SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20.01.2005

Assinatura: Ana Paula Lamparini Trufana

Formas normais para equações diferenciais funcionais

Rodrigo da Silva Rodrigues

Orientadora: ***Profa. Dra. Sueli Mieko Tanaka Aki***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Janeiro/2005

Aluno: *Rodrigo da Silva Rodrigues*

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Sueli Mieko Tanaka Aki ______________________________

Prof. Dr. Eduardo Alex Hernandez Morales ______________________________

Profa. Dra. Maria Aparecida Bená ______________________________

"Grandes realizações não são
feitas por impulso, mas por
uma soma de pequenas
realizações."
(Vincent Van Gogh)

Aos meus pais,
Carmo Rodrigues e
Maria de Lourdes
Aos meus irmãos,
Leandro e Milene
E à minha esposa
Taciana
dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

À Deus.

Aos meus pais e irmãos, que com amor, me apoiam e sempre estão presentes em todos os momentos de minha vida.

À minha família, avós, tios e primos pelo grande incentivo.

À minha esposa Taciana pelo seu amor, amizade e seu conhecimento.

À banca examinadora.

À Prof. Dra. Sueli Mieko Tanaka Aki , pela amizade, paciência e orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática da FCT - UNESP (Campus de Presidente Prudente) pela amizade e pelo conhecimento transmitido. Em especial ao Prof. Dr. José Carlos Rodrigues, pela paciência e amizade sempre presentes desde os tempos da graduação.

À Ângela, Everaldo, Mariene e Anderson pela amizade e apoio que sempre se fez presente.

Aos colegas da Pós-Graduação, pelo agradável convívio.

Aos professores do Departamento de Matemática do ICMC - USP pelo conhecimento transmitido.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho é dedicado à extensão do Método da Forma Normal para Equações Diferenciais Ordinárias às Equações Diferenciais Funcionais Retardadas. O método da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas nos dará o fluxo sobre uma variedade localmente invariante de dimensão finita através de uma equação diferencial ordinária. Como aplicação, calcularemos a forma normal para equação diferencial funcional retardada escalar com uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens. Analisaremos também a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com parâmetro. Finalizaremos este trabalho com o cálculo da forma normal de um sistema planar com singularidade do tipo Bogdanov-Takens.

Palavras-Chave: Formas Normais, Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Funcionais Retardadas, Singularidade do Tipo Bogdanov-Takens.

Abstract

In this work, we compute the normal forms associated with the flow on a finite-dimensional invariant manifold tangent to an invariant space for the infinitesimal generator of the linearized equation at the singularity. As an application, the Bogdanov-Takens singularity is considered.

Keywords: Normal Forms, Ordinary Differential Equations, Retarded Functional Differential Equations, Bogdanov-Takens Singularity.

Sumário

Capítulo

1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados que serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

Iniciaremos formalizando o conceito de equações diferenciais funcionais retardadas e apresentaremos o teorema de existência e unicidade de soluções para esse tipo de equação. Faremos uma breve introdução à teoria de semigrupos para equações diferenciais funcionais lineares autônomas. Nas Seções 1.4 e 1.5, vamos decompor o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ sobre $\mathbb{R}^n$ em soma direta de um espaço de dimensão finita P com um espaço Q, ambos invariantes pelo gerador infinitesimal A_0. Introduziremos a forma bilinear a qual nos permitirá definir explicitamente o espaço Q e determinaremos uma projeção de C sobre os autoespaços generalizados.

Finalizaremos este capítulo com o teorema das variedades invariantes, o qual analisa sua existência para equações diferenciais funcionais retardadas autônomas. Esse teorema examina o comportamente de solução próximas de um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial funcional retardada autônoma e estuda localmente a existência de variedades estáveis, instáveis, centrais,...

1.2 Equações Diferenciais Funcionais Retardadas

Nesta seção, definiremos equações diferenciais funcionais retardadas. Mas, antes de darmos a definição formal desse conceito, consideraremos um caso mais simples de equação diferencial retardada. Finalizaremos esta seção demonstrando a existência e unicidade de soluções para tais equações.

Consideremos a equação diferencial retardada:

$$\dot{x} = f(t, x(t-r)), \tag{1.1}$$

onde r é um real não negativo, $\dot{x}$ denota a derivada de x em relação a t, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas para $t \geq 0$.

Analisaremos a equação diferencial retardada (1.1), para $r > 0$. Como sabemos, para obtermos a solução de uma equação diferencial ordinária, é preciso conhecer o valor da solução em um instante t_0, $x_0 = x(t_0)$, x_0 é dita condição inicial. Mas, para a equação diferencial retardada (1.1), precisamos conhecer a solução em um intervalo anterior ao ponto t_0. Em outras palavras, precisamos conhecer um 'certo' passado da solução anterior ao ponto t_0.

Suponhamos $x : [-r, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, e consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t-r)), \text{ para } t \geq 0, \\ \\ x(\theta) = x_0(\theta), \text{ para } \theta \in [-r, 0], \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $x_0(\theta)$ é contínua em $[-r, 0]$.

Denotando por $x_1(t)$, a solução do problema (1.2) sobre o intervalo $[0, r]$, temos que x_1 satisfaz:

$$\dot{x}_1(t) = f(t, x_1(t-r)).$$

Mas, para $t \in [0, r]$, segue que $t - r$ pertence à $[-r, 0]$, e portanto, obtemos:

$$x_1(t-r) = x_0(t-r), \text{ para } t \in [0, r].$$

Logo, conseguimos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(t, x_0(t-r)) \\ \\ x_1(0) = x_0(0). \end{cases}$$

Integrando a primeira equação do sistema acima, temos:

$$\int_0^t \dot{x}_1(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau, x_0(\tau - r)) d\tau, \quad t \in [0, r],$$

e então,

$$x_1(t) - x(0) = \int_0^t f(\tau, x_0(\tau - r)) d\tau, \quad t \in [0, r],$$

ou seja,

$$x_1(t) = x_0(0) + \int_0^t f(\tau, x_0(\tau - r)) d\tau, \quad t \in [0, r].$$

Analogamente, para $t \in [r, 2r]$, denotemos a solução por x_2.

Logo,

$$\dot{x}_2(t) = f(t, x_2(t-r)).$$

Mas, quando $t \in [r, 2r]$, temos que $t - r$ pertence à $[0, r]$, e portanto,

$$x_2(t-r) = x_1(t-r).$$

Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = f(t, x_1(t-r)) \\ \\ x_2(r) = x_1(r). \end{cases}$$

Donde, conseguimos:

$$x_2(t) = x_1(r) + \int_r^t f(\tau, x_1(\tau - r)) d\tau,$$

com $t \in [r, 2r]$.

Concluindo, para todo $t \geq 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ com $t \in [nr, (n+1)r]$, e suponhamos conhecida a solução sobre o intervalo $[(n-1)r, nr]$, a qual denotaremos por x_{n-1}. Determinemos a solução x_n sobre $[nr, (n+1)r]$, como segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = f(t, x_{n-1}(t-r)) \\ x_n(nr) = x_{n-1}(nr), \end{cases}$$

donde segue,

$$x_n(t) = x_{n-1}(nr) + \int_{nr}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau - r))d\tau,$$

com $t \in [nr, (n+1)r]$.

Agora, passaremos à definição de equações diferenciais funcionais retardadas.

Consideremos um real não negativo r e $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ sobre $\mathbb{R}^n$. O espaço C é um espaço de Banach com a norma:

$$|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|,$$

onde no segundo membro, $|\cdot|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos um real $A > 0$ e $x : [t_0 - r, t_0 + A) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, para todo $t \in [t_0, t_0 + A]$, definimos $x_t \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ por:

$$x_t : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$x_t(\theta) = x(t - \theta).$$

Definição 1.2.1 *Seja $f : [0, \infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função dada, definimos*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.3}$$

como sendo a ***equação diferencial funcional retardada*** *(EDFR) sobre $[0, \infty)$.*

Definição 1.2.2 *Uma funcão $x(t)$, contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$, com $A > 0, t_0 \geq 0$, é uma* ***solução*** *da equação (1.3) se for diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.*

Definição 1.2.3 *Sejam $t_0 \geq 0, A > 0$ e $\psi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Uma função $x(t)$ contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$ é uma* ***solução de*** *(1.3)* ***com condição inicial*** *ψ* ***em*** *t_0 se:*
i) $x_{t_0}(\theta) = \psi(\theta)$, para $\theta \in [-r, 0]$,
ii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, para $t \in [t_0, t_0 + A)$.

Observações:

- Não precisamos exigir que a função $x(t)$, definida sobre $[t_0 - r, t_0 + A)$, seja diferenciável em t_0, basta que $x(t)$ seja diferenciável à direita desse ponto.
- Quando $r = 0$, a equação diferencial funcional retardada se reduz à equação diferencial ordinária.

Definição 1.2.4 *Seja $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Dizemos que a função $f(t,\phi)$ satisfaz a* **condição de Lipschitz** *ou é* **lipschitziana relativamente a ϕ em** *$C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, se existe uma constante $L \geq 0$, tal que:*

$$|f(t,\phi_2) - f(t,\phi_1)| \leq L|\phi_2 - \phi_1|,$$

para $0 \leq t < \infty$ e $\phi_1, \phi_2 \in C([-r,0]\mathbb{R}^n)$. O número L chama-se **constante de Lipschitz**.

Definição 1.2.5 *Para $H \in \mathbb{R}$, com $0 < H < \infty$, denotamos por C_H o conjunto das funções contínuas definidas em $[-r,0]$, com norma menor que H, ou seja,*

$$C_H = \{\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) : |\phi| < H\}.$$

Definição 1.2.6 *Dizemos que a equação $f(t,x_t)$ é* **localmente lipschitziana relativamente a ϕ em** *$[0,\infty) \times C([-r,\mathbb{R}^n)$ se, para todo $\tau > 0$ e todo real positivo H, existe uma constante $L = L(\tau,H) \geq 0$ tal que:*

$$|f(t,\phi_2) - f(t,\phi_1)| \leq L|\phi_2 - \phi_1|,$$

para todo $0 \leq t \leq \tau$ e $\phi_1, \phi_2 \in C_H$.

Definição 1.2.7 *Consideremos X um espaço métrico e $|\cdot|$ a norma induzida pela métrica. Uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ chama-se* **contração** *quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda < 1$, tal que:*

$$|T(u) - T(v)| \leq \lambda|u - v|,$$

para todo $u, v \in X$.

Teorema 1.2.1 ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)****. Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \longrightarrow X$ uma contração. Então, existe um único $u \in X$ tal que $T(u) = u$.*

Demonstração:

A demonstração pode ser encontrada em Zeidler [17].

■

Teorema 1.2.2 ***(Existência e Unicidade de Soluções)****. Seja $f(t,\phi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a ϕ em $[0,\infty) \times C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, com constante de Lipschitz L. Então, para qualquer $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ fixos; existem $A > 0$ e uma única função $x(t)$ definida em $[t_0 - r, t_0 + A)$, a qual é solução da equação diferencial funcional (1.3) com condição inicial ψ em t_0.*

Demonstração:

Consideremos o seguinte conjunto:

$$F = \left\{ x \in C([t_0 - r, t_0 + A]; \mathbb{R}^n) : |x| \leq H,\ x(t_0 + \theta) = \psi(\theta),\ \theta \in [-r, 0] \right\},$$

onde $H > 0$ é tal que $|\psi(0)| < H$, $|\tau| = |t_0 + A| < H$ e $A > 0$ será fixado posteriormente.

Inicialmente, mostraremos que F é um espaço métrico completo. Para isso, mostraremos que F é fechado, isto é, toda seqüência,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in F,\ n \in \mathbb{N}$$

tal que

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

então, temos que $x \in F$.

Como

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

obtemos da continuidade da função módulo que

$$|x| = \lim_{n\to\infty} |x_n|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $|x_n| \leq H$, pois, $x_n \in F$. Então, segue que $|x| \leq H$.

Também conseguimos $x(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, uma vez que, $x_n(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, para $\theta \in [-r, 0]$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, F é um espaço métrico completo.

Consideremos a aplicação $T : F \longrightarrow C([t_0 - r, t_0 + A]; \mathbb{R}^n)$ definida por:

$$(Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \qquad \text{para } \theta \in [-r, 0],$$

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + A].$$

Mostraremos que T é uma aplicação de F em F, considerando A convenientemente. Para isso, temos que verificar que $|(Tx)(t)| \leq H$, para todo $x \in F$ e $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Usando a definição de T, conseguimos:

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x_s)|ds \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+A} |f(s, x_s)|ds.$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Observemos que, para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$,

$$|x_s| = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |x(s + \theta)| \leq |x| \leq H,$$

então, temos que,

$$|f(s, x_s)| \leq |f(s, x_s) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq L|x_s - 0| + K \leq LH + K,$$

onde

$$K = \sup_{t_0\leq s\leq t_0+A} |f(s, 0)| \ \ e \ \ L = L(t_0 + A, H).$$

Daí, obtemos,

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + [LH + K] \int_{t_0}^{t_0+A} ds = |\psi(0)| + [LH + K]A,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A = \tau$.

Por outro lado, como $|\psi(0)| < H$, tomando $A \leq \dfrac{H - |\psi(0)|}{LH + K}$, temos que $|Tx| \leq H$.

Concluímos assim, que $Tx \in F$, ou seja, T é uma aplicação de F em F.

Agora, tomando A dado por:

$$A < min\left\{\frac{H - |\psi(0)|}{LH + K}; \frac{1}{L}\right\},$$

mostraremos que T é uma contração de F em F.

Dados $x, y \in F$, temos,

$$(Tx)(t_0 + \theta) = (Ty)(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad \text{para } \theta \in [-r, 0],$$

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \quad \text{para } \theta \in [t_0, t_0 + A],$$

$$(Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)ds, \quad \text{para } \theta \in [t_0, t_0 + A],$$

onde $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Então, temos que $|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0$, se $t_0 - r \leq t \leq t_0$, e

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_s) - f(s, y_s)|ds \leq \int_{t_0}^{t_0+A} L|x_s - y_s|ds,$$

se $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Observemos que:

$$|x_s - y_s| = \sup_{r \leq \theta \leq 0} |x_s(\theta) - y_s(\theta)| \leq |x - y|.$$

Assim, conseguimos:

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq L|x - y| \int_{t_0}^{t_0+A} ds = AL|x - y|.$$

Portanto, obtemos que T é uma contração, uma vez que $AL < 1$.

Por último, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, temos que existe uma única função $x \in F$ tal que $(Tx)(t) = x(t)$, para $t_0 - r \leq t \leq t_0 + A$, ou seja,

$$(Tx)(t_0 + \theta) = x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad \text{para } \theta \in [-r, 0],$$

$$(Tx)(t) = x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + A].$$

Disso, concluímos que:

$$\begin{aligned} x_{t_0}(\theta) &= x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), && \text{para } \theta \in [-r, 0], \\ \dot{x}(t) &= f(t, x_t), && \text{para } t \in [t_0, t_0 + A]. \end{aligned}$$

■

Observação:

Supondo que função $f(t, \phi)$ seja apenas contínua, podemos provar a existência, mas não a unicidade, de uma solução diferenciável do problema com condição inicial ψ em t_0, definida sobre $[t_0 - r, t_0 + A)$, com A suficientemente pequeno. Podemos provar esse caso usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

1.3 Semigrupos para Equações Lineares Autonômas

Nesta seção, faremos uma breve introdução à teoria de semigrupos para equações diferenciais funcionais lineares autônomas. As demonstrações dos resultados que enunciaremos nesta seção poderão ser encontradas em Hale & Lunel [7].

Consideremos a equação diferencial funcional retardada linear autônoma,

$$\dot{x}(t) = L(x_t), \tag{1.4}$$

onde L é uma aplicação linear contínua de $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema de Representação de Riez, podemos reescrever L na forma:

$$L(\phi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta), \ \phi \in C,$$

onde $\eta(\theta), \theta \in [-r, 0]$, é uma matriz de ordem n, cujos elementos são de variação limitada, normalizada a fim de que η seja contínua à esquerda sobre $(-r, 0)$, ver [11].

Definição 1.3.1 *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach real. Um* ***semigrupo fortemente contínuo*** *de operadores lineares, que denotaremos por* ***C_0-semigrupo****, é uma família a um parâmetro,*

$$T(t) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}, \ t \geq 0,$$

de operadores lineares limitados que satisfaz as propriedades:

i) $T(0) = I$;

ii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \ t_1, t_2 \geq 0$;

iii) $\lim_{t \to 0} ||T(t)\phi - \phi|| = 0, \ \phi \in \mathcal{B}$.

Para todo C_0-semigrupo $T(t)$, podemos associar um gerador infinitesimal A_0, definido por:

$$A_0 : D(A_0) \longrightarrow \mathcal{B},$$

$$A_0\phi = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[T(t)\phi - \phi], \ \phi \in D(A_0),$$

onde $D(A_0)$ é o conjunto das funções ϕ para as quais o limite acima existe, ou seja,

$$D(A_0) = \left\{ \phi \in \mathcal{B} : \exists \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[T(t)\phi - \phi] \right\}.$$

Lema 1.3.1 *Se $T(t)$ é um C_0-semigrupo sobre $\mathcal{B}$, então temos:*

(i) *Para toda $\phi \in \mathcal{B}$, a aplicação $t \to T(t)\phi$ é contínua de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{B}$;*

(ii) *A_0 é um operador fechado densamente definido;*

(iii) Para toda $\phi \in \mathcal{B}$, a aplicação $t \to T(t)\phi$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}T(t)\phi = A_0T(t)\phi = T(t)A_0\phi.$$

O operador linear $L : C \to \mathbb{R}^n$ é limitado, ou seja, existe uma constante $K \geq 0$ tal que:

$$|L(\phi)| \leq K|\phi|,$$

para toda $\phi \in C$. Então, temos,

$$|L(\phi_1) - L(\phi_2)| = |L(\phi_1 - \phi_2)| \leq K|\phi_1 - \phi_2|,$$

para toda $\phi_1, \phi_2 \in C$.

Logo, segue que L é Lipschtiziana, e portanto, pelo Teorema 1.2.2, para cada $\phi \in C$, existe uma única solução $x(.,\phi)$ da equação (1.4).

Definição 1.3.2 *Consideremos o espaço de Banach $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Seja $\phi \in C$ e $x(.,\phi)$ a única solução da equação diferencial funcional linear autônoma* (1.4)*, com condição inicial ϕ em $t_0 = 0$, ou seja,*

$$\dot{x}(t) = Lx_t,$$

$$x_0(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-r,0],$$

então definimos o operador solução $T(t), t \geq 0$, por:

$$T(t)\phi = x_t(.,\phi). \tag{1.5}$$

Agora, enunciaremos alguns resultados para o operador solução.

Lema 1.3.2 *O operador solução $T(t), t \geq 0$, definido pela relação* (1.5)*, é um C_0-semigrupo, com o gerador infinitesimal dado por:*

$$\begin{cases} A_0 : D(A_0) \longrightarrow C, \\ A_0\phi = \dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{d\theta}, \end{cases}$$

com

$$D(A_0) = \left\{\phi \in C : \frac{d\phi}{d\theta} \in C,\ \dot{\phi}(0) = L(\phi)\right\}.$$

Além disso, o operador $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq r$, isto é, o operador $T(t), t \geq r$, é contínuo e aplica conjuntos fechados em conjuntos relativamente compactos.

Agora introduziremos a equação adjunta associada à equação diferencial funcional retardada linear autônoma (1.4).

Tomemos B_0 o espaço das funções $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^{n^*}$ que são constantes em $(-\infty, -r]$, de variação limitada sobre $[-r, 0]$, contínuas à esquerda sobre $(-r, 0)$, e nulas no zero com a norma $Var_{[-r,0]}\psi$, onde $\mathbb{R}^{n^*}$ é o espaço n-dimensional dos vetores linhas.

O espaço B_0 torna-se uma representação do espaço dual de C com a aplicação:

$$< f, \phi > = \int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\phi(\theta), \ f \in B_0, \phi \in C.$$

Definimos a equação adjunta formal por:

$$y(s) + \int_{s}^{t} y(\tau)\eta(\tau, s-\tau)d\tau = constante, \ s \le t-r,$$

onde y é uma solução que se anula em $[t, \infty)$, satisfaz a equação adjunta em $(-\infty, t-r]$ e é tal que $y(t+\theta) = \psi(\theta)$, $-r \le \theta \le 0$, com $\psi \in B_0$.

O operador adjunto A^* do operador A_0 é definido por: $f \in D(A^*)$ se, e somente se, existe $g \in B_0$ tal que

$$< f, A_0\phi > = < g, \phi >,$$

para toda $\phi \in D(A_0)$ e no caso, $A^* f = g$.

Lema 1.3.3 *O operador adjunto $A^* : D(A^*) \to B_0$ é dado por:*

$$D(A^*) = \left\{ f \in B_0 : \frac{df}{d\theta} \in B_0 \right\},$$

$$A^* f(\theta) = f(0-)\eta(\theta) - \frac{df(\theta)}{d\theta}, \ -r \le \theta \le 0.$$

Estudaremos também, o semigrupo associado à equação transposta da equação diferencial funcional retardada linear autônoma (1.4).

Seja $C^* = C([0, r], \mathbb{R}^{n^*})$, e para $s \in [0, \infty)$, tomemos y^s um elemento em C^* definido por:

$$y^s(\xi) = y(-s+\xi), \ \xi \in [0, r].$$

O sistema transposto da equação (1.4) é definido por:

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= -\int_{-r}^{0} y(s-\theta)d[\eta(\theta)], \ s \le 0, \\ y^0(\xi) &= \psi(\xi), \ \xi \in [0, r], \end{aligned} \tag{1.6}$$

com $\psi \in C^*$.

Definição 1.3.3 *Consideremos o espaço de Banach $C^* = C([-r, 0], \mathbb{R}^{n^*})$. Seja $\psi \in C^*$ e $y(., \psi)$ a única solução da equação transposta* (1.6), *com condição inicial ψ em $t_0 = 0$. Definimos o operador transposto $T^T(t), t \ge 0$, dado por:*

$$T^T(t)\psi = y_s(., \psi). \tag{1.7}$$

Lema 1.3.4 *O operador solução $T^T(s), s \ge 0$, da equação transposta, definido pela relação* (1.7) *é um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A_0^T, dado por:*

$$A_0^T : D(A_0^T) \longrightarrow C^*,$$

$$A_0^T \psi = -\frac{d\psi}{d\xi},$$

com

$$D(A_0^T) = \left\{ \psi \in C^* : \frac{d\psi}{d\xi} \in C^*, \frac{d\psi}{d\xi}(0) = -\int_{-r}^{0} \psi(-\theta) d[\eta(\theta)] \right\}.$$

Além disso, o operador $T^T(s)$ é completamente contínuo para $s \geq r$.

1.4 Decomposição de C

Nesta seção, vamos decompor o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ sobre $\mathbb{R}^n$ em soma direta de dois espaços invariantes pelo gerador infinitesimal A_0, sendo que um deles é de dimensão finita, e está associado a um subconjunto finito e não vazio desse gerador infinitesimal. Para isso, precisamos determinar a natureza do espectro do C_0-semigrupo dado pelo operador solução $T(t)$ e de seu gerador infinitesimal A_0.

Para introduzirmos o espectro de um operador, precisamos considerar espaços de Banach complexos. Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ o espaço de Banach real complexificado e

$$B_{\mathbb{C}} : D(B_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$$

o operador linear complexificado. Isso significa que existe um espaço de Banach real $\mathcal{B}$ e um operador

$$B : D(B) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B},$$

tal que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B} + i\mathcal{B} \text{ e } B_{\mathbb{C}}(b_1 + ib_2) = B(b_1) + iB(b_2),$$

para $b_1, b_2 \in D(B)$. Em $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, podemos definir o complexo conjugado:

$$\overline{b_1 + ib_2} = b_1 - ib_2.$$

Sempre que não houver problemas, escreveremos $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ e B para $B_{\mathbb{C}}$.

Definição 1.4.1 *O **conjunto resolvente** $\rho(B)$ do operador B é o conjunto de valores λ no plano complexo para os quais o operador $(\lambda I - B)$ é inversível, onde o inverso é limitado com domínio denso em $\mathcal{B}$. Esse inverso será denotado por:*

$$R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}, \ \lambda \in \rho(B),$$

*e é chamado de **resolvente** de B.*

Definição 1.4.2 *O complementar do conjunto resolvente $\rho(B)$ do operador B no plano complexificado é chamado de **espectro** de B e denotamos por $\sigma(B)$.*

O espectro de um operador pode se constituir de três tipos diferentes de pontos:

- *o **espectro residual** $\sigma_R(B)$, o qual é formado pelos pontos do plano complexo λ, para os quais $R(\lambda, B)$ existe, mas o domínio $D(R(\lambda, B))$ não é denso em $\mathcal{B}$;*
- *o **espectro contínuo** $\sigma_C(B)$, o qual é formado pelos pontos do plano complexo λ,*

para os quais $\lambda I - B$ tem inverso ilimitado com domínio denso em $\mathcal{B}$;

- *o* **espctro pontual** *$\sigma_p(B)$, o qual é formado pelos pontos do plano complexo λ, para os quais $\lambda I - B$ não tem inverso.*

Definição 1.4.3 *Para $\lambda \in \sigma_p(B)$, o* **autoespaço generalizado** *de λ, denotado por $\mathcal{M}_\lambda(B)$, é o menor subespaço de $\mathcal{B}$ que contém os elementos de*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Ker((\lambda I - B)^k).$$

A dimensão de $\mathcal{M}_\lambda(B)$ é chamada de **multiplicidade algébrica** *de λ e o menor inteiro positivo k tal que*

$$Ker((\lambda I - B)^k) = Ker((\lambda I - B)^{k+1}),$$

é chamado de **ascendente** *de λ.*

Os pontos do espectro pontual de B com autoespaço de dimensão finita são chamados **autovalores do tipo finito** *ou* **autovalores normais**.

Lema 1.4.1 *Se A_0 é o operador definido pelo Lema 1.3.2, então o espectro de A_0 é igual ao espectro pontual de A_0, ou seja,*

$$\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0),$$

e λ pertence à $\sigma(A_0)$ se, e somente se, λ satisfaz a equação característica:

$$det(\Delta(\lambda)) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d[\eta(\theta)].$$

Além disso, para $\lambda \in \sigma(A_0)$, o autoespaço generalizado $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$ é de dimensão finita, existe um inteiro k tal que

$$\mathcal{M}_\lambda(A_0) = Ker((\lambda I - A_0)^k),$$

e temos a decomposição em soma direta,

$$C = Ker((\lambda I - A_0)^k) \oplus Im((\lambda I - A_0)^k).$$

Observação:

Desse lema, temos que $\lambda \in \sigma(A_0)$ implica que $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$ é de dimensão finita e $\mathcal{M}_\lambda(A_0) = Ker((\lambda I - A_0)^k)$ para algum inteiro k. Como A_0 comuta com $\lambda I - A_0$, então, o subespaço $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$ é invariante por A_0.

Seja d a dimensão de $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$ e $\Phi_\lambda = \{\phi_1^\lambda, ..., \phi_d^\lambda\}$ uma base para $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$.

Como $A_0\mathcal{M}_\lambda(A_0) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A_0)$, temos,

$$\begin{cases} A_0\phi_1^\lambda = b_{11}\phi_1^\lambda + \cdots + b_{1d}\phi_d^\lambda \\ A_0\phi_2^\lambda = b_{21}\phi_1^\lambda + \cdots + b_{2d}\phi_d^\lambda \\ \vdots \\ A_0\phi_d^\lambda = b_{d1}\phi_1^\lambda + \cdots + b_{d,d}\phi_d^\lambda. \end{cases}$$

Logo,

$$\left[A_0\phi_1^\lambda, \dots, A_0\phi_d^\lambda\right] = \left[\phi_1^\lambda, \dots, \phi_d^\lambda\right] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{d1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{d2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1d} & b_{2d} & \cdots & b_{dd} \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos do fato de $A_0\mathcal{M}_\lambda(A_0) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A_0)$, que existe uma matriz B_λ de ordem d tal que:

$$A_0\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda.$$

Lema 1.4.2 *O único autovalor da matriz B_λ é λ.*

Da definição do operador A_0 no Lema 1.3.2, e da relação

$$A_0\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda,$$

temos que

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda\theta},\ \theta \in [-r, 0].$$

Do Lema 1.3.1, item (iii), obtemos

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t},\ t \geq 0,$$

e portanto, conseguimos:

$$T(t)\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(\theta+t)},\ \theta \in [-r, 0],\ t \geq 0.$$

Essa relação nos permite definir o operador $T(t)$ sobre o autoespaço generalizado $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$ para todos os valores de $t \in (-\infty, \infty)$, e portanto, sobre o autoespaço generalizado de um autovalor, a equação (1.4) tem a mesma estrutura de uma equação diferencial ordinária.

Sendo assim, temos do Lema 1.3.1, $T(t)A_0\phi = A_0T(t)\phi$, para toda $\phi \in C$, então $R((\lambda I - A_0)^k)$ é invariante por $T(t)$.

Repetindo o processo acima, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.1 *Suponhamos Λ um conjunto finito e não vazio $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ de autovalores da equação (1.4) e sejam $\Phi_\Lambda = \{\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_p}\}$, $B_\Lambda = diag(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p})$, onde Φ_{λ_j} é uma base do autoespaço generalizado de λ_j e B_{λ_j} é a matriz definida por $A_0\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j}B_{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \dots, p$. Então, o único autovalor de B_{λ_j} é λ_j e, para todo vetor u de mesma dimensão que Φ_Λ, a solução $T(t)\Phi_\Lambda u$ com condição inicial $\Phi_\Lambda u$ em $t_0 = 0$ pode ser definida em $(-\infty, \infty)$ pela relação:*

$$\begin{cases} T(t)\Phi_\Lambda u = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t}u \\ \Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda\theta},\ \text{para } \theta \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Além disso, existe um subespaço Q_Λ de C tal que $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$ para todo $t \geq 0$ e

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

onde $P = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda u \text{ para algum } u\}$ ·

O Teorema 1.4.1 nos fornece uma análise das soluções da equação (1.4). Sobre os autoespaços generalizados, a equação (1.4) comporta-se essencialmente como uma equação diferencial ordinária e a decomposição de C em dois subespaços invariantes por A_0 e $T(t)$ nos diz que podemos separar o comportamento sobre os autoespaços dos outros tipos de comportamento.

1.5 Decomposição de C com a Equação Adjunta

Nesta seção, introduziremos uma forma bilinear que nos permitirá definir explicitamente o espaço Q e determinaremos uma projeção de C sobre os autoespaços generalizados. Os resultados que enunciaremos poderão ser encontrados em Hale [6].

Definição 1.5.1 *Sejam $\phi \in C$ e $\psi \in C^*$, definimos a forma bilinear $(.,.)$ sobre $C^* \times C$ por:*

$$(.,.) : C^* \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi.$$

O gerador infinitesimal A_0^T do operador solução da equação transposta definido no Lema 1.3.4 satisfaz :

$$(\psi, A_0\phi) = (A_0^T\psi, \phi), \;\; \psi \in D(A_0^T) \subset C^*$$

para toda $\phi \in D(A_0)$.

Outra propriedade interessante é a seguinte: suponhamos $y(.,\psi)$ uma solução da equação transposta (1.6) sobre $(-\infty, r]$ com condição inicial ψ no zero, ou seja,

$$T^T(t)\psi = y^t(.,\phi), \;\; t \in (-\infty, 0],$$

com $\psi \in D(A_0^T)$.

Então, $T^T(t)$ tem as mesmas propriedades do operador solução $T(t)$ associado à equação (1.4) e

$$\frac{dT^T(\tau)\psi}{d\tau} = -A_0^T T^T\psi = -T^T A_0^T\psi,$$

para toda $\psi \in D(A_0^T)$.

Lema 1.5.1 *O espectro do operador A_0 coincide com o espectro do operador A_0^T. O operador A_0^T tem somente o espectro pontual e para todo $\lambda \in \sigma(A_0^T)$, o autoespaço generalizado de λ é de dimensão finita.*

Lema 1.5.2 *Um condição necessária e suficiente para que a equação*

$$(A_0 - \lambda I)^k\phi = \psi, \;\; \psi \in C,$$

tenha solução $\phi \in C$, ou equivalentemente, que $\psi \in Im(A_0 - \lambda I)^k$, é que $(\alpha, \psi) = 0$ para todo $\alpha \in Ker(A_0^T - \lambda I)^k$.

O próximo lema caracteriza os espaços $Ker(A_0 - \lambda I)^k$ e $Ker(A_0^T - \lambda I)^k$.

Lema 1.5.3 *O espaço $Ker(A_0 - \lambda I)^k$ é formado pelas funções $\phi \in C$ da forma:*

$$\phi(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j e^{\lambda\theta}}{j!}, \ \theta \in [-r, 0],$$

onde $\gamma = col(\gamma_1, ..., \gamma_k)$ satisfaz $A_k\gamma = 0$, e também, o espaço $Ker(A_0^T - \lambda I)^k$ é formado pelas funções $\psi \in C^*$ da forma:

$$\psi(s) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j+1} \frac{(-s)^{k-j} e^{-\lambda s}}{j!}, \ s \in [0, r],$$

onde $\beta = linha(\beta_1, ..., \beta_k)$ satisfaz $\beta A_k = 0$, com

$$A_k = \begin{bmatrix} \Delta(\lambda) & \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} & \cdots & \frac{d^{k-1}\Delta(\lambda)}{d\lambda^{k-1}} \\ 0 & \Delta(\lambda) & \cdots & \frac{d^{k-2}\Delta(\lambda)}{d\lambda^{k-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta(\lambda) \end{bmatrix}$$

e

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d[\eta(\theta)].$$

Teorema 1.5.1 *Seja $\lambda \in \sigma(A_0)$. Consideremos $\Psi_\lambda = col(\psi_1, ..., \psi_p)$ e $\Phi_\lambda = (\phi_1, ..., \phi_p)$ bases de $\mathcal{M}_\lambda(A_0^T)$ e $\mathcal{M}_\lambda(A_0)$, respectivamente, e seja $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = [(\psi_i, \phi_j)]$, $i, j = 1, 2, ..., p$. Então, $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda)$ é não singular, e desse modo, podemos tomar como sendo a identidade, e mais, a decomposição de C por Λ, dada no Teorema 1.4.1, pode ser escrita explicitamente como:*

$$\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}, \ \ \phi^{P_\lambda} \in P_\lambda, \ \ \phi^{Q_\lambda} \in Q_\lambda,$$

$$P_\lambda := M_\lambda(A_0) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\lambda b, b \text{ é um } p\text{-vetor}\},$$

$$Q_\lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\lambda, \phi) = 0\},$$

$$\phi^{P_\lambda} = \Phi_\lambda b, \ \text{onde } b = (\Psi_\lambda, \phi),$$

$$\phi^{Q_\lambda} = \phi - \phi^{P_\lambda}.$$

Suponhamos que $(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I$ e que B_λ, B_λ^* são as matrizes constantes tais que:

$$A_0\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda \quad \text{e} \quad A_0^T\Psi_\lambda = B_\lambda^*\Psi_\lambda,$$

então, temos que $B = B^*$.

Lema 1.5.4 *A dimensão do autoespaço associado à λ é igual a multiplicidade de λ como zero da equação característica dada pelo Lema 3.3, ou seja,*

$$dim\mathcal{M}_\lambda = multiplicidade\ de\ \lambda\ como\ zero\ de\ \Delta(\lambda).$$

Lema 1.5.5 *Sejam $\lambda, \mu \in \sigma(A_0) = \sigma(A_0^T)$, com $\lambda \neq \mu$, e $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(A_0), \phi \in \mathcal{M}_\mu(A_0^T)$, então, temos que $(\psi, \phi) = 0$.*

Tomemos $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ um conjunto finito de elementos de $\sigma(A_0)$ e seja

$$P = P_\Lambda = ger\{M_{\lambda_j} : \lambda_j \in \Lambda\},$$

de maneira similar ao feito anteriormente, podemos definir

$$P^T = P_\Lambda^T = ger\{M_{\lambda_j}(A_0^T) : \lambda_j \in \Lambda\}$$

como sendo a autoespaço generalizado da equação transposta associado a Λ. Se Φ, Ψ são bases para P, P^T, respectivamente, e $(\Psi, \Phi) = I$, então:

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda,$$

$$P_\Lambda := M_\Lambda(A_0) = \{\phi \in C : \phi = \Phi_\Lambda b, b \text{ é um p-vetor}\},$$

$$Q_\Lambda = \{\phi \in C : (\Psi_\Lambda, \phi) = 0\},$$

e portanto, para toda $\phi \in C$,

$$\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda},$$

$$\phi^{P_\Lambda} = \Phi(\Psi, \phi).$$

1.6 Teorema das Variedades Invariantes

Nesta seção, enunciaremos o Teorema das Variedades Invariantes, o qual analisa a existência de tais variedades para equações diferenciais funcionais. Esse teorema analisa o comportamento de soluções próximas de um ponto de equilíbrio da equação diferencial funcional autônoma e estuda localmente a existência de variedades estáveis, instáveis, centrais,...

Estamos particularmente interessados na existência da variedade central, a qual é apresentada nesse teorema.

Podemos encontrar a demonstração do Teorema das Variedades Invariantes em Hale & Lunel [7].

Seja Ω uma vizinhança do zero em C e para $\phi \in C$, tomemos a norma:

$$|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|.$$

Consideremos $C_b^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções de Ω em $\mathbb{R}^n$ que têm derivadas contínuas limitadas até ordem p com respeito a $\phi \in \Omega$. O espaço $C_b^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ torna-se um espaço de Banach se escolhermos a norma do supremo para todas as derivadas até a ordem p.

Assumiremos que $F \in C_b^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e consideremos a equação diferencial funcional retardada autônoma:

$$\dot{x}(t) = F(x_t), \tag{1.8}$$

com $F(0) = 0$, ou seja, 0 é um ponto de equilíbrio e linearizando a equação (1.8) em torno do zero, temos:

$$\dot{x}(t) = L(x_t). \tag{1.9}$$

onde $L \in \mathcal{L}(C, \mathbb{R}^n)$ e $L(\psi) = D_\phi F(0)\psi$.

Suponhamos que 0 é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico da equação (1.8), ou seja, existem raízes da equação característica:

$$det\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^{\lambda \cdot} I), \tag{1.10}$$

com partes reais nulas.

Podemos decompor o espaço C como segue:

$$C = U \oplus N \oplus S,$$

onde U é de dimensão finita e corresponde ao subespaço gerado pelos autoespaços generalizados associados às raízes de (1.10) com partes reais positivas, N também é de dimensão finita e corresponde ao subespaço gerado pelos autoespaços generalizados associados às raízes de (1.10) com partes reais iguais a zero e S corresponde ao subespaço gerado pelos autoespaços generalizados associados às raízes de (1.10) com partes reais negativas.

Essa decomposição de C define três projeções:

$$\begin{array}{lll} \pi_U : C \longrightarrow U & \pi_N : C \longrightarrow N & \pi_S : C \longrightarrow S \\ \pi_U(U) = U, & \pi_N(N) = N, & \pi_S(S) = S, \end{array}$$

e $\pi_U + \pi_N + \pi_S = I$.

Sejam Φ uma base de U e Ψ uma base de U^T, com $(\Psi, \Phi) = I$, então a projeção π_U é dada por $\pi_U(\phi) = \Phi(\Psi, \phi)$. Similarmente, se Φ_0 é uma base de N e Ψ_0 é uma base de N^T, com $(\Psi_0, \Phi_0) = I$, então a projeção π_N pode ser dada por $\pi_N(\phi) = \Phi_0(\Psi_0, \phi)$.

Se $T(t), t \geq 0$, é o C_0-semigrupo associado à equação linear (1.9), então os espaços U, N e S são invariantes por sob $T(t)$.

Das Seções 7.9 e 9.5 de [7], existem constantes positivas M, α, e para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva M_ϵ, tal que para $\phi \in C$, temos:

$$\begin{aligned} &|T(t)\phi^U| \leq Me^{\alpha t}|\phi^U|, \quad Var_{(t,0]}T(t)X_0^U \leq Me^{\alpha t}, \quad t \leq 0, \\ &|T(t)\phi^N| \leq M_\epsilon e^{\epsilon|t|}, \quad Var_{(-t,t)}T(t)X_0^N \leq Me^{\epsilon|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &|T(t)\phi^S| \leq Me^{-\alpha t}|\phi^S|, \quad Var_{[0,t)}T(t)X_0^S \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

O conjunto U é caracterizado como o conjunto dos valores iniciais daquelas soluções de (1.9) que existem e permanecem limitadas para $t \leq 0$, e a relação (1.11) implica que essas soluções aproximam-se de zero exponencialmente quando $t \to -\infty$. O conjunto S é caracterizado como o conjunto dos valores iniciais daquelas soluções da equação (1.9) que existem e permanecem limitadas para $t \geq 0$, e essas soluções aproximam-se do zero exponencialmente quanto $t \to \infty$. O conjunto N é caracterizado como o conjunto dos valores iniciais daquelas soluções da equação (1.9) que existem para $t \in \mathbb{R}$ e crescem menos rapidamente do que qualquer função exponencialmente fixada.

Definição 1.6.1 *Dada uma vizinhança V do zero em C, a* **variedade fortemente estável local** $W^{ss}_{loc}(0) \stackrel{def.}{=} W^{ss}(0,V)$ *do ponto de equilíbrio 0 da equação (1.8) é a coleção das funções $\phi \in C$ com a propriedade que a solução $x_t(.,\phi) \in C$ para $t \geq 0$ aproxima-se da solução nula exponencialmente quando $t \to \infty$, ou seja,*

$$W^{ss}_{loc}(0) = \{\phi \in C : x_t(.,\phi) \in V \text{ para } t \geq 0 \text{ e } x_t(.,\phi) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}\cdot$$

De modo análogo, definimos a **variedade fortemente instável local** *, que denotamos por $W^{su}_{loc}(0) \stackrel{def.}{=} W^{su}(0,V)$, como:*

$$W^{su}_{loc}(0) = \{\phi \in C : x_t(.,\phi) \in V \text{ para } t \leq 0 \text{ e } x_t(.,\phi) \to 0 \text{ quando } t \to -\infty\}\cdot$$

Definição 1.6.2 *Seja V uma vizinhança do zero em C, uma* **variedade central local** $W^{c}_{loc}(0) \stackrel{def.}{=} W^{c}(0,V)$ *do ponto de equilíbrio 0 da equação (1.8) é uma C^1-subvariedade que é um gráfico sobre $V \cap N$ em C, tangente à N na origem, e é localmente invariante sob o fluxo definido pela equação (1.8), ou seja,*

$$W^{c}_{loc}(0) \cap V = \{\psi \in C : \psi = \phi + h(\phi), \phi \in N \cap V\},$$

onde $h : N \to U \oplus S$ é uma função de classe C^1 com $h(0) = 0, D_\phi(0) = 0$. Portanto, toda órbita que começa em $W^{c}_{loc}(0)$, continua nesse conjunto enquanto permanece em V.

Definição 1.6.3 *Dada uma vizinhança V do zero em C, uma* **variedade central estável local** $W^{cs}_{loc}(0) \stackrel{def.}{=} W^{cs}(.,V)$ *do ponto de equilíbrio 0 da equação (1.8) é um conjunto em C tal que $W^{cs}_{loc}(0) \cap V$ é uma subvariedade de classe C^1 que é um gráfico sobre $V \cap (N \oplus S)$, tangente a $(N \oplus S)$ na origem e é localmente invariante. Em outras palavras,*

$$W^{c}_{loc}(0) \cap V = \{\psi \in C : \psi = \phi + h(\phi), \phi \in (N \oplus S) \cap V\},$$

onde $h : N \oplus S \to U$ é uma função de classe C^1 com $h(0) = 0, D_\phi h(0) = 0$. Portanto, toda órbita que começa em $W^{cs}_{loc}(0)$, continua nesse conjunto enquanto permanece em V e além disso, toda órbita que permanece em V para todo $t \geq 0$ deve pertencer à $W^{cs}_{los}(0)$.

Do mesmo modo, definimos a **variedade central instável local**, *que denotamos por $W^{cu}_{loc}(0) \stackrel{def.}{=} W^{cu}(0,V)$, do ponto de equilíbrio 0 da equação (1.8) colocando $t \leq 0$ em vez de $t \geq 0$, $(N \oplus U)$ no lugar de $(N \oplus S)$ e S por N.*

O seguinte teorema diz respeito a existência de variedades invariantes.

Teorema 1.6.1 *Se a função F da equação (1.8) é de classe C^k, então existe uma vizinhança V do zero em C tal que cada um dos conjuntos $W^{ss}_{loc}(0)$, $W^{su}_{loc}(0)$, $W^{c}_{loc}(0)$, $W^{cu}_{loc}(0)$ e $W^{cs}_{loc}(0)$ existem e são subvariedades de classe C^k de C. As variedades $W^{ss}_{loc}(0)$ e $W^{su}_{loc}(0)$ são unicamente definidas, enquanto as variedades $W^{c}_{loc}(0)$ $W^{cu}_{loc}(0)$ e $W^{cs}_{loc}(0)$ não são. Portanto, todo conjunto invariante da equação (1.8) que permanece em V deve pertencer a $W^{c}_{loc}(0)$.*

A partir de agora, usaremos a notação $W^c(0)$ para $W^{c}_{loc}(0)$.

Capítulo 2

Formas Normais para Equações Diferenciais Ordinárias

2.1 Introdução

O método da forma normal consiste em encontrar um sistema de coordenadas, no qual uma equação diferencial ordinária tenha uma forma mais simples. Ao desenvolvermos esse método, três características devem ser observadas:

1º O método é local no sentido de que as transformações de coordenadas são consideradas em uma vizinhança de uma solução conhecida; essa solução é, no caso, um ponto fixo.

2º Em geral, as transformações de coordenadas são funções não lineares, e essas transformações são obtidas através da resolução de uma sequência de problemas lineares.

3º A estrutura da forma normal é determinada pela natureza da 'parte linear' da equação.

2.2 Formas Normais para Equações Diferenciais Ordinárias

Consideremos a equação diferencial ordinária:

$$\dot{w} = G(w) \quad , \quad w \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

onde G é de classe C^r, $r \geq 4$. Suponhamos que (2.1) tenha um ponto fixo $w = w_0$.

Façamos uma translação do ponto fixo para a origem,

$$v = w - w_0 \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

assim, obtemos:

$$\dot{v} = G(v + w_0) \equiv H(v). \tag{2.2}$$

Agora, separemos a parte linear da parte não linear da seguinte forma:

$$\dot{v} = DH(0)v + \bar{H}(v),$$

onde $\bar{H}(v) = H(v) - DH(0)v$ e $\bar{H}(v) = O(|v|^2)$.

Seja T a matriz que 'transforma' a matriz $DH(0)$ na forma canônica de Jordan real. Então, fazendo:

$$v = Tx \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

obtemos:

$$\dot{x} = Jx + F(x), \tag{2.3}$$

onde $J = T^{-1}DH(0)T$ e $F(x) = T^{-1}\bar{H}(Tx)$.

Até o momento, simplificamos a parte linear da equação diferencial ordinária. Agora, simplificaremos a parte não linear $F(x)$.

Se tomarmos a expansão de Taylor para $F(x)$, temos que:

$$\dot{x} = Jx + \frac{1}{2}F_2(x) + \frac{1}{3!}F_3(x) + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}F_{r-1}(x) + O(|x|^r), \tag{2.4}$$

onde o termo $F_i(x)$ é formado pelos termos de ordem i na expansão de Taylor para $F(x)$.

Considerando a mudança de coordenadas:

$$x = y + \frac{1}{2}h_2(y),$$

com $h_2(y)$ uma função de ordem dois em y; $h_2(y) \in \mathbb{R}^n$; obtemos:

$$\dot{x} = \dot{y} + \frac{1}{2}Dh_2(y)\dot{y},$$

e substituindo em (2.4) temos que:

$$\begin{aligned}\dot{y} + \frac{1}{2}Dh_2(y)\dot{y} &= J(y + \frac{1}{2}h_2(y)) + \frac{1}{2}F_2(y + \frac{1}{2}h_2(y)) + \frac{1}{3!}F_3(y + \frac{1}{2}h_2(y)) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{(r-1)!}F_{r-1}(y + \frac{1}{2}h_2(y)) + O(|y|^r).\end{aligned}$$

Seja $h_j(y)$ um função em y de ordem j , $h_j(y) \in \mathbb{R}^n$, com $2 \leq j \leq r-1$; usando o binômio de Newton, obtemos:

$$F_k(y + \frac{1}{2}h_j(y)) = F_k(y) + O(|y|^{k+(j-1)}), \tag{2.5}$$

para $2 \leq k \leq r-1$.

Assim, para $j = 2$ temos:

$$\begin{aligned}\left(I + \frac{1}{2}Dh_2(y)\right)\dot{y} &= Jy + \frac{1}{2}Jh_2(y) + \frac{1}{2}F_2(y) + \frac{1}{3!}\bar{F}_3(y) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{(r-1)!}\bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r),\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\bar{F}_k(y)$, $3 \leq k \leq r-1$, denota os termos de ordem k que têm sido modificados pela transformação de coordenadas.

Agora, para y suficientemente pequeno, o operador

$$\left(I + \frac{1}{2}Dh_2(y)\right)^{-1}$$

existe e podemos representá-lo em série de expansão como segue:

$$\left(I + \frac{1}{2}Dh_2(y)\right)^{-1} = I - \frac{1}{2}Dh_2(y) + O(|y|^2). \tag{2.7}$$

Observemos que:

$$\left(I + \frac{1}{2}Dh_2(y)\right)\left(I + \frac{1}{2}Dh_2(y)\right)^{-1}(y) = y \Leftrightarrow -\frac{1}{4}Dh_2(y)Dh_2(y)y + O(|y|^3) = 0,$$

ou seja, os termos até ordem dois são completamente determinados.

Substituindo (2.7) em (2.6), obtemos:

$$\dot{y} = Jy + \frac{1}{2}\left[F_2(y) - (Dh_2(y)Jy - Jh_2(y))\right] + \frac{1}{3!}\bar{F}_3(y) + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}\bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r). \tag{2.8}$$

Até o momento, a função $h_2(y)$ foi tomada arbitrariamente. A fim de eliminarmos os termos de ordem dois da equação (2.8), a melhor escolha de $h_2(y)$ é aquela que satisfaz:

$$Dh_2(y)Jy - Jh_2(y) = F_2(y).$$

Observemos que, com a escolha acima, eliminamos $F_2(y)$ de (2.8); mas infelizmente isso nem sempre é possível, sendo assim, escolheremos $h_2(y)$ de modo a simplificar a equação (2.8).

Para determinar a escolha adequada para $h_2(y)$, precisamos definir um operador linear sobre um espaço vetorial; isso será feito através de três etapas.

1°passo: Denotamos por H_2^n o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau 2 em n variáveis reais.

Sejam $\{s_1, ..., s_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ as coordenadas de y em relação a essa base. O conjunto

$$\left\{(y_1^{m_1}y_2^{m_2}...y_n^{m_n})s_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad \sum_{j=1}^{n} m_j = 2, \quad m_j \in \mathbb{N} \;\; e \;\; m_j \geq 0\right\}$$

forma uma base para H_2^n.

2°passo: Definimos um operador linear sobre H_2^n :

$$M_2 : H_2^n \longrightarrow H_2^n,$$

$$M_2(h_2(y)) = Dh_2(y)Jy - Jh_2(y).$$

3°passo: Consideramos a decomposição do espaço H_2^n em uma soma direta dos espaços G_2 e $M_2(H_2^n)$, onde G_2 é o espaço complementar de $M_2(H_2^n)$, ou seja,

$$H_2^n = M_2(H_2^n) \oplus G_2.$$

Assim, se F_2 estiver na imagem de M_2, podemos eliminar os termos de ordem dois da equação (2.8). Caso contrário, escolhemos $h_2(y)$ pertencente à H_2^n tal que somente os termos de ordem dois que estão em G_2, permanecem na equação (2.8). Denotamos os termos de ordem dois que permanecem na equação (2.8) por F_2^r, é claro que $F_2^r \in G_2$.

Portanto, podemos simplificar a equação (2.8) :

$$\dot{y} = Jy + \frac{1}{2}F_2^r(y) + \frac{1}{3!}\bar{F}_3(y) + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}\bar{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r).$$

Aplicando esse processo aos termos de ordem superior, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 *Por uma sucessiva mudança de coordenadas próximas à origem, transformamos a equação* (2.1) *em sua forma normal dada por:*

$$\dot{y} = Jy + \frac{1}{2}F_2^r(y) + +\frac{1}{3!}F_3^r(y) + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}F_{r-1}^r(y) + O(|y|^r), \tag{2.9}$$

onde $F_j^r(y) \in G_j$, $2 \leq j \leq (r-1)$ *e* G_j *é o espaço complementar de* $M_j(H_j^n)$.

Observações:

1º A estrutura dos termos não lineares em (2.9) é inteiramente determinada pela parte linear da equação.

2º Ao simplificarmos os termos de ordem k, vemos, por (2.6), que os termos de ordem inferior não mudam, mas os termos de ordem superior a k são modificados.

3º Como a forma normal depende da escolha do espaço complementar G_k, temos que ela não é única.

O corolário que segue do próximo lema nos será muito útil na determinação dos termos que permanecem na forma normal.

Lema 2.2.1 *Consideremos o operador:*

$$M_k : H_k^n \longrightarrow H_k^n,$$

$$M_k(h_k(y)) = D_y h_k(y)Jy - Jh_k(y),$$

com $2 \leq k \leq r-1$.

Se $\sigma(J) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, *então:*

$$\sigma(M_k) = \{(q, \bar{\lambda}) - \lambda_j : j = 1, 2, ..., n \;\; e \;\; |q| = k\},$$

onde $q \in \mathbb{N}^n$, $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *e* $(q, \bar{\lambda}) = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + ... + q_n\lambda_n$.

Demonstração:

Sabemos que um número complexo Λ pertence à $\sigma(M_k)$ se, e somente se, existe h pertencente à $H_k^n \setminus \{0\}$ tal que $M_k h = \Lambda h$. Consideremos uma matriz não singular S, $n \times n$ e fazendo $y = Sx$ e $g(x) = S^{-1}h(Sx)$, obtemos:

$$M_k h(y) = \frac{\partial h(y)}{\partial y}Jy - Jh(y) = S\frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{dx}{dy}J(Sx) - JSg(x) = S\frac{\partial g(x)}{\partial x}(S^{-1}JS)x - JSg(x).$$

Portanto, definimos o operador $\bar{M}_k : H_k^n \to H_k^n$ por:

$$\bar{M}_k g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} S^{-1}M_k(h(Sx)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x}(S^{-1}JS)x - (S^{-1}JS)g(x).$$

Observemos que $M_k h = \Lambda h$ é equivalente à $\bar{M}_k g = \Lambda g$.
De fato:
Se $M_k h = \Lambda h$, então

$$\bar{M}_k g(x) \overset{\text{def.}}{=} S^{-1} M_k h(Sx) = S^{-1} \Lambda h(Sx) = \Lambda S^{-1} h(Sx) = \Lambda g(x).$$

Se $\bar{M}_k g = \Lambda g$, então

$$S^{-1} M_k h(Sx) \overset{\text{def.}}{=} \bar{M}_k g(x) = \Lambda g(x) = \Lambda S^{-1} h(Sx) = S^{-1} \Lambda h(Sx) \Rightarrow M_k h(Sx) = \Lambda h(Sx).$$

Escolhemos S de modo que $(S^{-1} JS)$ esteja na forma canônica de Jordan, com seus blocos formados por matrizes triangulares inferiores e denotemos os termos abaixo da diagonal por σ_i, $i = 2, 3, ..., n$, ou seja,

$$S^{-1} JS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Coloquemos $\sigma_1 = 0$, $x_0 = 0$, $g_0 = 0$ e $\bar{M}_k g = (f_1, f_2, ..., f_n) = f$. Então:

$$\bar{M}_k g(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1}\lambda_1 x_1 + \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \lambda_2 x_2) + \cdots + \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n}(\lambda_n x_n) - \lambda_1 g_1(x) \\
\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1}\lambda_1 x_1 + \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \lambda_2 x_2) + \cdots + \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n}(\lambda_n x_n) - \lambda_2 g_2(x) - \sigma_2 g_1(x) \\
\vdots \\
\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1}\lambda_1 x_1 + \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_2}(\sigma_2 x_1 + \lambda_2 x_2) + \cdots + \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n}(\lambda_n x_n) - \lambda_n g_n(x) - \sigma_n g_{n-1}(x)
\end{bmatrix}.
$$

Portanto, para cada $j = 1, 2, ..., n$, temos:

$$
f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}(\lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1}) - \lambda_j g_j(x) - \sigma_j g_{j-1}(x);
$$

como $g(x)$ e $f(x)$ pertencem à H_k^n, segue que $g_j(x)$ e $f_j(x)$ pertencem à H_k^1, ou seja,

$$
g_j(x) = \sum_{|q|=k} g_j^{(q)} x^q \quad e \quad f_j(x) = \sum_{|q|=k} f_j^{(q)} x^q.
$$

Agora, determinemos os coeficientes $f_j^{(q)}$ para cada $j = 1, 2, ..., n$.

$$
\begin{aligned}
f_j(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\sum_{|q|=k} g_j^{(q)} x^q)}{\partial x_i}(\lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1}) - \lambda_j \sum_{|q|=k} g_j^{(q)} x^q - \sigma_j \sum_{|q|=k} g_{j-1}^{(q)} x^q \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{|q|=k} g_j^{(q)} q_i x^{(q-e_i)}(\lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1}) - \sum_{|q|=k} \lambda_j g_j^{(q)} x^q - \sum_{|q|=k} \sigma_j g_{j-1}^{(q)} x^q \\
&= \sum_{|q|=k} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(g_j^{(q)} \lambda_i q_i x^q + g_j^{(q)} \sigma_i q_i x^{q+e_{i-1}-e_i} \right) - \lambda_j g_j^{(q)} x^q - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} x^q \right] \\
&= \sum_{|q|=k} \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i q_i - \lambda_j) g_j^{(q)} x^q + \sum_{i=1}^{n} g_j^{(q)} \sigma_i q_i x^{q+e_{i-1}-e_i} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} x^q \right] \\
&= \sum_{|q|=k} \left[\left[(q, \lambda) - \lambda_j \right] g_j^{(q)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} \right] x^q + \sum_{i=2}^{n} \sum_{|q|=k} g_j^{(q)} \sigma_i q_i x^{q+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{|q|=k} \left[\left[(q, \bar{\lambda}) - \lambda_j \right] g_j^{(q)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} \right] x^q + \sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{|q'|=k \\ q' \neq q - e_{i-1} + e_i}} g_j^{(q')} \sigma_i q_i x^{q'+e_{i-1}-e_i} +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{|q'|=k \\ q'=q-e_{i-1}+e_i}} g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)} \sigma_i q_i x^{(q-e_{i-1}+e_i)+e_{i-1}-e_i}$$

$$= \sum_{|q'|=k} \left[\left[(q,\lambda)-\lambda_j\right] g_j^{(q)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} \right] x^q + \sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{|q'|=k \\ q' \neq q-e_{i-1}+e_i}} g_j^{(q')} \sigma_i q_i x^{q'+e_{i-1}-e_i} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n} \sum_{|q|=k} g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)} \sigma_i q_i x^q$$

$$= \sum_{|q|=k} \left[\left[(q,\bar{\lambda})-\lambda_j\right] g_j^{(q)} + \sum_{i=2}^{n} q_i \sigma_i g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} \right] x^q +$$

$$+\sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{|q'|=k \\ q' \neq q-e_{i-1}+e_i}} g_j^{(q')} \sigma_i q_i x^{q'+e_{i-1}-e_i}.$$

Portanto, obtemos:

$$f_j^{(q)} = [(q,\bar{\lambda})-\lambda_j] g_j^{(q)} + \sum_{i=2}^{n} q_i \sigma_i g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)},$$

onde $e_i = (\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, ..., \delta_{n,i})$, $\delta_{k,i} = 1$ se $k = i$ e $\delta_{k,i} = 0$ se $k \neq i$.

Seja $v \in H_k^n$, então podemos escrever:

$$v(x) = \sum_{|q|=k} v^{(q)} x_1^{q_1} x_2^{q_2} ... x_n^{q_n},$$

onde $v^q = (v_1^{(q)}, v_2^{(q)}, ..., v_n^{(q)})$. Dizemos que $v_k^{(q)}$ precede $v_l^{(p)}$ se a primeira diferença não nula $l-k, p_1-q_1, ..., p_n-q_n$ é positiva.

Desse modo, temos que $g_j^{(q)}$ é precedido por $g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)}$ e $g_{j-1}^{(q)}$.

Então, concluímos:

$\Lambda \in \sigma(M_k)$ se, e somente se, $\Lambda \in \sigma(\bar{M}_k)$ o que equivale a existir $g(x)$ pertencente à $H_k^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\bar{M}_k g(x) = \Lambda g(x),$$

ou seja,

$$\bar{M}_k g_j(x) = \Lambda g_j(x).$$

Mas como

$$\bar{M}_k g_j(x) = f_j(x) = \sum_{|q|=k} f_j^{(q)} x^q,$$

onde $f_j^{(q)}$ é dado acima e $g_j(x) = \sum_{|q|=k} g_j^{(q)} x^q$, temos que:

$$[(q,\bar{\lambda})-\lambda_j] g_j^{(q)} + \sum_{i=2}^{n} q_i \sigma_i g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)} - \sigma_j g_{j-1}^{(q)} = \Lambda g_j^{(q)}.$$

Daí, como $g_j^{(q)}$ é precedido por $g_j^{(q-e_{i-1}+e_i)}$ e $g_{j-1}^{(q)}$ obtemos que

$$\Lambda = [(q, \lambda) - \lambda_j],$$

para algum q e λ_j.

∎

Corolário 2.2.1 *: Seja k tal que $2 \leq k \leq r-1$. Se todo elemento Λ pertencente à $\sigma(M_k)$ for não nulo, então podemos eliminar os termos de ordem k da forma normal.*

Demonstração:

Como podemos escrever o espaço H_k^n como soma direta da imagem e do núcleo do operador M_k, é suficiente verificarmos que o núcleo do operador M_k contém apenas o polinómio identicamente nulo.

Suponhamos que existe $g(x) \in Ker(M_k) \setminus \{0\}$, então temos que:

$$M_k g(x) \equiv 0,$$

o que implica que 0 pertence ao espectro de M_k.

∎

2.3 Exemplos

Exemplo 2.3.1 *: Consideremos a equação:*

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $J \equiv 0$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é não linear em x, de classe C^r.

Daí, temos que o operador:

$$M_k : H_k^n \longrightarrow H_k^n,$$

$$M_k(h_k(x)) = Dh_k(x)Jx - Jh_k(x)$$

é identicamente nulo.

Logo, a imagem de M_k é $\{0\}$.

Portanto, o espaço complementar G_k de $M_k(H_k^n)$ é todo o espaço H_k^n, para todo k; o que implica que os termos não lineares permanecem na forma normal.

Exemplo 2.3.2 *: Consideremos a equação:*

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

onde $J = diag(1,3)$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é não linear em x, de classe C^r, $r \geq 3$.

Para $k \geq 2$ e $j \in \mathbb{N}$, tomemos $q = (k-j, j)$ pertencente à $\mathbb{N}^2$, $\bar{\lambda} = (1,3)$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, então temos $|q| = k$, e ainda

$$(q, \bar{\lambda}) - \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

se, e somente se,

$$k + 2j = 1, \quad se \quad i = 1, \tag{2.10}$$

$$k + 2j = 3, \quad se \quad i = 2. \tag{2.11}$$

Como $k \geq 2$ *e* $2j \geq 0$, *temos que a equação* (2.10) *não tem solução em* $\mathbb{N}$. *Por outro lado, temos que a equação* (2.11) *está satisfeita se, e somente se* $k = 3$ *e* $j = 0$, *ou seja,* $q = (3,0)$.

Portanto, do Corolário 2.2.1, *podemos eliminar os termos de ordem* k *da forma normal, para todo* $2 \leq k \leq r-1$ *e* $k \neq 3$.

Sabemos que o operador

$$M_3 : H_3^2 \longrightarrow H_3^2$$

é dado por:

$$M_3(h(x)) = \begin{bmatrix} x_1\dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} + 3x_2\dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x_2} - h_1(x) \\ \\ x_1\dfrac{\partial h_2(x)}{\partial x_1} + 3x_2\dfrac{\partial h_2(x)}{\partial x_2} - 3h_2(x) \end{bmatrix},$$

onde $x = (x_1, x_2)^T$ *e* $h(x) = (h_1(x), h_2(x))^T$.

Se considerarmos a base canônica de H_3^2,

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix},$$

então, suas respectivas imagens, sob o operador M_3, *são:*

$$\begin{pmatrix} 2x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4x_1^2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1^2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4x_1x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, somente os termos que pertencem ao espaço vetorial gerado por $\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$, *não podem ser eliminados da forma normal.*

Assim, a forma normal é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 + cx_1^3, \end{cases}$$

onde c *é uma constante real.*

Exemplo 2.3.3 : *Consideremos a equação:*

$$\dot{x} = Jx + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é não linear em* x, *de classe* C^r.

O operador

$$M_2 : H_2^2 \to H_2^2$$

é dado por:

$$M_2(h(x)) = \begin{bmatrix} x_2\dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} - h_2(x) \\ \\ x_2\dfrac{\partial h_2(x)}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

com $x = (x_1, x_2)^T$ *e* $h(x) = (h_1(x), h_2(x))^T$.

Se considerarmos a base canônica de H_2^2,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

então, suas respectivas imagens, sob o operador M_2, *são:*

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que:

$$M_2(H_2^2) = ger\left\{ \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daí, como os vetores,

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \frac{1}{2}x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix},$$

são linearmente independentes, podemos escolher o espaço complementar de $M_2(H_2^2)$, *como:*

$$G_2 = ger\left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \frac{1}{2}x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Assim, a forma normal, até os termos de segunda ordem, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1^2 + O(|x|^3) \\ \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 + cx_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases}$$

onde a, b *e* c *são constantes reais.*

Podemos ainda tomar o espaço complementar G_2 *como:*

$$G_2 = ger\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Desse modo, a forma normal, até os termos de segunda ordem, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O(|x|^3) \\ \\ \dot{x}_2 &= ax_1^2 + bx_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases}$$

onde a *e* b *são constantes reais.*

Capítulo

3

Formas Normais para Equações Diferenciais Funcionais

3.1 Introdução

Neste capítulo, obteremos o método da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas. Para fazermos isso, será necessário considerarmos uma equação diferencial funcional como uma equação diferencial ordinária abstrata em um espaço de fase de dimensão infinita.

O método da forma normal nos dará o fluxo da equação diferencial funcional retardada em um espaço invariante de dimensão finita associado a um conjunto finito de autovalores do gerador infinitesimal da equação linearizada na singularidade. Para isso, decompomos o espaço de fase como soma direta de um espaço invariante para o gerador infinitesimal da equação linearizada e seu espaço complementar, também invariante. Essa decomposição será feita aplicando a teoria desenvolvida no Capítulo 1. O método da forma normal depende de algumas condições denominadas de não-ressonância, que desenvolveremos na Seção 3.4. Apesar do uso de série de potências para a parte não-linear da equação diferencial funcional retardada original e para as mudanças de variáveis, não nos preocuparemos com a convergência dessas séries, uma vez que, estaremos interessados em obter a forma normal até uma certa ordem finita. Como em muitos casos é conveniente introduzirmos um parâmetro para que possamos descrever completamente a singularidade, também desenvolveremos a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro.

Por último, faremos aplicações à singularidade do tipo Bogdanov-Takens. O nosso estudo consistirá, numa situação geral, do cálculo da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas escalares com uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens.

3.2 Equações Diferenciais Funcionais

Consideremos $T(t)$, $t \geq 0$, o operador solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x \subset \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz constante $n \times n$ e A_0 o gerador infinitesimal associado ao C_0-semigrupo $T(t)$ dado por:

$$A_0 : D(A_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$x \mapsto Ax.$$

Como vimos, no capítulo anterior, a matriz A é de fundamental importância para o desenvolvimento da forma normal da equação diferencial ordinária, e por isso, introduziremos as condições necessárias para escrever uma equação diferencial funcional como uma equação diferencial ordinária abstrata em um espaço de Banach adequado, onde a decomposição dos termos lineares e não lineares da equação está bem formulada. Em seguida, usaremos a teoria de semigrupos para decompor essa equação diferencial ordinária abstrata em duas equações, sendo uma de dimensão finita e outra de dimensão infinita.

Consideremos uma equação diferencial funcional retardada da forma:

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(z_t), \tag{3.1}$$

onde L é um operador linear limitado de $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$, F é uma função de classe C^N, $N \geq 2$, definida em $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ com valores em $\mathbb{R}^n$, $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$.

A parte linear da equação diferencial funcional retardada (3.1) é dada por:

$$\dot{z}(t) = L(z_t). \tag{3.2}$$

O conjunto das soluções da equação (3.2) define um C_0-semigrupo sobre C, que denotamos por $T(t), t \geq 0$. Assim, temos que o gerador infinitesimal associado ao C_0-semigrupo $T(t)$, dado no Lema 1.3.2, é definido por:

$$A_0 : D(A_0) \longrightarrow C,$$

$$A_0\phi = \dot{\phi},$$

onde $D(A_0) = \left\{\phi \in C^1 = C^1\left([-r,0],\mathbb{R}^n\right) : L(\phi) = \dot{\phi}(0)\right\}$.

Sabemos do Lema 1.4.1, que o espectro $\sigma(A_0)$ do gerador infinitesimal A_0 coincide com o espectro pontual $\sigma_p(A_0)$, e $\lambda \in \sigma(A_0)$ se, e somente se,

$$det(\Delta(\lambda)) = 0, \tag{3.3}$$

com

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]e^{\lambda\theta},$$

onde η é a matriz $n \times n$ cujos elementos são funções de variação limitada, definida sobre $[-r,0]$, normalizada a fim de que η seja contínua à esquerda sobre $(-r,0)$, tal que:

$$L(\phi) = \int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]\phi(\theta), \ \phi \in C.$$

Os elementos do espectro pontual são ditos autovalores.

Poderíamos considerar a equação (3.1) como uma equação diferencial ordinária abstrata em C,

$$\frac{du}{dt} = G(u),$$

onde

$$G(u)(\theta) = \begin{cases} L(u) + F(u), \text{ se } \theta = 0 \\ \dot{u}(\theta), \text{ se } \theta \in [-r, 0). \end{cases}$$

e o domínio de G é $\{u \in C^1 : \dot{u}(0) = L(u) + F(u)\}$. Mas, nesse espaço os termos lineares e não lineares não podem ser adequadamente separados, pois a parte linear

$$A_0 u(\theta) = \begin{cases} L(u), \text{ se } \theta = 0 \\ \dot{u}(\theta), \text{ se } \theta \in [-r, 0), \end{cases}$$

tem domínio $\{u \in C^1 : \dot{u}(0) = L(u)\}$, o qual seria compatível com o domínio de G se, e somente se, $F(u) = 0$.

Portanto, para que possamos ter a decomposição dos termos lineares e não lineares bem formulada, precisaremos estender o espaço C.

Definimos o conjunto BC como sendo o espaço das funções de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$, uniformemente contínuas sobre $[-r, 0)$ e com possível descontinuidade no zero. Os elementos de BC são da forma $\psi = \phi + X_0\alpha$, onde $\phi \in C$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e X_0 é uma função definida por:

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, \text{ se } \theta = 0 \\ 0, \text{ se } \theta \neq 0, \end{cases}$$

temos também, que esse espaço é identificado com $C \times \mathbb{R}^n$. Com a norma:

$$|\phi + X_0\alpha| = |\phi|_C + |\alpha|_{\mathbb{R}^n},$$

BC é um espaço de Banach.

No espaço de fase BC, podemos escrever a equação diferencial ordinária abstrata associada à equação diferencial funcional (3.1), com a parte linear separada da parte não linear:

$$\frac{du}{dt} = Au + X_0 F(u), \tag{3.4}$$

onde

$$A\phi = \dot{\phi} + X_0[L(\phi) - \dot{\phi}(0)]$$

e com domínio $D(A) = C^1$.

Observemos que, para $\phi \in D(A_0) = \left\{\phi \in C^1 = C^1([-r, 0], \mathbb{R}^n) : L(\phi) = \dot{\phi}(0)\right\}$,

$$A_0\phi = A\phi.$$

Se restringirmos o fluxo à variedade central associada à essa equação, podemos descrever completamente o comportamento das soluções da equação (3.1) em C próximo à uma singularidade. Desse modo, precisamos considerar a forma normal relativa ao espaço P invariante por A_0, o qual está associado com o conjunto não vazio e finito de autovalores

$\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A_0) : Re(\lambda) = 0\}$. De maneira mais geral, consideraremos a forma normal relativa a um espaço P invariante por A_0, associado a um subconjunto finito e não vazio do espectro do gerador infinitesimal A_0.

Consideremos Λ um subconjunto finito e não vazio do espectro do gerador infinitesimal A_0, e tomemos a decomposição de C por Λ, como no Teorema 1.4.1,

$$C = P \oplus Q, \tag{3.5}$$

onde P é o espaço invariante pelo gerador infinitesimal A_0. Sejam Φ e Ψ bases de P e P^T, respectivamente, com $(\Psi, \Phi) = I$, onde, $(.,.)$ é a forma bilinear definida sobre $C^* \times C$,

$$(\psi, \phi) = \psi(0)\phi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\theta - \xi)[d\eta(\theta)]\phi(\xi)d\xi, \ \psi \in C^*, \ \phi \in C.$$

Seja m o número de elementos de Λ contando suas multiplicidades, então segue do Lema 1.5.4 que a dimensão de P é m. Tomemos B a matriz constante $m \times m$ tal que:

$$\begin{aligned} A_0\Phi &= \Phi B, \\ A_0^T\Psi &= B\Psi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Podemos estender naturalmente a forma bilinear definida sobre $C^* \times C$, ao espaço $C^* \times BC$ da seguinte maneira:

$$(\Psi b, \phi + X_0\alpha) = (\Psi b, \phi) + \Psi(0)b\alpha; \tag{3.7}$$

também, a projeção de C sobre P, dada por $\phi \to \Phi(\Psi, \phi)$, pode ser estendida por:

$$\begin{aligned} &\pi : BC \longrightarrow P, \\ &\pi(\phi + X_0\alpha) = \Phi[(\Psi, \phi) + \Psi(0)\alpha]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, podemos decompor BC da forma:

$$BC = P \oplus Ker(\pi), \tag{3.9}$$

e é claro que $Q \subsetneq Ker(\pi)$. A decomposição da função $u \in D(A) = C^1$ é:

$$u = \Phi x + y,$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Ker(\pi) \cap C^1 := Q^1$.

Sendo assim, conseguimos:

$$\frac{du}{dt} = \Phi\dot{x} + \frac{dy}{dt}.$$

Por outro lado,

$$\frac{du}{dt} = A(\Phi x + y) + X_0F(\Phi x + y).$$

Usando a projeção π, obtemos:

$$\pi\left(\frac{du}{dt}\right) = \pi\left(\Phi\dot{x} + \frac{dy}{dt}\right) = \pi\left(A\left(\Phi x + y\right) + X_0F(\Phi x + y)\right),$$

ou seja,

$$\Phi\dot{x} = \pi A\left(\Phi x + y\right) + \pi X_0F(\Phi x + y) = \pi A\left(\Phi x + y\right) + \Phi\Psi(0)F(\Phi x + y).$$

Como A comuta com π em C^1, temos:

$$\Phi\dot{x} = A\pi\left(\Phi x + y\right) + \Phi\Psi(0)F(\Phi x + y) = A\Phi x + \Phi\Psi(0)F(\Phi x + y).$$

Sendo $A\phi = A_0\phi$, para $\phi \in D(A_0)$ e por (3.6), conseguimos,

$$\Phi\dot{x} = A_0\Phi x + \Phi\Psi(0)F(\Phi x + y) = \Phi Bx + \Phi\Psi(0)F(\Phi x + y),$$

e portanto,

$$\dot{x} = Bx + \Psi(0)F(\Phi x + y).$$

Do mesmo modo,

$$(I-\pi)\left(\frac{du}{dt}\right) = (I-\pi)\left(\Phi\dot{x} + \frac{dy}{dt}\right) = (I-\pi)\left(A\left(\Phi x + y\right) + X_0F(\Phi x + y)\right),$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = A_{Q^1}y + (I-\pi)X_0F(\Phi x + y),$$

onde A_{Q^1} denota a restrição de A à Q^1.

Concluímos assim, que a equação (3.4) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + \Psi(0)F(\Phi x + y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = A_{Q^1}y + (I-\pi)X_0F(\Phi x + y), \end{cases} \tag{3.10}$$

com $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Q^1 = Q \cap C^1$.

3.3 Formas Normais

Nesta seção, obteremos a forma normal da equação (3.1), sobre um espaço invariante pelo gerador infinitesimal A_0 associado a um subconjunto finito e não vazio do espectro de A_0, de modo análogo ao procedimento que desenvolvemos para equações diferenciais ordinárias. Estamos interessados em mudanças de variáveis para a equação (3.1) tal que $y = 0$ defina uma variedade localmente invariante de dimensão finita sobre a qual o fluxo é dado por uma equação diferencial ordinária em sua forma normal em $\mathbb{R}^n$. Descreveremos o cálculo da forma normal usando a expansão da parte não-linear F em série de Taylor até ordem N, para isso, precisamos considerar F de classe C^N.

Consideremos a expansão de Taylor da parte não-linear F da forma:

$$F(u) = \sum_{j\geq 2} \frac{1}{j!} F_j(u), \quad u \in C,$$

onde $F_j(u)$ é o termo de ordem j na expansão de Taylor, ou seja, $F_j(u) = H_j(u, ..., u)$ com $H_j \in \mathfrak{L}_s^j(C; \mathbb{R}^n)$, o espaço das aplicações multilineares simétricas e contínuas de $C \times ... \times C$ (j vezes) em $\mathbb{R}^n$.

Definindo

$$\begin{aligned} &f_j^1(x,y) = \Psi(0) F_j(\Phi x + y) \\ &\text{e} \\ &f_j^2(x,y) = (I - \pi) X_0 F_j(\Phi x + y), \end{aligned} \tag{3.11}$$

temos, do sistema (3.10), que:

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + \sum_{i\geq 2} \frac{1}{i!} f_i^1(x,y) \\ \\ \frac{dy}{dt} = A_{Q^1} y + \sum_{i\geq 2} \frac{1}{i!} f_i^2(x,y), \end{cases} \tag{3.12}$$

com $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Q^1 = Q \cap C^1$.

Calcularemos a forma normal por um processo recursivo, pelo qual determinaremos em cada passo os termos de ordem $j \geq 2$ da forma normal a partir dos termos de mesma ordem da equação original e dos termos de ordens inferiores previamente calculados nos passos anteriores. Façamos a mudança de variáveis:

$$(x,y) \longmapsto (x,y) + \frac{1}{j!} U_j(x), \tag{3.13}$$

com $U_j(x) = (U_j^1(x), U_j^2(x))$, $U_j^1(x) \in V_j^m(\mathbb{R}^m)$, $U_j^2 \in V_j^m(Q^1)$, onde, para um espaço normado X, $V_j^m(X)$ denota o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau j em m variáveis reais $x = (x_1, ..., x_m)$, com coeficientes no espaço vetorial X, $j \geq 2$, ou seja,

$$V_j^m(X) = \left\{ \sum_{|q|=j} c_q x^q : q = (q_1, q_2, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m, c_q \in X \right\},$$

e nesse espaço consideraremos a norma:

$$\left| \sum_{|q|=j} c_q x^q \right| \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|q|=j} | c_q |_X .$$

Faremos a mudança de variável (3.13), com $j = 2$, no sistema (3.12).

Da primeira equação do sistema (3.12), temos que:

$$\left(I + \frac{1}{2!} D_x U_2^1(x) \right) \dot{x} = B \left(x + \frac{1}{2!} U_2^1(x) \right) + \sum_{i\geq 2} \frac{1}{i!} f_i^1 \left(x + \frac{1}{2!} U_2^1(x), y + \frac{1}{2!} U_2^2(x) \right), \tag{3.14}$$

e da segunda equação do sistema (3.12) :

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2!}D_xU_2^2(x)\dot{x}=A_{Q^1}\left(y+\frac{1}{2!}U_2^2(x)\right)+\sum_{i\geq 2}\frac{1}{i!}f_i^2\left(x+\frac{1}{2!}U_2^1(x),y+\frac{1}{2!}U_2^2(x)\right). \quad (3.15)$$

Tomemos o polinómio homogêneo de grau k, na variável (x,y) com coeficientes em $\mathbb{R}^m\times Q^1$ da forma:

$$F_k(x,y)=\sum_{|p|=k}F_k^{(p)}x^{p_1}x^{p_2}...x^{p_m}y^{p_{m+1}},$$

com $p=(p_1,p_2,...,p_m,p_{m+1})\in\mathbb{N}^{m+1}$.

Fazendo a mudança de variável (3.13), obtemos:

$$F_k\left(x+\frac{1}{j!}U_j^1(x),y+\frac{1}{j!}U_j^2(x)\right)=F_k(x,y)+O\left(|(x,y)|^{(k+2(j-1))}\right). \quad (3.16)$$

Para x suficientemente pequeno, o operador

$$\left(I+\frac{1}{j!}D_xU_j^1(x)\right)^{-1}$$

existe e podemos representá-lo em série de potências como segue:

$$\left(I+\frac{1}{j!}D_xU_j^1(x)\right)^{-1}=I-\frac{1}{j!}D_xU_j^1(x)+\frac{1}{(j!)^2}D_xU_j^1(x)D_xU_j^1(x)+O(|x|^{(3j-2)}). \quad (3.17)$$

Observemos que:

$$\left(I+\frac{1}{j!}D_xU_j^1(x)\right)\left(I+\frac{1}{j!}D_xU_j^1(x)\right)^{-1}(x)=x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(j!)^3}D_xU_j^1(x)D_xU_j^1(x)D_xU_j^1(x)x+O(|x|^{(3j-2)})=0,$$

ou seja, os termos até ordem $2j-1$ são completamente determinados.

Agora, usando (3.16), conseguimos da equação (3.14),

$$\left(I+\frac{1}{2!}D_xU_2^1(x)\right)\dot{x}=Bx+\frac{1}{2!}BU_2^1(x)+\frac{1}{2!}f_2^1(x,y)+\frac{1}{3!}\tilde{f}_3^1(x,y)+\cdots,$$

onde $\tilde{f}_i^1(x,y)\in V_i^m(\mathbb{R}^m)$, $i\geq 3$, denota os termos de ordem i na variável (x,y).

Por (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(I-\frac{1}{2!}D_xU_2^1(x)+\frac{1}{(2!)^2}D_xU_2(x)D_xU_2(x)+O(|x|^4)\right)\left(Bx+\frac{1}{2!}BU_2^1(x)+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2!}f_2^1(x,y)+\frac{1}{3!}\tilde{f}_3^1(x,y)+\cdots\right).\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\dot{x} = Bx + \frac{1}{2!}g_2^1(x,y) + \frac{1}{3!}\hat{f}_3^1(x,y) + \cdots, \tag{3.18}$$

onde $g_2^1(x,y) = f_2^1(x,y) - [D_xU_2^1(x)Bx - BU_2^1(x)]$ e $\hat{f}_i^1(x,y) \in V_i^m(\mathbb{R}^m)$, $i \geq 3$, denota os termos de ordem i na variável (x,y).

Usamos (3.16), para obter de (3.15) a seguinte equação:

$$\frac{dy}{dt} = A_{Q^1}y + \frac{1}{2!}\left(A_{Q^1}U_2^2(x) + f_2^2(x,y) - D_xU_2^2(x)\dot{x}\right) + \frac{1}{3!}\hat{f}_3^2(x,y) + \cdots,$$

onde $\hat{f}_i^2(x,y) \in V_i^m(Ker(\pi))$, $i \geq 3$, denota os termos de ordem i na variável (x,y).

Substituindo (3.18), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= A_{Q^1}y + \frac{1}{2!}\left[A_{Q^1}U_2^2(x) + f_2^2(x,y) - D_xU_2^2(x)\left(Bx + \frac{1}{2!}g_2^1(x,y) + \right.\right.\\ &\quad \left.\left.+\frac{1}{3!}\hat{f}_3^1(x,y) + \cdots\right)\right] + \frac{1}{3!}\hat{f}_3^2(x,y) + \cdots,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = A_{Q^1}y + \frac{1}{2!}g_2^2(x,y) + \frac{1}{3!}\hat{f}_3^2(x,y) + \cdots,$$

onde $g_2^2(x,y) = f_2^2(x,y) - [D_xU_2^2(x)Bx - A_{Q^1}U_2^2(x)]$.

Concluímos que mudança de variável (3.13), com $j=2$, no sistema (3.12), nos fornece:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Bx + \dfrac{1}{2!}g_2^1(x,y) + \dfrac{1}{3!}\hat{f}_3^1(x,y) + \cdots, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} &= A_{Q^1}y + \dfrac{1}{2!}g_2^2(x,y) + \dfrac{1}{3!}\hat{f}_3^2(x,y) + \cdots, \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} g_2^1(x,y) &= f_2^1(x,y) - [D_xU_2^1(x)Bx - BU_2^1(x)] \\ g_2^2(x,y) &= f_2^2(x,y) - [D_xU_2^2(x)Bx - A_{Q^1}U_2^2(x)]. \end{cases}$$

Definição 3.3.1 *Para $j \geq 2$, denotamos por M_j o operador:*

$$\begin{aligned} M_j(p,h) &= \left(M_j^1p, M_j^2h\right), \\ \left(M_j^1p\right)(x) &= D_xp(x)Bx - Bp(x), \\ \left(M_j^2h\right)(x) &= D_xh(x)Bx - A_{Q^1}h(x), \end{aligned} \tag{3.19}$$

com domínio $D(M_j) = V_j^m(\mathbb{R}^m) \times V_j^m(Q^1)$.

Repetindo o procedimento acima até os termos de ordem k, obtemos que a forma normal até a ordem k é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!} g_i^1(x,y) + O\left(|(x,y)|^{k+1}\right), \\ \frac{dy}{dt} = A_{Q^1} y + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!} g_i^2(x,y) + O\left(|(x,y)|^{k+1}\right), \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} g_i^1(x,y) = \hat{f}_i^1(x,y) - M_i^1 U_i^1(x) \\ g_i^2(x,y) = \hat{f}_i^2(x,y) - M_i^2 U_i^2(x). \end{cases}$$

Observações:

- Como para equações diferenciais ordinárias, ao simplificarmos os termos de ordem j, $j \geq 2$, vemos por (3.16), que os termos de ordem inferior não mudam, mas os termos de ordem superior a j são modificados.
- Os termos que podemos eliminar da equação na forma normal são exatamente os termos que estão na imagem do operador M_j.

Agora, que sabemos como as mudanças de variáveis agem nas equações, buscaremos as mudanças de variáveis tal que, para cada $j \geq 2$, a função $g_j = \left(g_j^1, g_j^2\right)$ tenha uma forma simples.

Os termos que surgem na forma normal e nas mudanças de variáveis dependem de como os espaços $V_j^m(\mathbb{R}^m)$, $V_j^m(Ker(\pi))$ e $V_j^m(Q^1)$ são decompostos em relação à imagem e ao núcleo de M_j^i, $i = 1, 2$; que denotaremos por:

$$V_j^m(\mathbb{R}^m) = Im\left(M_j^1\right) \oplus \left(Im\left(M_j^1\right)\right)^c$$

$$V_j^m(\mathbb{R}^m) = Ker\left(M_j^1\right) \oplus \left(Ker\left(M_j^1\right)\right)^c$$

e

$$V_j^m(Ker(\pi)) = Im\left(M_j^2\right) \oplus \left(Im\left(M_j^2\right)\right)^c$$

$$V_j^m(Q^1) = Ker\left(M_j^2\right) \oplus \left(Ker\left(M_j^2\right)\right)^c.$$

Tomemos projeções:

$$P_{I,j} : V_j^m(\mathbb{R}^m) \times V_j^m(Ker\pi) \longrightarrow Im\left(M_j^1\right) \times Im\left(M_j^2\right)$$

$$P_{K,j} : V_j^m(\mathbb{R}^m) \times V_j^m(Q^1) \longrightarrow \left(Ker\left(M_j^1\right)\right)^c \times \left(Ker\left(M_j^2\right)\right)^c,$$

com $P_{I,j} = \left(P_{I,j}^1, P_{I,j}^2\right)$ e $P_{K,j} = \left(P_{K,j}^1, P_{K,j}^2\right)$.

Considerando o operador $M_j = \left(M_j^1, M_j^2\right)$, definido de

$$\left[Ker\left(M_j^1\right) \oplus \left(Ker\left(M_j^1\right)\right)^c\right] \times \left[Ker\left(M_j^2\right) \oplus \left(Ker\left(M_j^2\right)\right)^c\right]$$

sobre

$$\left[Im\left(M_j^1\right) \oplus \left(Im\left(M_j^1\right)\right)^c\right] \times \left[Im\left(M_j^2\right) \oplus \left(Im\left(M_j^2\right)\right)^c\right],$$

denotamos por $M_j^{-1} = \left(\left(M_j^1\right)^{-1}, \left(M_j^2\right)^{-1} \right)$ a inversa à direita de M_j, tal que:

$$M_j^{-1}\left(Im\left(M_j^1\right) \times Im\left(M_j^2\right)\right) = \left(Ker\left(M_j^1\right)\right)^c \times \left(Ker\left(M_j^2\right)\right)^c.$$

Tomando $y = 0$, então, $\tilde{f}_j(x,0) = \left(\tilde{f}_j^1(x,0), \tilde{f}_j^2(x,0)\right)$. Nesse caso, a escolha adequada de U_j é aquela em que possamos eliminar de $\tilde{f}_j(x,0)$ os termos que estão na imagem do operador $M_j = \left(M_j^1, M_j^2\right)$, restando somente o termo

$$g_j(x,0) = \tilde{f}_j(x,0) - M_jU_j(x), \tag{3.20}$$

mas, para isso, precisamos tomar $U_j(x) \in \left(V_j^m\left(\mathbb{R}^m\right) \times V_j^m\left(Q^1\right)\right)$ tal que:

$$M_jU_j(x) = P_{I,j}\tilde{f}_j(x,0),$$

ou seja,

$$U_j(x) = M_j^{-1}P_{I,j}\tilde{f}_j(x,0). \tag{3.21}$$

Definição 3.3.2 *A forma normal para a equação* (3.1), *relativa as projeções* $P_{I,j}$, $P_{K,j}$, *com* $j \geq 2$, *é o sistema em* BC :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Bx + \displaystyle\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!} g_i^1(x,y) + O\left(|(x,y)|^{k+1}\right) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & A_{Q^1}y + \displaystyle\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i!} g_i^2(x,y) + O\left(|(x,y)|^{k+1}\right), \end{array} \right. \tag{3.22}$$

onde $g_j = \left(g_j^1, g_j^2\right)$, U_j *e* M_j *são como em* (3.19), (3.20) *e* (3.21).

Observação:

Como os espaços $\left(Im\left(M_j^i\right)\right)^c$ e $\left(Ker\left(M_j^i\right)\right)^c$, $i = 1, 2$, não são únicos, a forma normal também não é única e depende da escolha dos espaços $\left(Im\left(M_j^i\right)\right)^c$, $i = 1, 2$, do mesmo modo, a mudança de variável depende da escolha dos espaços $\left(Ker\left(M_j^i\right)\right)^c$; $i = 1, 2$.

3.4 Condições de Não-Ressonância

As imagens dos operadores M_j^1 e M_j^2, $j \geq 2$, definidos, respectivamente, nos espaços $V_j^m(\mathbb{R}^m)$ e $V_j^m(Ker(\pi))$, contém exatamente os termos que podem ser eliminados da forma normal. Assim, quando essas imagens forem todo o espaço $V_j^m(\mathbb{R}^m)$ e $V_j^m(Ker(\pi))$, respectivamente, podemos eliminar todos os termos de ordem j, da primeira e da segunda equação da forma normal (3.22), respectivamente. Essas situações podem ser caracterizadas em termos do espectro, por apropriadas condições de não ressonância dentre os autovalores da parte linear da equação.

Queremos obter a forma normal sobre uma variedade localmente invariante de dimensão finita, tangente ao subespaço P, o qual é invariante pelo gerador infinitesimal A_0

associado a um conjunto finito e não-vazio Λ de autovalores para o gerador infinitesimal A_0. Para isso, é necessário que a segunda equação do sistema (3.22), a qual está sobre um espaço de dimensão infinita, seja nula, ou seja, $g_j^2(x,0) = 0$, para todo $j \geq 2$. Para eliminarmos os termos $g_j^2(x,0)$, a imagem do operador M_j^2 deve ser necessariamente todo o espaço $V_j^m(Ker(\pi))$. Portanto, a caracterização espectral dessa situação em termos de apropriadas condições de não-ressonância é essencial para o desenvolvimento da forma normal.

Os operadores M_j^1, $j \geq 2$, são os mesmos operadores que surgem no cálculo da forma normal para equações diferenciais ordinárias. Assim, pelo Lema 2.2.1, temos que o espectro de $M_j^1, j \geq 2$, é dado por:

$$\sigma(M_j^1) = \{(q, \bar{\lambda}) - \lambda_j : i = 1, ..., m, q = (q_1, q_2, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m, |q| = j\},$$

onde $\bar{\lambda} = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, $(q, \bar{\lambda}) = q_1\lambda_1 + ... + q_m\lambda_m$, $|q| = q_1 + ... + q_m$ e $\lambda_1, ..., \lambda_m$ são os elementos de Λ e cada um deles surgem tantas vezes quanto sua multiplicidade como raiz da equação característica associada.

Esperamos que apropriadas condições de não-ressonância possam garantir que para $y = 0$, a forma normal esteja sobre uma variedade localmente invariante. Nos próximos resultados, estabeleceremos relações entre os espectros de A, A_0 e A_{Q^1}.

Lema 3.4.1 *O espectro do operador A é igual ao espectro pontual do operador A e ao espectro do operador A_0, ou seja,*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \sigma(A_0).$$

Demonstração:

Faremos a demonstração desse lema em duas partes, na primeira mostraremos que $\sigma_p(A) = \sigma(A_0)$ e, na segunda, mostraremos que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Provemos que $\sigma_p(A) = \sigma(A_0)$.

Sabemos que o espectro de A_0 é igual ao seu espectro pontual, isto é, $\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0)$.

- Mostremos que $\sigma(A_0) \subset \sigma_p(A)$.

Como $D(A_0) = \left\{\phi \in C : \dfrac{d\phi}{d\theta} \in C \text{ e } \dfrac{d\phi}{d\theta}(0) = \displaystyle\int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta)\right\}$, segue que $D(A_0)$ é um subconjunto de C^1 e, para $\phi \in D(A_0)$, temos que:

$$A_0\phi = A\phi.$$

Se $\lambda \in \sigma_p(A_0)$, então existe $\psi \in D(A_0) \setminus \{0\}$, tal que:

$$(A_0 - \lambda I)\phi = 0.$$

Daí, conseguimos:

$$(A - \lambda I)\phi = (A_0 - \lambda I)\phi = 0.$$

Portanto, $\lambda \in \sigma_p(A)$.

- Demonstremos que $\sigma_p(A) \subset \sigma(A_0)$.

Seja $\lambda \in \sigma_p(A)$, então existe $\phi \subset C^1 \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$(A - \lambda I)\phi = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi(\theta)}{d\theta} &= \lambda\phi(\theta), \ \ se\ \theta \in [-r, 0) \\ \displaystyle\int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta) &= \lambda\phi(0), \ \ se\ \theta = 0. \end{cases}$$

Como ϕ é contínua, obtemos:

$$\frac{d\phi(0)}{d\theta} = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta),$$

o que implica que $\phi \in D(A_0)$.

Daí, temos que:

$$(A_0 - \lambda I)\phi = (A - \lambda I)\phi = 0.$$

Portanto, $\lambda \in \sigma(A_0)$.

Agora, mostremos que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

É suficiente mostrarmos que $\sigma(A) \subset \sigma_p(A)$, ou equivalentemente, se $\lambda \notin \sigma_p(A)$, então $\lambda \notin \sigma(A)$.

Suponhamos $\lambda \notin \sigma_p(A)$, então o operador $(A - \lambda I)$ é inversível. Assim, resta mostrarmos que a inversa do operador $(A - \lambda I)$ é limitada e tem domínio denso em BC.

Como o operador A é fechado, basta verificarmos que o operador $(A - \lambda I)$ é sobrejetor, ver [1].

Consideremos $\psi + X_0\alpha \in BC$, onde $\psi \in C$ e $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Mostraremos que existe $\phi \in C^1$ tal que:

$$(A - \lambda I)\phi = \psi + X_0\alpha.$$

Pelo Teorema de Riesz-Fisher, ver [5], o operador:

$$\phi \longmapsto L(\phi) - \dot{\phi}(0),$$

aplica sobrejetivamente C^1 sobre $\mathbb{R}^m$.

Logo, para $\alpha \in \mathbb{R}^m$, existe $\phi_1 \in C^1$ tal que:

$$L(\phi_1) - \dot{\phi}_1(0) = \alpha.$$

Agora, sendo $\sigma(A_0) = \sigma_p(A)$, segue que $\lambda \notin \sigma(A_0)$, então para $\psi - (\dot{\phi}_1 - \lambda\phi_1) \in C$, existe $\phi_2 \in D(A_0)$ satisfazendo:

$$(A_0 - \lambda I)\phi_2 = \psi - (\dot{\phi}_1 - \lambda\phi_1).$$

Tomemos $\phi = \phi_1 + \phi_2 \in C^1$, então:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)\phi &= (A - \lambda I)(\phi_1 + \phi_2) = (A - \lambda I)\phi_1 + (A_0 - \lambda I)\phi_2 \\ &= \left\{\dot{\phi}_1 + X_0\left[L(\phi_1) - \dot{\phi}_1(0)\right] - \lambda\phi_1\right\} + \left(\psi - \dot{\phi}_1 + \lambda\phi_1\right) \\ &= \psi + X_0\alpha.\end{aligned}$$

Portanto, o operador $(A - \lambda I)$ é sobrejetor.

■

Lema 3.4.2 *O espectro do operador A_{Q^1} coincide com o espectro pontual do operador A_{Q^1} e com o espectro do operador A_0 menos os elementos que estão em Λ, ou seja,*

$$\sigma(A_{Q^1}) = \sigma_p(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda.$$

Demonstração:

Demonstraremos esse lema em duas etapas; na primeira etapa, mostraremos que $\sigma_p(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda$, e na segunda, provaremos que $\sigma(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.

Mostremos que $\sigma_p(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.

- Provemos que $\sigma_p(A_{Q^1}) \subset \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.
  Se $\lambda \in \sigma_p(A_{Q^1})$, temos que existe $\phi \in D(A) \setminus \{0\}$ e $\phi \in Q^1 \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$(A - \lambda I)\phi = 0.$$

Logo, $\lambda \in \sigma(A)$.
Pelo Lema 3.4.1, temos que $\sigma(A) = \sigma(A_0)$ e, portanto, $\lambda \in \sigma(A_0)$.
Suponhamos $\lambda \in \Lambda$, então $\phi \in P = ger\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} Ker((A - \lambda I)^k),\ com\ \lambda \in \Lambda\right\}$, o que é um absurdo, uma vez que $P \cap Q^1 = \{0\}$.
Portanto $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.

- Mostremos que $\sigma(A_0) \setminus \Lambda \subset \sigma_p(A_{Q^1})$.
  Seja $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda$, como $\sigma(A_0) \setminus \Lambda = \sigma_p(A_0) \setminus \Lambda$, então existe $\phi \in D(A_0) \setminus \{0\}$, tal que:

$$(A_0 - \lambda I)\phi = 0.$$

Considerando a decomposição de C como em (3.5), decompomos $\phi = \phi^P + \phi^Q$, onde $\phi^P \in P$ e $\phi^Q \in Q$. Assim, como o operador A comuta com π em C^1 e $D(A_0) \subset C^1$, obtemos:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\phi^P = (A_0 - \lambda I)\phi^P = 0 \\ (A - \lambda I)\phi^Q = (A_0 - \lambda I)\phi^Q = 0. \end{cases}$$

Mas, como $\lambda \notin \Lambda$, temos que $\phi^P \equiv 0$.
Logo, $\phi = \phi^Q \in Q^1 \setminus \{0\}$, e obtemos:

$$(A - \lambda I)\phi = (A_{Q^1} - \lambda I)\phi = 0.$$

Portanto, $\lambda \in \sigma_p(A_{Q^1})$.

Agora, mostremos que $\sigma(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.
Para isso, verifiquemos que $\sigma(A_{Q^1}) \subset \sigma(A_0)$ e $\sigma(A_{Q^1}) \cap \Lambda = \emptyset$.

- Mostremos que $\sigma(A_{Q^1}) \subset \sigma(A_0)$.

Como A é um operador fechado em BC e Q é um subespaço fechado de C, temos que A_{Q^1} é um operador fechado no espaço de Banach $Ker(\pi)$.

Suponhamos $\lambda \notin \sigma(A_0)$, segue do Lema 3.4.1 que $\sigma(A_0) = \sigma(A)$, então, para toda função $f \in Ker(\pi) \subset BC$, existe $\phi \in C^1$, tal que:

$$(A - \lambda I)\phi = f.$$

Observemos que $\pi f \equiv 0$, pois $f \in Ker(\pi)$.
Daí,

$$(A - \lambda I)(I - \pi)\phi = (I - \pi)(A - \lambda I)\phi = (I - \pi)f = f,$$

com $\phi \in (Ker(\pi) \cap C^1) = Q^1$.
Logo, o operador $(A_{Q^1} - \lambda I)$ é sobrejetor e, portanto, $\lambda \notin \sigma(A_{Q^1})$.

- Provemos que $\sigma(A_{Q^1}) \cap \Lambda = \emptyset$.

Mostrar que $\sigma(A_{Q^1}) \cap \Lambda = \emptyset$ é equivalente a verificar que $\Lambda \subset \rho(A_{Q^1})$, ou seja, para todo $\lambda \in \Lambda$, o operador $(A_{Q^1} - \lambda I)$ é sobrejetor.

Demonstremos inicialmente que $Ker(\pi) = Q \oplus X$, onde:

$$X = \left\{\phi^P + X_0\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^m \text{ e } \phi^P = -\Phi\Psi(0)\alpha\right\}.$$

De fato:
Seja $\phi + X_0\alpha \in BC$. Como $\phi \in C = P \oplus Q$, podemos escrever $\phi = \phi^P + \phi^Q$, com $\phi^P \in P$ e $\phi^Q \in Q$, então $\phi + X_0\alpha = \left(\phi^P + \phi^Q\right) + X_0\alpha$.
Daí, segue que $\left(\phi^P + \phi^Q\right) + X_0\alpha \in Ker(\pi)$ se, e somente se,

$$\pi\left(\left(\phi^P + \phi^Q\right) + X_0\alpha\right) = 0,$$

ou seja,

$$\phi^P = -\Phi\Psi(0)\alpha.$$

Portanto, temos que:

$$\phi + X_0\alpha \in Ker(\pi),$$

se $\phi + X_0\alpha = \phi^Q + \left(\phi^P + X_0\alpha\right)$, onde $\phi^P = -\Phi\Psi(0)\alpha$.
Seja $\psi \in Q \cap X$. Como $\psi \in X$, então

$$\psi = -\Phi\Psi(0)\alpha + X_0\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Usando o fato de $\psi \in Q$ e portanto deve ser contínua, temos que $\alpha = 0$.
Logo, $Q \cap X = \{0\}$.
Portanto, $Ker(\pi) = Q \oplus X$.

Agora, mostraremos que X e Q são subconjuntos contidos na imagem do operador

$(A_{Q^1} - \lambda I)$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Concluíndo assim que $(A_{Q^1} - \lambda I)$ é sobrejetor.

- Demonstremos que $Q \subset Im\,(A_{Q^1} - \lambda I)$.

  Verifiquemos que para cada $f \in Q$, existe $\phi \in Q^1$ tal que $(A_{Q^1} - \lambda I)\phi = f$.

  Para cada $\lambda \in \Lambda$, podemos considerar a decomposição:

$$C = Ker(A_0 - \lambda I)^k \oplus Im(A_0 - \lambda I)^k,$$

onde k é o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{M}_\lambda(A_0) = Ker(A_0 - \lambda I)^k$. Assim, podemos decompor $f \in Q$ da forma:

$$f = \phi_1 + (A_0 - \lambda I)^k \phi_2,$$

com $\phi_1, \phi_2 \in D((A_0 - \lambda I)^k)$ e $(A_0 - \lambda I)\phi_1 \equiv 0$. Em particular, $\phi_1 \in P$.

Como $f \in Q$, temos que:

$$f = (I-\pi)f = (I-\pi)\left(\phi_1 + (A_0 - \lambda I)^k \phi_2\right) = (A_0 - \lambda I)(I-\pi)(A_0 - \lambda I)^{k-1}\phi_2 = (A_0 - \lambda I)\phi,$$

onde $\phi = (I-\pi)(A_0 - \lambda I)^{k-1}\phi_2$, e mais, $\phi \in (D(A_0) \cap Ker(\pi)) \subset (D(A) \cap Ker(\pi)) = Q^1$.

Logo, $(A_{Q^1} - \lambda I)\phi = f$.

Portanto, $Q \subset Im(A_{Q^1} - \lambda I)$.

- Mostremos que $X \subset Im(A_{Q^1} - \lambda I)$.

  Observemos que, para $f \in X$, podemos escrever $f = \phi^P + X_0\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\phi^P = -\Phi\Psi(0)\alpha$, então:

$$\begin{aligned}
(I - \pi)f &= (I - \pi)\left(\phi^P + X_0\alpha\right) = \left(\phi^P + X_0\alpha\right) - \pi\left(\phi^P + X_0\alpha\right) \\
&= \left(\phi^P + X_0\alpha\right) - \left(\phi^P + \Phi\Psi(0)\alpha\right) = \left(\phi^P + X_0\alpha\right) = f.
\end{aligned}$$

Assim, provarmos que existe $h \in Q^1$, tal que:

$$(A_{Q^1} - \lambda I)h = f,$$

é equivalente à mostrarmos que:

$$(A - \lambda I)(I - \pi)h = (I - \pi)f \Leftrightarrow (A - \lambda I)h = f,$$

que pela definição do operador A, equivale à:

$$\begin{cases} \dot{h}(\theta) - \lambda h(\theta) = -\Phi(\theta)\Psi(0)\alpha, \ \theta \in [-r, 0), \\ L(h) - \dot{h}(0) = \alpha. \end{cases} \tag{3.23}$$

A solução da primeira equação do sistema (3.23) é da forma:

$$h(\theta) = e^{\lambda\theta}h(0) - e^{\lambda\theta}\int_0^\theta e^{-\lambda t}\Phi(t)\Psi(0)\alpha dt.$$

Mas, $h \in C^1$ satisfaz o sistema (3.23), se:

$$\int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)]h(\theta) - (\lambda h(0) - \Phi(0)\Psi(0)\alpha) = \alpha.$$

Substituindo a expressão para $h(\theta)$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda)h(0) &= \left[-I + \Phi(0)\Psi(0) - L\left(e^{\lambda\theta}\int_0^\theta e^{-\lambda t}\Phi(t)\Psi(0)dt\right)\right]\alpha \\
&= \left\{-I + \left[\Phi(0) - \int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]\int_0^\theta e^{\lambda(\theta-t)}\Phi(t)dt\right]\Psi(0)\right\}\alpha \\
&= \left[-I + \left(e^{-\lambda\theta}I, \Phi\right)\Psi(0)\right]\alpha,
\end{aligned}$$

onde $\Delta(\lambda) = \lambda I - L\left(e^{\lambda\theta}I\right)$ e $(\cdot\,,\cdot)$ é a forma bilinear.

Portanto, a existência de $h \in C^1$ satisfazendo o sistema (3.23), é equivalente a existência de $h(0) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\Delta(\lambda)h(0) = \left[-I + \left(e^{-\lambda\theta}I, \Phi\right)\Psi(0)\right]\alpha.$$

Assim, resta apenas mostrarmos que as colunas da matriz $n \times n$,

$$\mathfrak{A}(\lambda) \overset{def.}{=} -I + \left(e^{-\lambda\cdot}I, \Phi\right)\Psi(0),$$

são geradas pelas colunas da matriz $\Delta(\lambda)$.

Seja $\lambda \in \Lambda$. Escolhemos uma base $\{c_1, ..., c_n\}$ para $\mathbb{C}^n$, na qual, $\Delta(\lambda)$ está na forma canônica de Jordan, com os primeiros blocos associados com os autovalores nulos de $\Delta(\lambda)$. Suponhamos que existam R blocos de Jordan associados com os autovalores nulos e que o número de colunas (ou linhas) desses blocos sejam $n_1, ..., n_R$. A primeira coluna e a última linha em cada bloco de Jordan de $\Delta(\lambda)$ associado com o autovalor nulo, são nulas e as colunas restantes são independentes. Portanto, provar que o espaço coluna de $\mathfrak{A}(\lambda)$ está contido no espaço coluna de $\Delta(\lambda)$, é equivalente a mostrar que as linhas $n_1, n_1+n_2, ..., n_1+n_2+...+n_R$ de $\mathfrak{A}(\lambda)$ são nulas. Sem perda de generalidade, provaremos que a linha n_1 de $\mathfrak{A}(\lambda)$ é nula, uma vez que, o anulamento das outras linhas mencionadas, segue desse caso por meio de uma reorganização da base.

Considermos uma base $\Psi = col\,(\psi_1, ..., \psi_m)$ de P^T tal que a matriz B, satisfazendo:

$$-\dot{\Psi} = B\Psi,$$

esteja na forma canônica de Jordan, com os primeiros blocos associados ao autovalor λ, e denotamos por m_1 o número de colunas (linhas) do primeiro bloco de Jordan. A linha n_1 de $\mathfrak{A}(\lambda)$ é:

$$\mathfrak{A}_{n_1}(\lambda) = -e_{n_1}^T + \left(e^{-\lambda\cdot}e_{n_1}^T, \Phi\right)\Psi(0),$$

onde $e_i^T = (\delta_{1,i}, ..., \delta_{n,i})$, com $\delta_{j,i} = 1$ se $j = i$ e $\delta_{j,i} = 0$ se $j \neq i$.

Como B está na forma canônica de Jordan, com o primeiro bloco associado com o autovalor λ, temos que:

$$-\dot{\psi}_{m_1} = \lambda\psi_{m_1}.$$

Então, $\psi_{m_1}(s) = e^{-\lambda s}\psi_{m_1}(0)$ para $s \in [0, r]$, com $\psi_{m_1}(0)$ tal que:

$$\psi_{m_1} \in D\left(A_0^T\right) = \left\{\psi \in (C^T)^1 : -\dot{\psi}(0) = \int_{-r}^{0} \psi(-\theta)[d\eta(\theta)]\right\},$$

onde A_0^T é o gerador infinitesimal do semigrupo definido pela equação adjunta.

Daí, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\psi_{m_1}(0)\Delta(\lambda) &= \psi_{m_1}(0)\left(\lambda I - L\left(e^{\lambda\theta}I\right)\right) = \lambda\psi_{m_1}(0) - \int_{-r}^{0} \psi_{m_1}(0)[d\eta(\theta)]e^{\lambda\theta} \\
&= -\dot{\psi}_{m_1}(0) - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}\psi_{m_1}(0)[d\eta(\theta)] \\
&= \int_{-r}^{0} \psi_{m_1}(-\theta)[d\eta(\theta)] - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}\psi_{m_1}(0)[d\eta(\theta)] \\
&= \int_{-r}^{0} \psi_{m_1}(-\theta)[d\eta(\theta)] - \int_{-r}^{0} \psi_{m_1}(-\theta)[d\eta(\theta)] = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, como a linha n_1 de $\Delta(\lambda)$ é nula, temos que:

$$e_{n_1}^T\Delta(\lambda) = 0,$$

logo, podemos tomar $\psi_{m_1}(0) = e_{n_1}^T$.

Então,

$$\psi_{m_1}(s) = e^{-\lambda s}e_{n_1}^T,$$

para $s \in [0, r]$.

Considerando $(\Psi, \Phi) = I$, cada elemento ϕ_i da base Φ satisfaz:

$$\left(e^{-\lambda\cdot}e_{n_1}^T, \phi_i\right) = (\psi_{m_1}, \phi_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq m_1 \\ 1 & \text{se } i = m_1. \end{cases}$$

Portanto, obtemos:

$$\mathfrak{A}_{n_1}(\lambda) = -e_{n_1}^T + \left(e^{-\lambda\cdot}e_{n_1}^T, \Phi\right)\Psi(0) = -e_{n_1}^T + (\psi_{m_1}, \Phi)\Psi(0) = -e_{n_1}^T + \psi_{m_1}(0) = 0.$$

Concluímos assim, que a linha n_1 de $\mathfrak{A}(\lambda)$ é nula.

■

O próximo teorema nos dará os espectros dos operadores M_j^2, $j \geq 2$.

Teorema 3.4.1 *Os espectros dos operadores M_j^2, para $j \geq 2$, definidos em (3.19), são dados por:*

$$\sigma(M_j^2) = \sigma_p(M_j^2) = \left\{(q, \bar{\lambda}) - \mu : \mu \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda,\ q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m, |q| = j\right\},$$

com $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, $(q, \bar{\lambda}) = q_1\lambda_1 + \cdots + q_m\lambda_m$ e $|q| = q_1 + \cdots + q_m$.

Demonstração:

Consideremos um sistema de coordenadas tal que a matriz B esteja na forma canônica de Jordan:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \sigma_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix},$$

com $\sigma_i = 1$ ou $\sigma_i = 0$.

Tomemos $h \in V_j^m(Q^1)$, $f \in V_j^m(Ker(\pi))$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{|q|=j} h_q x^q, \text{ com } h_q \in Q^1, \\ f(x) &= \sum_{|q|=j} f_q x^q, \text{ com } f_q \in Ker(\pi). \end{aligned}$$

Definimos D_j o conjunto dos índices $q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m$ de grau j, ou seja,

$$D_j = \{q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m \ tal\ que\ |q| = j\}.$$

Sejam $p = (p_1, ..., p_m)$, $q = (q_1, ..., q_m) \in D_j$, dizemos que $p < q$ se a primeira diferença não nula de $p_1 - q_1, ..., p_m - q_m$ for positiva.

De mesmo modo que fizemos no Lema 2.2.1, mostramos que:

$$\sigma_p(M_j^2) = \left\{ (q, \bar{\lambda}) - \mu \ tal\ que\ \mu \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda, q = \{q_1, ..., q_m\} \in \mathbb{N}^m \text{ e } |q| = j \right\}.$$

Assim, resta mostrarmos que $\sigma(M_j^2) \subset \sigma_p(M_j^2)$, ou seja, todo $\alpha \notin \sigma_p(M_j^2)$ pertence à $\rho(M_j^2)$.

Observemos que os operadores M_j^2, $j \geq 2$, são fechados em $V_j^m(Ker(\pi))$ e, portanto, basta verificarmos que os operadores $(\alpha I - M_j^2)$, $j \geq 2$, são sobrejetores.

Para cada $q \in D_j$, se $\mu_q = (q, \bar{\lambda}) - \alpha$, $\phi \in Q^1$ e $\psi \in Ker(\pi)$, são tais que,

$$\psi = (A_{Q^1} - \mu_q I)\, \phi,$$

$$h(x) = \phi x^q \in V_j^m(Q^1),$$

$$f(x) = (\alpha I - M_j^2)\, h(x).$$

Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha I - M_j^2)\, h(x) = \alpha h(x) - [D_x h(x) B x - A_{Q^1} h(x)] \\ &= \alpha(\phi x^q) - [D_x(\phi x^q) B x - A_{Q^1}(\phi x^q)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A_{Q^1} + \alpha)(\phi x^q) - D_x(\phi x^q)Bx \\
&= (A_{Q^1} + \alpha)(\phi x^q) - \\
&\quad - \begin{bmatrix} q_1\phi x^{q-e_1} & q_2\phi x^{q-e_2} & \ldots & q_m\phi x^{q-e_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\
&= (A_{Q^1} + \alpha)(\phi x^q) - \sum_{i=1}^{m} q_i\phi x^{q-e_i}(\lambda_i x_i + \sigma_i x_{i+1}) \\
&= (A_{Q^1} + \alpha)(\phi x^q) - \sum_{i=1}^{m} q_i\lambda_i\phi x^q - \sum_{i=1}^{m-1} q_i\sigma_i\phi x^{q+e_{i+1}-e_i} \\
&= \left(A_{Q^1} - \left((q,\lambda) - \alpha\right)\right)(\phi x^q) - \sum_{i=1}^{m-1} q_i\sigma_i\phi x^{q+e_{i+1}-e_i} \\
&= \left(A_{Q^1} - \mu_q\right)(\phi x^q) - \sum_{i=1}^{m-1} q_i\sigma_i\phi x^{q+e_{i+1}-e_i} \\
&= \psi x^q - \sum_{i=1}^{m-1} q_i\sigma_i\phi x^{q+e_{i-1}-e_i},
\end{aligned}
$$

onde $e_i = (\delta_{1,i}, ..., \delta_{m,i})$, $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$.

Como podemos escrever $f(x)$ na forma:

$$f(x) = \sum_{|p|=j} f_p x^p,$$

obtemos que

$$f_p = \begin{cases} \psi, & \text{se } p = q, \\ -q_i\sigma_i\phi, & \text{se } p = q + e_{i-1} - e_i \text{ para algum } i = 1, 2, ..., m-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.24}$$

Seja $g \in V_j^m(Ker(\pi))$, dada por:

$$g(x) = \sum_{|p|=j} g_p x^p,$$

mostraremos que existe $\tilde{h} \in V_j^m(Q^1)$ satisfazendo:

$$\left(\alpha I - M_j^2\right)\tilde{h}(x) = g(x).$$

Provaremos por indução sobre os elementos de D_j, que para cada $q \in D_j$, existe $h^q \in V_j^m(Q^1)$ tal que:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_p = g_p, \text{ para } p \leq q. \tag{3.25}$$

Para o primeiro elemento de D_j, $q = (j, 0, ..., 0)$, temos que:

$$\mu_q = (q, \bar{\lambda}) - \alpha \in \rho(A_{Q^1}),$$

pois, $\alpha \notin \sigma_p(M_j^2)$ e pelo Lema 3.4.2, $\sigma(A_{Q^1}) = \sigma(A_0) \setminus \Lambda$.

Portanto, para cada $g_q \in Ker(\pi)$, existe $\phi_q \in Q^1$ tal que:

$$(A_{Q^1} - \mu_q I)\phi_q = g_q.$$

Definindo $h^q(x) = \phi_q x^q$, obtemos de (3.24) que:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_q = g_q.$$

Hipótese de Indução: Suponhamos que para um certo $q \in D_j$, exista $h^q \in V_j^m(Q^1)$ satisfazendo:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_p = g_p, \text{ para } p \leq q.$$

Seja $\tilde{q} \in D_j$ o sucessor de q na ordenação considerada, definimos

$$H_{\tilde{q}} = \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_{\tilde{q}} \in Ker(\pi).$$

Como $\mu_q = (q, \bar{\lambda}) - \alpha \in \rho(A_{Q^1})$ e $g_{\tilde{q}} - H_{\tilde{q}} \in Ker(\pi)$, existe $\phi_{\tilde{q}} \in Q^1$ tal que:

$$(A_{Q^1} - \mu_{\tilde{q}} I)\, \phi_{\tilde{q}} = g_{\tilde{q}} - H_{\tilde{q}}.$$

Assim, considerando o polinômio homogêneo $H^{\tilde{q}} = \phi_{\tilde{q}} x^{\tilde{q}} \in V_j^m(Q^1)$ e usando (3.24), obtemos:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) H^{\tilde{q}}\right]_p = \begin{cases} g_{\tilde{q}} - H_{\tilde{q}}, & \text{se } p = \tilde{q}, \\ -\tilde{q}_i \sigma_i \phi_{\tilde{q}}, & \text{se } p = \tilde{q} + e_{i-1} + e_i \text{ para algum } i = 1, ..., m-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomamos $h^{\tilde{q}} = h^q + H^{\tilde{q}} \in V_j^m(Q^1)$, como $q < \tilde{q} < \tilde{q} + e_{i-1} + e_i$ e usando a hipótese de indução, conseguimos:

$$\begin{aligned} \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^{\tilde{q}}\right]_p &= \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_p + \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) H^{\tilde{q}}\right]_p \\ &= \begin{cases} g_p, & \text{se } p \leq q, \\ \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_{\tilde{q}} + g_{\tilde{q}} - H_{\tilde{q}}, & \text{se } p = \tilde{q}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_p, & \text{se } p \leq q, \\ g_{\tilde{q}}, & \text{se } p = \tilde{q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^{\tilde{q}}\right]_p = g_p, \text{ para } p \leq \tilde{q}.$$

Finalizamos assim a prova por indução.

Tomemos $q \in D_j$ como sendo o maior elemento de D_j, então, existe $h^q \in V_j^m(Q^1)$ satisfazendo:

$$\left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_p = g_p, \text{ para todo } p \in D_j \text{ e } j \geq 2.$$

Por último, definindo $\tilde{h}(x) = \sum_{|p|=j} h^q x^p$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\alpha I - M_j^2\right) \tilde{h}(x) &= \sum_{|p|=j} \left(\alpha I - M_j^2\right)\left(h^q x^p\right) = \sum_{|p|=j} \left[\left(\alpha I - M_j^2\right) h^q\right]_p x^p \\
&= \sum_{|p|=j} g_p x^p = g(x).
\end{aligned}$$

Portanto, o operador $(\alpha I - M_j^2)$ é sobrejetor.

■

Agora, podemos dar a caracterização espectral da situação descrita no início dessa seção.

Definição 3.4.1 *Dizemos que a equação* (3.1) *safisfaz as condições de não-ressonância relativamente à $\Lambda \subset \sigma(A_0)$, se*

$$(q, \bar{\lambda}) \neq \mu \text{ para todo } \mu \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda, \; q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m \text{ e } |q| \geq 2,$$

onde $\bar{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ e $\lambda_1, ..., \lambda_m$ são os elementos de Λ, e cada um deles aparecem tantas vezes quanto sua multiplicidade como raiz da equação característica dada por (3.3).

Corolário 3.4.1 *Suponhamos que as condições de não-ressonância da Definição* 3.4.1 *são satisfeitas. Então,*

$$Im(M_j^2) = V_j^m(Ker(\pi)),$$

para todo $j \geq 0$, ou seja, podemos eliminar todos os termos g_j^2 da forma normal.

Demonstração:

Como podemos escrever o espaço $V_j^m(Ker(\pi))$ como soma direta da imagem e do núcleo do operador M_j^2, é suficiente verificarmos que o núcleo do operador M_j^2 contém apenas o polinômio identicamente nulo.

Suponhamos que existe $g(x) \in Ker(M_j^2) \setminus \{0\}$, então temos que:

$$M_j^2 g(x) \equiv 0,$$

o que implica que 0 pertence ao espectro de M_j^2, contradizendo as condições de não-ressonância.

■

Teorema 3.4.2 *Consideremos a equação* (3.1) *e a decomposição de* C, *dada por:*

$$C = P \oplus Q,$$

onde P *é o subespaço invariante pelo gerador infinitesimal* A_0, *associado ao subconjunto não vazio e finito* Λ *de autovalores. Assim, temos a decomposição* $u = \Phi x + y$, *onde* $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Q$, $\dim P = m$ *e* Φ *é uma base para* P. *Se as condições de não-ressonância relativamente à* Λ *da Definição* 3.4.1 *são satisfeitas, então, existe uma mudança de variável tal que a equação* (3.1) *é equivalente à equação em* $BC = \mathbb{R}^m \times Ker(\pi)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Bx + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^1(x, y), \\ \\ \dot{y} & = & A_{Q^1} y + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^2(x, y), \end{array} \right. \tag{3.26}$$

onde g_j^1, g_j^2 *são obtidos como em* (3.20), *com* $g_j^2(x, 0) = 0$, *para* $j \geq 2$. *Essa equação está na forma normal relativamente à* P. *Se existir uma variedade localmente invariante para a equação* (3.1), *tangente à* P *no zero, então, essa satisfaz* $y = 0$ *e o fluxo sobre essa variedade é dado pela equação diferencial ordinária* m*-dimensional:*

$$\dot{x} = Bx + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} g_j^1(x, y);$$

a qual está na forma normal, no sentido usual para equações diferenciais ordinárias.

Observação:

Em muitos casos em que as condições de não-ressonância são satisfeitas, há um particular interesse pelas aplicações onde a decomposição de C está associada ao conjunto: (i) $\Lambda = \{\lambda \in \sigma : Re(\lambda) = 0\}$ ou (ii) $\Lambda = \{\lambda \in \sigma : Re(\lambda) \geq 0\}$. No caso (i), para $y = 0$, a forma normal (3.26) está sobre a variedade central, e no caso (ii), sobre a variedade central-instável.

3.5 Equações Diferenciais Funcionais com Parâmetro

Nas duas seções seguintes, obteremos a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro em um espaço invariante de dimensão finita associado a um conjunto finito de autovalores do gerador infinitesimal da equação linearizada na singularidade.

Em muitos casos, é conveniente introduzirmos um novo parâmetro na equação diferencial funcional retardada, para que possamos descrever completamente a singularidade. Desenvolveremos a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro acrescentando uma nova equação, o que possibilitará considerarmos o parâmetro como uma nova variável.

Consideremos uma equação diferencial funcional retardada com um parâmetro,

$$\dot{z}(t) = L(\alpha)(z_t) + F(z_t, \alpha), \tag{3.27}$$

onde z_t pertence à $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e o parâmetro α pertence a uma vizinhança V do zero em $\mathbb{R}^p$. $L : V \to \mathfrak{L}(C,\mathbb{R}^n)$ é de classe C^{r-1} e $F : C \times V \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^r com $F(0,0) = 0$ e $DF(0,0) = 0$.

Consideraremos o parâmetro α como uma nova variável. Para isso, estudemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= L(\alpha)(z_t) + F(z_t,\alpha) \\ \dot{\alpha} &= 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Para desenvolvermos a forma normal para o sistema de equações diferenciais funcionais retardadas (3.28), basta considerarmos a primeira equação do sistema, já que, a segunda equação está na forma mais simples possível.

Definindo $L_0 = L(0)$, segue que,

$$L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t) = O\left(|(z_t,\alpha)|^2\right),$$

e portanto, podemos reescrever a equação (3.27),

$$\dot{z}(t) = L_0(z_t) + [F(z_t,\alpha) + L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t)], \tag{3.29}$$

onde $[F(z_t,\alpha) + L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t)]$ é a parte não linear, nas variáveis z_t e α.

Então, temos que a equação linearizada associada à equação (3.27), é dada por:

$$\dot{z}(t) = L_0(z_t).$$

Sejam $T(t), t \geq 0$, o C_0-semigrupo associado à equação linearizada e A_0 o gerador infinitesimal associado ao C_0-semigrupo $T(t), t \geq 0$. Tomemos Λ um subconjunto finito e não-vazio de autovalores do gerador infinitesimal A_0, e supomos que Λ contém m elementos onde cada elemento é contado tantas vezes quanto sua multiplicidade.

Como vimos na Seção 3.2, para obtermos a equação diferencial ordinária abstrata associada à equação (3.29), com a decomposição dos termos lineares e não lineares da equação bem formulada, precisamos considerar o espaço de fase BC, sobre o qual a equação diferencial ordinária abstrata, é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = Av + X_0G(v,\alpha), \tag{3.30}$$

onde

$$A\phi = \dot{\phi} + X_0[L_0(\phi) - \dot{\phi}(0)],$$

$$G(\phi,\alpha) = F(\phi,\alpha) + [L(\alpha)(\phi) - L_0(\phi)]$$

e com domínio $D(A) = C^1$.

Daí, da mesma forma que fizemos na Seção 3.2, obtemos que a equação diferencial ordinária abstrata (3.30), pode ser decomposta por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Bx + \Psi(0)G(\Phi x + y,\alpha), \\ \dfrac{dy}{dt} &= A_{Q^1}y + (I-\pi)X_0G(\Phi x + y,\alpha), \end{cases} \tag{3.31}$$

onde A_{Q^1} é a restrição do operador A ao subespaço Q^1 de BC, $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Q^1$.

3.6 Formas Normais

Nesta seção, calcularemos a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro, para isso, faremos uso do algoritmo previamente desenvolvido na Seção 3.3.

Consideremos as expansões de Taylor:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L_0 + \sum_{j=2}^{r-1} L_j(\alpha) + O(|\alpha|^{r-1}), \\ F(z_t, \alpha) &= \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} F_j(z_t, \alpha) + O(|(z_t, \alpha)|^r), \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $L_j(\alpha)$ é de ordem $j-1$ em α e $F_j(z_t, \alpha)$ é de ordem j em (z_t, α). Notemos que $L_j(\alpha)z_t$ é de ordem j em (z_t, α).

Pela decomposição de C, como em (3.5), podemos escrever $z_t = \Phi x + y$, com $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Q$.

Então, as equações em (3.31) tem a forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} f_j^1(x, y, \alpha) + O(|(x, y, \alpha)|^r) \\ \frac{dy}{dt} &= A_{Q^1} y + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} f_j^2(x, y, \alpha) + O(|(x, y, \alpha)|^r), \end{aligned} \right. \tag{3.33}$$

onde

$$\begin{aligned} f_j^1(x, y, \alpha) &= \Psi(0)[j! L_j(\alpha)(\Phi x + y) + F_j(\Phi x + y, \alpha)], \\ f_j^2(x, y, \alpha) &= (I - \pi) X_0 [j! L_j(\alpha)(\Phi x + y) + F_j(\Phi x + y, \alpha)]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Observando que a variável de dimensão finita é $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{m+p}$ e a variável de dimensão infinita é $y \in Q^1$, podemos aplicar o algoritmo da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas, donde obtemos que a forma normal para a equação (3.27) até o termo de ordem $r-1$, é dada por:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} g_j^1(x, y, \alpha) + O(|(x, y, \alpha)|^r), \\ \frac{dy}{dt} &= A_{Q^1} y + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} g_j^2(x, y, \alpha) + O(|(x, y, \alpha)|^r), \end{aligned} \right. \tag{3.35}$$

com

$$\begin{aligned} g_j^1(x,y,\alpha) &= (I - P^1_{Im(M_j^1)})\Psi(0)[j!L_j(\alpha)(\Phi x + y) + F_j(\Phi x + y, \alpha)], \\ g_j^2(x,y,\alpha) &= (I - P^2_{Im(M_j^2)})(I - \pi)X_0[j!L_j(\alpha)(\Phi x + y) + F_j(\Phi x + y, \alpha)]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde os operadores $P^1_{Im(M_j^1)}$, $P^2_{Im(M_j^2)}$, são as projeções definidas por:

$$\begin{aligned} P^1_{Im(M_j^1)} &: V_j^m(\mathbb{R}^m) \longrightarrow Im\left(M_j^1\right), \\ P^2_{Im(M_j^2)} &: V_j^m(Ker\pi) \longrightarrow Im\left(M_j^2\right), \end{aligned}$$

e o operador $M_j = (M_j^1, M_j^2)$ é definido por:

$$\begin{aligned} M_j : V_j^{m+p}(\mathbb{R}^m) \times V_j^{m+p}(Ker(\pi)) &\longrightarrow V_j^{m+p}(\mathbb{R}^m) \times V_j^{m+p}(Ker(\pi)), \\ (M_j^1 p)(x,\alpha) &= D_x p(x,\alpha)Bx - Bp(x,\alpha), \\ (M_j^2 h)(x,\alpha) &= D_x h(x,\alpha)Bx - A_{Q^1}h(x,\alpha), \end{aligned} \tag{3.37}$$

com domínio $D(M_j) = V_j^{m+p}(\mathbb{R}^m) \times V_j^{m+p}(Q^1))$.

Agora obtemos, da teoria da Seção 3.4, as condições de não-ressonância para equações diferenciais funcionais retardadas com parâmetro.

Definição 3.6.1 *Dizemos que a equação* (3.27) *safisfaz as condições de não-ressonância relativamente à* $\Lambda \subset \sigma(A_0)$, *se*

$$(q, \lambda) \neq \mu \text{ para todo } \mu \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda,\ q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{N}^m \text{ e } |q| \geq 2,$$

onde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ *e* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *são os elementos de* Λ, *e cada um deles aparecem tantas vezes quanto sua multiplicidade como raiz da equação característica dada por* (3.3).

Finalmente, temos um teorema, análogo ao Teorema 3.4.2, resumindo a teoria para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro.

Teorema 3.6.1 *Consideremos a equação* (3.27) *e a decomposição de* C, *dada por:*

$$C = P \oplus Q,$$

onde P *é o subespaço invariante pelo gerador infinitesimal* A_0, *associado ao subconjunto não vazio e finito* Λ *de autovalores. Assim, temos a decomposição* $u = \Phi x + y$, *onde* $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Q$, $\dim P = m$ *e* Φ *é uma base para* P. *Se as condições de não-ressonância relativamente à* Λ *da Definição* 3.6.1 *são satisfeitas, então, existe uma mudança de variável tal que a equação* (3.27) *é equivalente à equação em* $BC \equiv \mathbb{R}^m \times Ker(\pi)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= Bx + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} g_j^1(x,y,\alpha) + O(|(x,y,\alpha)|^r), \\ \frac{dy}{dt} &= A_{Q^1}y + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} g_j^2(x,y,\alpha) + O(|(x,y,\alpha)|^r), \end{aligned} \right.$$

onde g_j^1, g_j^2 são obtidos como em (3.36), com $g_j^2(x, 0) = 0$, para $j \geq 2$. Essa equação está na forma normal relativamente à P. Se existir uma variedade localmente invariante para a equação (3.27), tangente à P no zero, então, essa satisfaz $y = 0$ e o fluxo sobre essa variedade é dado pela equação diferencial ordinária m-dimensional:

$$\dot{x} = Bx + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j!} g_j^1(x, y, \alpha) + O(|(x, y, \alpha)|^r),$$

a qual está na forma normal, no sentido usual para equações diferenciais ordinárias.

3.7 Singularidade do tipo Bogdanov-Takens

Nesta seção, faremos aplicações à singularidade do tipo Bogdanov-Takens. O nosso estudo consistirá, numa situação geral, do cálculo da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas escalares com singularidade do tipo Bogdanov-Takens.

1^a Aplicação

Consideremos a equação diferencial funcional retardada escalar definida no espaço $C = C([-r, 0], \mathbb{R})$,

$$\dot{z}(t) = L(z_t) + F(z_t), \tag{3.38}$$

onde $L : C \to R$ é um operador linear limitado e $F \in C^N$, $N \geq 2$, definida de C em $\mathbb{R}$, com $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$.

Sejam $T(t), t \geq 0$, o C_0-semigrupo das soluções da equação linear:

$$\dot{z}(t) = L(z_t),$$

e A_0 o gerador infinitesimal associado.

Suponhamos que a equação característica $\Delta(\lambda) = \lambda - L(e^{\lambda \cdot})$:

(i) tenha $\lambda = 0$ como autovalor de multiplicidade dois,

(ii) não tenha nenhum autovalor, além de $\lambda = 0$, com parte real zero.

Portanto, da hipótese (i), temos:

$$\Delta(0) = 0, \quad \frac{\partial \Delta(0)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Delta(0)}{\partial \lambda^2} \neq 0,$$

ou seja,

$$L(1) = 0, \quad L(\theta) = 1 \quad \text{e} \quad L(\theta^2) \neq 0. \tag{3.39}$$

Consideremos a decomposição de C por $\Lambda = \{0\}$ dada por:

$$C = P \oplus Q, \tag{3.40}$$

onde P é o espaço invariante pelo gerador infinitesimal A_0 associado ao autovalor $\lambda = 0$, dado por:

$$P = Ker(A_0)^{k_0},$$

e k_0 é o ascendente de 0. Um elemento $\phi \in P$ se, e somente se,

$$\dot{\phi}, \dots, \phi^{(k_0-1)} \in D(A_0) \text{ e } A_0^{k_0}\phi \equiv 0,$$

ou seja,

$$L(\phi^{(k_0-1)}) = 0,\ L(\phi^{(k_0-2)}) = \phi^{(k_0-1)}(0), \dots, L(\phi) = \dot{\phi}(0) \text{ e } \phi^{(k_0)} \equiv 0. \tag{3.41}$$

onde $\phi^{(i)}$ é a derivada i-ésima de ϕ com relação à θ.

Então:

$$\phi^{(i)}(\theta) = i!a_i + (i+1)!a_{i+1}\theta + \frac{(i+2)!}{2!}a_{i+2}\theta^2 + \cdots + \frac{(k_0-1)!}{(k_0-(i+1))!}a_{k_0-1}\theta^{k_0-(i+1)}.$$

Usando as condições (3.39), conseguimos:

- $L(\phi^{(k_0-1)}) = L((k_0-1)!a_{k_0-1}) = (k_0-1)!a_{k_0-1}L(1) = 0,$

- $L(\phi^{(k_0-2)}) = (k_0-2)!a_{k_0-2}L(1) + (k_0-1)!a_{k_0-1}L(\theta) \overset{(3.41)}{=} \phi^{(k_0-1)}(0) = (k_0-1)!a_{k_0-1}.$

- $L(\phi^{(k_0-3)}) = (k_0-3)!a_{k_0-3}L(1) + (k_0-2)!a_{k_0-2}L(\theta) + \dfrac{(k_0-1)!a_{k_0-1}}{2!}L(\theta^2)$

$$\overset{(3.41)}{=} \phi^{(k_0-2)}(0) = (k_0-2)!a_{k_0-2} \Longrightarrow a_{k_0-1} = 0,$$

- $L(\phi^{(k_0-4)}) = (k_0-4)!a_{k_0-4}L(1) + (k_0-3)!a_{k_0-3}L(\theta) + \dfrac{(k_0-2)!a_{k_0-2}}{2!}L(\theta^2)$

$$\overset{(3.41)}{=} \phi^{(k_0-2)}(0) = (k_0-2)!a_{k_0-2} \Longrightarrow a_{k_0-2} = 0,$$

$\vdots$

- $L(\phi^{(k_0-(k_0-1))}) = L(\dot{\phi}) = a_1L(1) + 2a_2L(\theta) + 3a_3L(\theta^2) = \phi(0) \overset{(3.41)}{=} \phi^{(2)}(0) = 2a_2$

$$\Longrightarrow a_3 = 0,$$

- $L(\phi) = a_0L(1) + a_1L(\theta) + a_2L(\theta^2) \overset{(3.41)}{=} \dot{\phi}(0) = a_1 \Longrightarrow a_2 = 0,$

ou seja, $a_{k_0-1} = \cdots = a_2 = 0$ e a_0, a_1 são reais quaisquer.

Portanto, o espaço P tem ascendente dois e, é dado por:

$$P = Ker(A_0)^2 = \{\phi \in D(A_0) : \phi(\theta) = a_0 + a_1\theta,\ \ e\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, podemos tomar $\Phi = \{\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)\}$, $\theta \in [-r, 0]$, como sendo uma base para P, com:

$$\phi_1(\theta) = 1,\ \ \phi_2(\theta) = \theta,\ \text{ para } \theta \in [-r, 0].$$

Como $\lambda = 0$ tem ascendente dois, temos que:

$$P^T = Ker(A_0^T)^2 = \left\{\psi \in D(A_0^T) : \psi(s) = b_0 - sb_1, \text{ e } b_0, b_1 \in \mathbb{R}\right\},$$

e então, tomemos a base $\Psi = col\left\{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2\right\}$ de P^T, onde

$$\tilde{\psi}_1(s) = \psi_1(0) - s\psi_2(0) \text{ e } \tilde{\psi}_2(s) = \psi_2(0),$$

com $\psi_1(0), \psi_2(0) \in \mathbb{R}$ e $s \in [0, r]$.

Para que possamos ter $(\Psi, \Phi) = I$, é necessário e suficiente escolhermos $\psi_1(0), \psi_2(0)$ reais, tais que:

$$\begin{cases} (\psi_1(0) - s\psi_2(0), 1) = 1 \\ (\psi_1(0) - s\psi_2(0), \theta) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \psi_1(0) - \displaystyle\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} (\psi_1(0) - (\xi - \theta)\psi_2(0))\, d\eta(\theta) d\xi = 1 \\ -\displaystyle\int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} (\psi_1(0) - (\xi - \theta)\psi_2(0))\, d\eta(\theta) \xi d\xi = 0, \end{cases}$$

o que implica,

$$\begin{cases} \psi_1(0) - \psi_1(0)L(\theta) + \psi_2(0)L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right) - \psi_2(0)L\left(\theta^2\right) = 1 \\ -\psi_1(0)L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right) - \psi_2(0)L\left(\dfrac{\theta^3}{3!}\right) = 0, \end{cases}$$

e usando (3.39), obtemos:

$$\begin{cases} \psi_2(0) = -L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right)^{-1} \\ \psi_1(0) = L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right)^{-2} L\left(\dfrac{\theta^3}{3!}\right). \end{cases} \tag{3.42}$$

Concluindo, temos que:

$$P = ger\ \Phi, \quad \Phi(\theta) = (1, \theta), \qquad \text{para } \theta \in [-r, 0],$$

$$P^T = ger\ \Psi, \quad \Psi(s) = col\left(\psi_1(0) - s\psi_2(0), \psi_2(0)\right), \quad \text{para } s \in [0, r],$$

onde $\psi_1(0)$ e $\psi_2(0)$ são como em (3.42).

A matriz B satisfazendo $\dot{\Phi} = \Phi B$ e $-\dot{\Psi} = B\Psi$ é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que o único autovalor de B é $\lambda = 0$, e esse tem multiplicidade dois, então, a equação diferencial ordinária bidimensional sobre a variedade central tem uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens.

Calcularemos a forma normal para a equação diferencial ordinária bidimensional sobre a variedade central até os termos de ordem dois.

Observemos que as condições de não-ressonância da Definição 3.4.1 são satisfeitas.

De fato:

Pela hipótese *(ii)*, a parte real de μ é diferente de zero para todo $\mu \in \sigma(A_0) \setminus \Lambda$, então, para $q = (q_1, q_2)$ pertencente à $\mathbb{N}^2$, com $|q| = j$, $j \geq 2$, e $\lambda = (0, 0)$, conseguimos:

$$(q, \lambda) - \mu = -\mu \neq 0.$$

Agora, descreveremos a forma normal sobre a variedade central como foi desenvolvido nas seções anteriores.

Consideremos a expansão de Taylor para F até os termos de ordem dois,

$$F(u) = \frac{1}{2!}F_2(u) + O\left(|u|^3\right),$$

com $u \in C$.

Pela decomposição de C por Λ, como em (3.40), podemos decompor $u \in C$, da forma:

$$u = \Phi x + y,$$

com $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in Q$.

Definimos $f_2(x, y)$ como em (3.11),

$$f_2(x, y) = \begin{bmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \\ (I - \pi) X_0 \end{bmatrix} F_2(\Phi x + y),$$

onde as duas primeiras linhas representam a componente de $f_2(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ e a terceira linha representa a componente de $f_2(x, y)$ em $Ker(\pi)$.

O operador

$$M_j^1 : V_j^2\left(\mathbb{R}^2\right) \to V_j^2\left(\mathbb{R}^2\right),$$

para $j \geq 2$, é dado por:

$$M_j^1(p(x)) = \begin{bmatrix} x_2 \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} - p_2(x) \\ \\ x_2 \dfrac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix} \in V_j^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Agora, calcularemos o espaço complementar de $Im\left(M_2^1\right)$ em $V_2^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, para que possamos determinar os termos de ordem dois que não podem ser eliminados da forma normal.

Considerando a base canônica de $V_2^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

então, suas respectivas imagens sob o operador M_2^1, são:

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que:

$$Im\left(M_2^1\right) = ger\left\{ \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daí, como os vetores,

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix},$$

são linearmente independentes, podemos escolher o espaço complementar de $Im\left(M_2^1\right)$ em $V_2^2(\mathbb{R}^2)$ como:

$$Im\left(M_2^1\right)^c = ger\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.43}$$

Tomemos α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, tais que:

$$F_2(\Phi x) = \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2,$$

então,

$$\begin{aligned} f_2^1(x,0) &= \Psi(0)F_2(\Phi x) = \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2 \\ &= \left[-\alpha\psi_1(0)\begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2(0) \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\psi_1(0)\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\psi_1(0)\begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\gamma}{2}\psi_2(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2^2(0) \end{pmatrix}\right] + \left[(2\alpha\psi_1(0) + \beta\psi_2(0))\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} + \alpha\psi_2(0)\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que:

$$\left(I - P_{I,2}^1\right) f_2^1(x,0) = \alpha\psi_2(0)\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + (2\alpha\psi_1(0) + \beta\psi_2(0))\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix},$$

onde $P_{I,2}^1$ é a primeira componente da projeção:

$$P_{I,2} : V_2^2\left(\mathbb{R}^2\right) \times V_2^2\left(Ker(\pi)\right) \longrightarrow Im(M_2^1) \times Im(M_2^2),$$

com $P_{I,2} = \left(P_{I,2}^1, P_{I,2}^2\right)$.

Portanto, o fluxo sobre a variedade central é dado na forma normal até os termos de segunda ordem, por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O(|x|^3) \\ \dot{x}_2 &= ax_1^2 + bx_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases} \tag{3.44}$$

onde

$$a = \frac{\alpha}{2}\psi_2(0) = -\alpha L\left(\theta^2\right)$$

e

$$b = \alpha\psi_1(0) + \frac{\beta}{2}\psi_2(0) = \frac{2}{3}\alpha L\left(\theta^2\right)^{-2} L\left(\theta^3\right) - \beta L\left(\theta^2\right)^{-1}$$

são constantes reais.

De modo geral, $ab \neq 0$, e as equações em (3.44) determinam uma versão da singularidade do tipo Bogdanov-Takens e no caso em que $ab = 0$, precisamos calcular os termos de ordens superiores para a forma normal, ver [2, 3, 10].

Sabemos de [2, 3, 10], que a versão geral da singularidade do tipo Bogdanov-Takens na forma normal sobre a variedade central, com $ab \neq 0$, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right). \end{cases} \tag{3.45}$$

Agora, queremos determinar a versão geral da equação diferencial funcional retardada escalar original com a singularidade do tipo Bogdanov-Takens. Para isso, tomemos uma perturbação da equação diferencial funcional retardada original (3.38), da forma:

$$v_1 z(t) - v_2 z(t-r), \text{ com } v_1, v_2 \in \mathbb{R},$$

donde obtemos:

$$\dot{z}(t) = v_1 z(t) - v_2 z(t-r) + L\left(z(t)\right) + F\left(z(t)\right).$$

Consideremos a decomposição de BC,

$$BC = P \oplus Ker(\pi),$$

onde P é dado como em (3.40).

Como

$$z_t(\theta) = \Phi(\theta)x + y(\theta),\ \theta \in [-r, 0],$$

com $\Phi(\theta) = (1, \theta)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Q$ e usando as equações em (3.10), obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = Bx + \Psi(0)\left[F\left(\Phi x + y\right) + v_1\left(\Phi(0)x + y(0)\right) - v_2\left(\Phi(-r)x + y(-r)\right)\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = A_{Q^1}y + (I - \pi)X_0\left[F\left(\Phi x + y\right) + v_1\left(\Phi(0)x + y(0)\right) - v_2\left(\Phi(-r)x + y(-r)\right)\right], \end{cases}$$

Donde obtemos,

$$\begin{cases} \dot{x} = \left\{B + \Psi(0)\left[\ (v_1 - v_2) \quad v_2 r\ \right]\right\}x + \Psi(0)\left[F\left(\Phi x + y\right) + v_1 y(0) - v_2 y(-r)\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = \left\{A_{Q^1} + \Psi(0)\left[\ (v_1 - v_2) \quad v_2 r\ \right]\right\}y + (I - \pi)X_0\left[F\left(\Phi x + y\right) + v_1 z y(0) - v_2 y(-r)\right]. \end{cases}$$

Para determinarmos a versão geral da equação diferencial funcional retardada escalar original com a singularidade do tipo Bogdanov-Takens, cuja equação na forma normal sobre a variedade central é dada por (3.45), consideraremos uma mudança de variável.

$$x \longmapsto Dx,$$

onde D é uma matriz constante 2×2, não singular, tal que a parte linear da equação

$$\dot{x} = \left\{B + \Psi(0)\begin{bmatrix} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{bmatrix}\right\}x + \Psi(0)\left[F(\Phi x + y) + v_1 y(0) - v_2 y(-r)\right],$$

seja 'levada' na parte linear do sistema (3.45), ou seja,

$$\begin{aligned} D^{-1}\left[B + \Psi(0)\begin{bmatrix} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{bmatrix}\right]D &= B + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1\psi_2(0)^{-1} & \lambda_2\psi_2(0)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o que equivale à:

$$\begin{cases} D^{-1}BD = B, \\ D^{-1}\Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}, \end{cases}$$

e portanto, obtemos:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \psi_1(0)\psi_2(0)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo essa mudança de variável com $y = 0$, temos que:

$$D^{-1}\left[Bx + \Psi(0)\begin{bmatrix} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{bmatrix}\right]Dx = D^{-1}BDx + D^{-1}\Psi(0)\begin{bmatrix} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{bmatrix}Dx$$

$$= Bx + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{bmatrix}Dx = Bx + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1\psi_2(0)^{-1} & \lambda_2\psi_2(0)^{-1} \end{bmatrix}x$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{bmatrix},$$

onde

$$\lambda_1 = (v_2 - v_1)\frac{2}{L(\theta^2)} \text{ e } \lambda_2 = \left[(v_1 - v_2)\frac{2}{3}\frac{L(\theta^3)}{L(\theta^2)^2} - v_2\frac{2r}{L(\theta^2)}\right]. \tag{3.46}$$

Consideremos a mudança de variável que, para $y = 0$, 'transforma' a equação

$$\dot{x} = Bx + \frac{1}{2}\Psi(0)F_2(x, 0) + O(|x|^3)$$

em sua forma normal:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O(|x|^3) \\ \dot{x}_2 &= ax_1^2 + bx_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases}$$
dada por:
$$x \longmapsto x + \frac{1}{2}U_2^1(x),$$
com $U_2^1(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix}$.

Supondo que
$$F_2(x,0) = \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2,$$
e fazendo a mudança de variável $x \longmapsto Dx$, para $y = 0$, na equação
$$\dot{x} = \left[B + \Psi(0)\left[\begin{array}{cc} (v_1 - v_2) & v_2 r \end{array}\right]\right] x + \frac{1}{2}\Psi(0)F_2(x,0) + O\left(|x|^3\right),$$
obtemos:
$$\begin{aligned} \dot{x} \;=\; & \left[B + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi_2(0) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \lambda_1\psi_2(0)^{-1} & \lambda_2\psi_2(0)^{-1} \end{array}\right]\right] x + \\ & + \frac{1}{2}\Psi(0)F_2(x,0) - \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \psi_1(0) \\ 0 \end{array}\right] F_2(x,0) + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi_2(0) \end{array}\right]. \\ & [2\alpha x_1x_2\psi_1(0)\psi_2(0)^{-1} + \alpha x_2^2\psi_1(0)^2\psi_2(0)^{-2} + \beta x_2^2\psi_1(0)\psi_2(0)^{-1}] + O(|x|^3). \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável
$$x \longmapsto x + \frac{1}{2}U_2^1(x),$$
com $U_2^1(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix}$, conseguimos:
$$\begin{aligned} (I + D_xU_2^1(x))\,\dot{x} = & \left[B + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi_2(0) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \lambda_1\psi_2(0)^{-1} & \lambda_2\psi_2(0)^{-1} \end{array}\right]\right] x + \frac{1}{2}\left[B + \right. \\ & \left. + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi_2(0) \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc} \lambda_1\psi_2(0)^{-1} & \lambda_2\psi_2(0)^{-1} \end{array}\right]\right] U_2^1(x) + \Psi(0)F_2\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), 0\right) - \\ & -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \psi_1(0) \\ 0 \end{array}\right] F_2\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), 0\right) + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} 0 \\ \psi_2(0) \end{array}\right]\left[2\alpha\left(x_1 + \frac{1}{2}p_1(x)\right)\right. \\ & \left(x_2 + \frac{1}{2}p_2(x)\right)\cdot\psi_1(0)\psi_2(0)^{-1} + \alpha\left(x_1 + \frac{1}{2}p_1(x)\right)^2\psi_1(0)^2\psi_2(0)^{-2} + \\ & \left. +\beta\left(x_2 + \frac{1}{2}p_2(x)\right)^2\psi_1(0)\psi_2(0)^{-1}\right] + O(|x|^3). \end{aligned}$$

Usando as equações (3.16), (3.17) e as relações:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \lambda_2(v_1 - v_2)^{-1} - \lambda_1 v_2 r(v_1 - v_2)^{-2}, \\ \psi_2(0) = \lambda_1(v_1 - v_2)^{-1}, \end{cases}$$

obtemos,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right) \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + a x_1^2 + b x_1 x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right), \end{cases}$$

com a, b e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ dados como em (3.44) e (3.46).

Concluímos assim, que a versão geral para a equação diferencial funcional (3.38) com singularidade de Bogdanov-Takens no zero é dada por:

$$\dot{z}(t) = v_1 z(t) - v_2 z(t-r) + L(z_t) + F(z_t), \tag{3.47}$$

onde v_1, v_2 são reais.

2^a Aplicação

Agora, faremos um caso particular da equação (3.38),

$$\dot{z}(t) = f\left(z(t), z(t-1)\right), \tag{3.48}$$

com $f \in C^N(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $N \geq 2$, $f(0,0) = 0$, e suponhamos que a equação característica (3.3):

(i) tenha $\lambda = 0$ como autovalor de multiplicidade dois,

(ii) não tenha nenhum autovalor, diferente de zero, com parte real zero.

Podemos escrever a equação (3.48) da forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= z(t) - z(t-1) + \frac{1}{2}\left[A_{(2,0)}z^2(t) + A_{(1,1)}z(t)z(t-1) + A_{(0,2)}z^2(t-1)\right] + \\ &\quad + K\left(z(t), z(t-1)\right), \end{aligned}$$

onde $K(0,0) = 0$, $DK(0,0) = 0$ e $D^2K(0,0) = 0$.

De fato:

Tomando a expansão de Taylor para a equação (3.48), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= az(t) + bz(t-1) + \frac{1}{2}\left[A_{(2,0)}z^2(t) + A_{(1,1)}z(t)z(t-1) + A_{(0,2)}z^2(t-1)\right] + \\ &\quad + K\left(z(t), z(t-1)\right). \end{aligned}$$

Definimos os operadores $L : C \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_2 : C \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$\begin{aligned} L(\phi) &= a\phi(0) + b\phi(-1), \\ F_2(\phi) &= \left[A_{(2,0)}\phi^2(0) + A_{(1,1)}\phi(0)\phi(-1) + A_{(0,2)}\phi^2(-1)\right], \end{aligned}$$

e então, pelas relações em (3.39), temos que $a = -b = 1$.

Das relações

$$\begin{cases} \psi_1(0) = L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right)^{-2} L\left(\dfrac{\theta^3}{3!}\right), \\ \\ \psi_2(0) = -L\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right)^{-1}, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \dfrac{2}{3}, \\ \\ \psi_2(0) = 2. \end{cases}$$

Consideremos a decomposição de C por $\Lambda = \{0\}$, ou seja, $C = P \oplus Q$, desse modo, podemos escrever $z_t \in C$ como: $z_t = \Phi x + y$.

Daí, para $y = 0$, conseguimos:

$$\begin{aligned} F_2(\Phi x) &= \left[A_{(2,0)}\phi^2(0)x + A_{(1,1)}\phi(0)x\phi(-1)x + A_{(0,2)}\phi^2(-1)x\right] \\ &= \left[A_{(2,0)}x_1^2 + A_{(1,1)}x_1(x_1 - x_2) + A_{(0,2)}(x_1 - x_2)^2\right] \\ &= \left[\left(A_{(2,0)} + A_{(1,1)} + A_{(0,2)}\right)x_1^2 + \left(-A_{(1,1)} - 2A_{(0,2,)}\right)x_1x_2 + A_{(0,2)}x_2^2\right]. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Portanto, temos de (3.44), que o fluxo sobre a variedade central é dado na forma normal por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O(|x|^3) \\ \\ \dot{x}_2 &= ax_1^2 + bx_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases}$$

onde

$$a = -\alpha L\left(\theta^2\right) = \left(A_{(2,0)} + A_{(1,1)} + A_{(0,2)}\right)$$

e

$$b = \frac{2}{3}\alpha L\left(\theta^2\right)^{-2} L\left(\theta^3\right) - \beta L\left(\theta^2\right)^{-1} = \frac{1}{3}\left(2A_{(2,0)} - A_{(1,1)} - 4A_{(0,2)}\right).$$

Obtemos de (3.47) que a versão geral para a equação diferancial retardada (3.48) com a singularidade do tipo Bogdanov-Takens, é da forma:

$$\dot{z}(t) = v_1 z(t) - v_2 z(t-1) + z(t) - z(t-1) + \frac{1}{2}F_2\left(z(t), z(t-1)\right) + K(z(t), z(t-1)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (1+v_1)z(t) - (1+v_2)z(t-1) + \frac{1}{2}\left[A_{(2,0)}z^2(t) + A_{(1,1)}z(t)z(t-1) + \right. \\ &\quad \left. + A_{(0,2)}z^2(t-1)\right] + K(z(t), z(t-1)), \end{aligned}$$

com $K(0,0) = 0$, $DK(0,0) = 0$ e $D^2K(0,0) = 0$.

Concluímos que a versão geral da forma normal sobre a variedade central, com $ab \neq 0$, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + a x_1^2 + b x_1 x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right), \end{cases} \tag{3.50}$$

onde

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(v_1 - v_2), \\ \lambda_2 = \dfrac{2}{3}(v_1 + 2v_2), \\ a = \left(A_{(2,0)} + A_{(1,1)} + A_{(0,2)}\right), \\ b = \dfrac{1}{3}\left(2A_{(2,0)} - A_{(1,1)} - 4A_{(0,2)}\right). \end{cases}$$

Observação:

Em [2, 3, 10], considerando equações diferenciais ordinárias, há uma descrição dos retratos de fase numa vizinhança da origem para a versão geral. Esse resultado pode ser utilizado para (3.50) através dos coeficientes considerados acima, então podemos usar os coeficientes a, b, e os parâmetros λ_1, λ_2, que surgem na versão geral da forma normal para descrever o possível retrato de fase em termos dos coeficientes da equação diferencial funcional retardada original sem a necessidade de calcularmos previamente a variedade central. Em particular, a estabilidade das órbitas homoclínicas e periódicas ocorrem para certos valores dos parâmetros e dependem do sinal do produto:

$$\left(A_{(2,0)} + A_{(1,1)} + A_{(0,2)}\right)\left(2A_{(2,0)} - A_{(1,1)} - 4A_{(0,2)}\right).$$

3^a Aplicação

O nosso objetivo é ilustrar o cálculo da forma normal para termos de ordem maiores que dois, vamos mostrar também como esse procedimento difere do caso de dimensão finita. Consideraremos um caso particular da equação (3.48), cuja condição $a.b \neq 0$ não está satisfeita,

$$\dot{z}(t) = z(t) - z(t-1) + \alpha z(t)\left[z(t) - z(t-1)\right] + \beta z(t) z^2(t-1), \tag{3.51}$$

com α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, obtemos de (3.44), que os coeficientes da forma normal sobre a variedade central são:

$$\begin{cases} a &= \left(A_{(2,0)} + A_{(1,1)} + A_{(0,2)}\right) = 2\alpha - 2\alpha + 0 = 0, \\ b &= \dfrac{1}{3}\left(2A_{(2,0)} - A_{(1,1)} - 4A_{(0,2)}\right) = \dfrac{1}{3}\left(2(2\alpha) + 2\alpha + 0\right) = 2\alpha. \end{cases}$$

Como essa equação é um caso particular da equação (3.48), o autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicidade dois e nenhum outro autovalor tem parte real zero. As condições de não-ressonância são satisfeitas e implicam que $Im(M_j^2) = V_j^2\left(Ker(\pi)\right)$, $j \geq 2$, portanto, podemos tomar a projeção

$$P^2_{I,J} : V^2_j\left(Ker(\pi)\right) \longrightarrow V^2_j\left(Ker(\pi)\right),$$

como sendo a identidade.

Agora, calcularemos a mudança de variável $U_2(x)$, dada em (3.21). Para isso, precisaremos calcular o espaço complementar de $Ker(M^1_2)$, já que, o operador $(M^1_2)^{-1}$ leva a imagem do operador M^1_2 sobre $(Ker(M^1_2))^c$.

Os operadores $M^1_j : V^2_j\left(\mathbb{R}^2\right) \longrightarrow V^2_j\left(\mathbb{R}^2\right)$, para $j \geq 2$, são dados por:

$$M^1_j(p(x)) = \begin{bmatrix} x_2\dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} - p_2(x) \\ \\ x_2\dfrac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} \end{bmatrix}.$$

Considerando a base canônica de $V^2_2\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

podemos escrever $p(x) \in V^2_2\left(\mathbb{R}^2\right)$ da forma:

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 \\ a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_2^2 \end{pmatrix},$$

e portanto, $p(x) \in Ker(M^1_2)$, se

$$\begin{bmatrix} x_2\dfrac{\partial a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2}{\partial x_1} - (a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_2^2) \\ \\ x_2\dfrac{\partial a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_2^2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = 0,$$

então,

$$\begin{cases} 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_2^2, \\ \\ 2a_4x_1 + a_5x_2 = 0. \end{cases}$$

A segunda equação do sistema acima implica que $a_4 = a_5 = 0$, e portanto,

$$\begin{cases} 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = a_6x_2^2, \\ \\ p_2(x) = a_6x_2^2, \end{cases}$$

logo, temos da primeira equação que $a_2 = a_6$, $a_1 = 0$.

Daí,

$$\begin{cases} p_1(x) = a_6x_1x_2 + a_3x_2^2, \\ \\ p_2(x) = a_6x_2^2, \end{cases}$$

ou seja,
$$Ker(M_2^1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Assim, escolhemos o complementar de $Ker(M_2^1)$, dado por:
$$(Ker(M_2^1))^c = \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Usando a expressão em (3.49), conseguimos:
$$F_2\left(\Phi(x)\right) = 2\alpha x_1x_2,$$
e então,
$$f_2(x,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{4\alpha}{3} \\ \\ 4\alpha \\ \\ 2\alpha(I-\pi)X_0 \end{bmatrix} x_1x_2.$$

Como $P_{I,2}^2 = I$, pois $Im(M_2^2) = V_2^2(Ker(\pi))$, temos que existe uma única $h \in V_2^2(Q^1)$ tal que:
$$(M_2^2h)(x) = (I-\pi)X_0x_1x_2,$$
ou seja,
$$h(x) = (M_2^2)^{-1}(I-\pi)X_0x_1x_2. \tag{3.52}$$

Considerando a decomposição de $V_2^2\left(\mathbb{R}^2\right)$,
$$V_2^2\left(\mathbb{R}^2\right) = Im(M_2^1) \oplus (Im(M_2^1))^c,$$
com $(Im(M_2^1))^c$, dado em (3.43), obtemos:
$$f_2^1(x,0) = \frac{2\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix},$$
com $\dfrac{2\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in Im(M_2^1)$.

Desse modo, como $\left(M_2^1\right)^{-1}\left(Im(M_2^1)\right) = \left(Ker(M_2^1)\right)^c$, conseguimos:
$$U_2^1(x) = (M_2^1)^{-1}P_{I,2}^1f_2^1(x,0) = (M_2^1)^{-1}\left(\frac{2\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{2\alpha}{3}\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
pois,
$$M_2^1\left(\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluindo, temos que:

$$U_2(x) = 2\alpha \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^2}{3} \\ 0 \\ h(x) \end{bmatrix}.$$

A partir deste momento, passaremos ao cálculo dos termos de ordem três.

Obtemos, da equação (3.51), que a parte não linear é dada por:

$$\begin{aligned} F(\Phi x + y) &= \alpha\,(\Phi(0)x + y(0))\left[(\Phi(0)x + y(0)) - (\phi(-1)x + y(-1))\right] + \\ &\quad +\beta\,(\Phi(0)x + y(0))\,(\phi(-1)x + y(-1))^2 = \frac{1}{2}F_2(x,y) + \frac{1}{3!}F_3(x,y), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} F_2(x,y) &= \left[2\alpha\,(x_1x_2 + x_1(y(0) - y(-1)) + x_2y(0) - y(0)y(-1) + y^2(0))\right], \\ F_3(x,y) &= [3!\beta\,(x_1(x_1 - x_2)^2 + 2x_1^2y(-1) - 2x_1x_2y(-1) + x_1y^2(-1) + x_1^2y(0) - \\ &\quad -2x_1x_2y(0) + 2x_1y(-1)y(0) + x_2^2y(0) - 2x_2y(-1)y(0) + y^2(-1)y(0))]. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Portanto, a equação diferencial definida sobre o espaço P é dada por:

$$\dot{x} = Bx + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ 2 \end{bmatrix} F_2(x,y) + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ 2 \end{bmatrix} F_3(x,y).$$

Agora, fazendo a mudança de variável

$$(x,y) \longrightarrow \left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), y + \frac{1}{2}U_2^2(x)\right),$$

na equação acima, obtemos,

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{1}{2}D_xU_2^1(x)\right)\dot{x} &= B\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x)\right) + \frac{1}{2}f_2^1\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), y + \frac{1}{2}U_2^2(x)\right) + \\ &\quad +\frac{1}{3!}f_3^1\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), y + \frac{1}{3!}U_2^2(x)\right). \end{aligned}$$

Daí, usando as expressões em (3.53), conseguimos:

$$f_2^1\left(x + \frac{1}{2}U_2^1(x), y + \frac{1}{2}U_2^2(x)\right) = f_2^1(x,y) + 2\alpha\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ 2 \end{bmatrix}\Big[\ \alpha x_1(h(x)(0) - h(x)(-1)) +$$

$$+\frac{\alpha}{3}x_1^2(y(0)-y(-1))+\frac{\alpha}{3}x_1^2x_2+2\alpha y(0)h(x)(0)+\alpha x_2h(x)(0)-\alpha y(0)h(x)(-1)-$$

$$-\alpha y(-1)h(x)(0)\Bigg],$$

$$f_3^1\left(x+\frac{1}{2}U_2^1(x),y+\frac{1}{3!}U_2^2(x)\right)=f_3^1(x,y)+O\left(|(x,y)|^4\right). \tag{3.54}$$

Considerando a inversa do operador $\left(I+\frac{1}{2}D_xU_2^1(x)\right)$ como em (3.17) e as equação (3.54) acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(I-\frac{1}{2}D_xU_2^1(x)+\frac{1}{(2)^2}D_xU_2^1(x)D_xU_2^1(x)+O(|x|^4)\right)\cdot\\
&\quad\left\{Bx+\frac{1}{2}BU_2^1(x)+\frac{1}{2}\left[f_2^1(x,y)+2\alpha\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 2\end{bmatrix}\Bigg[\alpha x_1(h(x)(0)-h(x)(-1))+\right.\right.\\
&\quad+\frac{\alpha}{3}x_1^2(y(0)-y(-1))+\frac{\alpha}{3}x_1^2x_2+2\alpha y(0)h(x)(0)+\alpha x_2h(x)(0)-\alpha y(0)h(x)(-1)-\\
&\quad\left.\left.-\alpha y(-1)h(x)(0)\Bigg]\right]+\frac{1}{3!}f_3^1(x,y)+O\left(|(x,y)|^4\right)\right\}\\
&= Bx+\frac{1}{2}g_2^1(x,y)+\frac{1}{3!}\left[f_3^1(x,y)+4\alpha\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\Bigg[\alpha x_1(h(x)(0)-h(x)(-1))+\right.\\
&\quad+\frac{\alpha}{3}x_1^2(y(0)-y(-1))+\frac{\alpha}{3}x_1^2x_2+2\alpha y(0)h(x)(0)+\alpha x_2h(x)(0)-\alpha y(0)h(x)(-1)-\\
&\quad\left.-\alpha y(-1)h(x)(0)\Bigg]-\frac{3}{4}D_xU_2^1(x)\left[f_2^1(x,y)-(D_xU_2^1(x)Bx-BU_2^1(x))\right]\right]+\\
&\quad+O\left(|(x,y)|^4\right)\\
&= Bx+\frac{1}{2}g_2^1(x,y)+\frac{1}{3!}\left[f_3^1(x,y)+4\alpha\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\Bigg[\alpha x_1(h(x)(0)-h(x)(-1))+\right.\\
&\quad+\frac{\alpha}{3}x_1^2(y(0)-y(-1))+\frac{\alpha}{3}x_1^2x_2+2\alpha y(0)h(x)(0)+\alpha x_2h(x)(0)-\alpha y(0)h(x)(-1)-
\end{aligned}$$

$$-\alpha y(-1)h(x)(0) \quad \Bigg] - \frac{3}{4}D_x U_2^1(x) g_2^1(x,y) \quad \Bigg] + O\left(|(x,y)|^4\right).$$

Daí, para $y = 0$, temos que:

$$\dot{x} = Bx + \frac{1}{2}g_2^1(x,0) + \frac{1}{3!}\left[f_3^1(x,0) + 4\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{bmatrix} \left[x_1(h(x)(0) - h(x)(-1)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}x_1^2 x_2 + x_2 h(x)(0) \right] \right] + O\left(|x|^4\right),$$

ou seja,

$$\dot{x} = Bx + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha x_1 x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{bmatrix} 4\beta(x_1(x_1 - x_2)^2) + 4\alpha^2 \left[+\frac{1}{3}x_1^2 x_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_1(h(x)(0) - h(x)(-1)) + x_2 h(x)(0) \right] \right] + O\left(|x|^4\right).$$

Assim, os termos de ordem três que surgem após fazermos a mudança de variável para os termos de ordem dois, são dados por:

$$f_3^1(x,0) = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{bmatrix} 4\beta(x_1(x_1 - x_2)^2) + 4\alpha^2 \left[+\frac{1}{3}x_1^2 x_2 + x_1(h(x)(0) - h(x)(-1)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_2 h(x)(0) \right] \right].$$

Na sequência, para obtermos $g_3^1(x,0)$ como em (3.20), precisamos escolher o espaço complementar de $Im(M_3^1)$.

Consideremos a base canônica de $V_3^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix},$$

então, suas respectivas imagens, sob o operador

$$M_3^1(p(x)) = \begin{bmatrix} x_2 \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} - p_2(x) \\ \\ x_2 \dfrac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

são:

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2x_2 \\ 2x_1x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} Im(M_3^1) = ger & \left\{ \begin{pmatrix} 3x_1^2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1^2x_2 \\ 2x_1x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos tomar o espaço complementar de $Im(M_3^1)$,

$$Im(M_3^1)^c = ger\left\{ \begin{pmatrix} o \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como o polinômio homogêneo h pertence à $V_2^2(Q^1)$, podemos escrever:

$$h(x)(\theta) = h_{(2,0)}(\theta)x_1^2 + h_{(1,1)}(\theta)x_1x_2 + h_{(0,2)}(\theta)x_2^2, \tag{3.55}$$

com $h_{(i,j)} \in Q^1$, $i, j = 1, 2$ e $i + j = 2$.

Substituindo (3.55) em $f_3^1(x, 0)$ e tomando sua decomposição em relação a decomposição

$$V_2^2(\mathbb{R}^2) = Im(M_3^1) \oplus (Im(M_3^1))^c,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f_3^1(x,0) = & \left[\left(-\frac{8}{3}\beta + \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{4\alpha^2}{3}h_{(1,1)}(0) - \frac{4\alpha^2}{3}h_{(1,1)}(-1) + \frac{4\alpha^2}{3}h_{(2,0)}(0) \right) . \right. \\ & \begin{pmatrix} 3x_1^2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(2\beta + 2\alpha^2 h_{(0,2)}(0) - 2\alpha^2 h_{(1,1)}(-1) + 2\alpha^2 h_{(1,1)}(0)\right) . \\ & \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(4\alpha^2 h_{(0,2)}(0)\right) . \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(12\alpha^2 h_{(1,1)}(0)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix} + \\ & + \left(-4\beta + 4\alpha^2 h_{(2,0)}(0) + 4\alpha^2 h_{(1,1)}(-1)\right) . \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix} + \\ & \left. \left(12\beta + 4\alpha^2 h_{(0,2)}(0) - 4\alpha^2 h_{(0,2)}(-1) + 4\alpha^2 h_{(1,1)}(0)\right) . \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[12\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \left(x_1^3 - x_1^2x_2\right) \end{pmatrix} + 12\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \left(h_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(-1)\right) x_1^3 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. +12\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{3} + 2h_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(-1) + h_{(1,1)}(0) - h_{(1,1)}(-1)\right) x_1^2x_2 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Assim, conseguimos de (3.20), que os termos de ordem três da forma normal sobre a variedade central são dados por:

$$\begin{aligned} g_3^1(x,0) &= (I - P_{I,3}^1)\hat{f}_3^1(x,0) = 12\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \left(x_1^3 - x_1^2 x_2\right) \end{pmatrix} + \\ &+ 12\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \left(h_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(-1)\right) x_1^3 \end{pmatrix} + \\ &+ 12\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{3} + 2h_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(-1) + h_{(1,1)}(0) - h_{(1,1)}(-1)\right) x_1^2 x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Para que possamos explicitar os termos de ordem três da forma normal sobre a variedade central em termos dos coeficientes da equação original (3.51), é preciso calcularmos $h_{(2,0)}$ e $h_{(1,1)}$ pela resolução de (3.52). Como essa equação é considerada em um espaço de dimensão infinita, temos que essa é uma equação funcional, na forma de um problema de valor de contorno para uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^3$.

De fato:

Usando a definição de M_2^2, conseguimos que:

$$D_x h(x)Bx - A_{Q^1}h(x) = (I - \pi)\, X_0 x_1 x_2.$$

Uma vez que $h_{(i,j)} \in Q^1$, $i, j = 1, 2$ e $i + j = 2$, temos que

$$A_{Q^1}h_{(i,j)} = Ah_{(i,j)},$$

e portanto,

$$x_2 \frac{\partial h(x)(\theta)}{\partial x_1} - \dot{h}(x)(\theta) + X_0\left[\dot{h}(x)(0) - L(h(x))\right] = \left[X_0 - \left(\frac{1}{3} + 2\theta\right)\right] x_1 x_2,$$

onde $\dot{h}$ denota a derivada de $h(x)(\theta)$ com relação à θ.

Substituindo a expressão de h, como em (3.55), obtemos:

$$\begin{aligned} &\left(-\dot{h}_{(2,0)}(\theta)\right) x_1^2 + \left(2h(\theta)_{(2,0)} - \dot{h}_{(1,1)}(\theta)\right) x_1 x_2 + \left(h_{(1,1)}(\theta) - \dot{h}_{(0,2)}(\theta)\right) x_2^2 + \\ &X_0 \left[\left(\dot{h}_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(0) + h_{(2,0)}(-1)\right) x_1^2 + \left(\dot{h}_{(1,1)}(0) - h_{(1,1)}(0) + h_{(1,1)}(-1)\right) x_1 x_2 + \right. \\ &\left. \left(\dot{h}_{(0,2)}(0) - h_{(0,2)}(0) + h_{(0,2)}(-1)\right) x_2^2\right] = -\left(\frac{2}{3} + 2\theta\right) x_1 x_2 + X_0 x_1 x_2, \end{aligned}$$

que equivale ao sistema,

$$\begin{aligned} \dot{h}_{(2,0)}(\theta) &= 0, \\ 2h_{(2,0)}(\theta) - \dot{h}_{(1,1)}(\theta) &= -\left(\frac{2}{3} + 2\theta\right), \\ h_{(1,1)}(\theta) - \dot{h}_{(0,2)}(\theta) &= 0, \end{aligned} \tag{3.57}$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \left(\dot{h}_{(2,0)}(0) - h_{(2,0)}(0) + h_{(2,0)}(-1)\right) &= 0, \\ \left(\dot{h}_{(1,1)}(0) - h_{(1,1)}(0) + h_{(1,1)}(-1)\right) &= 1, \\ \left(\dot{h}_{(0,2)}(0) - h_{(0,2)}(0) + h_{(0,2)}(-1)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Obtemos da primeira equação de (3.57) que $h_{(2,0)}$ é constante, mas as funções constantes pertencem à P, além disso, $h_{(2,0)} \in Q^1$, portanto $h_{(2,0)} \equiv 0$.

Assim, resolvendo (3.57) e (3.58) para obtermos $h_{(1,1)}$, temos que:

$$h_{(1,1)}(\theta) = \theta^2 + \frac{2}{3}\theta + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$.

Para o cálculo de $g_3^1(x, 0)$, não é necessário o cálculo de C, embora poderíamos ter feito usando o fato que $h_{(1,1)} \in Q^1 = \{\phi \in C^1 : (\Psi, \phi) = 0\}$.

Substituindo os valores obtidos acima em (3.56), conseguimos:

$$g_3^1(x, 0) = 12\beta \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o fluxo sobre a variedade central para a equação (3.51), é dado na forma normal até terceira ordem por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O\left(|x|^4\right) \\ \dot{x}_2 = 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_1^3 - 2\beta x_1^2 x_2 + O\left(|x|^4\right). \end{cases}$$

Observação:

A principal diferença que podemos observar entre o cálculo da forma normal relativamente a um espaço invariante m-dimensional para equações diferenciais funcionais retardadas e ordinárias, consiste na necessidade de considerarmos uma equação diferencial funcional (no exemplo um problema de valor de contorno para uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^3$) ao invés de uma equação algébrica. Esse fato foi ilustrado nessa última aplicação.

3.8 Singularidade do tipo Bogdanov-Takens com um parâmetro

Nesta seção, encerraremos o capítulo calculando a forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com um parâmetro e singularidade do tipo Bogdanov-Takens.

Consideremos a equação diferencial funcional retardada com um parâmetro,

$$\dot{z}(t) = L(\alpha)(z_t) + F(z_t, \alpha), \tag{3.59}$$

onde z_t pertence à $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, o parâmetro α pertence à V, uma vizinhança do zero em $\mathbb{R}^p$, $L : V \to \mathfrak{L}(C, \mathbb{R}^n)$ é de classe C^1 e $F : C \times V \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^N, $N \geq 2$, com $F(0,0) = 0$ e $DF(0,0) = 0$.

Como na Seção 3.5, consideraremos o parâmetro α como uma nova variável, introduzindo a equação $\dot{\alpha} = 0$. Mas, como a equação para α está na forma mais simples possível, basta considerarmos a equação (3.59) nas variáveis $z_t \in C$ e $\alpha \in V$.

Definindo $L_0 = L(0)$, segue que,

$$L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t) = O\left(|(z_t, \alpha)|^2\right),$$

e portanto, podemos reescrever a equação (3.59),

$$\dot{z}(t) = L_0(z_t) + [F(z_t, \alpha) + L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t)],$$

onde $[F(z_t, \alpha) + L(\alpha)(z_t) - L_0(z_t)]$ é a parte não linear nas variáveis z_t e α, e então, temos que a equação linearizada associada à equação (3.59), é dada por:

$$\dot{z}(t) = L_0(z_t).$$

Sejam $T(t), t \geq 0$, o C_0-semigrupo associado à equação linearizada e A_0 o gerador infinitesimal associado a esse C_0-semigrupo. Tomemos Λ um subconjunto finito e não-vazio de autovalores do gerador infinitesimal A_0 e suponhamos que Λ contém m elementos onde cada elemento é contado tantas vezes quanto sua multiplicidade como raiz de equação característica (3.3).

Tomemos as expansões de Taylor para L e F,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L_0 + \sum_{j=2}^{r-1} L_j(\alpha) + O(|\alpha|^{r-1}), \\ F(z_t, \alpha) &= \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} F_j(z_t, \alpha) + O(|(z_t, \alpha)|^r), \end{aligned}$$

onde $L_j(\alpha)$ é de ordem $j-1$ em α e $F_j(z_t, \alpha)$ é de ordem j em (z_t, α). Observemos que $L_j(\alpha) z_t$ é de ordem j em (z_t, α).

Suponhamos que a equação característica (3.3) :

(i) tenha $\lambda = 0$ como autovalor com ascendente dois;

(ii) não tenha nenhum autovalor, além de $\lambda = 0$, com parte real zero.

Observemos que $\lambda = 0$ ter ascendente dois significa que:

$$dim(Ker(A_0)) = 1, \; dim(Ker(A_0)^2) = 2, \; dim(Ker(A_0)^3) = 2,$$

e $P = Ker(A_0)^2 = \mathcal{M}_0(A_0)$, onde $\mathcal{M}_0(A_0)$ é o espaço generalizado de A_0 associado com o conjunto $\Lambda = \{0\}$. Em particular, isso implica que $\lambda = 0$ é autovalor de multiplicidade dois.

Nesse caso, temos que P e P^T têm dimensão dois. Escolhemos as bases Φ e Ψ de P e P^T, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)), \qquad -1 \leq \theta \leq 0, \\ \Psi(s) &= col[\psi_1(s), \psi_2(s)], \quad 0 \leq s \leq 1, \end{aligned} \tag{3.60}$$

com

$$\phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(s) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}, \psi_2(s) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^*},$$

e assumiremos que $(\Psi, \Phi) = I$.

Então, obtemos que a matriz B tal que as bases Φ e Ψ, satisfazem:

$$A_0\Phi = \Phi B \ \ e \ \ A_0^T\Psi = B\Psi,$$

é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, para $\alpha = 0$, a equação diferencial ordinária bidimensional sobre a variedade central tangente ao espaço P no zero, tem singularidade do tipo Bogdanov-Takens. Determinaremos sua dinâmica, em uma vizinhança de $z_t = 0$ e $\alpha = 0$, até os termos de segunda ordem. Da suposição (ii), obtemos que as condições de não-ressonância relativa à $\Lambda = \{0\}$, da Definição 3.4.1, são satisfeitas, e portanto, do Teorema 3.6.1, temos que a forma normal até segunda ordem para a equação diferencial funcional retardada com um parâmetro (3.59), sobre a variedade central, é dada por:

$$\dot{x} \ = \ Bx + \frac{1}{2!}g_2^1(x, 0, \alpha) + O(|(x, \alpha)|^3), \tag{3.61}$$

onde $g_2^1(x, 0, \alpha) \ = \ (I - P^1_{Im(M_2^1)})\Psi(0)[2L_2(\alpha)(\Phi x) + F_2(\Phi x, \alpha)]$.

Para a matriz B acima, o operador M_2^1 é definido por:

$$M_2^1 : V_2^4(\mathbb{R}^2) \to V_2^4(\mathbb{R}^2),$$

$$(M_2^1 p)(x,\alpha) = \begin{pmatrix} x_2 \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} - p_2(x) \\ \\ x_2 \dfrac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

com $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e domínio $D(M_2^1) = V_2^4(\mathbb{R}^2)$.

Consideremos a base canônica de $V_2^4(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1\alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2\alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad (i = 1,2),$$

então, suas imagens sob o operador M_2^1 são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2\alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1\alpha_i \\ x_2\alpha_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2\alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1,2).$$

Assim, podemos tomar a decomposição $V_2^4(\mathbb{R}^2) = Im(M_2^1) \oplus Im(M_2^1)^c$, com o espaço complementar $Im(M_2^1)^c$ gerado pelos elementos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever $f_2^1(x,0,\alpha) = \Psi(0)[2L_2(\alpha)(\Phi x) + F_2(\Phi x, \alpha)]$, da forma:

$$f_2^1(x,0,\alpha) = \begin{pmatrix} b_1x_1\alpha_1 + b_2x_1\alpha_2 + b_3x_2\alpha_1 + b_4x_2\alpha_2 + A^1_{(2,0)}x_1^2 + A^1_{(1,1)}x_1x_2 + A^1_{(0,2)}x_2^2 \\ c_1x_1\alpha_1 + c_2x_1\alpha_2 + c_3x_2\alpha_1 + c_4x_2\alpha_2 + A^2_{(2,0)}x_1^2 + A^2_{(1,1)}x_1x_2 + A^2_{(0,2)}x_2^2 \end{pmatrix},$$

onde $b_1, ..., b_4, c_1, ..., c_4, A^k_{(i,j)}$ são números reais com $i,j,k = 1,2$ e $i + j = 2$.

Daí, decompomos $f_2^1(x,0,\alpha)$ em relação a decomposição acima da seguinte forma:

$$f_2^1(x,0,\alpha) = \left[b_1\begin{pmatrix} x_1\alpha_1 \\ -x_2\alpha_1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} x_1\alpha_2 \\ -x_2\alpha_2\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} x_2\alpha_1 \\ 0\end{pmatrix} + b_4\begin{pmatrix} x_2\alpha_2 \\ 0\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + A^1_{(2,0)}\begin{pmatrix} x_1^2 \\ -2x_1x_2\end{pmatrix} + A^1_{(1,1)}\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0\end{pmatrix} + A^1_{(0,2)}\begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0\end{pmatrix} + A^2_{(0,2)}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2\end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \left[c_1\begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_2\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_1\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_2\end{pmatrix} + A^2_{(2,0)}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2\end{pmatrix} + 2A^1(2,0)\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2\end{pmatrix} + A^2_{(1,1)}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2\end{pmatrix}\right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_2^1(x,0,\alpha) = & \left[c_1\begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ x_1\alpha_2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_2\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_1\end{pmatrix}\right. \\ & \left. + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ x_2\alpha_2\end{pmatrix} + A^2_{(2,0)}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2\end{pmatrix} + 2A^1(2,0)\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2\end{pmatrix} + A^2_{(1,1)}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1x_2\end{pmatrix}\right] \\ = & \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_1x_1^2 + B_2x_1x_2\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$B_1 = A^2_{(2,0)},\ B_2 = 2A^1_{(2,0)} + A^2_{(1,1)}, \tag{3.62}$$

e os parâmetros de bifurcação são dados por:

$$\lambda_1 = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2),\ \lambda_2 = [(b_1 + c_3)\alpha_1 + (b_2 + c_4)\alpha_2]. \tag{3.63}$$

Portanto, a equação diferencial ordinária para o fluxo da equação (3.59) sobre a variedade central é dada na forma normal até termos de segunda ordem por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right), \end{cases}$$

com coeficientes B_1, B_2 e parâmetros λ_1, λ_2 definidos em (3.62) e (3.63).

Capítulo 4

Sistema Planar com Dois Retardos

4.1 Introdução

Consideremos o sistema planar:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & f_1\left(x_1(t), x_2(t-\tau_2)\right) \\ \dot{x}_2(t) & = & f_2\left(x_1(t-\tau_1), x_2(t)\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde os retardos τ_1, τ_2 são não-negativos com $\tau_1 + \tau_2 > 0$ e $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^k, $k \geq 2$. O sistema (4.1) inclui um significativo número de modelos em dinâmicas de populações, como por exemplo, o sistema presa-predador.

Nosso objetivo neste capítulo, é determinar as condições para as quais ocorrem as singularidades de Hopf e Bogdanov-Takens em um ponto de equilíbrio de (4.1). Existe um significativo número de artigos que analisam a bifurcação de Hopf para equações similares a (4.1) . Xiao e Ruan (ver [16]) estudaram um caso particular de (4.1), com somente um retardo, onde é analisado a bifurcação de Bogdanov-Takens; Hale e Tanaka (ver [8]) estudaram equações diferenciais funcionais com dois retardos.

Este capítulo está organizado do seguinte modo. Na Seção 4.2, desenvolveremos o problema de autovalor para a equação linearizada de (4.1) ao redor de um ponto de equilíbrio E^*. Na Seção 4.3, descreveremos a existência da singularidade de Bogdanov-Takens com condições sobre o parâmetro $\tau = \tau_1 + \tau_2$ e as derivadas parciais de f_1, f_2 no ponto de equilíbrio e calcularemos a forma normal para o modelo presa-predador com dois retardos.

4.2 O Problema de Autovalor

Nesta seção, obteremos as condições com relação ao parâmetro τ e as derivadas parciais de f_1, f_2 no ponto de equilíbrio E^* sob as quais, o ponto de equilíbrio E^* é uma singularidade do tipo Hopf ou do tipo Bogdanov-Takens.

Consideremos o sistema planar (4.1), onde f_1, f_2 são funcões de classe $C^k, k \geq 2$, definidas sobre um conjunto aberto de $D \subset \mathbb{R}^2$, os retardos τ_1, τ_2 são não-negativos e $\tau = \tau_1 + \tau_2 > 0$. Assumiremos que $E^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ é um ponto de equilíbrio de (4.1), ou seja,

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

Como estamos interessados em determinar as condições sobre o parâmetro τ e sobre as devivadas parciais de f_1, f_2 em E^* para as quais ocorre a singularidade de Hopf ou Bogdanov-Takens; introduziremos τ como um parâmetro de bifurcação.

Fazendo a mudança de variável
$$u = \frac{t}{\tau},$$
no sistema (4.1), com $y_j(u) = x_j(\tau u), j = 1, 2$, conseguimos,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1(u) & = & \tau f_1(y_1(u), y_2(u - r_2)) \\ \\ \dot{y}_2(u) & = & \tau f_2(y_1(u - r_1), y_2(u)), \end{array} \right. \tag{4.2}$$

com retardos $r_i = \dfrac{\tau_i}{\tau} \geq 0,\ i = 1, 2,\ r_1 + r_2 = 1.$

Considerando o espaço de fase $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, a equação linearizada para (4.2) em uma vizinhança V do ponto de equilíbio E^* é dada por:

$$\dot{y}(u) = L_\tau(y_u), \tag{4.3}$$

com $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e o operador $L_\tau : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definido por:

$$L_\tau(\phi) = \begin{pmatrix} \tau\left[a_{11}\phi_1(0) + a_{12}\phi_2(-r_2)\right] \\ \\ \tau\left[a_{21}\phi_1(-r_1) + a_{22}\phi_2(0)\right] \end{pmatrix},$$

onde
$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(E^*)}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2.$$

Como a equação característica é definida por:

$$\Delta(\lambda, \tau) := det\left(\lambda I - L_\tau\left(e^{\lambda\theta}\right)\right) = 0,$$

obtemos,
$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\tau\lambda + a_{11}a_{22}\tau^2 - a_{12}a_{21}\tau^2 e^{-\lambda} = 0. \tag{4.4}$$

Lema 4.2.1
(i) *Se $|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$ ou $a_{11}a_{22} = -a_{12}a_{21} \neq 0$, então, temos que (4.4) não tem raízes imaginárias, para todo $\tau > 0$.*

(ii) *Definindo $\rho > 0$ por:*

$$\rho = \left[\frac{1}{2}\left(-(a_{11}^2 + a_{22}^2) + \sqrt{(a_{11}^2 - a_{22}^2)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2}\right)\right]^{1/2}, \tag{4.5}$$

se $|a_{11}a_{22}| < |a_{12}a_{21}|$, então, para $\sigma \geq 0, \pm i\sigma$ são raízes de (4.4) se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma = \sigma(n), \tau = \tau(n)$, onde $\sigma(n), \tau(n)$ são definidos pelas equações:

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \rho,\ cos\,\sigma(n) = \frac{a_{11}a_{22} - \rho^2}{a_{12}a_{21}},\ sen\,\sigma(n) = \frac{(a_{11} + a_{22})\rho}{a_{12}a_{21}}, \tag{4.6}$$

e $\sigma(n) \in (2n\pi, 2(n+1)\pi]$.

(iii) *Se* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, *então, temos que* $\lambda = 0$ *é a única raiz de* (4.4) *com parte real zero, para todo* $\tau > 0$. *Temos ainda, que* $\lambda = 0$ *é uma raiz dupla de* (4.4) *se, e somente se,*

$$a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{22}) > 0 \tag{4.7}$$

e $\tau = \tau_0$ *com*

$$\tau_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11}a_{22}}. \tag{4.8}$$

(iv) *Se* $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} = 0$, *então, temos que* $\lambda = 0$ *é a única raiz de* (4.4) *com parte real zero, para todo* $\tau > 0$. *Temos ainda,* $\lambda = 0$ *é uma raiz dupla de* (4.4) *se, e somente se,*

$$a_{11} = a_{22} = a_{12}a_{21} = 0.$$

Demonstração:

Definindo $a = -(a_{11} + a_{22}), b = a_{11}a_{22}, c = -a_{12}a_{21}$, podemos reescrever (4.4) como:

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a\tau\lambda + b\tau^2 + c\tau^2 e^{-\lambda}.$$

A existência de um real $\sigma \geq 0$ tal que $\Delta(i\sigma, \tau) = 0$, ou seja,

$$-\sigma^2 + a\tau i\sigma + b\tau^2 + c\tau^2 e^{-i\sigma} = 0,$$

equivale à,

$$-\sigma^2 + b\tau^2 + a\tau i\sigma = -c\tau^2(cos\sigma - isen\sigma),$$

donde obtemos:

$$\begin{cases} c\tau^2 cos\sigma &= \sigma^2 - b\tau^2 \\ c\tau sen\sigma &= a\sigma. \end{cases} \tag{4.9}$$

Sabemos que:

$$c^2cos^2\sigma + c^2sen^2\sigma = c^2,$$

então, usando o sistema acima, temos que:

$$\rho^4 + (a^2 - 2b)\rho^2 + (b^2 - c^2) = 0,$$

onde $\rho = \dfrac{\sigma}{\tau}$.

Sendo assim,

$$\rho^2 = \frac{-(a_{11}^2 + a_{22}^2) + \sqrt{(a_{11}^2 - a_{22}^2)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2}}{2} \geq 0,$$

e portanto,

$$\sqrt{(a_{11}^2 - a_{22}^2)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2} \geq (a_{11}^2 + a_{22}^2),$$

o que equivale à:

$$|a_{11}a_{22}| \leq |a_{12}a_{21}|.$$

Ainda mais, $|a_{11}a_{22}| = |a_{12}a_{21}|$ se, e somente se, $\rho = 0$. Conseqüentemente, temos que se $\sigma > 0$, então $\rho = \dfrac{\sigma}{\tau} > 0$, o que implica $|a_{11}a_{22}| < |a_{12}a_{21}|$.

Obtemos de (4.9) que $\Delta(i\sigma, \tau) = 0$ se $\sigma = \sigma(n)$ e $\tau = \tau(n)$ são como em (4.6), para algum $n \in \mathbb{N}$.

Agora, supondo $a_{11}a_{22} = -a_{12}a_{21} \neq 0$ e $\Delta(i\sigma, \tau) = 0$, conseguimos que:

$$\rho^4 + (a^2 - 2b)\rho^2 + (b^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow \rho^2\left(\rho^2 + (a^2 - 2b)\right) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \rho^2 = -a^2 + 2c^2 = -a_{11}^2 - a_{22}^2 < 0 \\ \\ \rho = 0. \end{cases}$$

Mas, como $\rho \geq 0$ obtemos $\rho = 0$, o que implica $\sigma = 0$.

Por outro lado, $\Delta(0, \tau) = \tau^2(b + c) = 2\tau a_{11}a_{22} \neq 0$, o que contradiz nossa suposição.

Assim, concluímos os ítens (i) e (ii).

Suponhamos $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ e que existe um real $\sigma \geq 0$ tal que $\Delta(i\sigma, \tau) = 0$. Analogamente ao que fizemos acima, temos de $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ que $|a_{11}a_{22}| = |a_{12}a_{21}|$, o que equivale à $\rho = 0$, e então $\sigma = 0$ e $\Delta(0, \tau) = \tau^2(b - b) = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ é a única raiz de (4.4).

Observemos que:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}(\lambda, \tau) = 2\lambda + a\tau - c\tau^2 e^{-\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2}(\lambda, \tau) = 2 + c\tau^2 e^{-\lambda},$$

logo,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}(0, \tau) = a\tau - c\tau^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2}(0, \tau) = 2 + c\tau^2.$$

Suponhamos que $c = -a_{12}a_{21} \neq 0$ e $ac = (a_{11} + a_{22})a_{12}a_{21} > 0$, então $\lambda = 0$ é raiz simples se, e somente se,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}(0, \tau) = a\tau - c\tau^2 \neq 0,$$

o que é equivalente à,

$$\tau \neq \tau_0 = \frac{a}{c} = \frac{(a_{11} + a_{22})}{a_{12}a_{21}}.$$

Agora, se $\tau = \tau_0$, temos que:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2}(0, \tau_0) = 2 + c\tau_0^2 \neq 0,$$

o que equivale à

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0,$$

e $\lambda = 0$ é raiz dupla.

Por último, se $b = c = 0$, então:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}(0, \tau) \;=\; a\tau = 0,$$

se, e somente se,

$$a = 0.$$

Então, para $a = b = c = 0$, temos que:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}(0, \tau) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2}(0, \tau) = 2 \neq 0,$$

ou seja, $\lambda = 0$ é raiz dupla de (4.4).

Com isso, concluímos os ítens *(iii)* e *(iv)*.

■

Nos casos *(iii)* e *(iv)* acima, se $\lambda = 0$ é um autovalor simples de (4.3), então o ponto de equilíbrio E^* é um ponto de sela, ver [14]. O próximo teorema apresenta as outras possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio E^*.

Teorema 4.2.1

(i) *Assumindo que* $|a_{11}a_{22}| < |a_{12}a_{21}|$ *e* $\sigma(n), \tau(n)$ *são definidos como em* (4.6), *então, temos que a bifurcação de Hopf ocorre sobre a variedade central para* (4.1) *no ponto de equilíbrio* E^* *para* $\tau = \tau(n)$, *associada com os autovalores* $\pm i\sigma(n)$ *da equação linearizada* (4.3).

(ii) *Assumindo que* $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \neq 0$ *e* $a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{22}) > 0$, *então, o ponto de equilíbrio* E^* *de* (4.1) *é uma singularidade de Bogdanov-Takens para* $\tau = \tau_0$, *onde* τ_0 *é dado por* (4.8).

(iii) *Assumindo que* $a_{11} = a_{22} = a_{12}a_{21} = 0$ *e* $(a_{12}^2 + a_{21}^2) > 0$, *então, o ponto de equilíbrio* E^* *de* (4.1) *é uma singularidade de Bogdanov-Takens para todo* $\tau > 0$.

Demostração:

Assumindo que $|a_{11}a_{22}| < |a_{12}a_{21}|$ e $\lambda = \mu + i\omega$ é raiz de (4.4), isto é,

$$\Delta(\lambda, \tau) = (\mu + i\omega)^2 + a\tau(\mu + i\omega) + b\tau^2 + ce^{-(\mu + i\omega)} = 0,$$

onde a, b, c são como no Lema 4.2.1, obtemos:

$$\begin{cases} c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega &= -\mu^2 + \omega^2 - a\tau\mu - b\tau^2 \\ c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega &= (2\mu + a\tau)\omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

Definimos f_1, f_2 por:

$$\begin{aligned} f_1(\mu, \omega, \tau) &= -\mu^2 + \omega^2 - a\tau\mu - b\tau^2 - c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega, \\ f_2(\mu, \omega, \tau) &= (2\mu + a\tau)\omega - c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega, \end{aligned}$$

e então,

$$det\left[D_{(\mu,\omega)}(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau)\right] = det \begin{bmatrix} -2\mu - a\tau + c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega & 2\omega + c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega \\ 2\omega + c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega & 2\mu + a\tau - c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega \end{bmatrix}$$

$$= -(-2\mu - a\tau + c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega)^2 - (2\omega + c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega)^2 < 0.$$

Em particular, para $\tau(n)$ como em (4.6), temos:

$$det \left[D_{(\mu,\omega)}(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau(n)) \right] < 0,$$

e portanto, podemos aplicar o Teorema de Função Implícita, o qual nos fornece para τ próximo à $\tau(n)$, que existe uma curva de autovalores

$$\lambda(\tau) = \mu(\tau) + i\omega(\tau),$$

com $\mu(\tau(n)) = 0, \omega(\tau(n)) > 0$, e ainda,

$$\dot{\lambda}(\tau) = (\dot{\mu}(\tau), \dot{\omega}(\tau)) = -\left[D_{(\mu,\omega)}(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau) \right]^{-1} D_\tau(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau).$$

Considerando

$$\begin{aligned} k_1 &= -2\mu - a\tau + c\tau^2 e^{-\mu} cos\omega, \\ k_2 &= 2\omega + c\tau^2 e^{-\mu} sen\omega, \end{aligned}$$

obtemos que

$$\left[D_{(\mu,\omega)}(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} & \dfrac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \\ \dfrac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} & \dfrac{-k_1}{k_1^2 + k_2^2} \end{bmatrix}$$

e

$$D_\tau(f_1, f_2)(\mu, \omega, \tau) = \begin{bmatrix} -a\mu - 2b\tau - 2c\tau e^{-\mu} cos\omega \\ a\omega - 2c\tau e^{-\mu} sen\omega \end{bmatrix}.$$

Daí, conseguimos que:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(\tau(n)) &\overset{\substack{\mu=\mu(\tau(n)) \\ \omega=\omega(\tau(n))}}{=} \frac{-(-2\mu - a\tau(n) + c\tau^2(n)e^{-\mu}cos\omega)(-a\mu - 2b\tau(n) - 2c\tau(n)e^{-\mu}cos\omega)}{(-2\mu - a\tau(n) + c\tau^2(n)e^{-\mu}cos\omega)^2 + (2\omega + c\tau^2(n)e^{-\mu}sen\omega)^2} \\ &+ \frac{-(2\omega + c\tau^2(n)e^{-\mu}sen\omega)(a\omega - 2c\tau(n)e^{-\mu}sen\omega)}{(-2\mu - a\tau(n) + c\tau^2(n)e^{-\mu}cos\omega)^2 + (2\omega + c\tau^2(n)e^{-\mu}sen\omega)^2} \\ &\overset{\substack{\mu(\tau(n))=0 \\ \omega(\tau(n))=\sigma(n)}}{=} \frac{-(-a\tau(n) + c\tau^2(n)cos\sigma(n))(-2b\tau(n) - 2c\tau(n)cos\sigma(n))}{(-a\tau(n) + c\tau^2(n)cos\sigma(n))^2 + (2\sigma(n) + c\tau^2(n)sen\sigma(n))^2} + \\ &+ \frac{-(2\sigma(n) + c\tau^2(n)sen\sigma(n))(a\sigma(n) - 2c\tau(n)sen\sigma(n))}{(-a\tau(n) + c\tau^2(n)cos\sigma(n))^2 + (2\sigma(n) + c\tau^2(n)sen\sigma(n))^2} \\ &\overset{(4.10)}{=} \frac{-\left(-a\tau(n) - b\tau^2 + \sigma^2(n)\right)\left(-2\tau(n)\rho^2(n)\right)}{\left(a\tau(n) + b\tau^2(n) - \sigma^2(n)\right)^2 + \left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)^2} + \\ &+ \frac{-\left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)\left(-a\sigma(n)\right)}{\left(a\tau(n) + b\tau^2(n) - \sigma^2(n)\right)^2 + \left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-2a\tau^2(n)\rho^2(n) - 2b\tau(n)\rho^2(n)\tau^2(n) + 2\tau(n)\rho^2(n)\sigma^2(n)}{\left(a\tau(n) + b\tau^2(n) - \sigma^2(n)\right)^2 + \left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)^2} + \\
&\quad + \frac{2a\sigma^2(n) + a^2\tau(n)\sigma^2(n)}{\left(a\tau(n) + b\tau^2(n) - \sigma^2(n)\right)^2 + \left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)^2} \\
&= \frac{\tau(n)\sigma^2(n)\left(a^2 - 2\left(b - \rho^2(n)\right)\right)}{\left(a\tau(n) + b\tau^2(n) - \sigma^2(n)\right)^2 + \left(2\sigma(n) + a\tau(n)\sigma(n)\right)^2},
\end{aligned}
$$

onde $\rho(n) = \dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}$.

Como temos ρ dado por (4.5), segue que:

$$
\begin{aligned}
a^2 - 2(b - \rho^2) &= (a_{11} + a_{22})^2 - 2a_{11}a_{22} + \left(-(a_{11}^2 + a_{22}^2) + \sqrt{\left(a_{11}^2 - a_{22}^2\right)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2} \right) \\
&= (a_{11} + a_{22})^2 - (a_{11} + a_{22})^2 + \sqrt{\left(a_{11}^2 - a_{22}^2\right)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2} \\
&= \sqrt{\left(a_{11}^2 - a_{22}^2\right)^2 + 4a_{12}^2a_{21}^2},
\end{aligned}
$$

e então, $\dot{\mu}(\tau(n)) > 0$.

Portanto, as condições de Hopf são satisfeitas e a bifurcação de Hopf ocorre para $\tau = \tau(n)$.

Para tratarmos os casos (ii) e (iii), consideremos o gerador infinitesimal associado ao operador solução da equação (4.3), dado por:

$$A_\tau : D(A_\tau) \longrightarrow C,$$

$$A_\tau(\phi) = \dot{\phi},$$

onde $D(A_\tau) = \left\{ \phi \in C^1 : \dot{\phi}(0) = L_\tau(\phi) \right\}$.

Agora, suponhamos que valem as hipóteses dadas em (ii), ou seja,

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \neq 0 \;\text{ e }\; a_{11}^2a_{22}^2(a_{11} + a_{22}) > 0.$$

Provaremos que:

$$dimKer(A_\tau) = 1,\; dimKer(A_\tau^2) = 1,\; \text{para } \tau \neq \tau_0,$$

$$dimKer(A_{\tau_0}) = 1,\; dimKer(A_{\tau_0}^2) = dimKer(A_{\tau_0}^3) = 2.$$

Como $\lambda = 0$ tem multiplicidade dois para $\tau = \tau_0$, pelo Lema 1.5.4, obtemos que $dimKer(A_{\tau_0}^3) \leq 2$. Assim, basta mostrarmos que:

$$dimKer(A_\tau) = 1,\; dimKer(A_\tau^2) = 1,\; \text{para } \tau \neq \tau_0,$$

$$dimKer(A_{\tau_0}) = 1,\; dimKer(A_{\tau_0}^2) = 2.$$

- Tomemos $\phi \in Ker(A_\tau)$, ou seja,

$$A_\tau \phi \equiv 0 \;\text{ e }\; \dot{\phi}(0) = L_\tau(\phi),$$

então,

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \theta \in [-r, 0],$$

e

$$\begin{cases} \tau a_{11} b_1 + \tau a_{12} b_2 = 0 \\ \tau a_{21} b_1 + \tau a_{22} b_2 = 0. \end{cases}$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema acima é zero, para todo $\tau \geq 0$, podemos tomar b_2 em função b_1,

$$b_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} b_1,$$

com b_1 real.

Logo,

$$Ker(A_\tau) = \left\{ \phi \in C : \phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ com } b_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} b_1 \right\}.$$

Portanto, obtemos:

$$dim Ker(A_\tau) = 1,$$

para todo $\tau \geq 0$.

- Consideremos $\phi \in Ker(A_\tau^2)$, então:

$$A_\tau^2 \phi \equiv 0, \; \phi^{(2)}(0) = L_\tau(\dot{\phi}) \;\text{ e }\; \dot{\phi}(0) = L_\tau(\phi),$$

ou seja,

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \; \theta \in [-r, 0],$$

$$\begin{cases} \tau a_{11} c_1 + \tau a_{12} c_2 = 0 \\ \tau a_{21} c_1 + \tau a_{22} c_2 = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{cases} \tau a_{11} b_1 + \tau a_{12} (b_2 - r_2 c_2) = c_1 \\ \tau a_{21} (b_1 - r_1 c_1) + \tau a_{22} b_2 = c_2. \end{cases} \tag{4.12}$$

Como o determinante do sistema (4.11) é zero, para todo $\tau \geq 0$, podemos tomar c_2 em função de c_1,

$$c_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} c_1,$$

com c_1 real.

Multiplicando a primeira equação do sistema (4.12) por a_{22}, e a segunda equação por

a_{12}, obtemos:

$$\begin{cases} \tau a_{11}a_{22}b_1 + \tau a_{12}a_{22}b_2 - \tau a_{12}a_{22}r_2c_2 - a_{22}c_1 = 0 \\ \\ \tau a_{12}a_{21}b_1 + \tau a_{12}a_{22}b_2 - \tau a_{12}a_{21}r_1c_1 - a_{12}c_2 = 0. \end{cases}$$

Como $c_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}c_1$ e pela hipótese $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{22} \neq 0$, conseguimos:

$$\begin{cases} \tau a_{11}a_{22}b_1 + \tau a_{12}a_{22}b_2 + (\tau a_{11}a_{22}(1 - r_1) - a_{22})\, c_1 = 0 \\ \\ \tau a_{11}a_{22}b_1 + \tau a_{12}a_{22}b_2 + (-\tau a_{12}a_{21}r_1 + a_{11})\, c_1 = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Desse modo,

$$\tau a_{11}a_{22}(1 - r_1) - a_{22} = -\tau a_{12}a_{21}r_1 + a_{11},$$

ou então,

$$\tau = \tau_0 = \frac{(a_{11} + a_{22})}{a_{11}a_{22}}.$$

Portanto, obtemos, que para $\tau \neq \tau_0$, as linhas do sistema (4.13) são linearmente independentes e portanto, subtraindo as linhas do sistema, temos:

$$(\tau - \tau_0)c_1 = 0,$$

então, $c_1 = 0$, consequentemente $c_2 = 0$.

Retomemos o sistema (4.13) com $c_1 = c_2 = 0$,

$$\tau a_{11}a_{22}b_1 + \tau a_{12}a_{22}b_2 = 0,$$

Logo,

$$b_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}b_1.$$

Portanto, segue que $Ker(A_\tau^2)$, para $\tau \neq \tau_0$, é formado pelas funções ϕ da forma:

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

com $b_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}b_1$.

Logo,

$$dim Ker(A_\tau^2) = 1,$$

para todo $\tau \neq \tau_0$.

Por outro lado, se $\tau = \tau_0$, as linhas do sistema (4.13) são linearmente dependentes, então podemos obter c_2 em função de c_1 e, b_2 em função de c_1 e b_1.

Daí, segue que,

$$Ker(A_{\tau_0}^2) = \left\{ \phi \in C : \phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\},$$

com

$$c_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}c_1 \quad \text{e} \quad b_2 = \left(\frac{a_{11}}{a_{12}}(1 - r_1) - \frac{1}{\tau a_{12}} \right) c_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}b_1.$$

Portanto,
$$dimKer(A^2_{\tau_0}) = 2.$$

Concluímos que o ponto de equilíbrio E^* do sistema planar (4.1) é uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens, para $\tau = \tau_0$.

Agora, suponhamos que as condições dadas em (iii) sejam válidas, ou seja,
$$a_{11} = a_{22} = a_{12}a_{21} = 0 \ \text{ e } \ a_{12}^2 + a_{21}^2 > 0.$$

Provaremos que:
$$dimKer(A_\tau) = 1, \ dimKer(A^2_\tau) = dimKer(A^3_\tau) = 2, \ \text{para } \tau > 0.$$

Como $\lambda = 0$ tem multiplicidade dois para $\tau > 0$, pelo Lema 1.5.4, obtemos que $dimKer(A^3_{\tau_0}) \leq 2$. Assim, basta mostrarmos que:
$$dimKer(A_\tau) = 1, \ dimKer(A^2_\tau) = 2, \ \text{para } \tau > 0.$$

Suponhamos sem perda de generalidade que $a_{12} \neq 0$, então, o operador linear L_τ é dado por:
$$L_\tau(\phi) = \begin{bmatrix} \tau a_{12}\phi_2(-r_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$
onde $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C$.

Calcularemos os espaços $Ker(A_\tau)$ e $Ker(A^2_\tau)$.

- Tomemos $\phi \in Ker(A_\tau)$, então:
$$A_\tau\phi \equiv 0 \ \text{ e } \ \dot{\phi}(0) = L_\tau(\phi),$$
então,
$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ \theta \in [-r, 0],$$
e
$$\tau a_{12} b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0.$$

Logo,
$$Ker(A_\tau) = \left\{ \phi \in C : \phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{com } b_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto, obtemos:
$$dimKer(A_\tau) = 1,$$
para todo $\tau > 0$.

- Consideremos $\phi \in Ker(A^2_\tau)$, então:
$$A^2_\tau\phi \equiv 0, \ \phi^{(2)}(0) = L_\tau(\dot{\phi}) \ \text{ e } \ \dot{\phi}(0) = L_\tau(\phi).$$

ou seja,

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \ \theta \in [-r, 0],$$

com

$$\begin{cases} \tau a_{12} c_2 = 0 \\ \tau a_{12} (b_2 - r_2 c_2) = c_1 \\ c_2 = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Então, do sistema (4.14), temos:

$$c_2 = 0 \ \text{ e } \ b_2 = \tau^{-1} a_{12}^{-1} c_1.$$

Logo, obtemos:

$$Ker(A_\tau^2) = \left\{ \phi \in C : \phi(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ com } b_2 = \tau^{-1} a_{12}^{-1} c_1 \right\},$$

para todo $\tau > 0$.

Portanto, temos que a dimensão do $Ker(A_\tau^2)$ é igual a dois, para todo $\tau > 0$.

Concluímos, assim, que o ponto de equilíbrio E^* do sistema planar (4.1) é uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens para todo $\tau > 0$.

■

4.3 Singularidade de Bogdanov-Takens

Nesta seção, usaremos o método da forma normal para equações diferenciais funcionais retardadas com parâmetro para obtermos o fluxo do sistema planar (4.1) sobre a variedade central bidimensional associada. Esta variedade central é tangente ao autoespaço associado com o autovalor duplo $\lambda = 0$ da equação linearizada em uma vizinhança do ponto de equilíbrio. Calcularemos também a forma normal para o modelo presa-predador.

Consideremos a equação (4.1), e suponhamos que $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ com a_{ij} dados em (4.3). Nesse caso, após a translação:

$$u = y - E^* = (y_1 - x_1^*, y_2 - x_2^*)^T,$$

obtemos que (4.2) tem a forma:

$$\dot{u}(t) = L_\tau(u_t) + F_\tau(u_t), \ u_t \in C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2), \tag{4.15}$$

onde os operadores $L_\tau : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F_\tau : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são dados por:

$$\begin{aligned} L_\tau(\phi) &= \tau L(\phi) = \tau \begin{pmatrix} a_{11}\phi_1(0) + a_{12}\phi_2(-r_2) \\ a_{21}\phi_1(-r_1) + a_{22}\phi_2(0) \end{pmatrix}, \\ F_\tau(\phi) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1^* + \phi_1(0), x_2^* + \phi_2(-r_2)) \\ f_2(x_1^* + \phi(-r_1), x_2^* + \phi_2(0)) \end{pmatrix} - L_\tau(\phi), \end{aligned}$$

para $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C$.

Como f_1, f_2 são de classe $C^k, k \geq 2$, podemos definir:

$$a_{jk}^{(i)} = \frac{\partial^2 f_i(E^*)}{\partial x_j \partial x_k}, i = 1, 2, j, k = 0, 1, 2, j + k = 2; \tag{4.16}$$

e também conseguimos:

$$\dot{u}(t) = L_\tau(u_t) + F_{2_\tau}(u_t) + R(u_t), \tag{4.17}$$

onde

$$F_{2_\tau}(\phi) = \tau \begin{pmatrix} a_{20}^{(1)}\phi_1^2(0) + a_{11}^{(1)}\phi_1(0)\phi_2(-r_2) + a_{02}^{(1)}\phi_2^2(-r_2) \\ \\ a_{20}^{(2)}\phi_1^2(0) + a_{11}^{(2)}\phi_1(0)\phi_2(-r_2) + a_{02}^{(2)}\phi_2^2(-r_2) \end{pmatrix} \text{ e } R(\phi) = O(|\phi|^3).$$

1° Caso: $a_{11} = a_{22} = a_{12}a_{21} = 0$ e $a_{12}^2 + a_{21}^2 > 0$.

Sem perda de generalidade, consideremos $a_{12} \neq 0$. Então, o operador linear

$$L_\tau : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

em (4.15) é dado por:

$$L_\tau(\phi) = \begin{pmatrix} \tau a_{12}\phi_2(-r_2) \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos do Teorema 4.2.1, que para $\tau > 0$ fixo, o ponto de equilíbrio E^* do sistema planar (4.1) tem singularidade de Bogdanov-Takens e segue de (3.60), com $n = 2$, que as respectivas bases Φ, Ψ de P, P^T são:

$$\Phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)), \qquad -1 \leq \theta \leq 0,$$

$$\Psi(s) = col[\psi_1(s), \psi_2(s)], \quad 0 \leq s \leq 1,$$

com

$$\phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(s) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \psi_2(s) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2^*},$$

Pela definição de P, obtemos que ϕ_1, ϕ_2 devem satisfazer:

$$L_\tau(\phi_1) = \dot{\phi}_1(0) \text{ e } L_\tau(\phi_2) = \dot{\phi}_2(0),$$

ou seja,
$$\begin{pmatrix} \tau a_{12} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \tau a_{12}(d+\theta b) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$
portanto,
$$b = 0 \quad \text{e} \quad d = \frac{a}{\tau a_{12}}.$$

Agora, tomando $a = 1$ e $c = 0$, determinaremos Ψ de modo que $(\Psi, \Phi) = I$.
Temos que:

- $$(\psi_1, \phi_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \begin{pmatrix} z_1 - (\xi-\theta)w_1 & z_2 - (\xi-\theta)w_2 \end{pmatrix}$$
$$d\eta(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad z_1 - \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\theta^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \theta^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Lembrando que:
$$\int_{-1}^{0} [d\eta(\theta)]\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \tau a_{12}\phi_2(-r_2) \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

Concluímos que $z_1 = 1$.

- $$(\psi_1, \phi_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \begin{pmatrix} z_1 - (\xi-\theta)w_1 & z_2 - (\xi-\theta)w_2 \end{pmatrix}$$
$$d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \xi \\ \dfrac{1}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} d\xi = 0$$
$$\overset{z_1=1}{\Leftrightarrow} \frac{z_2}{\tau a_{12}} - \begin{pmatrix} 1 & z_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\theta^2}{2} \\ \\ \dfrac{\theta}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\theta^3}{3} \\ \\ \dfrac{\theta^2}{2\tau a_{12}} \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & z_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\theta^3}{2} \\ \\ \dfrac{\theta^2}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} = 0.$$

Donde segue que:

$$z_2 = -r_2\tau a_{12}.$$

- $(\psi_2, \phi_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} - \displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \xi \\ \dfrac{1}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} d\xi = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{w_2}{\tau a_{12}} - \begin{pmatrix} 0 & w_2 \end{pmatrix} \int_{-1}^{0} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{\theta^2}{2} \\ \dfrac{\theta}{\tau a_{12}} \end{pmatrix} = 1$$

Portanto,

$$w_2 = \tau a_{12}.$$

- $(\psi_2, \phi_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi = 0$

$$\Leftrightarrow w_1 - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi = 0$$

Logo,

$$w_1 = 0.$$

Portanto, as bases Φ, Ψ de P, P^T, são dadas, respectivamente, por:

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & \dfrac{1}{\tau a_{12}} \end{pmatrix}, \ \theta \in [-1, 0],$$

$$\Psi(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\tau a_{12}(r_2 + s) \\ 0 & \tau a_{12} \end{pmatrix}, \ s \in [0, 1].$$

Assim, a matriz B que satisfaz $A_\tau \Phi = \Phi B$, $A_\tau^T \Psi = B\Psi$ é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde A_τ é o gerador infinitesimal associado ao C_0-semigrupo $T_\tau(t), t \geq 0$, da equação linearizada.

Agora, introduziremos dois novos parâmetros considerando os pequenos coeficientes $a_{21} = \alpha_1$, $a_{22} = \alpha_2$ em (4.15). Daí,

$$\dot{u} = L_\tau(\alpha)(u_t) + F(u_t), \ u_t \in C, \tag{4.18}$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in V \subset \mathbb{R}^2$ e $L_\tau : V \times C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definido por:

$$L_\tau(\alpha)(\phi) = \begin{pmatrix} a_{12}\phi_2(-r_2) \\ \\ \alpha_1\phi_1(-r_1) + \alpha_2\phi_2(0) \end{pmatrix} = L_\tau(0)(\phi) + L_2(\phi),$$

onde

$$L_2(\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1\phi_1(-r_1) + \alpha_2\phi_2(0) \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos de (3.34) que:

$$f_2^1(x, 0, \alpha) = \Psi(0)\left[2\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(\Phi(-r_1)x)_1 + \alpha_2(\Phi(0)x)_2 \end{pmatrix} + F_{2_\tau}(\Phi x)\right],$$

onde $(\Phi(\theta)x)_1$, $(\Phi(\theta)x)_2$ são as componentes da matriz, 2×1, $\Phi(\theta)x$, com $\theta \in [-1, 0]$.

Usando a Definição 4.17, conseguimos:

$$\begin{aligned} F_{2_\tau}(\Phi x) &= \tau \begin{pmatrix} a_{20}^{(1)}[(\Phi(0)x)_1]^2 + 2a_{11}^{(1)}(\Phi(0)x)_1(\Phi(-r_2)x)_2 + a_{02}^{(1)}[(\Phi(-r_2)x)_2]^2 \\ \\ a_{20}^{(2)}[(\Phi(-r_1)x)_1]^2 + 2a_{11}^{(2)}(\Phi(-r_1)x)_1(\Phi(0)x)_2 + a_{02}^{(2)}[(\Phi(0)x)_2]^2 \end{pmatrix} \\ &= \tau \begin{pmatrix} a_{20}^{(1)}x_1^2 + \dfrac{2a_{11}^{(1)}}{\tau a_{12}}x_1x_2 + \dfrac{a_{02}^{(1)}}{(\tau a_{12})^2}x_2^2 \\ \\ a_{20}^{(2)}x_1^2 + \left(\dfrac{2a_{11}^{(2)}}{\tau a_{12}} - 2a_{20}^{(2)}r_1\right)x_1x_2 + \left(a_{02}^{(2)}r_1^2 - \dfrac{2a_{11}^{(2)}r_1}{\tau a_{12}} + \dfrac{a_{02}^{(2)}}{(\tau a_{12})^2}\right)x_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí, como

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -\tau a_{12}r_2 \\ 0 & \tau a_{12} \end{pmatrix},$$

temos que:

$$\begin{aligned} f_2^1(x, 0, \alpha) &= \tau\Bigg[2\begin{pmatrix} -\tau a_{12}r_2 \\ \\ \tau a_{12} \end{pmatrix}\alpha_1x_1 + \begin{pmatrix} \tau a_{12}r_2r_1 \\ \\ -\tau a_{12}r_1 \end{pmatrix}\alpha_1x_2 + \begin{pmatrix} -r_2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}\alpha_2x_2 + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{20}^{(1)} - \tau a_{12}a_{20}^{(2)}r_2 \\ \\ \tau a_{12}a_{20}^{(2)} \end{pmatrix}x_1^2 + \begin{pmatrix} \dfrac{2a_{11}^{(1)}}{\tau a_{12}} - 2r_2a_{11}^{(2)} + 2\tau a_{12}a_{20}^{(2)}r_1r_2 \\ \\ 2a_{11}^{(2)} - 2\tau a_{20}^{(2)}a_{12}r_1 \end{pmatrix}x_1x_2 + \\ &+ \begin{pmatrix} \dfrac{a_{20}^{(1)}}{(\tau a_{12})^2} - \tau a_{12}a_{20}^{(2)}r_1^2r_2 + 2a_{11}^{(2)}r_1r_2 - \dfrac{a_{20}^{(2)}r_2}{\tau a_{12}} \\ \\ a_{20}^{(2)}r_1^2 - 2a_{11}^{(2)}r_1 + \dfrac{a_{02}^{(2)}}{\tau a_{12}} \end{pmatrix}x_2^2\Bigg]. \end{aligned}$$

Usando as equações (3.62), (3.63) da Seção 3.8, obtemos que o fluxo da equação (4.18) sobre a variedade central de E^* até os termos de segunda ordem, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|(x,\alpha)|^3) \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + B_1 x_1^2 + B_2 x_1 x_2 + O(|(x,\alpha)|^3), \end{cases} \tag{4.19}$$

onde

$$B_1 = \frac{\tau^2 a_{12} a_{20}^{(2)}}{2}, \; B_2 = \tau\left(a_{20}^{(1)} a_{11}^{(2)}\right) - \tau^2 a_{12} a_{20}^{(2)}, \tag{4.20}$$

e os parâmetros de bifurcação são dados por:

$$\lambda_1 = \tau^2 a_{12}\alpha_1, \; \lambda_2 = -\tau^2 a_{12}\alpha_1 + \tau\alpha_2. \tag{4.21}$$

Podemos resumir esse caso no seguinte teorema.

Teorema 4.3.1 *Suponhamos $a_{11} = a_{22} = a_{21} = 0, a_{12} \neq 0$. O fluxo sobre a variedade central de $E^* = (x_1^*, x_2^*)$ e para todo $\tau > 0$, é dado por:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|x|^3) \\ \dot{x}_2 = B_1 x_1^2 + B_2 x_1 x_2 + O(|x|^3), \end{cases} \tag{4.22}$$

com B_1, B_2 definidos por (4.20). Se $B_1 B_2 \neq 0$, então temos que o ponto de equilíbrio E^* é uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens, para a qual o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1\left(x_1(t), x_2(t-r_2)\right) \\ \dot{x}_2 = \alpha_1\left(x_1(t-r_1) - x_1^*\right) + \alpha_2\left(x_2(t) - x_2^*\right) + f_2\left(x_1(t-r_1), x_2(t)\right), \end{cases}$$

é a versão geral. Para esse último sistema, a forma normal até segunda ordem sobre a variedade central de E^* é dada por (4.19), com B_1, B_2 e λ_1, λ_2 dados, respectivamente, por (4.20) e (4.21).

Para exemplificar, descreveremos o modelo presa-predador com dois retardos.

Exemplo 4.3.1 *Consideraremos o modelo presa-predador da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)\left[c_1 - b_1 x_1(t) - a\frac{x_2(t-\tau_2)}{b + x_1^2(t)}\right], \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)\left[-c_2 + b_2\frac{x_1(t-\tau_1)}{b + x_1^2(t-\tau_1)}\right], \end{aligned} \tag{4.23}$$

com $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ e $\tau := \tau_1 + \tau_2 > 0$.

Supondo $b \neq 0$ e fazendo a mudança de variável

$$x_1 \longmapsto \frac{x_1}{\sqrt{b}},$$

$$x_2 \longmapsto \frac{a x_2}{\sqrt{b}},$$

obtemos que a equação (4.23) tem a forma da equação (4.1), onde:

$$f_1(x_1,x_2) = x_1(t)\left[c_1 - b_1x_1(t) - \frac{x_2(t-\tau_2)}{1+x_1^2(t)}\right],$$

$$f_2(x_1,x_2) = x_2(t)\left[-c_2 + b_2\frac{x_1(t-\tau_1)}{1+x_1^2(t-\tau_1)}\right].$$

Se tivermos $b_2 = 2c_2$ e $c_1 = 2b_1 > 0$, então, o único ponto fixo não trivial é $E^* = (1, c_1)$. Sob essas condições, temos:

$$a_{11} = a_{21} = a_{22} = 0, a_{12} = -\frac{1}{2},$$

$$a_{11}^{(1)} = a_{02}^{(1)} = 0, a_{20}^{(1)} = -\frac{c_1}{2},$$

$$a_{11}^{(2)} = a_{02}^{(2)} = 0, a_{20}^{(2)} = -c_1c_2,$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \frac{t}{\tau}, \\ (x_1,x_2) &\longmapsto (x_1-1, x_2-c_2), \end{aligned} \tag{4.24}$$

obtemos que a forma normal até ordem dois para o fluxo sobre a variedade central de E^*, é dada por (4.22) com B_1, B_2 como em (4.20), ou seja,

$$B_1 = \frac{\tau^2c_1c_2}{8},\ B_2 = -\frac{\tau c_1(1+\tau c_2)}{2}.$$

Agora, consideremos o sistema:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[c_1 - \frac{c_1}{2}x_1(t) - \frac{x_2(t-\tau_2)}{1+x_1^2(t)}\right],$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[-c_2 + \beta_1 + \beta_2x_1(t-\tau_1) + 2c_2\frac{x_1(t-\tau_1)}{1+x_1^2(t-\tau_1)}\right],$$

então:

$$a_{21} = c_1\beta_2 \ \text{ e } \ a_{22} = \beta_1 + \beta_2,$$

logo, fazendo as mudanças de variáveis (4.24), temos a equação (4.18), com

$$\alpha_1 = c_1\beta_2,\ \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2,$$

e portanto, a forma normal até ordem dois sobre a variedade central de E^*, é dada por (4.19), com λ_1, λ_2 dados por (4.21), ou seja,

$$\lambda_1 = -\frac{\tau^2c_1\beta_2}{2},\ \lambda_2 = \frac{\tau^2c_1\beta_2}{2} + \tau(\beta_1+\beta_2).$$

2º Caso: $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{22}) > 0$.

Nesse caso, usando o Teorema 4.2.1, obtemos que para τ_0 como em (4.8), o ponto de equilíbrio E^* da equação (4.17) tem singularidade de Bogdanov-Takens.

Nesse caso, temos que o operador $L : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por:

$$L_{\tau_0}(\phi) = \int_{-1}^{0} d\eta(\theta)\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \tau_0 a_{11}\phi_1(0) + \tau_0 a_{12}\phi_2(-r_2) \\ \\ \tau_0 a_{21}\phi_1(-r_1) + \tau_0 a_{22}\phi_2(0) \end{pmatrix},$$

onde a matriz $\eta(\theta)$ é dada por:

$$\eta(\theta) = \begin{bmatrix} \eta_1(\theta) & \eta_2(\theta) \\ \\ \eta_3(\theta) & \eta_4(\theta) \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{array}{ll} \eta_1(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta = 0, \\ \tau_0 a_{11} & \text{se } \theta \in [-1, 0), \end{cases} & \eta_2(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \in [-r_2, 0], \\ \tau_0 a_{12} & \text{se } \theta \in [-1, -r_2), \end{cases} \\ \\ \eta_3(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \in [-r_1, 0], \\ \tau_0 a_{21} & \text{se } \theta \in [-1, -r_1), \end{cases} & \eta_4(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta = 0, \\ \tau_0 a_{22} & \text{se } \theta \in [-1, 0). \end{cases} \end{array} \tag{4.25}$$

Obtemos de (3.60), com $n = 2$, que as respectivas bases Φ, Ψ de P, P^T são:

$$\Phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)), \qquad -1 \leq \theta \leq 0,$$

$$\Psi(s) = col[\psi_1(s), \psi_2(s)], \quad 0 \leq s \leq 1,$$

com

$$\phi_1(\theta) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \phi_2(\theta) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(s) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \psi_2(s) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2^*}.$$

Pela definição de P, obtemos que ϕ_1, ϕ_2 devem satisfazer:

$$L_\tau(\phi_1) = \dot{\phi}_1(0), L_\tau(\phi_2) = \dot{\phi}_2(0),$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \tau_0 a_{11} a + \tau_0 a_{12} b \\ \\ \tau_0 a_{21} a + \tau_0 a_{22} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_0 a_{11} c + \tau_0 a_{12} d - \tau_0 a_{12} a_{11} r_2 \\ \\ \tau_0 a_{21} c + \tau_0 a_{22} d - \tau_0 a_{21} a_{12} r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Como o determinante do primeiro sistema acima é zero, segue que existem infinitas soluções, das quais podemos tomar:

$$a = -a_{12}, \; b = a_{11},$$

substituindo no segundo sistema, conseguimos:

$$c = -a_{12} \;\text{ e }\; d = a_{11}(1 + r_2) - \tau_0^{-1},$$

portanto, uma base Φ é dada por:

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} -a_{12} & -a_{12}(1+\theta) \\ & \\ a_{11} & a_{11}\theta + (1+r_2)a_{11} - \tau_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Da definição de P^T, obtemos que ψ_1, ψ_2 devem satisfazer:

$$\int_{-1}^{0} \psi_1(-\theta)d\eta(\theta) = -\dot{\psi}_1(0), \; \int_{-1}^{0} \psi_2(-\theta)d\eta(\theta) = -\dot{\psi}_2(0) = 0,$$

e usando (4.25), conseguimos da segunda condição acima que:

$$\int_{-1}^{0} (w_1 d\eta_1(\theta) + w_2 d\eta_3(\theta), w_1 d\eta_2(\theta) + w_2 d\eta_4(\theta)) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\tau_0 a_{11} w_1 + \tau_0 a_{21} w_2, \tau_0 a_{12} w_1 + \tau_0 a_{22} w_2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}w_1 + a_{21}w_2 = 0 \\ \\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 = 0, \end{cases}$$

da primeira equação, temos que:

$$\int_{-1}^{0} \Big((z_1 + \theta w_1)d\eta_1(\theta) + (z_2 + \theta w_2)d\eta_3(\theta), (z_1 + \theta w_1)d\eta_2(\theta) + (z_2 + \theta w_2)d\eta_4(\theta) \Big)$$

$$= (w_1, w_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \tau_0 a_{11} + (z_2 - r_2 w_2)\tau_0 a_{21} = w_1 \\ \\ (z_1 - r_2 w_1)\tau a_{12} + z_2 \tau_0 a_{22} = w_2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tau_0 a_{11} z_1 + \tau_0 a_{21} z_2 = w_1 + \tau_0 a_{21} r_1 w_2 \\ \\ \tau a_{12} z_1 + \tau_0 a_{22} z_2 = w_2 + \tau_0 a_{12} r_2 w_1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tau_0 a_{11} a_{12} z_1 + \tau_0 a_{21} a_{12} z_2 = w_1 a_{12} + \tau_0 a_{21} a_{12} r_1 w_2 \\ \\ \tau a_{12} a_{11} z_1 + \tau_0 a_{22} a_{11} z_2 = w_2 a_{11} + \tau_0 a_{12} a_{11} r_2 w_1, \end{cases}$$

somando essas duas equações, obtemos:

$$2\tau_0 a_{11}(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = \tau_0 a_{12}a_{21}r_1 w_2 + a_{12}w_1 + a_{11}w_2 + \tau_0 a_{11}a_{12}r_2 w_1,$$

e das relações:

$$w_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}w_1,\ \tau_0 = \frac{a_{11}+a_{22}}{a_{11}a_{22}},\ r_2 = (1-r_1),$$

segue que:

$$2\tau_0 a_{11}(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = -2\tau_0 a_{11}a_{12}r_1 w_1 + \frac{a_{11}+a_{22}}{a_{11}a_{22}}a_{11}a_{12}w_1 + a_{12}w_1 - \frac{a_{11}a_{12}}{a_{22}}w_1,$$

e portanto,

$$2\tau_0 a_{11}(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = 2a_{12}(1-\tau_0 r_1 a_{11})w_1.$$

Assim, os vetores $z=(z_1,z_2)$, $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^{2^*}$ da base Ψ devem satisfazer:

$$\begin{aligned} &a_{12}w_1 + a_{22}w_2 = 0, \\ &\tau_0 a_{11}(a_{12}z_1 + a_{22}z_2) = a_{12}(1-\tau_0 r_1 a_{11})w_1. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Para que possamos ter $(\Psi,\Phi)=I$, duas condições adicionais devem ser satisfeitas:

$$(\psi_1,\phi_1)=1 \ \text{ e } \ (\psi_1,\phi_2)=0,$$

ou seja,

- $(\psi_1,\phi_1)=1$ $\Leftrightarrow$

$$z\phi_1(0) - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta}(z-(\xi-\theta)w)d\eta(\theta)\phi_1(\xi)d\xi = 1$$

$$z\phi_1(0) - z\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta}d\eta(\theta)\phi_1(\xi)d\xi + w\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta}d\eta(\theta)\xi\phi_1(\xi)d\xi -$$

$$-w\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta}d\eta(\theta)\theta\phi_1(\xi)d\xi = 1$$

$$\overset{\phi_1(\xi)=\phi_1(0)}{\Leftrightarrow} \quad z\left[\phi_1(0) - L_{\tau_0}(\phi_1(0)\theta)\right] - wL_{\tau_0}\left(\frac{\phi_1(0)\theta^2}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad zL_{\tau_0}(\phi_2(0)) - wL_{\tau_0}\left(\frac{\phi_1(0)\theta^2}{2}\right) = 1.$$

- $(\psi_1,\phi_2)=0$ $\Leftrightarrow$

$$z\phi_2(0) - \int_{-1}^{0}\int_{0}^{\theta}\psi_1(\xi-\theta)d\eta(\theta)\phi_2(\xi)d\xi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left[\phi_2(0) - L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta) - L_{\tau_0}(\phi_1(0)\theta^2)\right] + w\left[L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta) +\right.$$

$$\left. + L_{\tau_0}(\phi_1(0)\theta^2) - L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta^2) - L_{\tau_0}\left(\phi_1(0)\frac{\theta^3}{2}\right)\right] = 0.$$

Concluindo, temos que $(\Psi, \Phi) = I$ se:

$$z L_{\tau_0}(\phi_2(0)) - w L_{\tau_0}\left(\frac{\phi_1(0)\theta^2}{2}\right) = 1,$$

$$z\left[\phi_2(0) - L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta) - L_{\tau_0}(\phi_1(0)\theta^2)\right] + w\left[L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta) + \right. \tag{4.27}$$

$$\left. + L_{\tau_0}(\phi_1(0)\theta^2) - L_{\tau_0}(\phi_2(0)\theta^2) - L_{\tau_0}\left(\phi_1(0)\frac{\theta^3}{2}\right)\right] = 0.$$

Observemos que as condições (4.26), (4.27), determinam univocamente um par de vetores $z, w \in \mathbb{R}^{2^*}$.

Para $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, a bifurcação de Bogdanov-Takens ocorre quando τ passa por τ_0. Conseqüentemente, é conveniente introduzirmos τ como um parâmetro de bifurcação. Para descrevermos completamente a bifurcação, precisaremos introduzir um segundo parâmetro, o qual faremos fixando três dos coeficientes $a_{ij}, i, j = 1, 2$, e deixaremos o outro variar. Portanto, introduzimos o parâmetro de bifurcação $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ reescrevendo:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \alpha_1, \\ a_{21} &= \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} + \alpha_2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Assim, introduzindo o parâmetro $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ em (4.15), obtemos:

$$\dot{u}(t) = L_{\tau_0}(u_t) + L_{2_{\tau_0}}(\alpha)(u_t) + \tilde{F}(u_t, \alpha), \tag{4.29}$$

onde

$$\begin{aligned} L_{2_{\tau_0}}(\alpha)(\phi) &= \alpha_1 L(\phi) + \tau_0\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1(-r_1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{F}(\phi, \alpha) &= \alpha_1\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1(-r_1) \end{pmatrix} + (\tau_0 + \alpha_1)F(\phi), \end{aligned} \tag{4.30}$$

para $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C$.

Obtemos da Seção 3.8, que:

$$f_2^1(x, 0, \alpha) = \psi(0)\left[2L_{2_{\tau_0}}(\alpha)(\Phi x) + \tau_0\alpha_2 F_{2_{\tau_0}}(\Phi x)\right],$$

com $F_{2_{\tau_0}}(\Phi x)$ dado como em (4.17), a matriz $\Psi(0) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$ é determinada por (4.26), (4.27), e

$$\begin{aligned} L_{2_{\tau_0}}(\alpha)(\Phi x) &= \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11}(\Phi(0)x)_1 + a_{12}(\Phi(-r_2)x)_2 \\ a_{11}a_{22}a_{12}^{-1}(\Phi(-r_1)x)_1 + a_{22}(\Phi(0)x)_2 \end{pmatrix} + \tau_0\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\Phi(-r_1)x)_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} -a_{12}\tau_0^{-1}x_2 \\ a_{22}(a_{11} - \tau_0^{-1})x_2 \end{pmatrix} + \tau_0\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -a_{12}(x_1 + r_2x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos de (3.62), (3.63) e (4.26) que a forma normal sobre a variedade central é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|(x,\alpha)|^3) \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + B_1 x_1^2 + B_2 x_1 x_2 + O(|(x,\alpha)|^3), \end{cases} \tag{4.31}$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\tau_0}{2}\left[a_{12}^2\left(a_{20}^{(1)}w_1 + a_{20}^{(2)}w_2\right) - 2a_{11}a_{12}\left(a_{11}^{(1)}w_1 + a_{11}^{(2)}w_2\right) + a_{11}^2\left(a_{02}^{(2)}w_1 + a_{02}^{(2)}\right)\right], \\ B_2 &= \tau_0\left\{a_{12}^2\left(a_{20}^{(1)}z_1 + a_{20}^{(2)}z_2\right) - 2a_{12}a_{11}\left(a_{11}^{(1)}z_1 + a_{11}^{(2)}z_2\right) + a_{11}^2\left(a_{02}^{(1)}z_1 + a_{02}^{(2)}z_2\right) + \right. \\ &\quad + a_{12}^2\left(a_{20}^{(1)}w_1 + r_2 a_{20}^{(2)}w_2\right) - a_{12}\left[\left(2a_{11} - \tau_0^{-1}\right)a_{11}^{(1)}w_1 + \left(a_{11}(1+2r_2) - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \tau_0^{-1}\right)a_{11}^{(2)}w_2\right] + a_{11}\left[\left(a_{11} - \tau_0^{-1}\right)a_{02}^{(1)}w_1 + \left(a_{11}(1+r_2) - \tau_0^{-1}\right)a_{02}^{(2)}w_2\right]\left.\right\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

e parâmetros

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\tau_0 a_{12}\alpha_2 w_2, \\ \lambda_2 &= -a_{12}\tau_0\alpha_2\left(z_2 + r_2 w_2\right) + a_{22}a_{11}\alpha_1 w_2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Podemos resumir esse caso no seguinte teorema.

Teorema 4.3.2 *Considerando os coeficientes $a_{ij}, i,j = 1,2$, com em (4.3), assumimos que $a_{i,j} \neq 0$ e $a_{11}a_{22}(a_{11} + a_{22}) > 0$. Sejam α_1, α_2 definidos por (4.28), e τ_0 como em (4.8). Então, para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o ponto de equilíbrio E^* da Equação (4.1) tem uma singularidade do tipo Bogdanov-Takens e a equação diferencial ordinária sobre a variedade central para (4.1) de E^* é dada por (4.31), com $B_1, B_2, \lambda_1, \lambda_2$ definidos, respectivamente, por (4.32), (4.33).*

Agora faremos um exemplo do caso acima.

Exemplo 4.3.2 *Consideremos o sistema planar com dois retardos τ_1, τ_2 da forma:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + g_1(x_2(t-\tau_2)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + g_2(x_1(t-\tau_1)), \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^2, tais que:

$$g_1(0) = g_2(0) = 0, g_1'(0)g_2'(0) \neq 0.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x_1 \longmapsto \frac{x_1}{g_1'(0)},$$

podemos considerar $g_1'(0) = 1$. É claro que $E^* = (0,0)$ é um ponto de equilíbrio de (4.34).

Definindo

$$f_1(x_1,x_2) = x_1 + g_1(x_2),$$

$$f_2(x_1,x_2) = x_2 + g_2(x_1),$$

obtemos

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 1,$$

$$a_{21} = g_2'(0).$$

Supondo $g_2'(0) = 1$, *segue que* $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \neq 0$ *e* $a_{11}a_{22}(a_{11}+a_{22}) > 0$. *Então, temos que* (4.34) *tem singularidade do tipo Bogdanov-Takens para*

$$\tau_0 = \frac{a_{11}+a_{22}}{a_{11}a_{22}} = 2.$$

Para essa situação, os coeficientes $a_{jk}^{(i)}$ *em* (4.16) *são:*

$$a_{20}^{(1)} = a_{11}^{(1)} = 0, a_{02}^{(1)} = g_1''(0),$$

$$a_{20}^{(2)} = g_2''(0), a_{11}^{(2)} = a_{02}^{(2)} = 0,$$

e as condições em (4.26) *são dadas por:*

$$w_1 + w_2 = 0,$$

$$2(z_1+z_2) = (1-2r_1)w_1,$$

com $r_i = \dfrac{\tau_i}{\tau_0}, i = 1,2.$

Sob a suposição de $g_2'(0) = 1$, *conseguimos do Teorema* 4.3.2, *que a forma normal sobre a variedade central da origem para* $\tau_0 = 2$, *até termos de ordem dois é dada por:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|x|^3) \\ \dot{x}_2 = B_1x_1^2 + B_2x_1x_2 + O(|x|^3), \end{cases}$$

e os coeficientes B_1, B_2 *em* (4.33), *são:*

$$B_1 = (g_1''(0) - g_2''(0))\, w_1,$$

$$B_2 = (g_1''(0) - g_2''(0))\,(2z_1 + w_1),$$

e z_1, w_1 *são determinados por* (4.26) *e* (4.27).

Uma versão geral da singularidade do tipo Bogdanov-Takens, provém de (4.34), *introduzindo os parâmetros* $\alpha_1 = \tau - 2, \alpha_2 = g_2'(0) - 1$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right) \\ \dot{x}_2 = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2 + O\left((|\lambda| + |x|)\,|x|^2\right), \end{cases}$$

onde os parâmetros de bifurcação λ_1, λ_2 *são obtidos de* (4.33).

$$\lambda_1 = 2\alpha_2 w_1,$$

$$\lambda_2 = 2\alpha_2 z_1 1 + (\alpha_2 - \alpha_1) w_1.$$

Referências Bibliográficas

[1] BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis.** New York, 1966.

[2] BOGDANOV, R. I. **Versal Deformations of a Singular Point on a Plane in the case of Zero Eigenvalues** 1975, 144-145; **10** (1976), 61-62.

[3] BOGDANOV, R. I. **Orbital Equivalence of Singular Points of the Vector Fields on the Plane** **10**(1976), 316-317.

[4] CHOW, S. N.; HALE, J. K. **Methods of Bifurcation Theory** New York, 1996, Springer.

[5] COTLAR, M.; CIGNOLI, R. **An Introduction to Functional Analysis** New York, 1974.

[6] HALE, J. K. **Theory of Functional Differential Equations** New York, 1977.

[7] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations** Applied Math. Sciences 99, Springer-Verlag.

[8] HALE, J. K.; TANAKA, S. M. **Square and Pulse Waves with Two delays** J. Dynam. Diff. Eq. **10** (2000), 1-30.

[9] KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory** New York, 1998.

[10] TAKENS, F. **Singularities of Vector Fields** Publ. Math. Inst. Haustes Etudes sci **43**(1974), 47-100.

[11] TAYLOR, A. **Introduction to Functional Analysis** New York . John & Sons.

[12] TEREZA, F. **Normal Forms for Retarded Functional Differential Equations and Applications to Bogdanov-Takens**, J. Differential Equations **122** (1995), 201-224.

[13] TEREZA, F. **Normal Forms for Retarded Functional Differential Equations with Parameters and Applications to Hopf Bifurcation**, J. Differential Equations **122** (1995), 181-200.

[14] TEREZA, F. **On the Study of Singularities for a Planar System with Two Delays**, J. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems **10** (2003), 357-371.

[15] WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos** New York, 1990, Springer-Verlag.

[16] XIAO, D.; RUAN, S. **Multiple Bifurcations in a Delayed Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response** J. Differential Equations, **176** (2001), 494-510.

[17] ZEIDLER, E. **Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics** Springer-Verlag, New York, 1995.