com $f_i \in K[[\underline{X}]]$, temos que $t = p_i t_i$ para algum $1 \leq i \leq k$ e algum $p_i \in \mathbb{T}$. Assim, para todo elemento do conjunto C , existe um elemento de $\{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq C$ que o divide. \blacksquare

Dentre as ordens monomiais mais comuns sobre \mathbb{T} , destacamos:

1. Ordem Lexicográfica (\leq_{Lex}): Define-se $\underline{X}^\alpha \leq_{Lex} \underline{X}^\beta$ se, e somente se, $\alpha = \beta$ ou a primeira coordenada não nula, a partir da esquerda, se existir, de $\beta - \alpha$ é positiva.
2. Ordem Lexicográfica Graduada (\leq_{GrLex}): Dizemos que $\underline{X}^\alpha \leq_{GrLex} \underline{X}^\beta$ se, e somente se:
 - a) $\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i$, onde $<$ é a ordem usual em \mathbb{N} , ou
 - b) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ e $\underline{X}^\alpha \leq_{Lex} \underline{X}^\beta$.

Definimos o *grau* de um monômio \underline{X}^α , como sendo $deg(\underline{X}^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

3. Ordem Pesada(\leq_ρ): Sejam $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{N}^n$, $<$ a ordem usual de \mathbb{N} e \preceq uma ordem monomial sobre \mathbb{T} , denotaremos por $\alpha.\beta$ o produto escalar usual de α e β .

Dizemos que $\underline{X}^\alpha \leq_\rho \underline{X}^\beta$ se, e somente se, uma das possibilidades abaixo ocorre:

- a) $\rho.\alpha < \rho.\beta$, ou
 b) $\rho.\alpha = \rho.\beta$ e $\underline{X}^\alpha \preceq \underline{X}^\beta$.

Chamamos ρ de *peso* e \leq_ρ de *ordem pesada* com respeito ao peso ρ e a ordem monomial \preceq . Definimos o *grau pesado* relativo à ρ , como sendo $\deg_\rho(\underline{X}^\alpha) = \rho.\alpha$.

Note que se $\rho = (0, \dots, 0)$, então \leq_ρ coincide com \preceq e ainda que, se \preceq é a ordem lexicográfica e $\rho = (1, \dots, 1)$, então \leq_ρ é a ordem lexicográfica graduada.

Seja $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha \underline{X}^\alpha \in K[[\underline{X}]]$, denotamos por $\mathbb{T}(f)$, o conjunto dos monômios de f , i.e., $\{\underline{X}^\alpha; a_\alpha \neq 0\}$.

Definimos a *potência líder* de f com respeito a uma dada ordem monomial, como sendo o menor elemento $lp(f)$ de $\mathbb{T}(f)$.

Seja $G \subseteq K[[\underline{X}]]$, denotaremos por $lp(G)$, o conjunto de todas as potências líderes dos elementos de G , ou seja, $lp(G) = \{lp(g); g \in G^*\}$, onde $G^* = G \setminus \{0\}$.

A partir deste ponto, fixamos uma ordem monomial \preceq . Assim, ao mencionarmos menor ou maior elemento, potência líder, etc., estaremos nos referindo à ordem monomial fixada.

Indicaremos, por $lc(f)$ o *coeficiente da potência líder* na expressão de f e por $lt(f) = lc(f)lp(f)$ o *termo líder* de f .

1.2 Base Standard para Subálgebras

Nesta seção, estenderemos os resultados de Robbiano e Sweedler para anéis de séries de potências.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{\underline{X}}$, o ideal maximal de $K[[\underline{X}]]$.

Considere um elemento de $K[[\underline{X}]]^*$ escrito sob a forma

$$\sum_{i \in I} a_i f_i$$

com $a_i \in K^*$ e $f_i \in K[[\underline{X}]]$, definimos a *altura* de $\sum_{i \in I} a_i f_i$, como sendo

$$ht \left(\sum_{i \in I} a_i f_i \right) = \min_{i \in I} \{lp(f_i)\}.$$

Note que esta definição depende da representação $\sum_{i \in I} a_i f_i$, e não do elemento $\sum_{i \in I} a_i f_i$ em si. De fato, tem-se que $ht(\sum_{i \in I} a_i f_i) \leq lp(\sum_{i \in I} a_i f_i)$.

Dizemos que f_j *contribui para a altura* de $\sum_{i \in I} a_i f_i$, se

$$lp(f_j) = \min_{i \in I} \{lp(f_i)\}.$$

A *amplitude* de $\sum_{i \in I} a_i f_i$ é definida como sendo o número de termos f_j em $\sum_{i \in I} a_i f_i$ que contribuem para a altura.

Seja $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$. Considere o homomorfismo substituição

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(f_1, \dots, f_m)} : K[[Y_1, \dots, Y_m]] &\longrightarrow K[[\underline{X}]]. \\ g &\longmapsto g(f_1, \dots, f_m) \end{aligned}$$

Um *F-produto de potências* é um elemento da forma

$$F^\alpha = \mathcal{S}_{(f_1, \dots, f_m)} \left(\prod_{i=1}^m Y_i^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Definimos a K -subálgebra $K[[F]]$ de $K[[\underline{X}]]$ como sendo

$$K[[F]] = \mathcal{S}_{(f_1, \dots, f_m)}(K[[Y_1, \dots, Y_m]]).$$

Note que se $a \in K$, então $a = aF^0 = a \prod_{i=1}^m f_i^0$.

Sejam $f \in K[[\underline{X}]]$ e $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$. Dizemos que f *se reduz a g módulo F* , escrevendo

$$f \xrightarrow{F} g$$

se existem um F -produto de potências F^α e $a \in K$, tais que

$$g = f - aF^\alpha,$$

com $g = 0$ ou $lp(f) < lp(g)$.

Escreveremos

$$f \xrightarrow{F+} g$$

quando existir uma cadeia, eventualmente infinita, de reduções módulo F , iniciando em f e finalizando em g , i.e., g não se reduz módulo F . Diremos, neste caso, que g é uma *redução final* de f módulo F .

Uma redução final g de f , por um conjunto finito F , como acima, será chamada de *redução completa*, se para todo $t \in \mathbb{T}(g)$, t não se reduz módulo F .

Observação 1.1 1. Um processo de redução corresponde, de certo modo, ao processo de divisão pelos elementos de F . Note que, podemos eventualmente reduzir um elemento de várias maneiras distintas. Por exemplo, se $f = Y^{12}$ e $F = \{f_1 = Y^4, f_2 = Y^3 + \sum_{i=4}^{\infty} X^i\}$, onde a ordem monomial considerada é a ordem lexicográfica graduada, podemos obter duas reduções distintas de f , a saber, $g_1 = f - f_1^3 = 0$ e $g_2 = f - f_2^4$. Por este motivo é interessante indicar por qual F -produto de potências efetuamos a redução. Assim, escrevemos

$$f \xrightarrow{f_1^3} g_1 \quad f \xrightarrow{f_2^4} g_2.$$

2. Note que se $f \xrightarrow{F^+} g$, então $f - g \in K[[F]]$.
3. Como estamos manipulando séries de potências, o processo de redução pode eventualmente não finalizar em um número finito de passos. Admitiremos que de algum modo sempre possamos obter uma redução final e uma redução completa de um elemento de $K[[\underline{X}]]$ módulo um subconjunto finito $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$.
4. Note que é possível reduzir $f \in K[[\underline{X}]] = K[[X_1, \dots, X_n]]$ módulo $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ se, e somente se, $lp(f) = \underline{X}^\alpha$ pertence ao semigrupo multiplicativo gerado por $lp(F) = \{lp(f_i) = \underline{X}^{\alpha_i}; f_i \in F\}$, ou equivalentemente se α pertence ao semigrupo aditivo Γ gerado por $\{\alpha_i; i = 1, \dots, m\}$. Em particular, se $\mathbb{N}^n \setminus \Gamma$ é finito, então é possível decidir, em um número finito de passos, se uma redução final de f módulo F é zero.

Definição 1.2 Dizemos que $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ é uma Base Standard de álgebras, se para todo $f \in K[[F]]^*$

$$lp(f) = lp(F^\alpha),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Uma Base Standard para uma subálgebra $A \subseteq K[[\underline{X}]]$ é uma Base Standard de álgebras F , tal que $A = K[[F]]$.

No que segue, nesta seção, uma Base Standard será sempre de álgebras e o semigrupo gerado por v_0, \dots, v_m , será denotado por $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$.

Com essa notação, podemos reescrever a definição anterior do seguinte modo:

Um conjunto finito $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ é uma Base Standard de álgebras se, e somente se,

$$\langle lp(F) \rangle = lp(K[[F]]).$$

Note que, se existir uma Base Standard F para uma subálgebra A , temos necessariamente $A = K[[F]]$ e que $lp(A)$ é um semigrupo multiplicativo finitamente gerado por $lp(F)$. Portanto, nem toda subálgebra de $K[[\underline{X}]]$ possui uma Base Standard.

Exemplo 1.1 Seja $F = \{X^2, \sum_{i=3}^{\infty} X^i\}$. O conjunto F é uma Base Standard. De fato, se $f \in K[[F]]^*$, então $lp(f) = 1$ ou $lp(f) = X^\alpha$, com $\alpha \geq 2$. Portanto $lp(f) \in \langle X^2, X^3 \rangle = \langle lp(F) \rangle$.

Exemplo 1.2 Seja $F = \{X^4, X^6 + X^7\}$. O conjunto F não é uma Base Standard. De fato, $2X^{13} + X^{14} = (X^6 + X^7)^2 - (X^4)^3 \in K[[F]]$, mas $X^{13} \notin \langle X^4, X^6 \rangle = \langle lp(F) \rangle$.

Como observamos anteriormente, a redução final de um elemento de $K[[\underline{X}]]$ módulo um subconjunto finito $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ pode não ser única. No entanto, se F for uma Base Standard, então a redução completa é única, como mostra a próxima proposição.

Proposição 1.1 Seja $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ uma Base Standard. Se r_1 e r_2 são duas reduções completas de $f \in K[[\underline{X}]]$, então $r_1 = r_2$.

Dem.: Sejam $r_1 = f - \sum_{\alpha \in I} a_\alpha F^\alpha$ e $r_2 = f - \sum_{\beta \in J} b_\beta F^\beta$ duas reduções completas de f módulo F , assim $r_2 - r_1 \in K[[F]]$. Suponha que $r_2 \neq r_1$. Como $r_2 - r_1 \in K[[F]]^*$ e F é Base Standard de A , existiria um elemento de $lp(F)$ que dividiria algum elemento de $\mathbb{T}(r_1) \cup \mathbb{T}(r_2)$, um absurdo. ■

A proposição a seguir nos fornece uma caracterização para uma Base Standard.

Proposição 1.2 *Sejam $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ e $A = K[[F]]$. São equivalentes:*

1. F é uma Base Standard para álgebras.
2. Para todo $f \in A$, qualquer redução final de f módulo F é zero.
3. Para todo $f \in A$, existe um processo de redução, tal que a redução final de f módulo F , é zero.

Dem.: 1) \Rightarrow 2) Seja $f \in A$ e g uma redução final de f módulo F , tal que $g \neq 0$, como $g = f - \sum_{\alpha \in I} a_\alpha F^\alpha \in A$ e F é uma Base Standard, existe $\alpha \in I$ tal que $lp(g) = lp(F^\alpha)$, mas desta forma g se reduz módulo F , o que contradiz a hipótese de g ser uma redução final de f módulo F .

2) \Rightarrow 3) Óbvio.

3) \Rightarrow 1) Seja $f \in A^*$, como existe uma redução final de f módulo F que é zero, podemos escrever $f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha F^\alpha$, com $lp(f) = lp(F^\alpha)$ para algum $\alpha \in I$, assim $lp(f) \in \langle lp(F^\alpha) \rangle$ e portanto, F é Base Standard. ■

Observação 1.2 1. *É óbvio que $F = \{X_1, \dots, X_n\}$ é uma Base Standard de $K[[X_1, \dots, X_n]]$ com respeito a qualquer ordem monomial.*

2. *O item 3 da proposição anterior, afirma que todo $f \in A^*$, tem uma representação da forma*

$$f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha F^\alpha \quad a_\alpha \in K^*$$

com amplitude 1. No entanto, tal representação não é necessariamente única.

De fato sejam $f = \sum_{i=1}^{\infty} X^i Y Z$, $g = \sum_{i=1}^{\infty} X^i$ e $h = Y Z$ elementos de $K[[X, Y, Z]]$. O conjunto $F = \{f, g, h\}$ é uma Base Standard de álgebras, com respeito a ordem lexicográfica graduada; uma vez que todo elemento não nulo de $K[[F]]$ tem sua potência líder divisível pela potência líder de um elemento de F . Um exemplo de que a representação mencionada não é única pode ser dado por:

$$f = f^1 g^0 h^0 \quad f = f^0 g^1 h^1$$

ambas de amplitude 1. Mais ainda, este exemplo sugere que pode haver elementos que podem ser omitidos em uma Base Standard.

A observação anterior sugere definirmos Base Standard Mínima.

Definição 1.3 *Seja $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ uma Base Standard de álgebras, dizemos que F é Mínima, se para todo $f_i \in F$,*

$$lp(f_i) \notin \langle lp(f_1), \dots, lp(\widehat{f_i}), \dots, lp(f_m) \rangle.$$

Neste sentido, no item 2 da observação anterior, $F' = \{g, h\}$ é uma Base Standard Mínima.

Lema 1.2 *Seja $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ uma Base Standard. Se $lp(f_i) \in \langle lp(f_1), \dots, lp(\widehat{f_i}), \dots, lp(f_m) \rangle$, então $F' = F \setminus \{f_i\}$ é Base Standard de álgebras e $K[[F']] = K[[F]]$.*

Dem.: É claro que $\langle lp(F') \rangle = \langle lp(F) \rangle = lp(K[[F]])$ e que $K[[F']] \subseteq K[[F]]$.

Assim $\langle lp(F') \rangle \subseteq lp(K[[F']]) \subseteq lp(K[[F]]) = \langle lp(F') \rangle$, i.e., F' é Base Standard.

Agora, sejam $f \in K[[F]]$ e r a redução completa de f módulo F' . Se $r \neq 0$, então $r \in K[[F]] \setminus K[[F']]$, mas desta forma $lp(r) \in \langle lp(F) \rangle = \langle lp(F') \rangle$, um absurdo. Portanto $f \in K[[F']]$. ■

Pelo lema anterior, para obtermos uma Base Standard Mínima para uma subálgebra $A \subseteq K[[\underline{X}]]$, basta eliminarmos de uma Base Standard $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ de A , todos os elementos $f_i \in F$, tais que

$$lp(f) \in \langle lp(f_1), \dots, lp(\widehat{f_i}), \dots, lp(f_m) \rangle.$$

Para obtermos um algoritmo para Bases Standard de álgebras, é necessário definir S -processo de um par de séries, neste contexto das álgebras.

Definição 1.4 *Seja F um subconjunto finito de $K[[\underline{X}]]$, um S -processo de F é definido por:*

$$aF^\alpha - bF^\beta$$

com a propriedade

$$lp(aF^\alpha - bF^\beta) \succ \min\{lp(F^\alpha), lp(F^\beta)\} (= ht(aF^\alpha - bF^\beta)),$$

sempre que $aF^\alpha - bF^\beta \neq 0$.

Exemplo 1.3 Seja $F = \{f = X, g = XY^3, h = Y^4 + Y^5, l = Y^6 + Y^7\}$, considerando a ordem lexicográfica graduada, alguns S -processos de F são:

$$\begin{aligned} fg - gf &= 0 \\ h^3 f^4 - g^4 &= 3X^4 Y^{13} + 3X^4 Y^{14} + X^4 Y^{15} \\ l^2 f^4 - g^4 &= 2X^4 Y^{13} + X^4 Y^{14} \end{aligned}$$

O teorema abaixo, cuja demonstração é análoga a demonstração dada em [RS] (theorem 2.8) é de extrema relevância para obter um algoritmo para Base Standard de álgebras.

Teorema 1.1 Seja $F \subset \mathcal{M}_X^*$ finito. Então F é uma Base Standard de álgebras se, e somente se, todo S -processo de F , se reduz a zero módulo F por algum processo de redução.

Dem.: \Rightarrow) Seja S um S -processo de F . Como $S \in K[[F]]$ e F é Base Standard, segue do item 3) da Proposição 1.2, que S possui uma redução final zero, por algum processo de redução módulo F .

\Leftarrow) Seja $f \in K[[F]]^*$. De todas as possíveis representações

$$(*) \quad f = \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} F^{\alpha}$$

com $a_{\alpha} \in K^*$, considere as que tem altura máxima $h (= lp(F^{\alpha}))$ para algum α) e dentre essas, escolha uma com menor amplitude possível.

Vamos provar que $lp(f) = h$, mostrando assim que $lp(K[[F]]) \subseteq \langle lp(F) \rangle$ e portanto que F é uma Base Standard de álgebras.

Sabemos que $lp(f) \succeq h$. Suponha por absurdo que $lp(f) \succ h$, i.e., a amplitude da soma (*) é no mínimo 2. Sem perda de generalidade, podemos supor que $h = lp(F^{\beta}) = lp(F^{\gamma})$, onde $\beta, \gamma \in I$. Dessa forma, existe $b \in K^*$ tal que $S = a_{\beta} F^{\beta} - b a_{\gamma} F^{\gamma}$ é um S -processo de F . Por hipótese, $S \xrightarrow{F_+} 0$ por algum processo de redução, e portanto, podemos escrever

$$S = \sum_{\delta \in J} c_{\delta} F^{\delta} \quad c_{\delta} \in K^*$$

com $lp(S) \succ h$ e amplitude 1.

Agora, escrevendo

$$a_{\beta} F^{\beta} + a_{\gamma} F^{\gamma} = S + (b + 1) a_{\gamma} F^{\gamma},$$

temos que

$$f = \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} F^{\alpha} = S + (b+1)a_{\gamma} F^{\gamma} + \sum_{\alpha \in I \setminus \{\beta, \gamma\}} a_{\alpha} F^{\alpha}.$$

Se $b \neq -1$, obtemos uma representação de f com altura h e amplitude menor do que a da representação (*), uma vez que S não contribui para a altura. Absurdo!

Se $b = -1$, obtemos uma representação de maior altura ou menor amplitude do que as da representação (*). Novamente um absurdo. ■

Observação 1.3 *Observe que na demonstração do teorema anterior, bastaria garantir que todo S -processo $S = aF^{\beta} - bF^{\gamma}$ admita uma representação da forma $S = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha} F^{\alpha}$, $c_{\alpha} \in K^*$ com altura maior que $lp(F^{\beta}) = lp(F^{\gamma})$.*

Antes de prosseguirmos, vejamos mais de perto o conjunto de todos os S -processos de um conjunto finito $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^* \subset K[[X_1, \dots, X_n]]$.

Denotaremos por $ord_{X_j}(\underline{X}^{\alpha}) = \alpha_j$ a ordem de \underline{X}^{α} na indeterminada X_j .

Um S -processo $S = aF^{\alpha} - bF^{\beta}$, a menos de constantes, é determinado pelos vetores $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$, soluções do sistema homogêneo de equações lineares diofantinas:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j ord_{X_1}(lp(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_{X_1}(lp(f_j)) \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j ord_{X_2}(lp(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_{X_2}(lp(f_j)) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j ord_{X_n}(lp(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_{X_n}(lp(f_j)). \end{cases} \quad (1.1)$$

O conjunto de todas as soluções de (1.1) é um semigrupo aditivo de \mathbb{N}^{2m} , gerado pelo conjunto M de todas as soluções não nulas de (1.1) que são mínimas com respeito à ordem parcial

$$(\alpha, \beta) \preceq (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_j \leq \gamma_j \text{ e } \beta_j \leq \delta_j \\ \text{para } j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pelo Lema de Dickson (Lema 1.1), segue imediatamente, que o conjunto M é finito.

No caso em que $K[[\underline{X}]] = K[[X]]$, o sistema (1.1) se reduz a uma equação linear diofantina homogênea, e nesse caso, Clausen e Fortenbacher, em [CF], fornecem um algoritmo eficiente para obter o conjunto M .

Exemplo 1.4 Seja $F = \{X^4, X^6 + X^7, 2X^{13} + X^{14}\} \subset \mathbb{C}[[X]]$, o sistema (1.1) se resume a equação $4W_1 + 6W_2 + 13W_3 - 4Z_1 - 6Z_2 - 13Z_3 = 0$. Usando o algoritmo acima citado, temos que o conjunto M das soluções mínimas desta equação é:

$$M = \{(1, 0, 0, 1, 0, 0), (3, 0, 0, 0, 2, 0), (13, 0, 0, 0, 0, 4), (0, 2, 0, 3, 0, 0), \\ (0, 1, 0, 0, 1, 0), (0, 13, 0, 0, 0, 6), (0, 0, 4, 13, 0, 0), (0, 0, 6, 0, 13, 0), \\ (0, 0, 1, 0, 0, 1), (2, 3, 0, 0, 0, 2), (8, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 0, 2, 0, 5, 0), \\ (0, 0, 2, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 8, 0, 0), (0, 5, 0, 1, 0, 2), (5, 1, 0, 0, 0, 2), \\ (1, 8, 0, 0, 0, 4), (0, 0, 2, 5, 1, 0), (0, 0, 4, 1, 8, 0)\}.$$

Note que, toda solução de (1.1) é obtida como soma de elementos de M . Denotamos por S_M o conjunto dos S -processos mínimos, obtidos pelas soluções mínimas de (1.1). Vejamos através de um exemplo, como o conjunto S_M determina, todos os S -processos de F .

No contexto do Exemplo 1.4, considere o S -processo de F dado por $S = X^4(X^6 + X^7)^2(2X^{13} + X^{14})^6 - 2^6(X^4)^4(X^6 + X^7)^{13}$. Como S é determinado por $(\alpha, \beta) = (1, 2, 6, 4, 13, 0)$ e $(\alpha, \beta) = (0, 2, 0, 3, 0, 0) + (0, 0, 6, 0, 13, 0) + (1, 0, 0, 1, 0, 0)$, podemos escrever:

$$S = [(X^6 + X^7)^2 - (X^4)^3] * [(2X^{13} + X^{14})^6 - 2^6(X^6 + X^7)^{13}] * [X^4 - X^4]$$

onde $[a - b] * [c - d] = [ac - bd]$.

Temos o seguinte lema:

Lema 1.3 Seja $F \subset \mathcal{M}_X^*$ um subconjunto finito. Se alguma redução final de todo S -processo mínimo de F é zero, então todo S -processo não nulo $S = aF^\alpha - bF^\beta$ de F pode ser representado como

$$S = \sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega,$$

com $d_\omega \in K^*$ e $ht(aF^\alpha - bF^\beta) \prec ht(\sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega)$.

Dem.: Seja $A = K[[F]]$ e S_M o conjunto dos S -processos mínimos de F .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que todo S -processo é da forma $F^\alpha - aF^\beta$, onde $a \in K$ é univocamente determinado.

Seja $S_i = F^{\alpha_i} - a_i F^{\beta_i} \in S_M$, com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^{\#F}$. Como $S_i \xrightarrow{F_+} 0$, por algum processo de redução, pelo item 2 da Observação 1.2 podemos escrever

$$S_i = \sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} b_{\gamma_i} F^{\gamma_i}$$

com $b_{\gamma_i} \in K^*$ e amplitude 1, logo $ht(\sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} b_{\gamma_i} F^{\gamma_i}) \succ lp(F^{\alpha_i}) = lp(F^{\beta_i})$. Assim $F^{\alpha_i} = a_i F^{\beta_i} + \sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} b_{\gamma_i} F^{\gamma_i}$.

Seja $S = F^\delta - cF^\epsilon$ um S -processo não nulo de F , então

$$F^\delta = \prod_{i \in I} (F^{\alpha_i})^{n_i} \text{ e}$$

$$F^\epsilon = \prod_{i \in I} (F^{\beta_i})^{n_i},$$

com $n_i \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$\begin{aligned} F^\delta &= \prod_{i \in I} (F^{\alpha_i})^{n_i} = \prod_{i \in I} (a_i F^{\beta_i} + \sum_{\gamma_i \in \Gamma_i} b_{\gamma_i} F^{\gamma_i})^{n_i} = \\ &= \prod_{i \in I} a_i (F^{\beta_i})^{n_i} + \sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega = \prod_{i \in I} a_i F^\epsilon + \sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega, \end{aligned}$$

onde $ht(\sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega) \succ ht(F^\delta - cF^\epsilon)$. Como a constante c é univocamente determinada, temos que $\prod_{i \in I} a_i = c$, seguindo assim que

$$S = \sum_{\omega \in \Omega} d_\omega F^\omega.$$

■

Deste modo, do lema acima e da Observação 1.3, podemos reescrever o Teorema 1.1 como segue.

Teorema 1.2 *Seja $F \subset \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$ finito. Então F é uma Base Standard para $K[[F]]$ se, e somente se, todo S -processo mínimo de F se reduz a zero, por algum processo de redução.*

Exemplo 1.5 *Seja $F = \{X^4, X^6 + X^7, 2X^{13} + X^{14}\} \subset \mathbb{C}[[X]]$. Vimos no Exemplo 1.4 que os S -processos mínimos de F são da forma $S = aF^\alpha - bF^\beta$ com*

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in \{ & (1, 0, 0, 1, 0, 0), (3, 0, 0, 0, 2, 0), (13, 0, 0, 0, 0, 4), (0, 2, 0, 3, 0, 0), \\ & (0, 1, 0, 0, 1, 0), (0, 13, 0, 0, 0, 6), (0, 0, 4, 13, 0, 0), (0, 0, 6, 0, 13, 0), \\ & (0, 0, 1, 0, 0, 1), (2, 3, 0, 0, 0, 2), (8, 0, 0, 0, 1, 2), (1, 0, 2, 0, 5, 0), \\ & (0, 0, 2, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 8, 0, 0), (0, 5, 0, 1, 0, 2), (5, 1, 0, 0, 0, 2), \\ & (1, 8, 0, 0, 0, 4), (0, 0, 2, 5, 1, 0), (0, 0, 4, 1, 8, 0) \}. \end{aligned}$$

Note que o 1º, 5º e o 9º elementos deste conjunto, nos dão S -processos nulos, portanto não necessitam ser analisados.

O 2º e o 4º, o 3º e o 7º, o 6º e o 8º, o 10º e o 13º, o 11º e o 14º, o 12º e o 15º, o 16º e o 18º, o 17º e o 19º nos dão, a menos de constantes, o mesmo S -processo. Assim, basta analisar os S -processos mínimos dados por: $(3, 0, 0, 0, 2, 0)$, $(13, 0, 0, 0, 0, 4)$, $(0, 13, 0, 0, 0, 6)$, $(2, 3, 0, 0, 0, 2)$, $(8, 0, 0, 0, 1, 2)$, $(1, 0, 2, 0, 5, 0)$, $(5, 1, 0, 0, 0, 2)$ e $(1, 8, 0, 0, 0, 4)$, i.e.,

$$\begin{aligned}
(X^4)^3 - (X^6 + X^7)^2 &= -(2X^{13} + X^{14}) \xrightarrow{F_+} 0 \\
16(X^4)^{13} - (2X^{13} + X^{14})^4 &= -32X^{53} - 24X^{54} - 8X^{55} - X^{56} \\
64(X^6 + X^7)^{13} - (2X^{13} + X^{14})^6 &= 640X^{79} + \dots \\
4(X^4)^2(X^6 + X^7)^3 - (2X^{13} + X^{14})^2 &= 8X^{27} + 11X^{28} + 4X^{29} \\
4(X^4)^8 - (X^6 + X^7)(2X^{13} + X^{14})^2 &= -8X^{33} - 5X^{34} - 4X^{35} \\
(X^4)(2X^{13} + X^{14})^2 - 4(X^6 + X^7)^5 &= -16X^{31} - 39X^{32} - 40X^{33} - 20X^{34} - 4X^{35} \\
4(X^4)^5(X^6 + X^7) - (2X^{13} + X^{14})^2 &= -X^{28} \\
16(X^4)(X^6 + X^7)^8 - (2X^{13} + X^{14})^4 &= 96X^{53} + \dots
\end{aligned}$$

Como qualquer potência acima de 15 pode ser obtida usando produto de potências dos elementos de F , temos que todo S -processo mínimo possui uma redução final zero. Desta forma, F é uma Base Standard, a saber uma Base Standard Mínima, para a subálgebra $A = \mathbb{C}[[F]]$.

Fixada uma ordem monomial e uma subálgebra finitamente gerada A de $K[[X]]$, temos que A admite uma Base Standard se, e somente se, o semigrupo (multiplicativo) das potências líderes de A , i.e., $lp(A)$ é finitamente gerado. É claro que se $F \subset A$ é tal que $lp(F)$ gera (como semigrupo) $lp(A)$, então F é uma Base Standard para A .

Observação 1.4 Toda subálgebra $A \subseteq K[[X]]$ possui uma Base Standard. Basta verificar que $lp(A)$ é um semigrupo multiplicativo finitamente gerado, ou equivalentemente, que o semigrupo aditivo

$$\Gamma = \{\alpha; X^\alpha = lp(f) \text{ para algum } f \in A\} \subseteq \mathbb{N}$$

é finitamente gerado.

Defina

$$\begin{aligned} v_0 &= \min\{\Gamma \setminus \{0\}\} \\ v_1 &= \min\{\Gamma \setminus \langle v_0 \rangle\} \\ &\vdots \\ v_i &= \min\{\Gamma \setminus \langle v_0, \dots, v_{i-1} \rangle\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde $\langle v_0, \dots, v_i \rangle$ é o semigrupo gerado por $\{v_0, \dots, v_i\}$.

Agora note que existe $i < v_0$, tal que $\Gamma = \langle v_0, \dots, v_i \rangle$. Isto segue diretamente do fato $v_j < v_{j+1}$ e $v_j \not\equiv v_k \pmod{v_0}$ para todo $j \neq k$.

O conjunto de geradores $\langle v_0, \dots, v_g \rangle$, definido como na observação anterior, é chamado de *sistema mínimo de geradores* de Γ , a saber, tal sistema está contido em qualquer outro sistema de geradores $\langle w_0, \dots, w_r \rangle$.

De fato, como $v_i = \sum_{j=0}^r a_j w_j$ e $w_j = \sum_{k=0}^g b_{kj} v_k$, com $a_j, b_{kj} \in \mathbb{N}$ para todo $j = 0, \dots, r$, temos que

$$v_i = \sum_{k=0}^g \sum_{j=0}^r a_j b_{kj} v_k,$$

assim existe um único $l \in \{0, \dots, r\}$, tal que $a_l = b_{il} = 1$ e $a_j b_{kj} = 0$ para todo $k \neq i$ e todo $j = 0, \dots, r$. Em particular, tomando $j = l$, temos que $b_{kl} = 0$ para todo $k \neq i$. Deste modo,

$$w_l = \sum_{k=0}^g b_{kl} v_k = b_{il} v_i = v_i,$$

i.e., $v_i \in \{w_0, \dots, w_r\}$.

Assumiremos, a partir deste ponto, que dada uma subálgebra A , esta possua uma Base Standard com respeito a ordem monomial fixada.

Para efeito algorítmico, é interessante fixar uma maneira de efetuar o processo de redução (que estamos supondo sempre ser possível chegar ao seu ponto final). Por exemplo, escolha a ordenação (f_1, \dots, f_m) para o conjunto $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{M}_X^*$ e se pudermos efetuar a redução de um elemento de $K[[X]]$ por dois F -produtos F^α e F^β , escolhemos efetuar a redução pelo F -produto de maior expoente α , com respeito a ordem lexicográfica.

Teorema 1.3 (Algoritmo) *Seja $B \subset \mathcal{M}_X^*$ finito e suponha que $lp(K[[B]])$ seja um semigrupo multiplicativo finitamente gerado. Então, podemos obter uma Base Standard F de $K[[B]]$ aplicando o algoritmo abaixo:*

DADO: B ;
 DEFINA: $F_0 := \{ \}$;
 $F := B$;
 ENQUANTO $F \neq F_0$ FAÇA
 $F_0 := F$;
 $S := \{s; s \text{ é } S\text{-processo mínimo de } F\}$;
 $R := \{r; s \xrightarrow{F^+} r \text{ e } r \neq 0\}$;
 $F := F \cup R$;
 SAÍDA: F .

Dem.: Inicialmente fixemos uma maneira de efetuar o processo de redução.

Veja que o conjunto S , assim como o conjunto R são finitos para cada passo do algoritmo.

Suponha que $r_i \neq 0$ seja uma redução final de menor ordem de um S -processo mínimo em um dado passo i do algoritmo acima. No passo $i + 1$, além dos S -processos mínimos já considerados nos passos anteriores, que não nos trarão informações novas, introduzimos (eventualmente) S -processos mínimos cuja ordem é estritamente superior à ordem de r_i . Desta forma, como $lp(A)$ é um semigrupo finitamente gerado, a potência líder de uma redução final de menor ordem em cada passo i , não pode superar $m = \max\{lp(g); g \text{ pertence ao conjunto de geradores da Base Standard de } A\}$. Portanto, existe um número finito de passos, tal que a partir deste, qualquer S -processo mínimo do conjunto F possui uma redução final igual a zero, conseqüentemente, pelo Teorema 1.2, F é uma Base Standard para A . ■

Exemplo 1.6 *Seja $A \subset K[[X, Y]]$, a subálgebra gerada por $B = \{f_1 = X^2, f_2 = \sum_{i=4}^{\infty} X^i, f_3 = X^7, f_4 = Y^2, f_5 = Y^3 + X^8\}$ e considere a ordem lexicográfica graduada sobre \mathbb{N} .*

Apliquemos o algoritmo do teorema anterior para o conjunto B .

Inicialmente note que todo monômio da forma $X^\alpha Y^\beta$ com $\alpha \in \langle 2, 7 \rangle$ e $\beta \in \langle 2, 3 \rangle$ pertence a A . Deste modo, todos os S -processos mínimos de $F = B$

possuem uma redução final zero, exceto $S(f_1, f_2) = f_2 - f_1^2 = \sum_{i=5}^{\infty} X^i$, que coincide com sua redução final.

No próximo passo do algoritmo temos

$$F = \{f_1 = X^2, f_2 = \sum_{i=4}^{\infty} X^i, f_3 = X^7, f_4 = Y^2, f_5 = Y^3 + X^8, f_6 = \sum_{i=5}^{\infty} X^i\}.$$

Uma simples verificação mostra que todo S -processo mínimo de F se reduz a zero. Portanto F é uma Base Standard para A .

De acordo com o Lema 1.2, vemos ainda que $F_0 = \{f_1, f_4, f_5, f_6\}$ é uma Base Standard Mínima para A . Uma vez que $X^5 = f_6 - f_1^3 - f_1 f_6$ e $Y^3 = f_5 - f_1^4$, temos que $F_1 = \{X^2, X^5, Y^2, Y^3\}$ é também uma Base Standard Mínima para A .

O exemplo acima, nos mostra que do mesmo modo que na teoria de Base Standard de um ideal (Veja [Bec1] e [Bec2]), uma Base Standard Mínima para subálgebra não é necessariamente única, no entanto, podemos definir Base Standard Reduzida, que é única, como mostramos a seguir.

Definição 1.5 Uma Base Standard Mínima B é dita Reduzida se todo $f \in B$ é mônico e $p \notin lp(K[[B]])$ para todo $p \in \mathbb{T}(f) \setminus \{lp(f)\}$.

Proposição 1.3 Seja uma subálgebra $A \subseteq K[[X]]$. Se A possui uma Base Standard, então A possui uma única Base Standard Reduzida.

Dem.: (Existência) Dada uma Base Standard, sempre podemos obter uma Base Standard Mínima usando o Lema 1.2. Assim, seja $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ uma Base Standard Mínima de A , podemos assumir, sem perda de generalidade, que todos os elementos de F são mônicos.

Para cada $i = 1, \dots, m$, seja r_i a redução completa de $f_i - lp(f_i)$ módulo F . Então $F_0 = \{lp(f_1) + r_1, \dots, lp(f_m) + r_m\}$ é uma Base Standard Reduzida.

(Unicidade) Sejam $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ e $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ duas Bases Standard Reduzidas de A .

Tome $f_i \in F$ assim, existem $g_j, g_l \in G$ tais que $lp(g_j) \mid lp(f_i)$ e $lp(f_i) \mid lp(g_l)$, como $lp(g_j) \nmid lp(g_l)$ para $j \neq l$, segue que $l = j$ e $lp(f_i) = lp(g_j)$, em particular $m = k$, ou seja todas as Bases Standard Mínimas possuem o mesmo número de elementos.

Podemos ordenar G e F de modo que $lp(f_i) = lp(g_i)$ para $i = 1, \dots, m$. Se existe $f_i \neq g_i$, então $f_i - g_i \in A^*$, assim temos $p = lp(f_i - g_i) \succ lp(f_i) = lp(g_i)$, onde $p \in \mathbb{T}(f_i) \cup \mathbb{T}(g_i)$.

Como $f_i - g_i \in A^*$, G e F são Bases Standard de A , pela Proposição 1.2 existem um G -produto de potências e um F -produto de potências, tais que $lp(G^\alpha) = lp(F^\beta) = p$, mas como G e F são Reduzidas isto não pode ocorrer, portanto $G = F$. ■

Observe que no exemplo anterior, F_1 é a Base Standard Reduzida da subálgebra A .

1.3 Base Standard para Submódulos

Sejam dados $A \subseteq K[[X]]$ uma subálgebra e I um ideal de A . Uma questão natural que surge, é como obter uma Base Standard para o ideal I . Miller, em [M], responde essa questão, no caso polinomial e denomina a Base Standard de SG -Base. Nesta seção adaptaremos o método de Miller para o anel das séries de potências e consideraremos a situação mais geral de um A -submódulo M de $K[[X]]$ finitamente gerado. É claro que se o conjunto M for um subconjunto de A , então M é um ideal de A e estaremos no caso tratado por Miller, porém no contexto das séries de potências.

Deste ponto em diante, A denotará uma subálgebra de $K[[X]]$ com uma dada Base Standard F . ◁

Definição 1.6 *Sejam A uma K -subálgebra de $K[[X]]$ e M um A -submódulo de $K[[X]]$ finitamente gerado. Um subconjunto finito $G \subset M$ é uma Base Standard de A -módulos para M , se para todo $m \in M^*$ tivermos*

$$lp(m) = lp(ag),$$

com $a \in A$ e $g \in G$.

No que segue estaremos apenas considerando a ordem monomial que nos fornece a Base Standard F de A .

Observação 1.5 *Se $F \subset A$ é uma Base Standard de álgebras para A , então podemos escrever $a \in A^*$ como $a = \sum_{\alpha \in I} b_\alpha F^\alpha$, onde a soma tem amplitude 1 (Observação 1.2). Seja F^α o F -produto de potências de ordem mínima. Assim, $lp(a) = lp(F^\alpha)$ e portanto, podemos reescrever a definição acima do seguinte modo:*

Um subconjunto $G \subset M$ é uma Base Standard de módulos para M , se para todo $m \in M^*$

$$lp(m) = lp(F^\alpha g),$$

com $g \in G$ e algum $\alpha \in \mathbb{N}^{\#F}$.

Como no caso de Base Standard para ideais e para álgebras, podemos definir redução final módulo um subconjunto finito G de M no contexto de módulos.

Sejam $h \in K[[X]]$ e $G = \{g_1, \dots, g_r\} \subset M$. Dizemos que h se reduz a r módulo (G, F) , escrevendo $h \xrightarrow{GF} r$, se

$$r = h - \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\alpha_i \in \Theta_i} b_{\alpha_i} F^{\alpha_i} \right) g_i,$$

com $b_{\alpha_i} \in K$ e $r \in K[[X]]$ de forma que $r = 0$ ou $lp(h) \prec lp(r)$. Quando não for mais possível a redução de r módulo (G, F) , chamamos r de uma *redução final* de h e indicamos $h \xrightarrow{GF} r$.

Como antes, uma redução final r será chamada de uma *redução completa*, se para todo $t \in \Pi(r)$, t não se reduz módulo (G, F) .

A proposição a seguir nos dá uma caracterização de Base Standard para A -módulos.

Proposição 1.4 *Sejam $A \subseteq K[[X]]$ uma K -subálgebra com Base Standard F , M um A -submódulo de $K[[X]]$ e $G = \{g_1, \dots, g_r\} \subset M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. G é uma Base Standard de A -módulos para M .
2. Para todo $m \in M$, qualquer redução final de m módulo (G, F) é zero.
3. Para todo $m \in M$, existe uma redução final nula de m módulo (G, F) .
4. Todo $m \in M^*$ tem uma representação (não necessariamente única!) da forma

$$m = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\alpha_i \in \Theta_i} b_{\alpha_i} F^{\alpha_i} \right) g_i,$$

com amplitude 1.

Dem.: Análoga a demonstração da Proposição 1.2. ■

Definição 1.7 *Sejam F uma Base Standard para a subálgebra $A \subseteq K[[\underline{X}]] = K[[X_1, \dots, X_n]]$ e um subconjunto $H \subseteq K[[\underline{X}]]$. Um S -processo do par $(g, h) \in H \times H$, no contexto de A -módulos, é definido como sendo*

$$S(g, h) = aF^\alpha g - bF^\beta h,$$

onde $a, b \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^s$ e com a propriedade de que se $aF^\alpha g - bF^\beta h \neq 0$, então

$$lp(aF^\alpha g - bF^\beta h) \succ \min\{lp(F^\alpha g), lp(F^\beta h)\} = ht(aF^\alpha g - bF^\beta h).$$

Note que se $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ e fixado um par $(g, h) \in H \times H$, então um S -processo $aF^\alpha g - bF^\beta h$ é determinado, a menos de multiplicação por constantes, pelo vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2s}$ que é solução do sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \alpha_i ord_{X_1}(lp(f_i)) + ord_{X_1}(lp(g)) = \sum_{i=1}^s \beta_i ord_{X_1}(lp(f_i)) + ord_{X_1}(lp(h)) \\ \sum_{i=1}^s \alpha_i ord_{X_2}(lp(f_i)) + ord_{X_2}(lp(g)) = \sum_{i=1}^s \beta_i ord_{X_2}(lp(f_i)) + ord_{X_2}(lp(h)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^s \alpha_i ord_{X_n}(lp(f_i)) + ord_{X_n}(lp(g)) = \sum_{i=1}^s \beta_i ord_{X_n}(lp(f_i)) + ord_{X_n}(lp(h)). \end{cases} \quad (1.3)$$

Apesar do conjunto das soluções do sistema (1.3) não ter estrutura de semigrupo quando $ord_{X_j}(g) \neq ord_{X_j}(h)$ para algum $j = 1, \dots, n$, podemos definir o conjunto N de todas as soluções (não nulas) que são mínimas com respeito à ordem parcial (1.2).

Além disso, pelo Lema de Dickson (Lema 1.1), temos que o conjunto N é finito.

Uma solução de (1.3) é obtida através da adição de uma solução mínima pertencente a N com uma solução do sistema homogêneo associado à (1.3), cujo conjunto de soluções sabemos ser finitamente gerado.

Como antes, toda solução de (1.3) nos dá um S -processo do par (g, h) . Os S -processos obtidos a partir dos elementos de N serão chamados de S -processos mínimos de (g, h) , e o conjunto dos S -processos mínimos de (g, h) será denotado por $S_{(g,h)}$. Os S -processos mínimos de todos os pares $(g, h) \in H \times H$, serão chamados de S -processos mínimos de H .

O lema abaixo será útil para a apresentação de um algoritmo para uma Base Standard para módulos.

Lema 1.4 *Seja $A \subseteq K[[\underline{X}]]$ uma subálgebra com Base Standard F e M o A -módulo gerado por um subconjunto $G = \{g_1, \dots, g_r\} \subset K[[\underline{X}]]$. Se uma redução final dos S -processos mínimos de G é zero, então todo S -processo não nulo $S = aF^\alpha g - bF^\beta h$ com $(g, h) \in G \times G$ pode ser representado como*

$$S = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i} \right) g_i,$$

com $l_{\omega_i} \in K$ e $ht(\sum_{i=1}^r (\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i}) g_i) \succ lp(F^\alpha g) = lp(F^\beta h)$.

Dem.: Podemos assumir, sem perda de generalidade que um S -processo do par $(g, h) \in G \times G$ seja dado por $S = F^\alpha g - aF^\beta h$, onde $a \in K$ é univocamente determinado.

Seja $S_i \in S_{(g,h)}$. Como, $S_i \xrightarrow{GF^+} 0$ pela Proposição 1.4, temos

$$S_i = F^{\alpha_i} g - a_i F^{\beta_i} h = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\tau_i \in \Xi_i} b_{\tau_i} F^{\tau_i} \right) g_i,$$

onde $b_{\tau_i} \in K^*$ e $ht(\sum_{i=1}^r (\sum_{\tau_i \in \Xi_i} b_{\tau_i} F^{\tau_i}) g_i) \succ lp(F^{\alpha_i} g) = lp(F^{\beta_i} h)$. Donde segue o resultado para os S -processos mínimos.

Tome um S -processo não nulo qualquer do par (g, h) , i.e., $S = F^\delta g - cF^\epsilon h$, com $c \in K^*$ e $\delta, \epsilon \in \mathbb{N}^{\#F}$, então:

$$F^\delta g = \left(\prod_{i \in I} (F^{\mu_i})^{n_i} \right) F^{\alpha_i} g$$

$$F^\epsilon h = \left(\prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i} \right) F^{\beta_i} h,$$

com $n_i \in \mathbb{N}$, (α_i, β_i) solução mínima do sistema (1.3) e (μ_i, λ_i) solução mínima do sistema homogêneo associado à (1.3).

Note que existe $d \in K^*$, tal que $(\prod_{i \in I} (F^{\mu_i})^{n_i}) - d(\prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i})$ é um S -processo de F , assim usando o Teorema 1.1, podemos escrever

$$\prod_{i \in I} (F^{\mu_i})^{n_i} = d \prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i} + \sum_{\rho \in P} e_\rho F^\rho,$$

com $e_\rho \in K^*$ e $ht(\sum_{\rho \in P} e_\rho F^\rho) \succ lp(\prod_{i \in I} (F^{\mu_i})^{n_i}) = lp(\prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i})$.

Desse modo,

$$\begin{aligned}
F^\delta g &= \left(d \prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i} + \sum_{\rho \in P} e_\rho F^\rho \right) F^{\alpha_i} g = \\
&= \left(d \prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i} + \sum_{\rho \in P} e_\rho F^\rho \right) (a_i F^{\beta_i} h + \sum_{i=1}^r (\sum_{\tau_i \in \Xi_i} b_{\tau_i} F^{\tau_i}) g_i) = \\
&= a_i d \left(\prod_{i \in I} (F^{\lambda_i})^{n_i} F^{\beta_i} h \right) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i} \right) g_i = \\
&= a_i d F^\epsilon h + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i} \right) g_i,
\end{aligned}$$

onde $ht(\sum_{i=1}^r (\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i}) g_i) \succ lp(F^\epsilon g) = lp(F^\delta h)$.

Como a constante c é univocamente determinada, segue que $c = a_i d$ e assim

$$S = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\omega_i \in \Omega_i} l_{\omega_i} F^{\omega_i} \right) g_i.$$

■

Com o auxílio do lema anterior e analogamente ao Teorema 1.2, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *Sejam $A \subseteq K[[\underline{X}]]$ uma subálgebra com Base Standard F e M um A -submódulo de $K[[\underline{X}]]$ gerado por um subconjunto finito $G \subset K[[\underline{X}]]$. Então G é uma Base Standard para M se, e somente se, a redução final, módulo (G, F) , de todo S -processo mínimo de G é zero.*

Observação 1.6 1. Note que se tomarmos o par $(g, g) \in G \times G$, um S -processo mínimo não é necessariamente trivial, pois o sistema (1.3) será homogêneo e como já vimos, um sistema deste tipo não admite apenas soluções triviais como mínimas.

No entanto, um S -processo não trivial de (g, g) é da forma $S = aF^\alpha g - bF^\beta g = (aF^\alpha - bF^\beta)g$. Como $aF^\alpha - bF^\beta \in A$ e F é Base Standard de A , temos que $aF^\alpha - bF^\beta \xrightarrow{F^+} 0$. Desta forma, se reduzirmos $aF^\alpha - bF^\beta$ por $c_\gamma F^\gamma$, podemos reduzir S por $c_\gamma F^\gamma g$, assim $S \xrightarrow{G_{F^+}} 0$.

2. Se A é uma subálgebra com Base Standard F , então um A -módulo M finitamente gerado tem Base Standard se, e somente se, $lp(M)$ é finitamente gerado sobre $lp(A)$, ou melhor, $lp(M)$ é finitamente gerado sobre o semigrupo $\langle lp(F) \rangle$. Isto significa que existem $g_1, \dots, g_r \in M$, tais que, para todo $m \in M$, existem $\alpha \in \mathbb{N}^{\sharp F}$ e $i \in \{1, \dots, r\}$, de modo que $lp(m) = lp(F^\alpha g_i)$.

No que segue, vamos considerar apenas A -submódulos M de $K[[\underline{X}]]$, tais que $lp(M)$ seja finitamente gerado sobre $lp(A)$.

Teorema 1.5 (Algoritmo) *Seja A uma subálgebra de $K[[\underline{X}]]$ com Base Standard F e seja $B \subset K[[\underline{X}]]$ finito. Se M é o A -módulo gerado por B e $lp(M)$ é finitamente gerado sobre $lp(A)$, então M tem uma Base Standard G dada pelo seguinte algoritmo:*

DADOS: F, B ;
 DEFINA: $G_0 := \{ \}$;
 $G := B$;
 ENQUANTO $G \neq G_0$ FAÇA
 $S := \{s; s \text{ é } S\text{-processo mínimo de } G\}$;
 $R := \{r; s \xrightarrow{G_{F^+}} r \text{ e } r \neq 0\}$;
 $G_0 := G$;
 $G := G \cup R$;
 SAÍDA: G .

Dem.: Como M admite Base Standard, existe $\max\{lp(g); g \text{ pertence à Base Standard de } M\}$, desta forma, usando o Teorema 1.4 o resultado segue como no Teorema 1.3. ■

Da mesma forma que no caso de Base Standard para ideais e para subálgebras, podemos definir Base Standard Mínima e Base Standard Reduzida para módulos.

Definição 1.8 *Sejam M um A -módulo com Base Standard G e F uma Base Standard da subálgebra $A \subseteq K[[\underline{X}]]$. A Base Standard G é chamada de Base Standard Mínima, se para todo $h \in G$ tivermos $lp(h) \neq lp(F^\alpha g)$ para todo $g \in G \setminus \{h\}$, e todo $\alpha \in \mathbb{N}^{\#F}$.*

Uma Base Standard Mínima G de M é dita Reduzida, se todo elemento $g \in G$ é mônico e $p \neq lp(F^\alpha h)$ para todo $h \in G$, todo $p \in \mathbb{T}(g) \setminus \{lp(g)\}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^{\#F}$.

Proposição 1.5 *Seja $A \subseteq K[[\underline{X}]]$ uma subálgebra com Base Standard F . Se M é um A -submódulo de $K[[\underline{X}]]$ que possui Base Standard, então M possui uma única Base Standard Reduzida.*

Dem.: A existência, bem como a unicidade da Base Standard Reduzida segue como na Proposição 1.3. ■

Exemplo 1.7 *Seja a subálgebra $A = K[[X^4, X^9 + X^{15}]] \subset K[[X]]$, cuja Base Standard Reduzida é $F = \{X^4, X^9 + X^{15}\}$.*

Se $a \in A$, então $\text{ord}_X(a) \in \langle 4, 9 \rangle$, mais ainda, se $f \in K[[X]]$ é tal que $\text{ord}_X(f) \geq 24$, então $f \in A$.

Considere o A -módulo M gerado por $B = \{X^3, X^8 - X^{14}\}$.

Note que, dado $f \in K[[X]]$ temos:

- *Se $\text{ord}_X(f) \geq 27$, então $lp(f) = lp(X^3)lp(a)$, $a \in A$.*
- *Se $\text{ord}_X(f) = 26$, então $lp(f) = lp(X^8 - X^{14})lp((X^9 + X^{15})^2)$.*
- *Se $\text{ord}_X(f) \in \{23, 24, 25\}$, então $lp(f) = lp(X^3)lp(a)$, $a \in A$.*

Assim, se $\text{ord}_X(f) \geq 23$, então $f \in M$. Em particular, temos que $lp(M)$ é finitamente gerado sobre $lp(A)$, portanto M possui Base Standard.

Apliquemos o algoritmo para $F = \{X^4, X^9 + X^{15}\}$ e $B = \{X^3, X^8 - X^{14}\}$.

Passo 1

Temos que S é a união dos conjuntos $S_{(X^3, X^3)}$, $S_{(X^8 - X^{14}, X^8 - X^{14})}$ e $S_{(X^3, X^8 - X^{14})}$.

Pela Observação 1.6, vemos que os dois primeiros conjuntos nos dão S -processos cuja redução final é zero. No terceiro conjunto temos, a menos de constantes, dois S -processos, um deles é

$$S_1 = (X^4)^8 X^3 - (X^9 + X^{15})^3 (X^8 - X^{14}),$$

com $\text{ord}_X(S_1) > 35$, que certamente terá uma redução final zero, módulo (G, F) .

O segundo S -processo é

$$S_2 = (X^9 + X^{15})X^3 - X^4(X^8 - X^{14}) = 2X^{18}$$

Se $\text{car}(K) = 2$, então o algoritmo finaliza.

Se $\text{car}(K) \neq 2$, então passamos ao próximo passo do algoritmo com $G := \{X^3, X^8 - X^{14}, 2X^{18}\}$.

Passo 2

Além dos S -processos mínimos já computados no passo anterior, os quais terão redução zero neste passo, temos ainda $S_{(2X^{18}, 2X^{18})}$, que não nos trará informações relevantes,

$$S_{(X^3, 2X^{18})} = \{2(X^4)^6 X^3 - (X^9 + X^{15})(2X^{18}), \\ (X^9 + X^{15})^3 X^3 - (X^4)^3(2X^{18})\}, \text{ e}$$

$$S_{(X^8 - X^{14}, 2X^{18})} = \{2(X^4)^7(X^8 - X^{14}) - (X^9 + X^{15})^2(2X^{18}), \\ 2(X^9 + X^{15})^2(X^8 - X^{14}) - (X^4)^2(2X^{18})\}.$$

Uma vez que as alturas desses S -processos tem ordem superior a 23, todos terão uma redução final zero módulo (G, F) , e portanto, o algoritmo finaliza.

Temos, assim, que uma Base Standard de M , na verdade Mínima, é dada em qualquer característica por

$$G := \{X^3, X^8 - X^{14}, 2X^{18}\}.$$

Capítulo 2

Equidiferenciabilidade

Neste capítulo aplicaremos a teoria desenvolvida no capítulo anterior para o estudo de uma curva algebróide irredutível C , veremos que importantes informações a respeito de C , tais como seu semigrupo de valores e valores de diferenciais não exatas, que até então pareciam difíceis de determinar, podem ser sistematicamente obtidos por meio dos algoritmos apresentados anteriormente.

No restante deste trabalho, K é um corpo algebricamente fechado.

2.1 Semigrupo de Valores de uma Curva

Nesta seção, aplicaremos a teoria de Base Standard para subálgebras, de modo a obter o sistema mínimo de geradores do semigrupo de valores de uma curva algebróide irredutível.

Uma *curva algebróide irredutível* C , em $K[[\underline{X}]] = K[[X_1, \dots, X_n]]$, é um conjunto de equações f_1, \dots, f_r com $f_i \in \mathcal{M}_{\underline{X}}^* \subset K[[\underline{X}]]$ para $i = 1, \dots, r$, tal que o anel $\mathcal{O} = \frac{K[[\underline{X}]]}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$ é um domínio de dimensão 1. No que segue, vamos supor que C não seja degenerada, ou seja, C não esteja contida em nenhum hiperplano $X_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, n$.

O fecho inteiro $\overline{\mathcal{O}}$ no corpo de frações \mathcal{K} de \mathcal{O} é um anel de valorização discreta. Seja t um parâmetro uniformizante de $\overline{\mathcal{O}}$, assim podemos considerar $\overline{\mathcal{O}} = K[[t]]$. Denotaremos por \mathcal{M} o ideal maximal de $K[[t]]$ e por x_i , a classe residual de X_i módulo o ideal $\langle f_1, \dots, f_r \rangle$, i.e., $x_i = X_i + \langle f_1, \dots, f_r \rangle$.

Dessa forma, temos $\mathcal{O} = K[[x_1, \dots, x_n]] \subseteq \overline{\mathcal{O}}$ e representaremos x_i em $\overline{\mathcal{O}}$ por $p_i(t)$, onde $p_i(t) \in \mathcal{M}^*$ para $i = 1, \dots, n$.

Temos assim o monomorfismo de K -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O} &\longrightarrow K[[t]]. \\ x_i &\longmapsto p_i(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

A representação

$$\begin{cases} x_1 = p_1(t) \\ \vdots \\ x_n = p_n(t) \end{cases}$$

será chamada de *parametrização* de C , onde identificamos x_i com $\varphi(x_i)$. Claramente tem-se que $\varphi(\mathcal{O}) = K[[p_1(t), \dots, p_n(t)]]$.

Se $\text{car}(K) = 0$, então C pode ser dada por uma parametrização de Puiseux, i.e., podemos, a menos de uma permutação dos x_i 's, reparametrizar a curva C , de modo que $x_1 = t^{v_0}$, onde $t^{v_0} = \min_{1 \leq i \leq n} \{lp(p_i(t))\}$. Na verdade, é fácil verificar que, se $\text{car}(K)$ não divide v_0 , então C admite uma parametrização de Puiseux.

O inteiro v_0 , como acima definido, será chamado de *multiplicidade* de C e denotado por $\text{mult}(C)$.

Anéis do tipo $\mathcal{A} = K[[t^{v_0}, p_2(t), \dots, p_n(t)]]$, tais que o MDC de v_0 e dos expoentes dos termos das séries $p_i(t)$'s é 1, i.e., a parametrização $t^{v_0}, p_2(t), p_3(t), \dots, p_n(t)$ é primitiva, serão chamados de *anéis de Puiseux*.

Denotaremos por v a valorização de $K[[t]]$, que obviamente é uma ordem monomial. Assim, a partir deste ponto, não mais mencionaremos a ordem monomial usada, uma vez que utilizaremos sempre a ordem monomial v .

Todo subanel B de $K[[t]]$, determina um semigrupo $v(B) \subseteq \mathbb{N}$, em particular o semigrupo $v(\mathcal{O}) := v(\varphi(\mathcal{O}))$ é denominado de *semigrupo* associado a C .

Note que obter $\Gamma = v(\mathcal{O})$ não é trivial, uma vez que devemos calcular $v(g)$ para todo $g \in \mathcal{O}^*$. No entanto, como Γ é finitamente gerado (Veja Observação 1.4), temos que \mathcal{O} , mais rigorosamente $\varphi(\mathcal{O})$, admite uma Base Standard em $K[[t]]$. A saber, as ordens dos elementos de uma Base Standard Mínima de \mathcal{O} , formam o sistema mínimo de geradores de Γ .

Como vimos no capítulo anterior (Proposição 1.3), todas as Bases Standard Mínimas de uma subálgebra possuem o mesmo número de elementos. No caso particular de curvas, esse número é o número de elementos do sistema mínimo de geradores de Γ , que será chamado de *gênero do semigrupo* Γ ou *gênero da curva* C .

Definição 2.1 *Um semigrupo $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ possui condutor μ se $\{\gamma \in \Gamma; \gamma + \mathbb{N} \subseteq \Gamma\} \neq \{\}$ e neste caso, define-se $\mu = \min\{\gamma \in \Gamma; \gamma + \mathbb{N} \subseteq \Gamma\}$.*

Uma importante propriedade do semigrupo Γ de uma curva algebróide irredutível, é que este sempre possui condutor. De fato, tome $\frac{g}{h} \in \mathcal{K}$, com $g, h \in \mathcal{O}$, tais que $v\left(\frac{g}{h}\right) = 1$. Logo $v(g) = v(h) + 1$. É fácil verificar que para todo inteiro $i \geq (v(h) - 1)(v(h) + 1)$, temos $i \in \langle v(h), v(g) \rangle \subseteq \Gamma$.

Na verdade, o semigrupo associado a um anel de Puiseux $\mathcal{A} = K[[t^{v_0}, p_2(t), \dots, p_n(t)]]$ sempre possui condutor. Para verificar isto, é suficiente mostrar que existem elementos de \mathcal{A} , de modo que o MDC de suas ordens seja 1. Tais elementos podem ser obtidos aplicando o seguinte algoritmo:

DADOS: $v_0, p_2(t), \dots, p_n(t)$;
TOME $\{q_1, \dots, q_r\} =$ conjunto dos primos
que dividem v_0 ;
PARA j DE 1 ATÉ r FAÇA
 Escolha $p_i(t)$ com $2 \leq i \leq n$
 tal que q_j não divida algum
 expoente de t em $p_i(t)$;
 $S_0 := p_i(t)$;
 $k := 0$;
 ENQUANTO $q_j \mid v(S_k)$ FAÇA
 $S_{k+1} := S_k^\alpha - at^{\beta v_0}$;
 onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ e $a \in K^*$ são
 univocamente determinados,
 de modo que α seja mínimo e
 $v(S_{k+1}) > v(S_k) = \beta v_0$;
 $k := k + 1$;
 $h_j := S_k$;
SAÍDA: $\{h_i; i = 1, \dots, r\}$ com
MDC($v_0, v(h_1), \dots, v(h_r)$) = 1.

Note que a existência de $p_i(t)$, tal que q_j seja coprimo com algum expoente de t em $p_i(t)$, bem como a existência de $k < \infty$ tal que $q_j \nmid v(S_k)$, são garantidos pela primitividade da parametrização.

Uma vez que existem $h_i \in \mathcal{A}$, com $w_i = v(h_i)$ para $i = 1, \dots, r$, tais que $\text{MDC}(v_0, w_1, \dots, w_r) = 1$, podemos encontrar inteiros α_i para $i = 0, \dots, r$, de modo que $\sum_{i=0}^r \alpha_i w_i = 1$.

Denotando por $P = \{\alpha_i; \alpha_i \geq 0\}$ e $N = \{\alpha_i; \alpha_i < 0\}$, podemos escrever

$$v\left(\prod_{i \in P} h_i^{\alpha_i}\right) = 1 + v\left(\prod_{i \in N} h_i^{-\alpha_i}\right).$$

Como $\prod_{i \in P} h_i^{\alpha_i}, \prod_{i \in N} h_i^{-\alpha_i} \in \mathcal{A}$, o resultado segue como no caso do semigrupo de uma curva C , i.e., qualquer inteiro maior ou igual a

$$\left(v\left(\prod_{i \in N} h_i^{-\alpha_i}\right) - 1\right) \left(v\left(\prod_{i \in N} h_i^{-\alpha_i}\right) + 1\right)$$

pertence ao semigrupo $\langle v\left(\prod_{i \in N} h_i^{-\alpha_i}\right), v\left(\prod_{i \in P} h_i^{\alpha_i}\right) \rangle \subseteq v(\mathcal{A})$.

Observação 2.1 O corpo de frações de um anel de Puiseux \mathcal{A} é $K((t))$. Assim, seu fecho inteiro é $K[[t]]$.

De fato, seja μ o condutor de $v(\mathcal{A})$, isto implica que $t^\mu, t^{\mu+1} \in \mathcal{A}$, conseqüentemente t pertence ao corpo de frações de \mathcal{A} , e a afirmação segue.

Os S -processos a serem calculados no Teorema 1.3, são obtidos a partir das soluções mínimas de uma equação linear diofantina homogênea, como já observamos na capítulo anterior. Assim, faremos sempre uso do algoritmo de [CF] também citado no capítulo anterior.

As equações diofantinas, com as quais nos deparamos, são sempre da forma

$$\sum_{i=1}^s a_i W_i = \sum_{i=1}^s a_i Z_i,$$

onde para cada $i = 1, \dots, s$, temos uma solução mínima da forma

$$(0, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0),$$

onde as entradas não nulas estão nas posições i e $i + s$. Tais soluções nos dão S -processos nulos, portanto desnecessários. Além disso, note que se (α, β) é uma solução mínima, então (β, α) também o é, no entanto, essas soluções geram, a menos de constante, o mesmo S -processo mínimo. Deste ponto em diante, ao mencionarmos S -processos mínimos, estaremos excluindo os casos triviais e as redundâncias acima citadas.

Utilizando o fato de que o semigrupo Γ de uma curva algebróide irredutível possui condutor μ , podemos refinar o algoritmo do Teorema 1.3. De

fato, seja Γ_i o semigrupo gerado pelas ordens dos elementos do conjunto F em um dado passo i . Se Γ_i possuir condutor μ_i , então $\mu \leq \mu_i$. Desse modo, em cada passo, basta considerarmos os S -processos mínimos cujas alturas sejam inferiores a t^{μ_i-1}

Temos assim:

Algoritmo 2.1

DADO: F ;
 DEFINA: $F_0 := \{ \}$;
 ENQUANTO $F \neq F_0$ FAÇA
 $F_0 := F$;
 SE $MDC(v(F)) = 1$
 ENTÃO $\mu := \text{condutor de } v(F)$;
 SENÃO $\mu := \infty$;
 $S := \{s; s \text{ é } S\text{-processo mínimo de } F, \text{ não computado}$
 $\text{no passo anterior com } v(ht(s)) < \mu - 1\}$;
 $R := \{r; s \xrightarrow{F_+} r \text{ e } r \neq 0\}$;
 $F := F \cup R$;
 SAÍDA: F, μ .

Exemplo 2.1 1. Seja

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{10} + t^{13}. \end{cases}$$

Tomando $F = \{x, y\}$, o único S -processo mínimo a ser considerado é $y^4 - x^5$.

Temos assim, que

$$z = y^4 - x^5 \begin{cases} = 4t^{43} + 6t^{46} + 4t^{59} + t^{52} & \text{se } \text{car}(K) \neq 2 \\ \xrightarrow{x^4 y^2, x^6 y} t^{61} & \text{se } \text{car}(K) = 2. \end{cases}$$

Independente da característica, uma análise mostra que não existe S -processos mínimos relevantes no próximo passo do algoritmo. Portanto, $F = \{x, y, z\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , com

| | Γ | μ |
|------------------------|-----------------------------|-------|
| $\text{car}(K) \neq 2$ | $\langle 8, 10, 43 \rangle$ | 66 |
| $\text{car}(K) = 2$ | $\langle 8, 10, 61 \rangle$ | 84 |

2. Considere $\text{car}(K) = 0$ e seja

$$C : \begin{cases} x = t^8 + at^{13} \\ y = t^{10} + t^{15}. \end{cases}$$

O único S -processo mínimo, a ser considerado no primeiro passo do algoritmo, é $y^4 - x^5$, a saber

$$z = y^4 - x^5 \begin{cases} = (4 - 5a)t^{45} + (6 - 10a^2)t^{50} + (4 - 10a^3)t^{55} + \\ \qquad \qquad \qquad + (1 - 5a^4)t^{60} - a^5t^{65} \quad \text{se } a \neq \frac{4}{5} \\ \xrightarrow{\frac{2}{5}y^5} \frac{22}{25}t^{55} + \frac{369}{125}t^{60} + \frac{11576}{3125}t^{65} + 2t^{70} + \frac{2}{5}t^{75} \\ \qquad \qquad \qquad \text{se } a = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Em qualquer caso, não teremos S -processos mínimos que mereçam ser analisados nos passos seguintes. Desse modo, finalizamos o algoritmo obtendo $F = \{x, y, z\}$ como Base Standard Mínima de \mathcal{O} e

| | Γ | μ |
|----------------------|-----------------------------|-------|
| $a \neq \frac{4}{5}$ | $\langle 8, 10, 45 \rangle$ | 68 |
| $a = \frac{4}{5}$ | $\langle 8, 10, 55 \rangle$ | 78 |

3. Considere $\text{car}(K) = 0$ e seja

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{10} + t^{13} \\ z = t^{12} + at^{15}. \end{cases}$$

Como $\text{MDC}(8, 10, 12) = 2$ não temos condutor no primeiro passo.

Os S -processos mínimos e suas respectivas reduções finais módulo $F = \{x, y, z\}$ são:

• $y^4 - x^5 = 4t^{43} + 6t^{46} + 4t^{49} + t^{52}.$

Note que a ordem deste S -processo nos indica que o condutor de Γ é menor que 58, que é o condutor de $\langle 8, 10, 12, 43 \rangle \subseteq \Gamma$.

• $y^2 - xz = \begin{cases} (2 - a)t^{23} + t^{26} \quad \text{se } a \neq 2 \\ t^{26} \xrightarrow{x^2y} -t^{29} \quad \text{se } a = 2. \end{cases}$

parametrização, diferente do caso de curvas planas, dadas por uma parametrização de Puiseux, veja Théorème 3.9 de [Z2].

Observação 2.2 *Seja F uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} de uma curva algebróide irredutível C . Fixemos uma maneira de efetuar a redução final, módulo F . Por exemplo, ordenamos os elementos de F segundo suas ordens e se for possível efetuar a redução por dois F -produtos de potências aF^α e bF^β , escolhemos aF^α se a primeira coordenada, a partir da esquerda, de $\alpha - \beta$ for positiva.*

Desse modo, todo elemento de \mathcal{O} pode ser univocamente representado em termos de F , utilizando este processo de realizar a redução final, módulo F .

Considere $\text{car}(K) = 0$ e a curva dada no item 1) do Exemplo 2.1, onde $\mathcal{O} = K[[F]]$ e F é uma Base Standard Mínima $\{x = t^8, y = t^{10} + t^{13}, z = 4t^{43} + 6t^{46} + 4t^{49} + t^{52}\}$.

As séries $g = 4t^{43} - 14t^{49} - 17t^{52} - 6t^{55}$ e $h = 4t^{43} - 13t^{49} - 17t^{52} - 6t^{55}$ pertencem a \mathcal{O} ?

Para responder essa questão, basta computar a redução final de g e h , módulo F . A saber, temos

$$g \xrightarrow{z} -6t^{46} - 18t^{49} - 18t^{52} - 6t^{55} \xrightarrow{6x^2y^3} 0$$

$$h \xrightarrow{z} -6t^{46} - 17t^{49} - 18t^{52} - 6t^{55} \xrightarrow{6x^2y^3} t^{49}$$

Portanto $g \in \mathcal{O}$, enquanto que $h \notin \mathcal{O}$.

Seja C uma curva algebróide irredutível, dada por equações f_1, \dots, f_r , então o semigrupo de valores Γ de C é obtido através do cálculo de $v(\bar{g})$ com $g = \bar{g} + \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, onde $g \in K[[\underline{X}]]$ é uma hipersuperfície.

O cálculo de $v(\bar{g})$ em termos das equações cartesianas g, f_1, \dots, f_r pode ser realizado usando a relação

$$v(\bar{g}) = \dim_K \frac{K[[\underline{X}]]}{\langle f_1, \dots, f_r, g \rangle},$$

e a codimensão de $\langle f_1, \dots, f_r, g \rangle$ se resume a computar uma Base Standard para este ideal (Veja [Bec1] e [Bec2]).

Uma vez que podemos computar a ordem de um elemento de $K[[\underline{X}]]$, podemos obter expressões da forma $S = F^\alpha - aF^\beta$, com $v(F^\alpha) = v(F^\beta)$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\sharp F}$ e $F \subseteq \mathcal{M}_{\underline{X}}^*$. Sabemos que existe um único $a \in K^*$ de modo

que S é um S -processo, i.e., $v(S) > v(F^\alpha) = v(F^\beta)$, tal constante pode ser determinada, computando uma Base Standard para o ideal $\langle f_1, \dots, f_r, F^\alpha - aF^\beta \rangle \subset K[[X]]$ (Veja [Bec1] e [Bec2]) e analisando para que valor de $a \in K^*$ temos

$$\dim_K \frac{K[[X]]}{\langle f_1, \dots, f_r, F^\alpha - aF^\beta \rangle} > \dim_K \frac{K[[X]]}{\langle f_1, \dots, f_r, F^\alpha \rangle} = \dim_K \frac{K[[X]]}{\langle f_1, \dots, f_r, F^\beta \rangle}.$$

Do mesmo modo, podemos efetuar a redução de um elemento de $K[[X]]$ módulo $F \subseteq \mathcal{M}_X^*$, quando C é dada por equações cartesianas. Portanto, podemos aplicar o algoritmo para obter uma Base Standard de álgebras para \mathcal{O} .

Note no entanto, que teremos controle apenas sobre a ordem dos elementos, mas não de seus termos. Desse modo, no caso em que C é dada por equações cartesianas, podemos obter uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , mas não a Base Standard Reduzida.

Exemplo 2.2 Considere $\text{car}(K) = 0$ e seja C a curva algebróide irredutível dada pela série irredutível $f(X, Y) = Y^8 - 4X^3Y^6 - 8X^5Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (16X^8 - 24X^9)Y^3 + (-4X^9 + 36X^{10} - 20X^{11})Y^2 + (-8X^{11} + 16X^{12} - 8X^{13})Y + X^{12} + 6X^{13} + 21X^{14} - X^{15}$.

Como C é uma curva plana, temos

$$v(\bar{g}) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = I(f, g) = \text{ord}_X(R_Y(f, g)),$$

onde, $I(f, g)$ denota a multiplicidade de interseção de g com f , $R_Y(f, g)$ o resultante em Y de f e g e $\bar{g} = g + \langle f \rangle$, com $g \in K[[X, Y]]$.

Apliquemos o algoritmo para $F = \{X, Y\}$, a fim de obter uma Base Standard para \mathcal{O} .

Como $I(f, X) = 8$ e $I(f, Y) = 12$, não temos condutor no primeiro passo.

O único S -processo mínimo não trivial nesse passo é da forma $Y^2 - aX^3$. Como $R_Y(f, Y^2 - aX^3) = (a - 1)^8 X^{24} + (a - 1)^4 (-52a^2 + 8a + 12) X^{25} + (-40a^5 + 494a^4 - 1256a^3 + 500a^2 + 480a + 78) X^{26} + \dots$, a única escolha para obtermos um S -processo é $a = 1$, e desta forma $I(f, Y^2 - X^3) = 26$, passamos para o segundo passo com $F = \langle X, Y, Z = Y^2 - X^3 \rangle$.

Como o semigrupo $\langle 8, 12, 26 \rangle$ não possui condutor, devemos analisar todos os S -processos mínimos de F , cujo resultante com f são:

$$R_Y(f, Z^2 - a_1 X^2 Y^3) = (a_1 - 4)^8 X^{52} + (18a_1^8 + 632a_1^7 - 13156a_1^6 + 17248a_1^5 + 457280a_1^4 - 10782772a_1^3 - 2153472a_1^2 - 1417216a_1 - 16384) X^{53} + \dots$$

$$R_Y(f, Z^2 - a_2 X^5 Y) = (a_2 - 4)^8 X^{52} + (6a_2^8 - 128a_2^7 + 769a_2^6 - 2336a_2^5 + 11840a_2^4 - 130048a_2^3 - 384000a_2^2 - 1122304a_2 - 80384)X^{53} + \dots$$

$$R_Y(f, XZ^2 - a_3 Y^5) = (a_3 - 4)^8 X^{60} + (30a_3^8 + 4272a_3^7 - 44260a_3^6 - 149536a_3^5 + 2287168a_3^4 - 3451904a_3^3 - 7003136a_3^2 - 1712128a_3 - 16384)X^{61} + \dots$$

$$R_Y(f, YZ^2 - a_4 X^8) = (a_4 - 4)^8 X^{64} + (-120a_4^7 - 9956a_4^6 + 42592a_4^5 + 9792a_4^4 - 590848a_4^3 + 1614848a_4^2 - 2138112a_4 + 376832)X^{65} + \dots$$

$$R_Y(f, Z^4 - a_5 XY^8) = (a_5 - 16)^8 X^{104} + \dots$$

$$R_Y(f, Z^4 - a_6 X^{13}) = (a_6 - 16)^8 X^{104} + \dots$$

$$R_Y(f, Z^6 - a_7 Y^{13}) = (a_7 - 64)^8 X^{156} + \dots$$

Note que para obtermos S -processos, devemos tomar $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4$, $a_5 = a_6 = 16$ e $a_7 = 64$, mas deste modo $I(f, Z^2 - 4X^5Y) = 53$ e como o condutor do semigrupo $\langle 8, 12, 26, 53 \rangle$ é 84, podemos dispensar os três últimos S -processos.

Uma verificação nos indica que no próximo passo não teremos S -processos mínimos, não triviais, com altura menor que 84.

Temos assim, que $F = \{X, Y, Z = Y^2 - X^3, W = Z^2 - 4X^5Y, U_1 = Z^2 - 4X^2Y^3, U_2 = XZ^2 - 4Y^5, U_3 = YZ^2 - 4X^8\}$ é uma Base Standard para \mathcal{O} . Como $I(f, U_1) = I(f, W)$, $I(f, U_2) = I(f, XW)$ e $I(f, U_3) = I(f, YW)$, temos que $\{X, Y, Z, W\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} e $\Gamma = \langle 8, 12, 26, 53 \rangle$ é o semigrupo de valores associado à C .

O algoritmo apresentado anteriormente, não se restringe a um tipo particular de curva algebróide irredutível. De fato, podemos aplicá-lo a qualquer curva algebróide irredutível sobre qualquer corpo algebricamente fechado K , independentemente de sua característica.

Uma Base Standard do anel local \mathcal{O} de uma curva algebróide irredutível, depende da equação que a define e da parametrização obtida, no entanto, o semigrupo de valores não, uma vez que este é obtido pelas ordens de elementos de uma Base Standard Mínima de \mathcal{O} e não depende das expressões destes.

Definição 2.2 Dizemos que duas curvas algebróides irredutíveis em $K[[X]]$ são equisingulares, se elas possuem o mesmo semigrupo de valores.

Obter o semigrupo de valores Γ de uma curva algebróide é de grande importância, pois através dele, podemos obter várias informações sobre a

natureza da curva em questão. Temos assim, um algoritmo para determinar se duas curvas algebróides irredutíveis são equisingulares ou não.

Além disso, podemos verificar se uma curva algebróide irredutível é Gorenstein, uma vez que estas são definidas através de propriedades do semigrupo, a saber, uma curva é Gorenstein se, e somente se, $\#(\mathbb{N} \setminus \Gamma) = \frac{g}{2}$.

Dentre as curvas de Gorenstein, uma categoria importante, são as curvas de interseção completa, ou seja, aquelas que são dadas por f_1, \dots, f_{n-1} , com $f_i \in \mathcal{M}_{\underline{X}}^* \subset K[[X_1, \dots, X_n]]$. Mesmo sem entrar em detalhes, mencionamos que se o semigrupo de valores $\langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ de uma curva é um semigrupo de interseção completa, então a curva certamente é de interseção completa.

Delorme, em [D1], apresenta um algoritmo para decidir se um semigrupo de \mathbb{N} é um semigrupo de interseção completa.

Exemplo 2.3 *Considere $\text{car}(K)=0$ e seja*

$$C : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^8 + 2t^9 \\ z = t^{10} + t^{11}. \end{cases}$$

Aplicando o algoritmo para obter uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , obtemos $F = \{x, y, z, w, y\}$, onde $w = xz - y^2 = -3t^{17} - 4t^{18}$ e $u = yz - x^3 = 3t^{19} + 2t^{20}$. Desse modo, o semigrupo associado à C é $\Gamma = \langle 6, 8, 10, 17, 19 \rangle$, cujo condutor é $\mu = 22$. Uma vez que $\mathbb{N} \setminus \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 21\}$, a curva é Gorenstein.

O algoritmo de Delorme, citado anteriormente, indica que Γ não é um semigrupo de interseção completa. No entanto, esse é um exemplo de que podemos ter curvas de interseção completa sem que o semigrupo associado o seja, como mostram Herzog e Kunz, em [HK].

2.1.1 Semigrupos de Curvas Planas

Vimos que podemos encontrar uma Base Standard Mínima para qualquer curva algebróide irredutível C . Entretanto, no caso de curvas planas e quando $\text{car}(K)$ não divide a multiplicidade de C , Azevedo e Zariski, Abhyankar e Moh, também descrevem métodos para encontrar uma Base Standard Mínima, tais métodos serão apresentados e comparados com nosso algoritmo mais adiante.

Seja C uma curva algebróide irredutível plana com multiplicidade v_0 . Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass (Veja Prop. 3.3 de [R1]), C pode ser

dada por uma série irredutível

$$f(X, Y) = Y^{v_0} + \sum_{i=1}^{v_0} a_i(X)Y^{v_0-i},$$

e pelo Teorema de Newton-Puiseux (Veja Prop. 4.4 de [Ru]), por uma parametrização de Puiseux

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t^i, \end{cases}$$

com $b_i \in K$. Podemos supor que $v_0 < v_1$ e que $v_0 \nmid v_1$.

Vamos nos referir a uma curva algebróide irredutível plana simplesmente por *ramo*.

Definimos as seguintes seqüências de inteiros:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= v_0, & e_0 &= v_0, & n_0 &= 1, \\ \beta_1 &= v_1, & e_1 &= \text{MDC}(e_0, \beta_1), & n_1 &= \frac{e_0}{e_1}, \\ \beta_j &= \min\{i; b_i \neq 0 \text{ e } e_{j-1} \nmid i\}, & e_j &= \text{MDC}(e_{j-1}, \beta_j), & n_j &= \frac{e_{j-1}}{e_j}. \end{aligned}$$

Como observamos anteriormente, pela primitividade da parametrização, existe $g \geq 1$, tal que $e_g = 1$.

A seqüência $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$ é chamada *seqüência característica* de C .

MÉTODO DE AZEVEDO-ZARISKI

Sejam ω uma raiz v_0 -ésima primitiva da unidade e φ_α o K -automorfismo de $K[[t]]$ definido por $\varphi_\alpha(t) = \omega^\alpha t$.

Defina

$$Z_k = \sum_{\beta_1 \leq i < \beta_k} b_i X^{\frac{i}{v_0}},$$

com $k = 2, \dots, g$ e

$$P_k(Y) = \prod_{\alpha=1}^{n_0 n_1 \dots n_{k-1}} (Y - \varphi_\alpha(Z_k)).$$

Azevedo, em [Az], e Zariski, em [Z2], mostram que $\{X, Y, P_k(Y); k = 2, \dots, g\}$ são séries cujas multiplicidades de interseção com $f(X, Y)$, nos dão o sistema mínimo de geradores do semigrupo Γ da curva.

MÉTODO DE ABHYANKAR-MOH

Seja $d \in \mathbb{N}$, tal que $d \mid v_0$. Definiamos a d -ésima aproximação de raízes de f , como sendo a série

$$\sqrt[d]{f} = Y^{\frac{v_0}{d}} + \sum_{i=1}^{\frac{v_0}{d}} c_i(X) Y^{\frac{v_0}{d}-i},$$

onde $c_i(X) \in K[[X]]$ são obtidos univocamente pelas relações

$$a_i(X) = dc_i(X) + \sum_{\sum_{j=1}^{i-1} j\delta_j=i} \alpha_{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}} c_1(X)^{\delta_1} \cdots c_{i-1}(X)^{\delta_{i-1}},$$

$i = 1, \dots, \frac{v_0}{d}$, onde

$$\alpha_{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}} = \binom{d}{\delta_1 + \dots + \delta_{i-1}} \frac{(\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j)!}{\prod_{j=1}^{i-1} (\delta_j!)}.$$

Abhyankar e Moh em [AM], provam a existência e a unicidade das aproximações de raízes de f , e que as multiplicidades de interseção de X e $e_k \sqrt[d]{f}$, $k = 1, \dots, g$ com $f(X, Y)$ nos dão o sistema mínimo de geradores do semigrupo Γ da curva.

COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Embora o algoritmo que apresentamos, o resultado de Azevedo-Zariski e o de Abhyankar-Moh nos dêem uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , estas bases não são necessariamente as mesmas.

Considere o seguinte exemplo

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + t^{14} + t^{15}, \end{cases}$$

cuja equação cartesiana é $f(X, Y) = Y^8 - 4X^3Y^6 - 8X^5Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (16X^8 - 24X^9)Y^3 + (-4X^9 + 36X^{10} - 20X^{11})Y^2 + (-8X^{11} + 16X^{12} - 8X^{13})Y + X^{12} + 6X^{13} + 21X^{14} - X^{15}$.

Conforme o Exemplo 2.2, vemos que nosso algoritmo forneceu a Base Standard Mínima $F = \{x, y, z = y^2 - x^3, w = z^2 - 4x^5y = (y^3 - x^3)^2 - 4x^5y\}$, enquanto que o método de Abhyankar-Moh, nos fornece $F = \{x, y, z = y^2 - x^3, w_1 = z^2 - 4x^5y - 13x^7\}$ e o método de Azevedo-Zariski, $F = \{x, y, z = y^2 - x^3, w_2 = z^2 - 4x^5y - x^7\}$.

OTIMIZAÇÃO DO ALGORITMO

Enquanto que os métodos de Azevedo-Zariski e de Abhyankar-Moh, dêem expressões explícitas, a priori, dos elementos de uma Base Standard Mínima de \mathcal{O} , o algoritmo que apresentamos, calcula, eventualmente, vários S -processos mínimos que são redundantes ou desnecessários.

Quando $\text{car}(K) \neq v_0$, mostraremos abaixo, como nosso algoritmo pode ser otimizado, evitando cálculos de S -processos dispensáveis.

Inicialmente, seja $h \in K[[t]]$ uma série da forma

$$h = a_1 t^{b_1 c_1} + (c_1) + a_2 t^{b_2 c_2} + (c_2) + \cdots + a_k t^{b_k c_k} + (c_k),$$

com $a_i \in K^*$, $0 < c_{i+1} < c_i$ para todo $i \geq 1$, $c_j \mid c_i$ para $i \leq j$ e onde a expressão $a_i t^{b_i c_i} + (c_i)$ representa uma soma de termos cujos expoentes são divisíveis por c_i , mas não por c_{i-1} .

Note que o primeiro termo em h^p onde p é um inteiro positivo, cujo expoente é divisível por c_k ($k > 1$) é dado por

$$(*) \quad p a_1^{p-1} a_k t^{(p-1)b_1 c_1 + b_k c_k}.$$

Recordemos alguns fatos acerca do semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, de um ramo C . Tais fatos podem ser encontrados, por exemplo, em [Z2] ou em [An].

A seqüência $e_0 > e_1 > \cdots > e_g = 1$, definida no início desta subseção, em termos da seqüência característica $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_g$, pode também, ser obtida do seguinte modo:

$$e_0 = v_0,$$

$$e_i = \text{MDC}(e_{i-1}, v_i).$$

Uma vez que $\text{car}(K) \neq v_0$, podemos considerar que C seja dada em termos de uma parametrização de Puiseux da forma

$$C : \begin{cases} x = t^{\beta_0} \\ y = t^{\beta_1} + (e_1) + a_2 t^{\beta_2} + (e_2) + \cdots + a_g t^{\beta_g} + (e_g), \end{cases}$$

com $a_i \neq 0$, $\beta_0 = v_0 = n_0 n_1 \cdots n_g$ e $\beta_1 = v_1$. Além disto, temos que

$$v_{i+1} > n_i v_i \quad \text{e} \quad n_{i+1} v_{i+1} \in \langle v_0, \dots, v_i \rangle,$$

para todo $i = 0, \dots, g-1$.

Os semigrupos $\Gamma_i = \langle \frac{v_0}{e_i}, \dots, \frac{v_i}{e_i} \rangle$, onde $i = 0, \dots, g$, possuem condutor

$$\mu_i = \sum_{j=1}^i (n_j - 1) \frac{v_j}{e_i} - \frac{v_0}{e_i} + 1.$$

Como

$$\begin{aligned} n_i v_i &= (n_i - 1)v_i + v_i > \sum_{j=1}^i (n_j - 1)v_j + v_1 \geq \\ &\geq e_i \left(\sum_{j=1}^i (n_j - 1) \frac{v_j}{e_i} + \frac{v_0}{e_i} + 1 \right) > e_i \mu_i, \end{aligned}$$

temos que todo inteiro múltiplo de e_i , maior que $n_i v_i$, pertence à $e_i \Gamma_i$.

Além disso, a seqüência característica $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_g$, se relaciona com os elementos do sistema mínimo de geradores do semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ de C através da equação

$$v_{i+1} = \sum_{j=1}^i (n_j - 1)v_j + \beta_{i+1} = n_i v_i - \beta_i + \beta_{i+1}.$$

Proposição 2.1 *Seja C um ramo dado por uma parametrização de Puiseux*

$$C : \begin{cases} x = a_0 t^{\beta_0} \\ y = a_1 t^{\beta_1} + (e_1) + a_2 t^{\beta_2} + (e_2) + \dots + a_g t^{\beta_g} + (e_g). \end{cases}$$

Uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} é $\{h_0, h_1, \dots, h_g\}$, com $h_0 = x, h_1 = y$ e h_{i+1} obtido por uma redução final, módulo $\{h_0, h_1, \dots, h_i\}$, do S -processo

$$\frac{1}{n_i a_i^{n_i-1}} h_i^{n_i} - \frac{a_i}{n_i \prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\alpha_j}} \prod_{j=0}^{i-1} h_j^{\alpha_j},$$

para todo $i = 1, \dots, g-1$ e $\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j v_j = n_i v_i$.

Além disso,

$$h_{i+1} = \sum_{j=i+1}^g a_j t^{\gamma_i + \beta_j} + (e_j),$$

com $\gamma_i = \sum_{l=1}^i (n_l - 1)v_l$.

Dem.: Procedemos por indução sobre i .

Para $i = 1$, tome $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_0 v_0 = n_1 v_1$. Assim, $x^{\alpha_0} = a_0^{\alpha_0} t^{n_1 v_1}$ e

$$\begin{aligned} y^{n_1} &= a_1^{n_1} t^{n_1 v_1} + (e_1) + n_1 a_1^{n_1-1} a_2 t^{(n_1-1)v_1 + \beta_2} + (e_2) + \dots \\ &\quad \dots + n_1 a_1^{n_1-1} a_g t^{(n_1-1)v_1 + \beta_g} + (e_g). \end{aligned}$$

Temos, deste modo, o S -processo

$$\frac{1}{n_1 a_1^{n_1-1}} y^{n_1} - \frac{a_1}{n_1 a_0^{\alpha_0}} x^{\alpha_0} = (e_1) + a_2 t^{(n_1-1)v_1+\beta_2} + (e_2) + \dots + a_g t^{(n_1-1)v_1+\beta_g} + (e_g).$$

Uma vez que, na expressão acima, os expoentes divisíveis por e_1 , são maiores do que $n_1 v_1$, sempre podemos obter um elemento da forma $x^\alpha y^\beta$ que possui tal ordem.

Note que em $x^\alpha y^\beta$, onde $\alpha v_0 + \beta v_1 > n_1 v_1$, o menor expoente de t não divisível por e_k ($k > 1$) é por (*), $\alpha v_0 + (\beta - 1)v_1 + \beta_k$, que em vista da desigualdade anterior nos dá

$$\alpha v_0 + (\beta - 1)v_1 + \beta_k > (n_1 - 1)v_1 + \beta_k.$$

Ou seja, ao efetuarmos a redução do S -processo por produtos $x^\alpha y^\beta$ como acima, podemos sempre eliminar os termos com expoente divisível por e_1 , sem alterar os termos da forma $a_k t^{(n_1-1)v_1+\beta_k}$, conseqüentemente, a redução final do S -processo em questão, módulo $\{h_0, h_1\}$ é da forma

$$h_2 = a_2 t^{(n_1-1)v_1+\beta_2} + (e_2) + \dots + a_g t^{(n_1-1)v_1+\beta_g} + (e_g),$$

cuja ordem é $(n_1 - 1)v_1 + \beta_2 = v_2$, provando assim a proposição para $i = 1$.

Vamos supor o resultado válido para todo $1 \leq j \leq i < g - 1$, isto é,

$$h_j = \sum_{k=j}^g a_k t^{\sum_{l=1}^{j-1} (n_l-1)v_l+\beta_k} + (e_k),$$

cuja ordem é $\sum_{l=1}^{j-1} (n_l - 1)v_l + \beta_j = v_j$.

O termo líder de $\frac{1}{n_i a_i^{n_i-1}} h_i^{n_i}$ é

$$\frac{1}{n_i a_i^{n_i-1}} a_i^{n_i} t^{n_i v_i} = \frac{a_i}{n_i} t^{n_i v_i},$$

e por (*), o seu termo de menor ordem, não divisível por e_k ($k > i$) é

$$\frac{1}{n_i a_i^{n_i-1}} n_i a_i^{n_i-1} a_k t^{(n_i-1)v_i+\sum_{l=1}^{i-1} (n_l-1)v_l+\beta_k} = a_k t^{\sum_{l=1}^i (n_l-1)v_l+\beta_k}.$$

Sejam α_j , com $j = 0, \dots, i - 1$, tais que $n_i v_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j v_j$.

Então o termo líder de $\frac{a_i}{n_i \prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\alpha_j}} \prod_{j=0}^{i-1} h_j^{\alpha_j}$ é o produto dos termos líderes de cada $h_j^{\alpha_j}$, ou seja,

$$\frac{a_i}{n_i \prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\alpha_j}} \prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\alpha_j} t^{\alpha_j v_j} = \frac{a_i}{n_i} t^{n_i v_i}.$$

O termo em t , de menor ordem no produto $\prod_{j=0}^{i-1} h_j^{\alpha_j}$, cujo expoente não é divisível por e_k , é obtido tomando o termo de menor ordem não divisível por e_k em um fator e os termos líderes dos demais. Assim, por (*) sua ordem será

$$\begin{aligned} \sum_{j=0, j \neq l}^{i-1} \alpha_j v_j + (\alpha_l - 1)v_l + \sum_{j=1}^{l-1} (n_j - 1)v_j + \beta_k &= \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j v_j - v_l + \sum_{j=1}^{l-1} (n_j - 1)v_j + \beta_k = \\ &= n_i v_i - \beta_l + \beta_k > n_i v_i - \beta_i + \beta_k = \sum_{j=1}^i (n_j - 1)v_j + \beta_k. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{1}{n_i a_i^{n_i - 1}} h_i^{n_i} - \frac{a_i}{n_i \prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\alpha_j}} \prod_{j=0}^{i-1} h_j^{\alpha_j}$$

é de fato um S -processo e o termo de menor expoente não divisível por e_k ($k > i$) é o respectivo termo proveniente de $\frac{1}{n_i a_i^{n_i - 1}} h_i^{n_i}$, ou seja, o S -processo acima é da forma

$$(e_i) + \sum_{j=i+1}^g a_j t^{\sum_{l=1}^i (n_l - 1)v_l + \beta_j} + (e_j).$$

Uma vez que na série acima, os expoentes divisíveis por e_i são superiores a $n_i v_i$, podemos obter elementos da forma $\prod_{j=0}^i h_j^{\gamma_j}$ que possuem tais ordens. Novamente por (*), o menor expoente divisível por e_k ($k > i$) nesses produtos, é da forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=0, j \neq l}^i \gamma_j v_j + (\gamma_l - 1)v_l + \sum_{j=1}^{l-1} (n_j - 1)v_j + \beta_k &> n_i v_i - \beta_l + \beta_k \geq \\ &\geq n_i v_i - \beta_i + \beta_k = \sum_{j=1}^i (n_j - 1)v_j + \beta_k. \end{aligned}$$

Assim, as reduções não alteram o termo de menor ordem, no S -processo, que é divisível por e_k ($k > i$).

Portanto, a redução final é da forma

$$h_{i+1} = \sum_{j=i+1}^g a_j t^{\sum_{l=1}^i (n_l - 1)v_l + \beta_j} + (e_j),$$

cuja ordem é $\sum_{l=1}^i (n_l - 1)v_l + \beta_{i+1} = v_{i+1}$. ■

2.2 O Módulo de Diferenciais de uma Curva

No que segue, K é um corpo algebricamente fechado com $\text{car}(K) = 0$.

Seja C uma curva algebróide irredutível sobre K , dada por f_1, \dots, f_r com $f_i \in \mathcal{M}_{\underline{X}}^* \subset K[[X_1, \dots, X_n]]$, \mathcal{O} o anel local de C e $\overline{\mathcal{O}}$ seu fecho integral. Como vimos na seção anterior, podemos considerar \mathcal{O} como uma subálgebra de $K[[t]]$, por meio do K -homomorfismo de álgebras φ definido em (2.1).

Considere a K -derivação usual d , definida em um monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ por

$$d(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i-1} \cdots x_n^{\alpha_n} dx_i$$

e estendendo por linearidade.

Definimos o \mathcal{O} -módulo de diferenciais da curva C , como sendo

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \mathcal{O}dx_1 + \cdots + \mathcal{O}dx_n.$$

Observação 2.3 1. Note que em \mathcal{O} , temos

$$f_1 = \cdots = f_r = 0$$

assim,

$$\sum_{i=1}^n f_{1x_i} dx_i = \cdots = \sum_{i=1}^n f_{rx_i} dx_i = 0.$$

2. O \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ não é necessariamente livre de torção.

De fato, seja C a curva dada por $f(X, Y) = Y^{v_0} - X^{v_1}$ com $\min\{v_0, v_1\} > 1$ e $\Omega = v_0 x dy - v_1 y dx \neq 0$.

Temos assim, que

$$\begin{aligned} y^{v_0-1}\Omega &= v_0 x y^{v_0-1} dy - v_1 y^{v_0} dx = \\ &= v_0 x y^{v_0-1} dy - v_1 x^{v_1} dx = \\ &= x(v_0 y^{v_0-1} dy - v_1^{v_1-1} dx) = \\ &= x(f_Y dy - f_X dx) = 0. \end{aligned}$$

Denotaremos o \mathcal{O} -submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ por T . Veremos adiante que tal submódulo reserva propriedades importantes a respeito da curva C .

Denotemos $x'_i = p'_i(t) = \frac{dp_i(t)}{dt}$ e consideremos a aplicação

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}d\mathcal{O} & \longrightarrow & K[[t]] \\ \sum_{i=1}^n g_i dx_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \varphi(g) x'_i \end{array} \quad (2.2)$$

onde $g \in \mathcal{O}$ e φ é o monomorfismo de K -álgebras definido em (2.1).

Se identificarmos \mathcal{O} com $\varphi(\mathcal{O})$, então a aplicação acima é um homomorfismo de \mathcal{O} -módulos. Além disso, $\text{Ker}(\psi) = T$, ou seja,

$$\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{T} \cong \text{Im}(\psi).$$

Uma vez que nossa teoria de Base Standard para Módulos foi desenvolvida para módulos livres de torção em $K[[X]]$, utilizaremos para efeito computacional o $\varphi(\mathcal{O})$ -módulo $\text{Im}(\psi)$ em $K[[t]]$.

Seja $\Omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus T$, definimos a *ordem* de Ω como $v(\Omega) = v(\psi(\Omega))$, onde v é a valorização discreta de $\overline{\mathcal{O}} (= K[[t]])$.

A proposição abaixo, garante que o \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, mais exatamente o $\varphi(\mathcal{O})$ -módulo $\text{Im}(\psi)$, possui Base Standard de \mathcal{O} -módulos.

Proposição 2.2 *Seja $A \subseteq K[[X]]$ uma subálgebra. Todo A -submódulo M de $K[[X]]$ é finitamente gerado.*

Dem.: Se $\Gamma = \{\text{ord}_X(a); a \in A\}$ e $\Xi = \{\text{ord}_X(m); m \in M\}$, então a proposição é equivalente a dizer que Ξ é finitamente gerado sobre Γ .

Pela Observação 1.4 sabemos que o semigrupo Γ é finitamente gerado, ou seja, $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$. Seja $e = \text{MDC}(v_0, v_1, \dots, v_g)$, assim $\langle \frac{v_0}{e}, \frac{v_1}{e}, \dots, \frac{v_g}{e} \rangle$ possui condutor, ou seja, existe μ tal que, para todo $\nu \geq \mu$ temos que $e\nu \in \Gamma$.

Considere $\Xi^* = \Xi \setminus \{0\}$ e defina

$$\lambda_0 = \min\{\Xi^*\}$$

$$\lambda_1 = \min\{\Xi^* \setminus \{\lambda_0 + \Gamma\}\}$$

$$\lambda_2 = \min\{\Xi^* \setminus \cup_{j=0}^1 \{\lambda_j + \Gamma\}\}$$

$$\lambda_{i+1} = \min\{\Xi^* \setminus \cup_{j=0}^i \{\lambda_j + \Gamma\}\}$$

Agora basta observar que existe i , tal que $\Xi^* = \cup_{j=0}^i \{\lambda_j + \Gamma\}$. Suponha que a seqüência acima seja infinita, assim, existem infinitos λ_i que são congruentes entre si módulo e . Em particular, existe j suficientemente grande, de modo que $\lambda_i - \lambda_j \geq e\mu$ e $\lambda_i \equiv \lambda_j \pmod{e}$, mas desta forma $\lambda_j = \lambda_i + \nu$ com $\nu \geq \mu$, o que implica $\lambda_j \in \{\lambda_i + \Gamma\}$ que é um absurdo. ■

Definição 2.3 Dizemos que uma diferencial $\omega \in \mathcal{Od}\mathcal{O}$ é exata, se existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $\omega = dg$. Caso contrário, dizemos que ω é uma diferencial não exata (DNE).

O K -espaço vetorial constituído das diferenciais exatas será denotado por $d\mathcal{O}$.

Seja Γ o semigrupo de valores associado à C e μ seu condutor. Se $\omega \in \mathcal{Od}\mathcal{O}$ é uma diferencial exata, então $v(\omega) + 1 \in \Gamma$. Por outro lado, se $v(\omega) + 1 \notin \Gamma$, ou seja, $v(\omega) + 1$ é uma lacuna de Γ , certamente ω é DNE. Além disso, se $v(\omega) \geq \mu - 1$, então ω é uma diferencial exata.

Desse modo, ao invés de considerar Ξ , como na proposição anterior, utilizaremos $\Lambda = \{v(\omega) + 1; \omega \in \mathcal{Od}\mathcal{O}\}$. Veja que $\Gamma \subseteq \Lambda$ e portanto, para todo inteiro $l \geq \mu$, temos que $l \in \Lambda$.

Definição 2.4 Seja Λ como acima. O maior inteiro l tal que $l \notin \Lambda$ é chamado de lacuna limitante de Λ .

Note que $l \notin \Gamma$ e $l \leq \mu - 1$.

Podemos melhorar o algoritmo para obter uma Base Standard para módulos no caso específico de $\mathcal{Od}\mathcal{O}$, levando-se em consideração alguns fatos.

Inicialmente observe que os S -processos mínimos de um par $(g, g) \in G \times G$ com $G \subseteq K[[X]]$, apesar de não serem nulos, como já observamos, sempre se reduzem a zero, assim são triviais e não necessitam ser computados.

Seja C é dada por

$$\begin{cases} x_1 & = & t^{\nu_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & p_n(t). \end{cases}$$

Podemos iniciar o algoritmo para calcular uma Base Standard para o \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ com o conjunto de geradores $\{dx_1, \dots, dx_n\}$. No entanto, se $F = \{h_i; i = 0, \dots, g\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , então $dh_i \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ para todo $i = 0, \dots, g$ e $\{dh_1, \dots, dh_g\}$ é também um conjunto de geradores para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, podemos assim, iniciar o algoritmo com este conjunto, evitando assim, que efetuemos cálculos desnecessários.

Além dessas economias no algoritmo do Teorema 1.5, podemos usar o conceito de lacuna limitante para eliminar alguns S -processos irrelevantes. De fato, se temos $\Lambda_i = \{v(F^\alpha \omega) + 1; \omega \in G_i \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^{\#F}\}$ em um passo i do algoritmo do Teorema 1.5 e l_i é sua lacuna limitante, então obviamente $l \leq l_i$. Como todo S -processo mínimo de altura maior ou igual a l_i possui uma redução final zero, módulo (G_i, F) , podemos excluir tais S -processos mínimos do conjunto S .

Temos assim, como corolário do Teorema 1.5 e das considerações acima, o seguinte algoritmo para calcular uma Base Standard para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, a partir de uma Base Standard Mínima F de \mathcal{O} .

Algoritmo 2.2

DADO: F ;
 DEFINA: $G_0 := \{ \}$;
 $G := \{dh; h \in F\}$;
 ENQUANTO $G \neq G_0$ FAÇA
 $\Lambda := \{v(F^\alpha \omega) + 1; \omega \in G \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^{\#F}\}$;
 $l :=$ lacuna limitante de Λ ;
 $S := \{s; s \text{ é } S\text{-processo mínimo não trivial de } G \text{ com}$
 $v(ht(s)) < l, \text{ não computado no passo anterior}\}$;
 $R := \{r; s \xrightarrow{G_F^+} r \text{ e } r \neq 0\}$;
 $G_0 := G$;
 $G := G \cup R$;
 SAÍDA: G, Λ, l .

Observação 2.4 1. No algoritmo acima, são computadas apenas DNE. As DNE pertencentes a uma Base Standard Mínima de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ serão chamadas de diferenciais não exatas mínimas, ou simplesmente DNEM.

2. Como mencionamos no início desta seção, o \mathcal{O} -submódulo de torção T de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, representa um importante objeto para o estudo de uma curva

algebróide irredutível C . Em particular, quando C é uma interseção completa, Berger, em [Ber], mostra que o comprimento do submódulo de torção $l(T)$ pode ser calculado por

$$l(T) = \mu - \#\!(\Lambda \setminus \Gamma),$$

ou equivalentemente

$$l(T) = \frac{\mu}{2} + \#\!(\mathbb{N} \setminus \Lambda),$$

onde μ é o condutor do semigrupo Γ associado à C .

3. Do mesmo modo que no algoritmo para Base Standard de álgebras, é conveniente estabelecer uma maneira de efetuar o processo de redução. Podemos, por exemplo, ordenar os elementos do conjunto G segundo suas ordens, ou pela ordem com que forem computados se dois ou mais deles tiverem mesma ordem, e se for possível reduzir um elemento de $K[[t]]$ por $F^\alpha g$ e $F^\beta h$, escolhemos efetuar a redução por $F^\alpha g$ se $v(g) < v(h)$ ou se F^α for a escolha, segundo a maneira fixada para a redução como álgebras, quando $v(g) = v(h)$.

Definição 2.5 Considerando as mesmas notações anteriores, chamamos os elementos de $\Lambda \setminus \Gamma$ de lacunas especiais de C .

Exemplo 2.4 1. Seja

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{10} + t^{13} \\ z = t^{12} + t^{15}. \end{cases}$$

Pelo item 3) do Exemplo 2.1, temos que $F = \{x = t^8, y = t^{10} + t^{13}, z = t^{12} + t^{15}, u = t^{23} + t^{26}, w = 2t^{27} + t^{30}\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} e $\Gamma = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$ é o semigrupo de valores de C , cujo condutor é $\mu = 30$.

Note que Γ não é simétrico, assim C não é Gorenstein, conseqüentemente não é uma interseção completa.

Apliquemos o algoritmo anterior para $G = \{dx, dy, dz, du, dw\}$.

Temos que $l = \mu - 1 = 29$ é a lacuna limitante nesse passo e o conjunto dos S -processos mínimos de G a serem considerados é

$$S := \{4xdy - 5ydx, 4ydy - 5zdx, 6ydy - 5xdz, 2xdz - 3zdx, \\ 5ydz - 6zdy, 2zdz - 3x^2dx, 2x^2dz - 3y^2dx\}.$$

Calculando as reduções finais módulo (G, F) , temos:

$$4xdy - 5ydx = \Omega_1 \Rightarrow \psi(\Omega_1) = 12t^{20}$$

$$5ydz - 6zdy = \Omega_2 \Rightarrow \psi(\Omega_2) = -3t^{24} - 3t^{27}.$$

Como $v(\Omega_1) + 1 = 21$, $v(\Omega_2) + 1 = 25$ e $v(x\Omega_1) + 1 = 29$ vemos que a lacuna limitante passa a ser $l = 19$, o que permite descartar os demais S -processos.

Uma simples análise mostra que não há S -processos mínimos a serem considerados no próximo passo, assim o algoritmo finaliza com a Base Standard Mínima de \mathcal{O} -módulos

$$G = \{dx, dy, dz, du, dw, \Omega_1, \Omega_2\}$$

para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

2. Considere

$$C : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^8 + 2t^9 \\ z = t^{10} + t^{11}. \end{cases}$$

Pelo Exemplo 2.3, temos que $\Gamma = \langle 6, 8, 10, 17, 19 \rangle$ é o semigrupo de valores de C , $\mu = 22$ é seu condutor e $F = \{x, y, z, w, u\}$, com $w = xz - y^2 = -3t^{17} - 4t^{18}$ e $u = y \star z - x^3 = 3t^{19} + 2t^{20}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} .

Aplicando o algoritmo anterior para $G = \{dx, dy, dz, dw, du\}$ e usando que $l = \mu - 1 = 21$ é a lacuna limitante, temos que os S -processos a serem analisados no primeiro passo são:

$$S = \{3xdy - 4ydx, 3ydy - 4x^2dx, 4xdz - 5ydy,$$

$$3xdz - 5zdx, 3zdy - 4x^2dx, 4ydz - 5zdy, \\ 3ydz - 5x^2dx, 3zdz - 5xydx, 4zdz - 5x^2dy\}.$$

Como

$$3xdy - 4ydx = \Omega \Rightarrow \psi(\Omega) = 6t^{14},$$

temos que $v(\Omega) + 1 = 15$ e $v(x\Omega) + 1 = 21$, assim a lacuna limitante pode ser considerada como $l = 13$, indicando assim, que os demais S -processos se reduzem a zero e que não há S -processos que mereçam análise no próximo passo, o que finaliza o algoritmo.

Apesar de Γ não ser de interseção completa, a curva C o é, como observamos no Exemplo 2.3.

Portanto,

$$l(T) = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma) = 22 - \#\{15, 21\} = 20.$$

3. Considere

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + t^{13}. \end{cases}$$

Usando a Proposição 2.1, temos que $F = \{x, y, z\}$ com $z = y^2 - x^3 = 2t^{25} + t^{26}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , $\Gamma = \langle 8, 12, 25 \rangle$ é o semigrupo associado à C e $\mu = 80$.

Aplicando o algoritmo anterior para $G = \{dx, dy, dz\}$, temos:

Passo 1:

A lacuna limitante nesse passo é $l = 79$ e os S -processos mínimos a serem considerados são:

$$S := \{3ydx - 2xdy, 8ydy - 12x^2dx, 8xdz - 25zdx,$$

$$12ydz - 25zdy, 25x^2zdx - 8y^2dz, 25yzdy - 12x^3dz\}.$$

Calculando a redução final dos elementos de S módulo (G, F) , temos:

- $3ydx - 2xdy = \Omega_1 \Rightarrow \psi(\Omega_1) = -2t^{20}$.
- $8ydy - 12x^2dx \xrightarrow{-4dz} 0$.
- $8xdz - 25zdx = \Omega_2 \Rightarrow \psi(\Omega_2) = 8t^{33}$.

- $12ydz - 25zdy = \Omega_3 \Rightarrow \psi(\Omega_3) = -38t^{37} - 13t^{38}$.
- $25x^2zdx - 8y^2dz \xrightarrow{\frac{202}{25}zdz} \Omega_4 \Rightarrow \psi(\Omega_4) = \frac{204}{25}t^{50} + \frac{52}{25}t^{51}$.
- $25yzdy - 12x^3dz \xrightarrow{-\frac{619}{50}zdz} \frac{3}{2}\Omega_4 \Rightarrow \psi(\frac{3}{2}\Omega_4) = \frac{306}{25}t^{50} + \frac{78}{25}t^{51}$.

Passo 2:

Uma vez que $v(z\Omega_2) + 1 = 59$, $v(z\Omega_3) + 1 = 63$, $v(xz\Omega_1) + 1 = 67$, $v(z^2\Omega_1) + 1 = 71$ e $v(xz^2\Omega_1) + 1 = 79$, a lacuna limitante passa a ser $l = 55$ e $G := \{dx, dy, dz, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4\}$.

Os S -processos mínimos de G que não foram analisados no Passo 1 e cuja altura é menor que t^{55} , são:

$$S = \{zdx + 8y\Omega_1, xdz + 25y\Omega_1, zdy + 12x^2\Omega_1, ydz + 25x^2\Omega_1, \\ yzdx + 8x^3\Omega_1, xzdy + 12y^2\Omega_1, 2z\Omega_1 + y\Omega_2, 4x\Omega_3 - 38z\Omega_1, \\ 19y\Omega_2 + 4x\Omega_3, 4y\Omega_3 + 19x^2\Omega_2\}.$$

Efetuada a redução final módulo (G, F) , obtemos

- $zdx + 8y\Omega_1 \xrightarrow{\Omega_2} 0$,
- $xdz + 25y\Omega_1 \xrightarrow{3\Omega_2} 0$,
- $zdy + 12x^2\Omega_1 \xrightarrow{\Omega_3} 0$,
- $ydz + 25x^2\Omega_1 \xrightarrow{2\Omega_3} 0$,
- $yzdx + 8x^3\Omega_1 \xrightarrow{6z\Omega_1} \Omega_5 \Rightarrow \psi(\Omega_5) = -4t^{46}$,
- $xzdy + 12y^2\Omega_1 \xrightarrow{-\frac{5}{2}z\Omega_1} \frac{3}{2}\Omega_5 \Rightarrow \psi(\frac{3}{2}\Omega_5) = -6t^{46}$.

Temos que $v(z\Omega_1) + 1 = 46$, $v(\Omega_5) + 1 = 47$, $v(xz\Omega_1) + 1 = 54$ e $v(x\Omega_5) + 1 = 55$ assim, a lacuna limitante no próximo passo será $l = 43$, conseqüentemente, podemos dispensar a análise dos demais S -processos e passamos ao próximo passo.

Passo 3:

Temos $G := \{dx, dy, dz, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\}$. Como neste passo devemos calcular os S -processos que envolvem Ω_5 e $v(\Omega_5) + 1$ supera a lacuna limitante o algoritmo finaliza. A saber, G é uma Base Standard Mínima para $\text{Od}\mathcal{O}$.

Como C é uma curva algebróide irredutível plana, portanto de interseção completa, temos que

$$\begin{aligned} l(T) &= \mu - \#\Lambda \setminus \Gamma = \\ &= 80 - \#\{21, 29, 34, 38, 42, 46, 47, 51, 54, 55, 59, 63, 67, 71, 79\} = \\ &= 80 - 15 = 65. \end{aligned}$$

O exemplo anterior foi tratado por Azevedo, com outras técnicas mais rudimentares, em sua tese [Az] pag. 79. No entanto, a existência de uma DNE com ordem igual a de Ω_4 não foi detectada, deixando o exemplo incompleto.

Definição 2.6 Duas curvas algebróides irredutíveis equisingulares são equidiferenciáveis, se elas possuem o mesmo conjunto $\Lambda = \{v(\Omega) + 1; \Omega \in \mathcal{O}_d\mathcal{O}\}$.

Veremos no próximo capítulo que o conjunto Λ , juntamente com Γ , são muito importantes para o estudo das curvas algebróides irredutíveis.

Apesar de $\Gamma \subseteq \Lambda$, é falso afirmar que curvas algebróides irredutíveis que possuem mesmo conjunto Λ são equidiferenciáveis, pois podemos ter curvas que não são equisingulares e no entanto, possuem mesmo conjunto Λ , como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.5 Sejam as curvas dadas pelas parametrizações:

$$C_1 : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{14} + t^{17} \\ z = t^{39} \end{cases} \quad e \quad C_2 : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{14} + t^{33} \\ z = t^{23}. \end{cases}$$

Aplicando o Algoritmo 2.1 obtemos os semigrupos

$$\Gamma_1 = \langle 6, 14, 39 \rangle \quad e \quad \Gamma_2 = \langle 6, 14, 23 \rangle.$$

A aplicação do Algoritmo 2.2 indica que uma Base Standard Mínima para os módulos de diferenciais das curvas acima é $G_1 = G_2 = \{dx, dy, dz, \Omega\}$, onde

$$\Omega = xdy - \frac{14}{6}ydx = \begin{cases} 3t^{22} \text{ para } C_1 \\ 19t^{38} \text{ para } C_2. \end{cases}$$

Desse modo, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \{0, 6, 12, 14, 18, 20, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 32, 34, \dots\}$, embora $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$.

2.2.1 Curvas de Interseção Completa

No restante desta seção, C é uma curva algebróide irredutível de interseção completa, ou seja, C é dada por um conjunto de equações $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathcal{M}_X^* \subset K[[X_1, \dots, X_n]]$.

Seja $v(X_1) = v_0 = \text{mult}(C)$. Em \mathcal{O} , temos que $\sum_{j=1}^n f_{i x_j} dx_j = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, ou equivalentemente,

$$M_1 \cdot \begin{pmatrix} dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{1x_1} \\ \vdots \\ f_{n-1x_1} \end{pmatrix} \cdot dx_1,$$

onde

$$M_1 = \begin{pmatrix} f_{1x_2} & \cdots & f_{1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1x_2} & \cdots & f_{n-1x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Carbone, em [Car] pag. 376, mostra que $|M_1| = \det(M_1) \in \mathcal{O}^*$ e $|M_i| = \det(M_i) \in \mathcal{O}^*$, onde

$$M_i = \begin{pmatrix} f_{1x_2} & \cdots & f_{1x_{i-1}} & -f_{1x_1} & f_{1x_{i+1}} & \cdots & f_{1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1x_2} & \cdots & f_{n-1x_{i-1}} & -f_{n-1x_1} & f_{n-1x_{i+1}} & \cdots & f_{n-1x_n} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

para todo $i = 2, \dots, n$.

Desse modo, em $\mathcal{O}d\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, onde \mathcal{K} é o corpo de frações de \mathcal{O} , temos

$$dx_i = \frac{|M_i|}{|M_1|} dx_1 \quad (2.5)$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Observação 2.5 Herzog e Kunz, em [HK], mostram que para uma curva de interseção completa C tem-se

$$v(|M_1|) = \mu + v_0 - 1,$$

onde μ é o condutor do semigrupo associado à C e v_0 é a multiplicidade da curva.

Assim, denotando por $x'_i = \psi(dx_i)$ para $i = 1, \dots, n$, temos

$$v\left(\frac{|M_i|}{x'_i}\right) = \mu.$$

No caso de curvas planas, isto foi mostrado por Azevedo, em [Az] Prop. 5 pag. 17, e por Zariski, em [Z2] pag. 11.

Utilizando a relação (2.5), que $v(x'_1) = v_0 - 1$ e que

$$v\left(\frac{f}{g}\right) = \dim_K \frac{K[[X]]}{\langle f_1, \dots, f_{n-1}, f \rangle} - \dim_K \frac{K[[X]]}{\langle f_1, \dots, f_{n-1}, g \rangle}$$

para hipersuperfícies $f, g \in K[[X]]$, podemos aplicar o algoritmo para obter uma Base Standard de \mathcal{O} -módulos para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, na verdade para $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$, mesmo quando a curva C for dada por meio de equações $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathcal{M}_X^* \subset K[[X]]$.

Exemplo 2.6 Seja C a curva algebróide irredutível plana dada por

$$f(X, Y) = Y^3 + X^5Y + X^7.$$

Uma vez que $\dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, X \rangle} = 3$ e $\dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, Y \rangle} = 7$, temos que $B = \{X, Y\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , $\Gamma = \langle 3, 7 \rangle$ é o semigrupo associado à C e $\mu = 12$ é seu condutor.

Como C é plana e portanto de interseção completa, temos que

$$|M_1| = f_y \quad \text{e} \quad |M_2| = -f_x.$$

Vamos aplicar o algoritmo para obter uma Base Standard de $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$. Inicialmente temos $G = \{dx, dy\}$ e a lacuna limitante é $l = \mu - 1 = 11$.

O único S -processo mínimo a ser considerado é da forma $S = xdy - a_1ydx$.

Usando que $dy = -\frac{f_x}{f_y}dx$, temos que

$$S = \left(-x\frac{f_x}{f_y} - a_1y\right)dx = (-xf_x - a_1yf_y)\frac{dx}{f_y}.$$

Como $v(g) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = \text{ord}_X(R_Y(f, g))$ para $g \in K[[X, Y]]$, podemos determinar o valor de a_1 de modo que S , seja de fato, um S -processo, ou seja, $v(S) > v(xdy) = v(ydx) = 9$.

Uma vez que

$$R_Y(f, -Xf_X - a_1Yf_Y) = (3a_1 - 7)^3X^{21} + (a_1 - 2)(2a_1 - 5)^2X^{22},$$

a única escolha para a_1 de modo a tornar S um S -processo é $a_1 = \frac{7}{3}$, i.e., $S = xdy - \frac{7}{3}ydx$ e dessa forma

$$v(S) = \text{ord}_X \left(R_Y \left(f, -Xf_X - \frac{7}{3}Yf_Y \right) \right) + v \left(\frac{dx}{f_Y} \right) = 22 - 12 = 10.$$

Assim temos, $\Omega = xdy - \frac{7}{3}ydx$ com $v(\Omega) + 1 = 11$.

Uma vez que no próximo passo a lacuna limitante é $l = 8$, vemos que não existem S -processos a serem considerados. Portanto, o algoritmo finaliza com a Base Standard Mínima $G = \{dx, dy, \Omega\}$ para $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$.

Além disso, como C é de interseção completa, temos que

$$l(T) = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma) = 12 - 1 = 11.$$

Definição 2.7 Seja C uma curva algebróide irredutível dada por $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathcal{M}_X^* \subset K[[X_1, \dots, X_n]]$ e $|M_i|$ para $i = 1, \dots, n$ como definidos em (2.3) e (2.4).

O ideal jacobiano de C é o ideal \mathcal{J} de \mathcal{O} gerado por $|M_i|$ para $i = 1, \dots, n$, i.e.,

$$\mathcal{J} = \langle |M_1|, \dots, |M_n| \rangle \mathcal{O}.$$

A codimensão de \mathcal{J} em \mathcal{O} é chamada de número de Tjurina de C , ou seja,

$$\tau := \dim_K \frac{K[[X_1, \dots, X_n]]}{\langle f_1, \dots, f_{n-1}, |M_1|, \dots, |M_n| \rangle} = \dim_K \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{J}}.$$

Pela Observação 2.5, temos que a multiplicidade $e(\mathcal{J})$ do ideal \mathcal{J} , ou seja, a menor ordem de um elemento não nulo de \mathcal{J} , é

$$e(\mathcal{J}) = \mu + v_0 - 1,$$

onde v_0 é multiplicidade de C e μ é o condutor do semigrupo associado à C .

Sejam φ e ψ as aplicações, definidas em (2.1) e (2.2), dadas respectivamente por

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \mathcal{O} & \longrightarrow & K[[t]] \\ & g & \longmapsto & g(p_1(t), \dots, p_n(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi : & \mathcal{O}d\mathcal{O} & \longrightarrow & K[[t]] \\ & \sum_{i=1}^n g_i dx_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \varphi(g_i) x_i' \end{array}$$

onde $g, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}$, $x_i = p_i(t)$ para $i = 1, \dots, n$ é uma parametrização para C com $x_1 = t^{v_0}$ onde $v_0 = \text{mult}(C)$ e $x'_i = \frac{dp_i(t)}{dt}$.

Uma vez que \mathcal{J} e $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ são \mathcal{O} -módulos gerados por $\{|M_1|, \dots, |M_n|\}$ e $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ respectivamente, temos que $\varphi(\mathcal{J})$ e $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$ são $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos gerados por $\{\varphi(|M_1|), \dots, \varphi(|M_n|)\}$, respectivamente por $\{x'_1, \dots, x'_n\}$.

Considere o epimorfismo de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos

$$\begin{aligned} \phi: \varphi(\mathcal{J}) &\longrightarrow \psi(\mathcal{O}d\mathcal{O}) \\ \varphi(|M_i|) &\longmapsto x'_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Lema 2.1 *O epimorfismo ϕ está bem definido e é um isomorfismo de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos.*

Dem.: Mostremos que ϕ está bem definido.

Seja $\sum_{i=1}^n \varphi(g_i)\varphi(|M_i|) = 0$ com $g_i \in \mathcal{O}$. Uma vez que em $\mathcal{O}d\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ temos (2.5), i.e.,

$$dx_i = \frac{|M_i|}{|M_1|} dx_1,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Em $K((t))$ temos

$$\varphi(|M_i|) = \varphi(|M_1|) \frac{x'_i}{x'_1},$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Desse modo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \varphi(g_i)\varphi(|M_i|) = \\ &= \varphi(g_1)\varphi(|M_1|) + \sum_{i=2}^n \varphi(g_i)\varphi(|M_1|) \frac{x'_i}{x'_1} = \\ &= \frac{\varphi(|M_1|)}{x'_1} \sum_{i=1}^n \varphi(g_i)x'_i. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^n \varphi(g_i)x'_i = 0$, mostrando que ϕ está bem definido.

De modo análogo, mostra-se que ϕ é injetor. ■

O isomorfismo ϕ possui interessantes propriedades. Por exemplo, a proposição abaixo mostra que podemos, por meio de ϕ , relacionar uma Base Standard Mínima de $\varphi(\mathcal{J})$ com uma Base Standard Mínima de $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$. Além disso, ϕ preserva a ordenação dada pela valorização discreta v de $\overline{\mathcal{O}} = K[[t]]$.

Proposição 2.3 *Seja ϕ o isomorfismo de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos definido em (2.6). Temos que:*

1. $v(g) = v(\phi(g)) + \mu$, para todo $g \in \varphi(\mathcal{J})$.
2. Se $G = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ é uma Base Standard Mínima de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos para $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$, então $\phi^{-1}(G)$ é uma Base Standard Mínima de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos para $\varphi(\mathcal{J})$.

Dem.: Uma vez que

$$dx_i = \frac{|M_i|}{|M_1|} dx_1,$$

para todo $i = 1, \dots, n$ em $\mathcal{O}d\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, um elemento $g \in \varphi(\mathcal{J})$ pode ser escrito como

$$g = \sum_{i=1}^n h_i \varphi(|M_i|) = \frac{\varphi(|M_1|)}{x_1'} \sum_{i=1}^n h_i x_i',$$

onde $h_i \in \varphi(\mathcal{O})$ para $i = 1, \dots, n$.

Assim, pela Observação 2.5 temos

$$v(g) = v\left(\sum_{i=1}^n h_i \varphi(|M_i|)\right) = v\left(\sum_{i=1}^n h_i x_i'\right) + \mu = v(\phi(g)) + \mu.$$

Sejam F uma Base Standard Mínima de álgebras para $\varphi(\mathcal{O})$ e G uma Base Standard Mínima de $\varphi(\mathcal{O})$ -módulos para $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$. Estabelecida uma maneira de efetuar a redução por F e por (G, F) , temos que cada elemento de $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$ tem uma representação única segundo essa maneira fixada.

Tomando um S -processo, como $\varphi(\mathcal{O})$ -módulo, de um par de elementos $(\phi^{-1}(\omega_1), \phi^{-1}(\omega_2)) \in \phi^{-1}(G) \times \phi^{-1}(G)$, digamos $S = F^\alpha \phi^{-1}(\omega_1) - aF^\beta \phi^{-1}(\omega_2)$, vemos que S possui uma redução final zero módulo $(\phi^{-1}(G), F)$.

De fato, escrevendo $S = \phi^{-1}(F^\alpha \omega_1 - aF^\beta \omega_2)$ e usando o fato de que G é uma Base Standard de módulos para $\psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$, pelo processo de redução, temos que

$$F^\alpha \omega_1 - aF^\beta \omega_2 = \sum_{i=1}^{\#G} \left(\sum_{\gamma \in \Upsilon_i} b_\gamma F^\gamma \right) \omega_i,$$

com $b_\gamma \in K$ e $\Upsilon \subset \mathbb{N}^{\#F}$. Mas isso induz uma redução final de S , módulo $(\phi^{-1}(G), F)$, de forma a podermos escrever

$$S = \sum_{i=1}^{\#G} \left(\sum_{\gamma \in \Upsilon_i} b_\gamma F^\gamma \right) \phi^{-1}(\omega_i).$$

Portanto, $\phi^{-1}(G)$ é uma Base Standard de módulos para \mathcal{J} e como as ordens dos elementos de $\phi^{-1}(G)$ são todas distintas, pois G é Base Standard Mínima, segue que a Base Standard $\phi^{-1}(G)$ também o é. ■

Observe que se $h \in K[[t]]$ é tal que $v(h) \geq \mu - 1$, então $h \in \psi(\mathcal{O}d\mathcal{O})$, conseqüentemente, qualquer elemento de $\varphi(\mathcal{O})$ com ordem maior ou igual a $2\mu - 1$ pertence a $\varphi(\mathcal{J})$.

A proposição anterior nos dá como corolário um resultado obtido por Zariski, em [Z1], no caso de curvas planas e generalizado por Pinkham, em [Pi] Chap. III 10.4 para curvas Gorenstein.

Corolário 2.1 *Se C é uma curva algebróide irredutível de interseção completa, então $\tau = l(T)$, onde $T \subset \mathcal{O}d\mathcal{O}$ é o \mathcal{O} -submódulo de torção.*

Dem.: Da Definição 2.7 de τ , temos que $\tau = \#(\Gamma - v(\mathcal{J}))$, basta assim, calcularmos quantos elementos de Γ menores que $2\mu - 1$ não pertencem a $v(\mathcal{J})$. Uma vez que temos $\frac{\mu}{2}$ elementos até μ que estão em $\Gamma \setminus v(\mathcal{J})$, pois o menor elemento não nulo de $v(\mathcal{J})$ é $\mu + v_0 - 1$, resta calcular quantos elementos $\gamma \in \Gamma \setminus v(\mathcal{J})$ são da forma $\mu \leq \gamma < 2\mu - 1$.

Pelo teorema anterior, para cada elemento $\lambda \in \Lambda$ obtemos um elemento em $v(\mathcal{J})$ da forma $\lambda + \mu$. Como até μ , temos $\frac{\mu}{2} + \#(\Lambda \setminus \Gamma)$ tais elementos, no intervalo $[\mu, 2\mu - 1[$ teremos $\mu - \left(\frac{\mu}{2} + \#(\Lambda \setminus \Gamma)\right)$ elementos em $\Gamma \setminus v(\mathcal{J})$. Portanto,

$$\tau = \#(\Gamma - v(\mathcal{J})) = \frac{\mu}{2} + \mu - \left(\frac{\mu}{2} + \#(\Lambda \setminus \Gamma)\right) = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma) = l(T),$$

onde a última igualdade é garantida pela Observação 2.4. ■

Exemplo 2.7 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + t^{13}, \end{cases}$$

cuja equação cartesiana é dada por $f(X, Y) = (Y^2 - X^3)^4 - 8X^8Y(Y^2 + X^3) - X^{13}$.

De acordo com o item 3 do Exemplo 2.4, \mathcal{O} tem uma Base Standard Mínima dada por $F = \{x, y, z\}$ com $z = y^2 - x^3$ e $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ possui uma Base Standard Mínima dada por $G = \{dx, dy, dz, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\}$, onde:

$$\Omega_1 = 3ydx - 2xdy,$$

$$\Omega_2 = 8xdz - 25zdx,$$

$$\Omega_3 = 12ydz - 25zdy,$$

$$\Omega_4 = 25x^2zdx - 8y^2dz + \frac{202}{25}zdz,$$

$$\Omega_5 = yzdx + 8x^3\Omega_1 - 6z\Omega_1.$$

Assim, uma Base Standard Mínima para \mathcal{J} é dada por

$$\varphi^{-1}(G) = \{f_Y, f_X, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},$$

onde:

$$f_0 = 2yf_X + 3x^2f_Y,$$

$$f_1 = 3yf_Y + 2xf_X,$$

$$f_2 = 8xf_0 + 25zf_Y,$$

$$f_3 = 12yf_0 - 25zf_X,$$

$$f_4 = -25x^2zf_Y - 8y^2f_0 + \frac{202}{25}zf_0,$$

$$f_5 = -yzf_Y + 8x^3f_1 - 6zf_1.$$

Capítulo 3

Equivalência de Curvas

Neste capítulo, passaremos a uma das questões mais importantes da teoria, que permanece aberta, a classificação das curvas algebróides irredutíveis.

Na primeira seção, introduzimos a relação de equivalência de curvas algebróides irredutíveis, bem como invariantes aritméticos com respeito a essa relação. Alguns desses invariantes não dispunham de métodos sistemáticos para serem obtidos, conduzindo a alguns erros ou a resultados incompletos. No entanto, com as técnicas apresentadas nos capítulos anteriores, tais invariantes podem ser obtidos por algoritmos que são implementáveis.

A segunda seção se restringe ao caso das curvas algebróides irredutíveis planas, as quais denominamos simplesmente de *ramos*. Introduzimos o diagrama de lacunas especiais de um ramo e obtemos alguns refinamentos para o algoritmo que permite obter uma Base Standard para \mathcal{O}_d . As notações usadas nessa seção são as mesmas adotadas na subseção 2.1.1.

3.1 Invariantes Aritméticos

O problema central da teoria é a classificação dos ramos, módulo a relação de equivalência abaixo.

Definição 3.1 *Se C_1 e C_2 são dois ramos dados pelas séries formais f_1 , respectivamente f_2 de $K[[X, Y]]$, então dizemos que C_1 é equivalente a C_2 , escrevendo neste caso $C_1 \sim C_2$, se existem uma unidade u e um automorfismo Φ de $K[[X, Y]]$, tais que*

$$\Phi(f) = ug.$$

É fato bem conhecido que dois ramos são equivalentes se, e somente se, seus anéis locais são isomorfos. Na verdade, se definirmos a equivalência de curvas algebróides irredutíveis, não necessariamente planas, pelo isomorfismo de seus anéis locais, então quando $K = \mathbb{C}$ e as curvas são analíticas, a definição anterior coincide com a equivalência analítica.

No restante desta seção, estaremos interessados em estudar invariantes aritméticos com respeito à relação de equivalência de curvas, acima definida.

É imediato verificar que a multiplicidade de um ramo é um tal invariante aritmético.

Uma vez que, para toda unidade u e todo automorfismo Φ de $K[[X, Y]]$ temos que

$$\dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle u^{-1}\Phi(f), u^{-1}\Phi(g) \rangle},$$

e que $u^{-1}\Phi(g)$ percorre $K[[X, Y]]$ quando g percorre $K[[X, Y]]$, vemos que o semigrupo Γ de C é um invariante aritmético da relação de equivalência de ramos.

Como já vimos anteriormente na Definição 2.2, duas curvas C_1 e C_2 são equisingulares ($C_1 \equiv C_2$) se, e somente se, os semigrupos de C_1 e C_2 coincidem. Quando $K = \mathbb{C}$ e no caso de ramos analíticos, a relação de equisingularidade corresponde a equivalência topológica.

Lembre-se que as ordens dos elementos de uma Base Standard Mínima do anel local \mathcal{O} nos dão os elementos do sistema mínimo de geradores do semigrupo Γ associado a uma curva algebróide irredutível C , não necessariamente plana. Portanto, dadas duas curvas C_1 e C_2 podemos decidir se estas são equisingulares aplicando o Algoritmo 2.1.

Na verdade, o semigrupo de valores e o conjunto de lacunas especiais de uma curva algebróide irredutível são invariantes aritméticos, como mostra a proposição abaixo.

Proposição 3.1 *O semigrupo de valores Γ , bem como o conjunto $\Lambda = \{v(\omega) + 1; \omega \in \mathcal{O} \setminus \{0\}\}$ são invariantes com respeito a relação de equivalência de curvas algebróides irredutíveis.*

Dem.: Note que, quando nos restringimos ao caso de ramos a invariância do semigrupo de valores já foi constatada.

Sejam C_1 e C_2 em $K[[X_1, \dots, X_n]]$, duas curvas algebróides irredutíveis equivalentes, ou seja, seus anéis locais \mathcal{O}_1 , respectivamente \mathcal{O}_2 são isomorfos.

O isomorfismo entre os anéis locais se estende de maneira única aos corpos de frações \mathcal{K}_1 de \mathcal{O}_1 , respectivamente \mathcal{K}_2 de \mathcal{O}_2 .

Sejam $\overline{\mathcal{O}}_1 = K[[t_1]]$ e $\overline{\mathcal{O}}_2 = K[[t_2]]$ os fechos inteiros de \mathcal{O}_1 em \mathcal{K}_1 , respectivamente de \mathcal{O}_2 em \mathcal{K}_2 . A extensão do isomorfismo dos anéis locais aos corpos de frações, permite definir um K -isomorfismo

$$\Phi : \overline{\mathcal{O}}_2 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_1.$$

Como Φ preserva ordens, temos

$$\Phi(t_2) = ut_1,$$

onde u é uma unidade de $K[[t_1]]$.

Segue deste modo, que $\Gamma_2 = v(\mathcal{O}_2) = v(\Phi(\mathcal{O}_2)) = v(\mathcal{O}_1) = \Gamma_1$, ou seja, o semigrupo de valores é um invariante aritmético com respeito a equivalência de curvas. Mais ainda, Φ preserva Base Standard Mínima de anéis locais, i.e., se $B = \{y_0, \dots, y_g\}$ é uma Base Standard Mínima de \mathcal{O}_2 , então $\Phi(B)$ é uma Base Standard Mínima de \mathcal{O}_1 .

Sejam os homomorfismos φ_j e ψ_j definidos em (2.1), respectivamente em (2.2) para $j = 1, 2$. Se $\Omega_2 = \sum_{i=0}^g g_i dy_i \in \mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2$ com $g_i \in \mathcal{O}_2$, então

$$\psi_2(\Omega_2) = \sum_{i=0}^g \varphi_2(g_i) \varphi_2(y_i)' \in \overline{\mathcal{O}}_2.$$

Como

$$\Phi(\psi_2(\Omega_2)) = \sum_{i=0}^g \Phi(\varphi_2(g_i)) \Phi(\varphi_2(y_i)')$$

e $\Phi(\varphi_2(g_i)) = \varphi_1(h_i)$ com $h_i \in \mathcal{O}_1$, temos que

$$\Phi(\psi(\Omega_2)) = \sum_{i=0}^g \varphi_1(h_i) \Phi(\varphi_2(y_i)').$$

Agora observe que

$$\Phi(\varphi_2(y_i))' = (u + u't_1) \Phi(\varphi_2(y_i)'),$$

i.e.,

$$\Phi(\varphi_2(y_i)') = w_1 \varphi_1(z_i)',$$

onde w_1 é uma unidade em $K[[t_1]]$ que não depende de y_i e $\Phi(B) = \{z_0, \dots, z_g\}$.

Desse modo,

$$\Phi(\psi_2(\Omega_2)) = \left(\sum_{i=0}^g \varphi_1(h_i) \varphi_1(z_i)' \right) w_1 = \psi_1(\Omega_1) w_1,$$

com $\Omega_1 \in \mathcal{O}_1 d\mathcal{O}_1$.

Assim, temos

$$v(\Omega_2) = v(\psi_2(\Omega_2)) = v(\Phi(\psi_2(\Omega_2))) = v(\psi_1(\Omega_1)) = v(\Omega_1),$$

ou seja, $\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1$.

De modo análogo, mostra-se que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ e portanto, $\Lambda_1 = \Lambda_2$. ■

Observação 3.1 *Note que pela proposição anterior temos que $\Phi(\varphi_2(\mathcal{O}_2)) = \varphi_1(\mathcal{O}_1)$, no entanto, $\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2)) \neq \psi_1(\mathcal{O}_1 d\mathcal{O}_1)$. Na verdade, temos*

$$\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2)) = \psi_1(\mathcal{O}_1 d\mathcal{O}_1) w_1,$$

com w_1 como descrito na demonstração da proposição acima.

De fato, temos que

$$\Phi(\psi_2(\Omega_2)) = \psi_1(\Omega_1) w_1 \quad \text{e} \quad \Phi^{-1}(\psi_1(\Omega_1)) = \psi_2(\Omega_2) w_2,$$

com $w_1 \in K[[t_1]]$ e $w_2 \in K[[t_2]]$ unidades que não dependem das diferenciais Ω_1 e Ω_2 , mas sim do K -isomorfismo Φ . Segue assim, que $\Phi(w_2) w_1 = 1$.

Como

$$\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2)) \subseteq \psi_1(\mathcal{O}_1 d\mathcal{O}_1) w_1 \subseteq \Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2)) \Phi(w_2) w_1,$$

temos que $\Phi(\psi_2(\mathcal{O}_2 d\mathcal{O}_2)) = \psi_1(\mathcal{O}_1 d\mathcal{O}_1) w_1$.

Lembremos que $\Gamma \subseteq \Lambda$, mas Λ não determina, em geral, o semigrupo Γ , veja Exemplo 2.5.

Resaltamos que os algoritmos apresentados para obter uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} e para o módulo de diferenciais $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, conseqüentemente para obter Γ e Λ , permitem que reconheçamos quando duas curvas algebróides irredutíveis são equisingulares e equidiferenciáveis. Assim, o estudo da equivalência de curvas pode ser reduzido ao conjunto das curvas que possuem os mesmos conjuntos Γ e Λ .

No caso de curvas algebróides irredutíveis que são interseção completa, mostramos no Corolário 2.1 que o número τ de Tjurina pode ser obtido por Λ e Γ , assim τ é também um invariante aritmético com respeito à equivalência de curvas algebróides irredutíveis.

3.2 Classificação de Curvas

Como já mencionamos anteriormente, um dos problemas centrais da teoria, até o momento não resolvido, é decidir quando dois ramos f_1 e f_2 são equivalentes. Obviamente esses ramos devem possuir o mesmo semigrupo de valores, i.e., devem pertencer a mesma classe de equisingularidade Γ .

O primeiro passo é encontrar formas normais para os ramos de uma mesma classe de equisingularidade para posteriormente obter critérios para decidir quando dois ramos na forma normal são equivalentes.

Dado um ramo, i.e., uma série irredutível $f \in K[[X, Y]]$ e μ o condutor do seu semigrupo de valores Γ , pelo Teorema da Função Implícita de Tougeron (Veja Prop. 2.3 de [Ru]), temos que f é equivalente ao seu truncamento g até a ordem 2μ , ou seja, $f - g \in \mathcal{M}_{X,Y}^{2\mu+1}$ onde $\mathcal{M}_{X,Y}$ é o ideal maximal de $K[[X, Y]]$.

Após mudanças de coordenadas, facilmente determinadas, que correspondem ao Teorema de Preparação de Weierstrass (Veja Prop. 3.3 de [Ru]), podemos considerar

$$g = Y^{v_0} + a_1(X)Y^{v_0-1} + \cdots + a_{v_0}(X),$$

com $a_i(X)$ polinômios tais que $\text{ord}_X a_i(X) > i$ para $1 \leq i \leq v_0$, $\text{deg}_X a_i(X) + v_0 - i \leq 2\mu$ e $v_0 \not\sim v_1$, onde $v_0 = \text{mult}(g)$ e $v_1 = I(g, Y)$.

Pelo Teorema de Newton-Puiseux (Veja Prop. 4.4 de [Ru]), existe uma parametrização de g da forma

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} b_i t^i. \end{cases}$$

O método de Newton-Puiseux para determinar estas parametrizações, apesar de construtivo, envolve, eventualmente, um número infinito de operações. Veremos mais adiante que um número finito de termos na série y , mais precisamente o seu truncamento até a ordem μ , determina uma curva equivalente a g e portanto, uma forma normal para a curva original f .

É fato conhecido que os expoentes característicos β_0, \dots, β_g , como definidos na Subseção 2.1.1, determinam e são determinados pelo semigrupo de valores Γ . Obtemos assim, um aberto de um espaço afim

$$K^{\mu-1-v_1} \setminus H,$$

com $H = \cup_{i=2}^g \{b_{\beta_i} = 0\}$, que contém pelo menos um representante de cada classe de equivalência de curvas na classe de equisingularidade dada por Γ .

É portanto necessário, saber reconhecer quando duas parametrizações de Puiseux, representam curvas equivalentes, isto equivale a estudar critérios de isomorfismos para subáneos de $K[[t]]$, do tipo $K[[t^{v_0}, t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t^i]]$, que denominamos áneis de Puiseux.

A proposição abaixo, estabelece critérios de isomorfismos para anéis de Puiseux quaisquer.

Proposição 3.2 *Sejam $\mathcal{A}_1 = K[[t_1^{v_{0,1}}, p_1(t_1), \dots, p_r(t_1)]] \subseteq K[[t_1]]$ e $\mathcal{A}_2 = K[[t_2^{v_{0,2}}, q_1(t_2), \dots, q_r(t_2)]] \subseteq K[[t_2]]$ anéis de Puiseux, onde $p_i(t_j) = t_j^{v_{i,j}} + \dots$, com $v_{0,j} < v_{i,j}$ e $v_{k,j} \notin \langle v_{0,j}, \dots, \widehat{v_{k,j}}, \dots, v_{r,j} \rangle$ para $j = 1, 2, i = 1, \dots, r$ e $k = 0, \dots, r$.*

As K -álgebras \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 são isomorfas se, e somente se,

1. $v_{k,1} = v_{k,2} =: v_k$ para todo $k = 0, \dots, r$.
2. *Existem $P_k \in \mathcal{A}_1$ para $k = 0, \dots, r, c \in K^*$, com $v(P_k) > v_k$, e um K -isomorfismo*

$$\Phi : K[[t_2]] \longrightarrow K[[t_1]]$$

tais que

$$\Phi(t_2) = ct_1 \left(1 + \frac{P_0}{t_1^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}}$$

e

$$\Phi(q_i) = c^{v_i} p_i + P_i,$$

para todo $i = 1, \dots, r$.

Dem.: Inicialmente note que as condições 1) e 2) indicam que $\Phi(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$ e que $\Phi^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_2$. Portanto, o K -isomorfismo Φ se restringe a um K -isomorfismo entre \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_1 .

Reciprocamente, como na Proposição 3.1, um K -isomorfismo entre os anéis de Puiseux \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , se estende a um K -isomorfismo Φ entre seus fechados integrais, que pela Observação 2.1 são $K[[t_1]]$, respectivamente $K[[t_2]]$. Como Φ preserva ordens, a condição 1) segue.

Sabemos que Φ é tal que $\Phi(t_2) = ut_1$, onde u é uma unidade de $K[[t_1]]$.

Como $\Phi(t_2^{v_0}) = \Phi(t_2)^{v_0} = u^{v_0} t_1^{v_0} \in \mathcal{A}_1$, podemos escrever $t_1^{v_0} u^{v_0} = c_1 (t_1^{v_0} + P_0)$ com $P_0 \in \mathcal{A}_1$ e $v(P_0) > v_0$. Temos assim que $u^{v_0} = c_1 \left(1 + \frac{P_0}{t_1^{v_0}} \right)$, i.e.,

$$u = c \left(1 + \frac{P_0}{t_1^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}},$$

onde $c = c_1^{\frac{1}{v_0}}$ é unicamente determinado.

De modo análogo, como $v_k \notin \langle v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_r \rangle$, para todo $k = 0, \dots, r$, temos que

$$\Phi(q_i(t_2)) = c^{v_i} p_i(t_1) + P_i,$$

com $P_i \in \mathcal{A}_1$ univocamente determinado e $v(P_i) > v_i$ para todo $i = 1, \dots, r$. ■

Dado um anel de Puiseux $\mathcal{A}_1 = K[[t_1^{v_0}, p_1(t_1), \dots, p_r(t_1)]]$, escolhidos $P_k \in \mathcal{A}_1$ para $k = 0, \dots, r$ e $c \in K^*$ satisfazendo as condições da proposição anterior, ou seja, $p_i(t_1) = t_1^{v_i} + \dots$ com $v_0 < v_i$ e $v_k \notin \langle v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_r \rangle$ para $i = 1, \dots, r$ e $k = 0, \dots, r$. Temos que \mathcal{A}_1 é K -isomorfo ao anel de Puiseux $\mathcal{A}_2 = K[[t_2^{v_0}, q_1(t_2), \dots, q_r(t_2)]]$, onde

$$t_2 = ct_1 \left(1 + \frac{P_0}{t_1^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}}$$

e

$$q_i = c^{v_i} p_i + P_i,$$

para todo $i = 1, \dots, r$.

Neste caso, dizemos que \mathcal{A}_2 é obtido de \mathcal{A}_1 por *mudanças de coordenadas*.

Retornemos ao estudo da equivalência de ramos, ou seja, aos anéis de Puiseux dados por $\mathcal{A} = K[[t^{v_0}, y]]$, onde $y = t^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t^i$ com $v_0 < v_1$ e $v_0 \nmid v_1$.

Exemplo 3.1 (HOMOTETIAS)

Mudanças de coordenadas do tipo

$$t_2 = ct_1$$

$$y_2 = c^{v_1} y_1,$$

com $c \in K^*$, são chamadas de homotetias.

Se $y_1 = t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t_1^i$, então

$$y_2 = c^{v_1} (t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i t_1^i) = (ct_1)^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i c^{v_1-i} (ct_1)^i = t_2^{v_1} + \sum_{i>v_1} b_i c^{v_1-i} t_2^i.$$

Veja que esse tipo de mudança não permite eliminar nenhum termo em y_2 . No entanto, podemos tornar o coeficiente de qualquer termo presente, igual a um, escolhendo $c = b_i^{\frac{1}{i-v_1}}$, onde b_i é o coeficiente do termo em questão.

Exemplo 3.2 Consideremos as mudanças de coordenadas do tipo

$$t_2 = \Phi(t_1) = t_1 \left(1 + \frac{p}{t_1^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}} \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 + q.$$

Queremos determinar $y_2(t_2) = y_1(\Phi^{-1}(t_2)) + q(\Phi^{-1}(t_2))$. Como $\Phi^{-1}(t_2) = t_2 + h(t_2)$, temos que $y_1(\Phi^{-1}(t_2)) = y_1(t_2) + H(\Phi(t_2))$, onde

$$H(\Phi(t_2)) = \sum_{i \geq v_1} b_i t_1^i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \binom{i}{j} \left(\frac{p}{t_1^{v_0}}\right)^j \right).$$

Desse modo, teremos

$$\begin{aligned} x_2 &= t_2^{v_0} \\ y_2 &= t_2^{v_1} + \sum_{i > v_1} b_i t_2^i + q - p \frac{dy_1}{dx_1} - \sum_{i \geq v_1} b_i t_1^i \left(\sum_{j=2}^{\infty} \binom{i}{j} \left(\frac{p}{t_1^{v_0}}\right)^j \right). \end{aligned}$$

Vemos que se

$$\frac{qdx_1 - pdy_1}{dx_1} - \sum_{i \geq v_1} b_i t_1^i \left(\sum_{j=2}^{\infty} \binom{i}{j} \left(\frac{p}{t_1^{v_0}}\right)^j \right) = dt_1^l + \boxed{\begin{array}{c} \text{termos de} \\ \text{ordem} \\ \text{superior} \end{array}},$$

então podemos substituir p e q por αp e αq de modo a obtermos $l = -b_1$. Assim, a mudança acima, elimina o termo de ordem l em $y_2(t_2)$, sem alterar os termos de ordem inferior.

Em particular, se $l \in \Gamma$, então podemos tomar $p = 0$ e $q \in \mathcal{O}$, com $v(q) = l$. Se $l \in \Gamma + v_1 - v_0$, então podemos tomar $q = 0$ e $p \in \mathcal{O}$, com $v(p) = l - v_1 + v_0$. Desta forma, podemos sempre eliminar os termos na parametrização de Puiseux de um ramo cuja ordem estão em $\Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$, sem que alteremos os termos de ordem inferior.

Toda mudança de coordenadas de um anel de Puiseux é composição de uma mudança do Exemplo 3.1 e uma mudança do Exemplo 3.2.

Deste ponto em diante, para facilitar nossos cálculos, estaremos considerando as parametrizações sem os termos que podemos eliminar como descrito acima.

Definição 3.2 O conjunto que parametriza todas as curvas com semigrupo Γ fixo, módulo a relação de equivalência de curvas, será chamado de classe de equisingularidade e denotado por M_Γ .

Note que pelo Exemplo 3.2, para efeito de classificação de ramos, basta considerarmos parametrizações de Puiseux truncadas no condutor μ do semigrupo Γ do ramo, isto justifica o fato mencionado no início desta seção.

Observação 3.2 *Vamos caracterizar as lacunas do semigrupo Γ maiores que $v(y) = v_1$, uma vez que dentre elas estão as potências na representação paramétrica que estaremos considerando.*

Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ o semigrupo de valores de uma curva irredutível plana e $(a_i)_{i=0, \dots, v_0-1}$ a seqüência de Apéry de Γ com relação à v_0 , ou seja,

$$a_0 = 0 \quad e \quad a_i = \min\{\Gamma \setminus \cup_{j=0}^{i-1} \{a_j + v_0 \mathbb{N}\}\},$$

para $i = 1, \dots, v_0 - 1$. A saber, temos que

$$\{a_0, a_1, \dots, a_{v_0-1}\} = \left\{ \sum_{i=1}^g s_i v_i; 0 \leq s_i \leq n_i \right\},$$

onde $n_i = \frac{\text{MDC}(v_0, \dots, v_{i-1})}{\text{MDC}(v_0, \dots, v_i)}$.

Um número natural l é uma lacuna de Γ maior que $a_1 = v_1$ se, e somente se, $l = a_i - jv_0$ para algum $i = 2, \dots, v_0 - 1$ e algum $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{a_i - v_1}{v_0} \right\rfloor$.

De fato, os inteiros da forma $a_i - jv_0$ com $j > 0$ são obviamente lacunas de Γ e a condição $a_i - jv_0 > v_1$ é equivalente a $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{a_i - v_1}{v_0} \right\rfloor$.

Seja

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} b_i t^i, \end{cases}$$

com $i \notin \Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$.

Ao aplicarmos o algoritmo para obter uma Base Standard Mínima para \mathcal{O}_d , partindo de uma parametrização de C , o S -processo de menor altura é $x dy - \frac{v_1}{v_0} y dx = \sum_{i > v_1} (i - v_1) b_i t^{i+v_0-1}$.

Se $b_i = 0$ para todo $i > v_1$, então

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1}, \end{cases}$$

com $\text{MDC}(v_0, v_1) = 1$, pois estamos assumindo que a parametrização de C é primitiva. Além disso, o algoritmo finaliza, nos levando a concluir que $\Lambda = \Gamma$ e $\tau = \mu$.

Se existe um $b_i \neq 0$; então pondo $\lambda = \min\{i; b_i \neq 0\}$, temos que $\Omega = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx$ é tal que $v(\Omega) + 1 = \lambda + v_0$. A diferencial Ω é não exata, pois $\lambda + v_0 \notin \Gamma$. De fato, $\lambda = kv_1 - jv_0$ com $j \geq 2$ ou $\lambda = \beta_2 = v_2 + v_1 - \frac{v_1v_0}{e_1}$, com $e_1 = \text{MDC}(v_0, v_1)$ e $\frac{v_1}{e_1} > 2$. Em ambos os casos, tem-se que $\lambda + v_0 \notin \Gamma$. Na verdade $\lambda + v_0$ é a menor ordem que uma DNE pode assumir. Assim, $\lambda + v_0 = \min\{l; l \in \Lambda \setminus \Gamma\}$, e portanto, λ é um invariante com relação a equivalência de curvas.

Pelo que observamos acima, uma curva tem τ máximo se, e somente se, ela é equivalente a curva

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1}. \end{cases}$$

Estes fatos foram mostrados por Zariski em [Z1].

A lacuna λ , definida acima, será chamada de *invariante de Zariski*.

Observação 3.3 1. O limitante superior para τ é o condutor μ do semi-grupo de valores Γ associado à C , um limitante inferior para τ é $\frac{\mu}{2} - \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + v_1 + v_0 - 3$. De fato, sabemos que $\tau = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma)$, onde $\Lambda = \{v(\omega) + 1; \omega \in \text{OdO}\}$. Vamos supor que $\Lambda \setminus \Gamma \neq \{\}$, pois caso contrário $\tau = \mu$, como vimos anteriormente. Seja $v(\omega) + 1 \in \Lambda \setminus \Gamma$, como o menor valor que $v(\omega) + 1$ pode assumir é $\lambda + v_0 > v_1 + v_0$, temos que $v(\omega) + 1 \in \{l \notin \Gamma; l > v_1 + v_0\}$.

Os elementos de Γ menores ou iguais a $v_1 + v_0$ são:

$$\{0, v_0, 2v_0, \dots, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor v_0, v_1, \left(\left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right) v_0, v_1 + v_0\},$$

ou seja, existem $v_1 + v_0 - \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor - 3$ lacunas menores que $v_1 + v_0$. Assim,

$$\frac{\mu}{2} + v_1 + v_0 - \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor - 3 \leq \tau \leq \mu.$$

Note ainda, que uma condição necessária para $\tau < \mu$ é que $v_0 > 2$.

2. Pela Observação 3.2, temos que uma Base Standard Mínima de OdO possui no máximo $v_0 - 2$ DNEM's. De fato, se ω_1 e ω_2 são DNEM's, com $v(\omega_1) + 1 \equiv a_i \pmod{v_0}$ e $v(\omega_2) + 1 \equiv a_i \pmod{v_0}$, então $v(\omega_1) - v(\omega_2) = kv_0$. Se $k \geq 0$, então $v(\omega_1) = v(x^k \omega_2)$, caso $k < 0$ temos $v(\omega_2) = v(x^{-k} \omega_1)$, assim uma das DNE não seria minimal. Como a menor

ordem que uma DNEM pode assumir é $\lambda + v_0 - 1 > v_1 + v_0 - 1 > a_1 = v_1$, devemos ter no máximo $v_0 - 2$ DNEM's. Note ainda que a DNE de menor ordem em um dado passo do algoritmo é minimal. De fato, tal DNE não se reduz módulo as diferenciais minimais obtidas nos passos anteriores e, nos próximos passos, todas as DNE terão ordem superior a esta. Desse modo, temos

| |
|--|
| número de passos \leq número de DNEM's $\leq v_0 - 2$ do algoritmo |
|--|

Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ o semigrupo associado a um ramo e $\sigma \in \mathbb{N}$ com $\sigma > \left\lceil \frac{\alpha_{v_0-1}-v_1}{v_0} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\alpha_i-v_1}{v_0} \right\rceil$. Como cada lacuna $l > v_1$ é expressa unicamente na forma $l = a_i - jv_0 = \sum_{k=1}^g s_k v_k - s_0 v_0$, $0 \leq s_k < n_k$, $0 < s_0 \leq \left\lceil \frac{\alpha_i-v_1}{v_0} \right\rceil < \sigma$, onde $n_k = \frac{\text{MDC}(v_0, \dots, v_{k-1})}{\text{MDC}(v_0, \dots, v_k)}$ e as lacunas de Γ que estão em Λ possuem essa propriedade, podemos representar os elementos de Λ em \mathbb{N}^{g+1} , através da aplicação

$$\varrho : \begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{N}^{g+1}. \\ \sum_{k=1}^g s_k v_k - s_0 v_0 & \mapsto & (\sigma - s_0, s_1, \dots, s_g) \end{array} \quad (3.1)$$

Utilizaremos constantemente a representação de um inteiro sob a forma $\sum_{k=1}^g s_k v_k - s_0 v_0$, com $0 \leq s_k < n_k$ e $s_0 \in \mathbb{Z}$ onde $n_i = \frac{\text{MDC}(v_0, \dots, v_{i-1})}{\text{MDC}(v_0, \dots, v_i)}$. Tal representação será chamada de *escrita única* ou *escrita privilegiada*.

Seja $\omega \in \text{Od}\mathcal{O}$ uma DNEM e considere $v(\omega) + 1 = \sum_{k=1}^g s_k v_k - s_0 v_0$ na escrita única. Se $F = \{f_0, \dots, f_g\}$ é uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} e $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$, tal que $s_i + \alpha_i < n_i$ e $s_0 - \alpha_0 > 0$, então $v(F^\alpha \omega)$ é ainda uma lacuna que está em $\Lambda \setminus \Gamma$ e portanto uma lacuna especial (cf. Definição 2.5). Veja que se $\Lambda \neq \Gamma$, então $\max\{\Lambda \setminus \Gamma\} = \mu - 1$.

Definição 3.3 *O diagrama em \mathbb{N}^{g+1} constituído dos pontos correspondentes as lacunas $v(\omega) + 1 = \sum_{i=1}^g s_i v_i - s_0 v_0$, $0 \leq s_i < n_i$, $0 < s_0 < \sigma$ onde ω é uma DNE, por meio da aplicação*

$$\sum_{i=1}^g s_i v_i - s_0 v_0 \xrightarrow{\varrho} (\sigma - s_0, s_1, \dots, s_g)$$

é chamado de diagrama de lacunas especiais de C .

Exemplo 3.3 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + t^{13}. \end{cases}$$

Pelo item 3 do Exemplo 2.4, sabemos que $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle 8, 12, 25 \rangle$,

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{21, 29, 34, 38, 42, 46, 47, 51, 54, 55, 59, 63, 67, 71, 79\}$$

e as lacunas correspondente às ordens de DNEM são $\{21, 34, 38, 47, 51\}$.

Temos

$$21 = 1v_2 + 1v_1 - 2v_0,$$

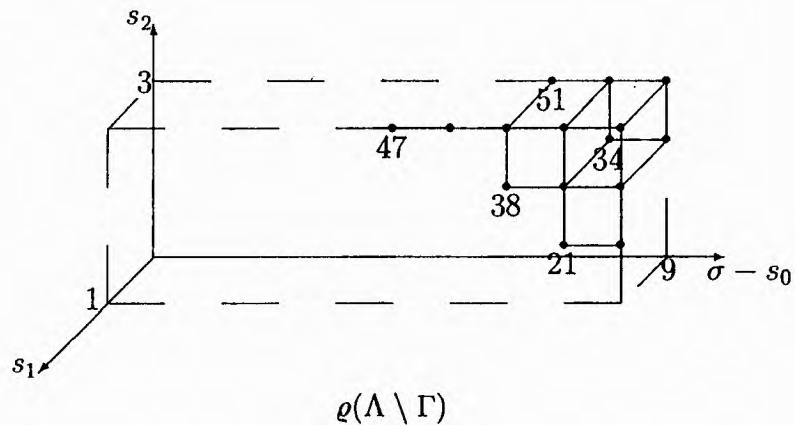
$$34 = 2v_2 + 0v_1 - 2v_0,$$

$$38 = 2v_2 + 1v_1 - 3v_0,$$

$$47 = 3v_2 + 1v_1 - 5v_0,$$

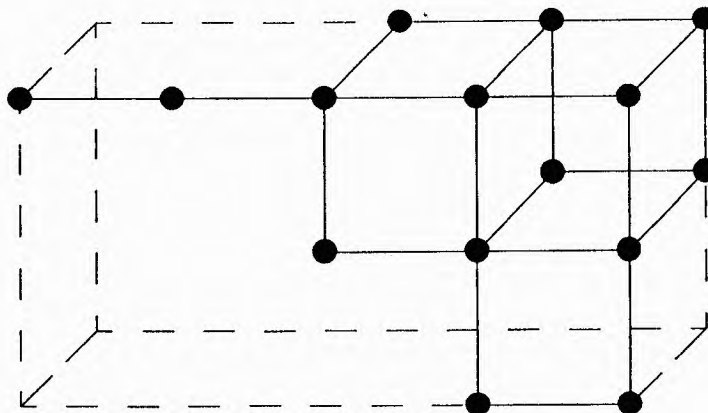
$$51 = 3v_2 + 0v_1 - 3v_0.$$

Tomando $\sigma = 10 > \frac{av_0 - 1 - v_1}{v_0} = \frac{75}{8}$, obtemos o seguinte diagrama de lacunas especiais para C :



Por simplicidade, representaremos apenas a região que contém os pontos do diagrama. Veja que basta fornecer a indicação de um ponto para que possamos nos orientar e determinar os demais.

Na figura abaixo, apresentamos apenas a região que contém os pontos de $\varrho(\Lambda \setminus \Gamma)$, onde o ponto frontal superior direito corresponde à $\mu - 1$.



Uma vez que $\Lambda \setminus \Gamma$ é um invariante com respeito à relação de equivalência de curvas algebróides irredutíveis planas, temos que o diagrama de lacunas especiais é também um invariante, uma vez que este é obtido de $\Lambda \setminus \Gamma$.

Observação 3.4 *O algoritmo para obter uma Base Standard Mínima para OdO apresentado no Capítulo 2, é eficaz no sentido de que pode ser aplicado para representações paramétricas com qualquer grau de generalidade, i.e., podemos aplicar o algoritmo para uma curva genérica, ou seja, para uma escolha arbitrária dos coeficientes e para uma curva específica. Isto permite, entre outras coisas, o estudo completo do invariante $\Lambda \setminus \Gamma$ para uma dada classe de equisingularidade. Como consequência, podemos determinar todos os possíveis números de Tjurina na classe de equisingularidade, bem como descrever todas as classes de equidiferenciabilidade.*

A determinação do número de Tjurina mínimo numa classe de equisingularidade e algumas variantes foi abordado em vários trabalhos (cf. [D2], [BGM], [Pe1], [Pe2] e [Z2]).

R. Peraire, em [Pe1], apresenta um algoritmo para obter o número de Tjurina mínimo para uma dada classe de equisingularidade. No entanto, tal algoritmo contrariamente ao nosso, não se aplica a uma curva específica, por se basear apenas na aritmética do semigrupo em questão.

Em [Pe2], a mesma autora determina o número de Tjurina mínimo para curvas numa classe de equisingularidade de gênero 1 com invariante λ de Zariski fixo.

Por outro lado, C. Delorme, em [D2] apresenta um algoritmo para determinar as lacunas especiais para curvas numa classe de equisingularidade de gênero 1, que não se estende para gênero superiores e é menos sistemático do que o nosso.

Na seqüência, apresentamos um exemplo, onde obtemos todos os possíveis conjuntos Λ para uma classe de equisingularidade M_Γ fixa, ou seja, determinamos todos os estratos $M_{\Gamma,\Lambda}$ do espaço M_Γ correspondentes às classes de equidiferenciabilidade definidas por Λ .

Note que, tal análise não poderia ser realizada com as técnicas até então disponíveis.

Exemplo 3.4 *Seja $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$. A seqüência característica das curvas algebróides irredutíveis planas com semigrupo associado Γ é $\beta_0 = v_0 = 6$, $\beta_1 = v_1 = 9$ e $\beta_2 = 10$.*

Uma vez que as lacunas de Γ maiores que $v_1 = 9$ são

$$\{10, 11, 13, 14, 16, 17, 20, 22, 23, 26, 29, 32, 35, 41\},$$

temos que $\lambda = \beta_2 = 10$.

Como já observamos, podemos considerar através de uma mudança de coordenadas, que o coeficiente do termo de expoente λ seja igual a 1 (cf. Exemplo 3.1). Além disso, como $22 = v_2 + v_1 - v_0$ e $41 = 2v_2 + v_1 - v_0$ temos que as curvas determinadas por M_Γ são dadas por:

$$C_a : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + a_1 t^{11} + a_2 t^{13} + a_3 t^{14} + a_4 t^{16} + a_5 t^{17} + a_6 t^{20} + \\ \quad + a_7 t^{23} + a_8 t^{26} + a_9 t^{29} + a_{10} t^{32} + a_{11} t^{35}, \end{cases}$$

onde $a = (a_1, \dots, a_{11}) \in K^{11}$. Aplicando a Proposição 2.1, obtemos uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} de C_a dada por $F = \{x, y, z\}$, onde

$$\begin{aligned} z = y^2 - x^3 = & 2t^{19} + (1 + 2a_1)t^{20} + 2a_2 t^{21} + (a_1^2 + 2a_2)t^{22} + \\ & + (2a_2 + 2a_3)t^{23} + (2a_1 a_2 + 2a_3)t^{24} + (2a_1 a_3 + 2a_4)t^{25} + \\ & + (a_2^2 + 2a_4 + 2a_5)t^{26} + (2a_2 a_3 + 2a_1 a_4 + 2a_5)t^{27} + \dots \end{aligned}$$

Apliquemos o Algoritmo 2.2 para obter uma Base Standard de módulos para \mathcal{O}_d .

O S -processo de menor altura, que neste caso coincide com sua redução final, é

$$\Omega_1 = xdy - \frac{3}{2}ydx = t^{15} + 2a_1t^{16} + 4a_2t^{18} + 5a_3t^{19} + 7a_4t^{21} + 8a_5t^{22} + \dots,$$

como $v(\Omega_1) + 1 = 16$, $v(x\Omega_1) + 1 = 22$, $v(z\Omega_1) + 1 = 35$ e $v(xz\Omega_1) + 1 = 41$, podemos considerar $l = 32$ como lacuna limitante. Dessa forma, os demais S -processos a serem analisados no primeiro passo, são:

$$2ydy - 3x^2dx \xrightarrow{-dz} 0$$

$$x dz - \frac{19}{6}z dx = (1 + 2a_1)t^{25} + 4a_1t^{26} + (3a_1^2 + 6a_2)t^{27} + (8a_2 + 8a_3)t^{28} + \\ + (10a_1a_2 + 10a_3)t^{29} + (12a_1a_3 + 12a_4)t^{30} + \\ + (7a_2^2 + 14a_4 + 14a_5)t^{31} + \dots$$

$$9ydz - 19zdy = (18a_1 - 29)t^{28} - (10 + 60a_1)t^{29} + (-31a_1^2 - 31a_1 + 54a_2)t^{30} + \\ + (-32a_1^2 - 64a_2 + 72a_3)t^{31} + \dots$$

Agora devemos analisar algumas possibilidades:

1. Se $a_1 \neq -\frac{1}{2}$, então $\Omega_2 = xdz - \frac{19}{6}zdx$.

Temos assim, que $v(\Omega_2) + 1 = 26$, $v(x\Omega_2) + 1 = 32$ e $l = 29$ passa a ser a lacuna limitante.

(a) Se $a_1 \neq \frac{29}{18}$, então $\Omega_3 = 9ydz - 19zdy$, $v(\Omega_3) + 1 = 29$ e a lacuna limitante pode ser considerada como $l = 23$. Uma rápida análise mostra que não teremos nenhum outro S -processo no próximo passo, o que indica o fim do algoritmo.

(b) Se $a_1 = \frac{29}{18}$, então no próximo passo os S -processos com altura inferior a $l = 29$, bem como suas reduções finais são:

$$2y\Omega_1 - \frac{1}{6}zdx \xrightarrow{-\Omega_2} 0,$$

$$38y\Omega_1 - xdz \xrightarrow{-18\Omega_2} 0,$$

$$38x^2\Omega_1 - ydz = -\frac{640}{3}t^{29} + \dots \quad \{dx, dy, dz, \Omega_1, \Omega_2\} + 0.$$

Assim, o algoritmo finaliza.

2. Se $a_1 = -\frac{1}{2}$, então $\Omega_2 = ydz - \frac{19}{9}zdy$, e $v(\Omega_2) + 1 = 29$.

Temos

$$\begin{aligned} xdz - \frac{19}{6}zdx \xrightarrow{-\frac{1}{3}x^2ydx} \xrightarrow{bzdy} \Omega_3 := & \left(8a_3 - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_2\right)t^{28} + \\ & + \left(\frac{5}{3}a_2 + \frac{55}{18} + 10a_3\right)t^{29} + \left(-6a_3 + \frac{11}{6}a_2 + \frac{341}{288} + 12a_4 - 6a_2^2\right)t^{30} + \\ & + \left(14a_5 - \frac{112}{9}a_2 - \frac{3}{4}a_3 - \frac{11}{9} - 6a_2a_3 + 14a_4 - \frac{43}{3}a_2^2\right)t^{31} + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{com } b = \frac{1}{18} \left(6a_2 + \frac{11}{4}\right).$$

No próximo passo do algoritmo, os S -processos a serem considerados e suas reduções finais são;

$$2y\Omega_1 - \frac{1}{6}zdx \xrightarrow{\frac{1}{3}x^2ydx} \xrightarrow{\frac{b_1}{18}zdy} \xrightarrow{-\Omega_3} 0, \text{ onde } b_1 = \left(6a_2 + \frac{11}{4}\right),$$

$$38y\Omega_1 - xdz \xrightarrow{6x^2ydx} \xrightarrow{-\frac{b_2}{18}zdy} \xrightarrow{-18\Omega_3} 0, \text{ onde } b_2 = \left(108a_2 + \frac{99}{2}\right),$$

$$38x^2\Omega_1 - ydz \xrightarrow{-2\Omega_2} 0,$$

$$-38\Omega_3 - \left(8a_3 - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_2\right)\Omega_2 \xrightarrow{-\frac{b_3}{8}x^4dx} \xrightarrow{-\frac{b_4}{12}xzdxdx} \Omega_4 := At^{31} + \dots,$$

onde

$$b_3 = 90a_2 - 540a_3 - 35,$$

$$b_4 = 156a_2^2 + 166a_3 + 139a_2 - 432a_2a_3 - 456a_4 - \frac{217}{16}e$$

$$A = 224a_2 + 14 - 532a_5 + 630a_2^2 - 532a_4 + 644a_2a_3 - 576a_2^2 + \frac{769}{2}a_2.$$

Observe ainda, que se $8a_3 - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_2 = 0$, então a redução do último S -processo corresponde, na verdade, a redução de $-38\Omega_3$.

Podemos ter dois casos:

(a) $A \neq 0$.

Nesse caso, $v(\Omega_4) + 1 = 32$ e podemos considerar $l = 26$ como a lacuna limitante, o que indica o fim do algoritmo.

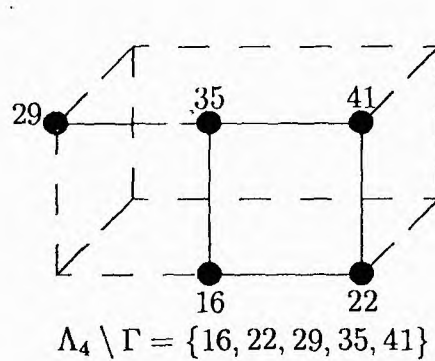
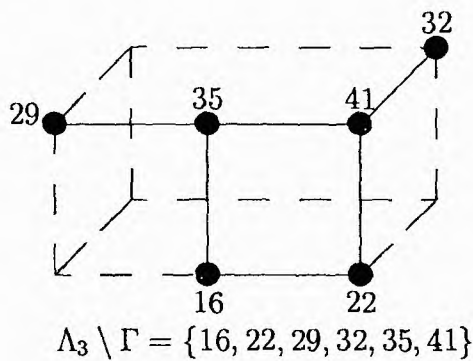
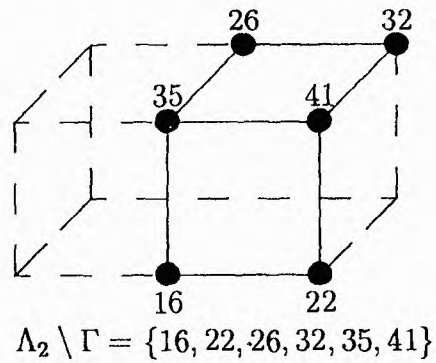
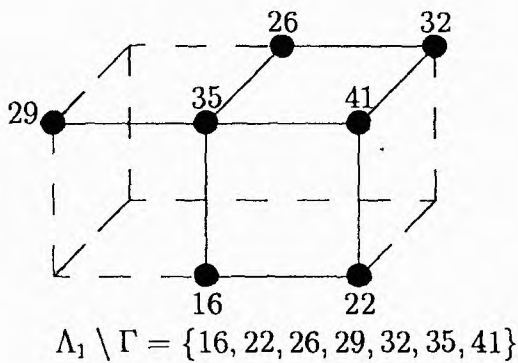
(b) $A = 0$.

Vemos que nessa situação não há S -processos a serem considerados cuja altura seja inferior a $l = 32$. Portanto, finalizamos o algoritmo.

Resumindo:

| | | | |
|--|------------|---|-------------|
| $a_1 \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\}$ | | $\Lambda_1 \setminus \Gamma = \{16, 22, 26, 29, 32, 35, 41\}$ | $\tau = 35$ |
| $a_1 = \frac{29}{18}$ | | $\Lambda_2 \setminus \Gamma = \{16, 22, 26, 32, 35, 41\}$ | $\tau = 36$ |
| $a_1 = -\frac{1}{2}$ | $A \neq 0$ | $\Lambda_3 \setminus \Gamma = \{16, 22, 29, 32, 35, 41\}$ | $\tau = 36$ |
| | $A = 0$ | $\Lambda_4 \setminus \Gamma = \{16, 22, 29, 35, 41\}$ | $\tau = 37$ |

Os possíveis diagramas de lacunas são:



Observação 3.5 *Azevedo em [Az], conjecturou que dado um semigrupo Γ , o ramo canônico associado à Γ , i.e.,*

$$C : \begin{cases} x = t^{\beta_0} \\ y = t^{\beta_1} + \sum_{i=2}^g t^{\beta_i}, \end{cases}$$

onde $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_g$ é a seqüência característica de Γ teria número de Tjurina máximo nesta classe de equisingularidade.

Heinrich, apresenta em [He], um contraexemplo a esta conjectura na classe de equisingularidade do exemplo anterior, usando um método distinto do algoritmo aqui apresentado.

O método que Heinrich usa para calcular o número de Tjurina de uma curva nesta classe de equisingularidade, recai no cálculo do posto de uma matriz 40×30 .

No caso do ramo canônico ele encontra o valor $\tau = 35$ e por tentativa e erro, acreditamos, determina a curva

$$C : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + 2t^{10} - 2t^{11}, \end{cases}$$

cujo número de Tjurina é $\tau = 36$, derrubando assim, a conjectura de Azevedo.

Refaçamos estes cálculos usando a nossa tabela apresentada no exemplo anterior.

Note que o ramo canônico

$$C_0 : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10}, \end{cases}$$

possui $a_1 = 0$, portanto, $\tau = 35$, i.e., o mínimo dentre os possíveis valores de τ nesta classe de equisingularidade.

Além disso, a curva C de Heinrich, mediante a mudança $t_1 = \frac{1}{2}t$ e $y_1 = (\frac{1}{2})^9 y$ é equivalente à curva

$$C_1 : \begin{cases} x_1 = t_1^6 \\ y_1 = t_1^9 + t_1^{10} - \frac{1}{2}t_1^{11}. \end{cases}$$

Esta curva possui $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $A = 14$, o que nos dá $\tau = 36$.

No entanto, C_1 também não atinge o valor máximo para τ .

Um exemplo de curva que atinge τ máximo é

$$C_M : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} - \frac{1}{2}t^{11} + \frac{1}{38}t^{17}. \end{cases}$$

A saber, $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $A = 0$, portanto $\tau = 37$.

Definição 3.4 Dizemos que uma diferencial $\Omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ pertence ao i -ésimo bloco se $v(\Omega) + 1 = \sum_{k=1}^i s_k v_k - s_0 v_0$, com $s_i \neq 0$.

Note que se Ω é uma DNE, então Ω é uma diferencial do i -ésimo bloco se, e somente se, o ponto do diagrama de lacunas correspondente à $v(\Omega) + 1$ é $(\sigma - s_0, s_1, \dots, s_i, 0, \dots, 0)$, com $s_i \neq 0$.

Podemos ordenar os pontos de $\varrho(\Lambda) \subset \mathbb{N}^{g+1}$, onde ϱ é a aplicação definida em (3.1), de modo a preservar a ordem natural dos elementos de $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, como mostra o lema abaixo.

Lema 3.1 *Sejam p e q elementos de Λ , $A = \varrho(p)$ e $B = \varrho(q)$. Denotando por π_A e por π_B os hiperplanos de \mathbb{Q}^{g+1} com vetor normal (v_0, v_1, \dots, v_g) que passam por A e B respectivamente, temos que $p < q$ se, e somente se, a interseção de π_A com qualquer um dos eixos X_i é menor que a interseção de π_B com este mesmo eixo.*

Dem.: As equações dos hiperplanos em \mathbb{Q}^{g+1} normais ao vetor (v_0, v_1, \dots, v_g) e que passam por $A = (\sigma - \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_g)$ e por $B = (\sigma - \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_g)$ são respectivamente:

$$\pi_A : (v_0, v_1, \dots, v_g) \cdot (X_0 - (\sigma - \alpha_0), X_1 - \alpha_1, \dots, X_g - \alpha_g) = 0$$

$$\sum_{i=0}^g v_i X_i = \sum_{i=1}^g \alpha_i v_i + (\sigma - \alpha_0) v_0.$$

$$\pi_B : (v_0, v_1, \dots, v_g) \cdot (X_0 - (\sigma - \delta_0), X_1 - \delta_1, \dots, X_g - \delta_g) = 0$$

$$\sum_{i=0}^g v_i X_i = \sum_{i=1}^g \delta_i v_i + (\sigma - \delta_0) v_0.$$

A interseção de π_A , respectivamente π_B , com o eixo X_i é

$$v_i^{-1} \left(\sum_{i=1}^g \alpha_i v_i + (\sigma - \alpha_0) v_0 \right),$$

respectivamente

$$v_i^{-1} \left(\sum_{i=1}^g \delta_i v_i + (\sigma - \delta_0) v_0 \right).$$

Desse modo,

$$\frac{\sum_{i=1}^g \alpha_i v_i + (\sigma - \alpha_0) v_0}{v_i} < \frac{\sum_{i=1}^g \delta_i v_i + (\sigma - \delta_0) v_0}{v_i} \Leftrightarrow p < q.$$

■

Observação 3.6 Se $\Omega_i \in \text{OdO}$ pertence ao i -ésimo bloco, $\Omega_j \in \text{OdO}$ pertence ao j -ésimo bloco e $i < j$, podemos comparar $P_i = v(\Omega_i) + 1$ com $P_j = v(\Omega_j) + 1$ analisando a interseção com algum eixo X_k onde $0 \leq k \leq j$ com os hiperplanos de \mathbb{Q}^{j+1} que são normais ao vetor (v_0, v_1, \dots, v_j) e que passam por $\varrho(P_i)$ e $\varrho(P_j)$.

Vamos analisar o algoritmo para obter uma Base Standard de $\psi(\text{OdO})$ restrito às diferenciais do primeiro bloco.

Obviamente o algoritmo inicia com $G = \{dx, dy\}$ e a lacuna limitante é $l = (n_1 - 1)v_1 - v_0$, uma vez que qualquer lacuna superior a l pertence a blocos superiores.

O único S -processo mínimo não trivial com altura inferior a l envolvendo dx e dy é $S = xdy - \frac{v_1}{v_0} ydx$.

Seja r uma redução final de S módulo $(G, \{x, y\})$. Se $r = 0$ ou $e_1 \nmid (v(r) + 1)$, então não temos DNEM no primeiro bloco.

Vamos supor que $\Omega_1 = r$ é uma DNEM do primeiro bloco. Para o próximo passo devemos determinar o novo valor para a lacuna limitante e o conjunto dos S -processos mínimos de $G = \{dx, dy, \Omega_1\}$.

Se $v(\Omega_1) + 1 = \alpha_1 v_1 - \delta_1 v_0$, então os S -processos a serem considerados são da forma

$$S_1 = x^{\delta_1+1} \Omega_1 - a_1 y^{\alpha_1} dx,$$

$$S_2 = x^{\delta_1} \Omega_1 - a_2 y^{\alpha_1-1} dy,$$

$$S_3 = y^{n_1-\alpha_1} \Omega_1 - a_3 x^{m_1-\delta_1-1} dx,$$

$$S_4 = y^{n_1-\alpha_1+1} \Omega_1 - a_4 x^{m_1-\delta_1} dy,$$

onde $m_1 = \frac{v_1}{e_1}$ e $n_1 = \frac{v_0}{e_1}$ com $e_1 = \text{MDC}(v_0, v_1)$.

Vamos interpretar os S -processos acima, usando a correspondência

$$\varrho: \begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{N}^{g+1} \\ \sum_{i=1}^g s_i v_i - s_0 v_0 & \mapsto & (\sigma - s_0, s_1, \dots, s_g) \end{array}$$

com $0 \leq s_i < n_i$ para $i = 1, \dots, g$ e $s_0 < \sigma$.

Como estamos nos restringindo apenas às diferenciais do primeiro bloco, podemos considerar $s_0 < m_1$.

Assim a correspondência acima, pode ser reescrita como

$$s_1 v_1 - s_0 v_0 \mapsto (m_1 - s_0, s_1),$$

com $0 \leq s_1 < n_1$ e $s_0 < m_1$.

Note que se não fixarmos a representação privilegiada (veja pag. 69) dos elementos de Λ que correspondem às diferenciais do primeiro bloco, i.e., $s_1 v_1 - s_0 v_0$ com $0 \leq s_1 < n_1$ e $s_0 < m_1$, então podemos ter, eventualmente, dois pontos em \mathbb{N}^2 representando o mesmo elemento de Λ . De fato,

$$s_1 v_1 - s_0 v_0 = 0 \Leftrightarrow s_1 m_1 = s_0 n_1,$$

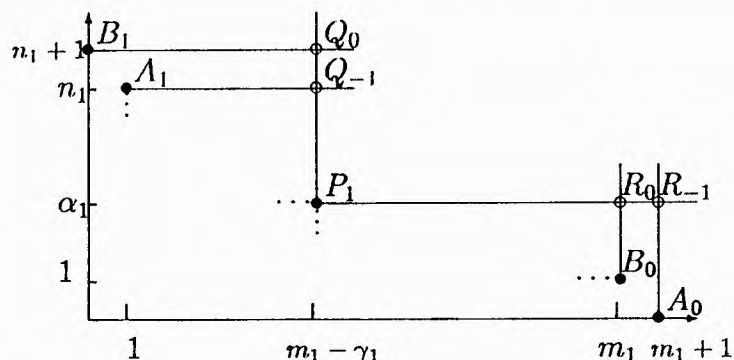
e como $\text{MDC}(n_1, m_1) = 1$, devemos ter $s_1 = kn_1$ e $s_0 = km_1$. Assim,

$$0 = s_1 v_1 - s_0 v_0 = kn_1 v_1 - km_1 v_0 \xrightarrow{\varrho} ((1-k)m_1, kn_1) = O_k.$$

Para que O_k seja um ponto de \mathbb{N}^2 devemos ter $k = 0$ ou $k = 1$. Desse modo, $0 \in \Lambda$ pode ser representado por $O_0 = (m_1, 0)$ e por $O_1 = (0, n_1)$. Conseqüentemente, qualquer elemento da forma $\gamma_1 v_1 + \gamma_0 v_0 \in \Gamma \subseteq \Lambda$, pode ser representado por $(m_1 + \gamma_0, \gamma_1)$ e por $(\gamma_0, n_1 + \gamma_1)$. Observe que $v(dx) + 1 = v_0$ pode ser representado por $A_0 = (m_1 + 1, 0)$ e por $A_1 = (1, n_1)$, enquanto que $v(dy) + 1 = v_1$ por $B_0 = (m_1, 1)$ e por $B_1 = (0, n_1 + 1)$.

Note que se $\delta_1 v_1 - \delta_0 v_0 \in \Lambda \setminus \Gamma$, i.e., $\delta_0 > 0$, então podemos representar tal valor apenas por $(m_1 - \delta_0, \delta_1)$.

Representando $v(\Omega_1) + 1 = \alpha_1 v_1 - \gamma_1 v_0$ por $P_1 = (m_1 - \gamma_1, \alpha_1)$, vemos que os S -processos a serem considerados podem ser obtidos através da interpretação, por meio da associação ϱ , dos pontos de interseção da reta horizontal que passa por P_1 com as retas verticais que passam por A_0 e B_0 e dos pontos de interseção da reta vertical que passa por P_1 com as retas horizontais que passam por A_1 e B_1 (Veja a figura abaixo).



Note que

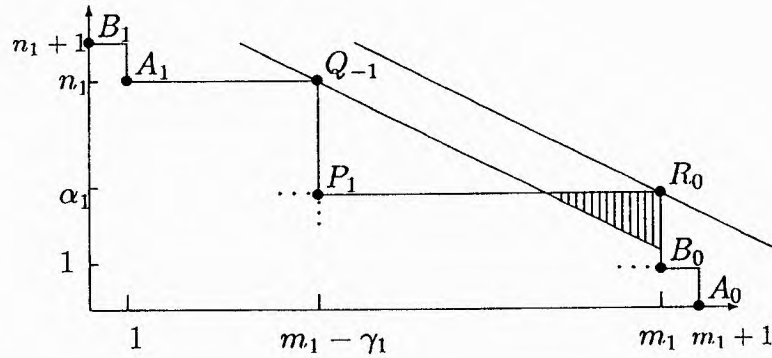
$$R_{-1} = (m_1 + 1, \alpha_1) = \begin{cases} (0, \alpha_1) + (m_1 + 1, 0) = (0, \alpha_1) + A_0 \\ (\gamma_1 + 1, 0) + (m_1 - \gamma_1, \alpha_1) = (\gamma_1 + 1, 0) + P_1, \end{cases}$$

o que equivale a dizer que $v(y^{\alpha_1} dx) = v(x^{\gamma_1+1} \Omega_1)$, i.e., temos o S -processo S_1 . Do mesmo modo, podemos obter os S -processos S_2, S_3 e S_4 listados anteriormente.

É óbvio que $ht(S_2) \prec ht(S_1)$ e $ht(S_3) \prec ht(S_4)$, onde \prec é a ordem monomial de $K[[t]]$. Denotemos por $ht_1 = \min\{ht(S_2), ht(S_3)\}$ e $ht^1 = \max\{ht(S_2), ht(S_3)\}$.

Agora observe que se l é a lacuna limitante neste passo para o algoritmo restrito às diferenciais do primeiro bloco, então $l < v(ht^1)$. De fato, se Q_{-1} representa o S -processo com altura ht_1 e R_0 representa o S -processo de altura ht^1 , então qualquer ponto que se localize no semiplano superior de \mathbb{N}^2 determinado pela reta de vetor normal (v_0, v_1) e que passa por R_0 representa um elemento de $\{v(dx) + 1 + \langle v_0, v_1 \rangle\} \cup \{v(dy) + 1 + \langle v_0, v_1 \rangle\} \cup \{v(\Omega_1) + 1 + \langle v_0, v_1 \rangle\}$, portanto sua redução módulo $(\{dx, dy, \Omega_1\}, \{x, y\})$ não pertence ao primeiro bloco.

Conseqüentemente, basta computarmos uma redução final dos S -processos listados anteriormente, tal que a ordem de sua altura esteja em $v(ht_1) + \langle v_0, v_1 \rangle$. Além disto, se alguma redução final é uma nova diferencial do primeiro bloco, então o ponto em \mathbb{N}^2 que corresponde a ela, se localiza entre as retas com vetor normal (v_0, v_1) que passam por Q_{-1} e R_0 e fora da região $(A_0 + \mathbb{N}^2) \cup (A_1 + \mathbb{N}^2) \cup (B_0 + \mathbb{N}^2) \cup (B_1 + \mathbb{N}^2) \cup (P_1 + \mathbb{N}^2)$ (Veja figura abaixo).



De modo análogo, se $G = \{\Omega_{-1} = dx, \Omega_0 = dy, \Omega_1, \dots, \Omega_i\}$ representa o conjunto das diferenciais do primeiro bloco, obtidas pelo Algoritmo 2.2, até um determinado passo, então os S -processos envolvendo Ω_j com $1 \leq j \leq i$ são da forma

$$\begin{aligned} x^{\alpha_k} \Omega_j + a_k y^{\gamma_k} \Omega_k \\ y^{\delta_k} \Omega_j + b_k x^{\eta_k} \Omega_k, \end{aligned}$$

com $k = -1, \dots, i$, $k \neq j$ e podem ser obtidos através da interseção da reta horizontal, respectivamente vertical, que passa pelo ponto que representa $v(\Omega_j) + 1$ com as retas verticais, respectivamente horizontais, que passam pelos pontos que correspondem à $v(\Omega_k) + 1$.

Fixado $1 \leq j \leq i$, defina

$$ht_X = \text{menor altura de um } S\text{-processo} \\ \text{da forma } x^{\alpha_k} \Omega_j + a_k y^{\gamma_k} \Omega_k,$$

que será chamado de *altura mínima de S -processos de Ω_j na direção x* .

$$ht_Y = \text{menor altura de um } S\text{-processo} \\ \text{da forma } y^{\delta_k} \Omega_j + b_k x^{\eta_k} \Omega_k,$$

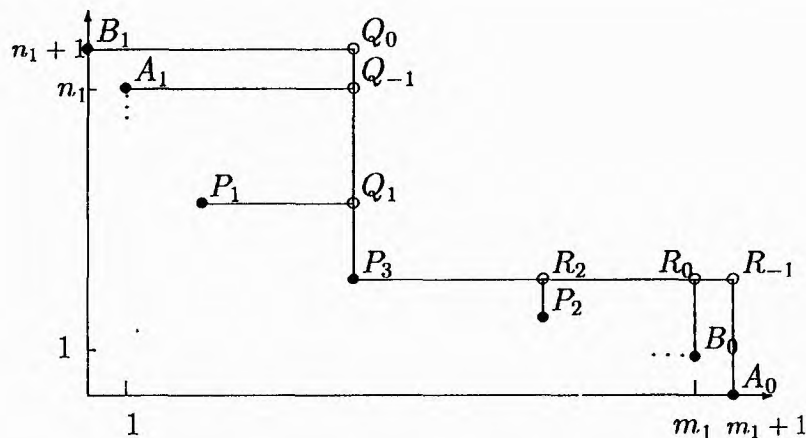
que será chamado de *altura mínima de S -processos de Ω_j na direção y* .

Se $ht_j = \min\{ht_X, ht_Y\}$ e $ht^j = \max\{ht_X, ht_Y\}$, então os únicos S -processos que eventualmente possuem redução final no primeiro bloco são aqueles cuja ordem de sua altura esteja em $v(ht_j) + \langle v_0, v_1 \rangle$.

Como antes, se alguma redução final de um S -processo envolvendo Ω_j para $1 \leq j \leq i$ é uma nova diferencial do primeiro bloco, então o ponto em \mathbb{N}^2 correspondente a tal diferencial se localiza entre as retas de vetor normal (v_0, v_1) que passam pelos pontos correspondentes à $v(ht_j)$ e $v(ht^j)$ e fora da

região $(A_0 + \mathbb{N}^2) \cup (A_1 + \mathbb{N}^2) \cup (B_0 + \mathbb{N}^2) \cup (B_1 + \mathbb{N}^2) \cup_{j=1}^i (P_j + \mathbb{N}^2)$, onde P_j é o ponto de \mathbb{N}^2 correspondente à $v(\Omega_j) + 1$. Além disso, a lacuna limitante l , neste passo é menor que $\min\{v(ht^j); j = 1, \dots, i\}$.

Se $j = i = 3$, então um exemplo da situação acima pode ser dado pela figura abaixo, onde aos pontos Q_j correspondem S -processos mínimos do tipo $y^{\delta_k} \Omega_j + b_k x^{\eta_k} \Omega_k$ e aos pontos R_j , S -processos da forma $x^{\alpha_k} \Omega_j + a_k y^{\gamma_k} \Omega_k$ para $k = -1, 0, 1, 2$.



Utilizando os fatos acima podemos obter informações mais refinadas a respeito dos S -processos que originam DNEM no primeiro bloco.

O resultado a seguir, foi mostrado por Delorme, em [D2], para curvas de gênero 1 num contexto bem mais aritmético que aqui é reinterpretado à luz do nosso algoritmo.

Proposição 3.3 *Sejam $\Omega_{-1} = dx$, $\Omega_0 = dy$ e $\{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ as DNEM do primeiro bloco, com $v(\Omega_{i-1}) < v(\Omega_i)$ para $i = 0, \dots, r$. Podemos sempre obter uma DNEM Ω'_{i+1} com $v(\Omega'_{i+1}) = v(\Omega_{i+1})$ para $0 \leq i < r$ através de uma redução final de um S -processo da forma $S(\Omega_i, \Omega_j)$, com $-1 \leq j < i$ e $ht(S(\Omega_i, \Omega_j)) = ht_i$.*

Dem.: A demonstração será feita por indução sobre i .

Para $i = 0$, o resultado segue diretamente, uma vez que Ω_1 é a redução final do S -processo $S(dy, dx) = xdy - \frac{v_1}{v_0} ydx$, cuja altura é ht_1 .

Vamos supor que a proposição seja válida para todo $k \leq i$.

Sabemos que Ω_{i+1} é obtida por uma redução final de um S -processo da forma $S(\Omega_h, \Omega_k)$ módulo $(\{\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_i\}, \{x, y\})$, ou seja,

$$\Omega_{i+1} = S(\Omega_h, \Omega_k) + \sum_{j=-1}^i A_j \Omega_j = \sum_{j=-1}^i B_j \Omega_j, \quad (3.2)$$

com $A_j, B_j \in \mathcal{O}$. Note que nenhuma parcela de $\sum_{j=-1}^i A_j \Omega_j$ contribui para a altura da representação (3.2), fato garantido pelo processo de redução. Note também que na maneira de escrevermos Ω_{i+1} , temos que $B_j = A_j$ se $j \neq h, k$ e que $v(B_j) = v(A_j)$ para $j = k, h$. Assim, temos

$$v(\Omega_{i+1}) > v(B_j \Omega_j) > v(B_h \Omega_h) = v(B_k \Omega_k), \quad (3.3)$$

para todo $j = -1, \dots, i$, com $j \neq h$ e $j \neq k$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $h < k$, i.e., $v(\Omega_h) < v(\Omega_k)$.

Vamos mostrar inicialmente que $k = i$ e depois que $ht(S(\Omega_h, \Omega_i)) = ht_i$.

Obviamente $k \leq i$.

Suponha que $k < i$, como vimos anteriormente, podemos considerar $v(ht(S(\Omega_h, \Omega_k))) \in v(ht_k) + \langle v_0, v_1 \rangle$.

Por hipótese de indução temos que

$$\Omega_{k+1} = S(\Omega_l, \Omega_k) + \sum_{j=-1}^k C_j \Omega_j = \sum_{j=-1}^k D_j \Omega_j,$$

com $C_j, D_j \in \mathcal{O}$ e

$$v(ht_k) = v(D_k \Omega_k) = \min_{-1 \leq j \leq k} \{v(D_j \Omega_j)\}. \quad (3.4)$$

Como $v(B_k \Omega_k) \in v(ht_k) + \langle v_0, v_1 \rangle$, existe $g \in \mathcal{O}$, tal que

$$v(B_k \Omega_k - g D_k \Omega_k) > v(g D_k \Omega_k) = v(B_k \Omega_k), \quad (3.5)$$

e assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Omega_{i+1} &= \sum_{j=-1}^i B_j \Omega_j = \sum_{j=-1}^i B_j \Omega_j + g \left(\Omega_{k+1} - \sum_{j=-1}^k D_j \Omega_j \right) = \\ &= \sum_{j=-1}^k (B_j - g D_j) \Omega_j + (B_{k+1} + g) \Omega_{k+1} + \sum_{j=k+2}^i B_j \Omega_j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora veja que:

- $\min_{-1 \leq j < k} \{v((B_j - gD_j)\Omega_j)\} \geq v(B_k\Omega_k)$.

De fato, para todo $j = -1, \dots, k-1$ temos

$$\begin{aligned} v((B_j - gD_j)\Omega_j) &\geq \min \{v(B_j\Omega_j), v(gD_j\Omega_j)\} \\ &\stackrel{(3.4)}{\geq} \min \{v(B_j\Omega_j), v(gD_k\Omega_k)\} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \min \{v(B_j\Omega_j), v(B_k\Omega_k)\} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} v(B_k\Omega_k). \end{aligned}$$

- $v((B_k - gD_k)\Omega_k) > v(B_k\Omega_k)$, por (3.5).
- $v((B_{k+1} + g)\Omega_{k+1}) > v(B_k\Omega_k)$. De fato, se $v(B_{k+1}\Omega_{k+1}) \geq v(g\Omega_{k+1})$, então

$$\begin{aligned} v((B_{k+1} + g)\Omega_{k+1}) &\geq \min \{v(B_{k+1}\Omega_{k+1}), v(g\Omega_{k+1})\} \\ &= v(g\Omega_{k+1}) \\ &\stackrel{(3.4)}{>} v(gD_k\Omega_k) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} v(B_k\Omega_k). \end{aligned}$$

Se $v(B_{k+1}\Omega_{k+1}) < v(g\Omega_{k+1})$, então como $v(g\Omega_{k+1}) > v(gD_k\Omega_k)$, podemos ter:

a) $v(B_{k+1}\Omega_{k+1}) > v(gD_k\Omega_k)$, assim $\min\{v(B_{k+1}\Omega_{k+1}), v(g\Omega_{k+1})\} > v(gD_k\Omega_k) = v(B_k\Omega_k)$.

b) $v(B_{k+1}\Omega_{k+1}) \leq v(gD_k\Omega_k)$. Dessa forma, temos

$$v(B_k\Omega_k) \stackrel{(3.5)}{=} v(gD_k\Omega_k) \geq v(B_{k+1}\Omega_{k+1})$$

que contradiz (3.3).

- $\min_{k+1 < j \leq i} \{v(B_j\Omega_j)\} > v(B_k\Omega_k)$, uma vez que estamos supondo $h < k$ e os únicos termos que contribuem para a altura de Ω_{i+1} na representação (3.6) são $B_h\Omega_h$ e $B_k\Omega_k$.

Desse modo, temos uma representação para Ω_{i+1} cuja altura do S -processo que a origina é maior ou igual a $ht = ht(S(\Omega_h, \Omega_k)) = v(B_k\Omega_k)$.

Podemos ter:

1. A altura de Ω_{i+1} em (3.6) é maior que ht .

Neste caso duas possibilidades podem ocorrer:

- (a) O maior índice para as diferenciais envolvidas no S -processo que origina Ω_{i+1} é maior que k , i.e., Ω_{i+1} é obtida pela redução final de um S -processo da forma $S(\Omega_l, \Omega_j)$, com $j > k$. Se $j = i$ a primeira afirmação da proposição está provada. Caso contrário, aplicamos o mesmo raciocínio usado para Ω_{k+1} para a diferencial Ω_{j+1} .
- (b) O maior índice para as diferenciais envolvidas no S -processo que origina Ω_{i+1} é menor ou igual a k , i.e., Ω_{i+1} é obtida pela redução final de um S -processo da forma $S(\Omega_l, \Omega_j)$ com $l < j \leq k$. Nesse caso, aplicamos o procedimento para Ω_{j+1} ao invés de Ω_{k+1} . Note que esse caso não pode ocorrer indefinidamente, pois se $j = k$ para um número infinito de passos, então aumentaremos a altura do S -processo de modo a superar $v(\Omega_{i+1})$, um absurdo. Por outro lado, se $j < k$, também não podemos proceder indefinidamente pois $j \geq -1$.

2. A altura de Ω_{i+1} em (3.6) é igual a ht .

Neste caso, o maior índice para uma diferencial que contribui para a altura de (3.6) é menor do que k . Assim, aplicamos o procedimento anterior para o referido índice. Como o índice não pode diminuir indefinidamente, estaremos após algumas aplicações desse raciocínio na situação 1.a).

Note que a possibilidade 1.a), indica que o raciocínio usado, implica que obrigatoriamente elevaremos o maior índice da diferencial envolvida no S -processo que origina Ω_{i+1} . Desse modo, após um número finito de passos do argumento acima teremos

$$\Omega_{i+1} = S(\Omega_i, \Omega_h) + \sum_{j=-1}^i E_j \Omega_j = \sum_{j=-1}^i F_j \Omega_j, \quad (3.7)$$

com $E_j, F_j \in \mathcal{O}$, $h < i$ e $v(ht(S(\Omega_i, \Omega_h))) \in v(ht_i) + \langle v_0, v_1 \rangle$.

Assim, em cada passo do algoritmo, determinamos uma nova DNEM no primeiro bloco, obtida por uma redução final de um S -processo envolvendo a DNEM determinada no passo anterior do algoritmo.

Resta mostrar que podemos tomar o S -processo envolvendo Ω_i com menor altura, i.e., ht_i .

Inicialmente, notemos que se ω_{i+1} é uma redução final de $S(\Omega_i, \Omega_l)$, onde este S -processo é o de menor altura envolvendo Ω_i , então $v(\omega_{i+1}) \geq v(\Omega_{i+1})$. De fato, se $v(\omega_{i+1}) < v(\Omega_{i+1})$, então $v(\omega_{i+1}) \in v(\Omega_j) + \langle v_0, v_1 \rangle$ com $j \leq i$, mas deste modo ω_{i+1} não seria redução final. Lembre que estamos supondo que não existe DNEM, no primeiro bloco, cuja ordem esteja entre $v(\Omega_i)$ e $v(\Omega_{i+1})$.

Observemos que se a ordem da altura do S -processo em (3.7) for $v(ht_i)$ ou $v(\omega_{i+1}) = v(\Omega_{i+1})$, então mostramos que existe uma DNEM que é obtida por uma redução final do S -processo de menor altura envolvendo Ω_i e cuja ordem é $v(\Omega_{i+1})$.

Podemos supor que na representação (3.7) tenhamos

$$ht(S(\Omega_i, \Omega_h)) = v(F_i \Omega_i) > v(ht_i) \text{ e } v(\omega_{i+1}) > v(\Omega_{i+1}).$$

Seja $\Omega'_{i+1} = \Omega_{i+1} + \omega_{i+1}$, note que $v(\Omega'_{i+1}) = v(\Omega_{i+1})$. Se $\omega_{i+1} = \sum_{j=-1}^i G_j \Omega_j$ com $v(ht(\sum_{j=-1}^i G_j \Omega_j)) = v(G_i \Omega_i) = v(ht_i)$, então para cada $j = -1, \dots, i$ temos

$$\begin{aligned} v((F_j + G_j)\Omega_j) &\geq \min \{v(F_j \Omega_j), v(G_j \Omega_j)\} \\ &\geq \min \{v(F_i \Omega_i), v(G_i \Omega_i)\} \\ &= \min \{v(F_i \Omega_i), v(ht_i)\} \\ &= v(ht_i) = v((F_i + G_i)\Omega_i). \end{aligned}$$

Portanto, podemos considerar Ω'_{i+1} no lugar de Ω_{i+1} . ■

Apresentamos a seguir alguns resultados que serão utilizados no Apêndice A e por estarem vinculados aos conceitos que introduzimos anteriormente justificam sua ocorrência neste momento.

Com as notações da proposição anterior, defina $v(G^i) = v(ht_i) - v(\Omega_i)$, para todo $i = 0, \dots, r$ e Ω_i diferencial do primeiro bloco. Note que $v(G^i) > 0$ para todo $i = 0, \dots, r$.

Lema 3.2 *Escreva $\Omega_i = q_i dx - p_i dy$, com $q_i, p_i \in \mathcal{O}$ para todo $i = 1, \dots, r$ e Ω_i DNEM do primeiro bloco. Então*

$$v(p_{i+1}) = v(p_i) + v(G^i),$$

para todo $i = 0, \dots, r-1$, onde $v(p_0) = 0$.

Dem.: A demonstração será feita por indução sobre i .

Para $i = 0$, temos que $\Omega_i = \left(\frac{y_1}{v_0}y + \dots\right)dx - (x + \dots)dy$, i.e., $v(p_1) = v(x) = v_0$. Como $v(p_0) = 0$ e $v(G^0) = v(ht_0) - v(\Omega_0) = v(xdy) - v(dy) = v(x)$, segue que

$$v(p_1) = v(p_0) + v(G^0).$$

Vamos supor que o lema seja verdadeiro para todo j , tal que $0 \leq j \leq i < r$.

Considerando Ω_{i+1} como na proposição anterior, i.e.,

$$\Omega_{i+1} = \sum_{l=-1}^i B_l \Omega_l,$$

com $B_l \in \mathcal{O}$ para todo $l = -1, \dots, i$ e $v(B_i \Omega_i) = v(B_k \Omega_k) < v(B_h \Omega_h)$, para todo $-1 \leq h < i$ com $h \neq k$.

Como $p_{i+1} = \sum_{l=0}^i B_l p_l$ e $v(B_i) = v(G^i)$, basta provar que $v(p_i) + v(B_i) < v(p_h) + v(B_h)$ para todo $0 \leq h < i$.

Pela expressão de Ω_{i+1} considerada, temos que

$$v(B_i) + v(\Omega_i) \leq v(B_h) + v(\Omega_h),$$

equivalentemente,

$$(*) \quad v(\Omega_i) - v(\Omega_h) + v(p_h) - v(p_i) \leq v(B_h) - v(B_i) + v(p_h) - v(p_i).$$

Por hipótese de indução, temos que

$$v(p_i) - v(p_h) = \sum_{l=h}^{i-1} v(G^l) = \sum_{l=h}^{i-1} v(ht_l) - v(\Omega_l).$$

Assim,

$$v(p_h) - v(p_i) + v(\Omega_i) - v(\Omega_h) = \sum_{l=h}^{i-1} v(\Omega_{l+1}) - v(ht_l) > 0,$$

conseqüentemente, por (*), concluímos que

$$v(p_i) + v(B_i) < v(p_h) + v(B_h).$$

Observação 3.7 *Seja $\Omega = \sum_{j=-1}^i H_j \Omega_j$, onde $H_j \in \mathcal{O}$, Ω_j é diferencial do primeiro bloco e*

$$v(ht(\Omega)) = v(H_i \Omega_i) = v(H_k \Omega_k) < v(H_j \Omega_j)$$

para todo $-1 \leq j < i$ com $j \neq k$. Então

$$v(p_i) + v(H_i) < v(p_j) + v(H_j),$$

para todo $0 \leq j < i$.

De fato, uma vez que $v(H_i) + v(\Omega_i) \leq v(H_j) + v(\Omega_j)$ e como no lema anterior tem-se que $v(p_j) - v(p_i) + v(\Omega_i) - v(\Omega_j) > 0$, concluímos que $v(p_j) - v(p_i) + v(H_j) - v(H_i) > 0$.

Observe ainda que

$$v(B_i) + v(p_i) < v(B_{-1}) + v_0 - v_1,$$

para todo $i \geq 0$. De fato, como $v(\Omega_i) > v(ht_i) = v(p_i) + v_1 - 1$, temos que

$$v(B_i) + v(p_i) + v_1 - 1 < v(B_i) + v(\Omega_i) \leq v(B_{-1}) + v(\Omega_{-1}) = v(B_{-1}) + v_0 - 1,$$

para todo $i \geq 0$. Portanto, $v(B_i) + v(p_i) < v(B_{-1}) + v_0 - v_1$.

Capítulo 4

Eliminação de Parâmetros

Uma questão importante no estudo da relação de equivalência de curvas algebróides irredutíveis é obter formas normais que representem todas as curvas com determinados invariantes fixados e que sejam dadas pelo menor número de parâmetros.

Dada uma parametrização de um ramo cujo semigrupo de valores seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, vimos (Exemplo 3.2) que todos os termos cujos expoentes l pertencem ao conjunto Γ ou ao conjunto $\Gamma + v_1 - v_0$ podem ser eliminados, sem que alteremos os termos de ordem inferior, respectivamente por meio de uma mudança da forma

$$\begin{aligned} t_1 &= t \\ y_1 &= y + q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

com $q \in \mathcal{O}$ e $v(q) = l$ ou

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y, \end{aligned}$$

com $p \in \mathcal{O}$ e $v(p) = l - v_1 + v_0$ se $l \in \Gamma + v_1 - v_0$. Ebey, em [E], já observa estas eliminações em casos particulares, enquanto que Zariski, em [Z2] e Azevedo, em [Az], as apresentam como descritas acima.

A situação anterior é um caso particular do seguinte lema, mostrado por Delorme, em [D2].

Lema 4.1 *Seja C uma curva algebróide irredutível plana dada por*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} a_i t^i. \end{cases}$$

Se $a_l \neq 0$ e existe $\Omega = qdx - pdy \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ tal que $v\left(\frac{\Omega}{dx}\right) = l < 2v(p) - 2v_0 + v_1$, então C é equivalente a

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i>v_1}^{l-1} a_i t^i + \sum_{i>l} a'_i t^i. \end{cases}$$

Dem.: Seja $\Omega = qdx - pdy \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ tal que $\Omega = (bt^{l+v_0-1} + \dots)dt$ e considere a mudança

$$t_1 = t \left(1 + \frac{cp}{t^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}}$$

$$y_1 = y + cq.$$

Como já mencionamos no capítulo anterior (Veja Exemplo 3.2) a ação dessa mudança é dada por

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t_1^i + \frac{c(qdx-pdy)}{dx} \bmod t^{2v(p)-2v_0+v_1}. \end{cases}$$

Uma vez que $t_1 = t \bmod t^2$, podemos escolher $c = -\frac{a_l v_0}{b}$ e teremos

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1}^{l-1} a_i t_1^i + \sum_{i>l} a'_i t_1^i. \end{cases}$$

■

Seja $F = \{h_0, h_1, \dots, h_g\}$ uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , podemos reescrever o conjunto das potências elimináveis $\Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$ como

$$\cup_{i=0}^1 (\Gamma + v_i - v_0) = \cup_{i=0}^1 (\Gamma + v(dh_i) - v(dh_0)).$$

Escrito desse modo, é natural pensar na possibilidade de ampliar o conjunto das potências elimináveis como segue:

$$\cup_{i=0}^g (\Gamma + v(dh_i) - v(dh_0)).$$

Uma vez que a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{cp}{t^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y + cq, \end{aligned}$$

com $c \in K^*$ e $p, q \in \mathcal{O}$, nos fornece

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_i t_1^i + \frac{c(qdx-pdy)}{dx} - \sum_{i \geq v_1} a_i t_1^i \left(\sum_{j=2}^{\infty} \binom{i}{j} \left(\frac{cp}{t^{v_0}} \right)^j \right). \end{cases} \quad (4.2)$$

Se considerarmos p e q tais que $F^\alpha dh_i = qdx - pdy$, então podemos escolher um valor para c de modo que $\frac{c(qdx-pdy)}{dx} = -a_l t^l + \dots$, com $l = v(F^\alpha dh_i) - v(dx)$. No entanto, nada nos assegura que os termos de ordem inferior a l fiquem inalterados, uma vez que a ordem do segundo somatório em (4.2) pode ser inferior à l .

Por exemplo, seja

$$C : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{10} + t^{17} + at^{23}. \end{cases}$$

Aplicando a Proposição 2.1, temos que uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} é $F = \{x, y, z\}$ com $z = y^2 - x^5 = 2t^{27} + 2at^{33} + at^{34} + 2at^{40} + a^2t^{46}$.

Note agora que $dz = -5x^4 dx + 2y dy = qdx - pdy$ e $v(dz) - v(dx) = 23 > 22 = 2v(p) - 2v_0 + v_1$ contrariamente a hipótese do Lema 4.1. Assim, uma mudança da forma

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{cp}{t^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y + cq, \end{aligned} \quad (4.3)$$

não eliminaria o termo at^{23} sem que introduzíssemos um termo de ordem 22. No entanto, note que $22 = v(x^3y)$, assim podemos eliminar o termo indesejadamente introduzido. Desse modo, compondo a mudança (4.3) com uma da forma (4.1) temos uma mudança de coordenadas, que permite eliminar o termo em questão sem que alteremos os termos anteriores.

Vamos mostrar que o fato acima, não é algo restrito a este exemplo, e sim um fato geral. Para isso, seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ e considere uma Base Standard Mínima $F = \{h_0, h_1, \dots, h_g\}$ dada pela Proposição 2.1.

No que segue usaremos livremente as notações e relações apresentadas na Subseção 2.1.1 referente a Curvas Planas.

Lembremos (Proposição 2.1) que

$$h_{i+1} = a_i h_i^{n_i} - b_i \prod_{k=0}^{i-1} h_k^{\alpha_k} - \sum_{j \in J} c_j \prod_{k=0}^i h_k^{\beta_{k,j}}, \quad (4.4)$$

com

$$v\left(\sum_{j \in J} c_j \prod_{k=0}^i h_k^{\beta_{k,j}}\right) > v(h_i^{n_i}) = v\left(\prod_{k=0}^{i-1} h_k^{\alpha_k}\right),$$

com $a_i, b_i, c_j \in K$ convenientes.

Vamos expressar dh_{i+1} em termos de dx e dy , ou seja, escrever $dh_{i+1} = q_{i+1}dx - p_{i+1}dy$. O primeiro passo é avaliar $v(p_{i+1})$ para $i = 1, \dots, g-1$.

Proposição 4.1 *Considere as funções h_{i+1} com $i = 1, \dots, g-1$ como na Proposição 2.1. Então temos $dh_{i+1} = q_{i+1}dx - p_{i+1}dy$ com $v(p_{i+1}) = v(p_i) + (n_i - 1)v_i$ para $i = 1, \dots, g-1$ e $v(p_1) = 0$, ou seja,*

$$v(p_{i+1}) = \sum_{j=1}^i (n_j - 1)v_j.$$

Dem.: A demonstração será feita por indução sobre i .

Para $i = 1$, temos de (4.4)

$$h_2 = a_1 y^{n_1} - b_1 x^{\alpha_0} - \sum_{j \in J} c_j x^{\beta_j} y^{\delta_j},$$

com

$$v\left(\sum_{j \in J} c_j x^{\beta_j} y^{\delta_j}\right) > v(y^{n_1}) = v(x^{\alpha_0}).$$

Assim,

$$dh_2 = q_2 dx + \left(n_1 a_1 y^{n_1-1} - \sum_{j \in J} c_j \delta_j x^{\beta_j} y^{\delta_j-1}\right) dy.$$

Uma vez que $v(x^{\beta_j} y^{\delta_j}) > v(y^{n_1})$ para todo $j \in J$, segue que

$$v(p_2) = v\left(n_1 a_1 y^{n_1-1} - \sum_{j \in J} c_j \delta_j x^{\beta_j} y^{\delta_j-1}\right) = (n_1 - 1)v_1,$$

o que garante o resultado para $i = 1$.

Vamos supor que a proposição seja válida para todo k tal que $1 \leq k \leq i < g-1$.

Como, de (4.4)

$$h_{i+1} = a_i h_i^{n_i} - b_i \prod_{k=0}^{i-1} h_k^{\alpha_k} - \sum_{j \in J} c_j \prod_{k=0}^i h_k^{\beta_{kj}},$$

e pela hipótese de indução $dh_k = q_k dx - p_k dy$ para todo $1 \leq k \leq i$, temos que

$$\begin{aligned} dh_{i+1} &= n_i a_i h_i^{n_i-1} dh_i - b_i \sum_{m=0}^{i-1} \alpha_m \left(\prod_{k=0, k \neq m}^{i-1} h_k^{\alpha_k} \right) h_m^{\alpha_m-1} dh_m - \\ &\quad - \sum_{j \in J} c_j \sum_{m=0}^i \beta_{mj} \left(\prod_{k=0, k \neq m}^i h_k^{\beta_{kj}} \right) h_m^{\beta_{mj}-1} dh_m = \\ &= q_{i+1} dx + \left(n_i a_i h_i^{n_i-1} p_i - b_i \sum_{m=0}^{i-1} \alpha_m \left(\prod_{k=0, k \neq m}^{i-1} h_k^{\alpha_k} \right) h_m^{\alpha_m-1} p_m - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \in J} c_j \sum_{m=0}^i \beta_{mj} \left(\prod_{k=0, k \neq m}^i h_k^{\beta_{kj}} \right) h_m^{\beta_{mj}-1} p_m \right) dy = \\ &= q_{i+1} dx - p_{i+1} dy. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} v \left(n_i a_i h_i^{n_i-1} p_i - b_i \sum_{m=0}^{i-1} \alpha_m \left(\prod_{k=0, k \neq m}^{i-1} h_k^{\alpha_k} \right) h_m^{\alpha_m-1} p_m \right) &\leq \\ &\leq v \left(\sum_{j \in J} c_j \sum_{m=0}^i \beta_{mj} \left(\prod_{k=0, k \neq m}^i h_k^{\beta_{kj}} \right) h_m^{\beta_{mj}-1} p_m \right). \end{aligned}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} v \left(\sum_{m=0}^{i-1} \alpha_m \left(\prod_{k=0, k \neq m}^{i-1} h_k^{\alpha_k} \right) h_m^{\alpha_m-1} p_m \right) &\geq \\ &\geq \min_{0 \leq m < i} \left\{ v \left(\left(\prod_{k=0, k \neq m}^{i-1} h_k^{\alpha_k} \right) h_m^{\alpha_m-1} p_m \right) \right\} = \\ &= \min_{0 \leq m < i} \left\{ \sum_{k=0, k \neq m}^{i-1} \alpha_k v_k + (\alpha_m - 1) v_m + v(p_m) \right\} = \\ &= \min_{0 \leq m < i} \{ n_i v_i - v_m + v(p_m) \} > n_i v_i - v_i + v(p_i) = v(h_i^{n_i-1} p_i), \end{aligned}$$

lembrando que $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k v_k = n_i v_i$, pois $a_i h_i^{n_i} - b_i \prod_{k=0}^{i-1} h_k^{\alpha_k}$ é um S -processo, e notando que pela hipótese de indução a seqüência $v(p_m) - v_m$ é crescente para $0 \leq m \leq i$.

Portanto,

$$v(p_{i+1}) = v(n_i a_i h_i^{n_i-1} p_i) = (n_i - 1)v_i + v(p_i) = \sum_{j=0}^i (n_j - 1)v_j. \quad \blacksquare$$

Proposição 4.2 *Seja C uma curva algebróide irredutível plana dada por*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l > v_1} a_l t^l. \end{cases}$$

Se $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ é o semigrupo de C , então C é equivalente a uma curva dada por

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l > v_1} a'_l t^l, \end{cases}$$

com $a'_l = 0$ para todo $l \in \cup_{j=0}^g (\Gamma + v_j - v_0)$.

Dem.: Basta mostrarmos que se $a_l t^l$ com $l \in \cup_{j=0}^g (\Gamma + v_j - v_0)$ é tal que $a_l \neq 0$, então existe uma mudança de coordenadas de modo que a curva C é equivalente a uma curva dada por

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1}^{l-1} a_i t^i + \sum_{i > l} a'_i t^i. \end{cases}$$

Note que para $l \in (\Gamma + v_0 - v_0) \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$ sabemos ser válida a proposição. Assim, podemos supor que $l = \gamma + v_{i+1} - v_0$ para algum $i = 1, \dots, g-1$ e $\gamma \in \Gamma$. Considere h_{i+1} como na Proposição 2.1 e escreva $dh_{i+1} = q_{i+1}dx - p_{i+1}dy$.

Tomemos $h \in \mathcal{O}$ tal que $v(h) = \gamma$, assim podemos escrever $h dh_{i+1} = h q_{i+1} dx - h p_{i+1} dy$.

Se $\gamma \geq v_{i+1}$, então

$$2v(h p_{i+1}) - 2v_0 + v_1 = 2\gamma + 2v(p_{i+1}) - 2v_0 + v_1 > 2\gamma - v_0 \geq \gamma + v_{i+1} - v_0.$$

Assim pelo Lema 4.1, existe $c \in K^*$ tal que a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{c h p_{i+1}}{t^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y + c h q_{i+1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

permite eliminar o termo de ordem $\gamma + v_{i+1} - v_0$ sem que alteremos os termos anteriores.

Se $\gamma < v_{i+1}$, temos que $\gamma = \sum_{j=0}^i \alpha_j v_j$, logo divisível por e_i .

Usando que $F = \{h_0, h_1, \dots, h_g\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , podemos escrever $h = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \prod_{j=0}^g h_j^{\alpha_j}$ com $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ e $v\left(\prod_{j=0}^g h_j^{\alpha_j}\right) \neq v\left(\prod_{j=0}^g h_j^{\delta_j}\right)$ sempre que $\alpha \neq \delta$ e $c_\alpha c_\delta \neq 0$.

Ao efetuarmos a mudança

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{c h p_{i+1}}{t^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y + c h q_{i+1}, \end{aligned}$$

podemos eliminar o termo de ordem $\gamma + v_{i+1} - v_0$ escolhendo $c \in K$ convenientemente. No entanto, podemos ter alterado os termos de ordem inferior à $\gamma + v_{i+1} - v_0$ em y_1 . Observe que as parcelas $c_\alpha \prod_{j=0}^g h_j^{\alpha_j}$ de h que possuem ordem maior ou igual a v_{i+1} , e pela análise do caso anterior, não são responsáveis por essa alteração. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que $h = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \prod_{j=0}^i h_j^{\alpha_j}$, ou seja, todas as parcelas $c_\alpha \prod_{j=0}^g h_j^{\alpha_j}$ de h possuem ordem em $\langle v_0, \dots, v_i \rangle$.

Seja $\Gamma_i = \langle \frac{v_0}{e_i}, \dots, \frac{v_i}{e_i} \rangle$, cujo condutor sabemos ser $\mu_i = \sum_{j=1}^i (n_j - 1) \frac{v_j}{e_i} - \frac{v_0}{e_i} + 1$.

A mudança de coordenadas acima nos dá

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + \sum_{l > v_1} a_l t^l + \frac{c(hq_{i+1} dx - hp_{i+1} dy)}{dx} - \sum_{l \geq v_1} a_l t^l \left(\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{t}{j}\right) \left(\frac{c(hp_{i+1})}{t^{v_0}}\right)^j \right). \end{cases}$$

Veja que

$$v \left(t^l \left(\frac{h p_{i+1}}{x} \right)^j \right) = l + j\gamma + jv(p_{i+1}) - jv_0.$$

Como $l \geq v_1$, $\gamma \geq 0$ e pela proposição anterior $v(p_{i+1}) = \sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k$, temos que

$$\begin{aligned} v \left(t^l \left(\frac{h p_{i+1}}{x} \right)^j \right) &\geq v_1 + j \sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k - jv_0 = \\ &= v_1 + j \left(\sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k - v_0 \right) > \\ &> v_1 + e_i \mu_i - e_i > e_i l_i. \end{aligned}$$

Além disso, se $l \geq \beta_{i+1}$, onde $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_g$ é a seqüência característica de C , e lembrando que $v_{i+1} = \sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k + \beta_{i+1}$ temos que

$$\begin{aligned} v \left(t^l \left(\frac{hp_{i+1}}{x} \right)^j \right) &\geq \beta_{i+1} + j\gamma + j \sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k - jv_0 = \\ &= (j - 1) \sum_{k=1}^i (n_k - 1)v_k - jv_0 + v_{i+1} + j\gamma > \gamma + v_{i+1} - v_0. \end{aligned}$$

Uma vez que $e_i \mid l$ para todo $l < \beta_{i+1}$, a ordem de todos os termos introduzidos antes de $t^{\gamma+v_{i+1}-v_0}$ são divisíveis por e_i e são maiores que $e_i \mu_i$, ou seja, existem $\alpha_0, \dots, \alpha_i \in \mathbb{N}$ tais que $\prod_{j=0}^i h_j^{\alpha_j}$ assume a ordem destes termos. Assim, podemos eliminá-los por meio de uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 \\ y_2 &= y_1 - b \prod_{j=0}^i h_j^{\alpha_j}, \end{aligned}$$

para algum $b \in K$ conveniente.

Como $e_i \mid \gamma$ segue que $e_i \nmid (\gamma + v_{i+1} - v_0)$. Portanto, basta garantirmos que os termos, de ordem inferior a $\gamma + v_{i+1} - v_0$, introduzidos pela mudança acima, possuem ordem divisível por e_i e superiores a $e_i \mu_i$, seguindo assim o resultado, pois poderemos repetir o mesmo procedimento eliminando-os da parametrização.

Pelos argumentos utilizados na prova da Proposição 2.1, segue que o termo de menor ordem δ em $\prod_{j=0}^i h_j^{\alpha_j}$ que não é divisível por e_i é obtido como produto do termo de menor ordem cujo expoente não é divisível por e_i em um fator h_m , que sabemos ser $\sum_{k=1}^{m-1} (n_k - 1)v_k + \beta_{i+1}$, pelos termos líderes dos demais h_j . Assim, como $v(p_{i+1}) + \beta_{i+1} = v_{i+1}$ e $v(\sum_{j=0}^i h_j^{\alpha_j}) \geq v_1 + 2\gamma + 2v(p_{i+1}) - 2v_0$, pois este último número é a menor ordem possível de um termo introduzido na mudança de coordenadas (4.5), temos que δ é igual a

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq m \leq i} \left\{ \sum_{j=0, j \neq m}^i \alpha_j v_j + (\alpha_m - 1)v_m + \sum_{k=1}^{m-1} (n_k - 1)v_k + \beta_{i+1} \right\} &= \\ = \min_{0 \leq m \leq i} \left\{ \sum_{j=0}^i \alpha_j v_j - \beta_m + \beta_{i+1} \right\} &= \\ = \sum_{j=0}^i \alpha_j v_j - \beta_i + \beta_{i+1} \geq v_1 + 2\gamma + 2v(p_{i+1}) - 2v_0 - \beta_i + \beta_{i+1} &= \\ = v_1 + 2\gamma + v(p_{i+1}) - 2v_0 - \beta_i + v_{i+1} \geq & \\ \geq v_1 + \gamma + \sum_{k=1}^i v_k - \beta_i - v_0 + \gamma + v_{i+1} - v_0 > \gamma + v_{i+1} - v_0. & \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. ■

A proposição anterior, nos diz que todas as classes de equivalência de curvas algebróides irredutíveis planas com semigrupo fixo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ podem ser representadas por uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l \in L} a_l t^l, \end{cases}$$

onde $a_l \in K$ e L é o conjunto das lacunas de Γ que são maiores que v_1 e não são da forma $\gamma + v_i - v_0$ com $\gamma \in \Gamma$ e $i = 0, \dots, g$.

Zariski, em [Z2], mostra que se λ é o invariante de Zariski de um ramo C , então existe uma mudança de coordenadas, de modo a podermos eliminar todos os termos de ordem $\lambda + \gamma$ com $\gamma \in \langle v_0, v_1 \rangle \setminus \{0\}$, sem que alteremos os termos de ordem inferior.

Se $\Omega_1 \in \mathcal{Od}\mathcal{O}$ é uma DNE de menor ordem, então sabemos que $v(\Omega_1) + 1 = \lambda + v_0$. Deste modo, o resultado de Zariski, é um caso particular da proposição abaixo.

Proposição 4.3 *Seja C uma curva algebróide irredutível plana com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, dada por*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l \in L} a_l t^l, \end{cases}$$

com $L = \{l \in \mathbb{N} \setminus \cup_{i=0}^g (\Gamma + v_i - v_0); l > v_1\}$. Se $\Omega_1 \in \mathcal{Od}\mathcal{O}$ é uma DNE de menor ordem, então existe uma mudança de coordenadas de modo que C é equivalente a

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l \in L \setminus (\Gamma + v(\Omega_1) + 1 - v_0)} a'_l t^l, \end{cases}$$

Dem.: Seja $\Omega_1 \in \mathcal{Od}\mathcal{O}$ uma DNE de menor ordem. Pelo que vimos logo após a Observação 3.2, temos que $v(\Omega_1) + 1 = \lambda + v_0$, onde λ é o invariante de Zariski de C . Podemos considerar C dada por uma parametrização

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{l \in L} a_l t^l. \end{cases}$$

Inicialmente, mostremos como eliminar as lacunas l , tais que $l - \lambda \in \Gamma^*$ e $l - \lambda < v_2$, ou seja, $l = \lambda + \gamma$, com $\gamma = \alpha v_0 + \beta v_1 > 0$.

Considere $p = x(1 + cx^\alpha y^\beta)^{v_0} - x = \sum_{i=1}^{v_0} \binom{v_0}{i} c^i x^{i\alpha+1} y^{i\beta}$, com $c \in K^*$ a ser caracterizado posteriormente.

Tomemos a mudança de parâmetros

$$t_1 = t \left(1 + \frac{p}{t^{v_0}} \right)^{\frac{1}{v_0}} = t(1 + cx^\alpha y^\beta) = t + ct x^\alpha y^\beta.$$

Desse modo, temos

$$y(t_1) = (t + ct x^\alpha y^\beta)^{v_1} + \sum_{\lambda \leq j < l} a_j (t + ct x^\alpha y^\beta)^j + a_l t^l + \boxed{\text{termos de ordem } > l}.$$

Uma vez que, $v(t^i x^{k\alpha} y^{k\beta}) > l$ sempre que $i > \lambda$ ou $i = \lambda$ e $k > 1$ e que $(t + ct x^\alpha y^\beta)^i = t^i + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} c^k t^i x^{k\alpha} y^{k\beta}$, podemos escrever

$$y(t_1) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{v_1} \binom{v_1}{i} c^i t^{v_1} x^{i\alpha} y^{i\beta} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t^j + (a_l + \lambda c a_\lambda) t^l + \boxed{\text{termos de ordem } > l}.$$

Note que

$$t^{v_1} x^{i\alpha} y^{i\beta} = t^{v_1 + i\alpha v_0 + i\beta v_1} + i\beta a_\lambda t^{\lambda + i\alpha v_0 + i\beta v_1} + \dots,$$

ou seja,

$$y(t_1) = t^{v_1} + \sum_{i=1}^{v_1} \binom{v_1}{i} c^i t^{v_1 + i\alpha v_0 + i\beta v_1} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t^j + (a_l + (\lambda + v_1 \beta) c a_\lambda) t^l + \dots.$$

Agora observe que

$$x^{i\alpha} y^{i\beta} = t^{v_1 + i\alpha v_0 + i\beta v_1} + (i\beta + 1) a_\lambda t^{\lambda + i\alpha v_0 + i\beta v_1} + \dots.$$

Assim,

$$y(t_1) - \sum_{i=1}^{v_1} \binom{v_1}{i} c^i x^{i\alpha} y^{i\beta+1} = t^{v_1} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t^j + (a_l + (\lambda - v_1) c a_\lambda) t^l + \dots,$$

como $y = t^{v_1} + a_\lambda t^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t^j + a_l t^l + \dots$ e $y(t_1) = t_1^{v_1} + a_\lambda t_1^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t_1^j + a_l t_1^l + \dots$ termos de ordem $> l$, temos que,

$$y + \sum_{i=1}^{v_1} \binom{v_1}{i} c^i x^{i\alpha} y^{i\beta+1} = t_1^{v_1} + a_\lambda t_1^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t_1^j - (a_l + (\lambda - v_1)ca_\lambda)t^l + \dots$$

Desse modo, tomando $c = -\frac{a_l}{(\lambda - v_1)a_\lambda}$ e a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}} = t(1 + cx^\alpha y^\beta) \\ y_1 &= y + \sum_{i=1}^{v_1} \binom{v_1}{i} c^i x^{i\alpha} y^{i\beta+1}, \end{aligned}$$

a curva

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + a_\lambda t_1^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t_1^j + \sum_{j > l} a'_j t_1^j \end{cases}$$

é equivalente a curva C .

Consideremos agora o caso em que $l = \lambda + \gamma$, com $\gamma \in \Gamma \setminus \langle v_0, v_1 \rangle$, ou seja,

$$\gamma = l - \lambda \geq v_2 = (n_1 - 1)v_1 + \beta_2 \geq (n_1 - 1)v_1 + \lambda > \lambda - v_1.$$

Tomemos $p = chx$ e $q = \frac{v_1}{v_0} chy$, onde c é uma constante a ser determinada e $h \in \mathcal{O}$ tal que $v(h) = \gamma = l - \lambda$. A mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^{v_0}}\right)^{\frac{1}{v_0}} \\ y_1 &= y + q, \end{aligned}$$

nos fornece (Vide Exemplo 3.2)

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + a_\lambda t_1^\lambda + \sum_{j > \lambda} a_j t_1^j + \frac{qdx - pdy}{dx} - \sum_{j \geq v_1} a_j t_1^j \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{p}{t^{v_0}}\right)^k \right). \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} v \left(\frac{qdx - pdy}{dx} \right) &= v \left(ch \frac{\Omega_1}{dx} \right) = \\ &= \gamma + \lambda < 2\gamma + v_1 = v \left(\sum_{j \geq v_1} a_j t_1^j \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{p}{t^{v_0}}\right)^k \right) \right), \end{aligned}$$

podemos escolher $c \in K^*$, de modo que

$$\frac{qdx - pdy}{dx} - \sum_{j \geq v_1} a_j t_1^j \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{p}{t^{v_0}}\right)^k \right) = -a_l t^l + \dots,$$

como $t^l = t_1^l + \dots$, obtemos uma curva equivalente à curva C dada por uma parametrização da forma .

$$\begin{cases} x_1 = t_1^{v_0} \\ y_1 = t_1^{v_1} + a_\lambda t_1^\lambda + \sum_{\lambda < j < l} a_j t_1^j + \sum_{j > l} a'_j t_1^j. \end{cases}$$

■

Mais do que a garantia da eliminação de determinados termos em uma parametrização de um ramo, as duas últimas proposições nos dão explicitamente as mudanças de coordenadas que devemos realizar para eliminar os termos em questão.

Observando que $v(dh_i) - v(dh_0) = v_i - v_0$, podemos unificar as duas últimas proposições, no seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Seja C uma curva algebróide irredutível plana com semigrupo de valores $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, dada por*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{j > v_1} a_j t^j. \end{cases}$$

Seja $F = \{h_0, h_1, \dots, h_g\}$, com $v(h_i) = v_i$ para $i = 0, \dots, g$ e $\Omega_1 \in \text{OdO}$ uma DNE de menor ordem, então C é equivalente a

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{\substack{j > v_1 \\ j \in \mathbb{N} \setminus L}} a'_j t^j, \end{cases}$$

onde $L = (\Gamma^* + v(\Omega_1) - v(dh_0)) \cup_{i=0}^g (\Gamma + v(dh_i) - v(dh_0))$.

Exemplo 4.1 *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, com $v_0 = 4$ o semigrupo de uma curva algebróide irredutível plana C .*

De acordo com a Observação 3.2, as lacunas l de Γ maiores que v_1 são da forma

$$v_2 - jv_0 \text{ com } 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_2 - v_1}{v_0} \right\rfloor,$$

$$v_2 + v_1 - jv_0 \text{ com } 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_2}{v_0} \right\rfloor.$$

Como $e_1 = \text{MDC}(v_0, v_1) \nmid v_2$, $m_1 = \frac{v_1}{e_1}$ e $\beta_2 = v_2 + v_1 - m_1 v_0$ é o menor expoente na parametrização de C que não é divisível por e_1 , segue que β_2 é o invariante de Zariski de C .

Note que as lacunas da forma $v_2 + v_1 - jv_0$, maiores que $\beta_2 = \lambda$, podem ser expressas como

$$v_2 + v_1 - m_1 v_0 + \alpha v_0 = \alpha v_0 + v(\Omega_1) - v(dh_0),$$

com $\alpha > 0$.

Portanto, pelo teorema anterior, tais lacunas podem ser eliminadas, bem como a lacuna $v_2 - v_0$. Desse modo, basta considerarmos na parametrização de C as lacunas da forma $v_2 - jv_0$, com $2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_2 - v_1}{v_0} \right\rfloor$, que são maiores que β_2 , i.e., aquelas para as quais $2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor$.

Uma vez que através de uma mudança de coordenadas da forma

$$\begin{aligned} t_1 &= ct \\ y_1 &= c^{v_1} y, \end{aligned}$$

com $c \in K^*$ conveniente, podemos tornar o coeficiente de t^{β_2} igual a 1, temos que todo ramo, com semigrupo $\Gamma = \langle 4, v_1, v_2 \rangle$ é equivalente a um ramo do tipo

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{v_2 + v_1 - 4m_1} + \sum_{j=2}^{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor} a'_j t^{v_2 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 2 - j\right)}. \end{cases}$$

Aplicando o Algoritmo 2.2, temos que $B = \{dx, dy, dh_2, \Omega_1\}$, com $h_2 = y^2 - x^{m_1}$ e $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{4} ydx$ é uma Base Standard Mínima para OdO . De fato, partindo de $\{dx, dy, dh_2\}$, a única DNE obtida no primeiro passo do algoritmo é Ω_1 e a lacuna limitante pode ser considerada $l = v_2 - 4$. Uma simples análise, indica que a ordem da altura de todos os S -processos envolvendo Ω_1 superam l , indicando o fim do algoritmo.

Portanto, podemos reescrever a parametrização acima como

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{\beta_2} + \sum_{\substack{l > \beta_2 \\ l \notin v\left(\frac{\text{OdO}}{dx}\right)}} a'_l t^l. \end{cases}$$

Capítulo 5

Ramos de Gênero 1

Neste capítulo faremos o estudo sistemático das curvas algebróides irredutíveis planas de gênero 1, isto é, daquelas que admitem semigrupo associado da forma $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$.

5.1 Base Standard e Lacunas Especiais

Seja C um ramo com gênero 1, i.e.,

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} a_i t^i, \end{cases}$$

com $a_i \in K$ e $\text{MDC}(v_0, v_1) = 1$.

O semigrupo de valores associado à curva C é $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$, cujo condutor é $\mu = (v_0 - 1)(v_1 - 1)$. Obviamente, $F = \{x, y\}$ é uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} de C .

Pela Observação 3.2, vemos que as lacunas de Γ maiores que v_1 são da forma $l = iv_1 - jv_0$ com $i = 2, \dots, v_0 - 1$ e $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(i-1)v_1}{v_0} \right\rfloor$.

Assim, pela Proposição 4.2 podemos assumir que C seja dada por uma parametrização da forma

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{l \in L} a_l t^l, \end{cases}$$

com $a_l \in K$ e $L = \{l = iv_1 - jv_0; 2 \leq i \leq v_0 - 1 \text{ e } 2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{(i-1)v_1}{v_0} \right\rfloor\}$.

Seja $\Lambda = \{v(\Omega) + 1; \Omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}\}$. Como $\left\lfloor \frac{(v_0-2)v_1}{v_0} \right\rfloor < v_1$, tomando $\sigma = v_1$, o diagrama de lacunas de C (veja Definição 3.3) pode ser obtido através da restrição à $\Lambda \setminus \Gamma$ da aplicação

$$\varrho: \begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ l = iv_1 - jv_0 & \mapsto & (v_1 - j, i). \end{array}$$

Desse modo, o diagrama de lacunas de C estará contido no retângulo $[0, v_1 - 1] \times [0, v_0 - 1] \subset \mathbb{N}^2$.

A ordenação dos elementos de $\varrho(\Lambda)$, em particular dos pontos no diagrama de lacunas, pode ser feita, como vimos no Lema 3.1, através do coeficiente linear da reta de inclinação $-\frac{v_0}{v_1}$ que passa por um ponto de $\varrho(\Lambda)$, ou seja,

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 y_0 + v_0 x_0 < v_1 y_1 + v_0 x_1 \\ \text{ou} \\ v_1 y_0 + v_0 x_0 = v_1 y_1 + v_0 x_1 \text{ e } x_0 < x_1 \end{cases}$$

Note que esta ordenação sugere pesos para as coordenadas dos pontos de \mathbb{N}^2 . De fato, tomando $\rho = (v_0, v_1)$, a ordem acima é a ordem pesada com respeito ao peso ρ e à ordem lexicográfica (Veja Seção 1.1).

Seja $f \in K[[X, Y]]$ uma equação cartesiana para C . Temos que

$$f(X, Y) = \prod_{j=0}^{v_0-1} \left(Y - (\xi^j X^{\frac{1}{v_0}})^{v_1} - \sum_{i>v_1} a_i (\xi^j X^{\frac{1}{v_0}})^i \right) = Y^{v_0} + \sum_{i=1}^{v_0} c_i(X) Y^{v_0-i}, \quad (5.1)$$

onde ξ é uma raiz v_0 -ésima primitiva da unidade e $c_i(X) \in K[[X]]$ com $\text{ord}_X(c_i(X)) \geq \frac{iv_1}{v_0}$, para todo $i = 1, \dots, v_0$.

Seja $\mathcal{J} = \langle f_X, f_Y \rangle \mathcal{O}$ o ideal Jacobiano de C e seja $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle K[[X, Y]]$. Uma vez que

$$\frac{K[[X, Y]]}{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{J}},$$

podemos calcular o número τ de Tjurina de C fixando uma ordem monomial em $K[[X, Y]]$ e computando uma Base Standard para o ideal \mathcal{I} de $K[[X, Y]]$ (Veja [Bec1] e [Bec2]). Isto permite calcular $\sharp(\Lambda \setminus \Gamma)$, mas não permite exibir os elementos de $\Lambda \setminus \Gamma$.

Mostraremos que se a ordem monomial dada a $K[[X, Y]]$ for a ordem pesada acima descrita, então o conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ pode ser obtido facilmente.

Para tanto, seja $B = \{f_0, \dots, f_s\}$ a Base Standard Reduzida de \mathcal{I} , com respeito à ordem pesada definida anteriormente. Assim,

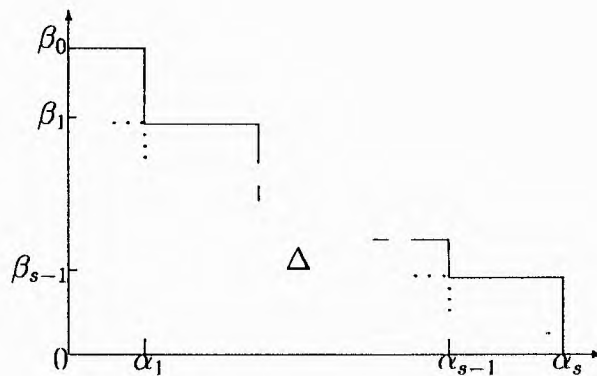
$$f_i = X^{\alpha_i} Y^{\beta_i} + \sum_{j \in J} b_j X^{\alpha_{ij}} Y^{\beta_{ij}},$$

com $b_j \in K^*$, $X^{\alpha_k} Y^{\beta_k} \not\prec X^{\alpha_{ij}} Y^{\beta_{ij}}$ para $i, k = 0, \dots, s$ e $j \in J$, e $X^{\alpha_k} Y^{\beta_k} \not\prec X^{\alpha_i} Y^{\beta_i}$ se $k \neq i$.

Reordenando os elementos de B , podemos assumir sem perda de generalidade que $0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_s$ e $\beta_0 > \dots > \beta_s = 0$ (Note que o fato de $\alpha_0 = \beta_s = 0$ segue da codimensão de \mathcal{I} ser finita).

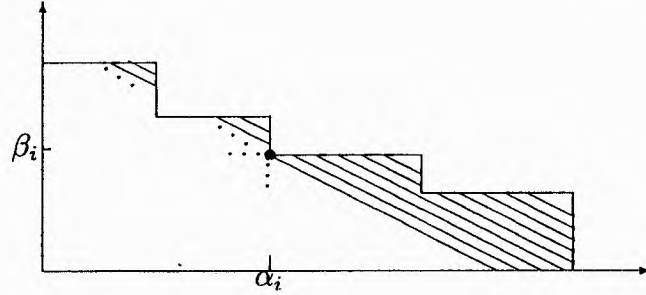
Considerando o par $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{N}^2$ para $i = 0, \dots, s$, vemos que a cada ponto de $\Delta = \mathbb{N}^2 \setminus \bigcup_{i=0}^s \{(\alpha_i, \beta_i) + \mathbb{N}^2\}$ corresponde o monômio $X^{\alpha_i} Y^{\beta_i}$, cujas classes residuais formam uma base do espaço vetorial $\frac{K[[X, Y]]}{\mathcal{I}}$ sobre K .

Assim, o conjunto $\Delta \subseteq \mathbb{N}^2$ pode ser representado por



$$\text{e } \tau = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^s \alpha_i (\beta_{i-1} - \beta_i).$$

Observação 5.1 Uma vez que B é a Base Standard Reduzida de \mathcal{I} ; dado um elemento $f_i = X^{\alpha_i} Y^{\beta_i} + \sum_{j \in J} b_j X^{\alpha_{ij}} Y^{\beta_{ij}} \in B$, os coeficientes b_j podem ser não nulos, somente na região assinalada na figura abaixo.



Vejamos mais detalhadamente a Base Standard Reduzida B de $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$.

Escrevamos $f(X, Y) = \sum_{k \geq v_0 v_1} f_k$, onde cada f_k é um polinômio de grau pesado k . Note que, se $iv_0 + jv_1 > v_0 v_1$, então da expressão de f em (5.1) temos que $f_{iv_0 + jv_1}$ é um monômio da forma $a_{ij} X^i Y^j$. Assim,

$$f(X, Y) = Y^{v_0} - aX^{v_1} + \sum_{iv_0 + jv_1 > v_0 v_1} a_{ij} X^i Y^j$$

$$f_X(X, Y) = -a v_1 X^{v_1 - 1} + \sum_{iv_0 + jv_1 > v_0 v_1 - v_0} b_{ij} X^i Y^j$$

$$f_Y(X, Y) = v_0 Y^{v_0 - 1} + \sum_{iv_0 + jv_1 > v_0 v_1 - v_1} c_{ij} X^i Y^j,$$

com a, a_{ij}, b_{ij} e c_{ij} em K .

Aplicando o algoritmo que nos dá a Base Standard Reduzida B do ideal \mathcal{I} (Veja [Bec1] e [Bec2]), vemos que f não figura em B , uma vez que a potência líder de f_Y divide a potência líder de f .

A saber, podemos tomar $B = \{f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_r\}$ com

$$f_{-1} = Y^{v_0 - 1} + \sum_{\substack{(i,j) \in \Delta \\ jv_1 + iv_0 > (v_0 - 1)v_1}} c'_{ij} X^i Y^j$$

$$f_0 = X^{v_1 - 1} + \sum_{\substack{(i,j) \in \Delta \\ jv_1 + iv_0 > (v_1 - 1)v_0}} b'_{ij} X^i Y^j$$

$$f_k = X^{\alpha_k} Y^{\beta_k} + \sum_{\substack{(i,j) \in \Delta \\ jv_1 + iv_0 > \alpha_k v_0 + \beta_k v_1}} d_{ijk} X^i Y^j$$

com $c'_{ij}, b'_{ij}, d_{ijk} \in K$, $k = 1, \dots, r$ e

$$Y^{v_0-1} \prec X^{v_1-1} \prec X^{\alpha_1} Y^{\beta_1} \prec \dots \prec X^{\alpha_r} Y^{\beta_r}.$$

As séries f_{-1} e f_0 são respectivamente as reduções completas módulo B de f_Y e f_X , que certamente estão presentes em B pois os elementos obtidos pelo algoritmo de Buchberger têm potências líderes maiores que a altura dos S -processos $S(f, f_X)$, $S(f, f_Y)$ e $S(f_X, f_Y)$.

Dessa forma, temos que $\deg_\rho(f_k) = v_0\alpha_k + v_1\beta_k > v_0(v_1 - 1)$, é portanto, $\alpha_k \geq v_1 - 1 - \left\lfloor \frac{\beta_k v_1}{v_0} \right\rfloor$ para $k = 1, \dots, r$.

Como dois pontos de coordenadas inteiras em $[0, v_1 - 1] \times [0, v_0 - 1]$, nunca estão sobre uma mesma reta de inclinação $-\frac{v_0}{v_1}$, temos que a única potência com grau pesado $v_0\alpha_k + v_1\beta_k$ em f_k é a potência líder, assim $\deg_\rho(f_k) = \alpha_k v_0 + \beta_k v_1 = v(f_k) = I(f, f_k)$, com $0 < \beta_k < v_0 - 1$ e $v_1 - 1 - \left\lfloor \frac{\beta_k v_1}{v_0} \right\rfloor \leq \alpha_k < v_1 - 1$; $k = 1, \dots, r$, onde as cotas para β_k e α_k decorrem do fato de B ser a Base Standard Reduzida de \mathcal{I} .

Desse modo, se φ é o monomorfismo definido em (2.1), então $\varphi(B) \subseteq K[[t]]$ é uma Base Standard Mínima de \mathcal{J} com respeito à ordem monomial de $K[[t]]$ dada pela valorização v de $\overline{\mathcal{O}}$.

Portanto, podemos encontrar o conjunto das lacunas especiais $\Lambda \setminus \Gamma$ computando a Base Standard Reduzida B para $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle \subseteq K[[X, Y]]$ com respeito à ordem monomial pesada dada pelo peso $\rho = (v_0, v_1)$ e a ordem lexicográfica. Na verdade, basta que B seja mínima. Para isso, extraímos de B os elementos f_k tais que $\deg_\rho(f_k) = v(f_k) = \beta_k v_1 + \alpha_k v_0$ com $0 < \beta_k < v_0 - 1$ e $v_1 - 1 - \left\lfloor \frac{\beta_k v_1}{v_0} \right\rfloor \leq \alpha_k < v_1 - 1$. Assim, usando o isomorfismo ϕ , definido em (2.6), temos que $\phi(\varphi(f_k))$ é a imagem pelo homomorfismo ψ definido em (2.2), de uma DNEM. Conseqüentemente, pela Proposição 2.3

$$\begin{aligned} v(\phi(\varphi(f_k))) + 1 &= v(\varphi(f_k)) + 1 - \mu = v(f_k) + 1 - \mu = \\ &= \beta_k v_1 + \alpha_k v_0 - (v_0 - 1)(v_1 - 1) + 1 = \\ &= (\beta_k + 1)v_1 - (v_1 - 1 - \alpha_k)v_0 \end{aligned}$$

é a lacuna especial associada a uma DNEM. É claro que apartir destas lacunas especiais obtemos facilmente $\Lambda \setminus \Gamma$.

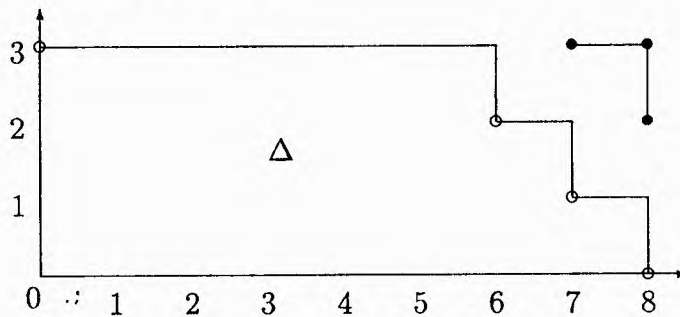
Exemplo 5.1 Seja $f(X, Y) = Y^4 - 2X^5Y^2 - 4X^7Y - X^9 + X^{10}$, cujo semi-grupo de valores é $\Gamma = \langle 4, 9 \rangle$. Fixemos em $K[[X, Y]]$ a ordem pesada com respeito ao peso $\rho = (4, 9)$ e à ordem lexicográfica.

Aplicando o algoritmo para obter uma Base Standard Mínima B para $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$, temos $B = \{f_Y, f_X, f_1, f_2\}$, onde

$$f_1(X, Y) = f - \frac{1}{4}Yf_Y - \frac{1}{9}Xf_X = \frac{1}{9}X^7Y + \frac{1}{9}X^5Y^2 - \frac{1}{9}X^{10}$$

$$f_2(X, Y) = -\frac{1}{81}Yf_X - Xf_1 = \frac{19}{81}X^6Y^2 + \frac{10}{81}X^4Y^3 + \frac{1}{9}X^{11} - \frac{10}{81}X^9Y.$$

A escada de \mathcal{I} , o conjunto Δ e o diagrama de lacunas de f podem ser dados em uma mesma figura, a saber



Note que se $v(f_k) = \beta_k v_1 + \alpha_k v_0$ para $k = 1, 2$, então temos o ponto (α_k, β_k) na escada de \mathcal{I} . Como $v(\phi(\varphi(f_k))) + 1 = (\beta_k + 1)v_1 - (v_1 - 1 - \alpha_k)v_0$, teremos o ponto $(\alpha_k + 1, \beta_k + 1)$ no diagrama de lacunas.

Portanto, como $\mu = 24$ e $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = 3$, a saber $\Lambda \setminus \Gamma = \{14, 19, 23\}$, temos $\tau = 21$.

Observação 5.2 Note que em uma Base Standard Mínima de $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$ com respeito à ordem pesada dada pelo peso $\rho = (v_0, v_1)$ e pela ordem lexicográfica, temos elementos com termos líderes Y^{v_0-1} e X^{v_1-1} que correspondem aos pontos $(0, v_0 - 1)$ e $(v_1 - 1, 0)$ na escada de \mathcal{I} e que não contribuirão para o diagrama de lacunas. Desse modo, o conjunto Δ estará contido no retângulo $[0, v_1 - 1[\times [0, v_0 - 1[$, que contém $\mu = (v_1 - 1)(v_0 - 1) = \dim_K \frac{K[[X, Y]]}{\langle f_X, f_Y \rangle}$ pontos.

Uma vez que além dos pontos $(0, v_0 - 1) + \mathbb{N}^2$ e $(v_1 - 1, 0) + \mathbb{N}^2$ temos outros $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ que não contribuem para Δ e que estão no referido retângulo, obtemos assim, um outro modo de recuperar a relação

$$\tau = \#\Delta = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma).$$

5.2 Ramos com Invariante de Zariski Fixo

Como já observamos, o menor elemento de $\Lambda \setminus \Gamma$, se houver, é $\lambda + v_0$, onde λ é o invariante de Zariski. A saber, λ é a menor potência na parametrização de y que não pertence à $\Gamma \cup \{\Gamma + v_1 - v_0\}$. Dessa forma, podemos estudar as curvas para as quais a ordem da diferencial $\Omega = xdy - \frac{yx}{v_0}dx$ é fixada, o que é equivalente a fixar o invariante de Zariski para a curva C .

Nesta seção, nos preocuparemos com o caso de curvas algebróides irreduzíveis planas, com invariante de Zariski fixo, i.e., curvas que podem ser parametrizadas por

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i, \end{cases}$$

com $a_i \in K$.

A Proposição 3.3, aplicada às curvas de gênero 1, permite reconhecer os S -processos essenciais para obter uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, a partir de $\{dx, dy\}$.

Usando a relação entre uma Base Standard Mínima de $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$ com respeito à ordem pesada dada pelo vetor peso $\rho = (v_0, v_1) \in \mathbb{N}^2$ e à ordem lexicográfica, e uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, podemos recuperar alguns resultados conhecidos.

Em [D2], Delorme apresenta um algoritmo numérico que permite calcular o número de Tjurina e o conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ no caso genérico para uma classe de equisingularidade qualquer de gênero 1. Tal algoritmo é de cunho combinatório e muito específico para gênero 1.

Em [BGM], Briançon, Granger e Maisonobe apresentam um algoritmo para obter a escada do ideal (Base Standard do ideal) $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$ com respeito à ordem pesada dada pelo vetor ρ , onde $f(X, Y) = Y^{v_0} + aX^{v_1} + \sum_{\alpha_i v_0 + \beta_i v_1 > v_0 v_1} c_i X^{\alpha_i} Y^{\beta_i}$ é irredutível, v_0 e v_1 não necessariamente coprimos e os coeficientes $c_i \in K$ são genéricos. Note que, isto equivale a calcular o número de Tjurina mínimo para todas as curvas cujo semigrupo é arbitrário tendo apenas os dois primeiros geradores v_0 e v_1 fixados.

No caso em que $MDC(v_0, v_1) = 1$, i.e., ramos de gênero 1, Briançon, Granger e Maisonobe mostram como obter a fórmula que Delorme apresenta em [D2], e que nos dá o valor mínimo para τ para curvas com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$. A saber,

$$\tau = (v_0 - 1)(v_1 - 1) - \frac{(v_1 - 2)(v_0 - 2)}{4} + \frac{l_0}{4} - \frac{t_1}{2}(r_1 + t_2 - 2) - \frac{1}{2},$$

onde

$$\frac{v_1}{v_0} = r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\vdots}} \frac{1}{r_k}$$

e os l_i 's, bem como os t_i 's, são dados pelas seguintes leis de recorrência decrescentes

$$\begin{aligned} l_k &= 0, \\ t_k &= 1, \\ l_{i-1} &= l_i + t_i r_i, \\ t_{i-1} &= \begin{cases} 0 & \text{se } t_i = 1 \text{ e } l_{i-1} \text{ é par} \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

É relevante observarmos que, apesar da fórmula acima nos fornecer $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$, ela não dá nenhuma indicação sobre os valores das lacunas especiais.

Em [Pe2], Peraire, através de uma pequena modificação no passo inicial do algoritmo de Briançon, Granger e Maisonobe, obtém um algoritmo para determinar a escada de $\mathcal{I} = \langle f, f_X, f_Y \rangle$, onde f é genérica, C possui semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ e o invariante λ de Zariski de C é arbitrariamente fixado. É claro que neste caso $v_0 > 2$, pois caso contrário não haveria λ .

No que tange o cálculo do número τ de Tjurina mínimo, esse algoritmo é essencialmente o Algoritmo 2.2 quando este é aplicado à curva genérica. Observe que nosso algoritmo, além de poder ser aplicado a qualquer curva e não necessariamente às curvas genéricas, fornece as lacunas especiais e uma Base Standard de $\mathcal{O}_d\mathcal{O}$ em qualquer gênero.

Apresentamos abaixo o algoritmo dado por Delorme, em [D2], estendido por Briançon, Granger e Maisonobe, em [BGM] e modificado por Peraire, em [Pe2], interpretado no contexto da teoria aqui desenvolvida no caso em que C é uma curva algebróide irredutível plana com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ e com invariante λ de Zariski fixado.

Teorema 5.1 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i, \end{cases}$$

onde $MDC(v_0, v_1) = 1$, $\lambda = \alpha v_1 - \beta v_0$ é o invariante de Zariski e os coeficientes $a_i \in K$ são considerados genéricos.

Considerando a aplicação

$$\varrho: \Lambda \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ iw_1 - jv_0 \mapsto (v_1 - j, i),$$

o conjunto das lacunas especiais de C pode ser obtido através do seguinte algoritmo:

DADOS: $P_{-1} = (1, v_0)$;
 $P_0 = (v_1, 1)$;
 $P_1 = (v_1 - (\beta - 1), \alpha)$;
 DEFINA: $s := 1$;
 $L_0 := \{\}$;
 $L_1 := \{\varrho^{-1}(P_1) + \gamma \notin \Gamma \text{ e } \gamma \in \Gamma\}$;
 $V_0 :=$ reta vertical que passa por P_0 ;
 $H_{-1} :=$ reta horizontal que passa por P_{-1} ;
 ENQUANTO $L_s \neq L_{s-1}$ FAÇA
 $V_s :=$ reta vertical que passa por P_s ;
 $H_s :=$ reta horizontal que passa por P_s ;
 $l_1 := \varrho^{-1}(a_s, b_s)$ tal que $(a_s, b_s) = V_s \cap H_i$;
 $-1 \leq i \leq s-1$, $i \neq 0$ com b_s mínimo.
 $l_2 := \varrho^{-1}(c_s, d_s)$ tal que $(c_s, d_s) = H_s \cap V_i$;
 $0 \leq i \leq s-1$ com c_s mínimo.
 SE existe $\eta = \min\{l_0 \notin L_s \cup \Gamma; l_0 > \min\{l_1, l_2\}\}$ ENTÃO
 $P_{s+1} := \varrho(\eta)$;
 $L_{s+1} := L_s \cup \{\eta + \gamma \notin \Gamma \text{ e } \gamma \in \Gamma\}$;
 $s := s + 1$;
 SAÍDA: $\Lambda \setminus \Gamma = L_s$.

Dem.: Segundo o Algoritmo 2.2, iniciamos com $B = \{dx, dy\}$ e $F = \{x, y\}$.

O único S -processo a ser considerado no primeiro passo, que coincide com sua redução final módulo (B, F) é $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx$, cuja ordem é $\lambda + v_0 - 1$.

Desse modo, $P_1 = \varrho(v(\Omega_1) + 1)$ e $L_1 = \{v(\Omega_1) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\}$ é parte do conjunto das lacunas especiais de C .

Note que os pontos $P_{-1} = (1, v_0)$ e $P_0 = (v_1, 1)$ correspondem, por meio da associação ϱ , aos valores de dx e dy respectivamente.

Esses fatos, justificam os dados no início do algoritmo, bem como a definição de L_1 .

Como $L_0 \neq L_1$, definimos as retas V_1 e H_1 . Segundo a Proposição 3.3, o próximo S -processo a ser considerado será obtido apartir do menor valor $\varrho^{-1}(a_1, b_1)$ ou $\varrho^{-1}(c_1, d_1)$, onde (a_1, b_1) é a interseção de H_1 com V_0 , e (c_1, d_1) é a interseção de V_1 com H_{-1} .

Se existe uma lacuna l tal que $l \notin L_1$ e $l > \min\{\varrho^{-1}(a_1, b_1), \varrho^{-1}(c_1, d_1)\}$ tome a menor delas, então a generalidade dos coeficientes da parametrização de C , permite garantir que uma redução final do S -processo acima descrito, módulo $B = \{dx, dy, \Omega_1\}$ e F será uma DNEM Ω_2 , com $v(\Omega_2) + 1 = l$. Neste caso, definimos $P_2 = \varrho(l)$ e $L_2 = L_1 \cup \{l + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\}$ é um subconjunto de $\Lambda \setminus \Gamma$.

Se não houver tal lacuna l , então B será fechado com respeito à formação de S -processos, indicando que B é uma Base Standard Mínima para OdO , e nesse caso $\Lambda \setminus \Gamma = L_1$.

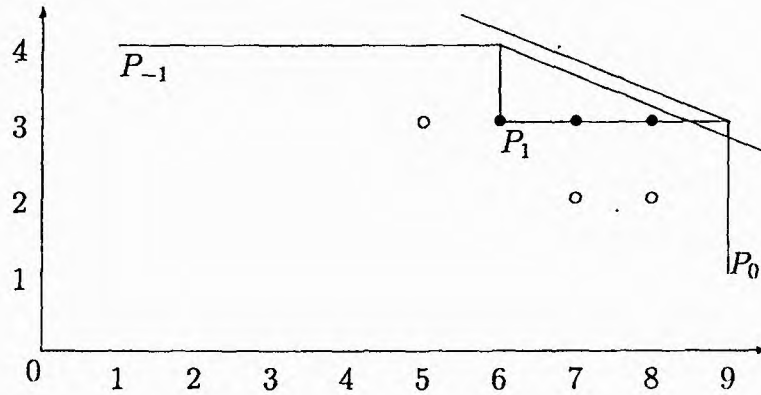
Suponha agora que k passos do algoritmo acima tenham sido realizados, i.e., tenhamos $B = \{dx, dy, \Omega_1, \dots, \Omega_k\}$. Pela Proposição 3.3, basta analisar o S -processo envolvendo Ω_k , obtido pelo menor valor $\varrho^{-1}(a_k, b_k)$ ou $\varrho^{-1}(c_k, d_k)$, onde (a_k, b_k) é a interseção de H_k com V_i para $0 \leq i \leq k-1$ com b_k mínimo e (c_k, d_k) é a interseção de V_k com H_i para $-1 \leq i \leq k-1$, $i \neq 1$ e c_k mínimo.

Se houver uma lacuna $l \notin L_k$ com $l > \min\{\varrho^{-1}(a_k, b_k), \varrho^{-1}(c_k, d_k)\}$ tome a menor delas, então a generalidade dos coeficientes da parametrização garante que haverá uma redução final deste S -processo módulo (B, F) , de modo a obtermos uma nova DNEM Ω_{k+1} , com $v(\Omega_{k+1}) + 1 = l$. Neste caso, $L_{k+1} = L_k \cup \{l + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\}$ é um subconjunto de $\Lambda \setminus \Gamma$ e o algoritmo prossegue com $B = \{dx, dy, \Omega_1, \dots, \Omega_{k+1}\}$, a saber, $P_{k+1} = \varrho(v(\Omega_{k+1}) + 1)$.

Se não houver a lacuna l , acima descrita, o algoritmo finaliza com $\Lambda \setminus \Gamma = L_k$. ■

Exemplo 5.2 *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle = \langle 4, 9 \rangle$. Para o diagrama de lacunas, usaremos como referencial a lacuna $\mu - 1 = 23$, representada pelo ponto localizado no canto superior direito do mesmo.*

a) Considere $\lambda = 11 = 3v_1 - 4v_0$. Aplicando o algoritmo anterior, temos $P_{-1} = (1, 4)$, $P_0 = (9, 1)$ e $P_1 = (6, 3)$ e $L_1 = \{15, 19, 23\}$.

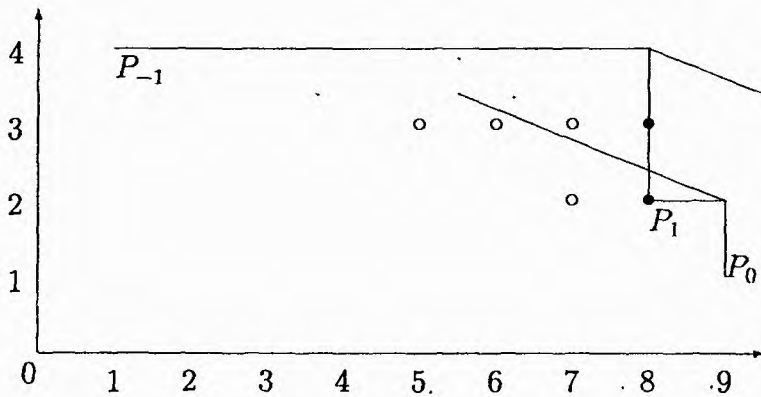


Como não há lacuna $l \notin L_1$ tal que $l > \min\{\varrho^{-1}(6,4), \varrho^{-1}(9,3)\} = \min\{24, 27\}$, o algoritmo finaliza. Dessa forma, para curvas da forma

$$C : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^9 + t^{11} + \sum_{i>11} a_i t^i, \end{cases}$$

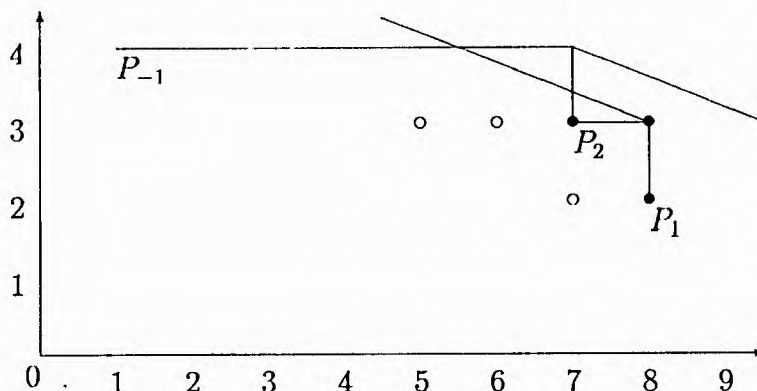
com $a_i \in K$ tomados genericamente, o conjunto de lacunas especiais é $\Lambda \setminus \Gamma = L_1$, o menor valor de τ é $\mu - \#(L_1) = 24 - 3 = 21$ e o diagrama de lacunas é o conjunto dos pontos assinalados na figura anterior.

b) Tome λ mínimo, i.e., $\lambda = 10 = 2v_1 - 2v_0$, assim $P_1 = (8, 2)$ e $L_1 = \{14, 23\}$.



Note que, $19 \notin L_1$ e $19 > \min\{\varrho^{-1}(8,4), \varrho^{-1}(9,2)\} = \min\{32, 18\}$, assim podemos definir $P_2 = \varrho(19) = (7, 3)$ e $L_2 = \{14, 19, 23\}$.

No próximo passo, $(a_2, b_2) = (7, 4)$ e $(c_2, d_2) = (8, 3)$, e desse modo, $\min\{\varrho^{-1}(a_2, b_2), \varrho^{-1}(c_2, d_2)\} = \min\{28, 23\}$. Portanto, o algoritmo finaliza com o diagrama de lacunas como indicado na figura seguinte.



Portanto, o conjunto de lacunas especiais é $\Lambda \setminus \Gamma = L_2$ e o menor valor de τ para a classe de equisingularidade dada por $\Gamma = \langle 4, 9 \rangle$ é $\mu - \#(L_2) = 24 - 3 = 21$.

Mesmo quando não estamos na situação genérica, conhecendo apenas o semigrupo de valores e o invariante λ de Zariski, podemos em alguns casos, ainda com o algoritmo acima, determinar as lacunas especiais e portanto τ , como mostra o corolário abaixo.

Corolário 5.1 *Seja C uma curva algebróide irredutível plana com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ e invariante de Zariski $\lambda = iv_1 - jv_0$. Se*

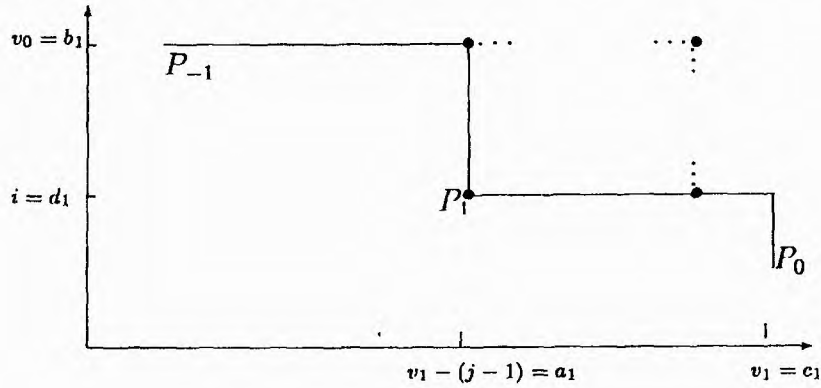
$$(2i - v_0 - 1)v_1 - 2v_0 < \lambda < (2i - v_0 + 1)v_1,$$

então existe apenas uma DNEM, a saber $\Omega_1 = xdy - \frac{y}{v_0}ydx$. Além disso, $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = (v_0 - i)(j - 1)$ e as lacunas especiais são $\{(i + \beta)v_1 - (j - \alpha - 1)v_0$ com $0 \leq \beta \leq v_0 - i - 1$ e $0 \leq \alpha \leq j - 2\}$.

Dem.: A existência de Ω_1 é garantida pela presença do invariante de Zariski $\lambda = iv_1 - jv_0$ na parametrização de C . É óbvio que, se Ω_1 é a única DNEM obtida pelo Algoritmo 2.2, então as ordens das DNE's são da forma $v(\Omega) = v(x^\alpha y^\beta \Omega_1)$, tais que $v(\Omega) + 1 = iv_1 - (j - 1)v_0 + \alpha v_0 + \beta v_1 = (i + \beta)v_1 - (j - 1 - \alpha)v_0$ é uma lacuna, isto nos indica que $0 \leq \beta \leq v_0 - i - 1$ e $0 \leq \alpha \leq j - 2$.

Uma simples contagem mostra que nesse caso teremos $(v_0 - i)(j - 1)$ lacunas especiais.

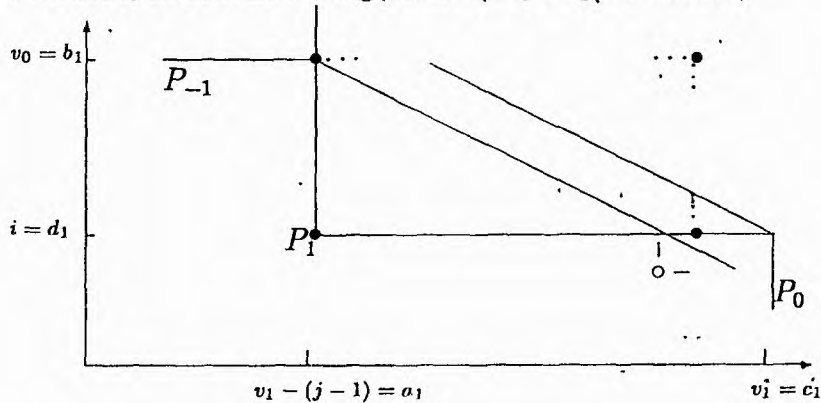
Com as notações utilizadas no teorema anterior temos que $\varrho^{-1}(c_1, d_1) = iv_1$ e $\varrho^{-1}(a_1, b_1) = v_0v_1 - (j - 1)v_0$.



Temos dois casos a considerar:

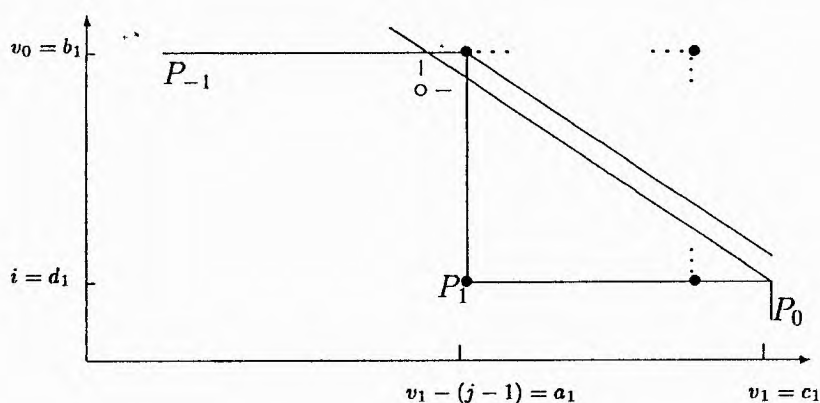
Caso 1: $\varrho^{-1}(c_1, d_1) = iv_1 > v_0v_1 - (j - 1)v_0 = \varrho^{-1}(a_1, b_1)$.

Por hipótese $(2i - v_0 - 1)v_1 - 2v_0 < \lambda$, então $iv_1 - v_1 - v_0 < v_0v_1 - (j - 1)v_0$ e assim $\varrho^{-1}(a_1, b_1) > \varrho^{-1}(c_1, d_1) - v_1 - v_0$, mas dessa forma, não pode haver uma nova DNEM, finalizando o algoritmo (Veja figura abaixo).



Caso 2: $\varrho^{-1}(a_1, b_1) = v_0v_1 - (j - 1)v_0 > iv_1 = \varrho(c_1, d_1)$.

Uma vez que $\lambda < (2i - v_0 + 1)v_1$, então $v_0v_1 - jv_0 - v_1 < iv_1 < v_0v_1 - jv_0 + v_0$, ou seja, $\varrho^{-1}(c_1, d_1) > \varrho^{-1}(a_1, b_1) - v_1 - v_0$, novamente não há lacunas superiores à $\varrho^{-1}(a_1, b_1)$, com exceção das que são da forma $v(\Omega_1) + 1 + \gamma$ com $\gamma \in \Gamma$, isto garante o fim do algoritmo (Veja figura abaixo).



Exemplo 5.3 Considere $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$, com $v_1 < 10$. Uma vez que $\lambda > 2v_1 - 2v_0$, as únicas possibilidades para o invariante de Zariski são:

$$\lambda = 3v_1 - jv_0 \text{ ou } \lambda = 4v_1 - jv_0.$$

Se λ é da forma $3v_1 - jv_0$, então $\lambda \leq 3v_1 - 2v_0$. Como $v_1 < 2v_0$, temos que $\lambda < 2v_1$, portanto estamos nas condições do corolário anterior.

Por outro lado, se $\lambda = 4v_1 - jv_0$, então $2v_1 - 2v_0 < v_1 < \lambda < 4v_1$, novamente satisfazendo as hipóteses do corolário.

Portanto, qualquer que seja o valor do invariante de Zariski, as curvas com semigrupo $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$, com $v_1 < 10$, admitem apenas uma DNEM.

Observação 5.3 A recíproca do corolário anterior não é verdadeira. De fato, existem ramos que admitem apenas $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx$ como DNEM e possuem invariante de Zariski fora do intervalo dado no corolário anterior. Por exemplo, considere

$$C : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^9 + t^{10} + at^{11}. \end{cases}$$

Como $\lambda = 10 = 2v_1 - 2v_0 > 9 = (2i - v_0 + 1)v_1$, estamos fora das condições do corolário anterior. No entanto, aplicando o Algoritmo 2.2 temos as seguintes possibilidades:

- Se $a \neq \frac{19}{18}$, então existem duas DNEM's, a saber $\Omega_1 = xdy - \frac{9}{4}ydx$ e $\Omega_2 = x\Omega_1 - \frac{1}{9}ydy$ com $v(\Omega_1) + 1 = 14$ e $v(\Omega_2) + 1 = 19$.
- Se $a = \frac{19}{18}$, então existe apenas a DNEM $\Omega_1 = xdy - \frac{9}{4}ydx$.

Na verdade, fixado $\Gamma = \langle 4, 9 \rangle$, 10 é o único valor de λ para o qual C pode admitir mais de uma DNEM. De fato, os possíveis valores de λ são:

$$\lambda = 2v_1 - jv_0 \implies \lambda = 10$$

$$\lambda = 3v_1 - jv_0 \implies \lambda \in \{11, 15, 19\}.$$

Se $\lambda = 3v_1 - jv_0$, i.e., $i = 3$, então a condição do corolário anterior é satisfeita e portanto C admite apenas Ω_1 como DNEM.

O Corolário 5.1 é útil para efetuar o estudo completo do diagrama de lacunas para uma classe de equisingularidade fixa em gênero 1, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 5.4 Considere $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$. Os possíveis valores de λ são:

$$\lambda = 2v_1 - jv_0 \implies \lambda = 12$$

$$\lambda = 3v_1 - jv_0 \implies \lambda \in \{13, 18, 23\}$$

$$\lambda = 4v_1 - jv_0 \implies \lambda \in \{14, 19, 24, 29, 34\}$$

O Corolário 5.1 permite afirmar que, se $\lambda \in \{13, 14, 18, 19, 24, 29, 34\}$, então existe apenas $\Omega_1 = xdy - \frac{11}{5}ydx$ como DNEM, e temos:

| λ | lacunas | $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ |
|-----------|------------------------|--------------------------------|
| 13 | 18, 23, 28, 29, 34, 39 | 6 |
| 14 | 19, 24, 29, 34, 39 | 5 |
| 18 | 23, 28, 34, 39 | 4 |
| 19 | 24, 29, 34, 39 | 4 |
| 24 | 29, 34, 39 | 3 |
| 29 | 34, 39 | 2 |
| 34 | 39 | 1 |

Resta analisarmos os casos $\lambda = 12$ e $\lambda = 23$.

Se $\lambda = 23$, então pelo Teorema 4.1, podemos considerar

$$C : \begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{23} + at^{24} + bt^{29}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Como $\Omega_1 = xdy - \frac{11}{5}ydx$ e $\psi(\Omega_1) = 12t^{27} + 13at^{28} + 18bt^{33}$, temos que $v(\Omega_1) + 1 = 28$, $v(y\Omega_1) + 1 = 39$ e assim a lacuna limitante é $l = 34$.

O próximo S -processo mínimo é $\Omega_2 = x\Omega_1 - \frac{12}{11}y^2dy$ e $\psi(\Omega_2) = 13at^{33} + 18bt^{38} + \dots$.

Surgem as seguintes possibilidades:

Se $a \neq 0$, então Ω_2 é uma nova DNEM, $v(\Omega_2) + 1 = 34$ e a lacuna limitante é $l = 29$, indicando o fim do algoritmo.

Se $a = 0$, então o algoritmo finaliza.

Resumindo o caso $\lambda = 23$, temos

| a | lacunas | $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ |
|----------|------------|--------------------------------|
| $= 0$ | 28, 39 | 2 |
| $\neq 0$ | 28, 34, 39 | 3 |

Analisemos agora o caso em que $\lambda = 12$. Eliminando os termos em $\Gamma \cup \{\Gamma - v_1 + v_0\} \cup \{\Gamma^* + \lambda\}$, como no Teorema 4.1, podemos considerar

$$C : \begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + at^{13} + bt^{14} + ct^{18} + dt^{19} + et^{24} + ft^{29}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Uma vez que, $\Omega_1 = xdy - \frac{11}{5}ydx$ e $\psi(\Omega_1) = t^{16} + 2at^{17} + 3bt^{18} + 7ct^{22} + 8dt^{23} + 13et^{28} + 18ft^{33}$, $v(\Omega_1) + 1 = 17$, $v(y\Omega_1) + 1 = 28$ e $v(\Omega_1) + 1 = 39$, temos que $l = 34$ é a lacuna limitante.

O próximo S -processo mínimo a ser considerado é

$$\Omega_2 = 11x\Omega_1 - ydy,$$

com $\psi(\Omega_2) = (22a-23)t^{22} + (33b-12-24a)t^{23} - 25(a+b)t^{24} - 13(a^2+b)t^{25} + \dots$.

Temos dois casos a analisar:

1. $a \neq \frac{23}{22}$:

Neste caso, Ω_2 é DNEM. Uma vez que $v(\Omega_2) + 1 = 23$ e $v(y\Omega_2) + 1 = 34$, a lacuna limitante passa a ser $l = 29$. No próximo passo, consideramos

o S -processo mínimo $\Omega_3 = x\Omega_2 - (22a - 23)y\Omega_1$, desse modo, temos $\psi(\Omega_3) = 11(3b - 4a^2 + 1)t^{28} + 11(4b + 4a - 6a^2 - 6ab)t^{29} + \dots$.

Se $b \neq \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$, então Ω_3 é uma nova DNEM. Como $v(\Omega_3) + 1 = 29$, a lacuna limitante passa a ser $l = 24$, indicando o fim do algoritmo. Por outro lado, se $b = \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$, então o algoritmo finaliza com Ω_1 e Ω_2 .

2. $a = \frac{23}{22}$:

Temos $\psi(\Omega_2) = 33\left(b - \frac{136}{121}\right)t^{23} + \left(-\frac{575}{22} - 25b\right)t^{24} + \dots$, e as seguintes possibilidades:

(a) $b \neq \frac{136}{121}$:

Temos que Ω_2 é uma nova DNEM, com $v(\Omega_2) + 1 = 24$, $v(x\Omega_2) + 1 = 29$, $v(x^2\Omega_2) + 1 = 34$ e a lacuna limitante é $l = 23$, indicando o fim do algoritmo.

(b) $b = \frac{136}{121}$:

Neste caso, podemos reduzir Ω_2 de forma a obtermos:

$$\Omega'_2 = \Omega_2 + \frac{2625}{242}x^4 dx + \frac{1911}{220}yx^2 dx - \frac{62319}{26620}y^2 dx - \left(\frac{504725}{117128} + 77c\right)y\Omega_1,$$

$$\text{com } \psi(\Omega'_2) = At^{28} + \dots, \text{ onde } A = \left(88d - \frac{440215}{644204} - 267c\right).$$

Podemos ter:

i. $A \neq 0$:

Temos que Ω'_2 é DNEM com $v(\Omega'_2) + 1 = 29$, $v(x\Omega'_2) + 1 = 34$ e a lacuna limitante é $l = 24$, indicando que o algoritmo finaliza.

ii. $A = 0$:

Nesta situação podemos reduzir Ω'_2 . A saber, sua redução final é:

$$\begin{aligned} \Omega''_2 = \Omega'_2 + \frac{1}{5} & \left(\frac{195442184125}{2522702864} + \frac{18250}{89}d \right) x^5 dx + \\ & + \frac{1}{5} \left(\frac{251638551583}{3784054296} + \frac{56405}{267}d \right) yx^3 dx + \\ & - \frac{1}{5} \left(\frac{621173591305}{41624597256} + \frac{49463}{2937}d \right) y^2 x dx + \\ & - \frac{1}{11} \left(\frac{4209205750711}{457870569816} + \frac{4407769}{64614}d \right) y^2 dy, \end{aligned}$$

com $\psi(\Omega''_2) = Bt^{33} + \dots$, onde

$$B = \left(\frac{1807239518543737}{5379063454198368} - \frac{4174016}{71289}d^2 + 143e + \frac{462825631}{379542636}d \right)$$

Temos as possibilidades:

- $B \neq 0$:
Temos que Ω_2'' é uma DNEM, $v(\Omega_2'') + 1 = 34$ e o algoritmo finaliza.
- $B = 0$:
Neste caso o algoritmo finaliza com uma única DNEM, a saber Ω_1 .

Resumindo o estudo para $\lambda = 12$, temos

| | | | | |
|------------------------|---------------------------------|------------|---|---|
| $a \neq \frac{23}{22}$ | $b \neq \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$ | | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 23, 28, 29, 34, 39\}$ | |
| | $b = \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$ | | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 23, 28, 34, 39\}$ | |
| $a = \frac{23}{22}$ | $b \neq \frac{136}{121}$ | | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 24, 28, 29, 34, 39\}$ | |
| | $b = \frac{136}{121}$ | $A \neq 0$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 29, 34, 39\}$ | |
| | | $A = 0$ | $B \neq 0$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 34, 39\}$ |
| | | | $B = 0$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 39\}$ |

Façamos agora o resumo para as possibilidades de $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ e o diagrama de lacunas. Como referencial tomamos o ponto que se localiza no canto superior direito como a lacuna $(v_0 - 1)v_1 - v_0 = \mu - 1 = 39$.

| $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ | λ | lacunas | diagrama |
|--------------------------------|-----------|----------------|---------------|
| 1 | 34 | 39 | • |
| 2 | 29 | 34, 39 | • • |
| | 23 | 28, 39 | • • |
| 3 | 24 | 29, 34, 39 | • • • |
| | 23 | 28, 34, 39 | • • • |
| | 12 | 17, 28, 39 | • • • |
| 4 | 19 | 24, 29, 34, 39 | • • • • |
| | 18 | 23, 28, 34, 39 | • • • • |
| | 12 | 17, 28, 34, 39 | • • • • |

| | | | |
|---|----|------------------------|-------------------|
| 5 | 14 | 19, 24, 29, 34, 39 | • • • • • |
| | 12 | 17, 28, 29, 34, 39 | • • • • • |
| | 12 | 17, 23, 28, 34, 39 | • • • • • |
| 6 | 13 | 18, 23, 28, 29, 34, 39 | • • • • • • |
| | 12 | 17, 24, 28, 29, 34, 39 | • • • • • • |
| | 12 | 17, 23, 28, 29, 34, 39 | • • • • • • |

5.3 Ramo λ -canônico

Como já observamos, na seção anterior, se C é uma curva algébrica irreduzível plana de gênero 1 e λ seu invariante de Zariski, então C pode ser dada por uma parametrização da forma

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda} a_i t^i. \end{cases}$$

Se $a_i = 0$ para todo $i > \lambda$, então o invariante λ determina completamente a classe de equivalência de C . Chamaremos a curva

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda, \end{cases}$$

de *ramo λ -canônico* associado ao semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$.

Uma questão natural que surge, é saber qual o valor de τ , ou mais especificamente, qual o conjunto de lacunas especiais para curvas λ -canônicas.

Carbonne, em [Car], apresenta a seguinte proposição:

Proposição 5.1 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda, \end{cases}$$

com $MDC(v_0, v_1) = 1$, $v_0 \ll v_1 < \lambda$ e $\lambda = (v_0 - 1)v_1 - jv_0$ com $j = 2, \dots, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor$, então $\tau = \mu - (j - 1)$ e o conjunto das lacunas especiais é $\Lambda \setminus \Gamma = \{\lambda + iv_0; 1 \leq i \leq j - 1\}$.

Dem.: Segue diretamente do Corolário 5.1. ■

Vamos aplicar o Algoritmo 2.2 para encontrar uma Base Standard Mínima de $\mathcal{O}_d\mathcal{O}$, obtendo uma fórmula explícita para as DNEM's, bem como para $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ quando C é um ramo λ -cânônico com invariante de Zariski $\lambda = (v_0 - 1)v_1 - jv_0$, com $j = 2, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0 - 2)v_1}{v_0} \right\rfloor$, i.e., para $\lambda \equiv (v_0 - 1)v_1 \pmod{v_0}$.

Considerando o homomorfismo de \mathcal{O} -módulos ψ definido em (2.2), no primeiro passo do Algoritmo 2.2 obtemos

$$\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx,$$

com $\psi(\Omega_1) = (\lambda - v_1)t^{\lambda + v_0 - 1}$.

Note que temos $j - 1$ lacunas especiais da forma $v(x^k\Omega_1) + 1$ com $k = 0, \dots, j - 2$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar $\Omega_1 = \frac{1}{\lambda - v_1} \left(xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx \right)$, assim $\psi(\Omega_1) = t^{\lambda + v_0 - 1}$.

O lema abaixo nos auxiliará a comparar lacunas.

Lema 5.1 *Seja $MDC(v_0, v_1) = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Temos que $av_1 - bv_0 > (a - d)v_1 - cv_0$ se, e somente se, $b - c \leq \left\lfloor \frac{dv_1}{v_0} \right\rfloor$.*

Dem.: De fato, $av_1 - bv_0 > (a - d)v_1 - cv_0$ é equivalente a $bv_0 < dv_1 + cv_0$, ou seja, $b - c \leq \left\lfloor \frac{dv_1}{v_0} \right\rfloor$. ■

Agora observe que se $v_0 = 3$, então as lacunas especiais são aquelas maiores ou iguais a $\lambda + v_0 = (v_0 - 1)v_1 - (j - 1)v_0$, ou seja, da forma $(v_0 - 1)v_1 - (j - k - 1)v_0$ com $0 \leq k \leq j - 2$.

Se $v_0 > 3$, então toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - 1)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ j, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ é especial. Realmente, se $v_0 > 3$, então existem lacunas maiores que v_1 da forma $(v_0 - 2)v_1 - kv_0$, com $k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0 - 3)v_1}{v_0} \right\rfloor$. Pelo

lema anterior, temos que $(v_0 - 1)v_1 - \gamma v_0 > (v_0 - 2)v_1 - v_0$ se, e somente se, $\gamma - 1 \leq \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor$.

Assim, independente do valor de v_0 , toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - 1)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ j, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ é especial e é obtida no primeiro passo do algoritmo.

A Proposição 3.3, indica que o próximo S -processo mínimo de $B = \{dx, dy, \Omega_1\}$ a ser considerado é

$$\Omega_2 = y\Omega_1 - \frac{1}{v_0}x^{v_1-j}dx,$$

onde $\psi(\Omega_2) = t^{2\lambda+v_0-1}$.

Note que $2\lambda + v_0 = (v_0 - 2)v_1 + (v_1 - 2j + 1)v_0$.

Se $j < \frac{v_1+2}{2}$, então $2\lambda + v_0 \in \Gamma$ e como $2\lambda + v_0 > (v_0 - 2)v_1 - v_0$, a redução final de Ω_2 módulo B e $F = \{x, y\}$ é zero.

Assim, se

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^{(v_0-1)v_1-jv_0}. \end{cases}$$

com $2 \leq j < \frac{v_1+2}{2}$ e $v_0 \geq 3$, então $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = j - 1$.

Para continuar a análise consideramos $\frac{v_1+2}{2} \leq j$ e $v_0 \geq 4$. Dessa forma, $2\lambda + v_0 = (v_0 - 2)v_1 - (2j - v_1 - 1)v_0$ é lacuna, assim Ω_2 é uma nova DNEM e temos $2j - v_1 - 1$ novas lacunas especiais da forma $v(x^k\Omega_2) + 1 = 2\lambda + v_0 + kv_0 = (v_0 - 2)v_1 - (2j - v_1 - 1 - k)v_0$ com $k = 0, \dots, 2j - v_1 - 2$.

Se $v_0 = 4$, então todas as lacunas maiores que v_1 são da forma $(v_0 - 1)v_1 - \alpha v_0$, com $\alpha = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0-2)v_1}{v_0} \right\rfloor$ ou $(v_0 - 2)v_1 - \beta v_0$, com $\beta = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0-3)v_1}{v_0} \right\rfloor$. Desse modo, toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - 2)v_1 - (2j - v_1 - 1)v_0$ é especial e o algoritmo finaliza.

Se $v_0 > 4$, então todas as lacunas maiores ou iguais a $(v_0 - 2)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ 2j - v_1 - 1, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor \right\}$ é lacuna especial. De fato, uma vez que existem lacunas acima de v_1 , da forma $(v_0 - 3)v_1 - kv_0$ com $k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0-4)v_1}{v_0} \right\rfloor$, o lema anterior nos indica que $(v_0 - 2)v_1 - \gamma v_0 > (v_0 - 3)v_1 - v_0$ se, e somente se, $\gamma \leq \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1$.

Assim, para qualquer valor de $v_0 \geq 4$, toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - 2)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ 2j - v_1 - 1, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ é obtida após o segundo passo do algoritmo.

Se $v_0 > 4$, então o próximo S -processo mínimo de $B' = \{dx, dy, \Omega_1, \Omega_2\}$ que merece análise é

$$\Omega_3 = y\Omega_2 - x^{v_1-j}\Omega_1,$$

onde $\psi(\Omega_3) = t^{3\lambda+v_0-1}$.

Note que $3\lambda + v_0 = (v_0 - 3)v_1 - (3j - 2v_1 - 1)v_0$. Se $j < \frac{2v_1+2}{3}$, então $3\lambda + v_0 \in \Gamma$ e a redução de Ω_3 só poderá nos dar uma lacuna especial já obtida, ou seja, a redução final de Ω_3 módulo (B, F) será zero, indicando o fim do algoritmo, onde $F = \{x, y\}$. Dessa forma, se

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^{(v_0-1)v_1-jv_0}, \end{cases}$$

com $\frac{v_1+2}{2} \leq j < \frac{2v_1+2}{3}$ e $v_0 \geq 4$, então $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = j - 1 + 2j - v_1 - 1 = 3j - v_1 - 2$.

O lema abaixo, corresponde ao passo indutivo das afirmações acima.

Lema 5.2 *Se Ω_i é DNEM com $v(\Omega_i) + 1 = i\lambda + v_0$ com $i = 1, \dots, k$ para $\frac{(k-1)v_1+2}{k} \leq j$ e $v_0 \geq 2+k$, então toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - k)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ kj - (k-1)v_1 - 1, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ é lacuna especial.*

Dem.: Note que o lema já foi verificado para $k = 1$ e $k = 2$.

Se $v_0 = k + 2$, então não temos lacunas maiores que v_1 da forma $(v_0 - k - 1)v_1 - \alpha v_0$. Como $v(\Omega_k) + 1 = (v_0 - k)v_1 - (kj - (k-1)v_1 - 1)v_0$ é lacuna especial e $v(\Omega_{i-1}) < v(\Omega_i)$, todas as lacunas maiores ou iguais a $v(\Omega_k) + 1$ são especiais. Note que $kj - (k-1)v_1 - 1 \leq \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor$.

Se $v_0 > 2 + k$, então podem existir lacunas maiores que v_1 da forma $(v_0 - k - 1)v_1 - \alpha v_0$ com $\alpha = 1, \dots, \left\lfloor \frac{(v_0 - k - 2)v_1}{v_0} \right\rfloor$. Pelo lema anterior, $(v_0 - k)v_1 - \gamma v_0 > (v_0 - k - 1)v_1 - v_0$ se, e somente se, $\gamma \leq \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1$.

Novamente, como $v(\Omega_{i-1}) < v(\Omega_i)$, temos que toda lacuna maior ou igual a $(v_0 - k)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ kj - (k-1)v_1 - 1, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ é especial. ■

No desenrolar da prova do lema anterior, vemos que se $v_0 = 2 + k$, então o algoritmo finaliza. Se $v_0 > 2 + k$ e $j \geq \frac{(k-1)v_1+2}{k}$, então a Proposição 3.3 indica que o próximo S -processo mínimo a ser considerado é

$$\Omega_{k+1} = y\Omega_k - x^{v_1-j}\Omega_{k-1}.$$

Suponha que $\Omega_i = t^{i\lambda+v_0-1}$ para $1 \leq i \leq k$, assim $\psi(\Omega_{k+1}) = t^{(k+1)\lambda+v_0-1}$.

Note que $v(\Omega_{k+1}) + 1 = (k+1)\lambda + v_0 = (v_0 - (k+1))v_1 - ((k+1)j - kv_1 - 1)v_0$. Desse modo, se $(k+1)j - kv_1 - 1 < 1$, então $(k+1)\lambda + v_0 \in \Gamma$, mais ainda, como $(k+1)\lambda + v_0 > (v_0 - k)v_1 - \gamma v_0$ com $\gamma = \min \left\{ kj - (k-1)v_1 - 1, \left\lfloor \frac{v_1}{v_0} \right\rfloor + 1 \right\}$ e o

S -processo acima possui redução final zero módulo $\{dx, dy, \Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ e F , o que indica o fim do algoritmo. Observe que a condição $(k+1)j - kv_1 - 1 < 1$ é equivalente a $j < \frac{kv_1+2}{k+1}$.

Por outro lado, se $j \geq \frac{kv_1+2}{k+1}$, então Ω_{k+1} é DNEM e temos $(k+1)j - kv_1 - 1$ novas lacunas especiais da forma $v(x^\alpha \Omega_{k+1}) + 1$ com $\alpha = 0, \dots, (k+1)j - kv_1 - 2$.

Dessa forma, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.2 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^{(v_0-1)v_1-jv_0} \end{cases}$$

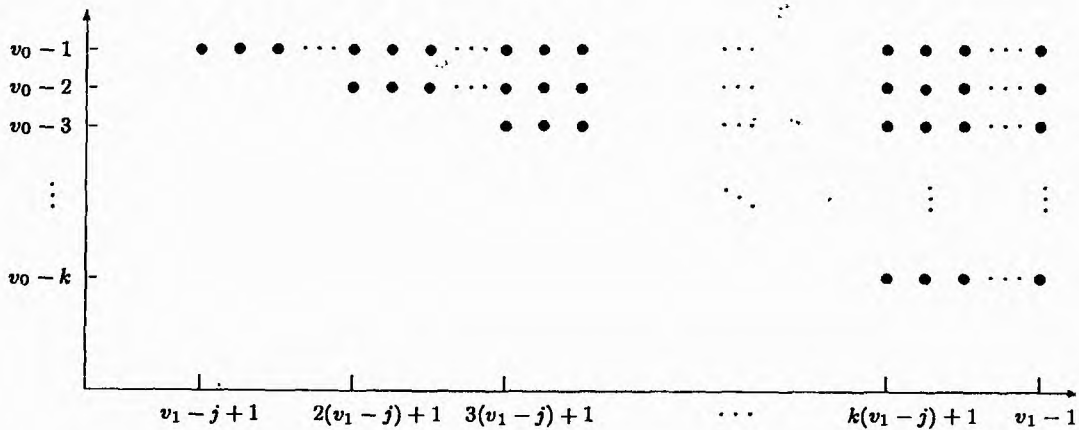
Se $v_0 \geq 2 + k$ e $\frac{(k-1)v_1+2}{k} \leq j < \frac{kv_1+2}{k+1}$ com $k > 0$, então $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = k \left(v_1 - 1 - \frac{(v_1-j)(k+1)}{2} \right)$. Além disso temos k DNEM's, a saber

$$\Omega_1 = \left(\frac{1}{\lambda - v_1} \right) \left(xdy - \frac{v_1}{v_0} ydx \right) \text{ com } \psi(\Omega_1) = t^{\lambda+v_0-1},$$

$$\Omega_2 = y\Omega_1 - \frac{1}{v_0} x^{v_1-j} dx \text{ com } \psi(\Omega_2) = t^{2\lambda+v_0-1},$$

$$\Omega_i = y\Omega_{i-1} - x^{v_1-j}\Omega_{i-2} \text{ com } \psi(\Omega_i) = t^{i\lambda+v_0-1} \text{ e } 3 \leq i \leq k.$$

Assim, $v(\Omega_i) + 1 = i\lambda + v_0 = (v_0 - i)v_1 - (ij - (i - 1)v_1 - 1)v_0$ com $1 \leq i \leq k$ e o diagrama de lacunas é dado por



Note que, se $k = 1$, então $2 \leq j < \frac{v_1}{2} + 1$. Como $\left[\frac{v_1}{v_0}\right] < \frac{v_1}{2} + 1$, temos como caso particular a Proposição 5.1.

Além dos ramos λ -canônicos, com $\lambda = (v_0 - 1)v_1 - jv_0$, podemos obter a descrição completa das DNEM's e do conjunto de lacunas especiais para os ramos λ -canônicos com $\lambda = 2v_1 - jv_0$, i.e., para ramos da forma

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1 - jv_0}. \end{cases}$$

Note que para $2v_1 - jv_0$ ser efetivamente o invariante de Zariski, devemos ter $j \geq 2$ e $2v_1 - jv_0 > v_1$, ou seja, $j \leq \left[\frac{v_1}{v_0}\right]$. Assim, estamos considerando $2 \leq j \leq \left[\frac{v_1}{v_0}\right]$, em particular, devemos ter $v_1 > 2v_0$ e $v_0 > 2$.

Proposição 5.3 *Seja*

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda, \end{cases}$$

com $\lambda = 2v_1 - jv_0$, $2 \leq j \leq \left[\frac{v_1}{v_0}\right]$ e $v_0 > 2$.

O número de lacunas especiais de C é $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = \left[\frac{v_0-1}{2}\right] \left(\left[\frac{v_0}{2}\right] j - 1\right)$, das quais $v_0 - 2$ correspondem a DNEM's. Se $\Omega_{-1} = \frac{dx}{v_0}$ e $\Omega_0 = dy$, então as DNEM's são dadas, para $1 \leq i \leq \left[\frac{v_0-1}{2}\right]$, por

$$\Omega_{2i-1} = -\frac{1}{(i-2)\lambda + v_1} \left(x\Omega_{2(i-1)} - ((i-1)\lambda + v_1)y\Omega_{2(i-1)-1} \right),$$

com $\psi(\Omega_{2i-1}) = t^{i\lambda + v_1 - 1}$ e

$$\Omega_{2i} = y\Omega_{2(i-1)} - ((i-1)\lambda + v_1)x\Omega_{2i-1},$$

com $\psi(\Omega_{2i}) = (i\lambda + v_1)t^{i\lambda + v_1 - 1} + \lambda t^{(i+1)\lambda - 1}$.

Dem.: Vamos usar a Proposição 3.3 que nos indica os S -processos privilegiados para obter as DNEM's. Mostraremos que existem $v_0 - 2$ DNEM's. Como pela Observação 3.3 este é o número máximo de DNEM's, o algoritmo finaliza. Em seguida, a partir das ordens das DNEM's obtidas, obteremos $\#(\Lambda \setminus \Gamma)$ simplesmente contando os pontos do diagrama de lacunas.

A existência das DNEM's anunciada será feita por indução sobre i .

No primeiro passo do algoritmo para obter uma Base Standard de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ (Veja Algoritmo 2.2), o S -processo a ser considerado é

$$S = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx,$$

onde $\psi(S) = (\lambda - v_1)t^{\lambda+v_0-1}$

Assim, definimos

$$\Omega_1 = \frac{1}{\lambda - v_1} \left(xdy - \frac{v_1}{v_0}dx \right) = \frac{1}{\lambda - v_1} (x\Omega_0 - v_1y\Omega_{-1}),$$

donde $\psi(\Omega_1) = t^{\lambda+v_0-1}$.

Se $v_0 = 3$, então não pode haver outra DNEM.

Suponha que $v_0 > 3$. Pela Proposição 3.3, a próxima DNEM, se houver, será obtida através da redução final do S -processo de menor altura dentre

$$ydy - v_1x^{j-1}\Omega_1$$

e

$$v_0y^{v_0-2}\Omega_1 - v_1x^{v_1-j}dx.$$

O primeiro tem altura $2v_1 - 1$ e o segundo tem altura $(v_0 - 2)v_1 + \lambda + v_0 - 1$. Uma vez que $v_0 > 2$, temos que

$$(v_0 - 2)v_1 + \lambda + v_0 - 1 = 2v_1 + v_0 - 1 + (v_0 - 2)v_1 - jv_0 \geq$$

$$\geq 2v_1 + v_0 - 1 + v_1 - jv_0 > 2v_1 + v_0 - 1 > 2v_1 - 1,$$

e portanto, tomamos $\Omega_2 = ydy - v_1x^{j-1}\Omega_1$, onde $\psi(\Omega_2) = (\lambda + v_1)t^{\lambda+v_1-1} + \lambda t^{2\lambda-1}$.

Se $v_0 = 4$, então não haverá mais DNEM e o algoritmo finaliza, mostrando que as expressões para as DNEM's são válidas para $i = 1$.

Suponha que o resultado seja válido para todo k com $1 \leq k \leq i < \left\lfloor \frac{v_0-1}{2} \right\rfloor$. Deste modo, devemos ter $v_0 > 2(i+1) - 1$ e

$$\Omega_{2k-1} = \frac{1}{(k-2)\lambda + v_1} \left(x\Omega_{2(k-1)} - ((k-1)\lambda + v_1)y\Omega_{2(k-1)-1} \right),$$

onde $\psi(\Omega_{2k-1}) = t^{k\lambda+v_1-1}$ e

$$\Omega_{2k} = y\Omega_{2(k-1)} - ((k-1)\lambda + v_1)x\Omega_{2k-1};$$

onde $\psi(\Omega_{2k}) = (k\lambda + v_1)t^{k\lambda+v_1-1} + \lambda t^{(k+1)\lambda-1}$.

Se $v_0 = 2(i+1)$, então o algoritmo finaliza, uma vez que temos $2i$ DNEM's. Vamos supor que $v_0 > 2(i+1)$.

Segundo a Proposição 3.3, para obter a próxima DNEM, se houver, basta considerar dentre os S -processos

$$S_1 = x\Omega_{2i} - (i\lambda + v_1)y\Omega_{2i-1}$$

e

$$S_2 = y^{v_0-(2i+1)}\Omega_{2i} - (i\lambda + v_1)x^{v_1-ij-1}\Omega_{-1},$$

o de menor altura.

Como

$$\begin{aligned} v(ht(S_2)) &= (v_0 - (2i+1))v_1 + i\lambda + v_1 - 1 > v_1 + i\lambda + v_1 - 1 > \\ &> v_0 + i\lambda + v_1 - 1 = v(ht(S_1)), \end{aligned}$$

tomamos

$$\Omega_{2(i+1)-1} = \frac{-1}{(i-1)\lambda + v_1} (x\Omega_{2i} - (i\lambda + v_1)y\Omega_{2i-1}),$$

onde $\psi(\Omega_{2(i+1)-1}) = t^{(i+1)\lambda+v_0-1}$.

Se $v_0 = 2(i+1) + 1$, então o algoritmo finaliza, pois teremos $v_0 - 2 = 2(i+1) - 1$ DNEM's.

Se $v_0 > 2(i+1) + 1$ então, novamente pela Proposição 3.3, o próximo S -processo a ser analisado é o de menor altura dentre

$$S_1 = y\Omega_{2i} - (i\lambda + v_1)x^{j-1}\Omega_{2(i+1)-1}$$

e

$$S_2 = y^{v_0-2(i+1)}\Omega_{2(i+1)-1} - x^{v_1-(i+1)j}\Omega_{-1}.$$

Uma vez que $v(ht(S_1)) = (i+1)\lambda + v_1 + v_0 - 1$ e $v(ht(S_2)) = (v_0 - 2(i+1))v_1 + (i+1)\lambda + v_0 - 1 > v(ht(S_1))$, tomamos

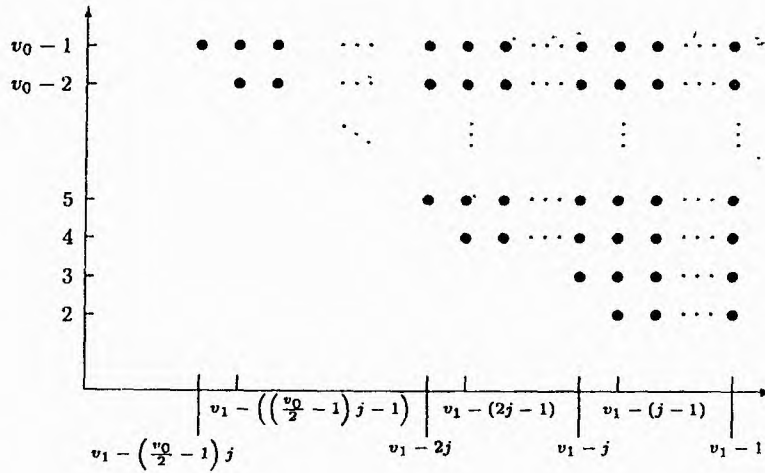
$$\Omega_{2(i+1)} = y\Omega_{2i} - (i\lambda + v_1)x^{j-1}\Omega_{2(i+1)-1},$$

onde $\psi(\Omega_{2(i+1)}) = ((i+1)\lambda + v_1)t^{(i+1)\lambda+v_1-1} + \lambda t^{(i+2)\lambda-1}$.

Assim, as expressões para as DNEM's, são verdadeiras para todo $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_0-1}{2} \right\rfloor$. Resta agora efetuarmos a contagem dos pontos do diagrama de lacunas.

Para facilitar, vamos considerar dois casos:

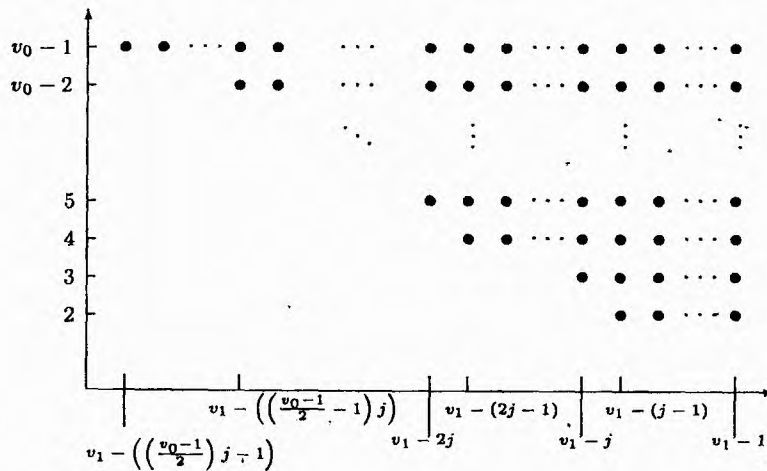
Caso a) v_0 par. Neste caso, o diagrama de lacunas é



Assim,

$$\begin{aligned} \#(\Lambda \setminus \Gamma) &= \sum_{i=2}^{v_0-1} (v_0 - i) + \sum_{i=1}^{\frac{v_0-2}{2}} (j-2)(v_0 - 2i) = \\ &= \frac{(v_0-1)(v_0-2)}{2} + (j-2) \left(\frac{v_0}{2}\right) \left(\frac{v_0-2}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{v_0-2}{2}\right) \left((j-2)\frac{v_0}{2} + v_0 - 1\right) = \\ &= \left[\frac{v_0-1}{2}\right] \left((j-2) \left[\frac{v_0}{2}\right] + 2 \left[\frac{v_0}{2}\right] - 1\right) = \left[\frac{v_0-1}{2}\right] \left(j \left[\frac{v_0}{2}\right] - 1\right). \end{aligned}$$

Caso b) v_0 ímpar. O diagrama de lacunas para este caso é



Dessa forma, temos .

$$\begin{aligned}
 \#(\Lambda \setminus \Gamma) &= \sum_{i=2}^{v_0-1} (v_0 - i) + \sum_{i=1}^{\frac{v_0-1}{2}} (j-2)(v_0 - 2i) = \\
 &= \frac{(v_0+1)(v_0-2)}{2} + (j-2) \left(\frac{v_0-1}{2} \right) \left(\frac{v_0-1}{2} \right) = \\
 &= \left(\frac{v_0-1}{2} \right) \left((j-2) \frac{v_0-1}{2} + v_0 - 2 \right) = \\
 &= \left[\frac{v_0-1}{2} \right] \left((j-2) \left[\frac{v_0}{2} \right] + 2 \left[\frac{v_0}{2} \right] - 1 \right) = \left[\frac{v_0-1}{2} \right] \left(j \left[\frac{v_0}{2} \right] - 1 \right). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

As proposições anteriores e a análise de alguns exemplos nos levam a formular a seguinte conjectura.

Conjectura 5.1 *Dado o ramo λ -canônico*

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + t^\lambda, \end{cases}$$

o conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ das lacunas especiais, pode ser obtido aplicando o seguinte algoritmo:

DADOS: v_0, v_1 e λ ;
DEFINA: $v(\Omega_{-1}) := v_0 - 1$;
 $v(\Omega_0) := v_1 - 1$;
 $v(\Omega_1) := \lambda + v_0 - 1$;
 $L_0 := \{ \}$;
 $L_1 := \{ \lambda + v_0 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma \}$;
 $s := 1$;
ENQUANTO $L_s \neq L_{s-1}$ *FAÇA*
 $s := s + 1$;
 $v(\Omega_s) := \min\{v(ht(S(\Omega_{s-1}, \Omega_i)))$; $-1 \leq i \leq s-1\} +$
 $+ \alpha(\lambda - v_1)$, onde $\alpha \in \mathbb{N}$ é o menor
valor tal que $v(\Omega_s) + 1 \notin L_{s-1}$.
 $L_s := L_{s-1} \cup \{v(\Omega_s) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\}$.
SAÍDA: $\Lambda \setminus \Gamma = L_s$.

Exemplo 5.5 a) Considerando $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$, com $5 < v_1 \leq 11$, vemos que o Exemplo 5.3 e o estudo completo do conjunto de lacunas especiais para o semigrupo $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$, apresentado no Exemplo 5.4, confirmam a conjectura para qualquer λ .

b) Seja $\Gamma = \langle 6, 11 \rangle$. O conjunto das lacunas que podem ser tomadas como invariante de Zariski é $\{13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 26, 31, 32, 37, 43\}$.

O Corolário 5.1 comprova a conjectura para

$$\lambda \in \{14, 20, 25, 26, 31, 32, 37, 43\}.$$

A Proposição 5.2, por sua vez, também mostra a veracidade da conjectura para $\lambda = \{13, 19\}$. Resta, portanto analisar $\lambda \in \{15, 21\}$.

Se $\lambda = 15$, então $\lambda - v_1 = 4$ e o algoritmo que nos dá uma Base Standard Mínima para OdO , Algoritmo 2.2, fornece as seguintes DNEM's:

$$\Omega_1 = xdy - \frac{11}{6}ydx \text{ com } \psi(\Omega_1) = 4t^{20}$$

e

$$\Omega_2 = y^2dy - \frac{11}{4}x^2\Omega_1 \text{ com } \psi(\Omega_2) = 37t^{36} + 51t^{40} + 15t^{44}.$$

Assim, $\Lambda \setminus \Gamma = \{21, 27, 32, 37, 38, 43, 49\}$, como indica a conjectura.

Se $\lambda = 21$, então $\lambda - 11 = 10$ e temos $\Omega_1 = xdy - \frac{11}{6}ydx$ com $\psi(\Omega_1) = 10t^{26}$. Como $v(y\Omega_1) + 1 = 38$ e $v(y^2\Omega_1) + 1 = 49$, temos que $l = 43$ é a lacuna limitante.

Continuando com o Algoritmo 2.2, temos

$$\Omega_2 = y^2dx - \frac{11}{10}x\Omega_1,$$

com $\psi(\Omega_2) = 43t^{42} + 53t^{52} + 21t^{62}$. Assim, a lacuna limitante passa a ser $l = 37$ o que indica o fim do algoritmo e a confirmação da conjectura para este semigrupo.

5.4 Diagramas Admissíveis

Laudal e Pfister, em [LaP], mostram que para curvas algebróides irredutíveis planas, todos os valores do número τ de Tjurina entre o mínimo, que corresponde ao caso genérico, e o máximo, que sabemos ser μ , são atingidos.

Ou seja, existe uma curva com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$, de forma que seu o número de Tjurina seja τ .

Já mencionamos anteriormente, e os Exemplos 5.2 e 5.4 comprovam o fato que, fixado o semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$, podemos ter curvas com mesmo número de Tjurina, mas com conjuntos de lacunas especiais distintos.

Desse modo, algumas questões surgem, como por exemplo:

Sejam $\mathcal{L} = \{l \notin \Gamma; l > v_0 + v_1\}$ e \mathcal{L}_0 um subconjunto de \mathcal{L} . Como saber se \mathcal{L}_0 é o conjunto de lacunas especiais de um ramo com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$, ou mais geralmente, quais são todos os possíveis conjuntos de lacunas especiais para um ramo com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ fixo?

É claro que dado um semigrupo Γ , não necessariamente de gênero 1, podemos realizar, através das técnicas apresentadas, o estudo completo de $\Lambda \setminus \Gamma$ para esta classe de equisingularidade e assim responder às questões acima para Γ , como fizemos nos Exemplos 3.5 e 5.4.

Nesta seção, mostraremos que determinar todos os possíveis conjuntos de lacunas especiais, ou equivalentemente, todos os diagramas de lacunas para os ramos com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$ é uma questão puramente combinatória e fácil de ser respondida utilizando um algoritmo que apresentaremos adiante.

Seja dado um ramo com semigrupo Γ ,

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = \sum_{l \geq v_1} a_l t^l, \end{cases}$$

onde $a_{v_1} = 1$ e $a_l \in K$ para todo l .

Desse modo, se φ e ψ são os homomorfismos de \mathcal{O} -módulos dados, respectivamente em (2.1) e (2.2), então

$$\psi(dx) = v_0 t^{v_0-1} \quad \text{e} \quad \psi(dy) = \sum_{l \geq v_1} l a_l t^{l-1}.$$

Agora observe que em

$$\varphi(x^\alpha y^\beta) = t^{\alpha v_0} \left(\sum_{l \geq v_1} a_l t^l \right)^\beta,$$

o termo de menor ordem em t no qual a_j ocorre é claramente da forma

$$(P(a_i; v_1 < i < j) + \beta a_j) t^{\alpha v_0 + (\beta-1)v_1 + j},$$

onde $P(a_i; v_1 < i < j)$ é um polinômio com coeficientes em K nas indeterminadas a_i para $v_1 < i < j$.

Do mesmo modo, o termo de menor ordem em t em que a_j ocorre em $\psi(x^\alpha y^\beta dx)$, respectivamente em $\psi(x^\alpha y^\beta dy)$ é

$$(P(a_i; v_1 < i < j) + v_0 \beta a_j) t^{\alpha v_0 + (\beta - 1)v_1 + j + v_0 - 1}, \quad (5.4)$$

respectivamente da forma

$$(Q(a_i; v_1 < i < j) + (\beta v_1 + j) a_j) t^{\alpha v_0 + (\beta - 1)v_1 + j + v_1 - 1}, \quad (5.5)$$

onde $Q(a_i; v_1 < i < j)$ é um polinômio com coeficientes em K nas indeterminadas a_i , com $v_1 < i < j$.

De modo mais geral, temos o fato a seguir.

Observação 5.4 *Sejam $\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} b_i t^i \in K[[t]]$, x e y como na parametrização de C . Então, o termo de menor ordem em t em $\varphi(x^\alpha y^\beta) \omega$ em que b_j ocorre é da forma*

$$(R(b_i; 1 \leq i < j) + b_j) t^{\alpha v_0 + \beta v_1 + j},$$

onde $R(b_i; 1 \leq i < j)$ é um polinômio com coeficientes em K nas indeterminadas b_i com $1 \leq i < j$.

Como estamos nos restringindo a ramos C de gênero 1, temos que $F = \{x, y\}$ é uma Base Standard Mínima para o anel local \mathcal{O} de C .

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, tais que $v(F^\alpha) < v(F^\beta)$ e $\omega = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} b_i t^i \in K[[t]]$. O termo de menor ordem em t em que b_j ocorre em $\varphi(c_\alpha F^\alpha + c_\beta F^\beta) \omega$, onde $c_\alpha, c_\beta \in K^*$, é dado pelo termo de menor ordem em que b_j ocorre em $c_\alpha F^\alpha \omega$, onde ao seu coeficiente é somado uma expressão polinomial em b_i , com $1 \leq i < j$.

Vamos supor que as DNEM's foram obtidas por uma redução final dos S -processos, como descritos na Proposição 3.3; ou seja, se $B = \{\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ é uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, com $v(\Omega_i) < v(\Omega_{i+1})$, para $i = -1, \dots, r-1$, $\Omega_{-1} = dx$ e $\Omega_0 = dy$, então

$$\Omega_{i+1} = \sum_{-1 \leq j \leq i} g_j \Omega_j,$$

para $i = 0, \dots, r-1$, $g_j \in \mathcal{O}$ e $v(g_i \Omega_i) = v(g_k \Omega_k) < v(g_j \Omega_j)$, para algum $k < i$ e todo $j \neq k$ com $j < i$.

Vejamos que informações podemos obter a respeito do coeficiente de t^n em Ω_{i+1} .

Inicialmente, note que o coeficiente de t^η de $g_j\Omega_j$, com $j = -1, \dots, i$ é da forma

$$P_j(b_{jk}; v(\Omega_j) \leq k \leq l_j - 1) + cb_{jl_j}, \quad (5.6)$$

onde b_{jk} são os coeficientes de t^k em Ω_j , $c \in K^*$ e $l_j = \eta - v(g_j)$. Além disso, escrevendo $g_j = \sum_{\alpha \in A} d_\alpha F^\alpha$ com a amplitude desta representação igual a 1 e $v(g_j) = v(d_{\alpha_0} F^{\alpha_0})$, temos que a parcela cb_{jl_j} em (5.6) provém de $d_{\alpha_0} F^{\alpha_0} \Omega_j$.

Como na representação de Ω_{i+1} dada acima, temos para $-1 \leq j < i$,

$$v(g_i) + v(\Omega_j) < v(g_i) + v(\Omega_i) \leq v(g_j) + v(\Omega_j),$$

ou seja, $v(g_i) < v(g_j)$, para todo $-1 \leq j < i$.

Assim, $l_i = \eta - v(g_i) > \eta - v(g_j) = l_j$, para todo $-1 \leq j < i$, ou em outras palavras, o coeficiente de t^η em Ω_{i+1} , que é a soma dos coeficientes de t^η em $g_j\Omega_j$ para $-1 \leq j \leq i$, é da forma

$$P_{i+1}(b_{jk}; v(\Omega_j) \leq k \leq l_j - 1; k \neq l_i; -1 \leq j \leq i) + c'b_{il_i},$$

onde $c' \in K^*$, $P_{i+1}(b_{jk}; v(\Omega_j) \leq k \leq l_j - 1; k \neq l_i; -1 \leq j \leq i)$ é um polinômio nos b_{jk} 's.

O lema abaixo, nos fornece informações mais explícitas a respeito do coeficiente de t^η em Ω_{i+1} .

Lema 5.3 *Sejam C um ramo de gênero 1, dado por*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{j > v_1} a_j t^j \end{cases}$$

e Ω_{i+1} com $i = 0, \dots, r-1$, como descritas na Proposição 3.3. Então o coeficiente de t^η em Ω_{i+1} é da forma

$$Q_{i+1}^\eta(a_k; v_1 < k < l) + c_{\eta, i+1} a_l,$$

com $c_{\eta, i+1} \in K^*$, $l = \eta + 1 - \sum_{s=0}^i \theta_s$, onde $\theta_s = v(ht(\Omega_{s+1})) - v(\Omega_s)$ para $s = 0, \dots, r$ e $Q_{i+1}^\eta(a_k; v_1 < k < l)$ um polinômio com coeficientes em K nas indeterminadas a_k , para $v_1 < k < l$.

Dem.: Faremos a demonstração por indução sobre i .

Para $i = 0$, temos $\Omega_1 = \left(-\frac{v_1}{v_0}y + \dots\right)dx + (x + \dots)dy = g_{-1}\Omega_{-1} + g_0\Omega_0$.

De (5.4) e (5.5) temos que os coeficientes de t^η em $g_{-1}\Omega_{-1}$ e em $g_0\Omega_0$ são respectivamente

$$Q_{-1}^\eta(a_k; v_1 < k < \eta - v_0) + ca_{\eta-v_0+1}$$

e

$$Q_0^\eta(a_k; v_1 < k < \eta - v_0) + da_{\eta-v_0+1},$$

onde $c = -v_1$ e $d = \eta - v_0 + 1$. Assim, o coeficiente de t^η em Ω_1 é

$$Q_1^\eta(a_k; v_1 < k \leq \eta - v_0) + (c + d)a_{\eta-v_0+1}.$$

Como $c + d = \eta + 1 - v_0 - v_1 \in K^*$, pois $v(\Omega_1) + 1 > v_0 + v_1$ e $\theta_0 = v(\text{ht}(\Omega_1)) - v(\Omega_0) = v_0$, o lema é verdadeiro para $i = 0$.

Vamos supor que o lema seja verdadeiro para todo j com $-1 \leq j \leq i < r$, ou seja, o coeficiente de t^η em Ω_j seja da forma

$$Q_j^\eta(a_k; v_1 < k \leq \eta - \sum_{s=0}^j \theta_s) + c_{\eta,j} a_{\eta+1-\sum_{s=0}^j \theta_s},$$

com $c_{\eta,j} \in K^*$.

Pela Proposição 3.3, podemos considerar

$$\Omega_{i+1} = \sum_{k=-1}^i g_k \Omega_k,$$

com $v(g_i \Omega_i) = \min_{-1 \leq k \leq i} \{v(g_k \Omega_k)\}$. O coeficiente de t^η em Ω_{i+1} é a soma dos coeficientes de t^η em cada $g_k \Omega_k$, para $k = -1, \dots, i$. O maior índice para os parâmetros a 's que ocorrem nos coeficientes de $g_k \Omega_k$ é por (5.4), (5.5) e por (5.6), respectivamente

$$\begin{aligned} k = -1 &: \eta + 1 - v(g_{-1}) + v_1 - v_0 \\ k = 0 &: \eta + 1 - v(g_0) \\ k > 0 &: \eta + 1 - v(g_k) - \sum_{s=0}^{k-1} \theta_s. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} v(\Omega_1) &> \theta_0 + v(\Omega_0), \\ v(\Omega_2) &> \theta_1 + v(\Omega_1), \\ &\vdots \\ v(\Omega_{j+1}) &> \theta_j + v(\Omega_j), \end{aligned} \tag{5.7}$$

para $j = 0, \dots, r-1$. Assim, $v(\Omega_{j+1}) > v(\Omega_j) + \sum_{k=s}^j \theta_s$ e temos que

$$v(g_i) + v(\Omega_j) + \sum_{k=s}^{i-1} \theta_s < v(g_i) + v(\Omega_i) \leq v(g_j) + v(\Omega_j),$$

para $1 \leq j < i$, ou seja,

$$v(g_i) + \sum_{s=j}^{i-1} \theta_s < v(g_j).$$

Portanto, temos que

$$v(g_i) + \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s < v(g_j) + \sum_{s=0}^{j-1} \theta_s,$$

para $j = 1, \dots, i-1$.

Além disso, somando as desigualdades em (5.7), obtemos

$$v(g_i) + v(\Omega_0) + \sum_{s=0}^i \theta_s < v(g_i) + v(\Omega_i) \leq \min\{v(g_{-1}) + v(\Omega_{-1}), v(g_0) + v(\Omega_0)\},$$

isto é,

$$v(g_i) + \sum_{s=0}^i \theta_s < \min\{v(g_{-1}) + v_0 - v_1, v(g_0)\}.$$

Dessa forma, o maior dos índices anteriormente mencionados, é $\eta + 1 - v(g_i) - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s = \eta + 1 - \sum_{s=0}^i \theta_s$ e o coeficiente de t^η em Ω_{i+1} é da forma

$$Q_{i+1}^\eta(a_k; v_1 < k < \eta - \sum_{s=0}^i \theta_s) + c_{\eta, i+1} a_{\eta+1 - \sum_{s=0}^i \theta_s},$$

com $c_{\eta, i+1} \in K^*$. ■

Observe que o lema anterior garante que uma DNEM, obtida como descrito na Proposição 3.3, pode ter qualquer ordem acima da ordem da altura do S -processo que a origina. De fato, como o coeficiente de t^η em Ω_i é da forma

$$Q_i^\eta \left(a_k; v_1 < k < \eta - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s \right) + c_{\eta, i} a_{\eta+1 - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s},$$

com $c_{\eta,i} \in K^*$. Para que Ω_i tenha ordem $\nu > v(ht(S_i))$, onde S_i é o S -processo que origina Ω_i , dado na Proposição 3.3, basta tomarmos

$$a_{\eta+1-\sum_{s=0}^{i-1}\theta_s} = c_{\eta,i}^{-1} Q_i^\eta \left(a_k; v_1 < k < \eta - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s \right),$$

para $v(ht(S_i)) < \eta < \nu$ e

$$a_{\nu+1-\sum_{s=0}^{i-1}\theta_s} \neq c_{\nu,i}^{-1} Q_i^\nu \left(a_k; v_1 < k < \nu - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s \right).$$

Note que, os parâmetros a 's fixados para termos $v(\Omega_i) = \nu$ não serão relevantes para que Ω_{i+1} tenha uma determinada ordem, pois

$$v(ht(S_i)) < \eta < \nu = v(\Omega_i) < v(ht(S_{i+1})) < v(\Omega_{i+1}),$$

e assim os parâmetros a 's sobre os quais impomos condições têm índice maior que

$$v(ht(S_{i+1})) + 1 - \sum_{s=0}^i \theta_s = v(\Omega_i) + 1 - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s = \nu + 1 - \sum_{s=0}^{i-1} \theta_s.$$

Portanto, segue diretamente dos fatos anteriores, o seguinte teorema.

Teorema 5.2 *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$. Um subconjunto \mathcal{L}_0 não vazio de $\mathcal{L} = \{l \notin \Gamma; l > v_0 + v_1\}$ é um conjunto de lacunas especiais para um ramo com semigrupo Γ se, e somente se, \mathcal{L}_0 é obtido pelo seguinte algoritmo:*

DADOS: v_0, v_1 ;
DEFINA: $L_0 := \langle v_0, v_1 \rangle$;
 $L := \{l \in \mathbb{N}; l > v_0 + v_1\}$;
ESCOLHA $l_1 \in L \setminus L_0$ *E FAÇA*
 $L_1 := L_0 \cup \{l_1 + L_0\}$;
 $i := 1$;
ENQUANTO $L \neq L_i$ *FAÇA*
SE DECIDIRMOS ENCERRAR
ENTÃO
 $\Lambda \setminus \Gamma := L_i \setminus L_0$;
(FIM DO ALGORITMO)
SENÃO
ESCOLHA $l_{i+1} \in L \setminus L_i$ *COM* $l_{i+1} > l_i + \gamma_m$,
 $\gamma_m = \min\{\gamma \in L_0; l_i + \gamma \in L_{i-1}\}$ *E FAÇA*
 $L_{i+1} := L_i \cup \{l_{i+1} + L_0\}$;
 $i := i + 1$;
SAÍDA: $\Lambda \setminus \Gamma = L_i \setminus L_0$;

Dem.: Segue diretamente dos fatos apresentados anteriormente, observando que a escolha de l_1 corresponde à escolha de $v(\Omega_1) + 1$, $l_i + \gamma_m$ corresponde à ordem da altura do S -processo indicado na Proposição 3.3 e l_{i+1} corresponde à escolha de $v(\Omega_{i+1}) + 1$. ■

Exemplo 5.6 *Seja* $\Gamma = \langle 6, 13 \rangle$. *O conjunto das lacunas de* Γ *que são maiores que* $v_0 + v_1 = 19$, *ou seja, que podem ser ordens de DNEM's, é*

$$\mathcal{L} = \{20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 40, 41, 46, 47, 53, 59\}.$$

O que dizer dos subconjuntos.

$$\mathcal{L}_1 = \{20, 27, 33, 34, 40, 41, 46, 47, 53, 59\}$$

e

$$\mathcal{L}_2 = \{20, 29, 33, 35, 40, 41, 46, 47, 53, 59\}$$

de \mathcal{L} , *quanto a possibilidade de serem conjuntos de lacunas especiais de um ramo com semigrupo* Γ .

Como $\min\{\mathcal{L}_1\} = \min\{\mathcal{L}_2\} = 20$, o algoritmo do teorema anterior, nos diz que $v(\Omega_1) + 1 = 20$. Desta forma, $\{v(\Omega_1) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \{20, 33, 46, 59\}$ é subconjunto do conjunto das lacunas especiais. Uma vez que tal conjunto está contido em \mathcal{L}_1 e em \mathcal{L}_2 , não podemos concluir nada até este ponto.

Continuando com o algoritmo anterior, vamos escolher $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_i$ para $i = 1, 2$. Assim, vamos proceder a análise separadamente.

Análise de \mathcal{L}_1 .

Se houver uma DNEM Ω_2 , além de Ω_1 , devemos ter $v(\Omega_2) + 1 > 20 + 6 = 26$, pois $6 = \min\{\gamma \in \Gamma; 20 + \gamma \in \Gamma\}$. Desse modo, devemos admitir que $v(\Omega_2) + 1 = 27$ e $\{v(\Omega_2) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \{27, 33, 40, 46, 53, 59\}$ está contido em $\Lambda \setminus \Gamma$. Uma vez que esse conjunto está contido em \mathcal{L}_1 , nenhuma conclusão pode ser tirada.

Havendo uma nova DNEM Ω_3 , esta deve ser de modo que $v(\Omega_3) + 1 > 27 + 6 = 33$. Assim, vamos admitir que $v(\Omega_3) + 1 = 34$, o que implica que $\{v(\Omega_3) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \{34, 40, 46, 47, 53, 59\}$ está contido em $\Lambda \setminus \Gamma$. Novamente como todos estes elementos pertencem à \mathcal{L}_1 , nada podemos afirmar.

Para que tenhamos uma DNEM Ω_4 , obrigatoriamente devemos ter $v(\Omega_4) + 1 > 34 + 6 = 40$. Conseqüentemente, devemos ter $v(\Omega_4) + 1 = 41$ e $\{v(\Omega_4) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \{41, 47, 53, 59\}$.

Portanto, \mathcal{L}_1 é o conjunto de lacunas especiais para algum ramo com semigrupo $\Gamma = \langle 6, 13 \rangle$. A saber, o Teorema 5.1 indica que genericamente temos $\Lambda \setminus \Gamma = \mathcal{L}_1$.

Análise de \mathcal{L}_2 .

Para que ocorra uma DNEM Ω_2 , devemos ter $v(\Omega_2) + 1 > 20 + 6$, o que nos leva a concluir que $v(\Omega_2) + 1 = 29$ e que $\{v(\Omega_2) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \{29, 35, 41, 47, 53, 59\}$ são lacunas especiais.

Se houvesse uma outra DNEM Ω_3 , teríamos $v(\Omega_3) + 1 > 29 + 13 = 42$, no entanto em \mathcal{L}_2 temos o valor 40. Portanto, $\mathcal{L}_2 \setminus \{40\}$ é o conjunto de lacunas especiais para um ramo com semigrupo $\Gamma = \langle 6, 13 \rangle$, mas \mathcal{L}_2 não. A saber, os ramos da forma

$$C : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^{13} + t^{14} + \frac{27}{26}t^{15} + \frac{560}{507}t^{16} + at^{17} + \dots, \end{cases}$$

com $a \neq \frac{63017}{1014}$, admitem $\Lambda \setminus \Gamma = \mathcal{L}_2 \setminus \{40\}$, obtidos aplicando o Algoritmo 2.2 e impondo condições sobre os parâmetros.

Capítulo 6

Ramos de Multiplicidade Baixa

Ebey, no seu artigo [E] de 1967, apresenta numa tabela, a classificação, com respeito à relação de equivalência definida no Capítulo 3, dos ramos com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, onde $v_0 = 2$, $v_0 = 3$ e no caso de $v_0 = 4$ considera $v_1 \leq 11$. Bruce e Gaffney, em [BGa] de 1982, usando outros métodos, obtém parte dos resultados de Ebey. Carbonne, em [Car] de 1998, retoma a tabela de Ebey, acrescentando o valor do número de Tjurina τ para cada classe de equivalência. No entanto, alguns erros tipográficos de [E] são reproduzidos e o caso do semigrupo $\Gamma = \langle 4, 11 \rangle$ contém um pequeno erro.

Neste capítulo, além de rerepresentar a tabela mencionada, com as devidas correções, substituímos a informação do número de Tjurina τ , pelo conjunto das lacunas especiais $\Lambda \setminus \Gamma$ que, como já mencionamos no Capítulo 3, é um invariante mais fino que permite obter τ por meio da relação $\tau = \mu - \#(\Lambda \setminus \Gamma)$.

Para dar uma pequena indicação da efetividade dos nossos métodos, entenderemos a tabela de classificação para todos os ramos com $v_0 \leq 4$ e no caso de $v_0 = 5$ consideramos $v_1 \leq 11$. O valor limitante para v_1 não é um número cabalístico, simplesmente é um valor que escolhemos para não tornar este capítulo repleto de cálculos minuciosos e cansativos. A Seção 6 contém nossas tabelas. Finalmente, na última seção, respondemos negativamente a uma questão proposta por Zariski em [Z2], relativa aos semigrupos do tipo $\langle v_0, v_0+1 \rangle$, dando um contraexemplo para o semigrupo $\langle 7, 8 \rangle$. Aproveitamos a oportunidade para classificar os semigrupos $\langle 6, 7 \rangle$ e $\langle 7, 8 \rangle$, obtendo condições necessárias e suficientes, nestes casos, para a validade do enunciado proposto por Zariski.

6.1 Cuvãs com Multiplicidade ≤ 3

Note que se $v_0 = 1$, então $x = t$ e $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}} = K[[t]]$. Portanto, todos os ramos de multiplicidade 1 são equivalentes.

Se C é um ramo com $v_0 = 2$, então o semigrupo associado é da forma $\Gamma = \langle 2, v_1 \rangle$, cujo condutor é $\mu = v_1 - 1$, ou seja, não pode haver invariante λ de Zariski por causa da limitação $v_1 < \lambda < \mu$ (Veja parágrafo após a Observação 3.2). Portanto, $\Lambda \setminus \Gamma = \{\}$ e C é equivalente à

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^{v_1}. \end{cases}$$

Consideremos agora os ramos, com $v_0 = 3$. Assim, o semigrupo associado é $\Gamma = \langle 3, v_1 \rangle$.

Pela Proposição 4.2, podemos representar tais ramos por

$$C : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1} + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor} a_i t^{2v_1 - 3(\lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor + 2 - i)}. \end{cases}$$

Se $a_i = 0$ para todo $i = 2, \dots, \lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor$, então o ramo C é equivalente a

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1}, \end{cases}$$

e $\Lambda \setminus \Gamma = \{\}$.

Caso contrário, considere o menor índice k para o qual $a_k \neq 0$, i.e.,

$$C : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1} + \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor} a_i t^{2v_1 - 3(\lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor + 2 - i)}. \end{cases}$$

Desse modo, $\lambda_k = 2v_1 - 3(\lfloor \frac{v_1}{3} \rfloor + 2 - k)$ é o invariante de Zariski para o ramo C . Usando a Proposição 4.3 e uma homotetia (cf. Exemplo 3.1), podemos considerar

$$C_k : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1} + t^{\lambda_k}. \end{cases}$$

É óbvio que duas curvas C_k e C_j , como acima, são equivalentes se, e somente se, $k = j$, ou seja, possuem o mesmo invariante de Zariski.

Veja que, independentemente do valor de k , o invariante λ_k de Zariski satisfaz às hipóteses do Corolário 5.1. Portanto, se $\lambda = 2v_1 - 3i$ com $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_1}{3} \right\rfloor$ e $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{3}ydx$, então

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{v(\Omega_1) + 1 + 3j; 0 \leq j \leq i - 2\} = \{\lambda + 3j; 1 \leq j \leq i - 1\}.$$

6.2 Lacunas Especiais para Multiplicidade 4

O caso $v_0 = 4$ não é tão simples quanto os anteriores. De fato, a primeira diferença significativa é que podemos ter semigrupos com $v_0 = 4$ de gênero 1 ou gênero 2.

Inicialmente, vamos considerar os semigrupos de gênero 1, ou seja, aqueles da forma $\Gamma = \langle 4, v_1 \rangle$.

Podemos considerar que o invariante λ de Zariski está presente na parametrização de tais curvas, pois caso contrário, a curva seria equivalente a

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1}, \end{cases}$$

e $\Lambda \setminus \Gamma = \{\}$.

Na parametrização de um ramo com semigrupo $\Gamma = \langle 4, v_1 \rangle$, podemos considerar apenas algumas lacunas de Γ maiores que v_1 , que de acordo com a Proposição 4.2 e a Observação 3.2 são

$$2v_1 - 4j \quad \text{com } 2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor,$$

$$3v_1 - 4j \quad \text{com } 2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{v_1}{2} \right\rfloor.$$

Caso a) $\lambda = 3v_1 - 4j$, para algum $j = 2, \dots, \left\lfloor \frac{v_1}{2} \right\rfloor$.

Pelo Teorema 4.1 e por uma homotetia (Veja Exemplo 3.1), podemos, nesse caso, supor a curva dada por uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{3v_1 - 4j} + \sum_{i=2}^{j - \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - 1} a_i t^{2v_1 - 4(j - \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - i)}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Pelo Corolário 5.1, qualquer que seja o valor de j teremos apenas uma DNEM, a saber $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{4}ydx$ e portanto,

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{\lambda + 4i; 1 \leq i \leq j - 1\}.$$

Note que se $v_1 < 8$, então a parametrização acima se resume a

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^\lambda, \end{cases}$$

e temos apenas uma classe de equivalência.

A análise da equivalência para os ramos da forma (6.1) será feita posteriormente.

Caso b) $\lambda = 2v_1 - 4j$, para algum $j = 2, \dots, \left[\frac{v_1}{4}\right]$.

O Teorema 4.1 e o Exemplo 3.1 garantem que, nessa situação, todos os ramos podem ser representados por uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-4j} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{v_1}{4}\right]} a_i t^{3v_1-4\left(\left[\frac{v_1}{4}\right]+j+1-i\right)}. \end{cases} \quad (6.2)$$

O Teorema 5.2 permite determinar todos os possíveis conjuntos de lacunas especiais. No entanto, aplicaremos o algoritmo do Teorema 2.2, juntamente com a Proposição 3.3, para encontrar quais restrições sobre os parâmetros a_i , com $i = 1, \dots, \left[\frac{v_1}{4}\right]$, devemos impor para obter determinados conjuntos de lacunas especiais.

Temos portanto, $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{4}ydx$, e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_1) &= (v_1 - 4j)t^{2v_1-4(j-1)-1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\left[\frac{v_1}{4}\right]} \left(2v_1 - 4\left(\left[\frac{v_1}{4}\right] + j + 1 - i\right)\right) a_i t^{3v_1-4\left(\left[\frac{v_1}{4}\right]+j-i\right)-1}, \end{aligned}$$

onde ψ é o homomorfismo definido em (2.2) e $v(\Omega_1) + 1 = 2v_1 - 4(j - 1)$.

Uma vez que tomando $B = \{dx, dy, \Omega_1\}$, a lacuna limitante é $l = 3v_1 - 4j$. O próximo S -processo a ser considerado é o de menor altura dentre,

$$y^2\Omega_1 - \frac{v_1 - 4j}{4}x^{v_1-j}dx$$

e

$$v_1x^{j-1}\Omega_1 - (v_1 - 4j)ydy.$$

Como a ordem da altura do primeiro S -processo acima supera o condutor μ de Γ , pois

$$2v_1 + 2v_1 - 4(j - 1) - 1 \geq 4v_1 + 4 - 4\left[\frac{v_1}{4}\right] - 1 > 3v_1 > \mu = 3(v_1 - 1),$$

e como a ordem da altura do segundo S -processo é $4(j-1) + 2v_1 - 4(j-1) = 2v_1$, temos que

$$\Omega_2 = v_1 x^{j-1} \Omega_1 - (v_1 - 4j) y dy,$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \psi(\Omega_2) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j} v_1 a_i \left(2v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + j + 1 - i \right) \right) t^{3v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - i \right) - 1} + \\ &+ \left(v_1 a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - j} (2v_1 - 8j) - (v_1 - 4j) (3v_1 - 4j) \right) t^{3v_1 - 4j - 1} + \dots \end{aligned}$$

Se existe $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j$, então Ω_2 é uma DNEM, com $v(\Omega_2) + 1 = 3v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - k \right)$, onde $k = \min\{i; a_i \neq 0\}$. Assim, o algoritmo finaliza, pois temos $v_0 - 2$ DNEM's, que pela Observação 3.3, sabemos ser o número máximo de DNEM's possíveis.

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} \Lambda \setminus \Gamma &= \{v(\Omega_1) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} \cup \{v(\Omega_2) + 1 + \gamma \notin \Gamma; \gamma \in \Gamma\} = \\ &= \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - k\}. \end{aligned}$$

Se $a_i = 0$ para todo i com $1 \leq i \leq \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j$ e $a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - j} \neq \frac{v_1 + \lambda}{2v_1}$, então Ω_2 é DNEM com $v(\Omega_2) + 1 = 3v_1 - 4j$. Novamente, o algoritmo finaliza, pois obtemos o número máximo de DNEM's.

Nessa situação, temos

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - j\}.$$

Por outro lado, se $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j$ e $a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - j} = \frac{v_1 + \lambda}{2v_1}$, então a ordem de Ω_2 é maior ou igual à lacuna limitante, o que indica o fim do algoritmo. Nessas condições, teremos que Ω_1 é a única DNEM e

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\}.$$

Se nosso interesse fosse apenas a análise da equidiferenciabilidade, então o estudo estaria concluído.

6.3 Formas Normais para Multiplicidade 4

Vamos mostrar que se um ramo da forma (6.2) admite uma DNEM $\Omega_2 = v_1 x^{j-1} \Omega_1 - (v_1 - 4j) y dy$, então podemos eliminar todos os termos com ordem $4(\alpha - 1) + v(\Omega_2) + 1$ com $\alpha \geq 0$ que figuram na parametrização.

Observe que para os ramos com invariante de Zariski da forma $\lambda = 2v_1 - 4j$ com $2 \leq j \leq \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor$, todos os termos de ordem maior ou igual a $3v_1 - 4j$ são elimináveis de modo a deixar os termos de ordem inferior inalterados, pois se $\gamma \geq 3v_1 - 4j$, então $\gamma \in \Gamma \cup (\Gamma + v_1 - 4) \cup (\Gamma^* + v(\Omega_1) + 1 - 4)$ e a afirmação segue do Teorema 4.1.

Escrevamos Ω_2 na forma $qdx - pdy$, ou seja,

$$\Omega_2 = v_1 x^{j-1} \Omega_1 - (v_1 - 4j) y dy = -\frac{v_1^2}{4} x^{j-1} y dx - (-v_1 x^j + (v_1 - 4j)y) dy$$

e consideremos para β arbitrário, a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1 + \frac{\beta x^\alpha p}{t^4})^{\frac{1}{4}} \\ y_1 &= y + \beta x^\alpha q. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Como vimos no Exemplo 3.2, tal mudança nos dá

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1^4 \\ y_1 &= t_1^{v_1} + t_1^\lambda + \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} a_i t_1^{3v_1 - 4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)} + \frac{\beta x^\alpha \Omega_2}{t^4} - \\ &\quad - t^{v_1} \left(\sum_{s=2}^{\infty} \binom{\frac{v_1}{4}}{s} \left(\frac{\beta x^\alpha p}{t^4} \right)^s \right) - t^\lambda \left(\sum_{s=2}^{\infty} \binom{\frac{\lambda}{4}}{s} \left(\frac{\beta x^\alpha p}{t^4} \right)^s \right) - \\ &\quad - \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} a_i t^{3v_1 - 4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)} \left(\sum_{s=2}^{\infty} \binom{3v_1 - 4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)}{s} \left(\frac{\beta x^\alpha p}{t^4} \right)^s \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde $k = \min\{i; a_i \neq 0\}$.

Vejamoss mais de perto cada parcela da última expressão acima que é da forma

$$A_r = a_i t^r \sum_{s=2}^{\infty} \binom{\frac{r}{4}}{s} \left(\frac{\beta x^\alpha p}{t^4} \right)^s \quad (6.5)$$

Se $r \in \{3v_1 - 4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i); i = k, \dots, \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor\}$, então como $s \geq 2$ e $\alpha \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} v(A_r) &= 3v_1 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + j + 1 - i\right) + 8j + 8(\alpha - 1) = \\ &= 3v_1 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - i\right) + 4j + 8(\alpha - 1) = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 3v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - k \right) + 4j + 8(\alpha - 1) > \\ > 3v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - k \right) + 4(\alpha - 1) = \\ = 4(\alpha - 1) + v(\Omega_2) + 1 \\ \qquad \qquad \qquad \text{se } k = \min\{i; a_i \neq 0\} \\ \qquad \qquad \qquad \text{com } i \leq k \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j \\ 3v_1 - 4 \left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + j - 1 \right) + 4j + 8(\alpha - 1) = \\ = 3v_1 - 4j + 4(\alpha - 1) + 4j + 4(\alpha - 1) > \\ > 3v_1 - 4j + 4(\alpha - 1) = 4(\alpha - 1) + v(\Omega_2) + 1 \\ \qquad \qquad \qquad \text{se } a_i = 0 \text{ para} \\ \qquad \qquad \qquad \text{todo } i \leq k \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j \end{array} \right.$$

ou seja, não precisamos nos preocupar com essas parcelas, pois a ordem destas superam a ordem do termo que desejamos eliminar.

Veja que, para $s \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} t^r \left(\frac{x^\alpha p}{t^4} \right)^s &= t^r x^{\alpha s} \left((-v_1)^s x^{s(j-1)} + \right. \\ &\quad \left. + s(-v_1)^{s-1}(v_1 - 4j)x^{(s-1)(j-1)-1}y + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos de ordem} \\ \geq 2v_1 - 4j \end{array}} \right) \\ &= t^{4\alpha s + r} \left((-v_1)^s t^{4s(j-1)} + s(-v_1)^{s-1}(v_1 - 4j) \left(t^{v_1 + 4((s-1)(j-1)-1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t^{\lambda + 4((s-1)(j-1)-1)} \right) + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos de ordem} \\ > 2v_1 - 4 \end{array}} \right). \end{aligned}$$

Se $r = v_1$, temos

$$\begin{aligned} t^{v_1} \left(\frac{x^\alpha p}{t^4} \right)^s &= (-v_1)^s t^{4s(j-1) + v_1} + \\ &\quad + s(-v_1)^{s-1}(v_1 - 4j) t^{2v_1 + 4(\alpha s + s(j-1) - j)} + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos de ordem} \\ > 3v_1 - 4 \end{array}} \end{aligned}$$

Se $r = \lambda = 2v_1 - 4j$, temos

$$t^\lambda \left(\frac{x^\alpha p}{t^4} \right)^s = (-v_1)^s t^{2v_1 + 4(\alpha s + s(j-1) - j)} + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos com ordem} \\ \geq 3v_1 - 4j. \end{array}}$$

Note que $s(j-1) - j \geq 0$, pois $s \geq 2$ e $j \geq 2$, ou seja,

$$2v_1 + 4(\alpha s + s(j-1) - j) \in \langle 4, v_1 \rangle.$$

Podemos reescrever (6.4) como

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1^4 \\ y_1 &= t_1^{v_1} + t_1^\lambda + \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} a_i t_1^{3v_1-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j+1-i)} + \frac{\beta x^\alpha \Omega_2}{dx} - \\ &\quad - \sum_{s=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{v_1}{4}}{s} \right) (-v_1)^s t^{v_1+4s(\alpha+j-1)} + \\ &\quad + (-v_1)^{s-1} \left(\binom{\frac{v_1}{4}}{s} s(v_1 - 4j) - \binom{\lambda}{s} v_1 \right) t^{2v_1+4(\alpha s+s(j-1)-j)} + \\ &\quad + \boxed{\text{termos de ordem superior a } v \left(\frac{x^\alpha \Omega_2}{dx} \right)}. \end{aligned}$$

Reservemos a expressão acima e analisemos as expansões de $x^{s(\alpha+j-1)}y$ e $x^{\alpha s+s(j-1)-j}y^2$ para $\alpha \geq 0$ e $s \geq 2$. Por uma análise semelhante àquela feita em (6.5), temos

$$x^{s(\alpha+j-1)}y = t^{v_1+4s(\alpha+j-1)} + t^{2v_1-4j+4s(\alpha+j-1)} + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos de ordem} \\ > v \left(\frac{x^\alpha \Omega_2}{dx} \right) \end{array}}$$

$$x^{\alpha s+s(j-1)-j}y^2 = t^{2v_1+4(\alpha s+s(j-1)-j)} + \boxed{\begin{array}{l} \text{termos de ordem} \\ > 3v_1 - 4j \end{array}}$$

Assim, se ao invés de considerarmos a mudança de coordenadas dada em (6.3), tomarmos

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{\beta x^\alpha p}{t^4} \right)^{\frac{1}{4}} \\ y_1 &= y + \beta x^\alpha q + \sum_{s=2}^{\infty} \left(\gamma_s x^{s(j-1)} + \delta_s x^{s(j-1)-j} y \right) x^{\alpha s} y, \end{aligned}$$

podemos escolher β, γ_s e δ_s de modo a eliminar o termo de ordem $v \left(\frac{x^\alpha \Omega_2}{dx} \right)$ com $\alpha \geq 0$, sem que alteremos os termos de ordem inferior.

Portanto, se em (6.2) existe $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j$, então podemos nos reduzir a ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^4 \dots \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-4j} + \sum_{i=k}^{j-2+k} a_i t^{3v_1-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j+1-i)}, \end{cases}$$

com $k = \min\{i; a_i \neq 0\}$ e cujo conjunto de lacunas especiais, conforme vimos na Seção 2, é

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - k\}.$$

Se $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j$ e $a_{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j + 1} \neq \frac{v_1 + \lambda}{2v_1}$, então podemos nos reduzir a

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1 - 4j} + \sum_{i=\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j + 1}^{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - 1} a_i t^{3v_1 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + j + 1 - i\right)}, \end{cases}$$

e, conforme vimos na Seção 2,

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 1 - j\}.$$

Por outro lado, se $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j$ e $a_{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j + 1} = \frac{v_1 + \lambda}{2v_1}$, então basta considerar os ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1 - 4j} + \left(\frac{\lambda + v_1}{2v_1}\right) t^{3v_1 - 8j} + \sum_{i=\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor - j + 2}^{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor} a_i t^{3v_1 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + j + 1 - i\right)}, \end{cases}$$

onde

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{2v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\} \cup \{3v_1 - 4i; 1 \leq i \leq j - 1\}.$$

No caso de ramos com $v_0 = 4$ e gênero 2, o Exemplo 4.1 permite que nos restrinjamos aos ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{v_2 + v_1 - 4m_1} + \sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor} a_k t^{v_2 - 4\left(\left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor + 2 - k\right)}, \end{cases}$$

com $m_1 = \frac{v_1}{2}$. Neste caso, como $\Omega_1 = xdy - \frac{v_1}{v_0}ydx$ é a única DNEM, o conjunto das lacunas especiais é

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{v_2 + v_1 - 4i; 1 \leq i \leq m_1 - 1\}.$$

No que segue, nos referiremos às últimas quatro parametrizações acima como formas normais para os ramos de multiplicidade 4.

Observe que em todas as formas normais acima, os expoentes superiores a λ que podem estar presentes na parametrização não pertencem a $v\left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx}\right)$. Em particular, os termos de ordem maiores que $l - 4$, onde l é a lacuna limitante de $\Lambda = v(\mathcal{O}d\mathcal{O}) + 1$, podem ser simplesmente desprezados, ou seja, se

$$C_1 : \begin{cases} x_1 = t^4 \\ y_1 = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} a_i t^i \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x_2 = t^4 \\ y_2 = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} a'_i t^i \end{cases}$$

e $y_1 = y_2 \pmod{t^{l-4+1}}$, então $C_1 \sim C_2$. De fato, se $\delta > l - 4$, então existe $\Omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ tal que $v(\Omega) + 1 = \delta + 4 > l$. Assim, $v\left(\frac{\Omega}{dx}\right) = \delta$ e, como vimos, todos os termos cuja ordem pertence a $v\left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx}\right)$ podem ser eliminados sem que alteremos os termos de ordem inferior.

6.4 Classificação das Curvas de Multiplicidade 4

Obviamente, dois ramos que possuem $\Lambda \setminus \Gamma$ distintos não podem ser equivalentes (Proposição 3.1). Mostraremos que, dois ramos que possuem o mesmo conjunto de lacunas especiais e estão na forma normal descrita acima, são equivalentes se, e somente se, diferem por uma homotetia, i.e., as únicas mudanças de coordenadas que preservam os geradores dos Anéis de Puiseux na forma normal são aquelas apresentadas no Exemplo 3.1, que são em número finito. De fato, como as formas normais dadas anteriormente possuem coeficiente de t^λ igual a 1 e nas homotetias

$$\begin{aligned} t_1 &= ct \\ y_1 &= c^{v_1} y, \end{aligned}$$

devemos ter $c \in K^*$ com $c^{v_1 - \lambda} = 1$, segue que temos apenas $\lambda - v_1$ homotetias que preservam as formas normais apresentadas.

A estratégia que usaremos para mostrar que as únicas mudanças de coordenadas que preservam as formas normais são as homotetias, é mostrar que mudanças de coordenadas da forma

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^4}\right)^{\frac{1}{4}} \\ y_1 &= y + q, \end{aligned}$$

com $p, q \in \mathcal{O}$, $v(p) > 4$ e $v(q) > v_1$, que preservam formas normais agem como a identidade, ou seja, não alteram os coeficientes nem eliminam e/ou

introduzem termos com ordens inferiores a $l - 4$, onde l é a lacuna limitante de $v(\mathcal{O}d\mathcal{O}) + 1$. Dessa forma, como toda mudança de coordenadas é uma composição de uma homotetia (Veja Exemplo 3.1) e uma mudança de coordenadas como no Exemplo 3.2, segue que apenas as homotetias nos dão ramos equivalentes com mesmo tipo de forma normal.

Inicialmente, note que ao efetuarmos uma mudança da forma

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^4}\right)^{\frac{1}{4}} \\ y_1 &= y + q, \end{aligned} \tag{6.6}$$

teremos

$$\begin{cases} x_1 = t_1^4 \\ y_1 = y(t_1) + A(t), \end{cases}$$

com

$$A(t) = q - \frac{pdy}{dx} - \sum_{i \geq v_1} a_i t^i \sum_{k=2}^{\infty} \binom{i}{k} \left(\frac{p}{t^4}\right)^k,$$

onde $y = \sum_{i \geq v_1} a_i t^i$ está em uma das formas normais apresentadas anteriormente.

Basta nos preocuparmos com os termos de $A(t)$ com ordem menor ou igual a $l - 4$, onde l é a lacuna limitante de $v(\mathcal{O}d\mathcal{O}) + 1$ pois, como vimos, os termos de ordem superior a $l - 4$ podem ser eliminados sem que alteremos os de ordem inferior.

Vimos na seção anterior, através da aplicação do algoritmo para obter uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ que

$$\begin{aligned} \lambda = 3v_1 - 4j &\implies l = \begin{cases} \lambda & \text{se } v_1 < 8 \\ 2v_1 - 4 & \text{se } v_1 > 8, \end{cases} \\ \lambda = 2v_1 - 4j &\implies l \leq 3v_1 - 4j, \\ \lambda = v_2 + v_1 - 4m_1 &\implies l = \begin{cases} \lambda & \text{se } v_1 < 8 \\ v_2 - 4 & \text{se } v_1 > 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que se $\lambda \neq 2v_1 - 4j$ e $v_1 < 8$, então as formas normais apresentadas anteriormente se resumem a

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^\lambda \end{cases}$$

e a análise da equivalência é imediata. Assim, nas análises que realizaremos a seguir estaremos considerando $v_1 > 8$ e

$$l \begin{cases} = 2v_1 - 4 & \text{se } \lambda = 3v_1 - 4j \\ \leq 3v_1 - 4j & \text{se } \lambda = 2v_1 - 4j \\ = v_2 - 4 & \text{se } \lambda = v_2 + v_1 - 4m_1. \end{cases}$$

Para estudarmos os termos de ordens menores ou iguais a $l - 4$ em $A(t)$, basta considerarmos

$$p = \begin{cases} \sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^\alpha & \text{se } \lambda = 3v_1 - 4j \\ \sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^\alpha + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} (c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_\beta x^\beta y) & \text{se } \lambda = 2v_1 - 4j \\ \sum_{\alpha}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^\alpha + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2 - v_1}{4} \rfloor} (c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_\beta x^\beta y) & \text{se } \lambda = v_2 + v_1 - 4m_1 \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} \sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} (g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma y x^\gamma) & \text{se } \lambda = 3v_1 - 4j \\ \sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} (g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma x^\gamma y) + \\ \quad + \begin{cases} hy^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} (l_\delta x^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + \\ \quad + n_\delta y^2 x^\delta) & \text{se } \lambda = 2v_1 - 4j \\ \quad \text{e } v_1 \equiv 1 \pmod{4} \\ gx^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1} + hy^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} (l_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta x^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 + \delta} + \\ \quad + n_\delta y^2 x^\delta) & \text{se } \lambda = 2v_1 - 4j \\ \quad \text{e } v_1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \\ \sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_2 - v_1}{4} \rfloor} (g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma x^\gamma y) & \text{se } \lambda = v_2 + v_1 - 4m_1 \end{cases}$$

Note que em $A(t)$ o quociente $\frac{p}{t^4}$ é um fator relevante para nossa análise. Vamos mostrar, para todo $k \geq 2$, que $\left(\frac{p}{t^4}\right)^k = B_k \pmod{t^{-v_1 - v_0 + 1}}$, para algum $B_k \in \mathcal{O}$.

Desse modo, usando que $\Omega_1 = \sum_{i \geq \lambda} (\lambda - v_1) a_i t^{i + v_0 - 1}$ e a existência de B_k como acima, podemos escrever

$$A(t) = \frac{\omega}{dx} - \Upsilon \pmod{t^{-4+1}},$$

onde

$$\omega = qdx - pdy - \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{\frac{v_1}{4}}{k} B_k \right) ydx - \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) B_k \right) \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Omega_1 \quad (6.7)$$

e

$$\Upsilon = \sum_{i>\lambda} a_i \sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{i}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} - \frac{i - v_1}{\lambda - v_1} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) \right) B_k t^i,$$

onde obviamente $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Como queremos preservar a forma normal, que como observamos na Seção 2 não possui termos de ordem em $v \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx} \right)$, vejamos que condições sobre os parâmetros de p e q devemos impor para que $A(t)$ não introduza termos cujas ordens estejam em $v \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx} \right)$.

Note que se $v \left(\frac{\omega}{dx} \right) < v(\Upsilon)$, então $v(A(t)) = v \left(\frac{\omega}{dx} \right) \in v \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx} \right)$, possibilidade que queremos descartar.

Suponhamos que $v \left(\frac{\omega}{dx} \right) = v(\Upsilon) = v(B_2) + \zeta$.

Como ζ é a menor ordem dos termos em y , acima de λ , e como y está numa das formas normais, temos que $\zeta \notin v \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx} \right)$. Por outro lado, por uma análise de cada forma normal, conclui-se que se $v(B_2) + \zeta = v \left(\frac{\omega}{dx} \right) \left(\in v \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx} \right) \right)$, então $v(B_2) + \zeta > l - 4$, já que $v(B_2) \in \Gamma$. Outra possibilidade a ser descartada.

Portanto, se queremos preservar a forma normal de y , devemos ter

$$v \left(\frac{\omega}{dx} \right) > v(\Upsilon) = v(B_2) + \zeta. \quad (6.8)$$

Vamos no que segue, analisando caso a caso segundo os valores de λ , mostrar que (6.8) implica $A(t) = 0$. Logo a mudança de coordenadas (6.6) age como a identidade, restando apenas a ação das homotetias sobre cada forma normal.

Caso: $\lambda = 3v_1 - 4j$

Inicialmente, veja que $\left(\frac{p}{t^4} \right)^k \in \mathcal{O}$ para todo k . Assim, pondo $B_k = \left(\frac{p}{t^4} \right)^k$, podemos reescrever (6.7) como

$$\omega = \sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_{\gamma} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_{\gamma} x^{\gamma} y \right) dx - \sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha} dy -$$

$$-\Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1,$$

onde

$$\Theta_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} \right)^k$$

e

$$\Theta_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} \right)^k.$$

Note que $v(\Theta_1) = v(\Theta_2) = 8(\alpha - 1)$, para algum $\alpha \geq 2$.

Veja que a desigualdade de (6.8), levando em conta (6.1), nos indica que

$$\begin{aligned} v(\omega) - v_0 + 1 &> v(B_2) + 2v_1 - 4 \left(j - \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1 \right) = \\ &> 2v_1 - 4j + v_1 - 4 + 4 + v(B_2) = \\ &= v\left(\frac{\Omega_1}{dx}\right) + v(B_2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$v(\omega) > v(\Omega_1) + v(B_2) = \lambda + 4 + v(B_2) = \lambda + 4 + 2(v(p) - 4) \geq \lambda + 12.$$

Assim, para que tenhamos a condição (6.8), devemos ter $g_1 = 0$ e $h_1 = \frac{v_1}{v_0} b_1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \omega &= h_1 x \Omega_1 + \sum_{\gamma=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma x^\gamma y \right) dx - \sum_{\alpha=3}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^\alpha dy - \\ &\quad - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1. \end{aligned}$$

Uma vez que $\max\{v(x\Omega_1), v(x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 2} dx)\} < \lambda + 4 + v(B_2)$, devemos impor que $g_2 = h_1 = 0$, mas isto implica que $b_1 = 0$.

Note que a condição $b_1 = 0$ eleva a ordem de p e conseqüentemente eleva as ordens de B_2 , Θ_1 e Θ_2 . Assim, a condição (6.8) se reescreve como

$$v(\omega) > \lambda + 4 + v(B_2) \geq \lambda + 20.$$

Para que a condição acima seja satisfeita devemos impor $g_2 = 0$ e $h_2 = \frac{v_1}{v_0} b_2$. Temos portanto,

$$\omega = h_2 x^2 \Omega_1 + \sum_{\gamma=3}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma x^\gamma y \right) dx - \sum_{\alpha=4}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^\alpha dy - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1.$$

Como $\max\{v(x^2 \Omega_1), v(x^{\lfloor \frac{v_1}{v_0} \rfloor + 3} dx)\} < \lambda + 20$, devemos ter $g_3 = h_2 = 0$. Mas a última igualdade implica que $b_2 = 0$, o que eleva a ordem de p e conseqüentemente eleva as ordens de B_2, Θ_1 e Θ_2 .

Continuando com o mesmo raciocínio, chega-se à conclusão que em algum momento $v(\Upsilon) = v(B_2) + \zeta > l - 4$. Logo $\Upsilon \in \frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx}$ e conseqüentemente $A(t) \in \frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx}$, o que não é permitido, a menos que $A(t) = 0$.

Caso: $\lambda = 2v_1 - 4j$

Veja que, neste caso, para todo $k \geq 2$ temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{t^4}\right)^k &= \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(d_\beta x^{\beta-1} y + c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta}\right)\right)^k = \\ &= (C + D)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} C^{k-i} D^i. \end{aligned}$$

Como estamos considerando $v_1 > 8$ e $k \geq 2$, para $i \geq 2$ temos $v(C^{k-i} D^i) \geq 2v_1 - 8 \geq l - v_1$. Deste modo temos que $C^k + kC^{k-1}D \in \mathcal{O}$. Assim, $\left(\frac{p}{t^4}\right)^k \equiv B_k = (C + D)^k \pmod{t^{l-v_1-v_0+1}}$.

Substituindo as expressões de p, q e B_k em (6.7), temos

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma y x^\gamma\right) + \right. \\ &\quad \left. \begin{cases} h y^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_\delta x^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + n_\delta y^2 x^\delta\right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 1 \pmod{4} \\ g x^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1} + h y^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta x^{2\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 + \delta} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + n_\delta y^2 x^\delta\right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^\alpha + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_\beta x^\beta y\right)\right) dy - \right. \\ &\quad \left. - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1 \pmod{t^{l-4}}, \right. \end{aligned}$$

onde

$$\Theta_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(d_{\beta} x^{\beta-1} y + c_{\beta} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} \right) \right)^k$$

e

$$\Theta_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(d_{\beta} x^{\beta-1} y + c_{\beta} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} \right) \right)^k$$

Note que

$$\begin{aligned} v \left(x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} dx \right) + 1 &= 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 4\gamma + 4, \\ v (yx^{\gamma} dx) + 1 &= v_1 + 4\gamma + 4, \\ v (\Theta_1 y dx) + 1 &= v_1 + 8(\alpha - 1) + 4, \quad \text{para algum } \alpha \geq 2, \\ v (x^{\alpha} dy) + 1 &= v_1 + 4\alpha, \\ v \left(x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} dy \right) + 1 &= v_1 + 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 4\beta, \\ v (x^{\beta} y dy) + 1 &= 2v_1 + 4\beta, \\ v (\Theta_2 \Omega_1) + 1 &= \lambda + 8(\alpha - 1) + 4, \quad \text{para algum } \alpha \geq 2. \end{aligned}$$

Lembremos que pela condição (6.8) devemos ter

$$v(\omega) > v(B_2) + \lambda + v_1 + 4 - 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor > 8(\alpha - 1) + \lambda + 4 \geq \lambda + 12.$$

Assim, devemos ter $g_1 = 0$ e $h_1 = \frac{v_1}{4} b_1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \omega &= h_1 x \Omega_1 + \left(\sum_{\gamma=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_{\gamma} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_{\gamma} y x^{\gamma} \right) + \right. \\ &\quad \left. \begin{cases} hy^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_{\delta} x^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_{\delta} y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + n_{\delta} y^2 x^{\delta} \right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 1 \pmod{4} \\ gx^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1} + hy^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_{\delta} y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_{\delta} x^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 + \delta} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + n_{\delta} y^2 x^{\delta} \right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{\alpha=3}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^{\alpha} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(c_{\beta} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_{\beta} x^{\beta} y \right) \right) dy - \right. \end{aligned}$$

$$-\Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1 \pmod{t^{l-4}}.$$

Como $\max\{v(x\Omega_1), v(x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 2} dx)\} = \max\{\lambda + 8, 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 4 + 8\} < \lambda + 12$, segue que $g_2 = h_1 = 0$, logo $b_1 = 0$, que por sua vez implica que a ordem de p suba e conseqüentemente as ordens de B_2, Θ_1 e Θ_2 também subam. Disto concluímos que $h_2 = \frac{v_1}{4} b_2$ e $v(\omega) > v(B_2) + \lambda + v_1 - 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 4 \geq \lambda + 20$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega = & h_2 x^2 \Omega_1 + \left(\sum_{\gamma=3}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma y x^\gamma \right) + \right. \\ & + \begin{cases} \left. \begin{aligned} & h y^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_\delta x^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + \right. \\ & \left. \left. + n_\delta y^2 x^\delta \right) \right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 1 \pmod{4} \\ & g x^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1} + h y^2 + \sum_{\delta=1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(l_\delta y x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \delta} + m_\delta x^{2 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 + \delta} + \right. \\ & \left. \left. + n_\delta y^2 x^\delta \right) \right) dx - & \text{se } v_1 \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned} \right. \\ & - \left(\sum_{\alpha=4}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^\alpha + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} \left(c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_\beta x^\beta y \right) \right) dy - \\ & - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1 \pmod{t^{l-4}}. \end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento acima teremos $h_2 = g_3 = 0$, o que implica $b_2 = 0$ e que aumentamos a ordem de p . Conseqüentemente as ordens de B_2, Θ_1 e Θ_2 também aumentam. Concluímos ainda que $h_3 = \frac{v_1}{4} b_3$ e que $v(B_2) + \lambda + v_1 - 4 \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 4 \geq \lambda + 28$.

Repetindo esse raciocínio podemos concluir que se a desigualdade em (6.8) ocorre, a ordem de B_2 é suficientemente grande de modo que a ordem de Υ supere $l - 4$, o que garante o resultado, como no caso anterior.

Caso: $\lambda = v_2 + v_1 - 4m_1$

Antes de mais nada, observe que se definimos por $C = \sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1}$ e $D = \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2 - v_1}{4} \rfloor} \left(c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta - 1} + d_\beta x^{\beta - 1} y \right)$, temos para todo $k \geq 2$ que

$$\left(\frac{p}{t^4} \right)^k = (C + D)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} C^{k-i} D^i.$$

Obviamente as duas primeiras parcelas da última expressão são elementos de \mathcal{O} . Em D^i com $i \geq 2$, a única parcela que não pertence ao anel local \mathcal{O} é o termo da forma $\frac{y^i}{x^i}$. Como $i \geq 2$, escrevemos $i = 2r + s$ com $r \geq 1$ e $0 \leq s < 2$. Assim, usando a expressão $h_2 = y^2 - x^{m_1}$, dada pela Proposição 2.1, temos que $\{x, y, h_2\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} . Podemos então escrever

$$\frac{y^i}{x^i} = \frac{y^{2r} y^s}{x^i} = \frac{(x^{m_1} + h_2)^r y^s}{x^i} = \left(x^{r m_1 - i} + \frac{\sum_{u=1}^r \binom{r}{u} x^{(r-u)m_1} h_2^u}{x^i} \right) y^s.$$

Observe agora que a ordem de cada parcela do somatório acima é

$$\begin{aligned} 4((r-u)m_1 - i) + uv_2 &= 4(r(m_1 - 2) - um_1 - s) + uv_2 = \\ &= u(v_2 - 8) + (r-u)(2v_1 - 8) - 4s \geq^1 \\ &\geq v_2 - 8 - 4s \geq v_2 - 12 > l - v_1 - v_0. \end{aligned}$$

Mostramos assim, que existe $B_k \in \mathcal{O}$ tal que $B_k = (C + D)^k \bmod t^{l-v_1-v_0+1}$ para todo $k \geq 2$.

Utilizando o fato acima e as expressões de p e q , para este caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\sum_{\gamma=1}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} \left(g_\gamma x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_\gamma x^\gamma y \right) \right) dx - \\ &\quad - \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^\alpha + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} \left(c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_\beta x^\beta y \right) \right) dy - \\ &\quad - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1 \quad \bmod t^{l-v_0+1}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \sum_{k=2}^{\infty} B_k = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} \left(c_\beta x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta - 1} + d_\beta x^{\beta-1} y \right) \right)^k \end{aligned}$$

e

$$\Theta_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) B_k =$$

¹lembre que $m_1 v_0 = n_1 v_1$ e que neste caso $v_0 = 4$ e $n_1 = n_2 = 2$.

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\binom{\frac{\lambda}{4}}{k} - \binom{\frac{v_1}{4}}{k} \right) \left(\sum_{\alpha=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} \left(c_{\beta} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta - 1} + d_{\beta} x^{\beta-1} y \right) \right)^k,$$

com $v(\Theta_1) = v(\Theta_2) = 8(\alpha - 1)$ para algum $\alpha \geq 2$. Assim,

$$v(\Theta_1 y dx) + 1 = 8(\alpha - 1) + v_1 + 4 < 8(\alpha - 1) + \lambda + 4 = v(\Theta_2 \Omega_1) + 1.$$

Note que a condição (6.8) para esta forma normal é

$$v(\omega) > 2v(p) - 4 + v_2 - 4 \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor > 2v(p) + v_2 - v_1 - 4 = \lambda + 8\alpha - 4.$$

Como em ω temos

$$\begin{aligned} v\left(x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} dx\right) + 1 &= 4\gamma + 4 + 4 \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor \\ v(x^{\gamma} y dx) + 1 &= 4\gamma + 4 + v_1 \\ v(x^{\alpha} dy) + 1 &= 4\alpha + v_1, \end{aligned}$$

e como $2v(p) - 4 + v_2 - 4 \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor > \lambda + 12$, devemos ter $g_1 = 0$ e $h_1 = \frac{v_1}{v_0} b_1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \omega &= h_1 x \Omega_1 + \left(\sum_{\gamma=2}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} g_{\gamma} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \gamma} + h_{\gamma} x^{\gamma} y \right) dx - \\ &\quad - \left(\sum_{\alpha=3}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} b_{\alpha-1} x^{\alpha} + \sum_{\beta=0}^{\lfloor \frac{v_2-v_1}{4} \rfloor} c_{\beta} x^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + \beta} + d_{\beta} x^{\beta} y \right) dy + \\ &\quad - \Theta_1 y dx - \frac{v_0}{\lambda - v_1} \Theta_2 \Omega_1 \pmod{t^{l-v_0+1}}. \end{aligned}$$

Novamente, uma análise sobre as ordens dos termos envolvidos, leva-nos a concluir que $g_2 = h_1 = 0$ e $h_2 = \frac{v_1}{v_0} b_2$, mas dessa forma teremos $b_1 = 0$, $v(\Theta_1 y dx) + 1 = 20 + v_1 < \lambda + 20 = v(\Theta_2 \Omega_1) + 1$ e $2v(p) - 4 + v_2 - 4 \left\lfloor \frac{v_1}{4} \right\rfloor > \lambda + 20$.

Repetindo sucessivamente o processo acima descrito, concluímos que $v(\Upsilon) > l - 4$ e portanto, $A(t) = 0$.

A fim de ilustrar a dificuldade em identificar ramos equivalentes, quando esses não se encontram na forma normal, apresentamos o exemplo abaixo.

Exemplo 6.1 *Sejam*

$$C_1 : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^9 + t^{10} + \frac{19}{18}t^{11} + t^{15} \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^9 + t^{10} + \frac{19}{18}t^{11} + 2t^{15} \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^9 + 3t^{10} + \frac{19}{2}t^{11} + 243t^{14} + 2268t^{15} + \\ + 137781t^{17} + 413343t^{18} + 1869885t^{19} \end{cases}$$

O que dizer sobre os ramos acima, no que diz respeito à equivalência?

Antes da apresentação das tabelas deste capítulo, nossa intuição levaria a afirmar erroneamente que $C_1 \sim C_2$. Como os ramos C_1 e C_2 possuem $\lambda = 10 = 2v_1 - 4j$, $a_i = 0$ para todo $i = \hat{1}, \dots, \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j$ e $a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j + 1} = \frac{v_1 + \lambda}{2v_1} = \frac{19}{18}$. Consultando a tabela para $\Gamma = \langle 4, v_1 \rangle$, vemos que C_1 e C_2 estão na forma normal. Assim, teríamos que $C_1 \sim C_2$ se, e somente se, houvesse $c \in K^$ com $a_i = c^{i-v_1} b_i$ para todos os coeficientes a_i de C_1 e b_i de C_2 de t^i , com $i > v_1$.*

Como $a_\lambda = 1 = c = c^{\lambda-v_1} b_\lambda$ e $a_{15} = 1 \neq 2 = c^{15-v_1} b_{15}$, temos que $C_1 \not\sim C_2$.

Mas o que dizer de C_3 com relação a C_1 e C_2 ?

Observe que C_3 não está na forma normal.

Para obter a forma normal de C_3 considere inicialmente a homotetia

$$t_1 = 3t$$

$$y_1 = 3y,$$

donde obtemos

$$\begin{cases} x_1 = t_1^4 \\ y_1 = t_1^9 + t_1^{10} + \frac{19}{18}t_1^{11} + t_1^{14} + \frac{28}{9}t_1^{15} + 21t_1^{17} + 21t_1^{18} + \frac{95}{3}t_1^{19}. \end{cases}$$

Uma vez que $14 = v \left(\frac{x\Omega_1}{dx} \right)$, onde $\Omega_1 = xdy - \frac{9}{4}ydx$, podemos eliminar o termo t_1^{14} . Para isso, usemos a mudança

$$t_2 = t_1 \left(1 + \frac{4x_1^2}{t_1^4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$y_2 = y_1 + 9x_1y_1,$$

que nos fornece

$$\begin{cases} x_2 = t_2^4 \\ y_2 = t_2^9 + t_2^{10} + \frac{19}{18}t_2^{11} + t_2^{14} + \frac{28}{9}t_2^{15} + 21t_2^{17} + 21t_2^{18} + \frac{95}{3}t_2^{19} + A(t_1), \end{cases}$$

com

$$A(t_1) = \frac{-4x_1^2 dy_1 + 9x_1 y_1 dx_1}{dx_1} - t_1^9 \left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{4x_1^2}{t_1^4}\right)^2 - t_1^{10} \left(\frac{10}{2}\right) \left(\frac{4x_1^2}{t_1^4}\right)^2 \pmod{t_1^{20}}$$

$$= -t_1^{14} - \frac{19}{9}t_1^{15} - 21t_1^{17} - 35t_1^{18} \pmod{t_1^{20}}.$$

Note que

$$t_2^i = t_1^i \left(1 + \frac{4x_1^2}{t_1^4}\right)^{\frac{i}{4}} = t_1^i (1 + 4t_1^4)^{\frac{i}{4}} = t_1^i + it_1^{i+4} \pmod{t_1^{i+8}}.$$

Assim, escrevendo $\frac{28}{9}t_2^{15} = t_2^{15} + \frac{19}{9}t_2^{15}$ e

$$t_2^{14} + \frac{19}{9}t_2^{15} + 21t_2^{17} + 21t_2^{18} + \frac{95}{3}t_2^{19} = t_1^{14} + \frac{19}{9}t_1^{15} + 21t_1^{17} + 35t_1^{18} + \frac{2 \cdot 95}{3}t_1^{19} \pmod{t_1^{20}},$$

temos

$$y_2 = t_2^9 + t_2^{10} + \frac{19}{18}t_2^{11} + t_2^{15} \pmod{t_2^{20}}.$$

Uma vez que todo inteiro maior ou igual a 20 pertence ao conjunto $\Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$, podemos eliminar tais termos sem que alteremos os termos de ordem inferior, seguindo assim que C_3 é equivalente à C_1 .

6.5 Ramos com Multiplicidade 5

A análise geral dos ramos com $v_0 = 5$ seria bem mais trabalhosa do que o caso $v_0 = 4$, pois teríamos muitas possibilidades a analisar. Como no Exemplo 5.4 fizemos o estudo completo das classes de equidiferenciabilidades para os ramos com semigrupo $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$, escolhemos o valor 11 como limitante para v_1 .

O Exemplo 5.3, nos indica que os ramos com semigrupo $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$, onde $v_1 < 10$, admitem apenas uma DNEM. Assim, usando o Teorema 4.1, o Corolário 5.1 e uma homotetia, temos as seguintes possibilidades:

Se $\lambda = 4v_1 - 5j$, então podemos representar cada classe de equivalência por um ramo com parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i=1}^{j - \lceil \frac{v_1}{5} \rceil - 1} a_i t^{3v_1 - 5(j - \lceil \frac{v_1}{5} \rceil + 1 - i)}, \end{cases}$$

onde $\Lambda \setminus \Gamma = \{4v_1 - 5k; k = 1, \dots, j - 1\}$.

Se $\lambda = 3v_1 - 5j$, então um representante para cada classe de equivalência, pode ser dado por

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i=1}^{\lceil \frac{v_1}{5} \rceil} a_i t^{4v_1 - 5(\lceil \frac{v_1}{5} \rceil + j + 1 - i)}, \end{cases}$$

e $\Lambda \setminus \Gamma = \{3v_1 - 5k, 4v_1 - 5k; k = 1, \dots, j - 1\}$.

Na verdade, mesmo para ramos com semigrupo $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$ e $\lambda = 4v_1 - 5j$ ou $\lambda = 3v_1 - 5j$, salvo o caso $\lambda = 23$, conforme o Exemplo 5.4 indica, temos as formas normais acima.

Se $\lambda = 23$ e $a \neq 0$ em (5.2), a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{b(55x^2 - 60y^2)}{143at^5} \right)^{\frac{1}{5}} \\ y_1 &= y + \frac{11b}{13a}xy + \frac{33b^2}{169a^2}x^2y + \frac{11b^3}{2197a^3}x^3y, \end{aligned}$$

em (5.2) elimina o termo bt_1^{29} sem alterar os termos de ordem inferior. Como todos os termos de ordem superior a 29 se enquadram no Teorema 4.1, podemos considerar que cada representante de uma classe de equivalência com semigrupo $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$ e invariante λ de Zariski igual 23 pode ser dado por

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{23} + at^{24}, \end{cases}$$

se $a \neq 0$ ou por

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{23} + bt^{29}. \end{cases}$$

Para os demais casos, i.e., quando $\lambda = 12$, vamos indicar os passos que realizamos para proceder à eliminação dos parâmetros em (5.3), correspondentes aos termos com ordem $v(\Omega) - v_0 + \gamma$ com $\gamma \in \Gamma$ e Ω uma DNEM com

ordem maior que a ordem de $\Omega_1 = xdy - \frac{11}{5}ydx$, sem alterar os termos de ordem inferior. Não apresentamos explicitamente os cálculos envolvidos por serem extensos e repetitivos. No que segue usaremos as notações usadas no Exemplo 5.4.

Inicialmente escolha um termo da forma $a_l t^l$ na parametrização em (5.3), com $l = v(\Omega) - 5 + \gamma$, onde $\gamma \in \Gamma$ e Ω uma DNEM com $v(\Omega) + 1 > \lambda + 5 = v(\Omega_1) + 1$.

Escolha $h \in \mathcal{O}$ com $v(h) = \gamma$ e escreva $h\Omega = q_l dx - p_l dy$. Note que $v(p_l) = 5 + \delta$ com $\delta \in \Gamma$ para toda Ω no Exemplo 5.4.

Se $l < 2v(p_l) - 2v_0 + v_1 = 2v(p_l) + 1$, então o Lema 4.1 garante que a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{\alpha_l p_l}{t^5} \right)^{\frac{1}{5}} \\ y_1 &= y + \alpha_l q_l, \end{aligned}$$

permite eliminar o termo $a_l t^l$ da parametrização (5.3), para alguma escolha conveniente de α_l , sem que alteremos os termos de ordem inferior.

Se $l \geq 2v(p_l) - 2v_0 + v_1 = 2v(p_l) + 1 = 2(5 + \delta) + 1 = \delta + 11 \in \Gamma$, então para cada valor de $\theta \in v\left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx}\right)$ com $2v(p_l) + 1 \leq \theta < l$ escolha uma $\Omega_\theta = q_\theta dx - p_\theta dy$, com $v\left(\frac{\Omega_\theta}{dx}\right) = \theta$ e considere a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{P}{t^5} \right)^{\frac{1}{5}} \\ y_1 &= y + Q, \end{aligned}$$

com $P = \sum_{\theta=2v(p_l)+1}^l \alpha_\theta p_\theta$ e $Q = \sum_{\theta=2v(p_l)+1}^l \alpha_\theta q_\theta$.

Ao analisar a série y_1 , veremos que existe uma escolha para α_θ com $\theta = 2v(p_l) + 1, \dots, l$ que elimina o termo $a_l t^l$ sem que alteremos os termos de ordem inferior.

Procedendo como indicado acima, a partir das potências de mais baixa ordem, podemos obter as seguintes formas normais para os ramos com semi-grupo $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle$ e $\lambda = 12$:

- Se $a \neq \frac{23}{22}$ e $b \neq \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$, então $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 23, 28, 29, 34, 39\}$ e podemos considerar

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + at^{13} + bt^{14} + dt^{19} \end{cases}$$

- Se $a \neq \frac{23}{22}$ e $b = \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}$, temos $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 23, 28, 34, 39\}$ e basta nos restringirmos a

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + at^{13} + \frac{(2a+1)(2a-1)}{3}t^{14} + dt^{19} + et^{24}. \end{cases}$$

- Caso $a = \frac{23}{22}$ e $b \neq \frac{136}{121}$, teremos $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 24, 28, 29, 34, 39\}$ e a forma normal

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + bt^{14} + ct^{18}. \end{cases}$$

- Se $a = \frac{23}{22}$, $b = \frac{136}{121}$ e $A \neq 0$ (Veja Exemplo 5.4), o conjunto das lacunas especiais é $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 29, 34, 39\}$ e temos

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \frac{136}{121}t^{14} + ct^{18} + dt^{19}. \end{cases}$$

- Quando $a = \frac{23}{22}$, $b = \frac{136}{121}$, $A = 0$ e $B \neq 0$ (Veja Exemplo 5.4), teremos $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 34, 39\}$ e a forma normal

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \frac{136}{121}t^{14} + ct^{18} + dt^{19} + et^{24}. \end{cases}$$

- Se $a = \frac{23}{22}$, $b = \frac{136}{121}$, $A = 0$ e $B = 0$ (Veja Exemplo 5.4), então $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 28, 39\}$ e temos

$$\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \frac{136}{121}t^{14} + ct^{18} + dt^{19} + et^{24} + ft^{24}^{25}. \end{cases}$$

Por estar v_1 limitado, ou seja, $v_1 \in \{6, 7, 8, 9, 11\}$, pode-se mostrar que dois ramos com o mesmo conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ e que são dados pelas formas normais acima são equivalentes se, e somente se, diferem por uma homotetia. Não explicitaremos os cálculos feitos, mas indicaremos o roteiro que seguimos para efetuá-los.

Inicialmente, note que por analogia ao caso $v_0 \leq 4$, l é a lacuna limitante de Λ , então todos os termos com ordem maior do que $l - 5$ podem ser eliminados, como indicamos anteriormente, de modo a deixar inalterados os termos de ordem inferior.

Para cada semigrupo $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$ e forma normal fixados, tome a expressão genérica de funções $p, q \in \mathcal{O}$, de modo que $5 < v(p) < l-5$ e $v_1 < v(q) < l-5$, i.e.,

$$p = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

e

$$q = \sum_{\delta=(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{N}^2} d_\delta x^{\delta_1} y^{\delta_2},$$

com $\alpha_2 < 5$ e $\delta_2 < 5$.

Agora considere a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^5} \right)^{\frac{1}{5}} \\ y_1 &= y + q \end{aligned} \tag{6.9}$$

Ao analisar a série y_1 , constataremos que as escolhas dos parâmetros c_α e d_δ a serem feitas de modo a não introduzir termos estranhos à forma normal, acabam por fixar todos os termos de ordens menores ou iguais a $l-5$, como os termos de ordem superior são irrelevantes, concluímos que qualquer mudança de coordenadas da forma (6.9) que mantém a forma normal considerada, age como a identidade. Assim, as únicas mudanças de coordenadas não triviais são as homotetias.

Dessa forma, classificamos todos os ramos com $v_0 \leq 4$ e aqueles com $v_0 = 5$ e $v_1 \leq 11$. A saber, tais ramos podem ser unicamente representados, a menos de homotetias, como nas tabelas que apresentamos no final deste capítulo, onde omitimos os ramos com $v_0 = 1$, uma vez que todos esses são equivalentes.

6.6 Tabelas

| $\Gamma = \langle 2, v_1 \rangle$ | |
|--|----------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^{v_1} \end{cases}$ | $\{ \}$ |

| $\Gamma = \langle 3, v_1 \rangle$ | |
|--|--------------------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1} \end{cases}$ | $\{ \}$ |
| $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-3j} \end{cases}$ | $2v_1 - 3s$ $1 \leq s \leq j - 1$ |

| $\Gamma = \langle 4, v_1 \rangle$ | |
|---|--|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} \end{cases}$ | $\{ \}$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{3v_1-4j} + \\ + \sum_{i=2}^{j-\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} a_i t^{2v_1-4(j-\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - i)} \end{cases}$ | $3v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq j - 1$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-4j} + \\ + \sum_{i=k}^{j-2+k} a_i t^{3v_1-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)} \\ 1 \leq k \leq \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j \end{cases}$ | $2v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq j - 1$ $3v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - k$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-4j} + \\ + \sum_{i=\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j + 1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - 1} a_i t^{3v_1-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)} \\ a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j + 1} \neq \frac{v_1 + \lambda}{2v_1} \end{cases}$ | $2v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq j - 1$ $3v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq \lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + 1 - j$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{2v_1-4j} + \\ + \sum_{i=\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j + 1}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} a_i t^{3v_1-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor + j + 1 - i)} \\ a_{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor - j + 1} = \frac{v_1 + \lambda}{2v_1} \end{cases}$ | $2v_1 - 4s$ $3v_1 - 4s$ $1 \leq s \leq j - 1$ |

| $\Gamma = \langle 4, v_1, v_2 \rangle$ | |
|--|---|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^{v_1} + t^{v_2+v_1-4m_1} + \\ \quad + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor} a_i t^{v_2-4(\lfloor \frac{v_1}{4} \rfloor+2-i)} \end{cases}$ | $\begin{aligned} &v_2 + v_1 - 4s \\ &1 \leq s \leq m_1 - 1 \end{aligned}$ |

| $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle \quad v_1 \leq 11 \text{ e } \lambda \neq 12$ | |
|---|--|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{v_1} \end{cases}$ | $\{ \}$ |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{v_1} + t^{4v_1-5j} + \\ \quad + \sum_{i=1}^{j-\lfloor \frac{v_1}{5} \rfloor-1} a_i t^{3v_1-5(j-\lfloor \frac{v_1}{5} \rfloor+1-i)} \end{cases}$ | $\begin{aligned} &4v_1 - 5s \\ &1 \leq s \leq j - 1 \end{aligned}$ |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{v_1} + t^{3v_1-5j} + \\ \quad + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{v_1}{5} \rfloor} a_i t^{4v_1-5(\lfloor \frac{v_1}{5} \rfloor+j+1-i)} \\ \quad j \neq 2 \text{ se } v_1 = 11 \end{cases}$ | $\begin{aligned} &3v_1 - 5s \\ &4v_1 - 5s \\ &1 \leq s \leq j - 1 \end{aligned}$ |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{23} + at^{24} \\ \quad a \neq 0 \end{cases}$ | 28, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{23} + bt^{29} \end{cases}$ | 28, 39 |

| $\Gamma = \langle 5, 11 \rangle \lambda = 12$ | |
|---|----------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + at^{13} + bt^{14} + dt^{19} \\ a \neq \frac{23}{22} \text{ e } b \neq \frac{(2a+1)(2a-1)}{3} \end{cases}$ | 17, 23, 28, 29, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + at^{13} + bt^{14} + \\ + dt^{19} + et^{24} \\ a \neq \frac{23}{22} \text{ e } b = \frac{(2a+1)(2a-1)}{3} \end{cases}$ | 17, 23, 28, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + bt^{14} + ct^{18} \\ b \neq \frac{136}{121} \end{cases}$ | 17, 24, 28, 29, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \\ + \frac{136}{121}t^{14} + ct^{18} + dt^{19} \\ A \neq 0 \end{cases}$ | 17, 28, 29, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \\ + \frac{136}{121}t^{14} + ct^{18} + dt^{19} + et^{24} \\ A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ | 17, 28, 34, 39 |
| $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{11} + t^{12} + \frac{23}{22}t^{13} + \frac{136}{121}t^{14} \\ + ct^{18} + dt^{19} + et^{24} + ft^{34} \\ A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ | 17, 28, 39 |

$$A = 88d - \frac{440215}{644204} - 267c$$

$$B = \frac{1807239518543737}{5379063454198368} - \frac{4174016}{71289}d^2 + 143e + \frac{462825631}{379542636}d$$

6.7 Resposta à uma questão de Zariski

Zariski dedica os parágrafos 4, 5 e 6 do Capítulo VI de [Z2], ao estudo dos ramos com semigrupo da forma $\Gamma = \langle v_0, v_0 + 1 \rangle$. Dentre outras coisas, calcula a dimensão da componente genérica do espaço que parametriza todas as

classes de equivalência dos ramos numa classe de equisingularidade dada por Γ como acima (ou mais geralmente para $\Gamma = \langle v_0, hv_0 + 1 \rangle$ com $h \geq 1$). Tal resultado foi posteriormente estendido por Delorme, em [D2], para qualquer semigrupo do tipo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$.

Zariski deixa uma pergunta a respeito da classificação dos ramos com semigrupos da forma $\Gamma = \langle v_0, v_0 + 1 \rangle$. Nesta seção responderemos tal pergunta, que para ser formulada necessita das considerações que seguem.

Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_0, v_0 + 1 \rangle$ um semigrupo de um ramo. Para cada $s \in \{1, \dots, v_0 - 2\}$ defina

$$\mathcal{L}_s = \{sv_0 + s + 1, sv_0 + s + 2, \dots, sv_0 + s + v_0 - 1 - s\},$$

$$\bar{s} = v_0 - s - 2 \quad \text{e} \quad s' = \min\{s, \bar{s}\}.$$

Observação 6.1 Note que as lacunas de Γ maiores que $s(v_0 + 1)$ para $s \geq 1$, são da forma $i(v_0 + 1) - jv_0$ com $s + 1 \leq i \leq v_0 - 1$ e $1 \leq j \leq i - s$.

Deste modo, podemos interpretar \mathcal{L}_s como o conjunto dos naturais consecutivos que são lacunas de Γ maiores que $s(v_0 + 1)$ e menores que $(s + 1)v_0$.

De fato, se $i(v_0 + 1) - jv_0$ é uma lacuna maior que $s(v_0 + 1)$, escrevemos

$$i(v_0 + 1) - jv_0 = sv_0 + s + (i - s - j)v_0 + k,$$

onde $k = i - s$. Tomando $j = i - s$ e observando que $1 \leq k \leq v_0 - s - 1$, concluímos o fato.

Observe ainda que para todo $1 \leq s \leq v_0 - 2$, temos que

$$\min(\mathcal{L}_s) = sv_0 + s + 1 = (s + 1)(v_0 + 1) - v_0,$$

i.e., $\min(\mathcal{L}_s) \in \Gamma + v_1 - v_0$ para todo $1 \leq s \leq v_0 - 2$.

De acordo com a Proposição 4.2 (ou o Exemplo 3.2) todo ramo com semigrupo Γ é equivalente a um ramo da forma

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + \sum_{i \in \cup_{s=1}^{v_0-2} \bar{\mathcal{L}}_s} a_i t^i, \end{cases}$$

onde $\bar{\mathcal{L}}_s = \mathcal{L}_s \setminus \{\min(\mathcal{L}_s)\}$ e $1 \leq s \leq v_0 - 2$. Note que $\bar{\mathcal{L}}_{v_0-2} = \{\}$, pois $\mathcal{L}_{v_0-2} = \{(v_0 - 1)(v_0 + 1) - v_0\}$.

Com as notações anteriores, Zariski em [Z2], prova o seguinte teorema.

Teorema 6.1 Fixado $s \in \{2, \dots, v_0 - 3\}$ qualquer, existe um polinômio $R_s \in \mathbb{Z}[a_{v_0+3}, \dots, a_{v_0+s'+1}]^*$, tal que todo ramo dado por

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{\substack{i > 2v_0-1 \\ i \notin \Gamma}} a_i t^i, \end{cases}$$

com $R_s(a_{v_0+3}, \dots, a_{v_0+s'+1}) \neq 0$ é equivalente a um ramo do tipo

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{\substack{i > 2v_0-1 \\ i \notin \Gamma}} a'_i t^i, \end{cases}$$

com $a'_i = 0$ se i é um dos s' primeiros elementos de $\bar{\mathcal{L}}_s$.

Dem.: Veja [Z2], théorème 6.1 pag. 131. ■

Definição 6.1 (Zariski, [Z2] Définition 6.10 pag. 139)

Dizemos que um ramo admite uma representação paramétrica canônica se este pode ser dado por

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{i \in \cup_{s=2}^{v_0-4} \bar{\mathcal{L}}_s} a_i t^i, \end{cases}$$

com $a_i = 0$ se i é um dos s' primeiros elementos de $\bar{\mathcal{L}}_s$ para todo $2 \leq s \leq v_0 - 4$.

Veja que se $s \geq \frac{v_0-2}{2}$, então $s' = \bar{s} = \#\bar{\mathcal{L}}_s$. Assim, a parametrização acima definida pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{i \in \cup_{s=2}^r \bar{\mathcal{L}}_s} a_i t^i, \end{cases}$$

onde $r = \left\lfloor \frac{v_0-3}{2} \right\rfloor$ e $a_i = 0$ se i é um dos s' primeiros elementos de $\bar{\mathcal{L}}_s$ para todo $2 \leq s \leq r$.

Observação 6.2 Note que para cada $\Gamma = \langle v_0, v_0 + 1 \rangle$ a parametrização canônica de Zariski não contém representantes de todas as classes de equivalência em M_Γ . De fato, se $v_0 \geq 4$ e $\lambda = (v_0 - 1)(v_0 + 1) - 2v_0$, a curva

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + t^\lambda, \end{cases}$$

possui invariante de Zariski λ e não pode ser expressa sob a forma de uma parametrização canônica de Zariski, uma vez que $\lambda = (v_0 - 3)v_0 + (v_0 - 3) + 2 \in \overline{\mathcal{L}}_{v_0-3}$ e $r = \left\lfloor \frac{v_0-3}{2} \right\rfloor < v_0 - 3$.

Entretanto, em vista do Teorema 6.1, o ramo genérico admite uma parametrização canônica de Zariski.

Para as parametrizações canônicas genéricas, Zariski apresenta o seguinte resultado.

Teorema 6.2 Seja $v_0 \geq 5$ e sejam C e C' ramos genéricos que admitem as parametrizações canônicas

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{i \in \cup_{s=2}^r \overline{\mathcal{L}}_s} a_i t^i \end{cases}$$

e

$$C' : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_0+1} + a'_{v_0+3}t^{v_0+3} + \dots + a'_{2v_0-1}t^{2v_0-1} + \sum_{i \in \cup_{s=2}^r \overline{\mathcal{L}}_s} a'_i t^i. \end{cases}$$

Se $C \sim C'$, então existe $c \in K^*$ tal que $a_i = a'_i c^{i-(v_0+1)}$ para todo $i \geq v_0 + 3$.

Dem.: Veja [Z2] Théorème 6.12 pag. 140. ■

Na pag. 141 de [Z2], Zariski observa que o teorema anterior foi verificado para $2 \leq v_0 \leq 6$ sem a condição de generalidade sobre os parâmetros e levanta a seguinte questão:

"Le Théorème 6.12 (Teorema 6.2) est-il vrai sans hypothèse de généricité sur C et C' ?"

A resposta a esta pergunta é não e um exemplo pode ser dado na classe de equisingularidade determinada por $\Gamma = \langle 7, 8 \rangle$.

Considere

$$C : \begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + t^{11} + \frac{11}{4}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{20}t^{20}, \end{cases}$$

com $a_{13} \neq \frac{21}{4}$.

Obviamente C está sob uma forma paramétrica canônica de Zariski e não é genérica.

Para construir um contraexemplo à pergunta de Zariski, bastará exibir uma mudança de coordenadas como no Exemplo 3.2 que não age como a identidade sobre a parametrização canônica de Zariski.

Note que todo inteiro maior que 27 pertence ao conjunto $\Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0) \cup (\Gamma^* + \lambda)$ e portanto, pelo Teorema 4.1 pode ser eliminado de qualquer parametrização sem alterar os termos de ordem inferior.

Desta forma, basta considerar mudanças de coordenadas do tipo

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{p}{t^7} \right)^{\frac{1}{7}} \\ y_1 &= y + q, \end{aligned}$$

com

$$p = b_1y + b_2x^2 + b_3xy + b_4y^2 + b_5x^3 + b_6x^2 * y + b_7xy^2 + b_8y^3$$

e

$$q = c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3,$$

onde não consideramos termos de ordem superior em p e q , pois estes só afetariam termos de ordem superior a 27 na parametrização, que são para nós irrelevantes.

Para que uma mudança de coordenadas como acima mantenha a parametrização canônica de Zariski devemos impor as seguintes condições

sobre os parâmetros b 's e c 's:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= \frac{8}{7}b_2, \\ c_3 &= -\frac{12}{7}b_2, \\ c_4 &= R_4(a_{13}, b_2), \\ c_5 &= R_5(a_{13}, b_2, b_5), \\ c_6 &= R_6(a_{13}, b_2, b_6), \\ c_7 &= R_7(a_{13}, b_2, b_5, b_7), \\ b_1 &= 0, \\ b_3 &= -\frac{3}{2}b_2, \\ b_4 &= -\frac{1}{4}b_2, \\ b_5 &= S_5(a_{13}, b_2, b_6, b_8), \\ b_6 &= S_6(a_{13}, b_2, b_7, b_8), \\ b_7 &= (4a_{13} - 21)^{-1}S_7(a_{13}, a_{20}, b_2, b_8), \end{aligned}$$

onde R_i e S_i são certos polinômios nas variáveis indicadas.²

Mas deste modo, teremos

$$\begin{cases} x_1 = t_1^7 \\ y_1 = t_1^8 + t_1^{10} + t_1^{11} + \frac{11}{4}t_1^{12} + a_{13}t_1^{13} + \left(a_{20} + 5b_2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{7}a_{13}\right)\right)t_1^{20}. \end{cases}$$

Como $a_{13} \neq \frac{21}{4}$, para cada $b_2 \neq 0$ temos um ramo na parametrização canônica de Zariski equivalente à C que não é obtido por uma homotetia, o que responde negativamente à questão de Zariski.

Vamos utilizar o Algoritmo 2.2 para obter todas as classes de equidiferenciabilidade para M_Γ com $\Gamma = \langle 7, 8 \rangle$ e eliminar alguns parâmetros, obtendo formas normais, que de certo modo, era o que Zariski esperava obter para o caso $v_0 = 7$.

Inicialmente veja que cada classe de equivalência contém um representante da forma

$$C : \begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + a_{10}t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{18}t^{18} + \\ \quad + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} + a_{26}t^{26} + a_{27}t^{27} + a_{34}t^{34} \end{cases}$$

Se $a_i = 0$ para todo $i = 10, \dots, 34$, então C é equivalente à

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8. \end{cases}$$

²Estas contas foram executadas no MAPLE V Release 5 e os polinômios R_i 's e S_i 's encontrados estão no anexo ao capítulo.

Vamos supor que existe $a_i \neq 0$ para algum

$$i \in \{10, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 26, 27, 34\},$$

i.e., existe invariante λ de Zariski.

De acordo com o Corolário 5.1, se $\lambda \in \{11, 12, 19, 20, 26, 27, 34\}$, então existe apenas uma DNEM Ω e $v(\Omega) + 1 = \lambda + 7$. Desse modo temos

| λ | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
|-----------|----------------------------|
| 11 | 18,25,26,33,34,41 |
| 12 | 19,26,27,33,34,41 |
| 19 | 26,33,34,41 |
| 20 | 27,34,41 |
| 26 | 33,41 |
| 27 | 34,41 |
| 34 | 41 |

Usando o Teorema 4.1, podemos representar todos os ramos em cada classe de equidiferenciabilidade dada pelos conjuntos $\Lambda \setminus \Gamma$, listados anteriormente, sob a forma normal

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{20}t^{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{18}t^{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{19} + a_{20}t^{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{20} + a_{26}t^{26} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{26} + a_{27}t^{27} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{27} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{34} \end{cases}$$

Passemos ao caso $\lambda = 10$.

O Teorema 4.1, permite que nos restrinjamos aos ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} + a_{27}t^{27}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Aplicando o Algoritmo 2.2 juntamente com a Proposição 3.3, obtemos as seguintes possibilidades:

| | | | |
|--------------------------------------|--|---|---|
| $a_{12} \neq \frac{13+9a_{11}^2}{8}$ | | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 26, 27, 33, 34, 41\}$ | |
| $a_{12} = \frac{13+9a_{11}^2}{8}$ | $a_{13} \neq \frac{78a_{11}+27a_{11}^3}{20}$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 25, 27, 33, 34, 41\}$ | |
| | $a_{13} = \frac{78a_{11}+27a_{11}^3}{20}$ | $a_{20} \neq A$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 25, 33, 34, 41\}$ |
| | | $a_{20} = A$ | $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 25, 33, 41\}$ |

onde $A = -\frac{47399}{2560}a_{11}^2 - \frac{10097}{320}a_{11}^4 - \frac{17523}{1280}a_{11}^6 - \frac{357}{512} - \frac{2187}{1280}a_{11}^8 + \frac{11}{4}a_{11}a_{19}$.

Vejamos como eliminar alguns termos em (6.10) para as três primeiras possibilidades para o conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ dadas acima.

Se $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 26, 27, 33, 34, 41\}$, então podemos eliminar os termos de ordens 19 e 27, uma vez que estes satisfazem as condições do Lema 4.1. Portanto, podemos nos restringir, neste caso, aos ramos da forma:

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{20}t^{20}. \end{cases}$$

Observe que a parametrização acima coincide com a parametrização canônica de Zariski.

Se $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 25, 27, 33, 34, 41\}$, então os termos de ordens 20 e 27 também satisfazem as condições do Lema 4.1. Assim, nessa situação, basta considerar os ramos dados por

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + \left(\frac{13}{8} + \frac{9}{8}a_{11}^2\right)t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{19}t^{19}. \end{cases}$$

Se $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 25, 33, 34, 41\}$, então podemos eliminar o termo de ordem $l = 27$. Note que l não satisfaz as condições do Lema 4.1.

Para eliminar o termo de ordem l sem alterar os de ordem inferior considere $\Omega_l = q_l dx - p_l dy \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ obtida pelo Algoritmo 2.2, tal que $v(\Omega_l) + 1 = 34$. Se considerarmos a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 + \frac{\alpha_l p_l}{t^7}\right)^{\frac{1}{7}} \\ y_1 &= y + q_l \end{aligned}$$

Se $a_{18} \neq -\frac{1}{2}$, então eliminamos o termo de ordem $l = 26$.

Para tanto, consideramos a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t_1 &= t \left(1 - \left(\frac{\alpha_2 xy + \alpha_1 y^3}{t^7} \right)^{\frac{1}{7}} \right) \\ y_1 &= y + \alpha_0 y^3 - \frac{\alpha_2}{7} (8y^2 + 5x^3). \end{aligned}$$

A expansão de y_1 em t_1 mostra que existe uma escolha para α_0, α_1 e α_2 de forma a eliminar o termo de ordem 26, sem alterar os de ordem inferior.

Assim, neste caso, basta nos restringirmos ao ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{13} + a_{18}t^{18} + a_{19}t^{19}. \end{cases}$$

Se $a_{18} = -\frac{1}{2}$, então consideramos

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{13} - \frac{1}{2}t^{18} + a_{19}t^{19} + a_{26}t^{26}, \end{cases}$$

como forma normal.

Caso $\lambda = 18$.

Para esta situação, o Teorema 4.1 indica que é suficiente considerarmos os ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{18} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} + a_{27}t^{27}. \end{cases}$$

Novamente, aplicando o Algoritmo 2.2 e a Proposição 3.3, obtemos os seguintes casos:

| restrições | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
|---------------------------------------|----------------------------|
| $a_{20} = \frac{121}{120}a_{19}^2$ | 25, 33, 41 |
| $a_{20} \neq \frac{121}{120}a_{19}^2$ | 25, 33, 34, 41 |

Se $a_{20} \neq \frac{121}{120}a_{19}^2$, então podemos eliminar o termo de ordem 27, sem alterar os de ordem inferior. A mudança de coordenadas utilizada segue os mesmos passos usados para eliminar o termo com esta ordem na situação $\lambda = 10$ e $\Lambda \setminus \Gamma = \{17, 27, 33, 34, 41\}$.

Assim, temos

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{18} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20}. \end{cases}$$

Se $a_{20} = \frac{121}{120}a_{19}^2$, consideramos a forma normal

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{18} + a_{19}t^{19} + \frac{121}{120}a_{19}^2t^{20} + a_{27}t^{27}. \end{cases}$$

Afirmamos que duas formas normais com mesmo $\Lambda \setminus \Gamma$ são equivalentes se, e somente se, diferem por uma homotetia. A verificação deste fato pode ser feita realizando os mesmos procedimentos indicados para o caso do semigrupo $\Gamma = \langle 5, v_1 \rangle$ como indicados na pag. 165.

Apresentamos na seqüência as tabelas com as formas normais e os conjuntos $\Lambda \setminus \Gamma$ para os semigrupos $\langle 6, 7 \rangle$ e $\langle 7, 8 \rangle$, onde duas tais formas normais são equivalentes se, e somente se, diferem por uma homotetia.

O caso $\Gamma = \langle 6, 7 \rangle$, tratado por Zariski em [Z2] no parágrafo 5 do Capítulo V, apesar de não desenvolvido aqui, pode ser obtido com os mesmos métodos usados para o semigrupo $\Gamma = \langle 7, 8 \rangle$.

| $\Gamma = \langle 6, 7 \rangle$ | |
|---|----------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 \end{cases}$ | $\{\}$ |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^9 + a_{10}t^{10} + a_{11}t^{11} \\ a_{11} \neq \frac{9}{8}a_{10}^2 + \frac{23}{14} \end{cases}$ | 15, 22, 23, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^9 + a_{10}t^{10} + \left(\frac{9}{8}a_{10}^2 + \frac{23}{14}\right)t^{11} + a_{17}t^{17} \end{cases}$ | 15, 22, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^{10} + a_{11}t^{11} \end{cases}$ | 16, 22, 23, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^{11} + a_{16}t^{16} \end{cases}$ | 17, 23, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^{16} + a_{17}t^{17} \end{cases}$ | 22, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^{17} \end{cases}$ | 23, 29 |
| $\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^7 + t^{23} \end{cases}$ | 29 |

| $\Gamma = \langle 7, 8 \rangle$ | |
|---|----------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 \end{cases}$ | $\{\}$ |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{20}t^{20} \\ a_{12} \neq \frac{13}{8} + \frac{9}{8}a_{11}^2 \end{cases}$ | 17, 25, 26, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{19}t^{19} \\ a_{12} = \frac{13}{8} + \frac{9}{8}a_{11}^2 \text{ e } a_{13} \neq \frac{39}{11}a_{11} + \frac{27}{20}a_{11}^3 \end{cases}$ | 17, 25, 27, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + \\ \quad + a_{13}t^{13} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} \\ a_{12} = \frac{13}{8} + \frac{9}{8}a_{11}^2, a_{13} = \frac{39}{11}a_{11} + \frac{27}{20}a_{11}^3 \text{ e } a_{20} \neq A \end{cases}$ | 17, 25, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{12}t^{12} + \\ \quad + a_{13}t^{13} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} + a_{27}t^{27} \\ a_{12} = \frac{13}{8} + \frac{9}{8}a_{11}^2, a_{13} = \frac{39}{11}a_{11} + \frac{27}{20}a_{11}^3 \text{ e } a_{20} = A \end{cases}$ | 17, 25, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{11} + a_{12}t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{20}t^{20} \end{cases}$ | 18, 25, 26, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{12} + a_{13}t^{13} + a_{18}t^{18} \end{cases}$ | 19, 26, 27, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{13} + a_{18}t^{18} + a_{19}t^{19} \\ a_{18} \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$ | 20, 27, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{13} - \frac{1}{2}t^{18} + a_{19}t^{19} + a_{26}t^{26} \end{cases}$ | 20, 27, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{18} + a_{19}t^{19} + a_{20}t^{20} \\ a_{20} \neq \frac{121}{120}a_{19}^2 \end{cases}$ | 25, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{18} + a_{19}t^{19} + \frac{121}{120}a_{19}^2t^{20} + a_{27}t^{27} \end{cases}$ | 25, 33, 41 |

| $\Gamma = \langle 7, 8 \rangle$ (Continuação) | |
|--|----------------------------|
| Forma Normal | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{19} + a_{20}t^{20} \end{cases}$ | 26, 33, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{20} + a_{26}t^{26} \end{cases}$ | 27, 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{26} + a_{27}t^{27} \end{cases}$ | 33, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{27} \end{cases}$ | 34, 41 |
| $\begin{cases} x = t^7 \\ y = t^8 + t^{34} \end{cases}$ | 41 |

ANEXO

Neste anexo apresentamos explicitamente os polinômios R_i 's e S_i 's mencionados na pag. 173.

$$R_4(a_{13}, b_2) = -\frac{135}{28}b_2 - \frac{15}{14}a_{13}b_2$$

$$R_5(a_{13}, b_2, b_5) = -\frac{25}{4}b_2 - \frac{29}{28}a_{13}b_2 + \frac{8}{7}b_5 + \frac{4}{49}b_2^2$$

$$R_6(a_{13}, b_2, b_6) = -\frac{3}{2}a_{13}b_2 + \frac{8}{7}b_6 - \frac{641}{56}b_2 - \frac{12}{49}b_2^2$$

$$R_7(a_{13}, b_2, b_5, b_7) = -\frac{52}{7}b_2 + \frac{8}{7}b_7 - \frac{81}{28}a_{13}b_2 + \frac{2}{7}b_5 + \frac{18}{49}b_2^2$$

$$S_5(a_{13}, b_2, b_6, b_8) = \frac{4}{7}b_2^2 - \frac{227}{6}b_2 + \frac{199}{24}a_{13}b_2 - \frac{2}{3}b_6 - \frac{8}{3}b_8$$

$$S_6(a_{13}, b_2, b_7, b_8) = 6b_7 - \frac{45}{2}b_2a_{13}^2 + \frac{9565}{16}b_2 - 40b_8 + \frac{72}{7}b_2^2 + \frac{4297}{16}a_{13}b_2$$

$$S_7(a_{13}, a_{20}, b_2, b_8) = \frac{1}{1120}(-2720a_{13}b_2^2 + 557690a_{13}b_2 - 277200b_2a_{13}^2 + \\ + 16800b_2a_{13}^3 + 26880a_{13}b_8 + 2459289b_2 - 141120b_8 + \\ + 14280b_2^2 + 2688b_2a_{20})$$

Apêndice A

Semigrupos do tipo $\langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$

Em [LuP], Luengo e Pfister mostram que o número τ de Tjurina é constante para todos os ramos cujo semigrupo de valores é $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ fixado, com $e_1 = \text{MDC}(v_0, v_1) = 2$. A saber, $\tau = \mu - (n_1 - 1)(m_1 - 1)$, onde $n_1 = \frac{v_0}{e_1}$ e $m_1 = \frac{v_1}{e_1}$. Conseqüentemente, temos a constância do número de lacunas especiais, ou seja, $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = (n_1 - 1)(m_1 - 1)$. Isto não quer dizer que o conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$ seja sempre o mesmo, como teremos oportunidade de verificar.

Nesta seção, mostraremos como o algoritmo para obter uma Base Standard Mínima de \mathcal{OdO} pode ser otimizado, no sentido de que poderemos indicar precisamente o S -processo cuja redução final origina uma DNEM para semigrupos da forma mencionada. Além disso, indicaremos como os diagramas de lacunas especiais, ou equivalentemente, os conjuntos de lacunas especiais, que ocorrem para curvas que admitem tais semigrupos estão totalmente determinados pelas lacunas especiais do primeiro bloco, ou seja, pelas lacunas da forma $v(\Omega) + 1$ com $\Omega \in \mathcal{OdO}$ DNE do primeiro bloco.

Todo ramo com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ pode ser representado por

$$C : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{v_1 < i < \beta_2} a_i t^i + a_{\beta_2} t^{\beta_2} + \sum_{i > \beta_2} a_i t^i, \end{cases}$$

onde $\beta_0 = v_0, \beta_1 = v_1$ e β_2 é a seqüência característica, $a_i \in K, a_{\beta_2} \in K^*$ e $e_1 \mid i$ para todo $i < \beta_2$ com $a_i \neq 0$.

Uma vez que $v_2 = (n_1 - 1)v_1 + \beta_2$ e $n_1 v_1 = m_1 v_0$, podemos escrever $\beta_2 = v_2 + v_1 - m_1 v_0$.

O diagrama de lacunas especiais, que estará contido em \mathbb{N}^3 , possui apenas dois blocos, o primeiro bloco composto pelos elementos de $\Lambda \setminus \Gamma$ que são divisíveis por e_1 , que são da forma $s_1 v_1 - s_0 v_0$ com $1 < s_1 < n_1$ e $0 < s_0$, e o

segundo, formado pelos outros elementos, que são da forma $v_2 + s_1 v_1 - s_0 v_0$ com $0 \leq s_1 < n_1$ e $s_0 > 0$, já que $n_2 = 2$.

Sabemos que o invariante λ de Zariski é tal que $v_1 < \lambda \leq \beta_2$ (Veja parágrafo após Observação 3.2).

Vejamos inicialmente o caso extremo, isto é, quando $\lambda = \beta_2$.

Nesse caso, $h_2 = y^{n_1} - x^{m_1}$ é tal que $v(h_2) = v_2$ e $F = \{x, y, h_2\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} (Veja Proposição 2.1).

Iniciando com $B = \{dx, dy, dh_2\}$ e aplicando o algoritmo para obter uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, temos que $\Omega_1 = xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx$ é uma DNEM com $v(\Omega_1) + 1 = \lambda + v_0 = v_2 + v_1 - (m_1 - 1)v_0$. Analisando os demais S -processos mínimos vemos que, se existisse uma outra DNEM Ω , então $v(\Omega) + 1 > v_2$, ou seja, Ω pertenceria ao segundo bloco. Portanto, deveríamos ter

$$v(\Omega) + 1 = v_2 + \alpha v_1 - \gamma v_0,$$

com $0 < \alpha < n_1$ e $0 < \gamma < m_1$.

Mas, dessa forma

$$\begin{aligned} v_2 + \alpha v_1 - \gamma v_0 &= v_2 + v_1 - (m_1 - 1)v_0 + (\alpha - 1)v_1 + (m_1 - 1 - \gamma)v_0 = \\ &= v(\Omega_1) + 1 + (\alpha - 1)v_1 + (m_1 - 1 - \gamma)v_0, \end{aligned}$$

com $(\alpha - 1)v_1 + (m_1 - 1 - \gamma)v_0 \in \Gamma$. Contrariando o fato de Ω ser DNEM.

Portanto, o algoritmo finaliza com apenas uma DNEM Ω_1 e temos

$$\Lambda \setminus \Gamma = \{v_1 + \alpha v_1 - \gamma v_0; 0 < \alpha < n_1 \text{ e } 0 < \gamma < m_1\},$$

ou seja, $\#(\Lambda \setminus \Gamma) = (n_1 - 1)(m_1 - 1)$.

Para o caso em que $\lambda < \beta_2$, apresentaremos determinados S -processos e mostraremos que suas reduções finais correspondem a DNE, em seguida procedemos a contagem das DNE da forma $F^\delta \Omega$, onde $\delta \in \mathbb{N}^3$ e $F = \{x, y, h_2\}$ é uma Base Standard Mínima para \mathcal{O} , dada como na Proposição 2.1 e Ω uma DNE construída. Constataremos que existem $(n_1 - 1)(m_1 - 1)$ tais DNE, conseqüentemente, pelo resultado de Luengo e Pfister, estas DNE são na verdade todas.

Relembremos as notações do Capítulo 3, mais especificamente as envolvidas na Proposição 3.3. Denotando $\Omega_{-1} = dx$ e $\Omega_0 = dy$, temos que se $\{\Omega_1, \dots, \Omega_i\}$ com $v(\Omega_k) < v(\Omega_{k+1})$ para $k = 1, \dots, i - 1$ são as DNEM's do primeiro bloco, obtidas pela aplicação do algoritmo da Proposição 3.3 até um determinado passo, então havendo uma outra DNEM Ω_{i+1} no primeiro bloco

com $v(\Omega_i) < v(\Omega_{i+1})$, esta pode ser obtida pela redução final do S -processo $S(\Omega_i, \Omega_j)$, com $ht(S(\Omega_i, \Omega_j)) = ht_i$, onde

$$ht_i = \min\{ht_x, ht_y\}, \quad ht^i = \max\{ht_x, ht_y\},$$

$ht_x = \min_{-1 \leq j < i} \{\text{menor altura de um } S\text{-processo da forma } x^\alpha \Omega_i - ay^\gamma \Omega_j\}$, denominado de *altura mínima dos S-processos de Ω_i na direção x* , e

$ht_y = \min_{-1 \leq j < i} \{\text{menor altura de um } S\text{-processo da forma } y^\alpha \Omega_i - ax^\gamma \Omega_j\}$,

denominado de *altura mínima dos S-processos de Ω_i na direção y* .

Desse modo, para as DNEM's do primeiro bloco, os S -processos essenciais, são como os indicados na Proposição 3.3.

Vamos mostrar que para os semigrupos que estamos considerando, i.e., aqueles da forma $\Gamma = \langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$, as DNEM's do segundo bloco são obtidas por uma redução final, módulo as DNEM's do primeiro bloco, dos S -processos da forma $S(\Omega_i, \Omega_j)$, com $ht(S(\Omega_i, \Omega_j)) = ht^i$ e $-1 \leq j < i$, para cada DNEM Ω_i do primeiro bloco.

Antes porém, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Definição A.1 Se $\Omega \in \text{Od}\mathcal{O}$, definimos $ln(\Omega)$ como sendo a menor ordem s de um termo de $\psi(\Omega)$, tal que $e_1 \nmid (s+1)$, onde ψ é o homomorfismo definido em (2.2). Se tal termo não existe, definimos $ln(\Omega) = \infty$.

Lema A.1 Sejam $\{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ o conjunto das DNEM's do primeiro bloco, $\Omega_{-1} = dx$ e $\Omega_0 = dy$. Escreva $\Omega_i = q_i dx - p_i dy$ e defina $v(G^i) = v(ht_i) - v(\Omega_i)$ para $i = 0, \dots, r-1$. Então $ln(\Omega_0) = \beta_2 - 1$ e para $i = 0, \dots, r-1$,

$$ln(\Omega_{i+1}) = v(G^i) + v(p_i) + \beta_2 - 1 = v(p_{i+1}) + \beta_2 - 1,$$

e para todo $\alpha, \delta \in \mathbb{N}$,

$$ln(x^\alpha y^\delta \Omega_{i+1}) = \alpha v_0 + \delta v_1 + ln(\Omega_{i+1}).$$

Dem.: Consideremos os ramos da forma

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{v_1 < i < \beta_2} a_i t^i + a_{\beta_2} t^{\beta_2} + \sum_{i > \beta_2} a_i t^i, \end{cases}$$

com semigrupo de valores $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$.

Observe inicialmente que na expansão em t de um monômio da forma $x^\alpha y^\delta$, o termo de menor ordem cujo expoente não é divisível por e_1 é $\delta a_{\beta_2} t^{\alpha v_0 + (\delta-1)v_1 + \beta_2} = \delta a_{\beta_2} t^{v(x^\alpha y^\delta) + \beta_2 - v_1}$.

Desse modo, é fácil verificar que

$$\ln(x^\alpha y^\delta dx) = \alpha v_0 + (\delta - 1)v_1 + \beta_2 + v_0 - 1 = v(x^\alpha y^\delta dx) + \beta_2 - v_1,$$

cujo coeficiente do termo correspondente é $v_0 \delta a_{\beta_2}$ e

$$\ln(x^\alpha y^\delta dy) = \alpha v_0 + (\delta - 1)v_1 + \beta_2 + v_1 - 1 = v(x^\alpha y^\delta dy) + \beta_2 - v_1,$$

e o coeficiente do termo correspondente é $(\delta v_1 + \beta_2) a_{\beta_2}$.

Conseqüentemente, se $v(x^{\alpha_1} y^{\delta_1} \Omega_i) < v(x^{\alpha_2} y^{\delta_2} \Omega_j)$, com $\Omega_i, \Omega_j \in \{dx, dy\}$, então

$$\ln(x^{\alpha_1} y^{\delta_1} \Omega_i + x^{\alpha_2} y^{\delta_2} \Omega_j) = \ln(x^{\alpha_1} y^{\delta_1} \Omega_i).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left(-\frac{m_1}{n_1}y + \dots\right) dx - (-x + \dots) dy = \\ &= xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx + \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2} b_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \Omega_\alpha, \end{aligned}$$

com $\Omega_\alpha \in \{dx, dy\}$, $v(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \Omega_\alpha) > v(xdy) = v(ydx)$ e $xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx = \sum_{i \geq \lambda} a_i (i - v_1) t^{i+v_0-1} dt$, temos que

$$\begin{aligned} \ln(xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx) &= \beta_2 + v_0 - 1 = v_1 + v_0 - 1 + \beta_2 - v_1 = \\ &= \ln(xdy) = \ln(ydx) < \ln(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \Omega_\alpha). \end{aligned}$$

Segue assim que

$$\ln(\Omega_1) = \ln(xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx) = \ln(xdy) = v_0 + \beta_2 - 1 = v(G^0) + v(p_0) + \beta_2 - 1,$$

e portanto pelo Lema 3.2

$$\ln(\Omega_1) = v(p_1) + \beta_2 - 1.$$

Como o coeficiente de $t^{\ln(x^\alpha y^\delta ydx)}$ em $x^\alpha y^\delta ydx$ é $v_0(\delta + 1)a_{\beta_2}$ e o de $t^{\ln(x^\alpha y^\delta xdy)}$ em $x^\alpha y^\delta xdy$ é $(\beta_2 + \delta v_1)a_{\beta_2}$, o termo em $x^\alpha y^\delta \left(xdy - \frac{m_1}{n_1}ydx\right)$ de menor ordem, cujo expoente, acrescido de 1, não é divisível por e_1 tem coeficiente $\left(\beta_2 + \delta v_1 - \frac{m_1}{n_1}v_0(\delta + 1)\right) a_{\beta_2} = (\beta_2 - v_1)a_{\beta_2} \neq 0$.

Desse modo, o mesmo argumento usado para Ω_1 , nos leva a concluir que

$$\ln(x^\alpha y^\delta \Omega_1) = \ln(x^\alpha y^\delta xdy) = \alpha v_0 + \delta v_1 + \ln(\Omega_1),$$

o que prova o lema para $i = 0$.

Suponha que o lema seja verdadeiro para todo j com $0 \leq j \leq i < r - 1$ e considere

$$\Omega_{i+1} = F^\alpha \Omega_i + F^\delta \Omega_k + \sum_{l=-1}^i F^{\alpha_l} \Omega_l,$$

como na Proposição 3.3, onde $v(F^\alpha \Omega_i) = v(F^\delta \Omega_k) = v(ht_i)$ para $-1 \leq k < i$ e $F = \{x, y\}$.

Uma vez que

$$\ln(F^{\alpha-1} \Omega_{-1}) = v(F^{\alpha-1}) + \ln(\Omega_{-1}) = v(F^{\alpha-1}) + v_0 - v_1 + \beta_2 - 1,$$

e, por hipótese de indução, que

$$\ln(F^{\alpha_j} \Omega_j) = v(F^{\alpha_j}) + \ln(\Omega_j) = v(F^{\alpha_j}) + v(p_j) + \beta_2 - 1,$$

para todo j tal que $0 \leq j \leq i$, então segue da Observação 3.7 que

$$\ln(\Omega_{i+1}) = \ln(F^{\alpha_i} \Omega_i) = v(F^{\alpha_i}) + v(p_i) + \beta_2 - 1.$$

Como $v(ht_i) = v(F^{\alpha_i}) + v(\Omega_i)$, temos que $v(F^{\alpha_i}) = v(G^i)$, e assim pelo Lema 3.2

$$\begin{aligned} \ln(\Omega_{i+1}) &= v(G^i) + v(p_i) + \beta_2 - 1 \\ &= v(p_{i+1}) + \beta_2 - 1, \end{aligned}$$

provando parte do resultado.

Agora, como $v(\Omega_{i+1}) > v(p_{i+1} dy) = v(p_{i+1}) + v_1 - 1$, temos que $\ln(x^\alpha y^\delta \Omega_{i+1})$, assume o valor

$$\begin{aligned} &\alpha v_0 + \min\{\delta v_1 + v(p_{i+1}) + \beta_2 - 1, (\delta - 1)v_1 + \beta_2 + v(\Omega_{i+1})\} = \\ &= \alpha v_0 + \delta v_1 + v(p_{i+1}) + \beta_2 - 1 = \alpha v_0 + \delta v_1 + \ln(\Omega_{i+1}), \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\ln(x^\alpha y^\delta \Omega_{i+1}) = \alpha v_0 + \delta v_1 + \ln(\Omega_{i+1}).$$

■

No Capítulo 3, vimos que todo elemento de $Od\mathcal{O}$ cuja ordem seja maior ou igual a $v(ht^i)$, para algum $i = -1, \dots, r$, terá redução final, módulo $\{\Omega_{-1}, \dots, \Omega_i\}$, igual a zero ou pertencerá a blocos superiores.

Usando o lema anterior, podemos avaliar a ordem das DNE's obtidas por uma redução final, módulo as DNEM's do primeiro bloco, de um S -processo $S(\Omega_i, \Omega_j) = F^{\alpha_i}\Omega_i - F^{\alpha_j}\Omega_j$ com altura ht^i , onde $F = \{x, y\}$. De fato, como mencionamos acima, enquanto tivermos termos cujas ordens mais 1 sejam divisíveis por e_1 , podemos prosseguir com o processo de redução.

Resta assim avaliar qual a menor ordem de um termo que ocorrerá no processo de redução, tal que acrescido de uma unidade não seja divisível por e_1 .

Seja

$$\Omega = F^{\alpha_i}\Omega_i - F^{\alpha_j}\Omega_j + \sum_{k=-1}^i F^{\delta_k}\Omega_k,$$

com $v(ht^i) = v(F^{\alpha_i}\Omega_i) = v(F^{\alpha_j}\Omega_j) < v(F^{\delta_k}\Omega_k)$, para todo $k = -1, \dots, i$.

Pela Observação 3.7, temos que

$$v(F^{\alpha_i}) + v(p_i) < \min_{-1 \leq k < i} \{v(F^{\alpha_k}) + v(p_k)\}.$$

Desse modo, segue do lema anterior que podemos reduzir o S -processo $F^{\alpha_i}\Omega_i - F^{\alpha_j}\Omega_j$, módulo $\{\Omega_{-1}, \dots, \Omega_i\}$, de modo a obtermos Ω^i no segundo bloco, com

$$v(\Omega) + 1 = \ln(F^{\alpha_i}\Omega_i) + 1 = v(F^{\alpha_i}) + v(p_i) + \beta_2,$$

que obviamente não é divisível por e_1 , pois $v(F^{\alpha_i})$ e $v(p_i)$ o são e β_2 não.

Observação A.1 Denotaremos por G^i e por F^i os $\{x, y\}$ -produtos de potências, tais que

$$v(G^i) = v(ht^i) - v(\Omega_i)$$

e

$$v(F^i) = v(ht^i) - v(\Omega_i).$$

Note que pelo lema anterior $\ln(\Omega_{i+1}) = v(G^i) + v(p_i) + \beta_2 - 1$. Como $v(\Omega^i) = \ln(F^i\Omega_i) = v(F^i) + v(p_i) + \beta_2 - 1$, temos que

$$\ln(\Omega_{i+1}) = v(\Omega^i) - v(F^i) + v(G^i).$$

O próximo passo será avaliar explicitamente $v(\Omega^i) + 1$.

Proposição A.1 *Sejam $\{\Omega_{-1}, \dots, \Omega_r\}$ o conjunto das DNEM's do primeiro bloco, $\Omega_{-1} = dx$ e $\Omega_0 = dy$. Se $\{v(\Omega_j) + 1; j = 1, \dots, r\} = \{\alpha_i v_1 - \delta_i v_0; i = 1, \dots, r\}$, onde a representação usada para $\alpha_i v_1 - \delta_i v_0$ é a escrita privilegiada (Veja pag. 69). Então as ordens das DNE's do segundo bloco, obtidas por uma redução final módulo $\{\Omega_{-1}, \dots, \Omega_r\}$, de S -processos $S(\Omega_i, \Omega_j)$ com altura ht_i ou ht^i são da forma*

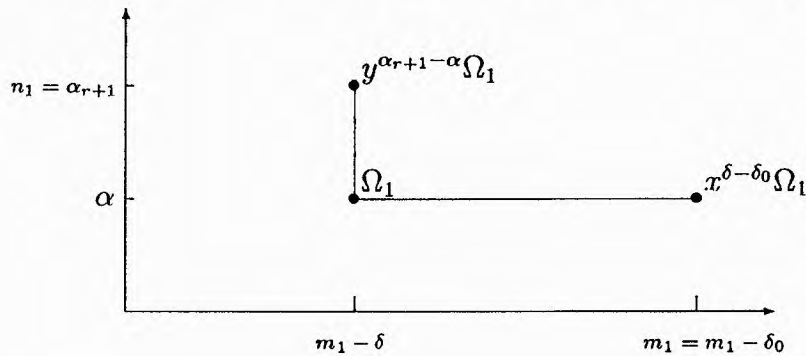
$$v_2 + (n_1 - \alpha_{i+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_i - 1)v_0,$$

para $i = 0, \dots, r$, onde $\delta_0 = 0, \alpha_0 = 1, \delta_{r+1} = m_1 - 1$ e $\alpha_{r+1} = n_1$.

Dem.: Indicaremos as diferenciais do primeiro bloco por Ω_k e as do segundo por Ω^k .

Suponha Ω_1 tal que $v(\Omega_1) + 1 = \alpha v_1 - \delta v_0$. Assim, $\alpha_0 < \alpha < \alpha_{r+1}$ e $\delta_0 < \delta < \delta_{r+1}$.

Como na observação anterior, indicamos por $G^1\Omega_1$ e por $F^1\Omega_1$ os elementos de menor e de maior ordem do conjunto $\{y^{\alpha_{r+1}-\alpha}\Omega_1, x^{\delta-\delta_0}\Omega_1\}$.



Duas possibilidades podem ocorrer:

Caso a) Não existe uma outra DNEM do primeiro bloco.

Nesse caso, $r = 1, \alpha_1 = \alpha, \delta_1 = \delta$ e temos 2 DNE's no segundo bloco, obtidas por uma redução final, módulo $\{dx, dy, \Omega_1\}$, dos S -processos envolvendo $G^1\Omega_1$ e $F^1\Omega_1$, que pelo lema anterior possuem ordens:

$$\begin{aligned} (\alpha_{r+1} - \alpha)v_1 + \ln(\Omega_1) &= (\alpha_2 - \alpha_1)v_1 + v_0 + \beta_2 - 1 = \\ &= v_2 + (n_1 - \alpha_1 + 1)v_1 - (m_1 - 1)v_0 - 1, \end{aligned}$$

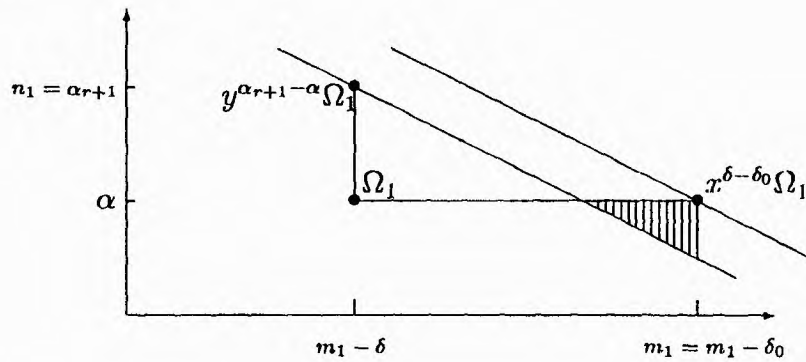
e

$$\begin{aligned}
 (\delta - \delta_0)v_0 + \ln(\Omega_1) &= (\delta_1 - \delta_0)v_0 + v_0 + \beta_2 - 1. = \\
 &= v_2 + v_1 - (m_1 - \delta_1 - 1)v_0 - 1,
 \end{aligned}$$

provando o resultado para $i = 1$ neste caso.

Caso b) A redução final do S -processo envolvendo $G^1\Omega_1$, módulo $\{dx, dy, \Omega_1\}$, origina uma nova DNEM Ω_2 no primeiro bloco. Nesse caso, dois fenômenos podem ocorrer:

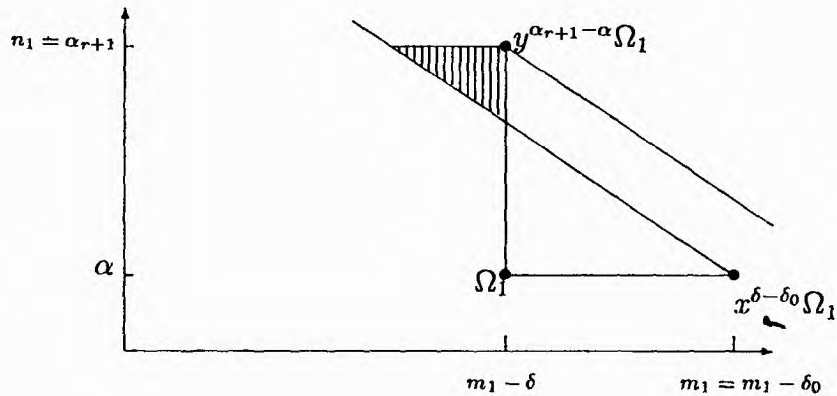
- $G^1 = y^{\alpha_{r+1}-\alpha}\Omega_1$.



Isto implica que $\alpha_r = \alpha$, $\delta_r = \delta$ e que a redução final do S -processo envolvendo $F^1\Omega_1$ nos dará uma DNE Ω^1 do segundo bloco, cuja ordem é

$$(\delta - \delta_0)v_0 + \ln(\Omega_1) = v_2 + v_1 - (m_1 - \delta_r - 1)v_0 - 1.$$

- $G^1 = x^{\delta-\delta_0}\Omega_1$.



Temos que $\alpha_1 = \alpha$ e $\delta_1 = \delta$. Além disso, no segundo bloco temos uma DNE Ω^1 obtida pela redução final, módulo $\{dx, dy, \Omega_1\}$ do S -processo envolvendo $F^1\Omega_1$, cuja ordem é

$$(\alpha_{r+1} - \alpha)v_1 + \ln(\Omega_1) = v_2 + (n_1 - \alpha_1 + 1)v_1 - (m_1 - 1)v_0 - 1,$$

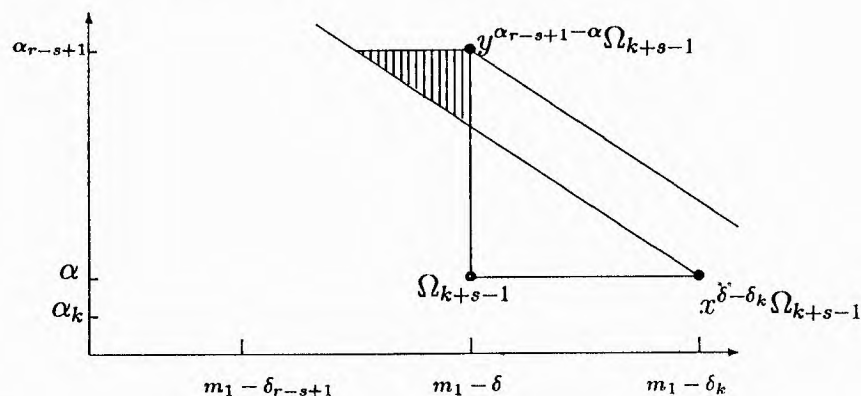
o que conclui o resultado para $i = 1$.

Vamos supor que tenhamos construído as DNEM's do primeiro bloco $\Omega_1, \dots, \Omega_{k+s}$, com $v(\Omega_{k+s-1}) + 1 = \alpha v_1 - \delta v_0$. Conseqüentemente, temos no segundo bloco $\Omega^1, \dots, \Omega^{k+s-1}$.

Situemos $\alpha_k < \alpha < \alpha_{r+1-s}$ e $\delta_k < \delta < \delta_{r+1-s}$, com k e s máximos.

Dois casos podem ocorrer:

1. $v(F^{k+s-1}) = (\alpha_{r-s+1} - \alpha)v_1$ e $v(G^{k+s-1}) = (\delta - \delta_k)v_0$.



Neste caso, $\alpha = \alpha_{k+1}$, $\delta = \delta_{k+1}$, Ω_{k+s} é obtida por uma redução final de um S -processo que envolve a parcela $x^{\delta - \delta_k} \Omega_{k+s-1}$ e, por hipótese de indução, temos

$$v(\Omega^{k+s-1}) + 1 = v_2 + (n_1 - \alpha_{k+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_k - 1)v_0.$$

A análise agora se desdobra em dois subcasos.

- (a) Se não existir uma nova DNEM no primeiro bloco, então $v(\Omega_{k+s}) + 1 = \bar{\alpha}v_1 - \bar{\delta}v_0$ é tal que $\alpha_{k+2} = \alpha_{r-s} = \bar{\alpha}$, $\delta_{k+2} = \delta_{r-s} = \bar{\delta}$ e as reduções finais dos dois S -processos que envolvem $F^{k+s}\Omega_{k+s}$ e

$G^{k+s}\Omega_{k+s}$ originam DNE's no segundo bloco cujas ordens, pelo Lema A.1 e para Observação A.1, são:

$$\left. \begin{array}{l} \ln(F^{k+s}\Omega_{k+s}) \\ \ln(G^{k+s}\Omega_{k+s}) \end{array} \right\} = v(\Omega^{k+s-1}) + v(G^{k+s-1}) - v(F^{k+s-1}) + \left\{ \begin{array}{l} v(F^{k+s}) \\ v(G^{k+s}) \end{array} \right\} =$$

$$= v_2 + (n_1 - \alpha_{k+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_k - 1)v_0 + (\delta_{k+1} - \delta_k)v_0 -$$

$$-(\alpha_{r-s+1} - \alpha_{k+1})v_1 + \left\{ \begin{array}{l} v(F^{k+s}) \\ v(G^{k+s}) \end{array} \right\} - 1$$

$$= v_2 + (n_1 - \alpha_{r-s+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_{k+1} - 1)v_0 + \left\{ \begin{array}{l} v(F^{k+s}) \\ v(G^{k+s}) \end{array} \right\} - 1.$$

Como $\{v(F^{k+s}), v(G^{k+s})\} = \{(\alpha_{r-s+1} - \alpha_{r-s})v_1, (\delta_{r-s} - \delta_{k+1})v_0\}$, temos que as ordens acima são

$$v_2 + (n_1 - \alpha_{r-s} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_{k+1} - 1)v_0 - 1$$

e

$$v_2 + (n_1 - \alpha_{r-s+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_{r-s} - 1)v_0 - 1.$$

Como $k + 2 = r - s$ o resultado segue neste subcaso.

(b) Se existir uma nova DNEM no primeiro bloco, então teremos $v(\Omega_{k+s}) + 1 = \bar{\alpha}v_1 - \bar{\delta}v_0$, com duas situações podendo ocorrer.

i. $v(F^{k+s}) = (\alpha_{r-s+1} - \bar{\alpha})v_1$ e $v(G^{k+s}) = (\bar{\delta} - \delta)v_0$. Neste caso $\bar{\alpha} = \alpha_{k+2}$ e $\bar{\delta} = \delta_{k+2}$.

Temos, então que a redução final do S -processo envolvendo $F^{k+s}\Omega_{k+s}$ origina Ω^{k+s} , cuja ordem pelo Lema A.1 e Observação A.1 é

$$v(\Omega^{k+s}) = v(\Omega^{k+s-1}) + v(F^{k+s}) - v(F^{k+s-1}) + v(G^{k+s-1}) =$$

$$= v_2 + (n_1 - \alpha_{k+2} - 1)v_1 - (m_1 - \delta_{k+1} - 1)v_0 - 1,$$

e o resultado segue na presente situação.

ii. $v(F^{k+s}) = (\bar{\delta} - \delta)v_0$ e $v(G^{k+s}) = (\alpha_{r-s+1} - \bar{\alpha})v_1$. Neste caso $\bar{\alpha} = \alpha_{r-s}$ e $\bar{\delta} = \delta_{r-s}$.

Temos, então que

$$v(\Omega^{k+s}) = v_2 + (n_1 - \alpha_{r-s+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_{r-s} - 1)v_0 - 1.$$

Concluindo assim a prova no Caso 1).

2. $v(F^{k+s-1}) = (\delta - \delta_k)v_0$ e $v(G^{k+s-1}) = (\alpha_{r-s+1} - \alpha)v_1$.

A demonstração deste caso é totalmente análoga ao Caso 1) e será omitida. \blacksquare

A proposição anterior nos diz que se $\{\Omega_1, \dots, \Omega_r\}$ é o conjunto das DNEM's do primeiro bloco e $\{v(\Omega_i) + 1; i = 1, \dots, r\} = \{\alpha_i v_1 - \delta_i v_0; i = 1, \dots, r\}$, então existem $r + 1$ DNE's Ω^i no segundo bloco, tal que o conjunto $\{v(\Omega^i) + 1; i = 0, \dots, r\}$ é igual a

$$\{v_2 + (n_1 - \alpha_{i+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_i - 1)v_0; i = 0, \dots, r\},$$

com $\delta_0 = 0, \alpha_0 = 1, \alpha_{r+1} = n_1$ e $\delta_{r+1} = m_1 - 1$.

Observação A.2 *Da Proposição A.1 se deduz que as ordens de toda DNE decrita é menor do que $v_2 - v_0 - 1$.*

De fato a afirmação é óbvia no caso de DNE's do primeiro bloco.

Por outro lado se Ω é DNE do segundo bloco com $v(\Omega) \geq v_2 - v_0 - 1$, então para algum $i \geq 0$, $v(\Omega) = v_2 + (n_1 - \alpha_{i+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_i - 1)v_0 - 1 \geq v_2 - v_0 - 1$.

Como $n_1 v_1 = m_1 v_0$, temos que a desigualdade acima se escreve como $v_1 + v_0 \geq \alpha_{i+1} v_1 - \delta_i v_0 - v_0$. Desse modo teríamos

$$\begin{aligned} v_1 + v_0 &\geq \alpha_{i+1} v_1 - \delta_i v_0 - v_0 \geq \alpha_i v_1 - \delta_i v_0 + v_1 - v_0 \geq \\ &\geq \alpha_i v_1 - \delta_i v_0 + 1 > \alpha_i v_1 - \delta_i v_0 = v(\Omega_k) + 1, \end{aligned}$$

para alguma DNEM Ω_k do primeiro bloco, o que é um absurdo!

Em particular, temos que a lacuna limitante é menor ou igual a $v_2 - v_0$.

Vamos provar que não existe $g \in \mathcal{O}$, tal que $v(g\Omega^i) = v(\Omega^j)$ para Ω^i e Ω^j DNE's do segundo bloco como descritas anteriormente.

Lema A.2 Com as notações da Proposição A.1 temos que se $a, b, c \in \mathbb{N}$ então

$$\begin{aligned} av_0 + bv_1 + cv_2 + v_2 + (n_1 - \alpha_{i+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_i - 1)v_0 &= \\ &= v_2 + (n_1 - \alpha_{j+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_j - 1)v_0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $a = b = c = 0$ e $i = j$.

Dem.: Se $c \neq 0$ ou $a \geq m_1$ ou $b \geq n_1$, então teríamos que

$$v_2 + (n_1 - \alpha_{j+1} + 1)v_1 - (m_1 - \delta_j - 1)v_0 > v_2,$$

o que pela observação anterior não pode ocorrer.

Consideremos então $c = 0$, $a < m_1$ e $b < n_1$.

A igualdade do enunciado é equivalente a $av_0 + bv_1 - \alpha_{i+1}v_1 + \delta_i v_0 = -\alpha_{j+1}v_1 + \delta_j v_0$, ou ainda,

$$(b - \alpha_{i+1} + \alpha_{j+1})m_1 = (\delta_j - \delta_i - a)n_1.$$

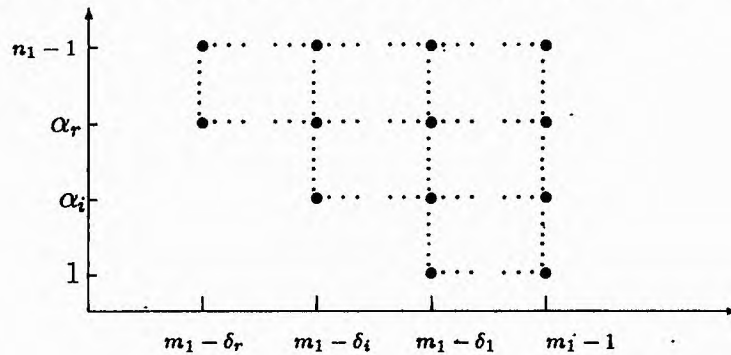
Como $(n_1, m_1) = 1$, temos que $b - \alpha_{i+1} + \alpha_{j+1} = kn_1$ e $\delta_j - \delta_i - a = km_1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $k > 0$, então $\delta_j = a + \delta_i + km_1 > m_1$, o que é uma contradição.

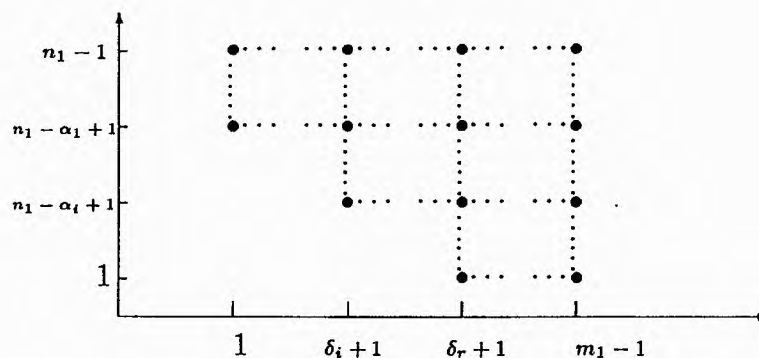
Se $k < 0$, então $\alpha_{i+1} = \alpha_{j+1} + b - kn_1 > n_1$ que também é uma contradição.

Segue que $k = 0$, i.e., $\alpha_{i+1} = \alpha_{j+1} + b$ e $\delta_j = \delta_i + a$. A primeira igualdade implica que $i \leq j$, enquanto que a segunda $j \leq i$, o que permite concluir que $i = j$ e $a = b = 0$. ■

O lema anterior garante que o diagrama de lacunas especiais de uma curva com semigrupo $\Gamma = \langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$ tem como primeiro bloco



e o segundo bloco contém pelo menos os pontos



O número de pontos no primeiro bloco é

$$A = \sum_{i=1}^r (\delta_i - \delta_{i-1})(n_1 - \alpha_i)$$

pontos e no segundo bloco pelo menos

$$B = \sum_{i=0}^r (\delta_{i+1} - \delta_i)(\alpha_{i+1} - 1)$$

onde $\delta_0 = 0$.

Deste modo, ao todo, teremos no diagrama de lacunas especiais pelo menos $A + B = (n_1 - 1)(m_1 - 1)$ pontos.

Como pelo resultado de Laudal e Pfister,

$$\#(\Lambda \setminus \Gamma) = (n_1 - 1)(m_1 - 1),$$

temos que as DNE's do segundo bloco, determinadas na Proposição A.1 são na verdade todas as DNEM's do segundo bloco.

Observe que se tomarmos as duas figuras anteriores e girarmos 180° uma delas, então poderemos encaixá-las de modo a obter um retângulo com área $(n_1 - 1)(m_1 - 1)$. Portanto, as figuras, ou melhor, os blocos que compõem o diagrama de lacunas especiais para ramos com semigrupo $\langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$ se determinam mutuamente.

Reunindo os resultados obtidos anteriormente, temos o seguinte teorema.

Teorema A.1 *Seja C um ramo com semigrupo $\Gamma = \langle 2n_1, 2m_1, v_2 \rangle$. Defina $\Omega_{-1} = dx$, $\Omega_0 = dy$ e $\Omega^0 = dh_2$, com h_2 como dado na Proposição 2.1. Então uma Base Standard Mínima para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ pode ser dada por*

$$\{\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_r\} \cup \{\Omega^0, \Omega^1, \dots, \Omega^{r+1}\},$$

onde cada Ω_{i+1} para $i = 0, \dots, r-1$ é uma DNEM do primeiro bloco dada pela Proposição 3.3, e cada Ω^{i+1} para $i = 0, \dots, r$ é uma DNEM do segundo bloco, dada pela Proposição A.1.

Além disso, se $\{v(\Omega_i) + 1; i = 1, \dots, r\} = \{\alpha_i v_1 - \delta_i v_0; i = 1, \dots, r\}$, então $\{v(\Omega^{i+1}) + 1; i = 0, \dots, r\} = \{v_2 + (n_1 - \alpha_{i+1} - 1)v_1 - (m_1 - \delta_i - 1)v_0; i = 0, \dots, r\}$, onde $\alpha_{r+1} = n_1$ e $\delta_0 = 0$.

Note que se não tivermos DNEM no primeiro bloco, então $r = 0$ e $\lambda = \beta_2$. Assim, no segundo bloco temos apenas uma DNEM Ω^1 , com $v(\Omega^1) + 1 = v_2 + v_1 - (m_1 - 1)v_0 = \beta_2 + v_0$, como já havíamos observado no início desta seção.

Como já tivemos a oportunidade de observar, o invariante $\Lambda \setminus \Gamma$ é muito mais fino do que o invariante λ de Zariski e o número τ de Tjurina, mesmo que considerados simultaneamente, i.e., podemos ter ramos equisingulares que possuem mesmo invariante λ de Zariski, mesmo número τ de Tjurina, porém com conjuntos de lacunas especiais distintos, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo A.1 *Considere os ramos da forma*

$$\begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{18} + t^{20} + at^{22} + bt^{23} + \dots \end{cases}$$

com $a \in K$ e $b \in K^*$.

Utilizando a Proposição 2.1, vemos que o semigrupo de valores dos ramos da forma acima é $\Gamma = \langle 8, 18, 77 \rangle$, cujo condutor é $\mu = 124$.

Note que $20 \notin \Gamma \cup (\Gamma + v_1 - v_0)$, ou seja, o invariante de Zariski é $\lambda = 20$ para todos os ramos como acima.

Uma vez que $n_1 = 4$, $n_2 = 2$ e $m_1 = 9$, temos que

$$\mu - \tau = (n_1 - 1)(m_1 - 1) = 24,$$

ou seja, todos os ramos descritos acima possuem os mesmos valores para os invariantes λ e τ .

Vejamos o conjunto de lacunas especiais $\Lambda \setminus \Gamma$.

Pelo teorema anterior, basta encontrarmos as ordens das DNEM's do primeiro bloco. Para tanto, aplicamos a Proposição 3.3.

A saber, temos

$$\Omega_1 = xdy - \frac{9}{4}ydx = (2t^{27} + 4at^{29} + 5bt^{30} + \dots) dt$$

$$\Omega_2 = 9x\Omega_1 - ydy = ((36a - 38)t^{37} + 45bt^{38} + \dots) dt.$$

Se $a \neq \frac{19}{18}$, então as DNEM's do primeiro bloco são tais que $v(\Omega_1) + 1 = 28$ e $v(\Omega_2) + 1 = 38$.

Se $a = \frac{19}{18}$, então a única DNEM do primeiro bloco é Ω_1 , com $v(\Omega_1) + 1 = 28$.

Desse modo, pelo teorema anterior temos:

| condição | $\Lambda \setminus \Gamma$ |
|------------------------|--|
| $a \neq \frac{19}{18}$ | 28, 38, 46, 47, 55, 57, 63, 65, 67, 71, 73, 75 79, 81, 83, 87, 89, 91, 97, 99, 105, 107, 115, 123 |
| $a = \frac{19}{18}$ | 28, 39, 46, 47, 55, 57, 63, 65, 67, 71, 73, 75 79, 81, 83, 87, 89, 91, 97, 99, 105, 107, 115, 123 |

Bibliografia

- [An] ANGERMÜLLER, G., *Die Wertehalbgruppe einer Ebenen Irreduziblen Algebroiden Kurve*, Math. Zeitschr. 153, 267-282 (1977).
- [AM] ABHYANKAR, S.S. AND MOH, T., *Newton-Puiseux Expansion and Generalized Tschirnhausen Transformation*, J. Reine Angew. Math. 260, 47-83 (1973) and 261, 29-54 (1973).
- [Az] AZEVEDO, A., *The Jacobian Ideal of a Plane Algebroid Curve*, Ph. D. Thesis, Purdue University (1967).
- [Bec1] BECKER, T., *Standard Bases and Some computations in Rings of Power Series*, J. Symbolic Computation 10, 165-178 (1990).
- [Bec2] BECKER, T., *Standard Bases in Power Series Rings: Uniqueness and Superfluous Critical Pairs*, J. Symbolic Computation 15, 251-265 (1993).
- [Ber] BERGER, R.W., *Differentialmoduln Eindimensionaler Lokaler Ringe*, Math. Z. 81, 326-354 (1963).
- [BGa] BRUCE, J.W. AND GAFFNEY, T.J., *Simple Singularities of Mappings $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$* , J. London Math. Soc. (2) 26, 465-474 (1982).
- [BGM] BRIANÇON, J.; GRANGER, M. AND MAISONOBE, PH. *Le Nombre de Modules du Germe de Courbe Plane $X^a + Y^b = 0$* , Math. Ann. 279, 535-551 (1988).
- [Car] CARBONNE, P., *Sur le Différentielles de Torsion*, Journal of Algebra 202, 367-403 (1998).
- [CF] CLAUSEN, M. AND FORTENBACHER, A., *Efficient Solution of Linear Diophantine Equations*, J. Symbolic Computation 8, 201-216 (1989).

- [D1] DELORME, C., *Sous-Monoides d'Intersection Complète de \mathbb{N}* , Ann. Sci. École Norm. Sup. 9, 145-154 (1976).
- [D2] DELORME, C., *Sur les Modules des Singularités de Courbes Planes*, Bull. Soc. Math. France 106, 417-446 (1978).
- [E] EBELY, S., *The Classification of Singular Points of Algebraic Curves*, Trans. amer. Math. Soc. 118, 454-471 (1965).
- [He] HEINRICH, J., *On a Conjecture of Azevedo*, Arch. Math. Vol. 64, 188-198 (1995).
- [HK] HERZOG, J. AND KUNZ, E., *Die Wertikalgruppe eines Lokalen Rings der Dimension 1*, Ber. Heidelberg Akad. Wiss. 2, 1-46 (1971).
- [LaP] LAUDAL, O. A. AND PFISTER, G., *Local Moduli and Singularities*, Lecture Notes in Mathematics, 1310.
- [LuP] LUENGO, I. AND PFISTER, G., *Normal Forms and Moduli Spaces of Curve Singularities with Semigroup $\langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$* , Compositio Mathematica 76, 247-264 (1990).
- [M] MILLER, J.L., *Analogs of Groebner Bases in Polynomial Rings over a Ring*, J. Symbolic Computation 21, 139-153 (1996).
- [Pe1] PERAIRE, R., *Tjurina Number of a Generic Irreducible Curve Singularity*, Journal of Algebra 196, 114-157 (1997).
- [Pe2] PERAIRE, R., *Moduli of Plane Curve Singularities with a Single Characteristic Exponent*, Proceedings of the American Mathematical Society 126 (1), 25-34 (1998).
- [Pi] PINKHAM, H. C., *Deformations of Algebraic Varieties with G_m -action*, Astérisque 20, Société Mathématique de France (1974).
- [RS] ROBBIANO, L. AND SWEEDLER, M., *Subalgebra bases*, Proc. Commutative Algebra Salvador, Lectures Notes in Math. Vol 1430, 61-87.
- [Ru] RUIZ, J. M., *The Basic Theory of Power Series*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg (1993).
- [T] TEISSIER, B., *Appendice in [Z2]*.

- [Z1] ZARISKI, O., *Characterization of Plane Algebroid Curves whose Module of Differentials has Maximum Torsion*, Proceedings Nat. Acad. of Science U.S.A. 56, 781-786 (1966) .
- [Z2] ZARISKI, O., *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*, Cours donné au Centre de Mathématiques de L'École Polytechnique (1973).

Símbolos e Notações

| | |
|-----------------------------------|---|
| $K[[\underline{X}]]$ | $K[[X_1, \dots, X_n]]$ |
| \underline{X}^α | $\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}$ |
| \mathbb{T} | $\{\underline{X}^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ |
| \preceq | ordem monomial |
| D^* | $D \setminus \{0\}$ |
| $\text{car}(K)$ | característica do corpo K |
| $\text{deg}_\rho(f)$ | grau pesado de f com respeito à ρ |
| $\mathcal{M}_{\underline{X}}$ | ideal maximal de $K[[\underline{X}]]$ |
| \mathcal{M} | ideal maximal de $K[[t]]$ |
| $ht(f)$ | altura de F |
| F^α | $\prod_{i=1}^{\#F} f_i^{\alpha_i}$ com $f_i \in F$ |
| $\langle h_0, \dots, h_r \rangle$ | semigrupo (ideal) gerado pelos(as) inteiros (séries) h_0, \dots, h_r |
| v_0, v_1, \dots, v_g | sistema mínimo de geradores de geradores de um semigrupo |
| $S(f, g)$ | S -processo de f e g |
| \mathcal{O} | anel local |
| $\overline{\mathcal{O}}$ | fecho inteiro de \mathcal{O} |
| $v(g)$ | valorização de \mathcal{O} calculada em g |
| Γ | semigrupo |
| μ | condutor de um semigrupo |
| $I(f, g)$ | multiplicidade de interseção de g com f |
| $R_Y(f, g)$ | resultante em Y de f e g |

| | |
|---------------------------------------|---|
| $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_g$ | seqüência característica |
| e_i | $\text{MDC}(\beta_0, \dots, \beta_i) = \text{MDC}(v_0, \dots, v_i)$ |
| n_i | $\frac{e_i - 1}{e_i}$ |
| $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ | \mathcal{O} -módulo de diferenciais |
| df | diferencial de f |
| DNE | Diferencial Não Exata |
| DNEM | Diferencial Não Exata Minimal |
| Λ | $\{v(\Omega) + 1; \Omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}\}$ |
| $l(T)$ | comprimento do submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ |
| τ | número de Tjurina |
| λ | invariante de Zariski |
| \mathcal{J} | ideal jacobiano |
| $\left[\frac{a}{b} \right]$ | parte inteira da fração $\frac{a}{b}$ |
| \sim | equivalência de curvas algebróides irredutíveis |
| \equiv | equisingularidade de curvas algebróides irredutíveis |
| \mathcal{A} | anel de Puiseux |
| \mathbf{M}_r | Classe de equisingularidade |
| \mathcal{I} | ideal $\langle f, f_x, f_y \rangle$ |
| $\ln(\Omega)$ | menor expoente l de t em Ω tal que $\text{MDC}(v_0, v_1) \nmid (l + 1)$ |

Índice Remissivo

A

Abhyankar-Moh, método de 37
álgebras, Base Standard de 5
altura de uma série 4
amplitude 4
analítica, equivalência xiii, 60
anéis de Puiseux 26, 64
Apéry, seqüência de 67
aproximação de raízes 37
Azevedo, conjectura de 76
Azevedo-Zariski, método de 36

B

Base Standard 1
 de álgebras 5, 6
 de módulos 17
 Mínima 8, 22
 Reduzida 16, 22
bloco, diferencial de i -ésimo 77

C

canônica de Zariski,
 parametrização 170
canônico, ramo 76
classe de equisingularidade 66
codimensão do ideal jacobiano 53
coeficiente líder 3
completa, interseção 35
condutor de um semigrupo 27
conjectura de Azevedo 76
contraexemplo de Heinrich 76

coordenadas, mudanças de 65

curva

 algebóide irredutível 25
 gênero de uma 26
 semigrupo de uma 26
curvas, equivalência de 59

D

Delorme, fórmula de 109
diagrama de lacunas 71
 especiais 69
Dickson, lema de 2
diferencial,
 de i -ésimo bloco 77
 exata 44
 não exata 44
 ordem de uma 43
diferenciais,
 módulo de 42
 não exatas minimais 45

E

equidiferenciabilidade 50
equisingularidade 34
 classe de, 66
equivalência
 analítica xiii, 60
 de curvas 59
 topológica xiii, 60

- escrita
 privilegiada 69
 única 69
especiais,
 diagrama de lacunas 69
 lacunas 46
exata, diferencial 44
- F**
formas normais 149
fórmula de Delorme 109
- G**
genérica, curva 71
gênero de
 um semigrupo 26
 uma curva 26
Gorenstein 35
grau 2
 pesado 3
- H**
Heinrich, contraexemplo de 76
homotetias 65
- I**
ideal jacobiano, 53, 104
 codimensão do 53
 multiplicidade do 53
interseção completa 35
invariante de Zariski 68
- J**
jacobiano, ideal 53, 104
- L**
 λ -canônico, ramo 121
lacuna 67
 limitante 44
- lacunas especiais, 46
 diagrama de 69
- M**
método de
 Abhyankar-Moh 37
 Azevedo-Zariski 36
Mínima, Base Standard 8, 22
módulo de diferenciais 42
Módulos, Base Standard de 17
Moh, método de Abhyankar- 37
mudanças de coordenadas 65
multiplicidade
 de uma curva 26
 do ideal jacobiano 53
- N**
normais, formas 149
número de Tjurina 53
- O**
ordem
 de uma diferencial 43
 lexicográfica 2
 graduada 2
 monomial 1
 pesada 3
- P**
parametrização 26
 canônica de Zariski 170
 primitiva 26
potência líder 3
primitiva, parametrização 26
privilegiada, escrita 69
produto de potências 4
Puiseux
 anéis de 26, 64
 parametrização de 26

R

- raízes, aproximação de 37
- ramo 36, 59
 - λ -canônico 121
 - canônico 76
- redução
 - completa 5, 18
 - final 5, 18
- reduzida, Base Standard 16, 22

S

- S -processo 8, 19
 - mínimos 11, 19
 - em uma direção 81, 183
- SAGBI 1
- semigrupo, 27
 - condutor de um 26
 - gênero de um 26
- seqüência
 - característica 36
 - de Apéry 67
- SG-Base 17
- sistema mínimo de geradores 14
- submódulo de torção 43

T

- termo líder 3
- Tjurina, número de 53
- topológica, equivalência xiii, 60
- torção, submódulo de 43

U

- única, escrita 69

Z

- Zariski,
 - invariante de 68
 - método de Azevedo- 36
 - paramet. canônica de 170

ERRATA

Além dos enganos ortográficos, os quais não prejudicam o entendimento dos resultados apresentados no trabalho, algumas observações e correções se fazem necessárias.

Na página 15 antes do Teorema 1.3, devemos observar que a definição de Base Standard, bem como os resultados: Proposição 1.2, Teorema 1.1, Lema 1.3 e o Teorema 1.2, permanecem verdadeiros considerando F um conjunto infinito e realizando as devidas modificações.

Deste modo, verifica-se que o Teorema 1.3, sempre fornece uma Base Standard para uma subálgebra finitamente gerada e finaliza em um número finito de passos se a subálgebra possuir uma Base Standard finita.

Na página 22, como no caso de subálgebras, uma observação similar a feita acima deve ser feita antes do Teorema 1.5.

Na página 43, na demonstração da Proposição 2.2, onde se lê "é equivalente a dizer", leia-se "é consequência do fato".

Na página 56, na demonstração do Corolário 2.1, onde se lê "Pelo teorema anterior", leia-se "Pela proposição anterior".

Na página 64, a Proposição 3.2, deve ser considerada no contexto das curvas algebróides irredutíveis planas (ramos).

São Carlos, abril de 2001.
Marcelo Escudeiro Hernandes
mehernandes@uem.br