Cr-invariantes para superfícies em $\mathbb{R}^4$

Jorge Luiz Deolindo Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jorge Luiz Deolindo Silva

Cr-invariantes para superfícies em R^4

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
Março de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D418c Deolindo Silva, Jorge Luiz
 Cr-invariantes para superfícies em R^4 / Jorge
 Luiz Deolindo Silva; orientador Farid Tari. -- São
 Carlos, 2016.
 168 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

 1. superfícies. 2. singularidades. 3.
 transformações projetivas. 4. classificação. 5. cross-
 ratio. I. Tari, Farid, orient. II. Título.

Jorge Luiz Deolindo Silva

Cr-invariants for surfaces in $\mathbb{R}^4$

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Farid Tari

**USP – São Carlos
March 2016**

AGRADECIMENTOS

Obrigado “PAI” por me orientar nessa caminhada.

Agradeço meu orientador Prof. Dr. Farid Tari por propor o problema, me guiar, ser paciente, atencioso, compreensivo e pelas lições de vida. Obrigado por ser um grande amigo.

Agradeço à minha família que sempre me apoiou, acreditou em meu potencial e me deu forças para continuar meus planos. Em especial, a meu pai Luiz (em memória), minha mãe Josefa e minhas irmãs Deise e Débora. A todos os meus familiares que também sempre me apoiaram por esta conquista.

À minha namorada Laís, agradeço por sua imensa, grande e gigantesca paciência, compreensão, carinho e amor. Por estar sempre ao meu lado me incentivando e que sem fim me proporciona momentos especiais. Agradeço também aos seus familiares.

Ao Prof. Dr. Toru Ohmoto por sua supervisão, hospitalidade e amizade no período que estive na Universidade de Hokkaido, Japão. Arigatoo!!!

Aos professores e funcionários do ICMC e as amizades que fiz durante o doutorado. Graças a eles, estes anos tornaram-se muito mais agradáveis. Em especial, Fera, Badaró, Nelson, Mostafa, Rodrigol, Mirna, Mineiro, Camila, Iris, Matheus, Dione, Northon, Theles, Argola, Zé Wilker, Fernando, Yutaro, Sandrão, Veto.

À todas as pessoas que esqueci de citar, mas que de alguma maneira contribuíram para o feliz término desta etapa de minha vida.

À CAPES/JSPS no. 002/14, pelo apoio financeiro no período no Japão.

À FAPESP no. 2012/00066-9, pelo apoio financeiro durante todo o trabalho.

*“Don’t worry about a thing,
’Cause every little thing is gonna be alright...”*

Bob Marley

RESUMO

Nesta tese estudamos a geometria extrínseca de superfícies suave em $\mathbb{R}^4$ via seu contato com retas e hiperplanos. Uribe-Vargas introduziu um cr -invariante (cross-ratio) em uma cúspide de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Para uma superfície em $\mathbb{R}^4$, o ponto $P_3(c)$ tem comportamento similar a uma cúspide de Gauss de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Estabelecemos nesta tese cross-ratio invariantes para superfícies em $\mathbb{R}^4$ de uma maneira análoga ao trabalho de Uribe-Vargas para superfícies em $\mathbb{R}^3$. Estudamos os lugares geométricos das singularidades locais e multi-locais das projeções ortogonais da superfície e classificamos os k -jatos de parametrizações de germes de superfícies no espaço projetivo $\mathbb{P}^4$ dadas na forma de Monge por mudanças projetivas. Os cross-ratio invariantes nos pontos $P_3(c)$ são usadas para recuperar os dois módulos no 4-jato da parametrização projetiva da superfície.

Palavras-chave: superfícies, singularidades, transformação projetivas, classificação.

ABSTRACT

In this thesis we study the extrinsic geometry of smooth surfaces in $\mathbb{R}^4$ via their contact with lines and hyperplanes. Uribe-Vargas introduced a *cr*-invariant (cross-ratio) at a cusp of Gauss of a surface in $\mathbb{R}^3$. For a surface in $\mathbb{R}^4$, the point $P_3(c)$ has similar behavior to that of a cusp of Gauss of a surface in $\mathbb{R}^3$. We establish in this thesis cross-ratio invariants for surfaces in $\mathbb{R}^4$ in an analogous way to Uribe-Vargas's work for surfaces in $\mathbb{R}^3$. We study the geometric loci of local and multi-local singularities of orthogonal projections of the surface and classify the k -jets of parametrizations of germs of surfaces in the projection space $\mathbb{P}^4$ given in Monge form by projective transformations. The cross-ratio invariants at $P_3(c)$ points are used to recover two moduli in the 4-jet of the projective parametrization of the surfaces.

Keywords: surfaces, singularities, projective transformation, classification.

SUMÁRIO

Introdução	xix
1 Conceitos básicos da Teoria de Singularidades	1
1.1 Germes e jatos	1
1.2 Grupos de Mather e espaços tangentes	3
1.3 Desdobramentos versais	8
1.4 Genericidade e transversalidade	9
1.5 Família de germes de funções	11
2 Aspectos locais de superfícies em $\mathbb{R}^4$	13
2.1 A família de funções altura	15
2.2 A projeção ortogonal	17
2.3 Dualidade	18
3 Equações diferenciais implícitas	21
3.1 Equações diferenciais implícitas (EDIs)	21
3.1.1 O levantamento do campo bi-direcional	23
3.1.2 Dualidade	27
3.2 As EDBs em superfícies em $\mathbb{R}^4$	28
3.3 A curva de inflexões das linhas assintóticas	31

4	Adjacências de singularidades multi-locais	35
4.1	Como obter as caracterizações multi-locais	36
4.2	$\mathcal{R}$ -adjacências de germes em $\mathcal{E}_2$ para multi-germes	38
4.3	$\mathcal{A}$ -adjacências de germes em $\mathcal{E}_{2,3}$ para multi-germes	43
5	Lugar geométrico das singularidades multi-locais	59
5.1	A família de funções altura	59
5.1.1	As curvas A_3 e A_1A_2 no ponto A_4	61
5.2	A família de projeções ortogonais	65
5.2.1	Algumas caracterizações locais	65
5.2.2	A curva $[A_2]$ no ponto B_3	80
5.2.3	A curva $(A_0S_0)_2$ em H_3	82
5.2.4	As curvas $(A_0S_0)_2$, $A_0S_1^\pm$ e $A_0S_0 A_1^\pm$ em $P_3(c)$	86
6	Superfícies em $\mathbb{P}^4$	93
6.1	Preliminares	94
6.1.1	Transformações projetivas	96
6.2	Classificação projetiva do k -jato	98
6.2.1	Em um ponto hiperbólico	100
6.2.2	Em um ponto elíptico	103
6.2.3	Em um ponto parabólico	103
6.2.4	Em um ponto de inflexão	106
6.3	Projeções Centrais	107
6.3.1	Nos pontos hiperbólicos	114
6.3.2	Nos pontos parabólicos	124
6.3.3	Nos pontos de inflexão	125

7	Os cr-invariantes no ponto $P_3(c)$	129
7.1	Propriedades do ponto $P_3(c)$	129
8	Apêndice	143

INTRODUÇÃO

Na natureza, pequenas mudanças em um ambiente podem não ser perceptíveis, e pode-se dizer, a grosso modo, que fenômenos estáveis acontecem. Dentro da matemática esses fatos também acontecem e fizeram como que, em [57, 58], Hassler Whitney em meados da década de 50, estudasse aplicações do plano no plano que produzem, em geral, pontos críticos especiais (estáveis), chamados de singularidades dobras e cúspides. Neste trabalho pode-se dizer que a Teoria de Singularidades teve o seu nascimento.

No entanto, na natureza mudanças descontínuas podem ocorrer e fazem desaparecer o equilíbrio do sistema, ocorrendo um conceito, dentro da Teoria de Singularidades, que René Thom (1959) chamou de Teoria de Catástrofe. Ele visa entender o fim do equilíbrio e o estabelecimento do novo sistema gerado pela catástrofe. Nos últimos 60 anos, diversos autores como J. Mather (1965), C. T. C. Wall, V. I. Arnold, entre outros, contribuíram para evolução dos conceitos e começaram a estabelecer bases para a Teoria de Singularidades.

Enquanto Thom continuava ser um grande matemático, Vladimir Arnold, foi, em grande parte, responsável pela expansão dos trabalhos de Whitney, Thom e de outros autores, aplicando a teoria de singularidades em diversas áreas. O trabalho fundamental sobre as singularidades é formulado por meio da construção de relações de equivalência em pontos singulares, os denominados **germes**. Tecnicamente isso envolve ações de grupos de Lie em espaços de jatos. Aplicações, de acordo com Arnold, podem ser vistos na geometria simplética, Sistemas Dinâmicos, Óptica e

outras áreas.

Thom, também, aplicou as ideias em várias áreas da matemática e uma delas foi na geometria. Mais especificamente, estabeleceu ferramentas úteis para o estudo da Geometria Genérica. Segundo F. Dias [20], “*O significa de Geometria Genérica pode se resumir em uma frase ‘Quase nada ocorre para todas as aplicações, mas quase tudo ocorre para quase todas as aplicações’*”. Thom sugeriu estudar a geometria diferencial extrínseca de subvariedades no espaço Euclidiano a fim de tentar obter informações sobre a geometria da subvariedade em termos do contato com objetos especiais.

A idéia chave é a de equivalência de contato $\mathcal{K}$, introduzida por J. Mather. Se uma subvariedade é parametrizada localmente por $\phi : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ e a outra é definida localmente por uma submersão $\psi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}, 0$ (ou vice-versa), o contato entre estas subvariedades é medido pelas $\mathcal{K}$ -classes da composta $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}, 0$.

Em outras palavras, pode-se medir o contato da subvariedade com objetos especiais (planos, retas e esferas) por meio das singularidades de algumas aplicações: a função altura, projeções ortogonais e função distância ao quadrado.

A ideia de René Thom foi formulada por Ian Porteous, e passada para James Montaldi (1986) [35, 36, 37], até então seu aluno de doutorado, que contribuíram de forma significativa para o estudo da geometria de contato em $\mathbb{R}^n$. De certa maneira, apresentou-se teoremas gerais sobre o assunto, e mais especificamente, trabalhou-se com superfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^4$.

Restringindo apenas a esses dois tipos de espaços, diversos trabalhos surgiram em superfícies em $\mathbb{R}^3$ como visto em, por exemplo, [3, 6, 7, 8, 45]. Pode-se determinar regiões abertas na superfície em $\mathbb{R}^3$: a hiperbólica e a elíptica, onde a curvatura Gaussiana K é negativa ou positiva respectivamente, separadas por uma curva suave, onde $K = 0$, conhecida como conjunto parabólico.

Uma maneira alternativa de estudar a superfície em $\mathbb{R}^3$ é por meio da teoria de

contato. Ao estudar o contato da superfície com planos, a região hiperbólica (resp. elíptica) pode ser caracterizada pelas singularidades da função altura na direção normal a superfície quando ela tem singularidade A_1^- (resp. A_1^+). O conjunto parabólico é o conjunto dos pontos onde a função altura, na direção normal, tem singularidade $A_{\geq 2}$. As singularidades A_3 vão ocorrer genericamente em pontos isolados sob a curva parabólica. Esses pontos são especiais e denominados **cúspides de Gauss** (veja [3]). A função altura também tem singularidades multi-locais. A curva conodal é o lugar geométrico dos pontos em que a função altura tem singularidade multi-local $A_{\geq 1}A_{\geq 1}$. A curva conodal é tangente ao conjunto parabólico em uma cúspide de Gauss (veja [3]).

Outra maneira de dar caracterizações geométricas de superfícies em $\mathbb{R}^3$ é estudar o seu contato com retas. Neste caso, O. A. Platonova ([45]) e E. E. Landis ([28]) classificaram superfícies em $\mathbb{P}^3$ por meio do contato com linhas. Sob as linhas tangentes de ordem maior que 1 (linhas assintóticas) aparecem curvas e pontos especiais na região hiperbólica. Para superfícies genéricas existem uma curva formada por pontos de ordem de tangência de 3 (curva flecnodal) que é tangente ao conjunto parabólico nas cúspides de Gauss e existem pontos de ordem 4 que ocorrem em pontos isolados sob essa curva. Como o contato de uma superfície (com retas, planos e esferas) é um invariante afim ([7]), as observações acima valem para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Em [53], Uribe-Vargas (2006) introduziu um invariante (chamado de **cr-invariante**) nas cúspides de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{P}^3$). A ideia principal é a existência de 3 curvas (a curva parabólica, a curva conodal e a curva flecnodal) tangentes nas cúspides de Gauss. Uribe-Vargas levantou estas curvas no fibrado cotangente projetivizado da superfície M . As tangentes delas mais a de uma outra curva (a fibra do ponto $p \in M$) dão um cross-ratio que é o **cr-invariante**. Ele calculou o cross-ratio na forma normal de Monge $(x, y, f(x, y))$ de Platonova ([45]) com

$$j^4 f = \frac{y^2}{2} - x^2 y + \lambda x^4, \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{2}$$

de germe superfícies em $\mathbb{P}^3$ nas cúspides de Gauss. Provou que o cr-invariante é igual a 2λ .

Neste trabalho, o objetivo é fazer um estudo similar ao caso acima, mas para as superfícies genéricas imersas em $\mathbb{R}^4$. O estudo de superfícies em $\mathbb{R}^4$ pode ser encontrado em diversos trabalhos, por exemplo, [9, 10, 21, 29, 30, 31]. Em [29], J. Little, introduziu alguns invariantes geométricos de segunda ordem, em que é possível dividir a superfície em região hiperbólica, elíptica e parabólica. Em [31], que Mochida, Ruas e Romero-Fuster (1995), usaram as técnicas de Teoria de Singularidades para estudar o contato da superfície M em $\mathbb{R}^4$ com hiperplanos. Tal contato é capturado pelas singularidades da família de função altura e mostraram que existem direções (**binormal**) no espaço normal $N_p M$ onde a função altura tem singularidades degeneradas do tipo $A_{\geq 2}$. O conjunto dos pontos parabólicos forma uma curva que pode ter, genericamente, singularidades de tipo Morse em pontos chamados de pontos de inflexão. Genericamente, o conjunto das singularidades A_3 também é uma curva regular na região hiperbólica, tangente a curva parabólica.

Em [9], Bruce e Nogueira em (1998), estudaram as projeções ortogonais de superfícies em $\mathbb{R}^4$ em 3-espço a fim de estudar o contato da superfície com retas. Mostraram que existe uma dualidade entre as direções binormais com as direções assintóticas em $T_p M$, isto é, certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de funções altura tem como dual certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de projeções ortogonais. Neste sentido, singularidades especiais acontecem e é possível associá-las de modo que a curva A_3 da função altura na direção binormal é também a curva de singularidades B_2 da projeção ortogonal na direção assintótica. Além disso, o ponto de tangência entre as curvas B_2 e parabólica é detectada em uma singularidade especial chamada $P_3(c)$. Em [10], Bruce e Tari (2002) mostram que as linhas assintóticas no ponto $P_3(c)$ tem um comportamento similar as cúspides de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Portanto, da mesma maneira do que foi feito para superfícies em $\mathbb{R}^3$ na vizinhança

das cúspides de Gauss, esta tese tem como o seu principal objetivo obter os lugares geométricos das singularidades locais e multi-locais que passam pelo ponto $P_3(c)$ e fazer uma classificação projetiva dos k -jatos de parametrizações da forma de Monge de uma superfície M de maneira semelhante em [45, 28]. Mais especificamente, no ponto $P_3(c)$ obtemos a forma normal no 4-jato dada por

$$(x^2 + x^2y + \alpha y^4, xy + \beta y^3).$$

Como pode ser vista no Capítulo 6. Como consequência, obtemos o principal resultado da tese que é apresentado no Capítulo 7.

Teorema: *Seja M uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^4$ dada na forma de Monge (f^1, f^2) em um ponto $P_3(c)$ com $j^4(f^1, f^2) = (x^2 + x^2y + \alpha y^4, xy + \beta y^3)$. Então os módulos α e β podem ser escritos como funções dos cross-ratios invariantes no ponto $P_3(c)$.*

As curvas locais e multi-locais no ponto $P_3(c)$ são descobertas ao estudar as adjacências dos germes para multigerms. Mostramos a existência de três curvas multi-locais e duas locais no ponto $P_3(c)$, sendo que uma dessas duas vem do 2-jato das inflexões das curvas assintóticas (curva flecnodal).

A classificação projetiva de germes de superfícies genéricas em $\mathbb{P}^4$ dadas na forma de Monge foi feita de uma maneira análoga a classificação projetiva em [19, 45, 46].

Desta maneira, essa tese está estruturada do seguinte modo:

Nos Capítulos 1 e 2, damos uma breve introdução à Teoria de Singularidades apresentando as noções básicas e resultados já estabelecidos de superfícies em $\mathbb{R}^4$. No Capítulo 3, introduzimos as noções de equações diferenciais binárias relacionadas com superfícies em $\mathbb{R}^4$ e apresentamos a existência da curva de pontos de inflexões das curvas assintóticas no ponto $P_3(c)$.

O Capítulo 4, é dedicado ao estudo das adjacências de singularidades locais de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 3 para singularidades de germes de aplicações $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e

$(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$. Estabelecidas as adjacências, obtemos, no Capítulo 5, as curvas genéricas robustas que vêm das singularidades locais e multi-locais das funções altura e projeção ortogonal.

No Capítulo 6, estudamos germe de superfícies genéricas imersas em $\mathbb{P}^4$ e obtemos uma classificação projetiva do k -jatos das parametrizações das superfícies dadas na forma de Monge e estudamos as singularidades das suas projeções centrais.

O Capítulo 7 contém o principal resultado desta tese. Introduzimos o conceito de cr-invariantes, calculamos no ponto $P_3(c)$ e mostramos que podemos recuperar os dois módulos α e β no 4-jato da parametrização projetiva da superfície feita no Capítulo 6. Os valores de α e β são responsáveis por determinar as configurações das curvas assintóticas na vizinhança do ponto $P_3(c)$.

Por fim, apresentamos no Apêndice algumas contas feitas usando o software MAPLE usadas nos vários capítulos desta tese.

Conceitos básicos da Teoria de Singularidades

Iniciamos nosso trabalho apresentando os conceitos básicos da teoria de singularidades que são fundamentais para o desenvolvimento dos outros capítulos. Como base utilizamos os livros descritos em [2, 23] e o artigo [55].

1.1 Germes e jatos

Sejam U e V dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que U é equivalente a V se existir um aberto W contendo p tal que $U \cap W = V \cap W$. Esta equivalência define uma relação de equivalência sob um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ contendo p . Uma classe de equivalência dessa relação é chamada de **germe** de U em p e é denotada por (U, p) .

Sejam $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ um conjunto finito de pontos distintos de $\mathbb{R}^n$ e U_i (resp. V_i), $i = 1, \dots, r$, um par de subconjuntos abertos e disjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $s_i \in U_i \cap V_i$.

Considere $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, r$ uma coleção de aplicações suaves e defina $f = (f_i) : \cup_{i=1}^r U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g = (g_i) : \cup_{i=1}^r V_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $f|_{U_i} = f_i$ e $g|_{V_i} = g_i$.

Dizemos que f é S -equivalente a g , e denotamos por $f \sim_S g$, se, e somente se, existe um conjunto aberto $W_i \subset U_i \cap V_i$ contendo s_i , $i = 1, \dots, r$, tal que $f_i|_{W_i} =$

$g_i|_{W_i}$. Essa é uma relação de equivalência e um **multi-germe** em S é, por definição, um representante de uma classe de equivalência sobre a relação de equivalência. Denotamos $(\mathbb{R}^n, S) = \cup_{i=1}^s (\mathbb{R}^n, s_i)$ e escrevemos $f = (f_i) : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^m$ para um multi-germe em S . Quando exigimos que um multi-germe fixe um ponto q na meta, escrevemos $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$.

Quando S consiste de um único elemento tais classes são chamadas de **monogermes** ou simplesmente **germe**; de dois elementos de **bigerme**; de três de **trigermes** e assim sucessivamente.

É suficiente estudarmos multi-germes onde $f(S) = 0$, pois a classificação de multi-germes com $f(S)$ finito e não unitário, pode ser reduzida a este caso. O germe de f em s_i é chamado de **ramo** e é denotado por $f_i : (\mathbb{R}^n, s_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Denotamos por $\mathcal{E}_n$ o anel local dos germes de funções $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}$ seu ideal maximal. Se $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais de $(\mathbb{R}^n, 0)$, então $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes de funções x_i , $i = 1, \dots, n$, isto é,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Para um inteiro positivo k , a k -ésima potência do ideal maximal $\mathcal{M}_n$ é o conjunto dos germes de funções $f \in \mathcal{M}_n$ com zero nas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k - 1$ na origem e é denotado por $\mathcal{M}_n^k$. Em outras palavras,

$$\mathcal{M}_n^k = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : i_1 + \cdots + i_n = k\}.$$

O conjunto de todos os germes suaves $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$, denotado por $\mathcal{E}_{n,p}$, é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre de posto p e é o produto direto de p -cópias de $\mathcal{E}_n$, isto é,

$$\mathcal{E}_{n,p} = \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n = (\mathcal{E}_n)^p.$$

Denotamos $\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n,p} = (\mathcal{M}_n^{k+1})^p$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k na origem são todas nulas.

O espaço dos k -jatos de germes de aplicações suaves f , denotado por $J^k(n, p)$, é o espaço vetorial real das aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde cada função coordenada

f_i de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ com o termo constante nulo. Podemos escrever

$$J^k(n, p) = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p} / \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n,p}.$$

Dado $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ suave temos definida uma aplicação

$$\begin{aligned} j^k f : U &\rightarrow J^k(n, p) \\ x &\mapsto j^k f(x). \end{aligned}$$

O termo $j^k f(x)$ é chamado de **k -jato** de f em x . Assim, dado $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$, o $j^k f(x)$ é simplesmente o polinômio de Taylor de f de grau k em x , sem o termo constante.

Seja $U^r = U \times \dots \times U$ o produto de r cópias de U e

$$U^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r) \in U^r \mid x_i = x_j \Leftrightarrow i = j\}.$$

Considere $\alpha : J^k(n, p) \rightarrow U$ a aplicação fonte e definimos a aplicação $\alpha^r : (J^k(n, p))^r \rightarrow U^r$ dada por $\alpha^r(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \mapsto (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_r)) = (x_1, \dots, x_r)$.

O **espaço dos multi-jatos** ${}_r J^k(n, p)$ pode ser definido como ${}_r J^k(n, p) = (\alpha^r)^{-1}(U^{(r)})$.

Notemos que $(J^k(n, p))^r \rightarrow U^r$ é uma aplicação fibrada e $f \in C^\infty$ induz uma secção

$$\begin{aligned} {}_r j^k f : U^{(r)} &\rightarrow {}_r J^k(n, p) \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r)). \end{aligned}$$

que dizemos ser o **r -multi k -jato** de f .

1.2 Grupos de Mather e espaços tangentes

Mather introduziu grupos especiais $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$ que atuam em $\mathcal{E}_{n,p}$ como segue.

O grupo $\mathcal{R}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. O grupo $\mathcal{L}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos $(\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e o grupo $\mathcal{A}$ é o produto

direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos as ações destes grupos sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ como

$$\begin{aligned} h \cdot f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R} \\ k \cdot f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L} \\ (h, k) \cdot f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

onde $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$. O grupo $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{L}$) é chamado da direita (resp. esquerda).

O grupo $\mathcal{C}$ é o grupo de germes de difeomorfismos $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ que são escritos na forma $H(x, y) = (x, \bar{H}(x, y))$ com $\bar{H}(x, 0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem. A ação de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ é definida como

$$H \cdot f(x) = H(x, f(x)), \quad H \in \mathcal{C}, \quad f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}.$$

O grupo $\mathcal{C}$ pode ser visto como o grupo de difeomorfismos $(\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ parametrizados por $x \in \mathbb{R}^n$. Denote $h_x(y) = \bar{H}(x, y)$. A fórmula antecedente pode ser escrita na forma

$$H \cdot f(x) = h_x(f(x)).$$

O grupo $\mathcal{K}$ é o grupo de germes de difeomorfismos $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ que são escritos na forma

$$H(x, y) = (h(x), \bar{H}(x, y)),$$

onde $h \in \mathcal{R}$ e $\bar{H}(x, 0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem. A ação de $\mathcal{K}$ sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ é definida como

$$H \cdot f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}.$$

Isto é, $H \cdot f(x) = h_x(f(h^{-1}(x)))$. O grupo $\mathcal{K}$ é chamado grupo de **contato**. O grupo $\mathcal{C}$ é um subgrupo normal de $\mathcal{K}$ e os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{A}$ podem ser identificados como subgrupos de $\mathcal{K}$. O grupo de contato tem uma interpretação geométrica. Sejam (X_i, Y_i) , $i = 1, 2$, dois pares de germes de variedades suaves em $\mathbb{R}^n, 0$. Dizemos que os pares tem o mesmo contato na origem se existe um difeomorfismo $h \in \mathcal{R}$ tal que $h(X_1) = X_2$ e $h(Y_1) = Y_2$. Suponha que cada X_i seja parametrizada por

$\phi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Y_i seja definida por uma submersão $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_i = g_i \circ \phi_i$, $i = 1, 2$. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.1. ([35]) *Os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) tem o mesmo contato na origem se, e somente se, f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. Dois germes f, g são distos **$\mathcal{G}$ -equivalentes**, e denotamos $f \sim g$, se eles pertencem a mesma $\mathcal{G}$ -órbita.

Seja $\mathcal{G}^k$ um subgrupo de um grupo de Mather $\mathcal{G}$ cujos elementos tem o k -jato a identidade. O grupo $\mathcal{G}^k$ é um subgrupo normal de $\mathcal{G}$. Defina $J^k\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{G}^k$. Os elementos de $J^k\mathcal{G}$ são os k -jatos de elementos de $\mathcal{G}$. A ação do grupo de Mather $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ induz uma ação de $J^k\mathcal{G}$ em $J^k(n, m)$ como segue. Para $j^k f \in J^k(n, m)$ e $j^k h \in J^k\mathcal{G}$,

$$j^k h \cdot j^k f = j^k(h \cdot f).$$

Para cada um dos $\mathcal{G}$ grupos de Mather definidos acima, estamos interessados em descrever o “espaço tangente” à $\mathcal{G}$ -órbita de f .

Considere a aplicação órbita de um grupo $\mathcal{G}$ em M

$$\begin{aligned} \gamma_f : \mathcal{G} &\rightarrow M \\ g &\mapsto \gamma_f(g) = g \cdot f. \end{aligned}$$

Observemos que a imagem de γ_f é a **$\mathcal{G}$ -órbita** de f , denotada por $\mathcal{G} \cdot f$.

Note que, para um grupo qualquer G de dimensão finita, as G -órbitas de uma ação de um grupo de Lie G sobre M , são variedades imersas. Assim, a derivada da aplicação órbita de G em M , $T_g\gamma_f$, leva T_gG sobre $T_f(G \cdot f)$. No entanto, um problema surge quando estamos em dimensão infinita, pois as órbitas não são variedades. Há uma formulação análoga a do caso finito. Para isso comecemos com a definição seguinte:

Definição 1.2.2. *Sejam $f \in \mathcal{E}_{n,p}$, $T\mathbb{R}^n$ e $T\mathbb{R}^p$ os fibrados tangentes de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente, π_p o germe da projeção natural e Tf a aplicação tangente induzida por f . Um germe de campo de vetores ζ ao longo de f , é um germe tal que $\pi_p \cdot \zeta = f$*

Denotamos o conjunto de todos os germes de campos de vetores ao longo de f por $\theta(f)$. Se denotarmos por $\theta(n)$ o conjunto de germes na origem de campos de vetores do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, campos de vetores ao longo da identidade $I_n : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$), um elemento $\xi \in \theta(n)$ é aplicado por tf em um campo de vetores de $\theta(f)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} tf : \theta(n) &\rightarrow \theta(f) \\ \xi &\mapsto tf(\xi) = Tf \cdot \xi. \end{aligned}$$

Escolhendo $(x_1, \dots, x_n)$ como um sistema local de coordenadas em $(\mathbb{R}^n, 0)$, $\theta(n)$ é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre com base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p\}$.

Por outro lado, se $\eta \in \theta(p)$, então temos uma aplicação

$$\begin{aligned} \omega f : \theta(p) &\rightarrow \theta(f) \\ \eta &\mapsto \omega(\eta) = \eta \cdot f. \end{aligned}$$

Da mesma forma, escolhendo $(y_1, \dots, y_p)$ como um sistema local de coordenadas em $(\mathbb{R}^p, 0)$, temos que $\theta(p)$ é um $\mathcal{E}_p$ -módulo livre gerado por $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n\}$. ωf é simplesmente a aplicação induzida por

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{E}_p &\rightarrow \mathcal{E}_n \\ g &\mapsto f^*(g) = g \cdot f. \end{aligned}$$

Definição 1.2.3. Os **espaços tangentes** às $\mathcal{G}$ -órbitas em f , onde $\mathcal{G}$ é um dos grupos de Mather são definidos como:

$$\begin{aligned} T\mathcal{R} \cdot f &= tf(\mathcal{M}_n \theta(n)), \\ T\mathcal{L} \cdot f &= \omega f(\mathcal{M}_p \theta(p)), \\ T\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_p) \cdot \theta(f), \\ T\mathcal{A} \cdot f &= T\mathcal{R} \cdot f + T\mathcal{L} \cdot f, \\ T\mathcal{K} \cdot f &= T\mathcal{R} \cdot f + T\mathcal{C} \cdot f. \end{aligned}$$

Os espaços tangentes acima se referem ao caso em que a fonte e a meta dos germes são fixas, i.e., $x = 0$ e $y = 0$. Se permitimos que estas variem, definimos os

espaços tangentes **estendidos** às $\mathcal{G}$ -órbitas em f , como sendo:

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}_e \cdot f &= tf(\mathcal{E}_n\theta(n)), \\ T\mathcal{L}_e \cdot f &= \omega f(\mathcal{E}_p\theta(p)), \\ TC_e \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_p) \cdot \theta(f), \\ T\mathcal{A}_e \cdot f &= T\mathcal{R}_e \cdot f + T\mathcal{L}_e \cdot f, \\ TK_e \cdot f &= T\mathcal{R}_e \cdot f + TC_e \cdot f. \end{aligned}$$

A $\mathcal{G}$ -codimensão de f é definida como

$$\text{codim}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G} \cdot f} \right)$$

e a $\mathcal{G}_e$ -codimensão de f é definida como

$$\text{codim}(f, \mathcal{G}_e) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G}_e \cdot f} \right).$$

Um germe f é dito $k - \mathcal{G}$ -**determinado** se, todo g com $j^k g(0) = j^k f(0)$ é $\mathcal{G}$ -equivalente a f . O k -jato de f é então chamado de um jato suficiente. O menor inteiro k com esta propriedade é chamado de grau de determinação de f . Assim dizemos que f é $\mathcal{G}$ -**finitamente determinado** se é $k - \mathcal{G}$ -determinado para algum inteiro k .

Teorema 1.2.4. ([55]) *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado;
2. para algum k , $T\mathcal{G} \cdot f \supset \mathcal{M}_n^k \cdot \theta(f)$;
3. para algum k , $T\mathcal{G}_e \cdot f \supset \mathcal{M}_n^k \cdot \theta(f)$;
4. $\dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G} \cdot f} \right) < \infty$;
5. $\dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G}_e \cdot f} \right) < \infty$.

1.3 Desdobramentos versais

Nesta seção introduziremos o conceito de desdobramento versal de um germe f finitamente determinado.

Definição 1.3.1. Um **desdobramento** a s -parâmetros de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é um germe

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \\ (x, u) &\longmapsto (F_u(x), u) \end{aligned}$$

tal que $F_0(x) = f(x)$ denotado por (s, F) . O germe F_u é denominado uma **deformação** a s -parâmetros de f .

Sobre a definição anterior é importante esclarecer o seguinte sobre a deformação. Seja $G : U \times W \rightarrow V$ um representante do germe F_u , onde $U \times W$ é uma vizinhança da origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ e V é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^p$. Denote por $G_u : U \rightarrow V$ a aplicação suave dada por $G_u(x) = F_u(x)$. Então $G_0(0) = 0$, mas $G_u(0)$ não é necessariamente a origem em $\mathbb{R}^p$ para $u \neq 0$. Isto significa que a fibra $0 \times \mathbb{R}^s$ não é necessariamente preservada por F . Além disso, as singularidades de F_u podem não estar na origem. Por isso que precisamos considerar os grupos estendidos $\mathcal{G}_e$.

Definição 1.3.2. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather e I a identidade em $\mathcal{G}$.

(i) Um morfismo entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) é um par $(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ com $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathcal{G}, I)$, $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$, tal que

$$F_u = \alpha(u) \cdot g_{\psi(u)}.$$

O desdobramento (a, F) é dito ser **induzido** de (b, G) por (α, ψ) .

(ii) Dois desdobramentos (a, F) e (b, G) são **$\mathcal{G}$ -equivalentes** se existe um morfismo $(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ onde ψ é invertível.

- (iii) Um desdobramento (a, F) de um germe f é dito ser **$\mathcal{G}$ -versal** se todo desdobramento (b, G) de f pode ser induzido de (a, F) .
- (iv) Um desdobramento (a, F) de f é dito **$\mathcal{G}$ -trivial** se é $\mathcal{G}$ -equivalente ao desdobramento constante (a, f) .
- (v) O germe f é dito **$\mathcal{G}$ -estável** se todos os seus desdobramentos são triviais.

Uma definição análoga pode ser feita para o grupo estendido $\mathcal{G}_e$ substituindo $\mathcal{G}$ por $\mathcal{G}_e$ na Definição 1.3.2.

Antes de enunciar o teorema fundamental que caracteriza um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -versal F de f , enunciamos uma proposição que garante a existência de um desdobramento versal de f .

Proposição 1.3.3. ([55]) *Um germe f possui um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se, $\text{codim}(f, \mathcal{G}_e) < \infty$.*

Teorema 1.3.4. ([55]) *O desdobramento (s, F) é $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se,*

$$T\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_{n,p},$$

onde $\dot{F}_j(x) = \frac{\partial F_u}{\partial u_j}(x, 0)$, para $j = 1, \dots, s$.

Seja $k = \text{codim}(f, \mathcal{G}_e)$, então o número mínimo de parâmetros para um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -versal é k . Neste caso, o desdobramento a k -parâmetros é dito **mini-versal**.

1.4 Genericidade e transversalidade

Fortemente relacionado com o conceito de versalidade está o conceito de genericidade. Dizemos que uma propriedade é genérica em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, se ela se verifica para um conjunto residual de aplicações. Lembremos que um conjunto residual é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos.

Definição 1.4.1. Uma propriedade (P) em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é **genérica** se o conjunto de todos os $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ satisfazendo (P) contém um conjunto A que é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos.

O resultado central neste contexto é conhecido como teorema de transversalidade de Thom (ver por exemplo [23]).

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ função suave e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade suave. Dizemos que f é **transversal a Y em $x \in \mathbb{R}^n$** , se $f(x) \notin Y$ ou se $f(x) \in Y$ e

$$f'(x) \cdot (T_x \mathbb{R}^n) + T_{f(x)} Y = \mathbb{R}^p.$$

Dizemos que f é **transversal a Y** , e escrevemos $f \pitchfork Y$, se f é transversal a Y em todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 1.4.2. (i) A equação de transversalidade implica que $\text{codim } Y \leq n$.

Se $\text{codim } Y > n$, então se f é transversal a Y temos necessariamente que $f(\mathbb{R}^n) \cap Y = \emptyset$.

(ii) Se Y é um ponto $\{c\}$, então f transversal a Y se, e somente se, c é valor regular de f .

Teorema 1.4.3. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicação suave e $Y \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade suave com f transversal a Y . Então $X = f^{-1}(Y)$ é uma subvariedade suave e $\text{codim}(X, \mathbb{R}^n) = \text{codim}(Y, \mathbb{R}^p)$.

Teorema 1.4.4. Transversalidade de Thom: Sejam $X_1, X_2, \dots, X_s$ subvariedades diferenciáveis de $J^k(n, p)$. O conjunto de aplicações C^∞ , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, para as quais $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(n, p)$ é transversal a $X_1, X_2, \dots, X_s$ é residual em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Precisamos também do seguinte resultado de Montaldi ([36]).

Teorema 1.4.5. Sejam X, Y, Z, U variedades diferenciáveis e $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$. Se $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação diferenciável, então dada uma aplicação $g : X \rightarrow Y$ pode-se definir $F_g : X \times U \rightarrow Z$ por $F_g(x, u) = F(g(x), u)$.

- (i) Suponha que $F_g : X \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação localmente $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^k$ -invariante de $J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$ a aplicação k -jato $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$ é transversal a S .
- (ii) Suponha que $F_g : X \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação localmente $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^k$ -invariante no espaço dos multi-jatos ${}_r J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$ a aplicação multi-jato $j_1^k F_g : X^{(r)} \times U \rightarrow {}_r J^k(X, Z)$ é transversal a S .

1.5 Família de germes de funções

Vamos considerar agora o caso $p = 1$. Chamamos a deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ de um germe $f = F|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ de **família de germes de funções**. Em nosso trabalho, algumas vezes referimos F acima como um desdobramento de f .

Definição 1.5.1. Duas famílias de germes de funções F e $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ são $P - \mathcal{R}^+$ -**equivalentes** se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0)$ da forma $\Phi(x, u) = (\phi(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(x, u) = F(\Phi(x, u)) + c(u).$$

A definição acima pode ser estendida para o caso onde F e G não têm o mesmo espaço fonte. Considere $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $n \neq p$. Podemos adicionar uma forma quadrática não-degenerada $Q(y_{n+1}, \dots, y_{n+p})$ para F e uma forma quadrática não-degenerada $Q'(z_{p+1}, \dots, z_{n+p})$ para G e considerar duas famílias de germes $F + Q$ e $G + Q'$ de $(\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Definição 1.5.2. Dizemos que as duas famílias de germes de funções F e G são **estáveis** $P - \mathcal{R}^+$ -equivalentes se $F + Q$ e $G + Q'$ são $P - \mathcal{R}^+$ -equivalente.

Teorema 1.5.3. ([55]) *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ seja um germe $\mathcal{R}$ -finitamente determinado com $1 \leq \text{codim}(f, \mathcal{R}_e) \leq 4$. Então todo $\mathcal{R}^+$ -desdobramento mini-versal de f é $P - \mathcal{R}^+$ -equivalente a uma das seguintes famílias de germes, onde $Q(x_r, \dots, x_n) = \pm x_r^2 \pm \dots \pm x_n^2$:*

- (1) $A_2 : Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^3 + u_1 x_1$;
- (2) $A_3 : Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$;
- (3) $A_4 : Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$;
- (4) $D_4^- : Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 - x_1 x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2 x_2 + u_1 x_1$;
- (5) $D_4^+ : Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 + x_2^3 + u_3 x_1 x_2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$.

Aspectos locais de superfícies em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados que descrevem o contato de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ com hiperplanos e retas (estes são objetos “planos”). O contato da superfície com esses objetos é um invariante afim ([7]) e podem ser capturados pelas singularidades de famílias de funções altura e das projeções ortogonais, respectivamente. Exibimos os resultados que caracterizam as propriedades geométricas afim da superfície provenientes das singularidades locais das famílias descritas acima. Posteriormente, mostramos que as informações multi-locais dessas famílias também exibem caracterizações afins em nossa superfície. Usamos como base os trabalhos de [9, 23, 29, 31].

Seja M uma superfície regular (de classe C^∞) imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$. Dado um ponto $p \in M$ considere o círculo unitário em $T_p M$ parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi]$. Os vetores de curvatura $\eta(\theta)$ da seção normal de M pelo hiperplano $\langle \theta \rangle \oplus N_p M$ formam uma elipse no plano normal $N_p M$ a M no ponto p . Esta elipse é chamada de **elipse de curvatura** ([29]). Um ponto $p \in M$ é classificado dependendo da posição de p em relação a elipse de curvatura em p . O ponto p é chamado ponto **elíptico** / **parabólico** / **hiperbólico** se p esta dentro / sob / fora da elipse de curvatura em p .

Em cada ponto $p \in M$, a imersão pode ser dada localmente na forma de Monge,

isto é,

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f^1(x, y), f^2(x, y)), \end{aligned}$$

onde $f^1, f^2 \in \mathcal{M}_2^2$.

A elipse de curvatura, na origem p , é a imagem do círculo unitário em $T_p M$ por uma aplicação formada de um par de formas quadráticas (Q_1, Q_2) onde $Q_1 = j^2 f^1(0)$ e $Q_2 = j^2 f^2(0)$. O par é o 2-jato de aplicação $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ (sem os termos constante e linear) cujo gráfico, num sistema de coordenadas ortogonais, é localmente a superfície M .

Como a geometria plana de superfícies, (ou seja, a geometria vinda do estudo contato da superfície com retas e hiperplanos) é invariante por mudanças afins ([7]), uma abordagem alternativa para estudar a geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$ é dado em ([9]), onde usa-se o pencil das formas binárias determinado pelo par (Q_1, Q_2) . A cada ponto da superfície temos um par

$$(Q_1, Q_2) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, lx^2 + 2mxy + ny^2).$$

Uma forma binária $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ é representada pelos coeficientes $(A : B : C) \in \mathbb{P}^2$, onde a cônica $\Gamma : B^2 - AC = 0$ representa as formas quadráticas degeneradas.

Se as formas Q_1 e Q_2 são independentes, elas determinam uma reta no plano projetivo $\mathbb{R}P^2$. Esta reta intersecta a cônica Γ em 0,1,2 pontos de acordo se $\delta(p) < 0, = 0, > 0$, onde

$$\delta(p) = (an - cl)^2 - 4(am - bl)(bn - cm).$$

O ponto p é elíptico/parabólico/hiperbólico se $\delta(p) < 0 / = 0 / > 0$ ([9]). O conjunto dos pontos em M onde $\delta = 0$ é chamado do **conjunto parabólico** e é denotado por Δ , i.e.,

$$\Delta = \{p \in M \mid \delta(p) = 0\}.$$

Se Q_1 e Q_2 são dependentes em um ponto p , a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

tem posto 1 e o ponto p é chamado **ponto de inflexão**.

Temos a ação de $\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ sobre os pares (Q_1, Q_2) , onde $GL(2, \mathbb{R})$ é o grupo linear das matrizes 2×2 . As $\mathcal{G}$ -órbitas e a caracterização dos pontos correspondentes de M são como segue ([23]):

(x^2, y^2)	ponto hiperbólico
$(xy, x^2 - y^2)$	ponto elíptico
(x^2, xy)	ponto parabólico
$(x^2 \pm y^2, 0)$	ponto de inflexão
$(x^2, 0)$	ponto de inflexão degenerado
$(0, 0)$	ponto de inflexão degenerado

2.1 A família de funções altura

Em [35, 36] Montaldi estuda o contato de $M \subset \mathbb{R}^4$ com esferas. Em [31] os autores estudaram o contato da superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ com hiperplanos. Este contato é caracterizado pelas singularidades da família de funções altura a qual é definida como

$$\begin{aligned} H : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, v) &\mapsto H(p, v) = \langle p, v \rangle \end{aligned}$$

onde S^3 denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^4$. Se fixar v , a função altura $h_v(p) = H(p, v)$ é singular em p se, e somente se, $v \in N_p M$.

Para uma imersão genérica de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ as singularidades que poderão ocorrer para a família de funções altura h_v são as singularidade de tipo A_k , $1 \leq k \leq 4$ ($\text{codim}(h_v, \mathcal{R}_e) = k - 1$) e de tipo D_4 ($\text{codim}(h_v, \mathcal{R}_e) = 3$) para o caso

local, e as singularidades do tipo $2A_1$, $3A_1$, $4A_1$, A_1A_2 , A_1A_3 , $2A_1A_2$ e A_2A_2 para o caso multi-local ([2, 34]). Disto temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. ([31])

1. Se $\delta(p) < 0$, então p é um ponto crítico não degenerado de h_v , para todo $v \in N_pM$.
2. Se $\delta(p) > 0$, então existem exatamente duas direções $v_1, v_2 \in N_pM$, chamadas de **direções binormais**, tais que p é ponto crítico degenerado de h_{v_i} para $i = 1, 2$.
3. Se $\delta(p) = 0$, então existe uma única direção binormal $v \in N_pM$, tal que p é ponto crítico degenerado de h_v .

O kernel da Hessiana da função altura h_v ao longo de uma direção binormal v é chamada **direção assintótica** associada a direção binormal ([31]). (As direções assintóticas são chamadas de direções conjugadas em [29].) As direções assintóticas são as direções ao longo de θ onde o vetor de curvatura $\eta(\theta)$ é tangente a elipse de curvatura ([21]). Então se p não é um ponto de inflexão, existem 2/1/0 direções assintóticas em p , se p é **hiperbólico/parabólico/elíptico**. As configurações genéricas das linhas assintóticas são dadas em [10, 21].

Foi provado em [31] que o conjunto parabólico Δ é uma curva suave em uma superfície genérica M . O conjunto de singularidades A_3 da função altura, chamado **curva** A_3 , é genericamente uma curva suave em M e as singularidades A_4 da função altura ocorrem em pontos isolados sobre a curva A_3 . Além disso, a curva parabólica e a curva A_3 são genericamente duas curvas tangentes de contato de ordem 2 (veja Figura 2.1) nos seus pontos de interseção. Vale salientar também que, como a família h é a 3-parâmetros, as singularidades de $\text{codim}(h_v, \mathcal{R}_e^+) = 2$ ocorrem em curvas na superfície e as de $\text{codim}(h_v, \mathcal{R}_e^+) = 3$ aparecem em pontos isolados sobre essas curvas.

Figura 2.1: Curvas e pontos especiais sobre M por meio de H .

2.2 A projeção ortogonal

A projeção ortogonal de M em um hiperplano capta o contato de M com retas. Esse contato é caracterizado pelas singularidades da família de projeções ortogonais $P : M \times S^3 \rightarrow TS^3$ com

$$P(p, u) = (u, p - \langle p, u \rangle u),$$

onde $u \in S^3$. Denotamos a segunda componente de P por $P_u(p) = p - \langle p, u \rangle u$. Para u fixado, a projeção pode ser vista localmente em torno de $p \in M$ como um germe $P_u : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$. Para uma superfície genérica, pelos resultados de Montaldi ([36]) o germe P_u tem somente singularidades de $\text{codim}(P_u, \mathcal{A}_e) \leq 3$, ver Tabela 2.1 para singularidades locais e Tabela 2.2 para as singularidades multi-locais.

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -codimensão
imersão	$(x, y, 0)$	0
Crosscap	(x, y^2, xy)	0
$S_k^\pm$	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y)$	$k = 1, 2, 3$
$B_k^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1})$	$k = 2, 3$
$C_3^\pm$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^3y)$	3
$H_k^\pm$	$(x, xy \pm y^{3k-1}, y^3)$	$k = 2, 3$
$P_3(c)$	$(x, xy + y^3, xy^2 + cy^4), c \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$	3

Tabela 2.1: Singularidades genéricas de projeções ortogonais de M em hiperplanos ([32]).

A projeção P_u é singular se, e somente se, $u \in T_p M$. A singularidade é um cross-cap a menos que u seja uma direção assintótica em p ([9],[32]). Para uma superfície genérica M , as singularidades de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 de P_u ocorrem em curvas sobre M e as singularidades de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 3 ocorrem em pontos isolados sobre estas curvas.

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -codimensão
$[A_1^\pm]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 \pm Y^2)$	1
$[A_2]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 + Y^3)$	2
$[A_3^\pm]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 \pm Y^4)$	3
$(A_0 S_0)_1$	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^3, X)$	1
$(A_0 S_0)_2$	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^5, X)$	2
$(A_0 S_0)_3$	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^7, X)$	3
$A_0 S_1^\pm$	$(x, y, 0; Y^3 \pm X^2 Y, Y^2, X)$	2
$A_0 S_2$	$(x, y, 0; Y^3 + X^3 Y, Y^2, X)$	2
$A_0 S_0 A_1^\pm$	$(x, y, 0, X, XY, Y^2 \pm X^2)$	2
$A_0 S_0 A_2$	$(x, y, 0, X, XY, Y^2 + X^3)$	3
	$(x, y, 0, X, Y^2, X^2 \pm Y^4)$	3
$A_0^3 A_1$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^2)$	1
$A_0^3 A_2$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^3)$	2
$(A_0^2 A_1^\pm) A_0$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, X^2 \pm Y^2)$	2
$A_0^3 A_3$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^4)$	3
$(A_0^2 A_\infty)(A_0) A_2$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, XY + X^3)$	3
$(A_0^2 A_2)(A_0)$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, X^2 + Y^3)$	3

Tabela 2.2: Singularidades genéricas multi-locais de projeções ortogonais de M em hiperplanos ([27],[56]).

2.3 Dualidade

Embora as famílias de função altura e de projeções ortogonais estudem o contato da superfície com objetos geométricos diferentes (hiperplanos e retas) elas estão in-

timamente relacionadas por meio de uma dualidade existente entre os conjunto de parâmetros dessas famílias ([9]). Cada uma das famílias fornece uma estratificação dos espaços de parâmetros S^3 , dada pelos seus conjuntos de bifurcação. Há certos estratos que estão relacionados. Apresentamos os aspectos geométricos que as relacionam.

Definição 2.3.1. *Chamamos de curva S_2 (resp. curva B_2 e H_2) o fecho do conjunto dos pontos p em M tal que existe uma projeção P_u que tenha uma singularidade S_2 (resp. B_2 , H_2) em p .*

Desta maneira, para uma superfície genérica, as curvas e pontos especiais capturadas pelas singularidades de P_u são como na Figura 2.2, encontradas em [9] e descritas da seguinte forma:

1. A curva B_2 das singularidades de P_u , com u assintótica, coincide com a curva A_3 da função altura ao longo da direção binormal associada a direção assintótica.
2. a singularidade A_4 de h_v , em geral, não está relacionada com a singularidade B_3 de P_u .
3. A singularidade C_3 de P_u ocorre no ponto de intersecção da curva S_2 e a curva B_2 . A curva S_2 , em geral, não está relacionada com as singularidades da função altura.
4. A curva H_2 é precisamente o conjunto parabólico Δ .
5. A curva B_2 é tangente a curva Δ nos pontos do tipo $P_3(c)$ ([10]). As duas direções assintóticas podem ser coloridas na região hiperbólica, então temos duas diferentes cores para a curva B_2 . Ela muda de cor exatamente no ponto $P_3(c)$ (veja, Figura 2.2).
6. Os pontos de inflexão são as singularidades D_4 da função altura.

7. Nos pontos de inflexão, Δ possui uma singularidade Morse e a configurações das curvas B_2 e S_2 nestes pontos são dadas em [9].

Figura 2.2: Curvas e pontos especiais sobre M .

Equações diferenciais implícitas

Neste capítulo, consideramos as equações diferenciais implícitas (EDIs) sobre as superfícies em $\mathbb{R}^4$. Em um primeiro instante, apresentamos todos os conceitos e noções sobre as (EDI) e conseqüentemente os resultados aplicados a superfícies em $\mathbb{R}^4$.

3.1 Equações diferenciais implícitas (EDIs)

Uma **equação diferencial implícita** (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0, \quad (3.1)$$

onde F é uma função suave de $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y) \in U$, um aberto de $\mathbb{R}^2$, e com $p = dy/dx$.

Em pontos onde $F_p \neq 0$ a equação pode ser localmente reduzida a forma

$$p = \frac{dy}{dx} = g(x, y).$$

Note que, neste caso, para cada ponto $(x, y) \in U$, existe uma única direção que satisfaz (3.1). Podemos estudá-las usando a teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO).

No entanto, quando $F_p = 0$ em um ponto (x_0, y_0, p_0) , a equação pode definir localmente mais do que uma direção no plano (x, y) .

Seja $(x_0, y_0) \in U$ e suponha que para p_0 tal que $F = F_p = 0$ em (x_0, y_0, p_0) temos $F_{pp} \neq 0$. Então a equação pode ser reescrita, em alguma vizinhança aberta de (x_0, y_0, p_0) , na forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (3.2)$$

onde os coeficientes a , b , c são funções suaves de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que não se anulam simultaneamente em uma vizinhança de (x_0, y_0) (ver [13]). Podemos também estender essa classe de equação, incluindo aquelas em que os coeficientes se anulam simultaneamente em um ponto. As equações da forma (3.2) são chamadas **equações diferenciais binárias (EDBs)**.

Seja $\delta = b^2 - ac$. Uma EDB define duas direções distintas em pontos $(x, y) \in U$ quando $\delta > 0$ e nenhuma direção em ponto quando $\delta < 0$. O conjunto

$$\Delta = \{(x, y) \in U \mid \delta(x, y) = 0\}$$

é chamado de **discriminate** da EDB. Se os coeficientes da equação não se anulam simultaneamente em um ponto, então podemos assumir localmente que $a \neq 0$ e expressamos a equação como uma quadrática em $p = dy/dx$. Neste caso, a EDB define uma única direção em pontos de Δ . Se todos os coeficientes se anulam simultaneamente em um ponto, então Δ é necessariamente singular e todas as direções no plano são soluções neste ponto.

Longe do discriminante, uma EDB determina um par de folheações transversais $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, ou nenhuma folheação. Desta forma, todas as características importantes das curvas soluções ocorrem ao longo do discriminante. A configuração da solução da equação (3.2) é a tripa $\{\Delta, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$. Se Δ é uma curva suave, então as curvas soluções forma uma família de cúspides ao longo desta curva, exceto em pontos em que a única direção de solução é tangente ao Δ .

Embora as curvas soluções são singulares em todos os pontos do discriminante, definimos uma **singularidade da EDB** como sendo um ponto em que o discriminante é propriamente singular, chamado de **singularidade dobrada** (existe outro

tipo de singularidade da EDB que iremos definir na seção seguinte.)

Iremos nos concentrar somente nas singularidades isoladas, que iremos assumir, sem perda de generalidade serem na origem e considerar sempre a, b, c em (3.2) como germes de funções suaves e denotaremos por $\omega = (a, b, c)$ o germe da EDB (3.2).

3.1.1 O levantamento do campo bi-direcional

O método do levantamento do campo bi-direcional definido pela equação (3.2) consiste em desdobrar uma EDB em uma EDO sobre o fibrado cotangente projetivizado $PT^*\mathbb{R}^2$.

Considere o fibrado cotangente projetivizado $PT^*\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P$, que é a variedade de elementos de contato do plano. Se tomarmos cartas afins $p = dy/dx$ para $\mathbb{R}P$, então os elementos da variedade de contato pode ser visto como $\mathbb{R}^3$ munido com a estrutura canônica de contato determinada pela 1-forma de contato $dy - p dx$. A projeção associada a estrutura de contato é

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, p) &\mapsto (x, y).\end{aligned}$$

Essa projeção levanta uma EDB de $\mathbb{R}^2$ para uma EDO sobre $\mathbb{R}^3$.

Se os coeficientes da EDB (3.2) não se anulam simultaneamente podemos assumir que $a \neq 0$ e escrever (3.2) como $F = 0$ em que

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y)$$

e $p = dy/dx$. O conjunto de direções definido por (3.2) formam uma superfície

$$M = F^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Em geral M é suave e a imagem de $\pi|_M$ é um recobrimento duplo de regiões onde $b^2 - ac > 0$. O conjunto crítico de $\pi|_M$ é dado por pontos onde $F = F_p = 0$ (chamado de **criminante**) e nestes pontos a aplicação π deixa de ser um difeomorfismo local. Existe uma involução σ em M que alterna pontos com a mesma imagem sobre π .

Se a superfície M é suave então em cada ponto (x, y, p) de M podemos associar uma direção tangente a M que se projeta sobre uma reta que passa por (x, y) com direção p . Explicitamente, seja (x, y) um ponto de uma curva solução de (3.2), no qual a direção tangente é p . O plano que possui esta direção tangente e é paralelo ao eixo p é chamado de **plano de contato**. O plano tangente à superfície M em um ponto (x, y, p) é diferente do plano de contato sempre que $F_p \neq 0$, e assim a intersecção desses dois planos é uma reta. Logo, os planos tangentes e os planos de contato em todos os pontos se intersectam originando retas, dando origem assim a um *campo de direções*, que é tangente à superfície M e determina uma EDO nesta superfície.

Lema 3.1.1. *O campo levantado associado ao campo bi-direcional definido pela equação (3.2) pode ser escrito na forma*

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p},$$

onde $F = ap^2 + 2bp + c$.

Demonstração. Veja por exemplo [12] para uma demonstração. □

As configurações das curvas soluções de (3.2) em um ponto do discriminante são determinados pelo par (ξ, σ) . Se o plano de contato no ponto é tangente a M então o campo levantado anula-se, isto é, tem singularidades. Isto acontece genericamente em pontos isolados, incluindo em um levantamento da singularidade dobrada. A projeção de tais pontos são chamados **singularidades bem-dobradas** se ξ tem um zero elementar com separatriz transversal ao discriminante e não tangente a projeção a zero. Assim uma singularidade da EDB é, em geral, *uma singularidade do discriminante ou uma singularidade da projeção do campo levantado*.

Se o campo de vetor ξ é regular então o modelo suave (i.e. mudança de coordenadas suaves) na vizinhança de um ponto regular no discriminante é dado por

$$dy^2 - xdx^2 = 0$$

(veja [15]). As curvas integrais são famílias de cúspides. Um modelo suave de uma vizinhança de uma singularidade bem-dobrada é dado por

$$dy^2 - (y - \lambda x^2)dx^2 = 0$$

(veja [16, 17]).

Nós referimos ao módulo suave λ como o **índice de módulo** da singularidade. Existem 3 modelos topológicos estáveis (i.e. mudanças de coordenadas topológicas): **sela bem-dobrada** ($\lambda < 0$), **nó bem-dobrado** ($0 < \lambda < 1/16$) e **foco bem-dobrado** ($\lambda > 1/16$), ocorrendo quando o campo levantado ξ tem uma sela, um nó ou um foco respectivamente. Essas são ilustradas na Figura 3.1.

Figura 3.1: sela bem-dobrada (esquerda), nó bem-dobrado (centro) e foco bem-dobrado (direita)

A Figura 3.2 mostra o método do campo levantado. Este método pode ser estendido para EDBs com coeficientes que se anulam simultaneamente. Neste caso, podemos considerar a superfície

$$\bar{M} = \{(x, y, [\alpha : \beta]) \in (\mathbb{R}^2, 0) \times \mathbb{R}P^1 \mid a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0\}.$$

Note que todas as direções em $(0, 0)$ são soluções da equação (3.2) no ponto $(0, 0)$. Iremos considerar as EDBs que esse caso ocorre em um ponto isolado que podemos tomar, sem perda de generalidade, na origem. O conjunto

$$\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{R}P^1$$

é chamado de **fibra excepcional**. O termo **criminante** representa o fecho do conjunto $\pi^{-1}(\Delta) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}P^1)$. Na carta afim $p = \beta/\alpha$ de $\mathbb{R}P^1$ (também devemos considerar a carta $q = \alpha/\beta$) escrevemos a equação da forma

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0.$$

Figura 3.2: O método do campo levantado: O criminante (esquerda superior), uma sela dobrada (direita superior), um nó dobrado (esquerda inferior) e um foco dobrado (direita inferior).

O Lema 3.1.1 nos fornece o campo levantado ξ em $\bar{M}$. O campo ξ pode ser estendido suavemente a fibra excepcional que é uma curva integral de ξ . O Lema 3.1.1 ainda garante que os zeros de ξ são dados por

$$F = F_p = F_x + pF_y = 0. \quad (3.3)$$

Além disso, quando a EDB tem singularidade isolada, podemos restringir a atenção aos zeros de ξ na fibra excepcional. Note que $F(0, 0, p) = F_p(0, 0, p) = 0$. Assim os zeros de ξ na fibra excepcional são dados pelas raízes da cúbica

$$\phi(p) = (F_x + pF_y)(0, 0, p).$$

Em [12] é mostrado que a superfície $\bar{M}$ é suave se, e somente se, δ tem singularidade Morse. Além disso, em [5] se δ tem uma A_k -singularidade, então a superfície $\bar{M}$ tem A_{k-1} -singularidade isolada na fibra excepcional e é suave nos outros lugares. Então, no caso de EDBs com discriminante tendo singularidade cúspide, a superfície $\bar{M}$ tem uma singularidade Morse em um ponto da fibra excepcional. Como toda a

fibra excepcional $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ esta contida na superfície $\bar{M}$ segue que ela tem uma singularidade A_1 (cone).

3.1.2 Dualidade

Considere as condições (3.3) de um campo levando ξ para a superfície M e $F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + b(x, y)p + c(x, y)$, com $p = dy/dx$. Recordamos que o campo levantado ξ associado ao campo bi-direcional definido pela equação F pode ser tomado da forma

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p}.$$

O campo ξ é singular se $F = F_p = F_y + p F_x = 0$.

A condição $F = 0$ indica simplesmente que os seus zeros estão na superfície. Já a condição $F_p = 0$ indica os zeros do discriminante. Por fim, a condição $F_x + p F_y = 0$ indica onde ocorrem as inflexões das curvas integrais da EDB. De fato, pela diferenciação da expressão $F(x, y, p) = 0$ com respeito a x temos

$$F_x + \frac{dy}{dx} F_y + \frac{dp}{dx} F_p = 0.$$

A condição de inflexão é $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, mas como $p = dy/dx$ implica que $\frac{dp}{dx} = 0$, isto é, inflexões ocorrem quando

$$F_x + p F_y = 0.$$

A dualidade das EDI pode ser dada pelas transformações Legendrianas. Uma transformação Legendriana em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$x = P, y = XP - Y, p = X.$$

A transformação Legendriana de uma EDI é uma outra EDI da forma

$$G(X, Y, P) = F(P, XP - Y, X) = 0.$$

Por outro lado, a transformação Legendriana de uma EDB não é em geral uma outra EDB. A transformação Legendriana de EDBs são estudadas em [4, 11, 49].

As curvas integrais das transformação Legendriana de uma EDI são duais a aquelas da EDI original (veja, por exemplo, [1]), isto é, se o plano é considerado como sendo parte do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, então a curva representando todas as linhas tangentes da solução da EDI $F = 0$ é uma curva solução da transformação Legendriana $G = 0$, e vice e versa.

Este fato é resultado de que a transformação Legendriana da 1-forma $dy - p dx$ é a 1-forma $dY - PdX$, então a transformação Legendriana preserva a estrutura de contato em $\mathbb{R}^3$ que apresentamos nas seções anteriores. Em [11] mostrou que o dual de singularidade bem-dobrada é outra singularidade bem-dobrada, isto é, tais pontos são auto-dual.

Recordamos que o dual de uma inflexão é uma cúspide. Como sabemos as singularidades dobradas estão no discriminante que é o conjunto de cúspides (que é uma curva suave) de curvas soluções. Segue que existe uma curva suave de pontos de inflexões tangente ao conjunto de cúspide (a curva discriminante) em uma singularidade bem-dobrada.

Como a curva de inflexões é preservada por mudanças afins, a transformação Legendriana de uma EDI é preservada por mudanças afins. Portanto, quando considerar a transformação Legendriana, é normal considerar formas normais afins na EDI.

3.2 As EDBs em superfícies em $\mathbb{R}^4$

Como já mencionamos anteriormente o contato de uma superfície M imersas em $\mathbb{R}^4$ com linhas é determinado pela família de projeções ortogonais

$$\begin{aligned} P : M \times S^3 &\rightarrow TS^3 \\ (p, v) &\mapsto (v, p - \langle p, v \rangle v), \end{aligned}$$

Para a maioria (respectivamente, todas) as direções tangentes v em um ponto hiperbólico (respectivamente, elíptico) de M a projeção $P_v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é localmente

estável. Em um ponto hiperbólico existem duas direções de projeção que chamamos de direções assintóticas a qual a singularidade de P_v é mais degenerada que um cross-cap.

Em [9], mostra-se que o contato da superfície M com linhas também pode ser determinado por um pencil de formas binárias. Suponhamos que a superfície possa ser escrita localmente na forma de Monge $(x, y, f^1(x, y), f^2(x, y))$ com 2-jato de (f^1, f^2) dado por

$$(Q_1, Q_2) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, lx^2 + 2mxy + ny^2).$$

Projetando ao longo da direção tangente $(\alpha, \beta, 0, 0)$ obtemos um germe de aplicação com 2-jato $(-\beta x + \alpha y, Q_1(x, y), Q_2(x, y))$. Como $[A : B]$ varia na reta projetiva $\mathbb{R}P^1$, o 2-jato da projeção define um pênclil de formas binárias com $-\beta x + \alpha y$ como um fator. Isso dá uma reta em $\mathbb{R}P^2$, uma para cada direção, parametrizada por $[s : t] \mapsto [-\beta s : (\alpha s - \beta t)/2 : \alpha t]$ que corresponde a $(-\beta x + \alpha y)^2$. Portanto, o pencil de formas quadráticas corresponde a linhas tangentes a cônica de formas quadráticas degeneradas.

Proposição 3.2.1. ([9]) *A direção de projeção produz um cross-cap a menos que a linha determinada passa através de um dos pontos de intersecção da cônica de formas degeneradas com pênclil (Q_1, Q_2) e, conseqüentemente é tangente a cônica. Então existem duas direções assintóticas em um ponto hiperbólico, uma em um ponto parabólico e nenhuma em um ponto elíptico.*

As direções assintóticas formam um campo de direções e suas curvas integrais são chamadas de **linhas assintóticas**. Podemos descrever as linhas assintóticas da superfície por meio das soluções das EDBs usando os coeficientes de (Q_1, Q_2) .

Proposição 3.2.2. ([10]) *As curvas assintóticas nas superfícies em $\mathbb{R}^4$ são soluções da EDB*

$$(am - bl)dx^2 + (an - cl)dxdy + (bn - cm)dy^2 = 0. \quad (3.4)$$

Podemos escrevê-la como

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

O discriminante da EDB (3.4) é dado pelos zeros da função

$$\delta = (an - cl)^2 - 4(am - bl)(bn - cm)$$

e coincide com o conjunto parabólico Δ da superfície.

Ao analisar as configurações das curvas assintóticas, algo de especial (ou seja, singularidades) acontece somente em pontos da curva parabólica e em pontos de inflexão ([10]). Assim, longe dos pontos de inflexão a EDB define um par de direções em um ponto no plano onde $\delta > 0$. Essas direções coincidem no discriminante e a EDB não tem solução em pontos quando $\delta < 0$.

Se considerarmos que a origem não é um ponto de inflexão podemos usar mudanças afim, tomar $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$ e escrever f^1 e f^2 como

$$\begin{aligned} f^1(x, y) &= x^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^4 a_{4i} x^{4-i} y^i + \dots, \\ f^2(x, y) &= xy + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^4 b_{4i} x^{4-i} y^i + \dots. \end{aligned}$$

Desta forma, os coeficientes de a , b , c , l , m e n podem ser descritos por (veja [10] para detalhes):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} f_{xx}^1 = 6a_{40}x^2 + 3a_{41}xy + a_{42}y^2 + 3a_{30}x + a_{31}y + 1 \\ b &= \frac{1}{2} f_{xy}^1 = \frac{3}{2}a_{41}x^2 + 2a_{42}xy + \frac{3}{2}a_{43}y^2 + a_{31}x + a_{32}y \\ c &= \frac{1}{2} f_{yy}^1 = a_{42}x^2 + 3a_{43}xy + 6a_{44}y^2 + a_{32}x + 3a_{33}y \\ l &= \frac{1}{2} f_{xx}^2 = 6b_{40}x^2 + 3b_{41}xy + b_{42}y^2 + 3b_{30}x + b_{31}y \\ m &= \frac{1}{2} f_{xy}^2 = \frac{3}{2}b_{41}x^2 + 2b_{42}xy + \frac{3}{2}b_{43}y^2 + b_{31}x + b_{32}y + \frac{1}{2} \\ n &= \frac{1}{2} f_{yy}^2 = b_{42}x^2 + 3b_{43}xy + 6b_{44}y^2 + b_{32}x + 3b_{33}y. \end{aligned}$$

Disto temos:

Proposição 3.2.3. ([10]) *Longe dos pontos de inflexão as linhas assintóticas têm genericamente as seguintes configurações estáveis em um ponto parabólico na superfície M .*

1. *Uma família de cúspides em pontos parabólicos ordinárias. (Ver Figura 3.1 esquerda.)*
2. *Uma singularidade dobra em uma singularidade $P_3(c)$ da projeção ortogonal P_v . (Ver Figura 3.1 esquerda.)*

Quando a origem é um ponto de inflexão, todas as direções são assintóticas e os coeficientes da EDB das curvas assintóticas se anulam e, neste caso, em geral o discriminante tem uma singularidade Morse. As configurações das curvas assintóticas em um ponto de inflexão imaginário (isto é, (Q_1, Q_2) é equivalente a $(x^2 + y^2, 0)$ e Δ tem uma singularidade A_1^+) são dadas em [21] e as configurações em pontos de inflexão do tipo real (isto é, (Q_1, Q_2) é equivalente a $(xy, 0)$ e Δ tem uma singularidade A_1^-) são dadas em [10].

3.3 A curva de inflexões das linhas assintóticas

No estudo do contato de planos com superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, as cúspides de Gauss são singularidades dobra da EDB das linhas assintóticas e correspondem a singularidades A_3 da função altura. Nelas acontecem a **curva flecnodal** que é a curva de inflexões das curvas assintóticas. Em superfícies em $\mathbb{R}^4$ a proposição anterior descreve que o ponto $P_3(c)$ da família de projeções ortogonais tem comportamento análogo às cúspides de Gauss, em outras palavras, é uma singularidade dobra da EDB (3.4). Neste aspecto, a pergunta natural é se existe a curva de inflexões das curvas assintóticas para EDB (3.4).

Em [11] (veja seção 3.1.2 sobre dualidade) é apresentado como podemos encontrar

as inflexões das curvas soluções de uma EDB. Para o nosso caso, considere a equação

$$F(x, y, p) = (am - bl)p^2 + (an - cl)p + (bn - cm),$$

com $p = dx/dy$. Recordamos que o campo levantado ξ associado ao campo bidirecional definido pela equação F pode ser tomado da forma

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial y} + p F_p \frac{\partial}{\partial x} - (F_y + p F_x) \frac{\partial}{\partial p}.$$

O campo de linhas correspondente também é determinado pelo kernel da 1-forma $dx - p dy$ no espaço tangente a $F = 0$, isto é, nas linhas assintóticas determinadas pela equação (3.4). Então a condição para ξ ser singular é que $F = F_p = F_y + p F_x = 0$. Além disso, essas condições garantem as inflexões das linhas assintóticas (veja na Seção 3.1.2).

Lembremos que a condição $F = 0$ indica simplesmente que o seus zeros estão na superfície. Já a condição $F_p = 0$ indica os zeros do discriminante. Por fim, a condição $F_y + p F_x = 0$ indica onde ocorrem as inflexões das curvas integrais da EDB. De fato, pela diferenciação da expressão $F(x, y, p) = 0$ com respeito a y obtemos:

$$F_y + \frac{dx}{dy} F_x + \frac{dp}{dy} F_p = 0.$$

A condição de inflexão é $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ mas, como $p = dx/dy$ implica $\frac{dp}{dy} = 0$, então as inflexões ocorrem quando

$$F_y + p F_x = 0.$$

A propriedade de uma curva ter uma inflexão em algum ponto não é um invariante diferencial, é simplesmente um invariante afim ([11]). No entanto, o 2-jato das equações que descrevem a curva de inflexão é preservado. Para nosso objetivo na tese isso é suficiente.

Proposição 3.3.1. *Nas condições acima o 2-jato das curva de inflexões das curvas assintóticas no ponto $P_3(c)$ é dado por*

$$x = \frac{6(-a_{44} + a_{32}b_{33})(-36b_{33}^2 + 24a_{32}b_{33} + a_{32}^2 - 24a_{44})}{a_{32}(-6b_{33} + a_{32})^2} y^2.$$

Tal curva é chamada curva flecnodal.

Demonstração. A equação $F(x, y, p) = (am - bl)p^2 + (an - cl)p + (bn - cm) = 0$ descreve

$$-\frac{1}{2}a_{32}x + \left(-\frac{1}{2}a_{42} + a_{31}b_{32} - a_{32}b_{31}\right)x^2 + (3a_{31}b_{33} - \frac{3}{2}a_{43})xy + b_{32}px + (-3a_{44} + 3a_{32}b_{33})y^2 + 3b_{33}yp + \frac{1}{2}p^2 + \dots = 0.$$

Então podemos escrever pelo teorema da função implícita

$$x = \frac{6(-a_{44} + a_{32}b_{33})}{a_{32}}y^2 + 6b_{33}a_{32}yp + \frac{1}{a_{32}}p^2 + \dots$$

Substituindo a expressão de x em $(F_y + pF_x) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} &(-6a_{44} + 6a_{32}b_{33})y + \left(3b_{33} - \frac{1}{2}a_{32}\right)p + \frac{6(3a_{31}b_{33} - (3/2)a_{43})(-a_{44} + a_{32}b_{33})}{a_{32}}y^2 + \\ &\left(\frac{6(3a_{31}b_{33} - (3/2)a_{43})b_{33}}{a_{32}} + 3a_{31}b_{33} - (3/2)a_{43}\right)py + \\ &\left(\frac{(3a_{31}b_{33} - (3/2)a_{43})}{a_{32}} + b_{32}\right)p^2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Novamente resolvendo pelo teorema da função implícita temos

$$p = \frac{12(-a_{44} + a_{32}b_{33})}{(-6b_{33} + a_{32})}y + \dots$$

Substituindo p na equação x obtemos o 2-jato da curva desejada.

□

Observação 3.3.2. No Capítulo 7, recordaremos a curva flecnodal obtida na Proposição 3.3.1 assim como os conceitos de EDBs deste Capítulo 3. Essa curva é fundamental para conseguirmos obter o principal resultado da tese.

Adjacências de singularidades multi-locais

Apresentado as informações na superfície em $\mathbb{R}^4$ utilizando as singularidades locais das famílias de funções altura e projeções ortogonais, nos surge a indagação de como podemos encontrar caracterizações na superfície utilizando as singularidades multi-locais dessas famílias. A resposta vem do fato que, como as duas famílias são a 3-parâmetros, isso fornece, considerando uma superfície genérica M , que as singularidades (locais ou multi-locais) das famílias de codimensão 2 ocorrem em curvas sobre M e as singularidades de codimensão 3 ocorrem em pontos isolados sobre estas curvas. Iremos então, considerando as famílias acima citadas, procurar curvas que representam as singularidades multi-locais de codimensão 2 que surgem em uma deformação versal de singularidades locais de codimensão 3.

Para isso, necessitamos trabalhar em modelos de desdobramentos versais (i.e. formas normais) para garantir a existência dessas curvas. A ideia é procurar as singularidades locais ou multi-locais na vizinhança de uma singularidade local perturbada. Esse processo é chamado de **adjacência**. As condições geométricas que permitem a existência da adjacência de um germe de codimensão 3 a um multi-germe de codimensão 2 são responsáveis pela existência de uma curva formada pelas singularidades multi-locais de codimensão 2 desse modelo.

Portanto, neste capítulo o objetivo é encontrar as $\mathcal{R}$ -adjacências de germes de codimensão 3 de $\mathcal{E}_2$ para multi-germes de codimensão 2 e as $\mathcal{A}$ -adjacências de germes

de codimensão 3 de $\mathcal{E}_{2,3}$ para multi-germes de codimensão 2. Todavia, no Capítulo 5, explicamos como as singularidades multi-locais das famílias de funções altura H e de projeções P caracterizam a superfície em $\mathbb{R}^4$.

4.1 Como obter as caracterizações multi-locais

Como mencionamos na introdução do capítulo, a garantia da existência de uma curva no modelo implica a sua existência nas famílias de funções altura H e projeções ortogonais P . De fato, considere uma forma normal $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ de uma singularidade de codimensão 3, onde $k = 1, 3$ e $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ uma forma normal da deformação versal de f que existe pela Proposição 1.3.3. O **conjunto singular** de F é definido por

$$C(F) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \text{rank}(d_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{v})) < 2\},$$

onde $d_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é a diferenciação de F em relação a $\mathbf{x}$ aplicado em $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

O **conjunto de bifurcação** $B(F)$ de F é o conjunto dos parâmetros $u \in (\mathbb{R}^3, 0)$, tais que F_u tem singularidade x não estável, isto é,

$$B(F) = \{u \in (\mathbb{R}^3, 0) \mid \exists x \in C(F) \text{ e } \text{codim}(F_u, \mathcal{G}) \geq 1 \text{ no ponto } x\}.$$

Vale lembrar que se G é outro desdobramento $\mathcal{G}$ -versal de f , então $F \sim_{\mathcal{G}} G$ e $C(F)$ é difeomorfo a $C(G)$. (Veja por exemplo [34] para uma demonstração.)

No caso $k = 1$ o conjunto singular de F é chamado de **conjunto catástrofe** de F e pode ser escrito como

$$C(F) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (x, y, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0\},$$

Suponha que a família de função altura $H : (M \times S^3, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de uma singularidade local de codimensão 3 de h_v . Sendo F e H deformações $\mathcal{R}^+$ -versais de f e h_v , respectivamente, existem um germe de difeomorfismo da forma $\Phi = (\varphi(x, v), \psi(v))$ e um germe de função $c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal

que

$$F(x, u) = H(\Phi(x, u)) + c(u),$$

ou seja, $F \sim_{P-\mathcal{R}_e^+} H$. Consequentemente $C(F)$ é difeomorfo a $C(H)$. Desta forma, ao colocar as condições geométricas no conjunto catástrofe $C(F)$ que descrevem as curvas multi-locais de codimensão 2 (que surgem da adjacência), o difeomorfismo garante a existência de uma curva multi-local α no conjunto catástrofe $C(H)$. Logo, a projeção canônica $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$ da curva α , $\pi_1(\alpha)$ é a curva de singularidade multi-local de codimensão 2 de h_v na superfície M .

O diagrama abaixo exemplifica de forma sucinta o que explicamos

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Modelo} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, (0, 0)) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}, 0) & \mathcal{R}_e^+ \text{-versal} \\
 & \downarrow (\varphi, \psi) & & \downarrow & \\
 \text{Família} & (M \times S^3, (0, 0)) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{R}, 0) & \mathcal{R}_e^+ \text{-versal}
 \end{array}$$

No caso $k = 3$, suponha que a família de projeção ortogonal $P : (M \times S^3, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de uma singularidade local de codimensão 3 de P_v . Sendo F e P deformações $\mathcal{A}_e$ -versais de f e P_v , respectivamente, existem um germe de difeomorfismo da forma $\Phi = (\varphi(x, v), \psi(v))$ tal que

$$F(x, u) = P(\Phi(x, u)),$$

ou seja, $F \sim_{\mathcal{A}_e} P$. Consequentemente $C(F)$ é difeomorfo a $C(P)$. Desta forma, ao colocar as condições geométricas no conjunto catástrofe $C(F)$ que descrevem as curvas multi-locais de codimensão 2 (que surge da adjacência), o difeomorfismo garante a existência de uma curva multi-local β no conjunto catástrofe $C(P)$. Logo, a projeção canônica $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$ da curva β , $\pi_1(\beta)$ é a curva de singularidade multi-local de codimensão 2 de P_v na superfície M .

O diagrama abaixo também exemplifica de forma sucinta este caso

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Modelo} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, (0,0)) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}^3, 0) & \mathcal{A}_e\text{-versal} \\
 & \downarrow (\varphi, \psi) & & \downarrow & \\
 \text{Família} & (M \times S^3, (0,0)) & \xrightarrow{P} & (\mathbb{R}^3, 0) & \mathcal{A}_e\text{-versal}
 \end{array}$$

Fixado a ideia anterior, neste capítulo vamos determinar as adjacências dos germes em $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_{2,3}$ de $\mathcal{G}$ -codimensão 3 a multi-germes de $\mathcal{G}$ -codimensão 2 que aparecem numa deformação $\mathcal{G}$ -versal. Tais resultados serão utilizados posteriormente nas famílias de funções altura e de projeções ortogonais.

Sejam L e K duas $\mathcal{G}$ -classes de germes em $\mathcal{E}_{n,p}$. Dizemos que L é **adjacente** a K , denotamos por $(L \rightarrow K)$, se para todo $f \in L$ existe uma deformação F_u de f tal que $F_u \in K$ para u próximo de zero.

4.2 $\mathcal{R}$ -adjacências de germes em $\mathcal{E}_2$ para multi-germes

A classificação das $\mathcal{R}$ -singularidades simples de germes em $\mathcal{E}_2$ é dada em [2] (ver Tabela 4.1) e as adjacências dos germes em $\mathcal{E}_2$ foram classificadas e descritas em [2] como vistos na Tabela 4.1 e Figura 4.1.

No entanto, a Figura 4.1 não apresenta as $\mathcal{R}$ -adjacências de singularidades locais para singularidades multi-locais. Apresentamos as adjacências de germes de $\text{codim}(f, \mathcal{R}_e^+) = 3$ para multi-germes de $\text{codim}(f, \mathcal{R}_e^+) = 2$, pois somente este caso necessitamos para o objetivo de nosso trabalho.

Temos apenas duas singularidades com $\mathcal{R}_e$ -codimensão 3: as singularidades A_4 e $D_4^\pm$. No entanto, iremos fazer o estudo apenas na singularidade A_4 , pois a singularidade $D_4^\pm$ é um ponto de inflexão na superfície M em $\mathbb{R}^4$ e não é o enfoque da

Nome	Forma Normal	$\text{codim}(f, \mathcal{R}_e^+)$
$A_k, k \geq 0$	$\pm x^2 \pm y^{k+1}$	$k - 1$
$D_k^\pm, k \geq 4$	$x^2 y \pm y^{k-1}$	$k - 1$
E_6	$x^3 + y^4$	5
E_7	$x^3 + xy^4$	6
E_8	$x^3 + y^5$	7

Tabela 4.1: Germes simples de funções

Figura 4.1: Diagrama de adjacências de germes de funções de singularidades $\mathcal{R}$ -simples.

tese.

Considere a singularidade A_4 e vamos em busca de multi-germes com codimensão 2. Os multi-germes com essa codimensão são A_3, A_1A_2 e $A_1A_1A_1$ (veja [2]).

Embora o diagrama anterior mostra que $A_4 \rightarrow A_3^\pm$, a próxima proposição apresenta os cálculos que reafirma tal adjacência. Mas a nossa atenção esta direcionada para os multi-germes.

Proposição 4.2.1. *Temos as seguintes afirmações:*

- (i) $A_4 \rightarrow A_3$;
- (ii) $A_4 \rightarrow A_1A_2$;
- (iii) $A_4 \not\rightarrow A_1A_1A_1$.

Demonstração. Seja $f(x, y) = x^2 + y^5$ uma forma normal da singularidade A_4 e $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma deformação mini-versal de f , que tomamos na forma

$$F_u(x, y) = F(x, y, u_1, u_2, u_3) = x^2 + y^5 + u_1 y^3 + u_2 y^2 + u_3 y,$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^3, 0)$. O conjunto catástrofe de F é dado por

$$C(F) = \{(x, y, u_1, u_2, u_3) | u_3 = -5y^4 - 3u_1 y^2 - 2u_2 y \text{ e } x = 0\}$$

e o conjunto bifurcação $B(F)$ de F é um germe de superfície em $(\mathbb{R}^3, 0)$ parametrizado por

$$(y, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3) = (u_1, -10y^3 - 3u_1 y, 15y^4 + 3u_1 y^2)$$

chamado de rabo de andorinha.

Buscamos os estratos multi-locais de codimensão 2 que podem aparecer na deformação.

(i). Com abuso de notação escrevemos $F_u = F$. As condições para a singularidade A_3 são dadas por

$$F_x(x, y) = 0$$

$$F_y(x, y) = 0$$

$$(F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy})(x, y) = 0$$

$$(-F_{xy}^3 F_{xxx} + 3F_{xy}^2 F_{xx} F_{xxy} - 3F_{xy} F_{xx}^2 F_{xyy} + F_{xx}^3 F_{yyy})(x, y) = 0.$$

As duas primeiras relações garantem $x = 0$ e $5y^4 + 3u_1 y^2 + 2u_2 y + u_3 = 0$. A terceira, $40y^3 + 12u_1 y + 4u_2 = 0$. Isolando e substituindo x , u_3 e u_2 na quarta equação, obtemos $480y^2 + 48u_1 = 0$. Assim, substituindo recursivamente, teremos a curva

$$\alpha(y) = \{(0, y, -10y^2, 20y^3, -15y^4), y \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando a projeção canônica $\pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, então $\pi(\alpha(y)) = (0, y)$ é a curva formada pela singularidade A_3 na deformação de A_4 em $(\mathbb{R}^2, 0)$. Desta forma, obtemos a $\mathcal{R}$ -adjacência.

(ii). Fixado os parâmetros $(u_1, u_2, u_3) = u$, ao buscar as adjacências desse germe, necessitamos procurar pontos $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tais que existe (x_2, y_2) com $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ e $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ (isto é, os pontos duplos), de modo que na vizinhança de (x_1, y_1) tenha singularidade A_1 e na vizinhança de (x_2, y_2) tenha singularidade A_2 , ou seja, temos o bigerme A_1A_2 .

Logo, as condições da singularidade A_1A_2 são as seguintes:

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) &= F(x_2, y_2) \\ F_x(x_i, y_i) &= F_y(x_i, y_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2 \\ (F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy})(x_2, y_2) &= 0. \end{aligned}$$

A segunda relação garante $x_1 = x_2 = 0$, $5y_1^4 + 3u_1y_1^2 + 2u_2y_1 + u_3 = 0$ e $5y_2^4 + 3u_1y_2^2 + 2u_2y_2 + u_3 = 0$. Ao realizar a diferença entre as equações temos a relação

$$(y_1 - y_2)(5y_1^3 + 5y_2y_1^2 + 3u_1y_1 + 5y_2^2y_1 + 2u_2 + 3u_1y_2 + 5y_2^3) = 0.$$

Como $y_1 \neq y_2$, podemos determinar u_2 em função de u_1, y_1, y_2 . Pela terceira equação obtemos $u_2 = 10y_2^3 + 3u_1y_2$. A diferença entre as duas expressões de u_2 garante a relação

$$-\frac{1}{2}(y_1 - y_2)(5y_1^2 + 10y_1y_2 + 3u_1 + 15y_2^2) = 0,$$

que pode ser resolvida em u_1 . Substituindo recursivamente nas equações anteriores encontramos u_1, u_2 e u_3 em função de y_1 e y_2 que ao substituí-las em $F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) = 0$ garantimos que

$$-\frac{1}{3}(y_1 - y_2)^4(2y_1 + 3y_2) = 0.$$

Assim, encontramos a curva

$$\beta(y) = \{(0, -3/2y, (-15/4)y^2, (5/4)y^3, (15/4)y^4), y \in \mathbb{R}\}$$

em $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0)$ que projetada por π garante uma curva $\pi(\beta(y)) = (0, -3/2y)$ formada pela singularidade A_1A_2 na vizinhança de A_4 .

(iii). De maneira similar ao caso (ii), fixado os parâmetros $(u_1, u_2, u_3) = u$, ao buscar as adjacências desse germe, procuramos três pontos distintos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

e (x_3, y_3) em $\mathbb{R}^2$ tais que $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = F(x_3, y_3)$, de modo que (x_i, y_i) tenha singularidade A_1 em (x_1, y_1) com $i = 1, 2, 3$, ou seja, temos um trigerme com singularidade $A_1 A_1 A_1$.

As condições que descrevem essa singularidade são:

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) &= F(x_2, y_2) = F(x_3, y_3) \\ F_x(x_i, y_i) &= F_y(x_i, y_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Com isso obtemos $x_1 = x_2 = 0$ com $y_1 = y_2$, o que não pode acontecer, pois os três pontos devem ser distintos. $\square$

A Figura 4.2, mostra os estratos das singularidades A_3 e $A_1 A_2$ no conjunto de bifurcação de um desdobramento mini-versal da singularidade A_4 . Observe que as curvas α e β ao serem projetadas por π no plano (x, y) se coincidem.

Figura 4.2: Estratificação do conjunto de bifurcação da singularidade A_4 .

4.3 $\mathcal{A}$ -adjacências de germes em $\mathcal{E}_{2,3}$ para multi-germes

Nesta seção, iremos trabalhar com algumas $\mathcal{A}$ -adjacências dos germes de $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$. Para o caso local, essas $\mathcal{A}$ -adjacências são dadas por David Mond ([32], veja Figura 4.3) e para o caso multi-local, são dadas por Wik-Atique ([56]). No entanto, esses trabalhos não apresentam, em geral, as adjacências de monogermes para multi-germes. Portanto, reforçando a ideia da seção anterior, mostraremos apenas as adjacências de singularidade locais de codimensão 3 para singularidades multi-locais de codimensão 2.

Figura 4.3: $\mathcal{A}$ -adjacências dos germes locais de $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$.

As singularidades locais de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 3 de germes $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ são B_3 , C_3 , H_3 , S_3 e $P_3(c)$ (ver Tabela 2.1). A Tabela 4.2, ([27],[56]) exhibe os multi-germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2.

Em, [27] Kirk e Hoobs, fizeram os diagramas de bifurcação dos multi-germes e exibiram critérios geométricos que os descrevem. Abaixo apresentamos os critérios geométricos para os casos da Tabela 4.2 (ver Figura 4.4).

- (a) $[A_2]$: *duas superfícies regulares com tangência A_2 .*
- (b) $(A_0S_0)_2$: *superfície regular transversal a um cross-cap, mas tangente a curva dos pontos duplos no ponto de cross-cap.*

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -codimensão
$[A_2]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 + Y^3)$	2
$(A_0S_0)_2$	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^5, X)$	2
$A_0S_1^\pm$	$(x, y, 0; Y^3 \pm X^2Y, Y^2, X)$	2
$A_0S_0 A_1^\pm$	$(x, y, 0, X, XY, Y^2 \pm X^2)$	2
$A_0^3 A_2$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^3)$	2
$(A_0^2 A_1^\pm)A_0$	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, X^2 \pm Y^2)$	2

Tabela 4.2: Multi-germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 ([27],[56]).

- (c) $A_0S_1^\pm$: *superfície regular com singularidade $S_1^\pm$ e uma outra superfície regular que se interceptam transversalmente.*
- (d) $A_0S_0|A_1^\pm$: *superfície regular tangente a um cross-cap transversal a curva de pontos duplos.*
- (e) $A_0^3|A_2$: *três superfícies regulares transversais.*
- (f) $(A_0^2|A_1^\pm)A_0$: *três superfícies regulares as quais duas delas com tangência A_1 e a outra transversal as duas.*

Em [32], Mond mostrou a $\mathcal{A}$ -adjacência $B_3 \rightarrow [A_2]$ e conjecturou que $H_3 \rightarrow (A_0S_0)_2$. Então nosso trabalho é encontrar as adjacências para os casos restantes, isto é, verificar se as singularidades B_3 , C_3 , H_3 , S_3 e $P_3(c)$ são adjacentes a algum multi-germe da Tabela 4.2 e afirmar a conjectura.

Proposição 4.3.1. *Os germes B_3, C_3, S_3 , não são adjacentes a $(A_0S_0)_2$, $A_0S_1^\pm$, $A_0S_0|A_1^\pm$, $A_0^3|A_2$ e $(A_0^2|A_1^\pm)A_0$.*

Demonstração. Pelos resultados de T. Marar e D. Mond em [24], não existem pontos tripos nas deformações das singularidades B_3, C_3, S_3 . Portanto, tais singularidades não podem ser adjacentes aos trigerms dados na proposição.

Figura 4.4: Geometria dos bi e trigermes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2.

Para provar a não adjacência dos bigermes, escrevemos os germes com singularidade B_3, C_3, S_3 , na forma (ver [32])

$$(x, y^2, yp(x, y^2))$$

e tomamos suas deformações versais na forma $F(x, y, u) = (x, y^2, yp(x, y^2, u))$ com p dado por:

$$B_3 : x^2 \pm y^6 + a + by^2 + cy^4,$$

$$C_3 : xy^2 \pm x^3 + a + by^2 + cx,$$

$$S_3 : y^2 \pm x^4 + a + bx + cx^2,$$

e $u = (a, b, c)$ (veja [24] para as deformações). Suponha que existem (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

distintos tal que F_u é regular em (x_1, y_1) e singular em (x_2, y_2) com $F_u(x_1, y_1) = F_u(x_2, y_2)$. Disto obtemos, $x_1 = x_2 = x$ e $y_1 = -y_2$ com $y_1 \neq 0$.

Note que $F_x = (1, 0, yp_x)$ e $F_y = (0, 2y, p + yp_y)$. Portanto,

F é singular em (x_1, y_1) se, e somente se, $y_1 = 0$ e $p(x_1, 0) = 0$.

Mas isto contraria o fato de que $y_1 \neq 0$. Logo, B_3 , C_3 e S_3 não podem ser $\mathcal{A}$ -adjacentes a nenhum dos bigermes descritos na proposição. $\square$

Proposição 4.3.2. *Sejam $f(x, y) = (x, y^2, yp(x, y))$ a forma normal de um germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ de codimensão 3 e $F(x, y, u) = (x, y^2, yp(x, y^2, u))$ a sua deformação mini-versal ([24]). O germe f é $\mathcal{A}$ -adjacente ao bigerme $[A_2]$ se, e somente se, as seguintes equações são satisfeitas: $p(x, y^2, u) = p_x(x, y^2, u) = p_y(x, y^2, u) = p_{xx}p_{yy} - p_{xy}^2 = 0$.*

Demonstração. Considere (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos distintos. Temos $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$, se e somente se, $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = -y_2$ e $p(x, y_1^2, u) = 0$. Agora, observe que $F_x = (1, 0, yp_x)$, $F_y = (0, 2y, p + 2y^2p_y)$, $F_{xx} = (0, 0, yp_{xx})$, $F_{yy} = (0, 2, 2yp_y + 4y(p_y + y^2p_{yy}))$ e $F_{xy} = (0, 0, p_x + 2y^2p_{xy})$. A equação geral do plano tangente, nas coordenadas (X, Y, Z) , no ponto (x, y_1) é dada por

$$y_1 p_x X + \frac{(p + 2y_1^2 p_y)}{2y_1} Y - Z = 0.$$

Como $y_1 = -y_2$, segue que o plano tangente em (x, y_2) é $-y_1 p_x X - \frac{(2y_1^2 p_y)}{2y_1} Y - Z = 0$. Assim, os dois planos tangentes em (x, y_1) e (x, y_2) são iguais se, e somente se, $p_x = p_y = 0$.

Além disso, o contato de ordem 2 entre as superfícies é dado em [44] pela a relação

$$\det(F_x, F_y, F_{xx}) \cdot \det(F_x, F_y, F_{yy}) - (\det(F_x, F_y, F_{xy}))^2 = 0.$$

Podemos escrever $\det(F_x, F_y, F_{xx}) = 2y^2 p_{xx}$, $\det(F_x, F_y, F_{yy}) = 8y^4 p_{yy} + 8y^2 p_y - 2p$ e $\det(F_x, F_y, F_{xy}) = 4y^2(p_x^2 + 4y^2 p_x p_{xy} + 4y^4 p_{xy}^2)$. Logo, colocando $p = p_x = p_y = 0$, temos que a relação anterior é nula se, e somente se, $p_{xx}p_{yy} - p_{xy}^2 = 0$. $\square$

Com auxílio da proposição anterior obtemos:

Proposição 4.3.3. *As singularidades C_3 e S_3 não são adjacentes ao bigerme $[A_2]$.*

Demonstração. Considere o desdobramento versal

$$F(x, y, u) = (x, y^2, yp(x, y^2, u)),$$

de C_3 e S_3 , como na Proposição 4.3.1. Considere os pontos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ tais que $F_u(x_1, y_1) = F_u(x_2, y_2)$.

Suponha que $S_3 \rightarrow [A_2]$ e $p(x, y^2, u) = y^2 \pm x^4 + u_1 + u_2x + u_3x^2$ a equação dos pontos duplos de S_3 . A Proposição 4.3.2 garante que quando $p = 0$, os pontos duplos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) satisfazem $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$. Além disso, $p_x = 4x_1^3 + u_2 + 2u_3x_1 = 0$ e $p_y = 2y_1 = 0$, mas isto não pode acontecer, uma vez que $y_1 \neq 0$. Logo $S_3 \not\rightarrow [A_2]$.

Agora suponha que $C_3 \rightarrow [A_2]$ e $p(x, y^2, u) = xy^2 \pm x^3 + u_1 + u_2y^2 + u_3x$ a equação dos pontos duplos de C_3 . Como antes, o fato de termos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ com $F_u(x_1, y_1) = F_u(x_2, y_2)$ garante que $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$. Sendo, $p_x = y_1^2 + 3x_1^2 + u_3 = 0$, $p_y = 2x_1y_1 + 2u_2y_1 = 0$ e $y_1 \neq 0$, segue que $u_2 = -x_1$. Agora de $p_{xy}^2 - p_{xx}p_{yy} = 0$ temos $4y_1^2 - 6x_1(2x_1 + 2u_2) = 0$. Substituindo $u_2 = -x_1$, temos a expressão

$$4y_1^2 - 12x_1^2 + 12x_1^2 = 0 \Rightarrow 4y_1^2 = 0,$$

contrariando o fato de que $y_1 \neq 0$. □

Para o bigerme $A_0S_1^\pm$ necessitamos dos critérios de reconhecimento das singularidades S_0 e $S_1^\pm$ de Saji ([48]).

Teorema 4.3.4. ([48]) *Se $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ tem corank 1 no ponto singular 0, então existem campos de vetores ξ e η perto da origem tal que $df_0(\eta_0) = 0$ e $\xi_0, \eta_0 \in T_0\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes, onde (ξ_0, η_0) é o campo na origem. Defina $\varphi = \det(\xi f, \eta f, \eta \eta f)$.*

(i) *O germe f é um cross-cap se $\xi\varphi \neq 0$.*

(ii) Se $\xi\varphi = 0$, então f em 0 é $\mathcal{A}$ -equivalente a S_1^- se, e somente se, φ tem um ponto crítico em 0 e $\det \text{Hess}\varphi(0) > 0$. Por outro lado, f em 0 é $\mathcal{A}$ -equivalente a S_1^+ se, e somente se, φ tem um ponto crítico em 0, $\det \text{Hess}\varphi(0) < 0$ e os vetores $\xi f(0)$ e $\eta f(0)$ são linearmente independentes.

Observação 4.3.5. O $\det \text{Hess}\varphi(0) = 0$ produz uma equação onde representa a singularidade $S_{\geq 2}$ ou a singularidade $B_{\geq 2}$.

Baseado nesse critério temos:

Proposição 4.3.6. A singularidade H_3 não é adjacente aos bigermes $A_0S_1^\pm$, $[A_2]$, $A_0S_0|A_1^\pm$, $A_0^3|A_2$ e $(A_0^2|A_1^\pm)A_0$.

Demonstração. Suponha que $H_3 \rightarrow A_0S_1^\pm$. Considere uma deformação versal de H_3 dada por $F(x, y, u) = (x, y^3 + ay, xy + y^8 + by^2 + cy^5)$, onde $u = (a, b, c)$ (veja [24]). Um dos ramos do bigerme possui a singularidade $S_1^\pm$. Vamos supor que essa singularidade aconteça no ponto (x_1, y_1) . Como neste ponto a aplicação tem corank 1, podemos aplicar o Teorema 4.3.4. Logo, existe um campo de vetores ξ e η com $\xi_0 = (1, 0)$ e $\eta_0 = (0, 1)$ na vizinhança de (x_1, y_1) tal que $dF(\eta_0) = 0$. Disto, obtemos que $3y_1^2 + a = 0$ e $x_1 + 8y_1^7 + 2by_1 + 5cy_1^4 = 0$. Escrevendo

$$\varphi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 3y_1^2 + a & x_1 + 8y_1^7 + 2by_1 + 5cy_1^4 \\ 0 & 6y_1 & 56y_1^6 + 2b + 20cy_1^3 \end{vmatrix},$$

segue que temos uma singularidade pior que um cross-cap se $\xi\varphi = 0$, isto é, $6y_1 = 0$. Substituindo $y_1 = 0$ nas relações acima, garantimos $x_1 = a = 0$. Por outro lado, foi mostrado em [24] que não existe cross-cap (ou pior) quando $a \geq 0$. Portanto, $H_3 \not\rightarrow A_0S_0^\pm$.

Suponha agora que $H_3 \rightarrow [A_2]$ e considere a deformação versal acima de H_3 . O bigerme $[A_2]$ são duas superfícies regulares com tangência A_2 . Então, considere $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ tal que $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$. Assim, $x_1 = x_2 = x$. Observe

que $F_x = (1, 0, y)$, $F_y = (0, 3y^2 + a, x + 8y^7 + 2by + 5cy^4)$, $F_{xx} = (0, 0, 0)$, $F_{yy} = (0, 6y, 56y^6 + 2b + 20cy^3)$ e $F_{xy} = (0, 0, 1)$.

A condição de tangência A_2 é descrita na Proposição 4.3.2 e garante que $3y_1^2 + a = 0$. Além disso, a equação do plano tangente no pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por

$$y(3y^2 + a)X + (x + 8y^7 + 2by + 5cy^4)Y - (3y^2 + a)Z = 0$$

O fato dos planos tangentes em (x_1, y_1) e (x_2, y_2) serem iguais temos

$$(3y_2^2 + a)(x + 8y_1^7 + 2by_1 + 5cy_1^4) = 0.$$

Temos duas possibilidades. Se $(3y_2^2 + a) = 0$ com $3y_1^2 + a = 0$ implica que $y_1 = -y_2$, desta forma pela igualdade $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$, garantimos a expressão $y_1^3 + ay_1 = y_2^3 + ay_2$. Substituindo a e y_1 na relação anterior, obtemos $y_2 = 0$. Absurdo! Se $(x + 8y_1^7 + 2by_1 + 5cy_1^4) = 0$, temos que (x_1, y_1) é um ponto singular, contrariando o fato de ser superfície regular.

Suponha que $H_3 \rightarrow A_0S_0|A_1^\pm$. Considere a deformação versal como acima. Tome (x_1, y_1) o ponto regular e (x_2, y_2) o ponto singular onde ocorre o cross-cap tal que $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$. No ponto (x_2, y_2) , o Teorema 4.3.4, garante que $3y_2^2 + a = 0$, $x_2 + 8y_2^7 + 2by_2 + 5cy_2^4 = 0$ e $y_2 \neq 0$. Da relação $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ temos $x_1 = x_2 = -(8y_2^7 + 2by_2 + 5cy_2^4)$, $a = -3y_2^2$, $y_1 = -2y_2$ e $b = -31y_2^6 + 2cy_2^3$. Por outro lado, a superfície regular intersecta o cross-cap tangencialmente, logo o plano tangente da superfície regular no ponto (x_1, y_1) , descrito no caso anterior, contém o vetor tangente ao cross-cap, isto é, $(-3y_1^3 - ay_1) - y_2(3y_1^2 + a) = 0$. Substituindo a e y_1 , obtemos $y_2 = 0$, o que não pode acontecer.

Suponha que $H_3 \rightarrow A_0^3|A_2$. Considere a deformação versal como acima. Tome (x_i, y_i) com $i = 1, 2, 3$ pontos regulares distintos tais que $F(x_i, y_i, u) = F(x_j, y_j, u)$ para $i \neq j$. Pela igualdade de $F(x_i, y_i, u) = F(x_j, y_j, u)$ encontramos $x_1 = x_2 = x_3$, $(y_i - y_j)(y_i^2 + y_iy_j + a + y_j^2) = 0$ e $(x_iy_i + y_i^8 + by_i^2 + cy_i^5 - x_jy_j + y_j^8 + by_j^2 + cy_j^5) = 0$ com $i \neq j$. Como $x_1 = x_2 = x_3$ então $y_1 \neq y_2 \neq y_3$. Assim diferença entre $(y_1^2 + y_1y_2 + a + y_2^2) = 0$ e $(y_2^2 + y_2y_3 + a + y_3^2) = 0$ garante que $-(y_1 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 0$. Logo,

$y_1 = -(y_2 + y_3)$. Além disso, a equação $(x_i y_i + y_i^8 + b y_i^2 + c y_i^5 - x_j y_j + y_j^8 + b y_j^2 + c y_j^5) = 0$ com $i = 1$ e $j = 2$, garante que $x_2 = p_1(y_1, y_2, c)$, onde p_1 é um polinômio de grau 7 nas variáveis y_1, y_2 e c . Se $i = 2$ e $j = 3$, obtemos $x_2 = p_2(y_2, y_3, c)$, onde p_1 é um polinômio de grau 7 nas variáveis y_2, y_3 e c . Subtraindo as expressões de x_2 e colocando $y_1 = -(y_2 + y_3)$, encontramos $b = p_3(y_2, y_3)$, onde p_3 é um polinômio de grau 6 nas variáveis y_2 e y_3 .

Por outro lado, a equação geral dos planos tangentes nos pontos (x_i, y_i) nas coordenadas (X, Y, Z) é dada por

$$-y_i(3y_i^3 + a)X + (-x_i - 8y_i^7 - 2by_i - 5cy_i^4)Y + (3y_i^3 + a)Z = 0$$

Como os planos tangentes aos pontos (x_i, y_i) são transversais entre si, então ao substituir as expressões encontradas nesta relação dos planos ser transversais obtemos

$$-(y_2 + 2y_3)(2y_2 + y_3)(y_2 - y_3)^2(1 + p_4(y_2, y_3, c)) = 0,$$

onde p_4 é um polinômio, isto é, $(y_2 + 2y_3)(2y_2 + y_3) = 0$. Assim, se $y_2 = -2y_3$, então ao substituir na expressão de $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, segue que $y_1 = y_3$ o que não pode acontecer. Então $H_3 \not\rightarrow A_0^3|A_2$.

O caso em que $H_3 \not\rightarrow (A_0^2|A_1^\pm)A_0$ é análogo. □

Proposição 4.3.7. *A singularidade $P_3(c)$ não é adjacente aos trigerms $A_0^3|A_2$ e $(A_0^2|A_1^\pm)A_0$.*

Demonstração. A prova segue as mesmas ideias da demonstração do caso $H_3 \not\rightarrow A_0^3|A_2$. □

Proposição 4.3.8. *A singularidade H_3 é adjacente ao bigerme $(A_0 S_0)_2$.*

Demonstração. Considere o desdobramento de H_3 dada por

$$F(x, y, u) = (x, y^3 + ay, xy + y^8 + by^2 + cy^5),$$

com $u = (a, b, c)$. As condições para o bigerme $(A_0 S_0)_2$ são dadas por:

- (i) $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ para $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$;
- (ii) O ponto (x_2, y_2) é um ponto de cross-cap;
- (iii) O vetor limite tangente da curva de pontos duplos do cross-cap está contido no espaço tangente a imagem de F_u no ponto (x_1, y_1) .

Do Teorema 4.3.4, F_u tem uma singularidade cross-cap em (x_2, y_2) se $a = -3y_2^2$, $x_2 = -(8y_2^7 + 2by_2 + 5cy_2^4)$ e $y_2 \neq 0$. Substituindo a e x_2 na igualdade $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ obtemos que $x_1 = x_2$ e $-(2y_2 + y_1)(y_2 - y_1)^2 = 0$ implicando que $y_1 = -2y_2$. Substituindo as relações encontradas em

$$x_1y_1 + y_1^8 + by_1^2 + cy_1^5 - (x_2y_2 + y_2^8 + by_2^2 + cy_2^5) = 0,$$

obtemos $-9y_2^2(31y_2^6 - 2cy_2^3 + b) = 0$. Uma vez que, $y_2 \neq 0$ temos $b = -(31y_2^6 - 2cy_2^3)$.

Por fim, necessitamos encontrar o vetor limite tangente da curva dos pontos duplos do cross-cap. Para isso, primeiramente, vamos realizar a translação $x \mapsto x + x_2$ e $y \mapsto y + y_2$ para levar a singularidade (x_2, y_2) para origem. Assim, a F tem a seguinte forma

$$(x + x_2, (y + y_2)^3 + a(y + y_2), (x + x_2)(y + y_2) + (y + y_2)^8 + b(y + y_2)^2 + c(y + y_2)^5)$$

no novo sistema de coordenadas e a denotamos por $\tilde{F}(x, y, u)$. Buscando a curva de pontos duplos temos $\tilde{F}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, u) = \tilde{F}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, u)$ com $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \neq (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ se, e somente se,

1. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$;
2. $(\bar{y}_1 + y_2)^3 + a(\bar{y}_1 + y_2) = (\bar{y}_2 + y_2)^3 + a(\bar{y}_2 + y_2)$;
3. $(\bar{x}_1 + x_2)(\bar{y}_1 + y_2) + (\bar{y}_1 + y_2)^8 + b(\bar{y}_1 + y_2)^2 + c(\bar{y}_1 + y_2)^5 = (\bar{x}_2 + x_2)(\bar{y}_2 + y_2) + (\bar{y}_2 + y_2)^8 + b(\bar{y}_2 + y_2)^2 + c(\bar{y}_2 + y_2)^5$.

Substituindo a e x_2 em 2, obtemos

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)(\bar{y}_1^2 + 3y_2\bar{y}_1 + \bar{y}_1\bar{y}_2 + 3y_2\bar{y}_2 + \bar{y}_2^2) = 0.$$

Como $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \neq 0$ e $y_2 \neq 0$ o Teorema da Função Implícita garante que podemos escrever $\bar{y}_1$ em função de $\bar{y}_2$, ou seja,

$$\bar{y}_1 = -\bar{y}_2 - \frac{1}{3y_2}\bar{y}_2^2 - \frac{1}{9y_2^2}\bar{y}_2^3 + \cdots.$$

A equação 3. se reduz a $(-\bar{y}_2 + \bar{y}_1)(\bar{x}_1 + f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, b, c)) = 0$, onde f é uma função que depende de $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, b e c . Substituindo as equações b e $\bar{y}_1$ descritas anteriormente podemos escrever $\bar{x}_1$ em função de $\bar{y}_2$ e obtemos

$$\bar{x}_1 = (-6cy_2^2 - 57y_2^5)\bar{y}_2^2 + (-2cy_2 - 19y_2^4)\bar{y}_2^3 + \cdots.$$

Assim, a curva de pontos duplos é parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{y}_2) = & \left(-y_2(8y_2^6 + 2b + 5cy_2^3) - y_2(6cy_2 + 57y_2^4)\bar{y}_2^2 + \cdots, \right. \\ & \left. -2y_2^3 + 3y_2\bar{y}_2^2 + \cdots, 6y_2^5(-4y_2^3 + c) + 6y_2^3(-10y_2^3 + c)\bar{y}_2^2 + \cdots \right). \end{aligned}$$

Logo, o limite do vetor tangente no ponto 0 é dado por

$$\alpha''(0) = (-6y_2^2(2c + 19y_2^3), 6y_2, 12y_2^3(-10y_2^3 + c)).$$

Por outro lado, a equação do plano tangente no pontos (x_1, y_1) é dado por

$$y_1(3y_1^2 + a)X + (x_1 + 8y_1^7 + 2by_1 + 5cy_1^4)Y - (3y_1^2 + a)Z = 0.$$

Assim, se $\alpha''(0)$ pertence ao plano temos, ao substituir as equações a , b , x_1 e $y_1 = -y_2$, que $486y_2^5(-4y_2^3 + c) = 0$. Deste modo garantimos $c = 4y_2^3$. Substituindo recursivamente c em a , b e x_1 determinamos a curva

$$\beta(y_2) = \left\{ (18y_2^7, -2y_2, -3y_2^2, -23y_2^6, 4y_2^3) \mid y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

em $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0)$ que projetada por $\pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ garante a curva $\pi(\beta(y)) = (18y_2^7, -2y_2)$ formada pelo bigerme $(A_0S_0)_2$ na vizinhança da singularidade H_3 em $(\mathbb{R}^2, 0)$. Portanto, obtemos a $\mathcal{A}$ -adjacência. $\square$

Proposição 4.3.9. *A singularidade $P_3(c)$ é adjacente ao bigerme $(A_0S_0)_2$.*

Demonstração. Considere a deformação $\mathcal{A}$ -versal de $P_3(c)$ dada por

$$F(x, y, u) = (x, xy + y^3 + ay, xy^2 + cy^4 + by + dy^3),$$

com $c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$ e $u = (a, b, c, d)$. As condições para a singularidade bi-local $(A_0S_0)_2$ são como na demonstração da Proposição 4.3.8 nos ítems (i), (ii) e (iii).

Como (x_2, y_2) é um ponto de cross-cap, temos $a = -x_2 - 3y_2^2$, $b = -(2x_2y_2 + 4cy_2^3 + 3dy_2^2)$ e $x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2 \neq 0$. A igualdade $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ permite obter as seguintes relações:

1. $x_1 = x_2$;
2. $x_1y_1 + y_1^3 + ay_1 = x_2y_2 + y_2^3 + ay_2$;
3. $x_1y_1^2 + cy_1^4 + by_1 + dy_1^3 = x_2y_2^2 + cy_2^4 + by_2 + dy_2^3$.

Colocando as condições de cross-cap e substituindo x_1 em 2. garantimos $-(2y_2 + y_1)(y_2 - y_1)^2 = 0$. Logo, $y_1 = -2y_2$. Novamente, substituindo as relações obtidas em 3. temos

$$-(y_2 - y_1)^2(3cy_2^2 + 2dy_2 + 2cy_2y_1 + dy_1 + x_2 + cy_1^2) = 0.$$

Como $y_2 \neq y_1$, podemos escrever $x_2 = -(3cy_2^2 + 2dy_2 + 2cy_2y_1 + dy_1 + cy_1^2)$. Além disso, colocando $y_1 = -2y_2$ em b , obtemos $b = -3cy_2^2$. Usando os mesmos passos na demonstração da Proposição 4.3.8, achamos a curva dos pontos duplos parametrizada por

$$\begin{aligned} & \left(x_2 + \left(\left(-1 - \frac{3(d + 4cy_2 - 5y_2)y_2}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2} \right) \bar{y}_2^2 + \dots \right), -2y_2^3 + \right. \\ & \quad + \frac{(2x_2 + 24cy_2^2 + 9dy_2 - 18y_2^2)y_2}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2} \bar{y}_2^2 + \dots, -y_2^2(3cy_2^2 + 2dy_2 + x_2) + \\ & \quad \left. + \frac{(-7x_2y_2^2 - 18dy_2^3 - 30cy_2^4 + 12cx_2y_2^2 + 36c^2y_2^4 + x_2^2 + 6dx_2y_2 + 9d^2y_2^2)}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2} \bar{y}_2^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Assim, o limite do vetor tangente no ponto $y_2 = 0$ dessa curva é

$$\alpha''(0) = \left(\frac{2(x_2 + 6cy_2^2)}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2}, \frac{2(2x_2 + 24cy_2^2 + 9dy_2 - 18y_2^2)y_2}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2}, \frac{2(-7x_2y_2^2 - 18dy_2^3 - 30cy_2^4 + 12cx_2y_2^2 + 36c^2y_2^4 + x_2^2 + 6dx_2y_2 + 9d^2y_2^2)}{x_2 + 6cy_2^2 + 3dy_2 - 6y_2^2} \right).$$

O plano tangente no ponto (x_1, y_1) é dado pela equação

$$(-x_1y_1^2 + (3-4c)y_1^4 - by_1 - 3cy_1^3 + ay_1^2)X + (2x_1y_14cy_1^3 + b + 3cy_1^2)Y - (x_1 + a + 3y_1^2)Z = 0.$$

Logo, substituindo recursivamente as equações anteriores quando $\alpha''(0)$ pertence ao plano tangente temos

$$\frac{18y_2^3((-16c^2 + 8c)y_2 - 4cd + (16c - 8)dy_2 + (27c^2 - 27c)y_2^2 + 4d^2)}{(-2y_2 + cy_2 + d)} = 0$$

Como $c \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita podemos escrever $d = (-4c + 2)y_2 + \dots$. Aplicado o obtido nas expressões de a e b , garantimos

$$\begin{aligned} b &= (14c - 6)y_2^3 + \dots \\ a &= (3c - 3)y_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos uma curva parametrizada por

$$\{(-3cy_2^2, -2y_2, (3c - 3)y_2^2 + \dots, (14c - 6)y_2^3 + \dots, (-4c + 2)y_2 + \dots) \mid y_2 \in \mathbb{R}\}$$

em $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0)$ que projetada por $\pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ garante a curva $(-3cy_2^2, -2y_2)$ formada pelo bigerme $(A_0S_0)_2$ na vizinhança da singularidade $P_3(c)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$. Portanto, obtemos a $\mathcal{A}$ -adjacência. $\square$

Proposição 4.3.10. *A singularidade $P_3(c)$ é adjacente ao bigerme $A_0S_1^\pm$.*

Demonstração. Considere a deformação versal de $P_3(c)$ dada por

$$F(x, y, u) = (x, xy + y^3 + ay, xy^2 + cy^4 + by + dy^3),$$

com $c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$ e $u = (a, b, c, d)$. Seguindo a demonstração da Proposição 4.3.8, as singularidades bi-locais $A_0S_1^\pm$ ocorrem se, e somente se

- (i) $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ para $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$;
- (ii) Se (x_2, y_2) é um ponto do tipo S_1 , no Teorema 4.3.4 considerando

$$\varphi = \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & x + 3y^2 + a & 2xy + 4cy^3 + b + 3dy^2 \\ 0 & 6y & 2x + 12cy^2 + 6dy \end{vmatrix}$$

temos $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 4x + 12cy^2 + 6dy - 6y^2 + 2a$. Assim, em (x_2, y_2) precisamos ter:

$$4x_2 + 12cy_2^2 + 6dy_2 - 6y_2^2 + 2a = 0. \quad (4.1)$$

O fato de (x_2, y_2) ser um ponto singular implica que $a = -m_1 - 3m_2^2$ e $b = -(2m_1m_2 + 4cm_2^3 + 3dm_2^2)$. Substituindo em (4.1) temos

$$x_2 = -6cy_2^2 - 3dy_2 + 6y_2^2.$$

Aplicando as equações acima na igualdade $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ obtemos:

1. $x_1 = x_2$;
2. $-(2y_2 + y_1)(y_2 - y_1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2y_2$;
3. $27y_2^3(cy_2 + 2y_2 + d) = 0 \Rightarrow d = (-c + 2)y_2$.

Por fim, substituindo d nas expressões de b e x_2 , determinamos a curva

$$\{(-3cy_2^2, -2y_2, (3c - 3)y_2^2, (5c - 6)y_2^3, (-c + 2)y_2) \mid y_2 \in \mathbb{R}\}$$

em $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0)$ que projetada por $\pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ garante a curva $(-3cy_2^2, -2y_2)$ formada pelo bigerme $A_0S_1^\pm$ na vizinhança da singularidade $P_3(c)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$. Portanto, obtemos a $\mathcal{A}$ -adjacência. $\square$

Proposição 4.3.11. *A singularidade $P_3(c)$ é adjacente ao bigerme $A_0S_0|A_1^\pm$.*

Demonstração. Considere a deformação versal de $P_3(c)$ dada por

$$F(x, y, u) = (x, xy + y^3 + ay, xy^2 + cy^4 + by + dy^3),$$

com $c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$ e $u = (a, b, c, d)$. As condições para o bigerme $A_0S_0|A_1^\pm$ são dadas por:

- (i) $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ para $(x_1, y_1) \neq (y_2, y_2)$;
- (ii) O ponto (x_2, y_2) é um ponto de cross-cap;
- (iii) O vetor tangente do cross-cap pertence ao espaço tangente ao espaço tangente a imagem de F_u no ponto (x_1, y_1) .

Como (x_2, y_2) é ponto singular, então $a = -x_2 - 3y_2^2$ e $b = -(2x_2y_2 + 4cy_2^3 + 3dy_2^2)$.

Substituindo-as na igualdade $F(x_1, y_1, u) = F(x_2, y_2, u)$ encontramos:

1. $x_1 = x_2$;
2. $-(2y_2 + y_1)(y_2 - y_1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2y_2$;
3. $-9y_2^2(3cy_2 + x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = -3cy_2^2$.

O plano tangente no ponto (x_1, y_1) é dado pela equação

$$(-x_1y_1^2 + (3-4c)y_1^4 - by_1 - 3cy_1^3 + ay_1^2)X + (2x_1y_14cy_1^3 + b + 3cy_1^2)Y - (x_1 + a + 3y_1^2)Z = 0.$$

O fato do vetor tangente ao cross-cap pertencer ao plano tangente acima garante que

$$27y_2^3(2cy_2 - y_2 - d) = 0.$$

Como $y_2 \neq 0$ obtemos $d = (2c - 1)y_2$. Portanto, substituindo d nas expressões x_1, b determinamos a curva

$$\{(-3cy_2^2, -2y_2, (3c - 3)y_2^2, (-4c + 3)y_2^3, (2c - 1)y_2) \mid y_2 \in \mathbb{R}\}$$

em $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0)$ que projetada por $\pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ garante a curva $(-3cy_2^2, -2y_2)$ formada pelo bigerme $A_0S_0|A_1^\pm$ na vizinhança da singularidade $P_3(c)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$. Portanto, obtemos a $\mathcal{A}$ -adjacência. $\square$

Resumimos os resultados anteriores na Figura 4.5.

Observação 4.3.12. *Note que, não apresentamos se é possível ou não que $P_3(c)$ é adjacente ao bigerme $[A_2]$. No entanto, para o objetivo da tese essa adjacência não é necessária.*

Figura 4.5: $\mathcal{A}$ -adjacências de codimensão 3 a bigermes de codimensão 2 de germes de $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$.

Lugar geométrico das singularidades multi-locais

Neste capítulo obtemos o lugar geométrico das singularidades multi-locais de codimensão 2 em superfícies em $\mathbb{R}^4$ das famílias de funções altura e projeções ortogonais. No Capítulo 4, apresentamos as adjacências que acontecem nas singularidades locais de $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_{2,3}$) de $\mathcal{R}_e^+$ – *codim* 3 (resp $\mathcal{A}_e$ – *codim* 3) para singularidades multi-locais $\mathcal{R}_e^+$ – *codim* 2 (resp $\mathcal{A}_e$ – *codim* 2). Este fato, garante a existência de tais singularidades na vizinhança de singularidades locais.

5.1 A família de funções altura

A família de funções altura H é uma família a 3-parâmetros. Tal fato nos assegura que para superfícies genéricas imensas em $\mathbb{R}^4$ as singularidades de $\text{codim}(H_v, \mathcal{R}_e^+) = 2$ ocorrem em curvas na superfície e as de $\text{codim}(H_v, \mathcal{R}_e^+) = 3$ aparecem em pontos isolados sobre essas curvas, onde $v \in S^3$.

Tomamos a superfície M em um ponto p na forma de Monge

$$f(x, y) = (x, y, f^1(x, y), f^2(x, y)), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad (0, 0) \in U, \quad f(0, 0) = p.$$

Como o estudo é local podemos considerar a família de funções altura como sendo uma família modificada de funções altura em torno da direção normal $(0, 0, 1, 0)$ que

é dada localmente por

$$h(x, y, v) = v_1x + v_2y + f^1(x, y) + v_3f^2(x, y),$$

onde $v = (v_1, v_2, 1, v_3)$ e $h_0 = h(x, y, 0, 0, 1, 0)$. Pela rotação dos eixos coordenados no plano normal podemos assumir que $(0, 0, 1, 0)$ é uma direção degenerada (binormal) e escrever

$$\begin{aligned} f^1(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i}x^{3-i}y^i + \sum_{i=0}^4 a_{4i}x^{4-i}y^i + \sum_{i=0}^5 a_{5i}x^{5-i}y^i + \dots, \\ f^2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 + \sum_{i=0}^3 b_{3i}x^{3-i}y^i + \sum_{i=0}^4 b_{4i}x^{4-i}y^i + \sum_{i=0}^5 b_{5i}x^{5-i}y^i \dots \end{aligned}$$

É claro que podemos simplificar o 2-jato de (f^1, f^2) e considerá-lo como uma das formas normais dos pares binários mencionados anteriormente em [23].

O seguinte resultado segue dos trabalhos de Montaldi em [35, 36, 37].

Teorema 5.1.1. ([34]). *Seja $W \subset J^k(M, \mathbb{R})$ uma subvariedade $\mathcal{A}$ -invariante. Então, para um subconjunto residual de imersões M em $\mathbb{R}^4$ a aplicação k -jato*

$$j_1^k h(f) : M \times S^3 \rightarrow J^k(M, \mathbb{R})$$

é transversal a W .

As singularidades que poderão ocorrer para a família de funções altura sobre uma superfície genérica são as singularidade locais A_k , $1 \leq k \leq 4$ e D_4 e as singularidades multi-locais $2A_1$, $3A_1$, $4A_1$, A_1A_2 , A_1A_3 , $2A_1A_2$ e A_2A_2 . Temos o seguinte resultado.

Proposição 5.1.2. ([10]) *Com as mesmas notações acima, as condições para as singularidades locais genéricas da função altura h_0 são as seguintes:*

$$\begin{aligned} A_2 : & \quad a_{20} \neq 0, \quad a_{33} \neq 0, \\ A_3 : & \quad a_{20} \neq 0, \quad a_{33} = 0, \quad 4a_{20}a_{44} - a_{32}^2 \neq 0, \\ A_4 : & \quad a_{20} \neq 0, \quad a_{33} = 0, \quad 4a_{20}a_{44} - a_{32}^2 = 0, \quad 4a_{20}^2a_{55} - 2a_{20}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{32}^2 \neq 0, \\ D_4 : & \quad a_{20} = 0, \quad a_{33}x^3 + a_{32}x^2y + a_{31}xy^2 + a_{30}y^3 \quad \text{é não degenerado.} \end{aligned}$$

Essas singularidades são desdobradas versalmente pela família de funções altura se, e somente se,

A_2 : *sempre,*

A_3 : $b_{22} \neq 0$ ou $a_{32} \neq 0$,

A_4 : $b_{22}(a_{20}a_{43} - a_{31}a_{32}) - a_{32}(a_{20}b_{33} - b_{21}a_{32}) \neq 0$,

D_4 : $3a_{30}(b_{22}a_{32} - 3b_{21}a_{33}) - a_{31}(b_{22}a_{31} - b_{21}a_{32}) + b_{20}(3a_{31}a_{33} - a_{32}^2) \neq 0$.

5.1.1 As curvas A_3 e A_1A_2 no ponto A_4

No Capítulo 4 vimos que a singularidade A_4 é adjacente as singularidades A_3 e A_1A_2 . Além disso, pela codimensão das singularidades da família de funções altura, somente na vizinhança da singularidade A_4 pode acontecer uma curva multi-local na superfície M .

Teorema 5.1.3. *Seja p uma singularidade A_4 da função altura h_v sobre uma superfície M em $\mathbb{R}^4$. Então existe uma vizinhança de p em M tal que:*

- (1) *O conjunto dos pontos de singularidades A_3 de alguma função altura sobre M forma uma curva suave, que chamamos de curva A_3 . Nas condições acima, a curva A_3 no ponto A_4 é dada por*

$$x = \frac{1}{2} \frac{(4a_{31}a_{32}^2 - 9a_{32}a_{43} + 20a_{55} - b_{33}a_{32}^2)}{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})} y^2 + t.o.s,$$

- (2) *O conjunto dos pontos de singularidades A_1A_2 de alguma função altura sobre M forma uma curva suave, que chamamos de curva A_1A_2 . Nas condições acima, a curva A_1A_2 no ponto A_4 é dada por*

$$x = \frac{1}{16} \frac{(7a_{31}a_{32}^2 - 22a_{32}a_{43} + 60a_{55} - 8a_{32}^2b_{33})}{(a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43})} y^2 + t.o.s$$

- (3) *A curva A_3 e a curva A_1A_2 são genericamente tangente no ponto A_4 e tem contato de ordem 2.*

Aqui, t.o.s significa termos de ordem superior.

Demonstração. Considere a família modificada de funções altura $h : (M \times \mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dada por

$$h(x, y, u, v, w) = ux + vy + f^1(x, y) + wf^2(x, y).$$

e suponha que h é um desdobramento versal de singularidade A_4 , isto é, $a_{33} = 0$, $4a_{44} - a_{32}^2 = 0$, $4a_{55} - 2a_{32}a_{43} + a_{31}a_{32}^2 \neq 0$ e $a_{43} - a_{31}a_{32} - a_{32}b_{33} \neq 0$.

(1). Para ter uma singularidade A_3 é necessário que a parte quadrática de h divida a cúbica no ponto singular (x, y) , isto é,

$$(i) \quad h_x(x, y) = h_y(x, y) = 0,$$

$$(ii) \quad (h_{xy}^2 - h_{xx}h_{yy})(x, y) = 0,$$

$$(iii) \quad (h_{xy}^3 h_{yyy} + 3h_{xy}^2 h_{yy}h_{xyy} - 3h_{xy}h_{yy}^2 h_{xxy} - h_{yy}^3 h_{xxx})(x, y) = 0.$$

Da condição (i), obtemos

$$u = -2x - a_{32}y^2 - 3a_{30}x^2 - 2a_{31}xy + t.o.s.$$

$$v = -a_{31}x^2 - 2a_{32}xy - 2yw + t.o.s.$$

Substituindo-as em (ii) temos

$$w = -a_{32}x + (a_{31}^2 + a_{32}b_{32} - a_{42})x^2 + (2a_{32}a_{31} + 3b_{33}a_{32} - 3a_{43})xy - (1/2)a_{32}^2y^2 + t.o.s.$$

Por fim, colocando as expressões u, v e w em (iii) segue que

$$\begin{aligned} & 2(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})x + (4a_{31}a_{32}^2 - 9a_{32}a_{43} + 20a_{55} - b_{33}a_{32}^2)y^2 + \\ & (-6b_{33}a_{43} + 6a_{32}b_{33}^2 - 8a_{32}b_{44} - 8a_{32}a_{42} + 4a_{32}^2b_{32} + 8a_{54} + 6a_{30}a_{32}^2 - 2a_{31}a_{32}b_{33})yx \\ & + (2b_{33}a_{32}b_{32} - 18a_{30}a_{32}b_{33} - 12a_{32}a_{31}a_{30} - 3a_{41}a_{32} + 2a_{32}^2b_{31} - 4a_{31}a_{42} - 2a_{32}b_{43} + \\ & 2a_{53} + 2a_{31}a_{32}b_{32} - 2b_{33}a_{42} + 18a_{30}a_{43} + 2b_{33}a_{31}^2 + 2a_{31}^3)x^2 + t.o.s. = 0. \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Função Implícita podemos escrever x como uma função de y e temos

$$x = \frac{1}{2} \frac{(4a_{31}a_{32}^2 - 9a_{32}a_{43} + 20a_{55} - b_{33}a_{32}^2)}{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})} y^2 + t.o.s.$$

Portanto, podemos expressar u, v e w em função de y e determinar uma curva suave formada de singularidades A_3 da função altura h_v parametrizada por

$$\{(x, y, u, v, w) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset M \times S^3.$$

Ao projetá-la por $\pi : M \times S^3 \rightarrow M$ obtemos a curva suave desejada.

(2). Para ter uma singularidade A_1A_2 é necessário que, para $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ as seguintes equações sejam satisfeitas:

$$(i) \ h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2),$$

$$(ii) \ h_x(x_i, y_i) = h_y(x_i, y_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2$$

$$(iii) \ (h_{xy}^2 - h_{xx}h_{yy})(x_2, y_2) = 0.$$

A condição (iii) garante que

$$w = -a_{32}x_2 + (-a_{42} + a_{32}b_{32} + a_{31}^2)x_2^2 - (1/2)a_{32}^2y_2^2 + (2a_{31}a_{32} - 3a_{43} + 3b_{33}a_{32})x_2y_2 + t.o.s.$$

Ao substituir em $h_y(x_1, y_1) = h_x(x_1, y_1) = 0$, obtemos

$$v = -2a_{32}x_1y_1 + 2a_{32}x_2y_1 - a_{31}x_1^2 + t.o.s.,$$

$$u = -2x_1 - a_{32}y_1^2 - 2a_{31}x_1y_1 - 3a_{30}x_1^2 + t.o.s.$$

Colocando u, v e w em $h_x(x_2, y_2) = 0$ e usando o teorema da função implícita podemos escrever x_1 como uma função de x_2 e y_2 e ter

$$x_1 = x_2 + a_{31}x_2y_2 + (1/2)a_{32}y_2^2 - (1/2)a_{32}y_1^2 - a_{31}x_2y_1 + t.o.s.$$

Substituindo em $h_y(x_2, y_2) = 0$, temos

$$\frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2 \left((12a_{43} - 12a_{32}a_{31} - 12b_{33}a_{32})x_2 + (60a_{55} + 9a_{31}a_{32}^2 - 24a_{32}a_{43} - 6a_{32}^2b_{33})y_2^2 + (20a_{55} + 5a_{31}a_{32}^2 - 10a_{32}a_{43})y_1^2 + (10a_{31}a_{32}^2 + 40a_{55} - 20a_{32}a_{43})y_2y_1 + t.o.s. \right) = 0.$$

Como h é um desdobramento versal da singularidade A_4 , $a_{43} - a_{32}a_{31} - b_{33}a_{32} \neq 0$ segue do Teorema da Função Implícita que

$$x_2 = \frac{5}{6} \frac{(a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}a_{43} + 4a_{55})}{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})} y_1y_2 + \frac{5}{12} \frac{(a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}a_{43} + 4a_{55})}{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})} y_1^2 + \frac{1}{4} \frac{(20a_{55} - 8a_{32}a_{43} + 3a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}^2b_{33})}{(a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43})} y_2^2 + t.o.s.$$

Finalmente ao aplicar todas as equações obtidas em $h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2) = 0$, temos

$$-\frac{1}{12}(2y_1 + 3y_2)(y_1 - y_2)^4(a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}a_{43} + 4a_{55}) = 0.$$

Como $y_1 - y_2 \neq 0$ e $a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}a_{43} + 4a_{55} \neq 0$, obtemos $y_1 = -(3/2)y_2$.

Assim o conjunto dos pontos (p, v) em $M \times S^3$ tal que h_v tem uma singularidade A_1A_2 em p é uma curva suave. Projetando esta curva em M obtemos uma curva parametrizada por

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{36} \frac{(7a_{31}a_{32}^2 - 22a_{32}a_{43} + 60a_{55} - 8a_{32}^2b_{33})}{(a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43})} y_1^2 + t.o.s. \\ y_2 &= -(2/3)y_1 \end{aligned}$$

(3). Como a curva A_3 é parametrizada por

$$y \mapsto \left(\frac{1}{2} \frac{(4a_{31}a_{32}^2 - 9a_{32}a_{43} + 20a_{55} - b_{33}a_{32}^2)}{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})} y^2 + t.o.s., y \right)$$

e a curva A_1A_2 por

$$y \mapsto \left(\frac{1}{16} \frac{(7a_{31}a_{32}^2 - 22a_{32}a_{43} + 60a_{55} - 8a_{32}^2b_{33})}{(a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43})} y^2 + t.o.s., y \right)$$

as duas curvas são tangentes com ordem de contato 2 na singularidade A_4 . $\square$

Observação 5.1.4. 1. As curvas A_3 e A_1A_2 nunca são iguais. De fato, considere c_1 e c_2 os coeficientes de grau 2 das curvas A_3 e A_1A_2 , respectivamente. Então

$$c_1 - c_2 = -\frac{25}{16} \frac{(a_{31}a_{32}^2 - 2a_{32}a_{43} + 4a_{55})}{a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43}}$$

é diferente de zero tanto pela condição de existência quanto pela de versalidade da singularidade A_4 . Além disso, acontecem todas as posições relativas entre as curvas A_1A_2 e A_3 no ponto A_4 .

2. Embora a curva A_3 foi determinada e estudada em [10, 31], ela não foi tratada no enfoque do estudo de singularidades multi-locais. Em [31] as autoras determinaram que a curva A_3 é suave e tangente ao conjunto parabólico. Em [10] descrevem todas as possíveis transições do conjunto parabólico e da curva A_3 que pode ocorrer em famílias de superfícies genéricas a 1-parâmetro.

Finalizamos a busca de singularidades multi-locais para a família de funções altura e iniciaremos, na próxima seção, a procura pelas curvas multi-locais que possam acontecer para a família de projeções ortogonais.

5.2 A família de projeções ortogonais

O método que descrevemos no Capítulo 4 também pode ser usado para determinar as adjacências das singularidades locais e encontrar curvas suaves formadas pelas singularidades locais da projeção ortogonal.

5.2.1 Algumas caracterizações locais

Considere a família de projeções ortogonais em $\mathbb{R}^4$ dado por $P : \mathbb{R}^4 \times S^3 \rightarrow TS^3$ com

$$P(p, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, p - \langle p, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}).$$

onde a segunda componente de P é denotada por $P_{\mathbf{u}}(p) = p - \langle p, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$. Para $\mathbf{u}$ fixado, a projeção pode ser vista localmente em torno de $p \in M$ como um germe $P_{\mathbf{u}} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$.

Como no caso da família de funções altura, vamos estudar os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 3 ($B_3, C_3, H_3, S_3, P_3(c)$) adjacentes aos bigermes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2. Encontramos curvas robustas de tais singularidades locais e multi-locais genéricas na superfície M .

Relembremos que a aplicação $P_{\mathbf{u}}$ possui singularidade pior que cross-cap quando $\mathbf{u}$ é uma direção assintótica. Além disso, em pontos hiperbólicos (parabólicos) temos duas (uma) direções assintóticas.

Denotamos por (X, Y, Z, W) as coordenadas em $\mathbb{R}^4$ e fixamos $\mathbf{u} = (0, 1, 0, 0)$ uma direção assintótica. Parametrizamos as direções vizinhas na forma $(u, 1, v, w)$. Em vez de projetar ortogonalmente ao plano $(u, 1, v, w)^\perp$, projetamos ao plano fixo

(X, Z, W) . A família modificada de projeção é dada por

$$\begin{aligned} P : \quad (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, 0) \\ ((x, y), (u, v, w)) &\mapsto P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy), \end{aligned}$$

com $P_0(x, y) = (x, f^1(x, y), f^2(x, y))$.

As singularidades S_k, B_k e C_3 de P_0 ocorrem em pontos hiperbólicos. Nestes casos, podemos tomar $j^2(f^1, f^2) = (x^2, y^2)$ e assim

$$(f^1, f^2) = (x^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^4 a_{4i} x^{4-i} y^i + \dots, y^2 + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^4 b_{4i} x^{4-i} y^i + \dots).$$

Proposição 5.2.1. *Nas notações acima, as condições para a projeção P_0 ter as seguintes $\mathcal{A}$ -singularidades genéricas da Tabela 2.1 são:*

$$B_1 = S_1 : \quad a_{31} \neq 0, \quad a_{33} \neq 0;$$

$$B_2 : \quad a_{31} \neq 0, \quad a_{33} = 0, \quad 4a_{32}^2 b_{33}^2 + 8a_{31} a_{44} b_{33} - 2a_{32} a_{43} b_{33} - 4a_{31} a_{55} + a_{43}^2 \neq 0;$$

$$\begin{aligned} B_3 : \quad &a_{31} \neq 0, \quad a_{33} = 0, \quad 4a_{32}^2 b_{33}^2 + 8a_{31} a_{44} b_{33} - 2a_{32} a_{43} b_{33} - 4a_{31} a_{55} + a_{43}^2 = 0; \\ &\xi \neq 0 \end{aligned}$$

$$S_2 : \quad a_{31} = 0, \quad a_{33} \neq 0, \quad a_{41} - a_{32} b_{31} \neq 0;$$

$$S_3 : \quad a_{31} = 0, \quad a_{33} \neq 0, \quad a_{41} - a_{32} b_{31} = 0;$$

$$3a_{33} b_{31}^2 - 4a_{42} b_{31} + 4a_{51} - 4a_{32}(-b_{31} b_{32} + b_{41}) \neq 0;$$

$$C_3 : \quad a_{31} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad -a_{32} b_{31} + a_{41} \neq 0, \quad -a_{32} b_{33} + a_{43} \neq 0;$$

onde a expressão ξ depende dos coeficientes do 7-jato de f^1 e f^2 .

Demonstração. Sabemos que P_0 tem uma singularidade em $(0, 0)$, pois $f^1, f^2 \in \mathcal{M}_2^2$. Note que, por mudanças de coordenadas na meta, é fácil eliminar os termos x^3 na segunda e terceira coordenadas em $j^3 P_0$. Assim podemos tomar

$$j^3 P_0 \sim_{\mathcal{A}^3} (x, x^2 + a_{31} x^2 y + a_{32} x y^2 + a_{33} y^3, y^2 + b_{31} x^2 y + b_{32} x y^2 + b_{33} y^3).$$

Com a mudança de coordenada na fonte $(x, y) \mapsto (X, Y - \frac{1}{2}(b_{31} X^2 + b_{32} XY + b_{33} Y^2))$

$$j^3 P_0 \sim_{\mathcal{A}^3} (X, a_{31} X^2 Y + a_{32} X Y^2 + a_{33} Y^3, Y^2).$$

Com a mudança na meta: $(u, v, w) \mapsto (u, v - uw, w)$, obtemos

$$j^3 P_0 \sim_{\mathcal{A}^3} (X, a_{31}X^2Y + a_{33}Y^3, Y^2).$$

Logo, P_0 tem uma singularidade S_1 se, e somente se, $a_{31} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$.

Se $a_{31} = 0$ e $a_{33} \neq 0$, vamos analisar o 4-jato de P_0 . Observe que as mudanças que fizemos anteriormente afetam os jatos de ordem superior a 3 de P_0 , e neste caso o 4-jato de P_0 é dado, nas coordenadas x e y , por

$$(x, a_{33}y^3 + (-a_{32}b_{31} + a_{41})x^3y + (-\frac{3}{2}a_{33}b_{31} - a_{32}b_{32} + a_{42})y^2x^2 + (-a_{32}b_{33} + a_{43} - \frac{3}{2}a_{33}b_{32})xy^3 + (-\frac{3}{2}a_{33}b_{33} + a_{44})y^4, y^2 - \frac{1}{4}b_{31}^2x^4 + (-b_{32}b_{31} + b_{41})yx^3 + (-\frac{3}{2}b_{33}b_{31} - \frac{3}{4}b_{32}^2 + b_{42})y^2x^2 + (-2b_{33}b_{32} + b_{43})y^3x + (-\frac{5}{4}b_{33}^2 + b_{44})y^4).$$

Usamos a mudança na meta $(u, v, w) \mapsto (u, v - a_{40}u^4 - a_{44}w^2 - a_{42}vu^2 - \frac{a_{43}}{a_{33}}uv, w - b_{40}u^4 - b_{44}w^2 - b_{42}wu^2 - \frac{b_{43}}{a_{33}}uv)$. Desta maneira,

$$j^4 P_0 \sim_{\mathcal{A}^4} (x, a_{33}y^3 + (-a_{32}b_{31} + a_{41})x^3y, y^2 + (-b_{32}b_{31} + b_{41})x^3y).$$

Com a mudança na fonte $(x, y) \mapsto (X, Y - \frac{(-b_{32}b_{31} + b_{41})}{2}X^3)$ obtemos

$$j^4 P_0 \sim_{\mathcal{A}^4} (X, a_{33}Y^3 + (-a_{32}b_{31} + a_{41})X^3Y, Y^2),$$

assim a singularidade de P_0 é de tipo S_2 se, e somente se, $(-a_{32}b_{31} + a_{41}) \neq 0$.

Se $a_{33} \neq 0$, $a_{31}, (-a_{32}b_{31} + a_{41}) = 0$, precisamos analisar o 5-jato de P_0 . Novamente, as mudanças que fizemos antes, interferem nos jatos de ordem superior a 4 de P_0 . De maneira análoga também garantimos que P_0 tem uma singularidade S_3 se, e somente se, $3a_{33}b_{31}^2 - 4a_{42}b_{31} + 4a_{51} - 4a_{32}(-b_{31}b_{32} + b_{41}) \neq 0$.

Os casos para as singularidades C_3 e B_k com $k = 2, 3$ são análogos ao caso S_k . As mudanças de coordenadas podem ser encontradas em [32] e os cálculos são relativamente simples e foram feitos com a ajuda do software MAPLE. $\square$

Proposição 5.2.2. *Nas condições da Proposição 5.2.1, as singularidades B_1, B_2, S_2 e C_3 de P_0 são versalmente desdobradas pela família de projeções ortogonais P se,*

e somente se

$B_1 = S_1$: sempre

$$B_2 : \quad a_{32}^2 - 4a_{44} \neq 0 \text{ e } a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43} \neq 0$$

$$S_2 : \quad -12a_{30}a_{32} - 8a_{32}b_{32} - 12a_{33}b_{31} + 8a_{42} \neq 0$$

$$C_3 : \quad (b_{31}a_{32} - a_{41})(a_{32}^2 - 4a_{44}) - (-\frac{1}{4}a_{43} + \frac{1}{4}b_{33}a_{32})(a_{30}a_{32} + \frac{2}{3}b_{32}a_{32} - \frac{2}{3}a_{42}) \neq 0$$

Demonstração. A família P é sempre um desdobramento versal em uma singularidade $B_1 = S_1$, pois

$$j^3\{T\mathcal{A} \cdot P_0\}_{\mathcal{E}(2,3)} + \mathbb{R}\{P_u, P_v, P_w\} = J^3(2, 3).$$

De fato, chamando $j^3\{T\mathcal{A} \cdot P_0\}_{\mathcal{E}(2,3)} + \mathbb{R}\{P_u, P_v, P_w\}$ de V , temos obviamente que $V \subset J^3(2, 3)$. Vamos mostrar que $J^3(2, 3) \subset V$. Por questão de notação chamamos $(P_0^1, P_0^2, P_0^3) = (g_1, g_2, g_3)$. Segue que

$$\begin{aligned} (x^k, 0, 0) &= ((g_1)^k, 0, 0) & (0, x^k, 0) &= (0, (g_2)^k, 0) & (0, 0, x^k) &= (0, 0, (g_3)^k) \\ (xy^2, 0, 0) &= (g_1g_3, 0, 0) & (0, xy^2, 0) &= (0, g_1g_3, 0) & (0, 0, xy^2) &= (0, 0, g_1g_3) \\ (x^2y, 0, 0) &= x^2yj^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0) & - & & (0, 0, x^2y) &= \frac{1}{2}x^2j^3(\frac{\partial}{\partial y}P_0) \\ (y^3, 0, 0) &= y^3j^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0) & - & & (0, 0, y^3) &= \frac{1}{2}y^2j^3(\frac{\partial}{\partial y}P_0) \end{aligned}$$

Isto é $(x^k, 0, 0), (0, x^k, 0), (0, 0, x^k), (h, 0, 0), (0, 0, h) \in V$ para $h \in \mathcal{M}_2^3$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Logo se $a_{31} \neq 0$, $(0, x^2y, 0) = \frac{1}{a_{31}}xj^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0)$. No mais, $(0, 0, y^2) = (0, 0, g_3)$. Assim, se $a_{33} \neq 0$ temos

$$(0, y^3, 0) = \frac{1}{3a_{33}}yj^3(\frac{\partial}{\partial y}P_0)$$

Portanto, $(0, h, 0) \in V$ para $h \in \mathcal{M}_2^3$. Vamos para os termos de ordem 2.

$$\begin{aligned} (xy, 0, 0) &= xyj^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0) & - & & (0, 0, xy) &= \frac{1}{2}xj^3(\frac{\partial}{\partial y}P_0) \\ (y^2, 0, 0) &= y^2j^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0) & (0, y^2, 0) &= (0, g_3, 0) & (0, 0, y^2) &= \frac{1}{2}y^2j^3(\frac{\partial}{\partial y}P_0) \end{aligned}$$

Como $P_u = (y, 0, 0)$, segue que $(0, xy, 0) = \frac{1}{2}yj^3(\frac{\partial}{\partial x}P_0)$. Por fim $P_v = (0, y, 0)$, $P_w = (0, 0, y)$ e $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ provém do grupo $\mathcal{L}$.

Os cálculos para os outros casos são análogos e foram feitos com a ajuda do software MAPLE. □

As singularidade H_k e $P_3(c)$ ocorrem em pontos parabólicos. Nestes casos, tomamos $j^2(f^1, f^2) = (x^2, xy)$.

Proposição 5.2.3. *Nas notações acima, as condições para a projeção P_0 ter as seguintes $\mathcal{A}$ -singularidades genéricas da Tabela 2.1 são:*

$$\begin{aligned} H_2 : \quad & a_{33} \neq 0, (-b_{32}b_{44} + b_{55})a_{33}^2 + ((a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32} - a_{55})b_{33} - a_{44}b_{44})a_{33} - \\ & -a_{32}a_{44}b_{33}^2 + a_{44}^2b_{33} \neq 0; \\ H_3 : \quad & a_{33} \neq 0, (-b_{32}b_{44} + b_{55})a_{33}^2 + ((a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32} - a_{55})b_{33} - a_{44}b_{44})a_{33} - \\ & -a_{32}a_{44}b_{33}^2 + a_{44}^2b_{33} = 0, \zeta \neq 0; \\ P_3(c) : \quad & a_{33} = 0, b_{33}a_{32}a_{44} \neq 0, \frac{a_{44}}{b_{33}a_{32}} \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

onde a expressão ζ depende dos coeficientes do 8-jato de f^1 e f^2 . A singularidade $P_3(c)$ é versalmente desdobrada pela família de projeções ortogonais se, e somente se

$$P_3(c) : 5a_{32}b_{33} - 6b_{33}^2 - 4a_{44} \neq 0.$$

Demonstração. A prova segue de maneira similar feito nas Proposições 5.2.1 e 5.2.2 e os cálculos são feitos com ajuda do software MAPLE. $\square$

Observação 5.2.4. Note que nas Proposições 5.2.2 e 5.2.3 não apresentamos as condições de versalidade das singularidades S_3 , B_3 , H_2 e H_3 , pois as condições dependem pelo menos do 5-jato de (f^1, f^2) e, neste caso, não tem importância nos resultados ao decorrer da tese.

Como estamos interessados nas curvas que acontecem na superfície M , as condições descritas nas proposições anteriores são essenciais para determiná-las.

Proposição 5.2.5. *Seja p um ponto hiperbólico sobre uma superfície M em $\mathbb{R}^4$. Então existe uma vizinhança de p em M tal que:*

- (1). *O conjunto dos pontos de singularidades B_2 de alguma projeção ortogonal P_u sobre M forma uma curva suave, que chamamos de curva B_2 . Nas condições*

acima, a curva B_2 é dada por

$$(-a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33})x - (a_{32}^2 - 4a_{44})y + t.o.s = 0.$$

(2). Se p é uma singularidade B_3 de P_u , a curva B_2 é parametrizada por

$$\left(x, -\frac{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})}{(a_{32}^2 - 4a_{44})}x + Ax^2 + \dots \right),$$

onde a expressão A depende dos coeficientes do 5-jato de f^1 e f^2 .

(3). Se p é uma singularidade A_4 da função altura h_v , a curva B_2 tem a seguinte equação

$$x = \frac{1}{2} \frac{(20a_{55} - 9a_{43}a_{32} - a_{32}^2b_{33} + 4a_{31}a_{32}^2)}{(-a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33})}y^2 + t.o.s$$

(4). Se p é uma singularidade C_3 de P_u , a curva B_2 é dada por

$$(-a_{43} + a_{32}b_{33})x - (a_{32}^2 - 4a_{44})y + t.o.s = 0.$$

Demonstração. (1). No ponto hiperbólico podemos considerar $(Q_1, Q_2) = (x^2, y^2)$. Então P_0 tem uma singularidade B_2 se, e somente se, $a_{33} = 0$ e $a_{31} \neq 0, 4a_{32}^2b_{33}^2 + 8a_{31}a_{44}b_{33} - 2a_{32}a_{43}b_{33} - 4a_{31}a_{55} + a_{43}^2 \neq 0$. Essa singularidade é versalmente desdobrada pela família de projeções

$$P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy),$$

se, e somente se, $a_{32}^2 - 4a_{44} \neq 0$ e $a_{32}a_{31} + b_{33}a_{32} - a_{43} \neq 0$. Para facilitar os cálculos, realizamos a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y})$. Desta forma, com abuso de notação, podemos tomar projeção da forma

$$P_{\mathbf{u}} = (\bar{x}, f^1(\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y}) - v\bar{y}, f^2(\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y}) - w\bar{y}).$$

Escrevemos $(g^1, g^2, g^3) = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy)$. Logo se (x, y) é um ponto singular de $P_{\mathbf{u}}$ segue que

$$w = 2y + b_{31}x^2 + 2b_{32}yx + 3b_{33}y^2 + \dots$$

$$v = a_{31}x^2 + 2a_{32}yx + 2ux + \dots$$

Como B_2 é uma singularidade pior que um cross-cap o critério no Teorema 4.3.4 garante, pelo teorema da função implícita que

$$u = -a_{32}y - a_{31}x + \left(-\frac{3}{2}a_{43} + 2a_{32}a_{31}\right)y^2 + \\ \left(-2a_{42} + 2a_{31}^2 + 3a_{32}a_{30} + a_{32}b_{32}\right)yx + \left(3a_{31}a_{30} - \frac{3}{2}a_{41} + b_{31}a_{32}\right)x^2 + \dots$$

A condição para a singularidade B_2 é dada por

$$-g_{yyy}^2 g_{yy}^3 + g_{yy}^2 g_{yyy}^3 = 0.$$

Substituindo as expressões de u, v e w na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} &(-a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33})x + (-4a_{44} + a_{32}^2)y + \\ &\left(-a_{32}\left(-\frac{3}{2}a_{43} + 2a_{32}a_{31}\right) - a_{31}a_{32}^2 - 10a_{55} + 4a_{43}a_{32} \right. \\ &\quad \left. - (12a_{44} - 3a_{32}^2)b_{33} + (-2a_{32}^2 + 6a_{44})b_{33}\right)y^2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Assim o conjunto dos pontos $(p, \mathbf{u})$ em $M \times S^3$ tal que $P_{\mathbf{u}}$ tem singularidade B_2 em p é uma curva suave. Projetando esta curva em M obtemos a curva suave desejada.

(2). Na singularidade B_3 temos que $4a_{32}^2 b_{33}^2 + 8a_{31}a_{44}b_{33} - 2a_{32}a_{43}b_{33} - 4a_{31}a_{55} + a_{43}^2 = 0$ e, neste caso, a curva B_2 é dada pelo teorema da função implícita pela parametrização

$$\left(x, -\frac{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})}{(a_{32}^2 - 4a_{44})}x + Ax^2 + \dots\right),$$

onde A é uma grande expressão que depende dos coeficientes do 5-jato de f^1 e f^2 .

(3). Por outro lado, na singularidade A_4 a condição $(-4a_{44} + a_{32}^2) = 0$ é satisfeita, então a curva B_2 no ponto A_4 é dada por

$$\begin{aligned} &\left(-a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33}\right)x + \\ &\left(-a_{32}\left(-\frac{3}{2}a_{43} + 2a_{32}a_{31}\right) - a_{31}a_{32}^2 - 10a_{55} + 4a_{43}a_{32} - \frac{1}{2}a_{32}^2 b_{33}\right)y^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Precisamos voltar ao sistema de coordenadas inicial pela mudança de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$. Portanto, obtemos a curva desejada.

(4). No caso da singularidade C_3 , basta tomar as condições $a_{31} = a_{33} = 0$, $-a_{32}b_{31} + a_{41} \neq 0$, $-a_{32}b_{33} + a_{43} \neq 0$ na curva B_2 e temos a expressão da curva. $\square$

Observação 5.2.6. Como a curva B_2 ao longo de uma direção assintótica é igual a curva A_3 ao longo de uma direção binormal associada a direção assintótica, segue que a curva B_2 descrita no item (2) da Proposição 5.2.5 é igual a curva descrita no Teorema 5.1.3.

O próximo resultado já foi observado em [10, 31].

Proposição 5.2.7. *Seja p um ponto hiperbólico e uma singularidade B_2 de $P_{\mathbf{u}}$. Se P é um desdobramento versal da singularidade B_2 , então a curva B_2 é transversal as direções assintóticas, exceto quando p é singularidade A_4 de h_v onde v é uma direção binormal associada a $\mathbf{u}$.*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.5, a curva B_2 é singular se, e somente se,

$$(-a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33}, -4a_{44} + a_{32}^2) = (0, 0).$$

Isto acontece exatamente quando h_v tem singularidade A_4 e a família de função altura não é um desdobramento versal desta singularidade. Considerando que genericamente a família P é um desdobramento versal de B_2 , um vetor tangente a curva B_2 é dado por

$$(4a_{44} - a_{32}^2, -a_{43} + a_{32}a_{31} + a_{32}b_{33}).$$

Assim a direção assintótica $(0, 1)$ é transversal a curva B_2 , se e somente se, $-4a_{44} + a_{32}^2 \neq 0$ e é tangente a curva caso contrário. $\square$

Como consequência conseguimos um resultado que relaciona a singularidade da família de funções altura H e com a singularidade da família de projeção P .

Proposição 5.2.8. *A família de funções altura H é um desdobramento versal da singularidade A_4 se, e somente se, a curva B_2 é regular.*

Demonstração. A prova segue direta da Proposição 5.2.7. $\square$

Proposição 5.2.9. *Seja p um ponto hiperbólico sobre uma superfície M em $\mathbb{R}^4$. Então existe uma vizinhança de p em M tal que:*

(1). O conjunto dos pontos de singularidades S_2 de alguma projeção ortogonal P_u sobre M forma uma curva suave, que chamamos de curva S_2 . Nas condições acima, a curva S_2 é dada por

$$3(b_{31}a_{32} - a_{41})x + (3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33})y + t.o.s = 0.$$

(2). Se p é uma singularidade S_3 de P_u , a curva S_2 é dada por

$$y = -\frac{1}{2} \frac{(-10b_{31}a_{32}b_{32} + 12a_{32}b_{41} + 10a_{42}b_{31} - 6b_{31}^2a_{33} + 3a_{30}b_{31}a_{32} - 12a_{51})}{(3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33})} x^2 + t.o.s$$

(3). Se p é uma singularidade C_3 de P_u , a curva S_2 é dada por

$$3(b_{31}a_{32} - a_{41})x + (3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42})y + t.o.s = 0.$$

Demonstração. (1). No ponto hiperbólico tomamos $(Q_1, Q_2) = (x^2, y^2)$, isto é, pela classificação apresentada anteriormente, temos que P_0 é a singularidade S_2 se, e só se, $a_{31} = 0$, $a_{41} - b_{31}a_{32} \neq 0$. Essa singularidade é versalmente desdobrada pela família de projeções

$$P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy),$$

se, e somente se, $-12a_{30}a_{32} - 8a_{32}b_{32} - 12a_{33}b_{31} + 8a_{42} \neq 0$. Para facilitar os cálculos, realizamos a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y})$. Desta forma, com abuso de notação, podemos tomar projeção da forma

$$P_{\mathbf{u}} = (\bar{x}, f^1(\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y}) - v\bar{y}, f^2(\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y}) - w\bar{y}).$$

Escrevemos $(g^1, g^2, g^3) = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy)$. Logo se (x, y) é um ponto singular de $P_{\mathbf{u}}$ segue que

$$\begin{aligned} w &= 2y + b_{31}x^2 + 2b_{32}yx + 3b_{33}y^2 + \dots \\ v &= 2ux + 3a_{33}y^2 + 2a_{32}yx + \dots \end{aligned}$$

Como S_2 é uma singularidade pior que um cross-cap o critério do Teorema 4.3.4 garante pelo teorema da função implícita que

$$\begin{aligned} u = & -a_{32}y + \left(-\frac{3}{2}a_{43} + 3b_{32}a_{33}\right)y^2 + (-2a_{42} + 3b_{31}a_{33} + 3a_{32}a_{30} + b_{32}a_{32})yx \\ & + \left(-\frac{3}{2}a_{41} + b_{31}a_{32}\right)x^2 + \dots \end{aligned}$$

A condição para a singularidade S_2 é dada por

$$\begin{aligned} & -g_{xy}^2(g_{yy}^3)^3 + 2g_{xy}^3(g_{yy}^3)^2g_{xyy}^2 - 2g_{xy}^3g_{yy}^3g_{yy}^2g_{xyy}^3 + g_{yy}^2g_{xxy}^3(g_{yy}^3)^2 - \\ & -(g_{xy}^3)^2g_{yy}^2g_{yy}^3 + (g_{xy}^3)^2g_{yy}^2g_{yy}^3 = 0 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de u, v e w na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} & 16\left(3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33}\right)y + 48\left(b_{31}a_{32} - a_{41}\right)x + \\ & \left(-144a_{41}b_{32} + 48a_{32}b_{41} + 80a_{42}b_{31} - 48b_{31}^2a_{33} \right. \\ & \left. - 48a_{30}(-(3/2)a_{41} + b_{31}a_{32}) + 4(16b_{31}b_{32} + 12b_{41})a_{32}\right)x^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Assim o conjunto dos pontos $(p, \mathbf{u})$ em $M \times S^3$ tal que $P_{\mathbf{u}}$ tem singularidade S_2 em p é uma curva suave. Projetando esta curva em M obtemos a curva suave desejada.

(2). Por outro lado, se p é singularidade S_3 de P_0 , então $b_{31}a_{32} - a_{41} = 0$, logo a curva S_2 no ponto S_3 é dada por

$$\begin{aligned} & \left(3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33}\right)y + \\ & \left(-5b_{31}a_{32}b_{32} + 6a_{32}b_{41} + 5a_{42}b_{31} - 3b_{31}^2a_{33} + \frac{3}{2}a_{30}b_{31}a_{32}\right)x^2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Precisamos voltar ao sistema de coordenadas inicial pela mudança de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$. Portanto, obtemos a curva desejada.

(3). Se p é uma singularidade C_3 de P_0 , então $a_{31} = a_{33} = 0$, $-a_{32}b_{31} + a_{41} \neq 0$ e $-a_{32}b_{33} + a_{43} \neq 0$ e neste caso a curva S_2 tem a expressão dada por

$$\begin{aligned} & \left(3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42}\right)y + 3\left(b_{31}a_{32} - a_{41}\right)x + \left(-9a_{41}b_{32} + 3a_{32}b_{41} \right. \\ & \left. + 5a_{42}b_{31} - 3a_{30}(-\frac{3}{2}a_{41} + b_{31}a_{32}) + (4b_{31}b_{32} + 3b_{41})a_{32}\right)x^2 + \dots = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Como consequência obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.2.10. *Seja p ponto hiperbólico e p uma singularidade S_2 de P_0 . A curva S_2 é regular se, e somente se, a família de projeção ortogonal P é um desdobramento versal de S_2 . Além disso, a curva S_2 é transversal em uma direção assintótica; e a outra direção assintótica é tangente a curva S_2 no ponto S_3 .*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.9 a curva S_2 é singular, se, e somente se,

$$\left(3(b_{31}a_{32} - a_{41}), (3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33}) \right) = (0, 0).$$

Equivalentemente, p é uma singularidade S_3 e a família de projeção ortogonal P não é um desdobramento versal desta singularidade.

O vetor tangente é dado por

$$\left((3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33}), -3(b_{31}a_{32} - a_{41}) \right).$$

Se o desdobramento é versal, então $(3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42} + 3b_{31}a_{33}) \neq 0$. Logo, se $(b_{31}a_{32} - a_{41}) \neq 0$, então a direção assintótica $(0, 1)$ é transversal a curva S_2 . Se $(b_{31}a_{32} - a_{41}) = 0$, isto é, p é uma singularidade S_3 , a direção assintótica $(1, 0)$ é tangente a curva. $\square$

Proposição 5.2.11. *Seja p um ponto hiperbólico e uma singularidade C_3 de P_0 . Se a família de projeção ortogonal P é um desdobramento versal de C_3 , então a curva S_2 e a curva B_2 são regulares e se encontram transversalmente em C_3 .*

Demonstração. No ponto C_3 , o 1-jato das curvas equações das B_2 e S_2 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} B_2 : & (-a_{43} + a_{32}b_{33})x - (a_{32}^2 - 4a_{44})y \\ S_2 : & 3(b_{31}a_{32} - a_{41})x + (3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42})y \end{aligned}$$

As curvas são transversais se e somente se

$$\begin{vmatrix} (-a_{43} + a_{32}b_{33}) & -(a_{32}^2 - 4a_{44}) \\ 3(b_{31}a_{32} - a_{41}) & (3a_{32}a_{30} + 2b_{32}a_{32} - 2a_{42}) \end{vmatrix} \neq 0$$

que é exatamente a condição de versalidade de P na singularidade C_3 . $\square$

Observação 5.2.12. Para superfícies em $\mathbb{R}^3$ a família de funções altura é versal na singularidade A_3 se, e somente se, a curva parabólica é regular. Para superfícies em $\mathbb{R}^4$ as Proposições 5.2.8 e 5.2.10 mostram que o mesmo comportamento acontece com as curvas B_2 e S_2 .

A Figura 5.1 mostram como as curvas se comportam nas direções assintóticas.

Figura 5.1: Curvas B_2 e S_2 na região hiperbólica.

Apresentamos agora o comportamento das curvas no conjunto parabólico. Necessitamos primeiro exibir a curva parabólica o qual no auxiliará nos resultados que vamos mostrar subsequentemente. A curva parabólica é o conjunto de zeros da função

$$\delta = (an - cl)^2 - 4(am - bl)(bn - cm).$$

Tomemos $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$ e escreveremos f^1 e f^2 na forma

$$\begin{aligned} f^1 &= x^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} a_{4i}x^{4-i}y^i + \dots \\ f^2 &= xy + b_{30}x^3 + b_{31}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} b_{4i}x^{4-i}y^i + \dots \end{aligned}$$

O 2-jato dos coeficientes de a, b, c, l, m e n são dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}f_{xx}^1 = 1 + 3a_{30}x + a_{31}y + 6a_{40}x^2 + 3a_{41}xy + a_{42}y^2 \\ b &= \frac{1}{2}f_{xy}^1 = a_{31}x + a_{32}y + \frac{3}{2}a_{41}x^2 + 2a_{42}xy + \frac{3}{2}a_{43}y^2 \\ c &= \frac{1}{2}f_{yy}^1 = a_{32}x + 3a_{33}y + a_{42}x^2 + 3a_{43}xy + 6a_{44}y^2 \\ l &= \frac{1}{2}f_{xx}^2 = 3b_{30}x + b_{31}y + 6b_{40}x^2 + 3b_{41}xy + b_{42}y^2 \\ m &= \frac{1}{2}f_{xy}^2 = \frac{1}{2} + b_{31}x + b_{32}y + \frac{3}{2}b_{41}x^2 + 2b_{42}xy + \frac{3}{2}b_{43}y^2 \\ n &= \frac{1}{2}f_{yy}^2 = b_{32}x + 3b_{33}y + b_{42}x^2 + 3b_{43}xy + 6b_{44}y^2 \end{aligned}$$

Então a curva parabólica Δ é dada por

$$\begin{aligned} & a_{32}x + 3a_{33}y + \left(b_{32}^2 - 2a_{31}b_{32} + 2a_{32}b_{31} + a_{42} + (2b_{31} + 3a_{30})a_{32}\right)x^2 \\ & + 2\left(3b_{33}b_{32} - 3a_{31}b_{33} + 3a_{33}b_{31} + \frac{3}{2}a_{43} + (b_{32} + \frac{1}{2}a_{31})a_{32}\right. \\ & + \left.3(b_{31} + \frac{3}{2}a_{30})a_{33}\right)xy + 3\left(3b_{33}^2 - 2a_{32}b_{33} + 2a_{33}b_{32} + 2a_{44}\right. \\ & + \left.2(b_{32} + \frac{1}{2}a_{31})a_{33}\right)y^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

As singularidades H_3 e $P_3(c)$ de $P_{\mathbf{u}}$ pertencem ao conjunto parabólico. Desta maneira temos o seguinte resultado.

Proposição 5.2.13. (1). Se p é uma singularidade H_3 de P_0 , a curva parabólica tem a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} & \left(x, -\frac{1}{3}\frac{a_{32}}{a_{33}}x - \frac{1}{9a_{33}^2}(6a_{31}a_{32}a_{33}b_{33} - 6a_{31}a_{33}^2b_{32} - 2a_{32}^3b_{33} + 2a_{32}^2a_{33}b_{32} + 3a_{32}^2b_{33}^2 - \right. \\ & \quad \left. - 6a_{32}a_{33}b_{32}b_{33} + 3a_{33}^2b_{32}^2 + 2a_{32}^2a_{44} - 3a_{32}a_{33}a_{43} + 3a_{33}^2a_{42})x^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

(2). Se p é uma singularidade $P_3(c)$ de P_0 , a curva parabólica tem a seguinte parametrização:

$$\left(\frac{3(2a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}}y^2 + \dots, y\right).$$

Demonstração. (1). A singularidade H_3 acontece se, e somente se as condições da Proposição 5.2.3 são satisfeitas. Então temos a expressão da curva Δ pelo teorema da função implícita.

(2). A singularidade $P_3(c)$ acontece sobre esta curva se, e somente se, $a_{33} = 0$ e $a_{32} \neq 0$. Então pelo teorema da função implícita o resultado segue. $\square$

Uma consequência geométrica desse fato foi descrita em [10]. De qualquer maneira, o seguinte resultado reafirma tais caracterizações.

Proposição 5.2.14. *A única direção assintótica que acontece sobre os pontos parabólicos é transversal a curva Δ , exceto no ponto $P_3(c)$.*

Como a singularidade $P_3(c)$ é adjacente as singularidades S_2 , B_2 e H_2 segue pelo método que apresentamos no Capítulo 4 que se p é uma singularidade $P_3(c)$ de $P_{\mathbf{u}}$ então na vizinhança de $p \in M$ existem as curvas B_2 , S_2 e H_2 .

Teorema 5.2.15. *Seja p um ponto parabólico sobre uma superfície M em $\mathbb{R}^4$ e p uma singularidade $P_3(c)$ de P_0 . Então, em uma vizinhança de p ,*

(1). *Existe uma curva B_2 dada por*

$$a_{32}(a_{32} - 2b_{33})^2 x_1 - 2(3a_{32}^3 b_{33} - 4a_{32}^2 b_{33}^2 - 3a_{44}a_{32}^2 - 8a_{44}a_{32}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2)y_1^2 + \dots = 0;$$

(2). *Existe uma curva S_2 dada por*

$$a_{32}(a_{32} + 6b_{33})^2 x_1 - 6(a_{32}^3 b_{33} + 48a_{32}^2 b_{33}^2 - 72a_{32}b_{33}^3 - a_{44}a_{32}^2 - 72a_{44}a_{32}b_{33} + 36a_{44}b_{33}^2 + 24a_{44}^2)y_1^2 + \dots = 0;$$

(3). *A curva B_2 e a curva S_2 são genericamente tangentes a curva parabólica com ordem de contato 2.*

Demonstração. Sendo $P_3(c)$ um ponto parabólico podemos considerar $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$. Então P_0 tem uma singularidade $P_3(c)$ se, e somente se, $a_{33} = 0$, $\frac{a_{44}}{b_{33}a_{32}} \neq 0$. Essa singularidade é versalmente desdobrada pela família de projeções

$$P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy),$$

se, e somente se, $5a_{32}b_{33} - 6b_{33}^2 - 4a_{44} \neq 0$. Para facilitar os cálculos, realizemos a seguinte mudança de variáveis: $(x, y) \mapsto (\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y})$. Desta forma, com abuso de notação, podemos tomar projeção da forma

$$P_{\mathbf{u}} = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy).$$

Escrevemos $(g^1, g^2, g^3) = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy)$. Suponha que o ponto (x_1, y_1) é ponto singular de $P_{\mathbf{u}}$ segue que

$$\begin{aligned} w &= x_1 + b_{31}x_1^2 + 2b_{32}x_1y_1 + 3b_{33}y_1^2 + 2y_1u + \dots \\ v &= a_{31}x_1^2 + 2a_{32}x_1y_1 + 2ux_1 + \dots \end{aligned}$$

Se o mesmo ponto for uma singularidade pior que um cross-cap o critério do Teorema 4.3.4 garante, pelo teorema da função implícita, que

$$x_1 = \frac{6(a_{32}b_{33} - a_{44})}{a_{32}}y_1^2 - \frac{(a_{32} - 6b_{33})}{a_{32}}y_1u + \frac{1}{a_{32}}u^2 + \dots$$

(1). A condição que descreve a singularidade B_2 é dada por

$$-g_{yyy}^2g_{yy}^3 + g_{yy}^2g_{yyy}^3 = 0$$

Segue que substituindo x_1 na expressão acima obtemos

$$12(u + 3b_{33}y_1)(2ub_{33} + 2b_{33}a_{32}y_1 - 4a_{44}y_1 - a_{32}u) = 0$$

Utilizando o teorema da função implícita novamente obtemos $u = \frac{2y_1(-2a_{44} + a_{32}b_{33})}{(a_{32} - 2b_{33})}$ e substituindo-a em x_1 temos

$$x_1 = \frac{2(2a_{32}^3b_{33} - 2a_{32}^2b_{33}^2 - a_{44}a_{32}^2 - 12a_{44}a_{32}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2)}{a_{32}(a_{32} - 2b_{33})^2}y_1^2 + \dots$$

Assim o conjunto dos pontos $(p, \mathbf{u})$ em $M \times S^3$ tal que $P_{\mathbf{u}}$ tem singularidade B_2 em p é uma curva suave. Projetando esta curva em M obtemos a curva suave desejada. Voltando pela mudança de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$ obtemos a curva B_2 dada por

$$x_1 = \frac{2(3a_{32}^3b_{33} - 4a_{32}^2b_{33}^2 - 3a_{44}a_{32}^2 - 8a_{44}a_{32}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2)}{(a_{32}a_{32} - 2b_{33})^2}y_1^2 + \dots$$

(2). A condição que descreve a singularidade S_2 é dada por

$$\begin{aligned} -g_{xy}^2(g_{yy}^3)^3 + 2g_{xy}^3(g_{yy}^3)^2g_{xyy}^2 - 2g_{xy}^3g_{yy}^3g_{yy}^2g_{xyy}^3 + g_{yy}^2g_{xy}^3(g_{yy}^3)^2 - \\ -(g_{xy}^3)^2g_{yyy}^2g_{yy}^3 + (g_{xy}^3)^2g_{yy}^2g_{yyy}^3 = 0 \end{aligned}$$

Segue que substituindo x_1 na expressão acima obtemos

$$4(u + 3b_{33}y_1)(6ub_{33} + 18b_{33}a_{32}y_1 - 12a_{44}y_1 + a_{32}u) = 0$$

Pelo teorema da função implícita, obtemos $u = \frac{6y_1(-2a_{44}+3a_{32}b_{33})}{(a_{32}+6b_{33})}$ e substituindo-a em x_1 temos

$$x_1 = \frac{6(4a_{32}^3b_{33} + 66a_{32}^2b_{33}^2 - 72a_{32}b_{33}^3 - 3a_{44}a_{32}^2 - 84a_{44}a_{32}b_{33} + 36a_{44}b_{33}^2 + 24a_{44}^2)}{a_{32}(a_{32} + 6b_{33})^2}y_1^2 + \dots$$

Assim o conjunto dos pontos $(p, \mathbf{u})$ em $M \times S^3$ tal que $P_{\mathbf{u}}$ tem singularidade S_2 em p é uma curva suave. Projetando esta curva em M obtemos a curva suave desejada. Voltando pela mudança de coordenadas $\bar{x} \mapsto x - uy$ e $\bar{y} \mapsto y$ obtemos a curva S_2 dada por

$$x_1 = \frac{6(a_{32}^3b_{33} + 48a_{32}^2b_{33}^2 - 72a_{32}b_{33}^3 - a_{44}a_{32}^2 - 72a_{44}a_{32}b_{33} + 36a_{44}b_{33}^2 + 24a_{44}^2)}{a_{32}(a_{32} + 6b_{33})^2}y_1^2 + \dots$$

(3). Pela Proposição 5.2.13 a curva parabólica Δ em $P_3(c)$ é parametrizada por

$$\left(\frac{3(2a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}}y^2 + \dots, y \right).$$

Portanto, em $P_3(c)$, as curvas B_2 , S_2 e Δ são genericamente tangentes com ordem de contato 2. $\square$

5.2.2 A curva $[A_2]$ no ponto B_3

Nesta subseção, vamos mostrar que existe uma curva multi-local $[A_2]$ tangente a curva B_2 no ponto B_3 . Considere a superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ na forma de Monge com

$$f^1(x, y) = x^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} a_{4i}x^{4-i}y^i + \dots$$

e

$$f^2(x, y) = y^2 + b_{30}x^3 + b_{31}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} b_{4i}x^{4-i}y^i + \dots$$

Assim temos o seguinte Teorema na vizinhança da singularidade B_3 de P_0 .

Teorema 5.2.16. *Seja p uma singularidade B_3 de $P_0 = (x, f^1(x, y), f^2(x, y))$ sobre uma superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ e $P_{\mathbf{u}}$ o desdobramento versal dessa singularidade. Então existe uma vizinhança de p em M tal que o conjunto de pontos onde alguma projeção ortogonal tem singularidade $[A_2]$ é uma curva suave, chamada curva $[A_2]$. Nas condições acima, a curva $[A_2]$ é parametrizada por*

$$\left(x, -\frac{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})}{(a_{32}^2 - 4a_{44})}x + Bx^2 + \dots \right),$$

e é genericamente tangente a curva B_2 no ponto B_3 , onde a expressão B depende dos coeficientes do 5-jato de f^1, f^2 .

Demonstração. No ponto hiperbólico $p \in M$ podemos tomar $(Q_1, Q_2) = (x^2, y^2)$. Então $P_0 = (x, f^1(x, y), f^2(x, y))$ tem uma singularidade B_3 se, e somente se, $a_{31} \neq 0$, $a_{33} = 0$, $4a_{32}^2b_{33}^2 + 8a_{31}a_{44}b_{33} - 2a_{32}a_{43}b_{33} - 4a_{31}a_{55} + a_{43}^2 = 0$ e $\xi \neq 0$ (veja Proposição 5.2.1). Essa singularidade é versalmente desdobrada pela família de projeção ortogonal

$$P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy),$$

se, e somente se, $(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43}), (a_{32}^2 - 4a_{44}) \neq 0$. Para facilitar os cálculos, realizamos a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y})$. Com abuso de notação, escrevemos a projeção da forma

$$P = P_{\mathbf{u}} = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy).$$

Como $B_3 \rightarrow [A_2]$, a Proposição 4.3.2 exhibe as condições para o bigerme $[A_2]$.

Considere (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos distintos. A igualdade $P(x_1, y_1, u) = P(x_2, y_2, u)$, garante que

$$x_1 = x_2;$$

$$v = a_{32}x_2y_2 + a_{31}x_2^2 + a_{32}x_2y_1 + 2ux_2 + \dots;$$

$$w = y_1 + y_2 + b_{33}y_1^2 + b_{33}y_2^2 + b_{33}y_1y_2 + b_{31}x_2^2 + b_{32}x_2y_2 + b_{32}x_2y_1 + \dots.$$

Substituindo x, v e w no fato dos dois planos tangentes em (x_1, y_1) e (x_1, y_2) serem iguais implica, pelo teorema da função implícita, que

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2a_{44}}{a_{32}}y_1 - \frac{2a_{44}}{a_{32}}y_2 + \frac{(-a_{43} + a_{32}b_{33})}{a_{32}}x_2 + \cdots; \\ y_1 &= -y_2 + \frac{-2(b_{33}a_{32} - a_{43} - a_{31}a_{32})}{-4a_{44} + a_{32}^2}x_2 + \cdots \end{aligned}$$

Por fim, ao substituir todas as igualdades em

$$\det(P_x, P_y, P_{xx}) \cdot \det(P_x, P_y, P_{yy}) - (\det(P_x, P_y, P_{xy}))^2 = 0$$

obtemos, pelo teorema da função implícita, que

$$x_2 = -\frac{(-4a_{44} + a_{32}^2)}{(b_{33}a_{32} - a_{43} + a_{31}a_{32})}y_2 + \cdots$$

Retornando ao sistema de coordenadas inicial pela mudança $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$ obtemos que o conjunto dos pontos $(p, \mathbf{u})$ em $M \times S^3$ tal que $P_{\mathbf{u}}$ tem singularidade $[A_2]$ em p é uma curva suave. Projetando-a em M obtemos a curva suave parametrizada por

$$\left(x, -\frac{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})}{(a_{32}^2 - 4a_{44})}x + Bx^2 + \cdots \right),$$

onde B depende dos coeficientes do 5-jato de f^1 e f^2 . Por outro lado, a curva B_2 no ponto B_3 é dada na Proposição 5.2.5 por

$$\left(x, -\frac{(a_{31}a_{32} + a_{32}b_{33} - a_{43})}{(a_{32}^2 - 4a_{44})}x + Ax^2 + \cdots \right),$$

onde A também depende dos coeficientes do 5-jato de f^1 e f^2 , mas $A \neq B$. Portanto, as curvas $[A_2]$ e B_2 são genericamente tangentes em B_3 . $\square$

Nas próximas subseções vamos apresentar o lugar geométrico das singularidades multi-locais que aparecem em pontos do conjunto parabólico Δ .

5.2.3 A curva $(A_0S_0)_2$ em H_3

Considere a superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ na forma de Monge com

$$f^1(x, y) = x^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} a_{4i}x^{4-i}y^i + \cdots$$

e

$$f^2(x, y) = xy + b_{30}x^3 + b_{31}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} b_{4i}x^{4-i}y^i + \dots$$

Assim temos o seguinte Teorema na vizinhança da singularidade H_3 de P_0 .

Teorema 5.2.17. *Seja p uma singularidade H_3 de P_0 sobre uma superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ e $P_{\mathbf{u}}$ o desdobramento versal dessa singularidade. Então existe uma vizinhança de p em M tal que o conjunto de pontos onde alguma projeção ortogonal tem singularidade $(A_0S_0)_2$ é uma curva suave, chamada curva $(A_0S_0)_2$. Nas condições acima, a curva $(A_0S_0)_2$ é parametrizada por*

$$\left(m_1, -\frac{a_{32}}{3a_{33}}m_1 - \frac{(8a_{32}^2a_{33}b_{32} - 8b_{33}a_{32}^3 - 18b_{33}a_{33}b_{32}a_{32} - 18a_{33}^2a_{31}b_{32})}{9a_{33}^3}m_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{(2a_{44}a_{32}^2 + 3a_{33}^2a_{42} + 6a_{32}a_{31}b_{33}a_{33} + 3a_{33}^2b_{32}^2 - 3a_{33}a_{43}a_{32} + 3b_{33}^2a_{32}^2)}{3a_{33}^3}m_1^2 + \dots \right).$$

Consequentemente, a curva parabólica e a curva $(A_0S_0)_2$ são tangentes em H_3 com ordem de contato 2.

Demonstração. No ponto parabólico $p \in M$ podemos tomar $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$. Então, pela Proposição 5.2.3 P_0 tem uma singularidade H_3 se, e somente se, $a_{33} \neq 0$, $(-b_{32}b_{44} + b_{55})a_{33}^2 + ((a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32} - a_{55})b_{33} - a_{44}b_{44})a_{33} - a_{32}a_{44}b_{33}^2 + a_{44}^2b_{33} = 0$ e $\zeta \neq 0$. Consideremos a família de projeções com a mesma mudança de variáveis feita nos teoremas anteriores

$$P_{\mathbf{u}} = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy).$$

Como $H_3 \rightarrow (A_0S_0)_2$, a Proposição 4.3.8 fornece as condições para o bigerme $(A_0S_0)_2$:

- (i) $P_{\mathbf{u}}(m_1, n_2, u) = P_{\mathbf{u}}(n_1, n_2, u)$ para $(m_1, m_2) \neq (n_1, n_2)$;
- (ii) O ponto (m_1, m_2) é um ponto de cross-cap;
- (iii) O vetor limite tangente da curva de pontos duplos do cross-cap está contido no espaço tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) .

Pela condição (ii) obtemos

$$w = m_1 + b_{31}m_1^2 + 2b_{32}m_1m_2 + 3b_{33}m_2^2 + 2m_2u + \dots$$

$$v = a_{31}m_1^2 + 2a_{32}m_1m_2 + 3a_{33}m_2^2 + 2um_1 + \dots$$

Substituindo w e v na igualdade dada em (i), o teorema da função implícita nos garante que

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ n_2 &= -\frac{a_{32}}{a_{33}}m_1 - 2m_2 + \frac{-(2a_{31}a_{33} - a_{32}^2)}{a_{33}^2}m_1u - \frac{1}{a_{33}}u^2 - \frac{2a_{44}a_{32}}{a_{33}^2}m_1m_2 - \frac{3a_{44}}{a_{33}}m_2^2 \\ &\quad - \frac{a_{42}a_{33}^2 + a_{44}a_{32}^2 - a_{43}a_{33}a_{32}}{a_{33}^3}m_1^2 + \dots \\ u &= \frac{-b_{32}a_{33} + a_{32}b_{33}}{a_{33}^3}m_1 + \frac{-2a_{32}(b_{44}a_{33} - b_{33}a_{44})}{a_{33}^2}m_1m_2 - \frac{3(b_{44}a_{33} - b_{33}a_{44})}{a_{33}}m_2^2 + \\ &\quad \left(\frac{-b_{42}a_{33}^3 - 2a_{32}b_{33}^2b_{32}a_{33} + 2a_{32}^2b_{33}b_{32}a_{33} - a_{32}^2b_{44}a_{33} + b_{33}a_{42}a_{33}^2 - b_{33}a_{43}a_{32}a_{33}}{a_{33}^3} \right. \\ &\quad + \frac{-2b_{32}b_{33}a_{31}a_{33}^2 + 2b_{32}b_{31}a_{33}^3 - 2a_{32}b_{33}b_{31}a_{33}^2 + a_{32}^2b_{33}^3 - b_{32}^2a_{32}a_{33}^2 + a_{32}b_{43}a_{33}^2}{a_{33}^3} \\ &\quad \left. + \frac{-a_{32}^3b_{33}^2 + 2a_{32}b_{33}^2a_{31}a_{33} + b_{33}a_{44}a_{32}^2 + b_{32}^2b_{33}a_{33}^2}{a_{33}^3} \right) m_1^2 \end{aligned}$$

Para encontrar o vetor limite tangente da curva dos pontos duplos do cross-cap, para facilitar os cálculos, necessitamos levar a singularidade (m_1, m_2) a origem, por meio de uma translação e procurar a imagem dos pontos duplos. Desta forma, tomemos $P_{\mathbf{u}}(x + m_1, y + m_2)$. Buscando a curva dos pontos duplos temos $P_{\mathbf{u}}(x_1 + m_1, y_1 + m_2) = P_{\mathbf{u}}(x_2 + m_1, y_2 + m_2)$ com $(x_1 + m_1, y_1 + m_2) \neq (x_2 + m_1, y_2 + m_2)$ se e somente se, obtemos

$$x_1 = c_1y_2 + c_2y_2^2 + \dots$$

$$y_1 = -y_2 + d_2y_2^2 + \dots,$$

onde c_1, c_2, d_2 são funções nas variáveis m_1, m_2, u . Substituindo x_1 e y_1 em $F_{\mathbf{u}}(x_1 + m_1, y_1 + m_2)$ obtemos a curva de pontos duplos parametrizada por

$$\alpha(y) = (\xi_1(y, m_1, m_2), \xi_2(y, m_1, m_2), \xi_3(y, m_1, m_2)),$$

onde ξ_i é germe de função em y, m_1 e m_2 . Logo o limite do vetor tangente da curva no ponto 0 nos dá

$$\alpha''(0) = (\xi_1''(m_1, m_2), \xi_2''(m_1, m_2), \xi_3''(m_1, m_2)),$$

onde

$$\xi_1''(m_1, m_2) = 2c_2 - u(2d_1 - \frac{2}{3} \frac{a_{32}c_2}{a_{33}}) + \dots$$

$$\xi_2''(m_1, m_2) = 2c_1^2 + (6a_{30}c_1^2 - 4a_{31}c_1 + 2a_{32} + 4c_2)m_1 + (2a_{31}c_1^2 - 4a_{32}c_1 + 6a_{33})m_2 + \dots$$

$$\xi_3''(m_1, m_2) = -2c_1 + (-4b_{31}c_1 + 6b_{30}c_1^2 + \frac{2}{3} \frac{a_{32}c_2}{a_{33}+2b_{32}})m_1 + (2b_{31}c_1^2 - 4b_{32}c_1 + 6b_{33} + 2c_2)m_2 + \dots$$

Como $\alpha''(0)$ pertence ao plano tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) , segue que

$$\frac{2c_1(a_{32}m_1 + 3a_{33}m_2 + \dots)}{a_{33}} = 0.$$

Logo, pelo teorema da função implícita, $m_2 = -\frac{1}{3} \frac{a_{32}}{a_{33}} m_1 + \dots$. Substituindo nas expressões de u, v, w e n_2 , obtemos uma curva suave em $M \times S^3$ parametrizada por

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ n_2 &= -\frac{1}{3} \frac{a_{32}}{a_{33}} m_1 + \frac{1}{3} \frac{(3a_{32}^2 a_{33} b_{32} - 3b_{33} a_{32}^3 - 6b_{33} a_{33} b_{32} a_{32} - 6a_{33}^2 a_{31} b_{32} + 2a_{44} a_{32}^2)}{a_{33}^3} m_1^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{(3a_{33}^2 a_{42} + 6a_{32} a_{31} b_{33} a_{33} + 3a_{33}^2 b_{32}^2 - 3a_{33} a_{43} a_{32} + 3b_{33}^2 a_{32}^2)}{a_{33}^3} m_1^2 \\ u &= \left(\frac{-b_{32} a_{33} + a_{32} b_{33}}{a_{33}} \right) m_1 + \dots \\ v &= \left(\frac{-a_{32}^2 + 6a_{32} b_{33} - 6a_{33} b_{32} + 3a_{33} a_{31}}{3a_{33}} \right) m_1^2 + \dots \\ w &= m_1 - \left(\frac{1}{3} \frac{(b_{33} a_{32}^2 - 3b_{31} a_{33}^2 + 3b_{31} a_{33}^2)}{a_{33}^2} \right) m_1^2 + \dots \end{aligned}$$

Retornando ao sistema de coordenadas inicial e projetando pela $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$, obtemos uma curva suave parametrizada por

$$\left(m_1, -\frac{a_{32}}{3a_{33}} m_1 - \frac{(8a_{32}^2 a_{33} b_{32} - 8b_{33} a_{32}^3 - 18b_{33} a_{33} b_{32} a_{32} - 18a_{33}^2 a_{31} b_{32})}{9a_{33}^3} m_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{(2a_{44} a_{32}^2 + 3a_{33}^2 a_{42} + 6a_{32} a_{31} b_{33} a_{33} + 3a_{33}^2 b_{32}^2 - 3a_{33} a_{43} a_{32} + 3b_{33}^2 a_{32}^2)}{3a_{33}^3} m_1^2 + \dots \right).$$

Pela Proposição 5.2.13, no ponto H_3 a curva Δ , é dada nesta vizinhança pela parametrização

$$\left(x, -\frac{1}{3} \frac{a_{32}}{a_{33}} x - \frac{1}{9a_{33}^3} (6a_{31} a_{32} a_{33} b_{33} - 6a_{31} a_{33}^2 b_{32} - 2a_{32}^3 b_{33} + 2a_{32}^2 a_{33} b_{32} + 3a_{32}^2 b_{33}^2 - \right. \\ \left. - 6a_{32} a_{33} b_{32} b_{33} + 3a_{33}^2 b_{32}^2 + 2a_{32}^2 a_{44} - 3a_{32} a_{33} a_{43} + 3a_{33}^2 a_{42}) x^2 + \dots \right)$$

Portanto, as curvas $(A_0 S_0)_2$ e Δ são tangentes no ponto H_3 com contato de ordem

2. □

5.2.4 As curvas $(A_0S_0)_2$, $A_0S_1^\pm$ e $A_0S_0|A_1^\pm$ em $P_3(c)$

Considere a superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ na forma de Monge com

$$f^1(x, y) = x^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} a_{4i}x^{4-i}y^i + \dots$$

e

$$f^2(x, y) = y^2 + b_{30}x^3 + b_{31}x^2y + b_{32}xy^2 + b_{33}y^3 + \sum_{i=0}^{i=4} b_{4i}x^{4-i}y^i + \dots$$

Assim temos o seguinte Teorema na vizinhança da singularidade $P_3(c)$ de P_0 .

Teorema 5.2.18. *Seja p uma singularidade $P_3(c)$ de P_0 sobre uma superfície M imersa em $\mathbb{R}^4$ e P_u o desdobramento versal dessa singularidade. Então:*

- (1). *Existe uma vizinhança de p em M tal que o conjunto de pontos de alguma projeção ortogonal tem singularidade $(A_0S_0)_2$ é uma curva suave, chamada curva $(A_0S_0)_2$. Nas condições acima a curva $(A_0S_0)_2$ é parametrizada por*

$$\left(\frac{3(2a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}} y^2 + \dots, y \right).$$

A curva parabólica e a curva $(A_0S_0)_2$ são tangente no ponto $P_3(c)$ com ordem de contato igual a 2.

- (2). *Existe uma vizinhança de p em M tal que o conjunto de pontos de alguma projeção ortogonal tem singularidade A_0S_1 é uma curva suave, chamada curva A_0S_1 . Nas condições acima a curva A_0S_1 é parametrizada por*

$$\left(\frac{(3a_{32}^2b_{33}^2 - 4a_{32}a_{44}b_{33} + 3a_{44}b_{33}^2 + 2a_{44}^2)}{a_{32}(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})} y^2 + \dots, y \right).$$

A curva parabólica e a curva A_0S_1 são tangente no ponto $P_3(c)$ com ordem de contato igual a 2.

- (3). *Existe uma vizinhança de p em M tal que o conjunto de pontos de alguma projeção ortogonal tem singularidade $A_0S_0|A_1^\pm$ é uma curva suave, chamada curva $A_0S_0|A_1^\pm$. Nas condições acima a curva $A_0S_0|A_1^\pm$ é parametrizada por*

$$\left(\frac{1}{4} \frac{(3a_{32}^2b_{33}^2 - 16a_{32}a_{44}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2)}{(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})a_{32}} y^2 + \dots, y \right).$$

A curva parabólica e a curva $A_0S_0|A_1^\pm$ são tangente no ponto $P_3(c)$ com ordem de contato igual a 2.

Demonstração. No ponto parabólico $p \in M$ podemos tomar $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$. Então, pela Proposição 5.2.3 P_0 tem uma singularidade $P_3(c)$ se, e somente se, $a_{33} = 0$ e $\frac{a_{44}}{b_{33}a_{32}} \neq 0$. Essa singularidade é versalmente desdobrada pela família de projeções

$$P_{\mathbf{u}} = (x - uy, f^1(x, y) - vy, f^2(x, y) - wy),$$

se, e somente se, $5a_{32}b_{33} - 6b_{33}^2 - 4a_{44} \neq 0$. Novamente, para facilitar os cálculos, realizamos a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (\bar{x} + u\bar{y}, \bar{y})$. Desta forma, com abuso de notação, podemos tomar projeção da forma

$$P_{\mathbf{u}} = (x, f^1(x + uy, y) - vy, f^2(x + uy, y) - wy).$$

(1). Como $P_3(c) \rightarrow (A_0S_0)_2$, a Proposição 4.3.8 fornece as condições para o bigerme $(A_0S_0)_2$:

- (i) $P_{\mathbf{u}}(m_1, m_2, u) = P_{\mathbf{u}}(n_1, n_2, u)$ para $(m_1, m_2) \neq (n_1, n_2)$;
- (ii) O ponto (m_1, m_2) é um ponto de cross-cap;
- (iii) O vetor limite tangente da curva de pontos duplos do cross-cap está contido no espaço tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) .

A condição (ii) garante que

$$\begin{aligned} w &= m_1 + b_{31}m_1^2 + 2b_{32}m_1m_2 + 3b_{33}m_2^2 + 2m_2u + \dots \\ v &= a_{31}m_1^2 + 2a_{32}m_1m_2 + 3a_{33}m_2^2 + 2um_1 + \dots \end{aligned}$$

A igualdade dada na condição (i), pelo teorema da função implícita que fornece

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ m_1 &= -2um_2 + \frac{-3a_{44}}{a_{32}}m_2^2 + \frac{-2a_{44}}{a_{32}}m_2n_2 - \frac{a_{44}}{a_{32}}n_2^2 - un_2 - \frac{1}{a_{32}}u^2 + \dots \\ n_2 &= -2m_2 - \frac{1}{b_{33}}u + \frac{3(-a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32})}{a_{32}b_{33}}m_2^2 + \frac{2(-a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32})}{a_{32}b_{33}}m_2u + \\ &\quad + \frac{(b_{32}b_{33}^2 - a_{32}b_{44} + a_{44}b_{32})}{b_{33}^3a_{32}}u^2 + \dots \end{aligned}$$

Para encontrar o vetor limite tangente da curva de pontos duplos do cross-cap, necessitamos levar a singularidade (m_1, m_2) a origem por uma translação e procurar a imagem dos pontos duplos. Desta forma, $F_{\mathbf{u}}(x_1 + m_1, y_1 + m_2) = F_{\mathbf{u}}(x_2 + m_1, y_2 + m_2)$ com $(x_1 + m_1, y_1 + m_2) \neq (x_2 + m_1, y_2 + m_2)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 y_2^2 + c_2 y_2^3 + \cdots \\ y_1 &= -y_2 + d_2 y_2^2 + \cdots, \end{aligned}$$

onde c_1, c_2, d_2 são coeficientes de x_1 e y_1 que são funções nas variáveis m_1, m_2, u . Substituindo x_1 e y_1 em $F_{\mathbf{u}}(x_1 + m_1, y_1 + m_2)$ obtemos a curva de pontos duplos parametrizada na variável y por

$$\alpha(y) = (\xi_1(y, m_1, m_2), \xi_2(y, m_1, m_2), \xi_3(y, m_1, m_2)),$$

onde ξ_i é germe de função em y, m_1 e m_2 . O limite do vetor tangente da curva α na origem é dado por

$$\alpha''(0) = (\xi_1''(m_1, m_2), \xi_2''(m_1, m_2), \xi_3''(m_1, m_2)),$$

onde $\xi_i'' \in \mathcal{M}(m_1, m_2)$ com coeficientes sendo $a_{i,j}, b_{i,j}, c_1, c_2, d_2$.

Pela condição (iii) $\alpha''(0)$ pertence ao plano tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) , segue que

$$-\frac{1}{b_{33}^3 a_{32}} (2(3b_{33}m_2 + u + \cdots)(4b_{33}^3 m_2^2 c_1 a_{32}^2 + \cdots)) = 0.$$

Logo, pelo teorema da função implícita $u = -3b_{33}m_2 + \cdots$ e recursivamente determinamos uma curva suave em $M \times S^3$ parametrizada por

$$\begin{aligned} n_1 = m_1 &= \frac{3(3a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}} m_2^2 + \cdots \\ n_2 &= m_2 \\ u &= -3b_{33}m_2 \\ v &= \frac{9a_{32}^2 b_{33} - 54a_{32}b_{33}^2 + 54b_{33}^3 - 8a_{32}a_{44} + 36a_{44}b_{33}}{a_{32}} m_2^3 + \cdots \\ w &= \frac{3(2a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}} m_2^2 + \cdots \end{aligned}$$

Retornando ao sistema de coordenadas inicial, i.e., $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$ e projetando pela $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$, obtemos a curva suave parametrizada por

$$\left(\frac{3(4a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}}m_2^2 + \dots, m_2 \right).$$

Pela Proposição 5.2.13 a curva parabólica no ponto $P_3(c)$ é parametrizada por

$$\left(\frac{3(2a_{32}b_{33} - 3b_{33}^2 - 2a_{44})}{a_{32}}y^2 + \dots, y \right).$$

Portanto, as curvas $(A_0S_0)_2$ e Δ são genericamente tangentes no ponto $P_3(c)$ com contato de ordem 2.

(2). Como $P_3(c) \rightarrow A_0S_1^\pm$, a Proposição 4.3.10 garante as condições do bigerme $A_0S_1^\pm$:

(i) $P_{\mathbf{u}}(m_1, m_2, u) = P_{\mathbf{u}}(n_1, n_2, u)$ para $(m_1, m_2) \neq (n_1, n_2)$;

(ii) Se (m_1, m_2) é um ponto do tipo S_1 , no Teorema 4.3.4 temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \det(d_x P_{\mathbf{u}}, d_y P_{\mathbf{u}}, d_{yy} P_{\mathbf{u}}) = 0.$$

Como (m_1, m_2) é ponto singular, obtemos u e v igual descrito no item 1. A condição

(ii) garante que

$$m_1 = \frac{6(a_{32}b_{33} - a_{44})}{a_{32}}m_2^2 - \frac{(a_{32} - 6b_{33})}{a_{32}}m_2u + \frac{1}{a_{32}}u^2 + \dots.$$

Por outro lado, substituindo as expressões de u, v e m_1 na igualdade $F_{\mathbf{u}}(n_1, n_2) = F_{\mathbf{u}}(m_1, m_2)$ obtemos, pelo teorema da função implícita

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ u &= -2b_{33}m_2 - b_{33}n_2 + \frac{(-4a_{32}b_{32}b_{33} + 8b_{32}b_{33}^2 - 3a_{32}b_{44} + 6a_{44}b_{32})m_2^2}{a_{32}} + \\ &\quad + \frac{(a_{32}b_{32}b_{33} - b_{32}b_{33}^2 - a_{32}b_{44})n_2^2}{a_{32}} + \frac{(3a_{32}b_{32}b_{33} + 2b_{32}b_{33}^2 - 2a_{32}b_{44})}{a_{32}}n_2m_2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{(a_{32}b_{33} - a_{33}b_{32})(6a_{31}a_{33}b_{33} - 2a_{32}^2b_{33} + 2a_{32}a_{33}b_{32} + 3a_{32}b_{33}^2 - 6a_{33}^2b_{31} - 3a_{33}b_{32}b_{33})}{a_{33}^3}m_1^2 + \dots, \\ n_2 &= -\frac{(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})}{(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots \end{aligned}$$

Logo, substituindo recursivamente nas expressões de u, v, w e m_1 obtemos uma curva suave em $M \times S^3$ parametrizada por

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 = \frac{(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})(a_{32}^2b_{33}^2 - 3a_{32}a_{44}b_{33} + 3a_{44}b_{33}^2 + 2a_{44}^2)}{a_{32}(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})^2}m_2^2 + \dots \\ n_2 &= -\frac{(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})}{(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots \\ u &= \frac{b_{33}(2a_{32}b_{33} - a_{44})}{(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots \\ v &= \frac{1}{a_{32}(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})^2}(14a_{32}^5b_{33}^4 - 24a_{32}^4b_{33}^5 + 8a_{32}^3b_{33}^6 - 49a_{32}^4a_{44}b_{33}^3 + 44a_{32}^3a_{44}b_{33}^4 + \\ &\quad + 36a_{32}^2a_{44}b_{33}^5 - 32a_{32}a_{44}b_{33}^6 + 64a_{32}^3a_{44}^2b_{33}^2 - 6a_{32}^2a_{44}^2b_{33}^3 - 76a_{32}a_{44}^2b_{33}^4 + \\ &\quad + 24a_{44}^2b_{33}^5 - 37a_{32}^2a_{44}^3b_{33} - 26a_{32}a_{44}^3b_{33}^2 + 34a_{44}^3b_{33}^3 + 8a_{32}a_{44}^4 + 12a_{44}^4b_{33})m_2^3 + \dots \\ w &= \frac{1}{a_{32}(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})^2}(11a_{32}^3b_{33}^3 - 24a_{32}^2b_{33}^4 + 12a_{32}b_{33}^5 - 27a_{32}^2a_{44}b_{33}^2 + 40a_{32}a_{44}b_{33}^3 - \\ &\quad - 12a_{44}b_{33}^4 + 22a_{32}a_{44}^2b_{33} - 17a_{44}^2b_{33}^2 - 6a_{44}^3)m_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Retornando ao sistema de coordenadas inicial com a mudança $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x - uy, y)$ e projetando pela $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$, encontramos a curva suave desejada parametrizada por

$$\left(\frac{(3a_{32}^2b_{33}^2 - 4a_{32}a_{44}b_{33} + 3a_{44}b_{33}^2 + 2a_{44}^2)}{a_{32}(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})}m_2^2 + \dots, m_2 \right).$$

Agora considerando a curva Δ descrita no item 1., obtemos que as curvas A_0S_1 e Δ são genericamente tangentes no ponto $P_3(c)$ com contato de ordem 2.

(3). Como $P_3(c) \rightarrow A_0S_0|A_1^\pm$, a Proposição 4.3.11 garante as condições para o bigerme $A_0S_0|A_1^\pm$ que são dadas por:

- (i) $F(m_1, m_2, u) = F(n_1, n_2, u)$ para $(m_1, m_2) \neq (n_1, n_2)$;
- (ii) O ponto (m_1, m_2) é um ponto de cross-cap;
- (iii) O vetor tangente do cross-cap pertence ao espaço tangente ao espaço tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) .

Pela condição (ii) obtemos u e v como no item 1.. A igualdade dada na condição (i)

garante, pelo teorema da função implícita, que

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 \\ m_1 &= -2um_2 + \frac{-3a_{44}}{a_{32}}m_2^2 + \frac{-2a_{44}}{a_{32}}m_2n_2 - \frac{a_{44}}{a_{32}}n_2^2 - un_2 - \frac{1}{a_{32}}u^2 + \dots \\ u &= -2b_{33}m_2 - b_{33}n_2 + \frac{-3b_{44}a_{32} + 4b_{32}b_{33}^2 + 3a_{44}b_{32}}{a_{32}}m_2^2 \\ &\quad + \frac{2(a_{44}b_{32} + 2b_{32}b_{33}^2 - a_{44}b_{32})}{a_{32}}n_2m_2 + \frac{-b_{44}a_{32} + b_{32}b_{33}^2 + a_{44}b_{32}}{a_{32}}n_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Pela condição (iii) o vetor tangente ao cross-cap $\eta = \frac{\partial}{\partial x}F_{\mathbf{u}}(m_1, m_2)$ pertence ao espaço tangente a imagem de F_u no ponto (n_1, n_2) . Assim, pelo teorema da função implícita

$$n_2 = -\frac{1}{2} \frac{(3a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 2a_{44})}{(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots$$

Logo, substituindo n_2 nas expressões de u, v, w e m_1 obtemos uma curva suave em $M \times S^3$ parametrizada por

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1 = \frac{(4a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 3a_{44})(a_{32}^2b_{33}^2 - 3a_{32}a_{44}b_{33} + 3a_{44}b_{33}^2 + 2a_{44}^2)}{a_{32}(a_{32}b_{33} - 2b_{33}^2 - a_{44})^2}m_2^2 + \dots \\ n_2 &= -\frac{1}{2} \frac{(3a_{32}b_{33} - 4b_{33}^2 - 2a_{44})}{(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots \\ u &= -\frac{1}{2} \frac{b_{33}(a_{32}b_{33} - 2a_{44})}{(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})}m_2 + \dots \\ v &= -\frac{b_{33}}{4(a_{32}(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})^2)}(4a_{32}^4b_{33}^2 - 5a_{32}^3b_{33}^3 - 8a_{32}^3a_{44}b_{33} - 10a_{32}^2a_{44}b_{33}^2 + \\ &\quad + 20a_{32}a_{44}b_{33}^3 + 4a_{32}^2a_{44}^2 + 32a_{32}a_{44}^2b_{33} - 24a_{44}^2b_{33}^2 - 16a_{44}^3)m_2^3 + \dots \\ w &= \frac{1}{4} \frac{9a_{32}^2b_{33}^2 - 12a_{32}b_{33}^3 - 16a_{32}a_{44}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2}{a_{32}(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})}m_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Retornando ao sistema de coordenadas inicial como feito nos itens 1. e 2. e projetando pela $\pi_1 : M \times S^3 \rightarrow M$, obtemos a curva suave parametrizada por

$$\left(\frac{1}{4} \frac{(3a_{32}^2b_{33}^2 - 16a_{32}a_{44}b_{33} + 12a_{44}b_{33}^2 + 8a_{44}^2)}{(a_{32}b_{33} - b_{33}^2 - a_{44})a_{32}}m_2^2 + \dots, m_2 \right).$$

Considere a curva Δ como no item 1. Segue que as curvas $A_0S_0|A_1^\pm$ e Δ são genericamente tangentes no ponto $P_3(c)$ com contato de ordem 2. $\square$

Podemos resumir os resultados deste capítulo na Figura 5.2. No entanto, no ponto $P_3(c)$ temos várias possíveis configurações das curvas das singularidades locais

e multi-locais. Trataremos com mais detalhes sobre estas configurações no Capítulo 7.

Figura 5.2: Lugar geométrico das singularidades locais e multi-locais sobre M longe dos pontos de inflexão.

Superfícies em $\mathbb{P}^4$

O contato de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^4$ com retas é um invariante por mudanças afins em $\mathbb{R}^4$ ([7]). Neste sentido, as transformações projetivas feitas na superfície são invariantes no estudo do contato da superfície com retas. Como M imersa em $\mathbb{P}^4$ é um estudo mais geral, o estudo local de M imersa em $\mathbb{R}^4$ pode ser deduzido tomando uma carta afim de $\mathbb{P}^4$ e estudar suas relações por meio das transformações projetivas.

Platonova e Landis, em [28, 45, 46] e Deolindo-Silva, Kabata, Ohmoto e Sano em [19] estudaram o contato de superfícies imersas em $\mathbb{P}^3$ com retas. Obtiveram a classificação projetiva de germes de superfícies e caracterizaram na superfície as $\mathcal{A}$ -singularidades da projeção central que descreve o contato com linhas.

Em [53], Uribe-Vargas introduziu um invariante (cross-ratio), chamado de cr-invariante, nas cúspides de Gauss para superfícies em $\mathbb{R}^3$. Ele usou de três curvas passando pela cúspide de Gauss: a curva parabólica, a curva conodal (curva de singularidade multi-local A_1A_1 da função altura) e a curva flecnodal. Tais curvas são tangentes nas cúspides de Gauss. Uribe-Vargas levantou estas curvas no fibrado cotangente projetivizado de M . As linhas tangentes delas mais a de uma outra curva (a fibra de p) dão um cross-ratio que é o cr-invariante. Ele mostrou que o cross-ratio é um múltiplo do módulo λ da forma normal projetiva de Platonova

$$z = \frac{y^2}{2} - x^2y + \lambda x^4, \quad \lambda \neq 0, \frac{1}{2}$$

de uma superfície na cúspide de Gauss.

Para superfícies em $\mathbb{R}^4$, observe que no ponto $P_3(c)$ existem várias curvas que são tangentes ao conjunto parabólico (veja Teorema 5.2.18 no Capítulo 5). Baseado nas ideias de Uribe-Vargas, vamos definir cr-invariantes para superfícies em $\mathbb{R}^4$ e relacioná-los com os módulos das formas normais de superfícies em $\mathbb{P}^4$ classificadas projetivamente que faremos neste capítulo.

Nosso objetivo neste capítulo é obter uma classificação por meio de transformações projetivas de um específico jato de superfícies imersas em $\mathbb{P}^4$ descritas pela forma de Monge $(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$ via $\mathcal{A}$ -singularidade da projeção central. A ideia dessa classificação é baseada nos trabalhos de Platonova e Landis. Os resultados aqui fazem parte do pré-print [18].

6.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos os conceitos relacionados a transformações projetivas e projeções centrais.

Seja M uma superfície suave imersa em $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{P}^4$ contendo a origem de $\mathbb{R}^4$, onde $\mathbb{R}^4$ é identificado com a carta afim do espaço projetivo $\{[x : y : z : w : 1]\} \subseteq \mathbb{P}^4$. Considere a superfície M localmente dada pela forma de Monge $(z, w) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ com $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_2^2$.

Definição 6.1.1. *Seja M mergulhada em $\mathbb{P}^4$. Uma **projeção central de M de um ponto de vista** $p = [a : b : c : d : 1] \in \mathbb{P}^4 - M$ é definida pela restrição*

$$\varphi_p = \pi|_M : M \rightarrow \mathbb{P}^3$$

da projeção canônica ao hiperplano

$$\begin{aligned} \pi_p : \mathbb{R}^4 - \{p\} &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ x &\mapsto \text{linha gerada por } x - p. \end{aligned}$$

Nesta seção adaptamos a ideia de Bruce em [6] para superfícies em $\mathbb{P}^4$. Seja V_ℓ o espaço dos polinômios de grau maior que 1 e menor ou igual a ℓ . Tomemos a

aplicação de Monge-Taylor

$$\begin{aligned}\Theta : M &\rightarrow V_\ell \times V_\ell \\ p &\mapsto \Theta(p) = (j^\ell f_1(0), j^\ell f_2(0))\end{aligned}$$

que associa cada ponto de $p \in M$ ao ℓ -jato de (f_1, f_2) na origem.

Um dos nossos objetivos é obter uma estratificação de $V_\ell \times V_\ell$ induzida da $\mathcal{A}$ -estratificação de $J^\ell(2, 3)$ como segue. Denotamos a projeção central de um germe de superfície M dado pela forma de Monge de um ponto de vista p como $\varphi_{p,f}$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{P}^4 \times V_\ell \times V_\ell &\rightarrow J^\ell(2, 3) \\ (p, j^\ell f_1(0), j^\ell f_2(0)) &\mapsto \Phi(p, j^\ell f_1(0), j^\ell f_2(0))\end{aligned}$$

onde Φ é ℓ -jato de $\varphi_{p,f}(x, y) - \varphi_{p,f}(0, 0)$ na origem.

Note que $J^\ell(2, 3)$ é estratificado pelas $\mathcal{A}^\ell$ -órbitas. Portanto, Φ induz uma estratificação regular de Whitney de $\mathbb{P}^4 \times V_\ell \times V_\ell$ (veja [55]). Então, para uma $\mathcal{A}^\ell$ -órbita $W \subset J^\ell(2, 3)$, podemos definir $G_W \subset V_\ell \times V_\ell$ como sendo a projeção canônica $pr : \mathbb{P}^4 \times V_\ell \times V_\ell \rightarrow V_\ell \times V_\ell$ de $\Phi^{-1}(W) \subset \mathbb{P}^4 \times V_\ell \times V_\ell$, isto é

$$G_W := pr(\Phi^{-1}(W)) \subset V_\ell \times V_\ell.$$

Como toda $\mathcal{A}^\ell$ -órbita W é um subconjunto semi-algébrico de $J^\ell(2, 3)$, então $\Phi^{-1}(W)$ e, conseqüentemente, G_W tornam-se localmente conjuntos fechados e semi-algébricos. Desta forma, podemos definir.

Definição 6.1.2. *A codimensão de G_W denotada por $\text{codim } G_W$ é a codimensão do seu estrato em $V_\ell \times V_\ell$.*

Como consequência temos uma extensão natural do Teorema de Bruce em [6].

Teorema 6.1.3. *Seja $Z \subset V_\ell \times V_\ell$ uma subvariedade $GL(2) \times GL(2)$ -invariante. Para uma superfície genérica M em $\mathbb{P}^4$, a aplicação de Monge-Taylor $\Theta : M \rightarrow V_\ell \times V_\ell$ é transversal a Z .*

Demonstração. A prova segue dos mesmos argumentos na prova do Teorema 1 em [6]. $\square$

Como os estratos induzidos pelos tipos das $\mathcal{A}^\ell$ -singularidades da projeção central são $GL(2) \times GL(2)$ -invariante, temos o seguinte resultado.

Corolário 6.1.4. *Para uma superfície genérica M e para todo $q \in M$, $\Theta(q) \in G_W$ se, e somente se, $\text{codim } G_W \leq 2$.*

Demonstração. A prova é consequência imediata do Teorema 6.1.3. $\square$

6.1.1 Transformações projetivas

Considere a superfície M imersa em $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{P}^4$, onde $\mathbb{R}^4$ pode ser identificado com a carta afim $\{[x : y : z : w : 1]\} \subset \mathbb{P}^4$. Seja $GL(5)$ o grupo linear das matrizes 5×5 com entradas reais e considere $A, A' \in GL(5)$. Dizemos que A é equivalente a A' e denotamos por $A \sim A'$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda A'$.

É claro que esta relação é uma relação de equivalência. O **grupo linear projetivo** é definido como

$$PGL(5) := GL(5) / \sim .$$

Assim, identificaremos um elemento em $PGL(5)$ pela aplicação

$$\begin{aligned} [A] : \mathbb{P}^4 &\rightarrow \mathbb{P}^4 \\ [x] &\mapsto [Ax] \end{aligned}$$

onde $[x]$ é o representante de $\mathbb{R}^5 - \{\mathbf{0}\}$. Definimos o conjunto das **transformações projetivas** como o subgrupo

$$G(5) := \{\Psi \in PGL(5) \mid \Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \Psi(H) = H\},$$

onde $\mathbf{0} = [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ é a origem e H o plano xy em $\mathbb{R}^4$ (i.e., $[x : y : 0 : 0 : 1]$).

Logo, uma matriz nesse subgrupo é escrita na forma

$$X = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} & 0 \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & C_{2 \times 2} & 0 \\ 0_{2 \times 2} & B_{2 \times 2} & 0 \\ \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $q_{ij}, p_i \in \mathbb{R}$. Como $X \in G(5)$ então

$$\det(X) = \det A \cdot \det B \neq 0,$$

Assim, o subgrupo $G(5)$ é 16-dimensional e age sobre $V_\ell \times V_\ell$. Note que a coordenada $\{[x : y : z : w : 1]\}$ em $\mathbb{P}^4$ pode ser vista como (x, y, z, w) em $\mathbb{R}^4$. Assim, podemos definir uma **transformação projetiva** $\Psi \in G(5)$ localmente como um germe de difeomorfismo $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ da forma

$$\Psi(x, y, z, w) = \left(\frac{q_1(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_2(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_3(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_4(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} q_i(x, y, z, w) &= q_{i1}x + q_{i2}y + q_{i3}z + q_{i4}w, \quad \text{para } i = 1, 2 \\ q_j(x, y, z, w) &= q_{j3}z + q_{j4}w, \quad \text{para } j = 3, 4 \\ p(x, y, z, w) &= 1 + p_1x + p_2y + p_3z + p_4w, \end{aligned}$$

onde $q_{ij}, p_i \in \mathbb{R}$.

Sejam (f_1, f_2) e (g_1, g_2) duas formas de Monge de germes de superfícies na origem. Dizemos que o k -jato dessas superfícies na origem são **projetivamente equivalente**, e denotamos por $j^k(f_1, f_2) \sim j^k(g_1, g_2)$, se existe $\Psi \in G(5)$ que leva uma na outra. Além disso, o $\mathcal{A}^\ell$ -tipo de singularidade da projeção central dos jatos de uma superfície suave são invariantes por transformações projetivas, isto é, $j^\ell \varphi_{p,f} \sim_{\mathcal{A}^\ell} j^\ell \varphi_{\Phi(p), \Phi(f)}$ para um ponto de vista p e $\Phi \in G(5)$. Definimos

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, w) &= \frac{q_3}{p} - f_1\left(\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}\right) \\ F_2(x, y, z, w) &= \frac{q_4}{p} - f_2\left(\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}\right). \end{aligned}$$

Nome	Forma Normal	codim G_W
hiperbólico	(x^2, y^2)	0
elíptico	$(x^2 - y^2, xy)$	0
parabólico	(x^2, xy)	1
inflexão	$(x^2 \pm y^2, 0)$	2

Tabela 6.1: Classificação de Gibson [23].

Então

$$F_1(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = F_2(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = o(k),$$

onde o é o símbolo de Landau implica que $j^k(f_1, f_2) \sim j^k(g_1, g_2)$.

Portanto, para checar a equivalência, temos que resolver equações algébricas $F_1 = F_2 = o(k)$ em termos dos q_i s e p_i s para uma forma de Monge $f = (f_1, f_2)$ e simplificar a forma normal (g_1, g_2) .

6.2 Classificação projetiva do k -jato

Escrevemos

$$(f_1, f_2) = \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i + \cdots, \sum_{i=0}^2 b_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i + \cdots \right).$$

Classificação do 2-jato

Seja $j^2(f_1, f_2) = \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} x^{2-i} y^i, \sum_{i=0}^2 b_{2i} x^{2-i} y^i \right)$. Vamos classificar o 2-jato da forma de Monge.

Lema 6.2.1. *O 2-jato $j^2(f_1, f_2)$ é equivalente, por transformações projetivas a um dos germes descritos na Tabela 6.1.*

Demonstração. Seja (g_1, g_2) um par de formas normais dado por

$$(U_1x^2 + U_2xy + U_3y^2, V_1x^2 + V_2xy + V_3y^2).$$

Pela relação $F_1(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = F_2(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = o(2)$ obtemos o seguinte sistema linear

$$(U_1 \ U_2 \ U_3 \ V_1 \ V_2 \ V_3)^t = \mathcal{N} \cdot (a_{20} \ a_{21} \ a_{22} \ b_{20} \ b_{21} \ b_{22})^t \quad (6.1)$$

em $(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3)$ onde $\mathcal{N}$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} q_{44}q_{11}^2 & q_{44}q_{11}q_{21} & q_{44}q_{21}^2 & -q_{34}q_{11}^2 & -q_{34}q_{11}q_{21} & -q_{34}q_{21}^2 \\ 2q_{44}q_{11}q_{21} & 2q_{44}(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) & 2q_{44}q_{21}q_{22} & -2q_{34}q_{11}q_{21} & -2q_{34}(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) & -2q_{34}q_{21}q_{22} \\ q_{44}q_{12}^2 & q_{44}q_{12}q_{22} & q_{44}q_{22}^2 & -q_{34}q_{12}^2 & -q_{34}q_{12}q_{22} & -q_{34}q_{22}^2 \\ -q_{43}q_{11}^2 & -q_{43}q_{11}q_{21} & -q_{43}q_{21}^2 & q_{33}q_{11}^2 & q_{33}q_{11}q_{21} & q_{33}q_{21}^2 \\ -2q_{43}q_{11}q_{21} & -2q_{43}(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) & -2q_{43}q_{21}q_{22} & 2q_{33}q_{11}q_{21} & 2q_{33}(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) & 2q_{33}q_{21}q_{22} \\ -q_{43}q_{12}^2 & -q_{43}q_{12}q_{22} & -q_{43}q_{22}^2 & q_{33}q_{12}^2 & q_{33}q_{12}q_{22} & q_{33}q_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

O sistema linear (6.1) tem solução se, e somente se,

$$\det \mathcal{N} = \det A \cdot \det B \cdot (q_{11}^2q_{22}^2 - 4q_{11}q_{12}q_{21}q_{22} - q_{12}^2q_{21}^2) \neq 0.$$

onde A e B são as submatrizes da transformação projetiva representada pela matriz X . Isto implica que $\det X \neq 0$. Uma vez que o 2-jato depende apenas dos coeficientes $q_{i1}, q_{i2}, q_{j3}q_{j4}$ com $i = 1, 2$ e $j = 3, 4$ da matriz X , então a ação do grupo $G(5)$ se transforma na ação do grupo

$$\mathcal{G} = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$$

sobre o par de formas quadráticas. As $\mathcal{G}$ -órbitas já foram listadas em [23] e as formas normais foram denominados hiperbólico, elíptico, parabólico e inflexão como descritos na Tabela 6.1. $\square$

Obtida a classificação do 2-jato, o próximo passo, é classificar os 3-jatos de (f_1, f_2) com 2-jato sendo uma das formas normais da Tabela 6.1. Iniciaremos com o caso hiperbólico.

6.2.1 Em um ponto hiperbólico

Tomemos $j^2(f_1, f_2) = (x^2, y^2)$ e escrevemos

$$j^3(f_1, f_2) = (x^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i, y^2 + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i). \quad (6.2)$$

Proposição 6.2.2. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como em (6.2).*

(1). *Temos a seguinte equivalência*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 + a_{33}y^3, y^2 + b_{30}x^3).$$

(2).

$$j^3(f_1, f_2) \sim \begin{cases} (x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3) & \text{se } a_{33} \neq 0 \text{ e } b_{30} \neq 0; \\ (x^2 + y^3, y^2) & \text{se } b_{30} = 0; \\ (x^2, y^2) & \text{se } a_{33} = b_{30} = 0 \end{cases}$$

Demonstração. (1). Basta considerar a transformação projetiva Ψ da seguinte maneira $q_1 = x + \frac{1}{2}(-a_{30} + b_{32})z - \frac{1}{2}a_{32}w$, $q_2 = y - \frac{1}{2}b_{31}z + \frac{1}{2}(a_{31} - b_{33})w$, $q_3 = z$, $q_4 = w$ e $p = 1 + b_{32}x + a_{31}y$.

Vamos apresentar aqui uma demonstração detalhada e exibimos nos outros casos apenas a transformação projetiva, uma vez que as contas são análogas.

Considere outra forma de Monge (g_1, g_2) tal que seu 3-jato é dado por

$$(x^2 + U_1x^3 + U_2x^2y + U_3xy^2 + U_4y^3, y^2 + V_1x^3 + V_2x^2y + V_3xy^2 + V_4y^3).$$

Pela relação $F_1(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = F_2(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = o(3)$ temos

$$(F_1, F_2) = ((q_{11}^2 - q_{33})x^2 + 2q_{11}q_{12}xy + (q_{12}^2 - q_{34})y^2 + t.o.s, \\ (q_{21}^2 - q_{43})x^2 + 2q_{22}q_{21}xy + (q_{22}^2 - q_{44})y^2 + t.o.s).$$

Como queremos que o 2-jato (x^2, y^2) fique preservado, tomamos

$$\begin{aligned} q_{33} &= q_{11}^2; \\ q_{44} &= q_{22}^2; \\ q_{12} &= q_{21} = q_{34} = q_{43} = 0; \\ q_{11} &= 1 \\ q_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Com essas condições, o $j^3(F_1, F_2)$ tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} &((a_{30}q_{11}^3 - U_1q_{11}^2 - p_1q_{11}^2 + 2q_{11}q_{13})x^3 + (a_{31}q_{11}^2q_{22} - U_2q_{11}^2 - p_2q_{11}^2)x^2y + (a_{32}q_{11}q_{22}^2 - \\ &U_3q_{11}^2 + 2q_{11}q_{14})xy^2 + (a_{33}q_{22}^3 - U_4q_{11}^2)y^3, (b_{30}q_{11}^3 - V_1q_{22}^2)x^3 + (b_{31}q_{11}^2q_{22} - V_2q_{22}^2 + \\ &2q_{22}q_{23})x^2y + (b_{32}q_{11}q_{22}^2 - V_3q_{22}^2 - p_1q_{22}^2)xy^2 + (b_{33}q_{22}^3 - V_4q_{22}^2 - p_2q_{22}^2 + 2q_{22}q_{24})y^3). \end{aligned}$$

Nosso objetivo é simplificar o máximo possível a expressão de $j^3(F_1, F_2)$. Podemos anular todos os coeficientes dos monômios de $j^3(F_1, F_2)$. Assim obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_{22}}{q_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q_{22}^2}{q_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q_{22}^3}{q_{11}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{30} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 + \frac{2q_{13}}{q_{11}} \\ -p_2 \\ \frac{2q_{14}}{q_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_{11}^3}{q_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_{11}^2}{q_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{30} \\ b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2q_{23}}{q_{22}} \\ -p_1 \\ -p_2 + \frac{2q_{24}}{q_{22}} \end{pmatrix}$$

Note que, sendo $a_{33}b_{30} \neq 0$, é impossível eliminar os termos $(y^3, 0)$ e $(0, x^3)$.

Por outro lado, se $U_i = 0$ for $i = 1, 2, 3$ and $V_i = 0$ for $i = 2, 3, 4$, obtemos $p_1 = b_{32}q_{11}$, $p_2 = a_{31}q_{22}$, $q_{13} = \frac{1}{2}(-a_{30}q_{11}^2 + b_{32}q_{11}^2)$, $q_{14} = -\frac{1}{2}a_{32}q_{22}^2$, $q_{23} = -\frac{1}{2}b_{31}q_{11}^2$, $q_{24} = \frac{1}{2}(a_{31}q_{22}^2 - b_{33}q_{22}^2)$.

Portanto, a matriz X da ação $G(5)$ é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(-a_{30} + b_{32}) & -\frac{1}{2}a_{32} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}b_{31} & \frac{1}{2}(a_{31} - b_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{32} & a_{31} & p_3 & p_4 & 1 \end{pmatrix}$$

e descreve a transformação projetiva Ψ desejada.

(2). Se $a_{33} \neq 0$ e $b_{30} \neq 0$, considere a forma normal $(x^2 + a_{33}y^3, y^2 + b_{30}x^3)$ e tome a transformação projetiva $q_1 = \sqrt{a_{33}}x$, $q_2 = y$ e $q_3 = a_{33}z$ com $\alpha = a_{33}^{3/2}b_{30}$. Os outros casos seguem imediatamente. $\square$

Note que, na expressão da matriz X na demonstração da Proposição 6.2.2 os coeficientes p_3 e p_4 são independentes do $j^3(f_1, f_2)$ e podem ser usados na classificação do $j^4(f_1, f_2)$. Vamos fixar agora o $j^3(f_1, f_2)$ como a forma normal da Proposição 6.2.2 e vamos classificar os 4-jatos da forma

$$j^4(f_1, f_2) = (x^2 + y^3 + \sum_{i=0}^4 a_{4i}x^{4-i}y^i, y^2 + \alpha x^3 + \sum_{i=0}^4 b_{4i}x^{4-i}y^i). \quad (6.3)$$

Proposição 6.2.3. *Seja (f_1, f_2) com $j^4(f_1, f_2)$ como em (6.3). Então $j^4(f_1, f_2)$ é equivalente, por transformações projetivas a um dos seguintes pares*

$$(i) \ (x^2 + y^3 + y\phi_3^1, y^2 + \alpha x^3 + x\phi_3^2);$$

$$(ii) \ (x^2 + y^3 + \phi_4^1, y^2 + \alpha x^3 + b_{40}x^4 + b_{41}x^3y + b_{43}xy^3);$$

$$(iii) \ (x^2 + y^3 + a_{40}x^4 + a_{41}x^3y + a_{43}xy^3 + a_{44}y^4, y^2 + \alpha x^3 + b_{40}x^4 + b_{41}x^3y + b_{43}xy^3 + b_{44}y^4).$$

onde ϕ_i^j é um polinômio homogêneo de grau i .

Demonstração. A prova é similar a da Proposição 6.2.2. Basta tomar a transformação projetiva Ψ dada por $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, $q_4 = w$ com $p = 1 + a_{40}z + b_{44}w$, no primeiro caso, e $p = 1 + b_{42}z + b_{44}w$ e $p = 1 + a_{42}z + b_{42}w$, para os demais casos. $\square$

Observação 6.2.4. 1. Observe que podemos obter outras formas normais que simplificam o 4 e 5-jato simultaneamente com o 3-jato fixado. De fato, como temos duas escolhas (elementos p_3 e p_4), podemos escolher eliminar apenas um coeficiente no 4-jato e outro elemento no 5-jato de (f_1, f_2) .

2. Quando $b_{30} = 0$, podemos considerar uma forma normal no 5-jato como

$$j^5(f_1, f_2) \sim (x^2 + y^3 + y\phi_3^1 + \phi_5^1, y^2 + x\phi_3^2 + \phi_5^2).$$

Quando $a_{03} = b_{30} = 0$, podemos tomar

$$j^5(f_1, f_2) \sim (x^2 + y\phi_3^1 + \phi_5^1, y^2 + x\phi_3^2 + \phi_5^2).$$

6.2.2 Em um ponto elíptico

Suponha que $j^2f = (x^2 - y^2, xy)$ e escreva

$$j^3(f_1, f_2) = (x^2 - y^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i}x^{3-i}y^i, xy + \sum_{i=0}^3 b_{3i}x^{3-i}y^i)$$

Proposição 6.2.5. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como acima. Então*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 - y^2 + y^2\phi_1, xy),$$

onde ϕ_1 é polinômio homogêneo de grau 1.

Demonstração. Basta tomar a transformação projetiva Φ com

$$\begin{aligned} q_1 &= x + b_{33}z + (-a_{31} + b_{32} - b_{30})w, & q_2 &= y - b_{30}z + (-b_{31} + b_{33} + a_{30})w, \\ q_3 &= z, & q_4 &= w, & p &= 1 + (a_{30} + 2b_{33})x + (2b_{32} - a_{31})y. \end{aligned}$$

□

6.2.3 Em um ponto parabólico

Vamos tomar aqui $j^2(f_1, f_2) = (x^2, xy)$ e escrevemos

$$j^3(f_1, f_2) = (x^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i}x^{3-i}y^i, xy + \sum_{i=0}^3 b_{3i}x^{3-i}y^i) \quad (6.4)$$

Proposição 6.2.6. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como em (6.4). Se $a_{33} \neq 0$*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 + \beta xy^2 + y^3, xy),$$

onde $\beta \neq 0$.

Demonstração. Os cálculos, nesta parte, são mais longos e por essa razão utilizamos o software MAPLE. Para maiores detalhes ver o Apêndice, Figuras 8.1 a 8.5. A ideia aqui é similar aos casos anteriores, isto é, tentamos eliminar o número máximo de coeficientes do 3-jato fixando o 2-jato. Desta maneira, aplicando a transformação projetiva em $j^3(f_1, f_2)$ com

$$\begin{aligned} q_1 &= x - \frac{1}{27} \frac{(-27b_{31}a_{33}^2 + 9b_{32}a_{32}a_{33} + 27a_{30}a_{33}^2 + 2a_{32}^3 - 9a_{31}a_{32}a_{33})}{a_{33}^2} z \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{(-3a_{33}b_{32} + 3a_{32}b_{33} - a_{32}^2 + 3a_{31}a_{33})}{a_{33}} w, \\ q_2 &= -\frac{a_{32}}{3a_{33}}x + y + \frac{1}{27} \frac{(-27b_{30}a_{33}^3 + a_{32}^3b_{33})}{a_{33}^3} z, \\ q_3 &= z, \\ q_4 &= -\frac{a_{32}}{3a_{33}}z + w, \\ p &= 1 + p_1x + p_2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } p_1 &= -\frac{1}{27} \frac{(-54b_{31}a_{33}^2 + 18b_{32}a_{32}a_{33} + 27a_{30}a_{33}^2 + 2a_{32}^3 - 9a_{31}a_{32}a_{33})}{a_{33}^2} \text{ e} \\ p_2 &= -\frac{(-6a_{33}b_{32} + 6a_{32}b_{33} - a_{32}^2 + 3a_{31}a_{33})}{3a_{33}}, \text{ obtemos} \end{aligned}$$

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 + a_{33}y^3, xy + (-b_{33} - \frac{1}{3}a_{32})y^3).$$

Ao tomar a transformação projetiva $q_1 = \sqrt{a_{33}}x$, $q_2 = y$ e $q_3 = a_{33}z$, $q_4 = \sqrt{a_{33}}w$ obtemos que

$$(x^2 + a_{33}y^3, xy + (-b_{33} - \frac{1}{3}a_{32})y^3) \sim (x^2 + y^3, xy + By^3),$$

com $B = \frac{a_{32}+3b_{33}}{3\sqrt{a_{33}}}$. Tomando a forma normal encontrada e ao considerar a transformação projetiva $q_1 = x - 3B^2w$, $q_2 = Bx + y - 2B^3w$, $q_3 = z$, $q_4 = Bz + w$, $p = 1 + B^3x - 3B^2y$ com $\beta = 3B$, temos que

$$(x^2 + y^3, xy + By^3) \sim (x^2 + \beta xy^2 + y^3, xy).$$

□

Note que, na expressão da matriz X na demonstração da Proposição 6.2.6 os coeficientes q_{24}, p_3 e p_4 são independentes do $j^3(f_1, f_2)$ e podem ser usados na classificação do $j^4(f_1, f_2)$. Vamos fixar agora o $j^3(f_1, f_2)$ como a forma normal da Proposição 6.4 e vamos classificar os 4-jatos da forma

$$j^4(f_1, f_2) = (x^2 + \beta xy^2 + y^3 + \sum_{i=0}^4 a_{4i} x^{4-i} y^i, xy + \sum_{i=0}^4 b_{4i} x^{4-i} y^i). \quad (6.5)$$

Proposição 6.2.7. *Seja (f_1, f_2) com $j^4(f_1, f_2)$ como em (6.5). Se $a_{33} \neq 0$, então*

$$j^4(f_1, f_2) \sim (x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi, xy + x\phi),$$

onde ψ e ϕ são polinômios homogêneos de grau 3.

Demonstração. Basta tomar a transformação projetiva $q_1 = x - b_{44}z$, $q_2 = y - b_{44}w$, $q_3 = z$, $q_4 = w$ e $p = 1 + 2b_{44}^3x + (b_{44}^2 + a_{40})z$. □

Proposição 6.2.8. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como em (6.4). Se $a_{33} = 0$ e $a_{32} \neq 0$, então*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 + xy^2, xy + \gamma y^3)$$

Demonstração. Por Ψ com $q_1 = a_{32}x + -\frac{1}{2}(a_{30}a_{32}^2)z + a_{32}(-a_{31} + b_{32})w$, $q_2 = y - b_{30}a_{32}^2z + \frac{1}{2}a_{32}(a_{30} - 2b_{31})w$, $q_3 = a_{32}^2z$, $q_4 = a_{32}w$ e $p = 1 - (a_{31} - 2b_{32})y$, onde $\gamma = \frac{b_{33}}{a_{32}}$. □

Vamos fixar agora o $j^3(f_1, f_2)$ como a forma normal da Proposição 6.2.8 e vamos classificar os 4-jatos da forma

$$j^4(f_1, f_2) = (x^2 + xy^2 + \sum_{i=0}^4 a_{4i} x^{4-i} y^i, xy + \gamma y^3 + \sum_{i=0}^4 b_{4i} x^{4-i} y^i). \quad (6.6)$$

Proposição 6.2.9. *Seja (f_1, f_2) com $j^4(f_1, f_2)$ como em (6.6). Se $\gamma \neq 0$, então*

$$j^4(f_1, f_2) \sim (x^2 + xy^2 + \alpha y^4, xy + \gamma y^3 + \phi_4),$$

onde $\Lambda = 6\gamma^2 + 4\alpha - 15\gamma + 5 \neq 0$ e ϕ_4 é um polinômio homogêneo de grau 4.

Demonstração. Tomando Ψ com $q_1 = x + \frac{1}{2}(-q_{21}^2 + p_1)z + (3\gamma q_{21} - 3q_{21})w$, $q_2 = y + q_{21}x + \frac{1}{2}(-2\gamma q_{21}^3 + q_{21}^3 + p_1 q_{21})z + \frac{1}{2}(-q_{21}^2 + p_1)w$, $q_3 = z$, $q_4 = q_{21}z + w$ and $p = 1 + p_1x - (-6\gamma q_{21} - 4q_{21})y + p_3z + p_4w$, onde $p_1 = \frac{1}{\Lambda^2}\xi_1$, $p_3 = \frac{1}{\Lambda^4}\xi_2$, $p_4 = \frac{1}{\Lambda^3}\xi_3$, $q_{21} = -\frac{a_{43}}{\Lambda}$, ξ_i são combinações dos coeficientes do 4-jato e $\Lambda = 6\gamma^2 + 4\alpha - 15\gamma + 5 \neq 0$. Se $\Lambda = 0$ os termos de ordem 4 não podem ser ignorados. As contas mais detalhadas podem ser encontradas no Apêndice, Figuras 8.6 a 8.12. $\square$

6.2.4 Em um ponto de inflexão

O caso inflexão é dividido em dois casos: $j^2(f_1, f_2) = (x^2 + y^2, 0)$ e $j^2(f_1, f_2) = (x^2 - y^2, 0)$. Vamos tomar primeiro $j^2(f_1, f_2) = (x^2 + y^2, 0)$ e escrevemos

$$j^3(f_1, f_2) = (x^2 + y^2 + \sum_{i=0}^3 a_{3i}x^{3-i}y^i, \sum_{i=0}^3 b_{3i}x^{3-i}y^i) \quad (6.7)$$

Proposição 6.2.10. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como em (6.7). Se $b_{30} - b_{32} \neq 0$, então*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (x^2 + y^2 + k_1x^2y, \phi_3),$$

onde k_1 é uma constante qualquer.

Demonstração. Tome Ψ com $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z + (a_{30} - a_{32})w$, $q_4 = (b_{30} - b_{32})w$ e $p = 1 - \frac{(a_{30}b_{32} - a_{32}b_{30})}{(b_{30} - b_{32})}x - \frac{(a_{30}b_{33} - a_{32}b_{33} - a_{33}b_{30} + a_{33}b_{32})}{(b_{30} - b_{32})}y$. Para maiores detalhes veja o Apêndice, Figuras 8.13 a 8.15. $\square$

No segundo caso, suponha $j^2(f_1, f_2) = (x^2 - y^2, 0)$ para facilitar as contas, tomemos $q_1 = x - (1/4)y$ e $q_2 = x + (1/4)y$ e consideramos $j^2(f_1, f_2) = (xy, 0)$. Assim podemos escrever

$$j^3(f_1, f_2) = (xy + \sum_{i=0}^3 a_{3i}x^{3-i}y^i, \sum_{i=0}^3 b_{3i}x^{3-i}y^i) \quad (6.8)$$

Proposição 6.2.11. *Seja (f_1, f_2) com $j^3(f_1, f_2)$ como em (6.8). Se $b_{33} \neq 0$, então*

$$j^3(f_1, f_2) \sim (xy + k_2x^3, \phi_3),$$

onde k_2 é uma constante qualquer.

Demonstração. Basta tomar Ψ com $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z + a_{33}w$, $q_4 = b_{33}w$ e $p = 1 - \frac{(a_{31}b_{33} - a_{33}b_{31})}{b_{33}}x - \frac{(a_{32}b_{33} - a_{33}b_{32})}{b_{33}}y$. Para maiores detalhes veja o Apêndice, Figuras 8.16 a 8.18. $\square$

Resumindo os resultados anteriores no seguinte teorema.

Teorema 6.2.12. *Existe um subconjunto $\mathcal{O}$ aberto e denso em $\mathbb{P}^4$ composta por de superfícies suaves compacta M tal que o germe em cada ponto em M em $\mathcal{O}$ é projetivamente equivalente a um germe com o k -jato da sua forma de Monge sendo um dos casos da Tabela 6.2.*

Forma normal	Condições	k -jato	codim G_W
$(x^2 - y^2 + y^2\phi_1, xy)$	—	3	0
$(x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3)$	$\alpha \neq 0$	3	0
$(x^2 + y^3, y^2)$	—	3	1
(x^2, y^2)	—	3	2
$(x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi_3, xy + x\phi_3)$	—	4	1
$(xy + \gamma y^3 + \phi_4, x^2 + xy^2 + \lambda y^4)$	$\gamma, \Lambda \neq 0$	4	2
$(x^2 + y^2 + k_1 x^2 y, \phi_3)$	$b_{30} - b_{12} \neq 0$	3	2
$(xy + k_2 x^3, \phi_3)$	$b_{33} \neq 0$	3	2

Tabela 6.2: O estrato de codimensão ≤ 2 no espaço dos k -jatos da forma de Monge.

ϕ_i e ψ_i significa polinômio homogêneo de grau i .

6.3 Projeções Centrais

Estamos interessados em estudar a geometria extrínseca local de superfícies em $\mathbb{P}^4$ por meio do seu contato com retas. Esse contato é capturado pelas $\mathcal{A}$ -singularidades da projeção central. Uma vez que as singularidades da projeção

central não se alteram por transformações projetivas em $\mathbb{P}^4$, utilizamos as formas normais do Teorema 6.2.12.

Seja $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^5$ e considere $p = [\mathbf{p}] \in \mathbb{P}^4$ um **ponto de vista**. Tome $W_p \subset \mathbb{R}^5$ o hiperplano tal que $W_p \oplus \langle p \rangle = \mathbb{R}^5$. A **projeção central** π_p **do ponto de vista** p é a aplicação de $\mathbb{P}^4$ na projetivização $\mathbb{P}(W_p)$ dada por

$$\pi_p([\mathbf{u}]) = \text{A linha gerada por } [\mathbf{u} - \mathbf{p}] \in \mathbb{P}(W_p) \subset \mathbb{P}^4.$$

Considere a restrição a carta afim $\{[x : y : z : w : 1]\}$. Para $\mathbf{p} = (a, b, c, d, 1) \in \mathbb{R}^5$, temos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \\ -a & -b & -c & -d & -1 \end{pmatrix}$$

e a transformação projetiva $\Phi_A : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ definida por A . Obviamente $\Phi_A(p) = 0 \in \mathbb{R}^4$ e $\Phi_A(W_p) = \mathbb{P}^3$. Desta maneira podemos identificar, pela carta afim, π_p com

$$\begin{aligned} \Phi_A \circ \pi_p : \mathbb{R}^4 - \{p\} &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ (x, y, z, w) &\mapsto [x - a : y - b : z - c : w - d] \end{aligned}$$

Se o ponto de vista é um ponto do infinito, isto é, se $\mathbf{p} = (p, 0)$ com $p = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, então com $\mathbf{u} = (u, 1) \in \mathbb{R}^5$ a projeção é dada por

$$\pi_p([\mathbf{u}]) = \text{A linha gerada por } [u - p : 1] \in \mathbb{P}(W_p).$$

Portanto, pela carta afim, podemos identificar a **projeção ortogonal** em $\mathbb{R}^4$ na direção do vetor p . Se $a \neq 0$ e $\alpha = b/a$, $\beta = c/a$ e $\gamma = d/a$. Por transformações lineares na meta $\mathbb{R}^3$ (identificado por $\{[1 : y : z : w]\}$), obtemos

$$\begin{aligned} \pi_p : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (y - \alpha x, z - \beta x, w - \gamma x). \end{aligned}$$

Seja M uma superfície em $\mathbb{P}^4$ dada na forma de Monge (x, y, f^1, f^2) onde

$$\begin{aligned} z &= f^1(x, y) = \sum_{i=0}^2 a_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i + \dots \\ w &= f^2(x, y) = \sum_{i=0}^2 b_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i + \dots \end{aligned}$$

Escrevendo $f = (f^1, f^2)$ a projeção central de um ponto de vista p pode ser escrita localmente por $\varphi_{p,f} = \pi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma

$$\begin{aligned} \varphi_{p,f}(x, y) &= \left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{f_1(x,y)-c}{x-a}, \frac{f_2(x,y)-d}{x-a} \right) = (X, Y, Z), \text{ se } p = (a, b, c, d) \text{ com } a \neq 0 \text{ ou} \\ \varphi_{p,f}(x, y) &= \left(\frac{x-b}{y-a}, \frac{f_1(x,y)-c}{y-a}, \frac{f_2(x,y)-d}{y-a} \right) = (X, Y, Z), \text{ se } p = (b, a, c, d) \text{ com } a \neq 0. \end{aligned}$$

usando as coordenadas locais (x, y) de M e $[1 : X : Y : Z]$ de $\mathbb{P}^3$. Se p é escolhido como um ponto do infinito em $\mathbb{P}^4$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{p,f}(x, y) &= (y - ux, f_1(x, y) - vx, f_2(x, y) - wx) \text{ ou} \\ \varphi_{p,f}(x, y) &= (x - uy, f_1(x, y) - vy, f_2(x, y) - wy). \end{aligned}$$

Vamos fazer um estudo mais detalhado das projeções centrais. Considere a projeção

$$\varphi_{p,f}(x, y) = \left(\frac{x-b}{y-a}, \frac{f_1(x,y)-c}{y-a}, \frac{f_2(x,y)-d}{y-a} \right).$$

O outro caso é análogo. Observe que a projeção central $\varphi_{p,f}$ é singular na origem, se e somente, se $c = d = 0$, ou seja, como a superfície é localmente dada na forma de Monge, o ponto $p \in T_q M$ para algum $q \in M$. Portanto, a partir disso, tomaremos sempre um o ponto de vista p pertencendo ao espaço tangente a superfície.

Considere a mudança de coordenada na meta $(x, y, z) \mapsto (x - b/a, y, z)$ para levar a origem na origem e tomar projeção central da forma

$$\left(\frac{x-b}{y-a} - \frac{b}{a}, \frac{f_1(x,y)}{y-a}, \frac{f_2(x,y)}{y-a} \right).$$

Além disso, realizando a mudança de coordenadas na fonte $(x, y) \mapsto (x + b/a)(y - a) + b, y)$ obtemos que a projeção central é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\left(x, \frac{f_1((x + b/a)(y - a) + b, y)}{y - a}, \frac{f_2((x + b/a)(y - a) + b, y)}{y - a} \right).$$

A partir de agora vamos fazer uma análise das singularidades das projeções centrais em função das formas normais projetivas do Teorema 6.2.12. Começamos pelo 2-jato de (f_1, f_2) .

- (i) Em um ponto hiperbólico, tomamos $j^2(f_1, f_2) = (x^2, y^2)$. Então o 2-jato de $\varphi_{p,f}$ é dado por

$$(x, -ax^2 + \frac{2bxy}{a} - \frac{b^2y^2}{a^3}, -\frac{y^2}{a}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, bxy, y^2)$$

Logo, a projeção central é um cross-cap se, e somente se, $b \neq 0$. Assim, para p tanto na direção $(1, 0, 0, 0)$ quanto na direção $(0, 1, 0, 0)$ a projeção $\varphi_{p,f}$ tem singularidade pior que cross-cap. Essas direções são exatamente as duas direções assintóticas no ponto considerado.

- (ii) Em um ponto elíptico, tomamos $j^2(f_1, f_2) = (x^2 - y^2, xy)$. Então o 2-jato de $\varphi_{p,f}$ é dado por

$$(x, xy - \frac{by^2}{a^2}, -ax^2 + \frac{2bxy}{a} - \frac{(a^2 + b^2)y^2}{a^3})$$

Neste caso, a projeção é sempre um cross-cap, pois $a^2 + b^2 \neq 0$. Logo para qualquer p em alguma direção a projeção central tem singularidade cross-cap. Isto é, não existem direções assintóticas nessa região da superfície.

- (iii) Em um ponto parabólico, tomamos $j^2(f_1, f_2) = (x^2, xy)$. Então o 2-jato de $\varphi_{p,f}$ é dado por

$$(x, -ax^2 + \frac{2bxy}{a} - \frac{b^2y^2}{a^3}, xy - \frac{by^2}{a^2}) \sim_{\mathcal{A}^2} (x, b^2y^2, xy)$$

Logo, a projeção central também é um cross-cap se, e somente se, $b \neq 0$. Se $b = 0$, p esta na direção $(1, 0, 0, 0)$ tal que a projeção central tem singularidade pior que um cross-cap. Esta direção é exatamente a única direção assintótica que existe no ponto parabólico.

- (iv) Em um ponto de inflexão, tomamos $j^2(f_1, f_2) = (x^2 + y^2, 0)$ (resp. $(x^2 - y^2, 0)$), o 2-jato de $\varphi_{p,f}$ tem a forma

$$(x, -ax^2 + \frac{2bxy}{a} - \frac{(a^2 + b^2)y^2}{a^3}, 0) \text{ (respec. } (x, xy - \frac{by^2}{a^2}, 0))$$

Em ambos os casos, para $p = (a, b, 0, 0)$ em qualquer direção no espaço tangente a projeção central tem singularidade pior que um cross-cap. Além disso, todas essas direções são assintóticas.

Baseados nisso, vamos estudar quais singularidades ocorrem nas projeções centrais.

Antes necessitamos apresentar os estratos que existem em $J^3(2, 3)$. Mond em [32, 33] estratificou $J^3(2, 3)$ e descreveu as $\mathcal{A}^3$ -órbitas ($\mathcal{A}^3\text{-cod} \leq 6$) como segue:

$$\begin{aligned} S_0 &: (x, y^2, xy); \\ S &: (x, y^2, y^3 + x^2y) \text{ ou } (x, y^2, y^3); \\ B &: (x, y^2, x^2y) \text{ ou } (x, y^2, 0); \\ H &: (x, xy, y^3); \\ P &: (x, xy + y^3, xy^2); \\ R &: (x, xy, xy^2); \\ T &: (x, xy + y^3, 0). \end{aligned}$$

A Table 6.3 apresenta a classificação de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ feita por D. Mond em [32].

Proposição 6.3.1. *Para um germe de superfície na forma de Monge $(z, w) = (f_1, f_2) = f$, denotando a projeção central por $\varphi_{p,f}$, temos as seguintes caracterizações:*

- (i) *Em pontos elípticos, $\varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}} S_0$ para todo $p \in T_q M$.*
- (ii) *Em pontos hiperbólicos com $j^3(f_1, f_2) = (x^2 + \sum_{i+j=3} a_{ij}x^i y^j, y^2 + \sum_{i+j=3} a_{ij}x^i y^j)$ com o eixo x e y sendo direções assintóticas temos:*

$$j^3\varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} S \Leftrightarrow a_{33} \neq 0 \text{ (resp. } b_{30} \neq 0)$$

$$j^3\varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} B \Leftrightarrow a_{33} = 0 \text{ (resp. } b_{30} = 0)$$

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -codim
imersão	$(x, y, 0)$	0
Cross-cap	(x, y^2, xy)	0
$S_k^\pm$	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y)$	$k = 1, 2, 3, 4$
$B_k^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1})$	$k = 2, 3, 4$
$C_3^\pm$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^k y)$	3, 4
$H_k^\pm$	$(x, xy \pm y^{3k-1}, y^3)$	$k = 2, 3, 4$
$F_4^\pm$	$(x, y^2, x^3y + y^5)$	4
$P_3(c)$	$(x, xy + y^3, xy^2 + cy^4), c \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$	3
$P_4(0)$	$(x, xy + y^3, xy^2 + y^7)$	4
$P_4(\frac{1}{2})$	$(x, xy + y^3, xy^2 + \frac{1}{2}y^4 + y^5)$	4
$P_4(1)$	$(x, xy + y^3, xy^2 + y^4 + y^6)$	4
$P_4(\frac{3}{2})$	$(x, xy + y^3, xy^2 + \frac{3}{2}y^4 + y^5)$	4
R_4	$(x, xy + y^6 + by^7, xy^2 + y^4 + cy^6)$	4
T_4	$(x, xy + y^3, y^4)$	4
X_4	$(x, y^3, x^2y + xy^2 + y^4)$	4
Y_4	$(x, y^3 - x^2y, xy^2 + y^4)$	4

Tabela 6.3: Germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$.[32]

para p na reta tangente paralela a direção assintótica $(0, 1)$ (resp. $(1, 0)$).

(iii) Em pontos parabólicos com $j^3 f(0) = (x^2 + \sum_{i+j=3} a_{ij} x^i y^j, xy + \sum_{i+j=3} a_{ij} x^i y^j)$,

$$\begin{aligned}
 j^3 \varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} H & \Leftrightarrow a_{33} \neq 0 \\
 j^3 \varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} P & \Leftrightarrow a_{33} = 0 \text{ e } a_{12}, b_{33} \neq 0 \\
 j^3 \varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} R & \Leftrightarrow a_{33} = b_{33} = 0 \text{ e } a_{12} \neq 0 \\
 j^3 \varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} T & \Leftrightarrow a_{33} = a_{12} = 0 \text{ e } b_{33} \neq 0 \\
 j^3 \varphi_{p,f}(0) \sim_{\mathcal{A}^3} (x, xy, 0) & \Leftrightarrow a_{33} = a_{12} = b_{33} = 0.
 \end{aligned}$$

para p na reta tangente paralela a única direção assintótica.

Demonstração. Já provamos a afirmação (i) nos comentários anteriores. Para provar a afirmação (ii), suponha que $p = (0, a, 0, 0)$, i.e., p esta na linha assintótica paralela ao eixo y . Então por mudanças de coordenadas na meta e na fonte obtemos

$$j^3\varphi_{p,f} \sim_{\mathcal{A}^3} (x, (a_{31}a - 1)x^2y + a_{33}y^3, y^2).$$

Se $a_{33} \neq 0$, $j^3\varphi_{p,f}(0)$ é $\mathcal{A}^3$ -equivalente a S , caso contrário, teremos o B . No caso quando p é um ponto no infinito no eixo y ,

$$j^3\varphi_{p,f} \sim_{\mathcal{A}^3} (x, a_{31}x^2y + a_{33}y^3, xy).$$

Também temos que se $a_{33} \neq 0$, $j^3\varphi_{p,f}(0)$ é $\mathcal{A}^3$ -equivalente a S , caso contrário, teremos o B . Por mudanças x e y (também a_{ij} e b_{ij}), o caso de p na direção paralela ao eixo x segue similarmente.

A afirmação (iii) pode ser demonstrada de maneira similar. Observe que o eixo y é a única direção assintótica no caso parabólico cujo $j^2f(0) = (x^2, xy)$, portanto, colocando $p = (a, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{P}^4$ temos

$$j^3\varphi_{p,f} \sim_{\mathcal{A}^3} (x, a_{32}axy^2 + a_{33}y^3, xy + b_{33}y^3).$$

Assim, a afirmação naturalmente segue. No caso em que p está no infinito temos a mesma forma normal descrita acima e o resultado é igual. $\square$

Os pontos de inflexões são estudados com mais detalhes na última seção deste capítulo.

No início deste capítulo, baseado nas ideias de Bruce em [6] apresentamos que a classificação projetiva da forma de Monge (f_1, f_2) é induzida pela $\mathcal{A}$ -classificação das singularidades da projeção central. A Proposição 6.3.1 garante que tipo de $\mathcal{A}^3$ -singularidade possui a projeção central de um germe de superfície. Logo podemos denominar as formas normais dadas no Teorema 6.2.12 por nomes em relação aos estratos S , B , H e P de $J^3(2, 3)$.

Nas seções seguintes, faremos uma análise mais detalhada de cada caso da Tabela 6.4 estudando as singularidades das projeções centrais.

Nome	Forma normal	Condições	k -jato	codim G_W
Π_E	$(x^2 - y^2 + y^2\phi_1, xy)$	—	3	0
Π_S	$(x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3)$	$\alpha \neq 0$	3	0
Π_B	$(x^2 + y^3, y^2)$	—	3	1
Π_{2B}	(x^2, y^2)	—	3	2
Π_H	$(x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi_3, xy + x\phi_3)$	—	4	1
Π_P	$(xy + \gamma y^3 + \phi_4, x^2 + xy^2 + \lambda y^4)$	$\gamma, \Lambda \neq 0$	4	2
Π_I^+	$(x^2 + y^2 + k_1 x^2 y, \phi_3)$	$b_{30} - b_{32} \neq 0$	3	2
Π_I^-	$(xy + k_2 x^3, \phi_3)$	$b_{33} \neq 0$	3	2

Tabela 6.4: O estrato de codimensão ≤ 2 no espaço dos k -jatos da forma de Monge. ϕ_i e ψ_i significa polinômio homogêneo de grau i . O tipo Π_E significa o caso elíptico.

Embora esse estudo já foi feito por D. Mond em sua tese em [33], apresentamos a seguir quais as singularidades de $\varphi_{p,f}$ aparecem em cada região de uma superfície em $\mathbb{P}^4$ com p paralelo a uma direção assintótica, mas utilizando as formas normais projetivas da Tabela 6.4. Neste caso, ao tomar a forma de Monge (f_1, f_2) , tendo como k -jato inicial uma das formas normais da Tabela 6.4 temos que os coeficientes de (f_1, f_2) que descrevem as $\mathcal{A}$ -singularidades da projeção central se tornam mais simples. Como visto na Proposição 6.3.1, na região elíptica acontece apenas a singularidade S_0 . A seguir, vamos apresentar o casos em que o ponto é hiperbólico, parabólico e de inflexão.

6.3.1 Nos pontos hiperbólicos

Tomamos $j^2(f^1, f^2) = (x^2, y^2)$. Neste caso, existem duas direções assintóticas que corresponde aos eixo x e y . Denotamos o germe de projeção central de um ponto de vista p nessas linhas por φ_X e φ_Y respectivamente. Elas são escritas localmente

como segue. Para $p = (a, 0, 0, 0)$ na reta tangente paralela ao eixo x temos

$$\varphi_X = \left(\frac{y}{x-a}, \frac{f_1(x, y)}{x-a}, \frac{f_2(x, y)}{x-a} \right)$$

e, para $p = (0, a, 0, 0)$ na reta tangente paralela ao eixo y

$$\varphi_Y = \left(\frac{x}{y-a}, \frac{f_1(x, y)}{y-a}, \frac{f_2(x, y)}{y-a} \right).$$

Quando p esta no infinito,

$$\varphi_X = (y, f_1(x, y), f_2(x, y))$$

e

$$\varphi_Y = (x, f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Dividimos o caso hiperbólico pelos tipos Π_S , Π_B e Π_{2B} da Tabela 6.4. Vamos verificar que tipo de $\mathcal{A}_e$ -singularidade pode acontecer nas projeções centrais.

(Π_S) Tomamos $j^3(f^1, f^2) = (x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3)$. Então

$$j^3\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^3} (y, x^2, \alpha x^3 - axy^2)$$

e

$$j^3\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^3} (x, y^3 - ax^2y, y^2)$$

$a, \alpha \neq 0$. Portanto, ambos φ_X e φ_Y são equivalentes a singularidade do tipo S_1 , pois S_1 é 3- $\mathcal{A}$ -determinado.

Por outro lado, quando p é o ponto no infinito, singularidades mais degeneradas, tais como as singularidades de tipo S_2 , S_3 , S_4 , de φ_X and φ_Y podem aparecer tais que dependem dos coeficientes de termos de ordem superior de (f_1, f_2) . Escreva

$$j^k(f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + y^3 + \sum_{i+j \geq 4}^k a_{ij}x^i y^j, y^2 + \alpha x^3 + \sum_{i+j \geq 4}^k b_{ij}x^i y^j).$$

Então para p no infinito, φ_Y é $\mathcal{A}$ -equivalente aos seguintes tipos de singularidades:

- S_2 -tipo se, e somente se, $a_{31} \neq 0$, pois

$$\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2).$$

- S_3 -tipo se, e somente se, $a_{31} = 0$ e $a_{41} \neq 0$, pois

$$\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^5} (x, y^3 + a_{41}x^3y, y^2).$$

- S_4 -tipo se, e somente se, $a_{31} = a_{41} = 0$ e $a_{51} \neq 0$, pois

$$\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^6} (x, y^3 + a_{51}x^3y, y^2).$$

Para p no infinito, φ_X é equivalente aos seguintes tipos de singularidades:

- S_2 -tipo se, e somente se, $b_{13} \neq 0$, pois

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, \alpha x^3 + b_{13}xy^3).$$

- S_3 -tipo se, e somente se, $b_{13} = 0$ e $b_{14} \neq 0$, pois

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, \alpha x^3 + b_{14}xy^4).$$

- S_4 -tipo se, e somente se, $b_{13} = b_{14} = 0$ e $b_{15} \neq 0$, pois

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^6} (y, x^2, \alpha x^3 + b_{15}xy^5).$$

Utilizaremos a notação, $S_1(S_2)|S_1(S_3)$ para representar a projeção central quando: φ_Y em quase todos os pontos p na reta tangente paralela ao eixo y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_1 , e para pontos especiais a φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_2 e φ_X em quase todos os pontos p na reta tangente paralela ao eixo x é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_1 , e para pontos especiais a φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_3 . Desta maneira, temos os seguintes resultados:

◦ $\Pi_{S(2)}$ -tipo: $S_1(S_2)|S_1(S_2)$.

Para quase todos os pontos p nos eixos x e y a projeção central $\varphi_{p,f}$ tem singularidade do tipo S_1 , pois

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^3} (y, x^2, \alpha x^3 + xy^2) \text{ e } \varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^3} (x, y^3 + x^2y, y^2).$$

Se considerarmos p o ponto no infinito, as projeções tem singularidades do tipo S_2 se, e somente se,

$$a_{31} \neq 0 \text{ e } b_{13} \neq 0.$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, x^3 + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_4 \times V_4$ é 0 ($\text{codim}G_S = 0$).

◦ $\Pi_{S(3)}$ -tipo: $S_1(S_3)|S_1(S_2)$.

Para quase todos os pontos p nos eixos x e y , projeção central $\varphi_{p,f}$ tem singularidade do tipo S_1 , como feito no caso $S_1(S_2)|S_1(S_2)$.

Se considerar p no infinito no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo S_2 e no eixo y , a projeção central φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_3 , se e somente se,

$$a_{41} \neq 0, b_{13} \neq 0 \text{ e } a_{31} = 0.$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, x^3 + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^5} (x, y^3 + a_{41}x^4y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_5 \times V_5$ é 1 ($\text{codim}G_S = 1$).

◦ $\Pi_{S(4)}$ -tipo: $S_1(S_4)|S_1(S_2)$.

Para quase todos os pontos p nos eixos x e y , projeção central $\varphi_{p,f}$ tem singularidade do tipo S_1 , como feito no caso $S_1(S_2)|S_1(S_2)$.

Se considerar p no infinito no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo S_2 e no eixo y , a projeção central φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_4 -tipo, se e somente se,

$$a_{51}, b_{13} \neq 0 \text{ e } a_{31} = a_{41} = 0.$$

De fato, $\varphi_x \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, x^3 + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_y \sim_{\mathcal{A}^6} (x, y^3 + a_{51}x^5y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_6 \times V_6$ é 2 ($\text{codim}G_S = 2$).

◦ $\Pi_{S(3)}^*$ -tipo: $S_1(S_3)|S_1(S_3)$.

Para quase todos os pontos p nos eixos x e y , projeção central $\varphi_{p,f}$ tem singularidade do tipo S_1 , como feito no caso $S_1(S_2)|S_1(S_2)$.

Se considerar p no infinito no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo S_3 e no eixo y , a projeção central φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_3 , se e somente se,

$$a_{41}, b_{14} \neq 0 \text{ e } a_{31} = b_{13} = 0,$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, x^3 + b_{14}xy^4)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^5} (x, y^3 + a_{41}x^4y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_5 \times V_5$ é 2 ($\text{codim} G_S = 2$).

Resumimos os resultados anteriores na Tabela 6.5.

Nome	codim	Condições	$*_X$	$*_Y$
$\Pi_{S(2)}$	0	$a_{31}, b_{13} \neq 0$	S_2	S_2
$\Pi_{S(3)}$	1	$a_{41}, b_{13} \neq 0, a_{31} = 0$	S_2	S_3
$\Pi_{S(3)}^*$	2	$a_{41}, b_{14} \neq 0, a_{31} = b_{13} = 0$	S_3	S_3
$\Pi_{S(4)}$	2	$a_{51}, b_{13} \neq 0, a_{31} = a_{41} = 0$	S_2	S_4

Tabela 6.5: Projeção central de $\Pi_S : (x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3)$. $*_X$ significa que φ_X é equivalente a alguma singularidade do tipo S_k quando p esta no infinito e $*_Y$ significa que φ_Y é equivalente a alguma singularidade do tipo S_k para p no infinito.

(Π_B) Tomamos $(x^2 + y^3, y^2)$. Escrevemos a forma normal da seguinte maneira

$$j^k(f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + y^3 + \sum_{i+j \geq 4}^k a_{ij}x^i y^j, y^2 + \sum_{i+j \geq 4}^k b_{ij}x^i y^j).$$

Logo, temos as seguintes singularidades e condições:

◦ $\Pi_{BC(3,3)}$ -tipo: $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$

Para quase todos os pontos p na direção do eixo y , a projeção central φ_Y é

$\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo S_1 , pois $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^3} (x, y^3 - ax^2y, y^2)$. No eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo B_2 se, e somente se,

$$A = a^2b_{31}^2 + 4ab_{50} - 4b_{40} \neq 0. \quad (1)$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, xy^2 + Ax^5)$.

Para valores específicos de a , i.e.

$$a = \frac{-2b_{50} \pm \sqrt{b_{50}^2 + b_{31}^2 b_{40}}}{b_{31}^2},$$

existem dois valores de a tal que a projeção central φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade B_3 se, e somente se,

$$\begin{aligned} C = 40b_{40} - 2b_{31}^2a^2 + (-16b_{40}a_{50} - 8b_{31}b_{41})a^3 + \\ + (-8b_{31}b_{40}a_{31} - 4b_{22}b_{31}^2)a^4 + 2b_{31}^2b_{32}a^5 + b_{31}^3b_{13}a^6 \neq 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^7} (y, x^2, xy^2 + Cx^7)$.

Se considerarmos p no infinito no eixo y , a projeção central φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_2 e no eixo x , a projeção central φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a C_3 -tipo se, e somente se,

$$a_{31}, b_{31}, b_{13} \neq 0.$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, b_{31}x^3y + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_7 \times V_7$ é 1 ($\text{codim} G_B = 1$).

o $\Pi_{BC(3,4)}$ -tipo: $B_2(B_3, C_4)|S_1(S_2)$.

Para quase todos os pontos p no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_1 e no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade B_2 se, e somente se, a satisfaz (1), como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Para valores específicos de a , i.e. $A = 0$, existem dois valores de a tais que a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_3 se, e somente se, $C \neq 0$, também como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Se considerarmos p infinito no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_2 e no eixo x , a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a C_4 -tipo se, e somente se,

$$a_{31}, b_{31}, b_{14} \neq 0 \text{ e } b_{13} = 0.$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, b_{31}x^3y + b_{14}xy^4)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_7 \times V_7$ é 2 ($\text{codim}G_B = 2$).

◦ $\Pi_{BF(3,4)}$ -tipo: $B_2(B_3, F_4)|S_1(S_2)$.

Para quase todos os pontos p no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_1 e no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade B_2 se, e somente se, a satisfaz (1), como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Para valores específicos de a , i.e. $A = 0$, existem dois valores de a tais que a projeção φ_x é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_3 -tipo se, e somente se, $C \neq 0$, também como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Se considerarmos p infinito no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade S_2 e no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade F_4 se, e somente se,

$$a_{31}, b_{13}, b_{50} \neq 0 \text{ e } b_{31} = 0.$$

De fato, basta observar que

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, b_{13}xy^3 + b_{50}x^5) \text{ e } \varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2).$$

Neste caso, a codimensão do estrato em $V_7 \times V_7$ é 2 ($\text{codim}G_B = 2$).

◦ $\Pi_{BC(3,3)}^*$ -tipo: $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_3)$.

Para quase todos os pontos p no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_1 e no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_2 se, e somente se, a satisfaz (1), como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Para valores específicos de a , i.e. $A = 0$, existem dois valores de a tais que a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_3 -tipo se, e somente se, $C \neq 0$, também

como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Se considerarmos p infinito no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_3 e no eixo x , a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a C_3 se, e somente se,

$$a_{41}, b_{31}, b_{13} \neq 0 \text{ e } a_{31} = 0.$$

Basta observar que $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, b_{31}x^3y + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{41}x^4y, y^2)$.

Neste caso, a codimensão do estrato em $V_7 \times V_7$ é 2 ($\text{codim} G_B = 2$).

o $\Pi_{BC(4,3)}$ -tipo $B_2(B_4, C_3)|S_1(S_2)$.

Neste caso, tomemos $j^4(f^1, f^2) = (x^2 + y^3 + y\phi_3^1, y^2 + x\phi_3^2)$ como na Observação 6.2.4 e escrevemos $j^k(f_1(x, y), f_2(x, y)) =$

$$(x^2 + y^3 + y\phi_3^1 + \sum_{i+j \geq 5}^k a_{ij}x^i y^j, y^2 + x\phi_3^2 + \sum_{i+j \geq 5}^k b_{ij}x^i y^j),$$

onde $\phi_3^1 = a_{31}x^3 + a_{22}x^2y + a_{13}xy^2 + a_{04}y^3$ e $\phi_3^2 = b_{31}x^3 + b_{22}x^2y + b_{13}xy^2 + b_{04}y^3$.

Esta forma tem as seguinte singularidades e condições:

Para quase todos os pontos p no eixo y , a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_1 e no eixo x , φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_2 -tipo se, e somente se, a satisfaz (1), como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Para valores especiais de a , i.e. $A = 0$, existem dois valores dados por

$$a = \frac{-2b_{50} \pm \sqrt{b_{50}^2 + b_{31}^2 b_{40}}}{b_{31}^2},$$

que ao substituir em

$$\begin{aligned} C = & 40b_{40} - 2b_{31}^2 a^2 + (-16b_{40}a_{50} - 8b_{31}b_{41})a^3 + \\ & + (-8b_{31}b_{40}a_{31} - 4b_{22}b_{31}^2)a^4 + 2b_{31}^2 b_{32}a^5 + b_{31}^3 b_{13}a^6 = 0 \end{aligned}$$

garante que a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_4 se, e somente se $\eta \neq 0$, onde η é um coeficiente que depende do 9-jato da forma normal. De fato, $\varphi_x \sim_{\mathcal{A}^9} (y, x^2, xy^2 + \eta x^9)$.

Se considerarmos p infinito no eixo y a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a S_2 e no eixo x a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a C_3 se, e somente se,

$$a_{31}, b_{31}, b_{13} \neq 0.$$

Basta notar que

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, b_{31}x^3y + b_{13}xy^3) \text{ e } \varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, y^3 + a_{31}x^3y, y^2).$$

Neste caso, a codimensão do estrato em $V_9 \times V_9$ é 2 ($\text{codim} G_B = 2$).

Resumimos os resultados anteriores na Tabela 6.6

Nome	codim	Condições	$*_{X1}$	$*_{X2}$	$*_Y$
$\Pi_{BC(3,3)}$	1	$a_{31}, b_{31}, b_{13}, C \neq 0$	B_3	C_3	S_2
$\Pi_{BC(3,4)}$	2	$a_{31}, b_{31}, b_{14}, C \neq 0, b_{13} = 0$	B_3	C_4	S_2
$\Pi_{BF(3,4)}$	2	$a_{41}, b_{13}, b_{31}, C \neq 0, a_{31} = 0$	B_3	F_4	S_2
$\Pi_{BC(3,3)}^*$	2	$a_{41}, b_{13}, b_{31}, C \neq 0, a_{31} = 0$	B_3	C_3	S_3
$\Pi_{BC(4,3)}$	2	$a_{31}, b_{31}, b_{13}, \eta \neq 0, C = 0$	B_4	C_3	S_2

Tabela 6.6: Projeção central de $\Pi_B : (x^2 + y^3, y^2)$. $*_{X1}$ (resp. $*_{X2}$) significa que φ_X é equivalente a alguma singularidade do tipo B_k (resp. C_k ou F_4) quando p esta no infinito e $*_Y$ significa que φ_Y é equivalente a alguma singularidade do tipo S_k para p no infinito. Aqui η é algum valor que depende do 9-jato de (f^1, f^2) .

(Π_{2B}) Tomamos (x^2, y^2) . Considere $j^4(f^1, f^2) = (x^2 + y\phi_3^1, y^2 + x\phi_3^2)$ como na Observação 6.2.4 e escrevemos $j^k(f_1(x, y), f_2(x, y)) =$

$$(x^2 + y\phi_3^1 + \sum_{i+j \geq 5}^k a_{ij}x^i y^j, y^2 + x\phi_3^2 + \sum_{i+j \geq 5}^k b_{ij}x^i y^j),$$

onde $\phi_3^1 = a_{31}x^3 + a_{22}x^2y + a_{13}xy^2 + a_{04}y^3$ e $\phi_3^2 = b_{31}x^3 + b_{22}x^2y + b_{13}xy^2 + b_{04}y^3$.

o $2\Pi_{BC(3,3)}$ -tipo: $B_2(B_3, C_3)|B_2(B_3, C_3)$.

Para quase todos os pontos p no eixo x e y , as projeções φ_X e φ_Y são $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_2 se, e somente se, a satisfaz (1) e

$$B = b^2 a_{13}^2 + 4ba_{05} - 4a_{04} \neq 0, \text{ para } b \in \mathbb{R}^*, \quad (2)$$

respectivamente, pois

$$\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^5} (y, x^2, xy^2 + Ax^5) \text{ e } \varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^5} (x, x^2y + By^5, y^2).$$

Para valores especiais de a , i.e. $A = 0$, existem dois valores de a tais que a projeção φ_X é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_3 se e somente se, $C \neq 0$, como feito no caso $B_2(B_3, C_3)|S_1(S_2)$.

Para valores especiais de b , i.e. $B = 0$, existem dois valores de b tais que a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a B_3 se, e somente se,

$$D = 40a_{04} - 2a_{13}^2 b^2 + (-16a_{04}b_{05} - 8a_{13}a_{14})b^3 + \\ + (-8a_{13}a_{04}b_{13} - 4a_{22}a_{13}^2)b^4 + 2a_{13}^2 a_{23}b^5 + a_{13}^3 a_{31}b^6 \neq 0,$$

pois $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^7} (x, x^2y + Dy^5, y^2)$.

Se considerarmos p ponto infinito nos eixos x e y , as projeções φ_X e φ_Y são $\mathcal{A}_e$ -equivalente a C_3 se, e somente se

$$a_{31}, a_{13}, b_{31}, b_{13} \neq 0.$$

De fato, $\varphi_X \sim_{\mathcal{A}^4} (y, x^2, b_{31}x^3y + b_{13}xy^3)$ e $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, a_{31}x^3y + a_{13}xy^3, y^2)$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_7 \times V_7$ é 2 ($\text{codim} G_B = 2$).

Portanto, temos o caso $B_2(B_3, C_3)|B_2(B_3, C_3)$ se, e somente se,

$$a_{31}, a_{13}, b_{31}, b_{13}, C, D \neq 0.$$

6.3.2 Nos pontos parabólicos

Tomamos $j^2(f^1, f^2) = (x^2, xy)$. Neste caso, existe apenas uma linha assintótica, que iremos considerar no eixo y , e $\varphi_{p,f}$ em $0 \in \mathbb{R}^4$ fornece singularidades mais degeneradas que S_0 quando p esta na linha paralela a direção assintótica, isto é, $p = (0, a, 0, 0)$.

(Π_H) Tomamos $(x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi_3, xy + x\phi_3)$. Podemos escrever

$$j^k(f_1, f_2) = (x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi_3 + \sum_{i+j \geq 5}^k a_{ij} x^i y^j, xy + x\phi_3 + \sum_{i+j \geq 5}^k b_{ij} x^i y^j).$$

◦ Π_H -tipo: H_2 .

Para todos os pontos p no eixo y (inclusive no infinito) a projeção central φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a

$$(x, y^3, xy - b_{05}y^5).$$

Segue que temos a singularidade H_2 se, e somente se, $b_{05} \neq 0$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_5 \times V_5$ é 1 ($\text{codim} G_H = 1$).

◦ $\Pi_{H(4)}$ -tipo: $H_3 (H_4)$

Para quase todos os pontos p no eixo y (inclusive no infinito) a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade H_3 . De fato:

- Para quase todos os pontos a projeção $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^8} (x, y^3, xy + Ey^8)$ se, e somente se, $b_{05} = 0$ e

$$E_1 = (-7a_{04}b_{07} + 3b_{08} + 11b_{06}a_{04}^2 - 6b_{06}a_{05})a^2 + (-4b_{07} + 9b_{06}a_{04})a + b_{06} \neq 0, \quad (3)$$

- Para pontos no infinito a projeção $\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^8} (x, y^3, xy + E_2y^8)$, onde $b_{05} = 0$ e $E_2 = b_{08} + (11/3)b_{06}a_{04}^2 - (7/3)b_{07}a_{04} - 2b_{06}a_{05} \neq 0$.

Para valores específicos de a , isto é, $E = 0$ temos que a projeção φ_Y é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade H_4 se, e somente se, $\xi \neq 0$, onde F depende, exclusivamente, dos termos do 11-jato de (f^1, f^2) . De fato, basta observar que

$$\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^{11}} (x, y^3, xy + \xi y^{11}).$$

Neste caso, a codimensão do estrato em $V_{11} \times V_{11}$ é 1 ($\text{codim}G_H = 2$).

(Π_P) Tomemos $(x^2 + xy^2 + \lambda y^4, xy + \gamma y^3 + \phi_4)$. Escrevemos

$$j^k(f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + xy^2 + \lambda y^4 + \sum_{i+j \geq 5}^k a_{ij} x^i y^j, xy + \gamma y^3 + \sum_{i+j \geq 4}^k b_{ij} x^i y^j)$$

◦ Π_P -type: $\underline{P_3(c)}$

Para todos os pontos p (inclusive no infinito) no eixo y a projeção é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade $P_3(c)$, com $c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$, pois

$$\varphi_Y \sim_{\mathcal{A}^4} (x, xy^2 + \frac{\lambda}{\gamma} y^4, xy + y^3),$$

onde $\gamma \neq 0, \lambda \neq 0, \gamma \neq 2\lambda, \gamma \neq \lambda, \gamma \neq \frac{2}{3}\lambda$. Neste caso, a codimensão do estrato em $V_4 \times V_4$ é 2 ($\text{codim}G_P = 2$).

6.3.3 Nos pontos de inflexão

Finalmente, vamos considerar os pontos de inflexão e tomar $j^2(f^1, f^2) = (x^2 \pm y^2, 0)$. Neste caso, todas as direções no espaço tangente são assintóticas e a projeção central $\varphi_{p,f}$ de um ponto de vista p nestas direções tem singularidades pior que um cross-cap em $p = (a, b, c, d)$ se, e somente se, $a \neq 0$ e $c = d = 0$. Consideramos os dois tipos de inflexão separadamente.

(Π_I^+) Tomamos $(x^2 + y^2 + k_1 x^2 y, \sum_{i+j=3} b_{ij} x^i y^j)$.

Para nossa análise consideramos a forma de Monge

$$j^k(f^1, f^2) = (x^2 + y^2 + k_1 x^2 y + \sum_{i+j \geq 4}^k a_{ij} x^i y^j, \sum_{i+j \geq 3}^k b_{ij} x^i y^j).$$

Em quase todas as direções a projeção é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a singularidade do tipo S_1 , uma vez que

$$(x, y^2, (b_{21}a^3 + (-2b_{12} + 3b_{30})a^2b + (-2b_{21} + 3b_{03})ab^2 + b_{12}b^3)x^2y +$$

$$(b_{03}a^3 + b_{12}a^2b + b_{21}ab^2 + b_{30}b^3)y^3).$$

Note que, em pontos especiais obtemos as singularidades do tipo S_2 ou S_3 nas linhas definidas pela cúbica

$$b_{21}a^3 + (-2b_{12} + 3b_{30})a^2b + (-2b_{21} + 3b_{03})ab^2 + b_{12}b^3 = 0 \quad (1.1),$$

e temos as singularidades do tipo B_2 ou B_3 nas linhas definidas por

$$b_{03}a^3 + b_{12}a^2b + b_{21}ab^2 + b_{30}b^3 = 0. \quad (1.2)$$

Suponha satisfeita a equação (1.1) e não (1.2). Então para quase todas as direções obtemos que a singularidade S_2 , pois

$$\varphi_{p,f} \sim_{\mathcal{A}^4} \left(x, y^2, T(a, b)x^3y + (b_{03}a^3 + b_{12}a^2b + b_{21}ab^2 + b_{30}b^3)y^3 \right),$$

onde $T(a, b) \neq 0$ é um polinômio de grau 7 em a e b com coeficientes sendo combinações dos b_{ij} s. Como $a \neq 0$ podemos considerar (1.1) como

$$b_{21} + (-2b_{12} + 3b_{30})(b/a) + (-2b_{21} + 3b_{03})(b/a)^2 + b_{12}(b/a)^3 = 0$$

Note que a cúbica possui 3 (1 ou 0) direções de solução, se seu discriminante é positivo (negativo ou nulo, respectivamente). Ao considerar uma dessas soluções podemos escrevê-la da forma $b = Ra$, onde R depende dos coeficientes da cúbica. Substituindo b em $T(a, b)$, obtemos a relação $T(a, Ra) = Q_1 + aQ_2$, com Q_1 e Q_2 dependendo dos b_{ij} s. Assim, para valores especiais de a , isto é, $a = -\frac{Q_1}{Q_2}$ com $Q_2 \neq 0$ a projeção é $\mathcal{A}_e$ -equivalente singularidade S_3 .

Analogamente, a projeção produz singularidades do tipo B_2, B_3 , se a cúbica (1.2) é satisfeita e (1.1) não.

$$(\Pi_I^-) \ (xy + k_2x^3, \sum_{i+j=3} b_{ij}x^i y^j).$$

Para nossa análise iremos considerar a forma de Monge descrita como

$$(f^1, f^2) = (xy + k_2x^3 + \sum_{i+j \geq 4} a_{ij}x^i y^j, \sum_{i+j \geq 3} b_{ij}x^i y^j).$$

Se $b \neq 0$ então a projeção é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a

$$\left(x, y^2, (3b_{30}b^3 - b_{12}a^2b - b_{21}ab^2 + 3b_{03}a^3)x^2y + (b_{03}a^3 + b_{12}a^2b + b_{21}ab^2 + b_{30}b^3)y^3\right).$$

Assim, obtemos também que as singularidades da projeção do são do tipo S_2 ou S_3 nas linhas determinadas pela cúbica

$$3b_{30}b^3 - b_{12}a^2b - b_{21}ab^2 + 3b_{03}a^3 = 0,$$

e singularidades do tipo B_2 or B_3 nas linhas determinadas pela cúbica

$$b_{03}a^3 + b_{12}a^2b + b_{21}ab^2 + b_{30}b^3 = 0.$$

Também neste caso, S_3 e B_3 aparecem em pontos especiais diferentes em cada direção e o cálculo para encontrá-las são análogos aos que apresentamos anteriormente.

Se $b = 0$, a projeção é $\mathcal{A}_e$ -equivalente

$$\left(x, xy + (b_{04}a_{04} - b_{03}a_{05})y^5, b_{03}y^3\right).$$

Logo, é uma singularidade do tipo H_2 se, e somente se, $b_{03}, b_{04}a_{04} - b_{03}a_{05} \neq 0$.

Observação 6.3.2. O caso onde p é um ponto no infinito, Bruce e Nogueira em [9] descreveram todas as suas possibilidades possíveis e mostraram que somente as singularidades os tipos S_1 , B_2 , S_2 e H_2 acontecem.

Tendo feito o estudo de todos os casos podemos resumir este capítulo no seguinte Teorema:

Teorema 6.3.3. *Existe um subconjunto $\mathcal{O}$ aberto e denso em $\mathbb{P}^4$ composta por de superfícies suaves compacta M tal que o germe em cada ponto em M em $\mathcal{O}$ é projetivamente equivalente a um germe com o k -jato da sua forma de Monge sendo um dos casos da Tabela 6.7.*

Como consequência imediata temos o resultado feito por Mond em [33]:

Nome	Forma normal	Tipo	cod	k	Projeção
Π_S	$(x^2 + y^3, y^2 + \alpha x^3)$	$\Pi_{S(2)}$	0	3	$S_1(S_2) \mid S_1(S_2)$
		$\Pi_{S(3)}$	1	3	$S_1(S_3) \mid S_1(S_2)$
		$\Pi_{S(3)}^*$	2	3	$S_1(S_3) \mid S_1(S_3)$
		$\Pi_{S(4)}$	2	3	$S_1(S_4) \mid S_1(S_2)$
Π_B	$(x^2 + y^3, y^2)$	$\Pi_{BC(3,3)}$	1	3	$B_2(B_3, C_3) \mid S_1(S_2)$
		$\Pi_{BC(3,4)}$	2	3	$B_2(B_3, C_4) \mid S_1(S_2)$
		$\Pi_{BF(3,4)}$	2	3	$B_2(B_3, F_4) \mid S_1(S_2)$
		$\Pi_{BC(3,3)}^*$	2	3	$B_2(B_3, C_3) \mid S_1(S_3)$
		$\Pi_{BC(4,3)}$	2	3	$B_2(B_4, C_3) \mid S_1(S_2)$
Π_{2B}	(x^2, y^2)	$\Pi_{2BC(3,3)}$	2	3	$B_2(B_3, C_3) \mid B_2(B_3, C_3)$
Π_H	$\left(x^2 + \beta xy^2 + y^3 + y\psi_3, \right. \\ \left. xy + x\phi_3\right)$	Π_H	1	4	H_2
		$\Pi_{H(4)}$	2	4	$H_3 (H_4)$
Π_P	$\left(xy + \gamma y^3 + \phi_4, \right. \\ \left. x^2 + xy^2 + \lambda y^4\right)$	Π_P	2	4	$P_3(c)$
Π_I^+	$(x^2 + y^2 + k_1 x^2 y, \phi_3)$	Π_I^+	2	3	$S_1(S_2, S_3, B_2, B_3)$
Π_I^-	$(xy + k_2 x^3, \phi_3)$	Π_I^-	2	3	$S_1(S_2, S_3, B_2, B_3, H_2)$

Tabela 6.7: Estrato de codimensão ≤ 2 induzido das $\mathcal{A}$ -órbitas.

Teorema 6.3.4. *Para toda superfície genérica M em $\mathbb{P}^4$ e para todo ponto de vista $p \in \mathbb{P}^4 - M$, o germe de projeção central $\varphi_p : M \rightarrow \mathbb{P}^3$ em todo ponto de M é $\mathcal{A}$ -equivalente a um germe de corank 1 com $\mathcal{A}_e$ -codim ≤ 4 , exceto os germes $P_4(c), R_4, X_4, Y_4, T_4$ para $c = 0, 1/2, 1, 3/2$.*

Demonstração. Basta observar quais $\mathcal{A}$ -singularidades de φ_p de $\mathcal{A}_e$ -codim $= 4$ da Tabela 6.3 não apareceram na Tabela 6.7. $\square$

Os cr -invariantes no ponto $P_3(c)$

Neste capítulo, vamos nos concentrar no ponto $P_3(c)$. Como mencionamos, o ponto $P_3(c)$ parece ter características similares as cúspides de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^3$. De fato, a equação das linhas assintóticas de superfícies em $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$) tem singularidades dobra nas cúspides de Gauss (resp. nos pontos $P_3(c)$).

Neste capítulo, introduzimos cross-ratios invariantes para superfícies em $\mathbb{R}^4$ e mostramos que tem comportamento análogo ao cr -invariante de Uribe-Vargas ([53]) para superfícies em $\mathbb{R}^3$ nas cúspides de Gauss.

7.1 Propriedades do ponto $P_3(c)$

Pela classificação projetiva que apresentamos no capítulo anterior, o 4-jato da parametrização da superfície na forma de Monge $(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$ no ponto $P_3(c)$ é equivalente por transformações projetivas a forma normal

$$(z, w) = (x^2 + xy^2 + \alpha y^4, xy + \beta y^3 + \phi), \quad (7.1)$$

onde $6\beta^2 + 4\alpha - 15\beta + 5 \neq 0$, $\alpha \neq 0, 1/2, 1, 3/2$ e ϕ é um polinômio de grau 4, como no Teorema 6.3.3.

Isto permite recalcular as expressões das curvas que vem das singularidades locais e multi-locais que passam pelo ponto $P_3(c)$. As informações que necessitamos sobre a superfície estão contidas no seu 4-jato.

Proposição 7.1.1. *Nas condições acima, temos as seguintes curvas passando por $P_3(c)$:*

(a) *O conjunto parabólico, denotado por Δ -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_P y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_P = 3(-3\beta^2 - 2\alpha + 2\beta).$$

(b) *O conjunto dos pontos B_2 , denotado por B_2 -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_B y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_B = \frac{2(12\alpha\beta^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\beta - 4\beta^2 - 3\alpha + 3\beta)}{(2\beta - 1)^2}.$$

(c) *O conjunto dos pontos S_2 , denotado por S_2 -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_S y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_S = \frac{6(36\alpha\beta^2 - 72\beta^3 + 24\alpha^2 - 72\alpha\beta + 66\beta^2 - \alpha + \beta)}{(6\beta + 1)^2}.$$

(d) *O conjunto dos pontos de inflexão das curvas assintóticas, denotado por F_l -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_F y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_F = \frac{6(-36\beta^2 + 24\beta + 1 - 24\alpha)(-\alpha + \beta)}{(-6\beta + 1)^2}.$$

(e) *O conjunto dos pontos $(A_0S_0)_2$, denotado por $(A_0S_0)_2$ -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_{s02} y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_{s02} = 3(-3\beta^2 - 2\alpha + 4\beta).$$

(f) *O conjunto dos pontos $A_0S_1^\pm$, denotado por A_0S_1 -curva, é uma curva suave dada por*

$$x = c_{s1} y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_{s1} = -\frac{3\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2}{-4\beta^2 - 3\alpha + 4\beta}.$$

(g) O conjunto dos pontos $A_0S_0|A_1^\pm$, denotado por $A_0S_0|A_1$ -curva, é uma curva suave dada por

$$x = c_{s01}y^2 + t.o.s,$$

$$\text{com } c_{s01} = \frac{1}{4} \frac{(3\beta^2 - 16\alpha\beta + 8\alpha^2 + 12\alpha\beta^2)}{-\beta^2 - \alpha + \beta}.$$

Aqui *t.o.s* significa termos de ordem superior.

Demonstração. Todas as singularidades são invariantes projetivos, logo podemos considerar a superfície M localmente como um representante de uma superfície $\bar{M}$ em $\mathbb{P}^4$ dada na carta afim $\{[x; y : z : w : 1]\}$ na forma de Monge $[x : y : f^1(x, y) : f^2(x, y) : 1]$. Podemos tomar (f^1, f^2) na forma normal (7.1) e usar as equações das curvas encontradas no Capítulo 4 no Teorema 5.2.18 com $a_{32} = 1$, $a_{44} = \alpha$ e $b_{33} = \beta$. $\square$

Seja PT^*M o fibrado cotangente projetivizado com a estrutura canônica de contato. Tomando uma carta afim, identificamos PT^*M com $\mathbb{R}^3$ e assim a estrutura de contato é dado pela 1-forma $dy - p dx$.

Dada uma curva γ em M , o levantamento Legendriano de γ a PT^*M é a curva $(\gamma(t), [\frac{dy}{dx}])$.

Denotamos as retas tangentes as curvas Legendrianas de Δ , B_2 , S_2 , F_l , $(A_0S_0)_2$, $A_0S_1^\pm$ e $A_0S_0|A_1^\pm$ em PT^*M no ponto $P_3(c)$ por l_P , l_B , l_S , l_F , l_{s02} , l_{s1} , e l_{s01} , respectivamente, e por l_g o elemento de contato do ponto $P_3(c)$ (a reta vertical no plano de contato no ponto $P_3(c)$). Pela Proposição 7.1.1, todas estas retas pertencem ao plano de contato no ponto $P_3(c)$.

Escrevemos os 2-jato das curvas acima como $y = c_P x^2$, $y = c_B x^2$, $y = c_S x^2$, $y = c_F x^2$, $y = c_{s02} x^2$, $y = c_{s1} x^2$, $y = c_{s01} x^2$ e $y = c_g x^2$.

O **cross-ratio** de quatro retas concorrentes coplanares l_i , $i = 1, \dots, 4$ com respectivos gradientes c_i , $i = 1, \dots, 4$ é dado por

$$(l_1, l_2 : l_3, l_4) = \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} \cdot \frac{c_4 - c_2}{c_4 - c_1}.$$

Observe que se l_2 tem gradiente infinito, então

$$(l_1, l_2 : l_3, l_4) = \frac{c_3 - c_1}{c_4 - c_1}.$$

Para superfícies em $\mathbb{R}^3$, Uribe-Vargas introduziu em [53] um invariante, chamado de cr-invariante, nas cúspides de Gauss. A ideia principal usa a curva parabólica, a curva conodal (curva de singularidade multi-local A_1A_1 da função altura) e a curva flecnodal. Tais curvas são tangentes nas cúspides de Gauss. Uribe-Vargas levantou estas curvas no fibrado cotangente projetivizado de M . As linhas tangentes delas mais a de uma outra curva (a fibra de p) pertencem a um mesmo plano e seu cross-ratio é o cr-invariante.

Em nosso caso, temos uma ampla escolha de curvas no ponto $P_3(c)$ que podem ser usadas para obter os cross-ratios (cr-invariantes). Desta maneira podemos definir cr-invariantes no ponto $P_3(c)$ da seguinte maneira.

Definição 7.1.2. *Os cr-invariantes ρ de um ponto $P_3(c)$ são definidos como os cross-ratios de qualquer quatro das retas tangentes do levantamento Legendriano das curvas da Proposição 7.1.1.*

Sempre que formos calcular os cr-invariantes fixaremos a linha tangente da curva parabólica, uma vez que essa é o discriminante da EDBs das linhas assintóticas.

Proposição 7.1.3. *Seja M uma superfície em $\mathbb{P}^4$ dada localmente na forma de Monge (f^1, f^2) com*

$$j^4(f^1, f^2) = (x^2 + xy^2 + \alpha y^4, xy + \beta y^3 + \phi)$$

no ponto $P_3(c)$ sendo a origem. Considerando as linhas tangentes l_P , l_B , l_S , l_F , $l_{s_{02}}$, l_{s_1} , $l_{s_{01}}$ e l_g descritas acima, temos os seguintes cr-invariantes:

(i) Sem a linha vertical

Linhas	
l_P, l_B, l_S, l_F	$\frac{3\beta-1}{6\beta-1}$
l_P, l_B, l_S, l_{s_1}	$\frac{9}{8} \frac{(144\alpha^2\beta^2-120\alpha^2\beta-16\alpha^2-188\beta^3\alpha+35\alpha\beta^2+38\beta\alpha+108\alpha\beta^4-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2+48\alpha^3)}{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(6\beta-1)}$
$l_P, l_B, l_S, l_{s_{01}}$	$\frac{9}{8} \frac{(-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2-272\beta^3\alpha+84\alpha\beta^2+32\beta\alpha+144\alpha\beta^4+192\alpha^2\beta^2-160\alpha^2\beta-16\alpha^2+64\alpha^3)}{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(6\beta-1)}$
$l_P, l_B, l_S, l_{s_{02}}$	$\frac{3}{16} \frac{48\alpha\beta^2-40\beta\alpha-84\beta^3+49\beta^2-6\beta+36\beta^4+16\alpha^2}{\beta(6\beta-1)}$
$l_P, l_B, l_S, l_{s_{01}}$	$\frac{1}{6} \frac{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(48\alpha\beta^2-40\beta\alpha-84\beta^3+49\beta^2-6\beta+36\beta^4+16\alpha^2)}{\beta(144\alpha^2\beta^2-120\alpha^2\beta-16\alpha^2-188\beta^3\alpha+35\alpha\beta^2+38\beta\alpha+108\alpha\beta^4-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2+48\alpha^3)}$
$l_P, l_{s_{01}}, l_{s_1}, l_B$	$\frac{(-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2-272\beta^3\alpha+84\alpha\beta^2+32\beta\alpha+144\alpha\beta^4+192\alpha^2\beta^2-160\alpha^2\beta-16\alpha^2+64\alpha^3)(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}{(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^3\alpha(4\alpha-9\beta+6\beta^2)}$
$l_P, l_B, l_{s_{02}}, l_{s_{01}}$	$\frac{6\beta(-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2-272\beta^3\alpha+84\alpha\beta^2+32\beta\alpha+144\alpha\beta^4+192\alpha^2\beta^2-160\alpha^2\beta-16\alpha^2+64\alpha^3)}{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(48\alpha\beta^2-40\beta\alpha-84\beta^3+49\beta^2-6\beta+36\beta^4+16\alpha^2)}$
$l_P, l_B, l_{s_1}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{2} \frac{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(-120\beta\alpha+144\alpha\beta^2-2\beta+51\beta^2-252\beta^3+108\beta^4+48\alpha^2)}{\beta(-16\alpha^2-1848\alpha^2\beta+1296\alpha^2\beta^2+38\beta\alpha+2523\alpha\beta^2-3996\beta^3\alpha+972\alpha\beta^4-21\beta^2-1092\beta^3+2988\beta^4-1728\beta^5+432\alpha^3)}$
$l_P, l_{s_{01}}, l_{s_1}, l_S$	$\frac{(-21\beta^2-1092\beta^3+32\beta\alpha+2988\beta^4+2676\alpha\beta^2-1728\beta^5-4752\beta^3\alpha-16\alpha^2-2208\alpha^2\beta+1296\alpha\beta^4+1728\alpha^2\beta^2+576\alpha^3)(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}{9(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^3\alpha(4\alpha-9\beta+6\beta^2)}$
$l_P, l_S, l_{s_{01}}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{2} \frac{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(-120\beta\alpha+144\alpha\beta^2-2\beta+51\beta^2-252\beta^3+108\beta^4+48\alpha^2)}{\beta(-21\beta^2-1092\beta^3+32\beta\alpha+2988\beta^4+2676\alpha\beta^2-1728\beta^5-4752\beta^3\alpha-16\alpha^2-2208\alpha^2\beta+1296\alpha\beta^4+1728\alpha^2\beta^2+576\alpha^3)}$
$l_P, l_{s_1}, l_{s_{01}}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{6} \frac{21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4}{\beta\alpha}$
l_P, l_B, l_F, l_{s_1}	$\frac{9}{8} \frac{(144\alpha^2\beta^2-120\alpha^2\beta-16\alpha^2-188\beta^3\alpha+35\alpha\beta^2+38\beta\alpha+108\alpha\beta^4-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2+48\alpha^3)}{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(3\beta-1)}$
$l_P, l_B, l_F, l_{s_{01}}$	$\frac{9}{8} \frac{-20\beta^4+44\beta^3-21\beta^2-272\beta^3\alpha+84\alpha\beta^2+32\beta\alpha+144\alpha\beta^4+192\alpha^2\beta^2-160\alpha^2\beta-16\alpha^2+64\alpha^3}{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(3\beta-1)}$
$l_P, l_B, l_F, l_{s_{02}}$	$-\frac{3}{2} \frac{(6\alpha-11\beta+9\beta^2)(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2}{\beta(216\alpha\beta^2-252\beta^3-288\beta\alpha+156\beta^2-6\alpha+5\beta+144\alpha^2)}$
l_P, l_S, l_F, l_{s_1}	$-\frac{1}{24} \frac{-16\alpha^2-1848\alpha^2\beta+1296\alpha^2\beta^2+38\beta\alpha+2523\alpha\beta^2-3996\beta^3\alpha+972\alpha\beta^4-21\beta^2-1092\beta^3+2988\beta^4-1728\beta^5+432\alpha^3}{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
$l_P, l_S, l_F, l_{s_{01}}$	$-\frac{1}{24} \frac{-21\beta^2-1092\beta^3+32\beta\alpha+2988\beta^4+2676\alpha\beta^2-1728\beta^5-4752\beta^3\alpha-16\alpha^2-2208\alpha^2\beta+1296\alpha\beta^4+1728\alpha^2\beta^2+576\alpha^3}{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)\beta}$
$l_P, l_S, l_F, l_{s_{02}}$	$-\frac{1}{48} \frac{-120\beta\alpha+144\alpha\beta^2-2\beta+51\beta^2-252\beta^3+108\beta^4+48\alpha^2}{\beta^2}$
$l_P, l_{s_1}, l_{s_{01}}, l_F$	$-\frac{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(1296\alpha^2\beta^2-1464\alpha^2\beta-16\alpha^2-2844\beta^3\alpha+1611\alpha\beta^2+38\beta\alpha+972\alpha\beta^4+1548\beta^4-588\beta^3-21\beta^2-864\beta^5+432\alpha^3)}{9(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^3\alpha(4\alpha-9\beta+6\beta^2)}$
$l_P, l_F, l_{s_1}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{2} \frac{(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(144\alpha\beta^2-120\beta\alpha-252\beta^3+99\beta^2-2\beta+108\beta^4+48\alpha^2)}{\beta(1296\alpha^2\beta^2-1464\alpha^2\beta-16\alpha^2-2844\beta^3\alpha+1611\alpha\beta^2+38\beta\alpha+972\alpha\beta^4+1548\beta^4-588\beta^3-21\beta^2-864\beta^5+432\alpha^3)}$
$l_P, l_F, l_{s_{01}}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{2} \frac{(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)(144\alpha\beta^2-120\beta\alpha-252\beta^3+99\beta^2-2\beta+108\beta^4+48\alpha^2)}{\beta(1548\beta^4-588\beta^3-21\beta^2-3600\beta^3\alpha+1908\alpha\beta^2+32\beta\alpha+1296\alpha\beta^4+1728\alpha^2\beta^2-1824\alpha^2\beta-16\alpha^2-864\beta^5+576\alpha^3)}$

(ii) Com a linha vertical

$cr-inv$	$Linhas$	
1	l_P, l_g, l_B, l_S	$\frac{1}{9} \frac{(1+6\beta)^2}{(2\beta-1)^2}$
2	l_P, l_g, l_B, l_F	$\frac{1}{9} \frac{(6\beta-1)^2}{(2\beta-1)^2}$
3	$l_P, l_g, l_B, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{6} \frac{(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2}{(\beta(2\beta-1)^2)}$
4	l_P, l_g, l_B, l_{s_1}	$\frac{(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(3\alpha-4\beta+4\beta^2)}{(2\beta-1)^2(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
5	$l_P, l_g, l_B, l_{s_{01}}$	$\frac{4(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(-\beta+\beta^2+\alpha)}{(2\beta-1)^2(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
6	l_P, l_g, l_S, l_F	$\frac{(6\beta-1)^2}{(1+6\beta)^2}$
7	$l_P, l_g, l_S, l_{s_{02}}$	$\frac{3}{2} \frac{(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2}{(\beta(1+6\beta)^2)}$
8	l_P, l_g, l_S, l_{s_1}	$\frac{9(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(3\alpha-4\beta+4\beta^2)}{(1+6\beta)^2(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
9	$l_P, l_g, l_S, l_{s_{01}}$	$\frac{36(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(-\beta+\beta^2+\alpha)}{(1+6\beta)^2(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
10	$l_P, l_g, l_F, l_{s_{01}}$	$\frac{36(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(-\beta+\beta^2+\alpha)}{(6\beta-1)^2(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
11	l_P, l_g, l_F, l_{s_1}	$\frac{9(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2(3\alpha-4\beta+4\beta^2)}{(6\beta-1)^2(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)}$
12	$l_P, l_g, l_F, l_{s_{02}}$	$\frac{3}{2} \frac{(4\alpha+6\beta^2-5\beta)^2}{(\beta(6\beta)^2-1)}$
13	$l_P, l_g, l_{s_1}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{6} \frac{16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4}{\beta(3\alpha-4\beta+4\beta^2)}$
14	$l_P, l_g, l_{s_{01}}, l_{s_{02}}$	$\frac{1}{24} \frac{21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4}{\beta(-\beta+\beta^2+\alpha)}$
15	$l_P, l_g, l_{s_1}, l_{s_{01}}$	$\frac{4(16\alpha^2-38\beta\alpha+48\alpha\beta^2+21\beta^2-60\beta^3+36\beta^4)(-\beta+\beta^2+\alpha)}{(3\alpha-4\beta+4\beta^2)(21\beta^2-32\beta\alpha+48\alpha\beta^2+16\alpha^2-60\beta^3+36\beta^4)}$

Observação 7.1.4. É importe observar que os cr -invariantes na Proposição 7.1.3 dependem apenas dos módulos α e β da forma normal projetiva de M no ponto $P_3(c)$.

Como consequência apresentamos o principal resultado da tese que é o análogo ao de Uribe-Vargas para superfícies em $\mathbb{R}^3$ ([53]) em que mostra que o cr -invariante é um múltiplo escalar da forma normal projetiva de Platonova na cúspide de Gauss.

Teorema 7.1.5. *Seja M uma superfície em $\mathbb{P}^4$ dada localmente na forma de Monge (f^1, f^2) com ponto $P_3(c)$ sendo a origem. Então existem 3 cr -invariantes descritos na Proposição 7.1.3 que permitem recuperar os invariantes projetivos α e β no Teorema 6.3.3:*

$$\beta = \frac{\rho_1 - 1}{3(2\rho_1 - 1)},$$

$$\alpha = \frac{(80\rho_2\rho_1 - 32\rho_2 + 20\rho_3\rho_1 - 8\rho_3 + 42\rho_1 - 21)(\rho_1 - 1)}{9(3\rho_3 + 1 + 12\rho_2)(2\rho_1 - 1)^2},$$

onde

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (l_P, l_B : l_S, l_F) \\ \rho_2 &= (l_P, l_g : l_{s_{01}}, l_{s_{02}}) \\ \rho_3 &= (l_P, l_g : l_{s_1}, l_{s_{02}}).\end{aligned}$$

O cr-invariante ρ_1 (resp. ρ_2, ρ_3) é obtido das singularidades locais (resp. multi-locais).

Demonstração. Ao consider o cross-ratio $(l_P, l_B : l_S, l_F)$, que denotaremos por ρ_1 , obtemos

$$\beta = \frac{\rho_1 - 1}{3(2\rho_1 - 1)}.$$

Portanto, com as singularidades locais conseguimos recuperar o invariante projetivo β . Tomando os cr-invariantes $(l_P, l_g : l_{s_{01}}, l_{s_{02}})$ e $(l_P, l_g : l_{s_1}, l_{s_{02}})$ que denotaremos por ρ_2 e ρ_3 , respectivamente, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} -16\alpha^2 + (18\rho_2\beta - 48\beta^2 + 38\beta)\alpha - 36\beta^4 - 24\rho_2\beta^2 + 24\rho_2\beta^3 + 60\beta^3 - 21\beta^2 = 0 \\ 16\alpha^2 + (72\rho_3\beta + 48\beta^2 - 32\beta)\alpha + 36\beta^4 - 96\rho_3\beta^2 + 96\rho_3\beta^3 - 21\beta^2 - 60\beta^3 = 0 \end{cases}$$

em α e β . Eliminando o termo quadrático em α com uma combinação das duas equações, obtemos

$$(18\rho_2\beta + 6\beta + 72\rho_3\beta)\alpha - 24\rho_2\beta^2 + 24\rho_2\beta^3 - 42\beta^2 - 96\rho_3\beta^2 + 96\rho_3\beta^3 = 0.$$

Substituindo β na equação acima e resolvendo a equação em α temos

$$\alpha = \frac{(80\rho_2\rho_1 - 32\rho_2 + 20\rho_3\rho_1 - 8\rho_3 + 42\rho_1 - 21)(\rho_1 - 1)}{9(3\rho_3 + 1 + 12\rho_2)(2\rho_1 - 1)^2}.$$

□

Consideramos agora as linhas assintóticas.

Teorema 7.1.6. *Em um ponto $P_3(c)$, as linhas assintóticas tem uma singularidade bem-dobrada se $(-9\beta^2 - 6\alpha + (15/2)\beta) \neq 0, \frac{1}{16}$. A singularidade é sela bem-dobrada se $-9\beta^2 - 6\alpha + (15/2)\beta < 0$, um nó bem-dobrado se $0 < (-9\beta^2 - 6\alpha + (15/2)\beta) < \frac{1}{16}$ e um foco bem-dobrado se $(-9\beta^2 - 6\alpha + (15/2)\beta) > \frac{1}{16}$.*

Demonstração. Podemos chamar de $\Omega(x, y, p) = 0$ a EDB das linhas assintóticas dada em (3.4), então

$$j^2\Omega(x, y, p) = \frac{1}{2}p^2 + 3\beta yp + \left(-\frac{1}{2}x + (-3\alpha + 3\beta)y^2\right)$$

A parte linear da projeção para o plano (y, p) do campo levantado ξ associado a EDB das linhas assintóticas é

$$(3\beta y + p)\frac{\partial}{\partial y} + \left(6(\alpha - \beta) + \left(\frac{1}{2} - 3\beta\right)p\right)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Calculando os autovalores da parte linear do campo na origem encontramos

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - (-9\beta^2 - 6\alpha + \frac{15}{2}\beta)}.$$

Disto segue o resultado. A Figura 7.1 mostra as configurações das linhas assintóticas. □

Figura 7.1: sela bem-dobrada (esquerda), nó bem-dobrado (centro) e foco bem-dobrado (direita)

Observação 7.1.7. O Proposição 7.1.1 mostra que o 2-jato das curvas no ponto $P_3(c)$ são projetivamente invariantes, isto é, dependem dos termos α e β que são descritos pelos cr-invariantes. Como as posições relativas das curvas no ponto $P_3(c)$ é caracterizado pelo 2-jato das curvas, podemos realizar o seu estudo por meio dos valores de α e β .

As posições relativas das curvas Δ , B_2 , S_2 e F_l em função dos valores de α e β são descritas no próximo teorema.

Teorema 7.1.8. *Dado um ponto $P_3(c)$ em uma superfície em $\mathbb{R}^4$, existem quatro possibilidades para as posições relativas das curvas Δ , B_2 , S_2 , F_l :*

(i) Se $\beta < 0$, então $c_P < c_B < c_F < c_S$

(ii) Se $0 < \beta < 1/6$, então $c_P < c_B < c_S < c_F$

(iii) Se $1/6 < \beta < 1/3$, então $c_P < c_S < c_B < c_F$

(iv) Se $\beta > 1/3$, então $c_P < c_S < c_F < c_B$.

Demonstração. Considere os coeficientes c_P , c_B , c_S e c_F da Proposição 7.1.1. Segue que

$$c_P - c_B = -\frac{(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(2\beta - 1)^2} < 0, \text{ para qualquer valor de } \alpha, \beta;$$

$$c_P - c_S = -\frac{9(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(1 + 6\beta)^2} < 0, \text{ para qualquer valor de } \alpha, \beta;$$

$$c_P - c_F = -\frac{9(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(6\beta - 1)^2} < 0, \text{ para qualquer valor de } \alpha, \beta,$$

onde $4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta \neq 0$, pois é a condição de versalidade do ponto $P_3(c)$ (veja Proposição 5.2.3). Além disso,

$$c_B - c_S = \frac{8(6\beta - 1)(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(2\beta - 1)^2(1 + 6\beta)^2}.$$

Logo, $c_B > c_S$ se, e somente se, $\beta > 1/6$. Temos

$$c_B - c_F = \frac{8(3\beta - 1)(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(2\beta - 1)^2(1 + 6\beta)^2}.$$

Assim, $c_B > c_F$ se, e somente se, $\beta > 1/3$.

$$c_S - c_F = -\frac{216\beta(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)^2}{(6\beta - 1)^2(1 + 6\beta)^2}.$$

Então, $c_S > c_F$ se, e somente se, $\beta < 0$. Disto segue o resultado. $\square$

As posições relativas das curvas multi-locais e a curva parabólica no ponto $P_3(c)$ é dada no seguinte resultado.

Teorema 7.1.9. *Dado um ponto $P_3(c)$ em uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^4$, existem 22 possibilidades para as posições relativas das curvas Δ , $(A_0S_0)_2$, A_0S_1 , $A_0S_0|A_1^\pm$.*

Cada região descrita na Figura 7.2 tem as seguintes relações:

1 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{02}} < c_{s_{01}} < c_{s_1}$	12 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{02}} < c_{s_1} < c_{s_{01}}$
2 $\Leftrightarrow c_{s_{02}} < c_P < c_{s_{01}} < c_{s_1}$	13 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_1} < c_{s_{01}} < c_{s_{02}}$
3 $\Leftrightarrow c_{s_{02}} < c_P < c_{s_1} < c_{s_{01}}$	14 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{01}} < c_{s_{02}} < c_{s_1}$
4 $\Leftrightarrow c_{s_{02}} < c_{s_{01}} < c_{s_1} < c_P$	15 $\Leftrightarrow c_{s_{01}} < c_P < c_{s_{02}} < c_{s_1}$
5 $\Leftrightarrow c_{s_1} < c_{s_{01}} < c_{s_{02}} < c_P$	16 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_1} < c_{s_{02}} < c_{s_{01}}$
6 $\Leftrightarrow c_{s_1} < c_{s_{01}} < c_P < c_{s_{02}}$	17 $\Leftrightarrow c_{s_{01}} < c_{s_1} < c_P < c_{s_{02}}$
7 $\Leftrightarrow c_{s_1} < c_P < c_{s_{01}} < c_{s_{02}}$	18 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{01}} < c_{s_1} < c_{s_{02}}$
8 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_1} < c_{s_{01}} < c_{s_{02}}$	19 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{01}} < c_{s_1} < c_{s_{02}}$
9 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{02}} < c_{s_{01}} < c_{s_1}$	20 $\Leftrightarrow c_{s_{01}} < c_P < c_{s_1} < c_{s_{02}}$
10 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_1} < c_{s_{01}} < c_{s_{02}}$	21 $\Leftrightarrow c_{s_{01}} < c_{s_{02}} < c_{s_1} < c_P$
11 $\Leftrightarrow c_P < c_{s_{01}} < c_{s_{02}} < c_{s_1}$	22 $\Leftrightarrow c_{s_{02}} < c_{s_{01}} < c_P < c_{s_1}$

onde as curvas vermelha, preta, amarela, verde, azul e roxa da Figura 7.2 são dadas, respectivamente, por

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0, \\ 48\beta^2\alpha - 60\beta^3 + 36\beta^4 - 38\beta\alpha + 21\beta^2 + 16\alpha^2 = 0, \\ -60\beta^3 + 36\beta^4 + 48\beta^2\alpha + 21\beta^2 - 32\beta\alpha + 16\alpha^2 = 0, \\ 4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta = 0, \\ 4\alpha + 6\beta^2 - 9\beta = 0, \\ \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Demonstração. Considere os coeficientes c_P , $c_{s_{02}}$, $c_{s_{01}}$ e c_{s_1} que descrevemos anteri-

Figura 7.2: Posições relativas das curvas multi-locais.

ormente. Segue que

$$\begin{aligned}
 c_P - c_{s_{02}} &= -6\beta; \\
 c_P - c_{s_1} &= -\frac{48\beta^2\alpha - 60\beta^3 + 36\beta^4 - 38\beta\alpha + 21\beta^2 + 16\alpha^2}{3\alpha - 4\beta + 4\beta^2}; \\
 c_P - c_{s_{01}} &= -\frac{-60\beta^3 + 36\beta^4 + 48\beta^2\alpha + 21\beta^2 - 32\beta\alpha + 16\alpha^2}{4(-\beta + \beta^2 + \alpha)}; \\
 c_{s_{02}} - c_{s_1} &= -\frac{(4\alpha + 6\beta^2 - 9\beta)(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)}{3\alpha - 4\beta + 4\beta^2}; \\
 c_{s_{02}} - c_{s_{01}} &= -\frac{(4\alpha + 6\beta^2 - 9\beta)(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)}{4(-\beta + \beta^2 + \alpha)}; \\
 c_{s_1} - c_{s_{01}} &= \frac{\alpha(4\alpha + 6\beta^2 - 9\beta)(4\alpha + 6\beta^2 - 5\beta)}{4(3\alpha - 4\beta + 4\beta^2)(-\beta + \beta^2 + \alpha)}.
 \end{aligned}$$

As curvas descritas na Figura 7.2 são dadas pelos zeros das relações acima. Disto temos as posições relativas das curvas. $\square$

Apresentamos a seguir as configurações das curvas das singularidades locais que passam pelo ponto $P_3(c)$ em relação a curva parabólica. Vamos mostrar as configurações das curvas Δ e B_2 , da Δ e S_2 e, por fim, a da Δ e da curva flecnodal.

Teorema 7.1.10. *As configurações das curvas Δ e B_2 (resp. S_2 e flecnodal) no ponto $P_3(c)$ em função de α e β são descritas na Figura 7.3a, (resp 7.3b e 7.3c)*

Demonstração. Considere os 2-jatos das parametrizações das curvas Δ , B_2 , S_2 e flecnodal dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} x &= 3(-3\beta^2 - 2\alpha + 2\beta)y^2 \\ x &= \frac{2(12\alpha\beta^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\beta - 4\beta^2 - 3\alpha + 3\beta)}{(2\beta - 1)^2}y^2 \\ x &= \frac{6(36\alpha\beta^2 - 72\beta^3 + 24\alpha^2 - 72\alpha\beta + 66\beta^2 - \alpha + \beta)}{(6\beta + 1)^2}y^2 \\ x &= \frac{6(-36\beta^2 + 24\beta + 1 - 24\alpha)(-\alpha + \beta)}{(-6\beta + 1)^2}y^2 \end{aligned}$$

Chamaremos os coeficientes de y^2 de c_P , c_B , c_S e c_F , respectivamente. Note que c_P , c_B , c_S e c_F , são funções dos módulos α e β . As configurações genéricas das curvas ocorrem a medida que evitamos que $c_P = c_B = c_S = c_F = 0$. Vamos dividir em três casos:

(a) Configurações das curvas Δ e B_2 :

O anulamento de c_P e c_B são curvas algébricas e são descritas pela curva preta e pela curva verde, na Figura 7.3a. A curva verde possui uma singularidades quando $\alpha = 1/4$ e $\beta = 1/2$. Além disso, a interseção das curvas ocorrem apenas na vizinhança de no máximo raio 1 em volta da origem no plano α e β . As configurações genéricas das curvas acontecem a medida c_P e c_B diferem de zero, isto é, nas regiões representadas pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na Figura 7.3a.

(b) Configurações das curvas Δ e S_2 :

O anulamento de c_P e c_S são curvas algébricas e são descritas pela curva preta e pela curva verde, na Figura 7.3b. A curva verde possui 3 singularidades quando $\alpha = -1/4$ e $\beta = -1/6$, $\alpha = \frac{-79-17\sqrt{17}}{96}$ e $\beta = \frac{-5-\sqrt{17}}{12}$, e $\alpha = \frac{-79+17\sqrt{17}}{96}$ e $\beta = \frac{-5+\sqrt{17}}{12}$. Além disso, o cruzamento das curvas ocorrem apenas na vizinhança de no máximo raio 1 em volta da origem no plano α e β . As configurações genéricas das curvas acontecem a medida c_P e c_S diferem de

zero, isto é, nas regiões representadas pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na Figura 7.3b.

(c) Configurações das curvas Δ e flecnodal:

O anulamento de c_P e c_F são curvas algébricas e são descritas pela curva preta e pela curva verde, na Figura 7.3c. A curva verde possui 3 singularidades quando $\alpha = 1/48$ e $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = \frac{1}{6}$, e $\alpha = -\frac{1}{6}$ e $\beta = -\frac{1}{6}$. Além disso, o cruzamento das curvas ocorrem apenas na vizinhança de no máximo raio 1 em volta da origem no plano α e β . As configurações genéricas das curvas acontecem a medida c_P e c_F diferem de zero, isto é, nas regiões representadas pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 na Figura 7.3c.

□

(a) Configurações das curvas Δ e B_2 no ponto $P_3(c)$ em relação aos valores de α e β

(b) Configurações das curvas Δ e S_2 no ponto $P_3(c)$ em relação aos valores de α e β

(c) Configurações das curvas Δ e Flecnodal no ponto $P_3(c)$ em relação aos valores de α e β

Figura 7.3: Configurações das curvas locais em relação aos valores de α e β

Apêndice

Neste apêndice, vamos apresentar as contas que omitimos nas demonstrações de alguns resultados. As contas foram desenvolvidas pelo software MAPLE e foi uma ferramenta importante para obtenção dos resultados.

Contas da classificação projetiva

Iremos considerar a transformação projetiva $\Psi \in G(5)$ como

$$\Psi(x, y, z, w) = \left(\frac{q_1(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_2(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_3(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)}, \frac{q_4(x, y, z, w)}{p(x, y, z, w)} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} q_i(x, y, z, w) &= q_{i1}x + q_{i2}y + q_{i3}z + q_{i4}w, \quad \text{para } i = 1, 2 \\ q_j(x, y, z, w) &= q_{j3}z + q_{j4}w, \quad \text{para } j = 3, 4 \\ p(x, y, z, w) &= 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w. \end{aligned}$$

Tomamos a forma de Monge (x, y, f_1, f_2) com

$$(f_1, f_2) = \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 a_{3i} x^{3-i} y^i + \cdots, \sum_{i=0}^2 b_{2i} x^{2-i} y^i + \sum_{i=0}^3 b_{3i} x^{3-i} y^i + \cdots \right).$$

Utilizamos a relação

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, w) &= \frac{q_3}{p} - f_1\left(\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}\right) \\ F_2(x, y, z, w) &= \frac{q_4}{p} - f_2\left(\frac{q_1}{p}, \frac{q_2}{p}\right) \end{aligned}$$

Considere (x, y, g_1, g_2) . Mostramos que as formas normais são projetivamente equivalente se $F_1(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = F_2(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = o(k)$.

Contas da Proposição 6.2.6. *Nas condições da Proposição, as contas desenvolvidas no MAPLE são dadas pelas Figuras 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5 com as devidas notações.*

Contas da Proposição 6.2.8. *Nas condições da Proposição, as contas desenvolvidas no MAPLE são dadas pelas Figuras 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11 e 8.12 com as devidas notações.*

Contas da Proposição 6.2.10. *Nas condições da Proposição, as contas desenvolvidas no MAPLE são dadas pelas Figuras 8.13, 8.14 e 8.15 com as devidas notações.*

Contas da Proposição 6.2.11. *Nas condições da Proposição, as contas desenvolvidas no MAPLE são dadas pelas Figuras 8.16, 8.17 e 8.18 com as devidas notações.*


```

[> restart :

> #A classificação projetiva no caso parabólico é feita jato por
> jato, isto é fixado o 2-jato tentamos eliminar o número máximo de
> coeficientes do 3-jato e assim sucessivamente.
> #-----
> #-----
>
> #Encontrando o 2-jato com o 2-jato fixado.
> restart :
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge.
> F1 := -z + x2 + a30·x3 + a31·x2·y + a32·x·y2 + a33·y3; F2 := -w + x·y + b30·x3 + b31·x2
  ·y + b32·x·y2 + b33·y3; p := 1 + alpha·X + beta·Y + gamma·Z + delta·W;
  F1 := -z + x2 + a30 x3 + a31 x2 y + a32 x y2 + a33 y3
  F2 := -w + x y + b30 x3 + b31 x2 y + b32 x y2 + b33 y3
  p := 1 + α X + β Y + γ Z + δ W
(1)
> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
> de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := mtaylor( subs( x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (q33·Z + q34·W) / p, w = (q43·Z + q44·W) / p,
  F1 ), [X, Y, Z, W], 4 ) :
> F21 := mtaylor( subs( x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (q33·Z + q34·W) / p, w = (q43·Z + q44·W) / p,
  F2 ), [X, Y, Z, W], 4 ) :
> #-----
> # Considere outra forma de Monge (Z,W). Vamos substituí-las em F11
> e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := mtaylor( ( subs( Z = X2 + A·X3 + B·X2·Y + C·X·Y2 + DD·Y3, W = X·Y + U1·X3
  + U2·X2·Y + U3·X·Y2 + U4·Y3, (p3·F11) ), [X, Y], 4 ) :
> F22 := mtaylor( ( subs( Z = X2 + A·X3 + B·X2·Y + C·X·Y2 + DD·Y3, W = X·Y + U1·X3
  + U2·X2·Y + U3·X·Y2 + U4·Y3, (p3·F21) ), [X, Y], 4 ) :
> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F12.
> F13 := subs(X=x·T, Y=y·T, F12) :
> R1 := mtaylor(F13, [T], 3)
  R1 := (q122 y2 + (-q33 + q112) x2 + (2 q12 q11 - q34) x y) T2
(2)

```

Figura 8.1: Página 1

```

> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 2)), [x, y], 4)
      S1 := q122 y2 + (-q33 + q112) x2 + (2 q12 q11 - q34) x y
(3)
> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F22.
> F23 := subs(X=x·T, Y=y·T, F22) :
> R2 := mtaylor(F23, [T], 3)
      R2 := (q12 q22 y2 + (q11 q21 - q43) x2 + (-q44 + q12 q21 + q11 q22) x y) T2
(4)
> S2 := mtaylor(simplify(coeff(R2, T, 2)), [x, y], 4)
      S2 := q12 q22 y2 + (q11 q21 - q43) x2 + (-q44 + q12 q21 + q11 q22) x y
(5)

> #Colocando todos os coeficientes do 2-jato igual a zero, obtemos 6
> #equações que possuem a seguinte solução.
> solve({coeff(coeff(S1, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y,
2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x,
0), y, 2) = 0})
{q11 = q11, q12 = 0, q21 = q21, q22 = q22, q33 = q112, q34 = 0, q43 = q11 q21, q44
= q11 q22}
(6)

>
>
> #-----
> #-----
> #Encontrando o 3-jato com o 2-jato fixado.

> restart :
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge.
> F1 := -z + x2 + a30·x3 + a31·x2·y + a32·x·y2 + a33·y3; F2 := -w + x·y + b30·x3 + b31·x2
·y + b32·x·y2 + b33·y3; p := 1 + alpha·X + beta·Y + gamma·Z + delta·W;
      F1 := -z + x2 + a30 x3 + a31 x2 y + a32 x y2 + a33 y3
      F2 := -w + x y + b30 x3 + b31 x2 y + b32 x y2 + b33 y3
      p := 1 + α X + β Y + γ Z + δ W
(7)
> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
> # de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := mtaylor(subs(x = (q11·X + 0·Y + q13·Z + q14·W)/p, y
= (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W)/p, z = (q112·Z + 0·W)/p, w
= (q11·q21·Z + q11·q22·W)/p, F1), [X, Y, Z, W], 4) :

```

Figura 8.2: Página 2

```

> F21 := mtaylor( subs( x = (q11·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
= (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (q11²·Z + 0·W) / p, w
= (q11·q21·Z + q11·q22·W) / p, F2 ), [X, Y, Z, W], 4 ):

> # -----
> # Considere outra forma de Monge (Z,W). Vamos substituí-las em F11
e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := mtaylor( (subs( Z = X² + A·X³ + B·X²·Y + C·X·Y² + DD·Y³, W = X·Y + U1·X³
+ U2·X²·Y + U3·X·Y² + U4·Y³, (p³·F11) )), [X, Y], 4 ):
> F22 := mtaylor( (subs( Z = X² + A·X³ + B·X²·Y + C·X·Y² + DD·Y³, W = X·Y + U1·X³
+ U2·X²·Y + U3·X·Y² + U4·Y³, (p³·F21) )), [X, Y], 4 ):
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F12.
> F13 := subs(X=x·T, Y=y·T, F12) :
> R1 := mtaylor(F13, [T], 4)
R1 := ( (-q11² A - q11² α + a32 q11 q21² + a31 q11² q21 + a30 q11³ + a33 q21³
+ 2 q13 q11) x³ + (-q11² β - q11² B + 2 q14 q11 + 2 a32 q11 q22 q21
+ a31 q11² q22 + 3 a33 q22 q21²) y x² + (a32 q11 q22² + 3 a33 q22² q21
- q11² C) y² x + (-q11² DD + a33 q22³) y³ ) T³
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 3)), [x, y], 4)
S1 := (-q11² A - q11² α + a32 q11 q21² + a31 q11² q21 + a30 q11³ + a33 q21³
+ 2 q13 q11) x³ + (-q11² β - q11² B + 2 q14 q11 + 2 a32 q11 q22 q21
+ a31 q11² q22 + 3 a33 q22 q21²) y x² + (a32 q11 q22² + 3 a33 q22² q21
- q11² C) y² x + (-q11² DD + a33 q22³) y³
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F22.
> F23 := subs(X=x·T, Y=y·T, F22) :
> R2 := mtaylor(F23, [T], 4)
R2 := ( (-q11 q21 A - q11 q21 α + b32 q11 q21² + b31 q11² q21 + b30 q11³ + b33 q21³
- q11 q22 U1 + q13 q21 + q11 q23) x³ + (-q11 q21 B - q11 q22 α + q14 q21
+ q11 q24 + 2 b32 q11 q22 q21 - q11 q21 β + b31 q11² q22 + 3 b33 q22 q21²
- q11 q22 U2 + q13 q22) y x² + (-q11 q21 C - q11 q22 β + q14 q22 - q11 q22 U3
+ b32 q11 q22² + 3 b33 q22² q21) y² x + (b33 q22³ - q11 q21 DD - q11 q22 U4) y³ )
T³
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 3), [x, y], 4)
S2 := (-q11 q21 A - q11 q21 α + b32 q11 q21² + b31 q11² q21 + b30 q11³ + b33 q21³

```

Figura 8.3: Página 3

```

- q11 q22 U1 + q13 q21 + q11 q23) x^3 + (-q11 q21 B - q11 q22 α + q14 q21
+ q11 q24 + 2 b32 q11 q22 q21 - q11 q21 β + b31 q11^2 q22 + 3 b33 q22 q21^2
- q11 q22 U2 + q13 q22) y x^2 + (-q11 q21 C - q11 q22 β + q14 q22 - q11 q22 U3
+ b32 q11 q22^2 + 3 b33 q22^2 q21) y^2 x + (b33 q22^3 - q11 q21 DD - q11 q22 U4) y^3
> #-----
> #Colocando todos os coeficientes do 3-jato igual a zero, obtemos 8
equações que possuem a seguinte solução.
> solve( {coeff(coeff(S1, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y,
2) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y, 3) = 0, coeff(coeff(S2, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x,
2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 0), y, 3) = 0}, {A, B, C,
DD, U1, U2, U3, U4, })
{A =  $\frac{a30 q11^3 - q11^2 \alpha + a32 q11 q21^2 + a31 q11^2 q21 + a33 q21^3 + 2 q13 q11}{q11^2}, B$ 
=  $\frac{-q11^2 \beta + 3 a33 q22 q21^2 + 2 q14 q11 + 2 a32 q11 q22 q21 + a31 q11^2 q22}{q11^2}, C$ 
=  $\frac{q22^2 (a32 q11 + 3 a33 q21)}{q11^2}, DD = \frac{a33 q22^3}{q11^2}, U1 = -\frac{1}{q11^2 q22} ($ 
- b32 q11^2 q21^2 - b31 q11^3 q21 - b30 q11^4 - q11 b33 q21^3 + a32 q11 q21^3
+ q11 q13 q21 - q11^2 q23 + q21 a30 q11^3 + a31 q11^2 q21^2 + a33 q21^4), U2 =
-  $\frac{1}{q11^2 q22} (q11^2 q22 \alpha + q11 q14 q21 - q11^2 q24 - 2 b32 q11^2 q22 q21$ 
- b31 q11^3 q22 - 3 q11 b33 q22 q21^2 + q21 a31 q11^2 q22 - q11 q13 q22
+ 3 a33 q22 q21^3 + 2 a32 q11 q22 q21^2), U3 = -  $\frac{1}{q11^2} (-q22 b32 q11^2$ 
- 3 q22 q11 b33 q21 + a32 q11 q22 q21 + 3 a33 q22 q21^2 + q11^2 β - q14 q11), U4 =
-  $\frac{(-q11 b33 + a33 q21) q22^2}{q11^2} \}$ 
> #-----
> # Queremos eliminar o máximo possível de coeficientes de (Z,W).
Note que DD é diferente de zero, pois a33,a11,q22 são diferentes de
zero. Portanto, ele não pode ser eliminado. Colocando A=B=C=U1=U2=
U3=0 o sistema tem solução e temos:
> solve( {  $\frac{-q11^2 \alpha + a32 q11 q21^2 + a31 q11^2 q21 + a30 q11^3 + a33 q21^3 + 2 q13 q11}{q11^2} = 0,$ 

```

Figura 8.4: Página 4

$$\begin{aligned}
& \frac{2 a_{32} q_{11} q_{22} q_{21} + a_{31} q_{11}^2 q_{22} - q_{11}^2 \beta + 3 a_{33} q_{22} q_{21}^2 + 2 q_{14} q_{11}}{q_{11}^2} = 0, \\
& - \frac{1}{q_{11}^2 q_{22}} (-q_{11} b_{33} q_{21}^3 - b_{32} q_{11}^2 q_{21}^2 - b_{31} q_{11}^3 q_{21} - b_{30} q_{11}^4 \\
& + a_{31} q_{11}^2 q_{21}^2 + q_{11} q_{13} q_{21} - q_{11}^2 q_{23} + a_{32} q_{11} q_{21}^3 + q_{21} a_{30} q_{11}^3 + a_{33} q_{21}^4) \\
& = 0, - \frac{1}{q_{11}^2 q_{22}} (-q_{11} q_{13} q_{22} - 2 b_{32} q_{11}^2 q_{22} q_{21} - b_{31} q_{11}^3 q_{22} + q_{11}^2 q_{22} \alpha \\
& - 3 q_{11} b_{33} q_{22} q_{21}^2 + q_{21} a_{31} q_{11}^2 q_{22} + q_{11} q_{14} q_{21} - q_{11}^2 q_{24} \\
& + 2 a_{32} q_{11} q_{22} q_{21}^2 + 3 a_{33} q_{22} q_{21}^3) = 0, - \frac{1}{q_{11}^2} (-q_{22} b_{32} q_{11}^2 \\
& - 3 q_{22} q_{11} b_{33} q_{21} + a_{32} q_{11} q_{22} q_{21} + 3 a_{33} q_{22} q_{21}^2 + q_{11}^2 \beta - q_{14} q_{11}) = 0, \\
& \frac{q_{22}^2 (a_{32} q_{11} + 3 a_{33} q_{21})}{q_{11}^2} = 0 \Big\}, \{q_{23}, \alpha, \beta, q_{21}, q_{13}, q_{14}, q_{24}\} \Big\} \\
& \left\{ \alpha = - \frac{1}{27} \frac{1}{q_{22} a_{33}^2} (2 a_{32}^3 q_{11} q_{22} - 9 a_{32} q_{11} a_{31} q_{22} a_{33} + 27 q_{22} a_{30} q_{11} a_{33}^2 \right. \\
& - 54 b_{31} q_{11} q_{22} a_{33}^2 - 54 q_{24} a_{33}^2 + 18 b_{32} q_{11} q_{22} a_{32} a_{33}), \beta = \\
& - \frac{1}{3} \frac{q_{22} (-6 a_{33} b_{32} + 6 a_{32} b_{33} - a_{32}^2 + 3 a_{31} a_{33})}{a_{33}}, q_{13} = \\
& - \frac{1}{27} \frac{1}{q_{22} a_{33}^2} (q_{11} (2 a_{32}^3 q_{11} q_{22} - 9 a_{32} q_{11} a_{31} q_{22} a_{33} + 27 q_{22} a_{30} q_{11} a_{33}^2 \\
& - 27 b_{31} q_{11} q_{22} a_{33}^2 - 27 q_{24} a_{33}^2 + 9 b_{32} q_{11} q_{22} a_{32} a_{33})), q_{14} = \\
& - \frac{1}{3} \frac{q_{11} q_{22} (-a_{32}^2 + 3 a_{31} a_{33} - 3 a_{33} b_{32} + 3 a_{32} b_{33})}{a_{33}}, q_{21} = - \frac{1}{3} \frac{a_{32} q_{11}}{a_{33}}, q_{23} \\
& = \frac{1}{27} \frac{q_{11} (q_{11} b_{33} a_{32}^3 q_{22} - 27 b_{30} q_{11} a_{33}^3 q_{22} - 9 a_{32} q_{24} a_{33}^2)}{q_{22} a_{33}^3}, q_{24} = q_{24} \Big\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Figura 8.5: Na solução da Figura, como $a_{33}, q_{11}, q_{22} \neq 0$ podemos supor para simplificar a forma normal que $q_{11} = q_{22} = 1$ e $q_{24} = 0$ e teremos a transformação projetiva apresentada na proposição.

```

> restart
> # A classificação projetiva no caso parabólico com a33=0, com o 3-
    jato dado por (-z+x^2+xy^2,xy+y^3).
> restart:
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge e p como abaixo.
> F1 := -z + x^2 + 1·x·y^2 + a40·x^4 + a41·x^3·y + a42·x^2·y^2 + a43·x·y^3 + a44·y^4; F2 := -w + x
    ·y + b33·y^3 + b40·x^4 + b41·x^3·y + b42·x^2·y^2 + b43·x·y^3 + b44·y^4; p := 1 + alpha·X
    + (beta)·Y + gamma·Z + delta·W;
    F1 := -z + x^2 + x·y^2 + a40·x^4 + a41·x^3·y + a42·x^2·y^2 + a43·x·y^3 + a44·y^4
    F2 := -w + x·y + b33·y^3 + b40·x^4 + b41·x^3·y + b42·x^2·y^2 + b43·x·y^3 + b44·y^4
    p := 1 + α·X + β·Y + γ·Z + δ·W
(1)
> #-----
> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
    de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := mtaylor( subs( x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
    = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (q33·Z + q34·W) / p, w = (q43·Z + q44·W) / p,
    F1 ), [X, Y, Z, W], 5 ):
> F21 := mtaylor( subs( x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
    = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (q33·Z + q34·W) / p, w = (q43·Z + q44·W) / p,
    F2 ), [X, Y, Z, W], 5 ):
> #-----
> # Considere outra forma de Monge (Z,W). Vamos substituí-las em F11
    e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := mtaylor( ( subs( Z = X^2 + 1·X·Y^2 + B1·X^4 + C1·X^3·Y + D1·X^2·Y^2 + E1·X·Y^3
    + FF1·Y^4, W = X·Y + b33·Y^3 + B2·X^4 + C2·X^3·Y + D2·X^2·Y^2 + E2·X·Y^3 + FF2·Y^4,
    (p^4·F11) ), [X, Y], 5 ):
> F22 := mtaylor( ( subs( Z = X^2 + 1·X·Y^2 + B1·X^4 + C1·X^3·Y + D1·X^2·Y^2 + E1·X·Y^3
    + FF1·Y^4, W = X·Y + b33·Y^3 + B2·X^4 + C2·X^3·Y + D2·X^2·Y^2 + E2·X·Y^3 + FF2·Y^4,
    (p^4·F21) ), [X, Y], 5 ):
> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F12.
> F13 := subs(X=x·T, Y=y·T, F12):
> R1 := mtaylor(simplify(F13), [T], 5):
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 2)), [x, y], 5)
    S1 := q12^2·y^2 + (-q33 + q11^2)·x^2 + (-q34 + 2·q12·q11)·xy
(2)

```

Figura 8.6: Página 1

```

> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F22.
> F23 := subs(X=x·T, Y=y·T, F22) :
> R2 := mtaylor(simplify(F23), [T], 5) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 2), [x, y], 5)
      S2 := q12 q22 y2 + (q11 q21 - q43) x2 + (q12 q21 + q11 q22 - q44) x y      (3)
> # Colocando todos os coeficientes do 2-jato igual a zero, obtemos 6
    equações que possuem a seguinte solução.
> factor(solve({coeff(coeff(S1, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x,
    0), y, 2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 1) = 0,
    coeff(coeff(S2, x, 0), y, 2) = 0, }, {q12, q33, q34, q43, q21, q44})))
      {q12 = 0, q21 = q21, q33 = q112, q34 = 0, q43 = q11 q21, q44 = q11 q22}      (4)
>
> # Podemos substituir essa solução na transformação projetiva
    anterior. Então nosso próximo passo é eliminar o 3-jato.
> # Sem perda de generalidade, podemos considerar q11=q22=1. Refazendo
    as contas novamente temos
> restart :
> F1 := -z + x2 + 1·x·y2 + a40·x4 + a41·x3·y + a42·x2·y2 + a43·x·y3 + a44·y4; F2 := -w + x
    ·y + b33·y3 + b40·x4 + b41·x3·y + b42·x2·y2 + b43·x·y3 + b44·y4; p := 1 + alpha·X
    + (beta)·Y + gamma·Z + delta·W;
      F1 := -z + x2 + x y2 + a40 x4 + a41 x3 y + a42 x2 y2 + a43 x y3 + a44 y4
      F2 := -w + x y + b33 y3 + b40 x4 + b41 x3 y + b42 x2 y2 + b43 x y3 + b44 y4
      p := 1 + α X + β Y + γ Z + δ W      (5)
> #-----
> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
    de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := mtaylor(subs(x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
    = (1·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (1·Z + 0·W) / p, w = (q21·Z + 1·W) / p, F1), [X, Y,
    Z, W], 5) :
> F21 := mtaylor(subs(x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y
    = (1·Y + q21·X + q23·Z + q24·W) / p, z = (1·Z + 0·W) / p, w = (q21·Z + 1·W) / p, F2), [X, Y,
    Z, W], 5) :
> #-----
> F12 := mtaylor((subs(Z = X2 + 1·X·Y2 + B1·X4 + C1·X3·Y + D1·X2·Y2 + E1·X·Y3
    + FF1·Y4, W = X·Y + b33·Y3 + B2·X4 + C2·X3·Y + D2·X2·Y2 + E2·X·Y3 + FF2·Y4,

```

Figura 8.7: Página 2

```

(  $p^4 \cdot F11$  ) ), [X, Y], 5) :
> F22 := mtaylor( (subs(  $Z = X^2 + 1 \cdot X \cdot Y^2 + B1 \cdot X^4 + C1 \cdot X^3 \cdot Y + D1 \cdot X^2 \cdot Y^2 + E1 \cdot X \cdot Y^3$ 
+  $FF1 \cdot Y^4$ ,  $W = X \cdot Y + b33 \cdot Y^3 + B2 \cdot X^4 + C2 \cdot X^3 \cdot Y + D2 \cdot X^2 \cdot Y^2 + E2 \cdot X \cdot Y^3 + FF2 \cdot Y^4$ ,
(  $p^4 \cdot F21$  ) ), [X, Y], 5) :
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F12.
> F13 := subs(X=x.T, Y=y.T, F12) :
> R1 := mtaylor(simplify(F13), [T], 5) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 3)), [x, y], 5)
       $S1 := (-\alpha + 2 q13 + q21^2) x^3 + (2 q14 - \beta + 2 q21) x^2 y$  (6)
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F22.
> F23 := subs(X=x.T, Y=y.T, F22) :
> R2 := mtaylor(simplify(F23), [T], 5) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 3), [x, y], 5)
       $S2 := (q13 q21 + q23 - q21 \alpha + b33 q21^3) x^3 + (-\beta + 3 b33 q21 + q14 - q21) x y^2 + (-q21 \beta + q13 - \alpha + q24 + q14 q21 + 3 b33 q21^2) x^2 y$  (7)
> # Colocando todos os coeficientes do 2-jato igual a zero, obtemos 5
    equações que possuem a seguinte solução.
> factor(solve( {coeff(coeff(S1, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x,
    3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 2), y, 1) = 0, }, {beta, q21,
    q13, q14, q23, q24}))
      {  $\beta = 2 q21 (-2 + 3 b33)$ ,  $q13 = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} q21^2$ ,  $q14 = 3 q21 (-1 + b33)$ ,  $q21 = q21$ ,  $q23$ 
      =  $\frac{1}{2} q21 (q21^2 - 2 b33 q21^2 + \alpha)$ ,  $q24 = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} q21^2$  } (8)
>
> # Novamente, podemos substituir essa solução na transformação
    projetiva anterior. Então nosso próximo passo é eliminar o 4-jato.
> # Refazendo as contas novamente temos
>
> restart :
> F1 := -z + x^2 + 1.x.y^2 + a40.x^4 + a41.x^3.y + a42.x^2.y^2 + a43.x.y^3 + a44.y^4; F2 := -w + x
    .y + b33.y^3 + b40.x^4 + b41.x^3.y + b42.x^2.y^2 + b43.x.y^3 + b44.y^4; p := 1 + alpha.X
    + (2 q21 (-2 + 3 b33)) .Y + gamma.Z + delta.W;
      F1 := -z + x^2 + x y^2 + a40 x^4 + a41 x^3 y + a42 x^2 y^2 + a43 x y^3 + a44 y^4
      F2 := -w + x y + b33 y^3 + b40 x^4 + b41 x^3 y + b42 x^2 y^2 + b43 x y^3 + b44 y^4
      p := 1 +  $\alpha X + 2 q21 (-2 + 3 b33) Y + \gamma Z + \delta W$  (9)
> # -----
> # -----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
    de F11 e F21, respectivamente.

```

Figura 8.8: Página 3


```

> F11 := mtaylor( subs( x
= (1·X + 0·Y + (1/2 α - 1/2 q2I²)·Z + (3 q2I (-1 + b33))·W )
p
= 1/p (1·Y + q2I·X + (1/2 q2I (-2 b33 q2I² + q2I² + α)·Z + (1/2 α
- 1/2 q2I²)·W), z = 1·Z + 0·W, w = q2I·Z + 1·W, F1), [X, Y, Z, W], 5) :

> F21 := mtaylor( subs( x
= (1·X + 0·Y + (1/2 α - 1/2 q2I²)·Z + (3 q2I (-1 + b33))·W )
p
= 1/p (1·Y + q2I·X + (1/2 q2I (-2 b33 q2I² + q2I² + α)·Z + (1/2 α
- 1/2 q2I²)·W), z = 1·Z + 0·W, w = q2I·Z + 1·W, F2), [X, Y, Z, W], 5) :

> # -----
> F12 := mtaylor( (subs( Z = X² + 1·X·Y² + B1·X⁴ + C1·X³·Y + D1·X²·Y² + E1·X·Y³
+ FF1·Y⁴, W = X·Y + b33·Y³ + B2·X⁴ + C2·X³·Y + D2·X²·Y² + E2·X·Y³ + FF2·Y⁴,
(p⁴·F11) ), [X, Y], 5) :
> F22 := mtaylor( (subs( Z = X² + 1·X·Y² + B1·X⁴ + C1·X³·Y + D1·X²·Y² + E1·X·Y³
+ FF1·Y⁴, W = X·Y + b33·Y³ + B2·X⁴ + C2·X³·Y + D2·X²·Y² + E2·X·Y³ + FF2·Y⁴,
(p⁴·F21) ), [X, Y], 5) :
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 4 de F12.
> F13 := subs(X=x·T, Y=y·T, F12) :
> R1 := mtaylor(simplify(F13), [T], 5) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 4)), [x, y], 5)
SI := (-FF1 + a44) y⁴ + (1/4 α² - 2 q2I⁴ b33 + 3/4 q2I⁴ - γ - B1 + a44 q2I⁴ + a40
+ a42 q2I² + a41 q2I + a43 q2I³) x⁴ + (-24 b33 q2I² + 17/2 q2I² + 1/2 α + a42
+ 6 a44 q2I² + 3 a43 q2I - D1 + 9 q2I² b33²) y² x² + (-δ + a41 - 2 α q2I
+ 3 a43 q2I² + 2 a42 q2I + 4 a44 q2I³ + 3 q2I³ - C1 + 3 q2I b33 α - 8 b33 q2I³)
y x³ + (5 q2I - 15 q2I b33 + 4 a44 q2I + a43 + 6 q2I b33² - E1) y³ x
> # -----

```

Figura 8.9: Página 4

```

> # Expansão de Taylor até grau 4 de F22.
> F23 := subs(X=x.T, Y=y.T, F22) :
> R2 := mtaylor(simplify(F23), [T], 5) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 4), [x, y], 5)
S2 := (-q21 FF1 + 5 q21 b33 - 9 q21 b332 - FF2 + b44) y4 + (  $\frac{1}{4}$  q21  $\alpha^2$  + b44 q214
+ b40 + b42 q212 + b41 q21 + b43 q213 -  $\gamma$  q21 + 2 q215 b33 -  $\frac{1}{4}$  q215 - B2
- 3 b332 q215 - q21 B1 ) x4 + ( - $\delta$  + b42 -  $\frac{3}{2}$   $\alpha$  q21 +  $\frac{3}{2}$  q213 - D2 + 6 b44 q212
+ 3 b43 q21 + 3 q21 b33  $\alpha$  + 8 b33 q213 - q21 D1 - 21 q213 b332 ) y2 x2 + ( b41
-  $\frac{5}{4}$  q214 - 2  $\alpha$  q212 +  $\frac{1}{4}$   $\alpha^2$  -  $\gamma$  - C2 + 3 b33 q212  $\alpha$  + 3 b43 q212 + 2 b42 q21
+ 4 b44 q213 -  $\delta$  q21 + 10 q214 b33 - q21 C1 - 15 q214 b332 ) y x3 + ( b33 q212
+  $\frac{7}{2}$  q212 +  $\frac{1}{2}$   $\alpha$  + b43 - E2 + 4 b44 q21 - 15 q212 b332 - q21 E1 ) y3 x
> # Como temos apenas 4 graus de liberdade para descrever a
transformação projetiva. Temos que anular apenas 4 coeficientes do
4-jato. Olhando para a projeção da superfície, notamos que apenas a
primeira coordenada é importante para a projeção. Por isso, vamos
em busca de eliminar 4 dos coeficientes do 4-jato da primeira
coordenada. Desta forma, obtemos a solução abaixo.

> factor(solve( {coeff(coeff(SI, x, 4), y, 0) = 0, coeff(coeff(SI, x, 3), y, 1) = 0, coeff(coeff(SI, x,
2), y, 2) = 0, coeff(coeff(SI, x, 1), y, 3) = 0, coeff(coeff(SI, x, 0), y, 4) = 0, }, {B1, C1,
D1, E1, FF1, })))
{ B1 =  $\frac{1}{4}$   $\alpha^2$  - 2 q214 b33 +  $\frac{3}{4}$  q214 -  $\gamma$  + a41 q21 + a44 q214 + a40 + a42 q212
+ a43 q213, C1 = - $\delta$  + a41 - 2  $\alpha$  q21 + 3 a43 q212 + 2 a42 q21 + 4 a44 q213 + 3 q213
+ 3 q21 b33  $\alpha$  - 8 b33 q213, D1 = -24 b33 q212 +  $\frac{17}{2}$  q212 +  $\frac{1}{2}$   $\alpha$  + a42
+ 6 a44 q212 + 3 a43 q21 + 9 q212 b332, E1 = 5 q21 - 15 q21 b33 + 4 a44 q21 + a43
+ 6 q21 b332, FF1 = a44 }
> # Para então descrever os termos da transformação projetiva. Basta
colocarmos B1=C1=D1=E1=0. Note que, FF1 é diferente de zero, pois
a44 são diferentes de zero. Logo, o sistema tem solução, colocando
gamma=t, obtemos q21,delta,t,alpha:
> solve( {  $\frac{1}{4}$   $\alpha^2$  - 2 q214 b33 +  $\frac{3}{4}$  q214 - t + a41 q21 + a44 q214 + a40 + a42 q212

```

Figura 8.10: Página 5

$$\begin{aligned}
& + a43 q2l^3 = 0, -\delta + a4l - 2 \alpha q2l + 3 a43 q2l^2 + 2 a42 q2l + 4 a44 q2l^3 + 3 q2l^3 \\
& + 3 q2l b33 \alpha - 8 b33 q2l^3 = 0, -24 b33 q2l^2 + \frac{17}{2} q2l^2 + \frac{1}{2} \alpha + a42 + 6 a44 q2l^2 \\
& + 3 a43 q2l + 9 q2l^2 b33^2 = 0, 5 q2l - 15 q2l b33 + 4 a44 q2l + a43 + 6 q2l b33^2 \\
& = 0\}, \{q2l, \text{delta}, t, \text{alpha}, \}) \\
\left\{ \alpha = - \frac{1}{(5 - 15 b33 + 4 a44 + 6 b33^2)^2} (42 b33 a43^2 - 13 a43^2 + 50 a42 - 300 a42 b33 \right. & \quad (13) \\
& + 80 a42 a44 + 570 a42 b33^2 - 240 a42 b33 a44 - 360 a42 b33^3 + 32 a42 a44^2 \\
& + 96 a42 a44 b33^2 + 72 a42 b33^4 - 12 a44 a43^2 - 18 a43^2 b33^2), \delta \\
& = \frac{1}{(5 - 15 b33 + 4 a44 + 6 b33^2)^3} (-160 b33 a43^3 - 150 a42 a43 + 32 a44 a43^3 \\
& + 180 a43^3 b33^2 - 54 a43^3 b33^3 - 720 a4l b33 a44^2 - 2160 a4l a44 b33^3 \\
& + 288 a4l a44^2 b33^2 + 432 a4l a44 b33^4 - 1800 a4l b33 a44 + 3420 a4l a44 b33^2 \\
& - 240 a42 a43 a44 - 2610 a42 a43 b33^2 + 2790 a42 a43 b33^3 - 96 a42 a43 a44^2 \\
& - 1296 a42 a43 b33^4 + 216 a43 b33^5 a42 + 125 a4l + 38 a43^3 - 1125 a4l b33 \\
& + 300 a4l a44 + 3825 a4l b33^2 - 1620 a4l b33^5 + 64 a4l a44^3 + 216 a4l b33^6 \\
& - 6075 a4l b33^3 + 240 a4l a44^2 + 4590 a4l b33^4 + 1050 a43 b33 a42 \\
& - 36 a43^3 b33 a44 + 960 a42 a43 b33 a44 - 1008 a42 a43 a44 b33^2 \\
& + 96 a43 b33 a42 a44^2 + 288 a43 b33^3 a42 a44), q2l = \\
& - \frac{a43}{5 - 15 b33 + 4 a44 + 6 b33^2}, t = \frac{1}{(5 - 15 b33 + 4 a44 + 6 b33^2)^4} (\\
& -260 b33 a43^4 - 300 a42 a43^2 + 75 a44 a43^4 + 552 a43^4 b33^2 - 125 a4l a43
\end{aligned}$$

Figura 8.11: Página 6

$$\begin{aligned}
& - 378 b33^3 a43^4 + 36 a44^2 a43^4 + 81 a43^4 b33^4 + 16830 b33^3 a43^2 a42 \\
& - 13122 b33^4 a43^2 a42 + 4752 b33^5 a43^2 a42 - 672 a42 a44^2 a43^2 \\
& - 192 a42 a44^3 a43^2 - 648 a42 a43^2 b33^6 - 17280 a40 a44^2 b33^3 \\
& - 25920 a40 a44 b33^5 - 3840 a40 b33 a44^3 + 1536 a40 a44^3 b33^2 \\
& + 3456 a40 a44^2 b33^4 + 3456 a40 a44 b33^6 - 14400 a40 b33 a44^2 \\
& - 97200 a40 a44 b33^3 + 27360 a40 a44^2 b33^2 + 73440 a40 a44 b33^4 \\
& - 18000 a40 b33 a44 + 61200 a40 a44 b33^2 + 1125 a41 a43 b33 - 300 a41 a43 a44 \\
& - 3825 a41 a43 b33^2 + 1620 a41 a43 b33^5 - 64 a41 a43 a44^3 - 216 a41 a43 b33^6 \\
& + 6075 a41 a43 b33^3 - 240 a41 a43 a44^2 - 4590 a41 a43 b33^4 - 17280 a42^2 a44^2 b33^3 \\
& - 25920 a42^2 a44 b33^5 - 3840 a42^2 b33 a44^3 + 1536 a42^2 a44^3 b33^2 \\
& + 3456 a42^2 a44^2 b33^4 + 3456 a42^2 a44 b33^6 - 14400 a42^2 b33 a44^2 \\
& - 97200 a42^2 a44 b33^3 + 27360 a42^2 a44^2 b33^2 + 73440 a42^2 a44 b33^4 \\
& - 18000 a42^2 b33 a44 + 61200 a42^2 a44 b33^2 + 625 a40 + 137025 a42^2 b33^4 \\
& - 7500 a42^2 b33 + 2000 a42^2 a44 + 36750 a42^2 b33^2 - 12960 a42^2 b33^7 \\
& + 256 a42^2 a44^4 + 1296 a42^2 b33^8 - 113400 a42^2 b33^5 + 1280 a42^2 a44^3 \\
& + 52920 a42^2 b33^6 - 94500 a42^2 b33^3 + 2400 a42^2 a44^2 - 7500 a40 b33 \\
& + 2000 a40 a44 + 36750 a40 b33^2 - 12960 a40 b33^7 + 256 a40 a44^4 + 1296 a40 b33^8 \\
& - 113400 a40 b33^5 + 1280 a40 a44^3 + 52920 a40 b33^6 - 94500 a40 b33^3 \\
& + 2400 a40 a44^2 + 137025 a40 b33^4 + 38 a43^4 + 625 a42^2 - 10170 a42 a43^2 b33^2 \\
& + 108 a44 a43^4 b33^2 + 4920 b33 a43^2 a42 a44 - 9756 b33^2 a43^2 a42 a44 \\
& + 2112 b33 a43^2 a42 a44^2 + 6336 b33^3 a43^2 a42 a44 - 864 a42 a44^2 a43^2 b33^2 \\
& - 1296 a42 a44 a43^2 b33^4 + 720 a41 a43 b33 a44^2 + 2160 a41 a43 a44 b33^3 \\
& - 288 a41 a43 a44^2 b33^2 - 432 a41 a43 a44 b33^4 + 1800 a41 a43 b33 a44 \\
& - 3420 a41 a43 a44 b33^2 + 2850 b33 a43^2 a42 - 252 b33 a43^4 a44 \\
& - 780 a42 a44 a43^2) \}
\end{aligned}$$

Figura 8.12: Página 7. Na solução da Figura, encontramos α , β , q_{21} e escrevemos $\alpha = \frac{1}{\Lambda^2}\xi_1$, $t = \frac{1}{\Lambda^4}\xi_2$, $\delta = \frac{1}{\Lambda^3}\xi_3$, $q_{21} = -\frac{a_{43}}{\Lambda}$, ξ_i são combinações dos coeficientes do 4-jato e $\Lambda = 6\beta^2 + 4\alpha - 15\beta + 5 \neq 0$. Desta forma, temos a transformação projetiva apresentada na proposição.

```

> restart :
> # A classificação projetiva no caso inflexão, com o 2-jato dado por
  (x^2+y^2,0).
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge e p como abaixo.
> F1 := -z + x^2 + y^2 + a30·x^3 + a31·x^2·y + a32·x·y^2 + a33·y^3; F2 := -w + b30·x^3 + b31·x^2
  ·y + b32·x·y^2 + b33·y^3; p := 1 + alpha·X + beta·Y + gamma·Z + delta·W;
  F1 := -z + x^2 + y^2 + a30 x^3 + a31 x^2 y + a32 x y^2 + a33 y^3
  F2 := -w + b30 x^3 + b31 x^2 y + b32 x y^2 + b33 y^3
  p := 1 + α X + β Y + γ Z + δ W
(1)
> # -----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
  de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := subs(x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W)/p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W)/p, z = (q33·Z + q34·W)/p, w = (q43·Z + q44·W)/p,
  F1):
> F21 := subs(x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W)/p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·Z + q24·W)/p, z = (q33·Z + q34·W)/p, w = (q43·Z + q44·W)/p,
  F2):
> # -----
> # Considere outra forma de Monge (Z,W). Vamos substituí-las em F11
  e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := (subs(Z = X^2 + Y^2 + V1·X^3 + V2·X^2·Y + V3·X·Y^2 + V4·Y^3, W = U1·X^3 + U2·X^2
  ·Y + U3·X·Y^2 + U4·Y^3, (p^3·F11))) :
> F22 := (subs(Z = X^2 + Y^2 + V1·X^3 + V2·X^2·Y + V3·X·Y^2 + V4·Y^3, W = U1·X^3 + U2·X^2
  ·Y + U3·X·Y^2 + U4·Y^3, (p^3·F21))) :
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F12.
> F13 := subs(X = x·T, Y = y·T, F12) :
> R1 := series(F13, T = 0, 4) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 2)), [x, y], 4)
S1 := (-q33 + q22^2 + q12^2) y^2 + (-q33 + q21^2 + q11^2) x^2 + (2 q11 q12 + 2 q22 q21) x y
(2)
> # -----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F22.
> F23 := subs(X = x·T, Y = y·T, F22) :
> R2 := series(F23, T = 0, 4) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 2), [x, y], 4)
S2 := -q43 x^2 - q43 y^2
(3)

```

Figura 8.13: Página 1

```

> # Colocando todos os coeficientes do 2-jato igual a zero, obtemos 5
> equações que possuem a seguinte solução.
> solve( {coeff(coeff(S1, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y,
2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x,
0), y, 2) = 0, }, {q21, q11, q43, q33, })
{q11 = -q22, q21 = q12, q33 = q22^2 + q12^2, q43 = 0}, {q11 = q22, q21 = -q12, q33 = q22^2
+ q12^2, q43 = 0} (4)
> # A solução pode ser dada tomando q11=q22=q33=1 e q21=q12=q43=0.
> Substituindo na transformação projetiva e refazendo as contas
> novamente obtemos
>
> restart :
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge e p como abaixo.
> F1 := -z + x^2 + y^2 + a30·x^3 + a31·x^2·y + a32·x·y^2 + a33·y^3; F2 := -w + b30·x^3 + b31·x^2
·y + b32·x·y^2 + b33·y^3; p := 1 + alpha·X + beta·Y + gamma·Z + delta·W;
F1 := -z + x^2 + y^2 + a30 x^3 + a31 x^2 y + a32 x y^2 + a33 y^3
F2 := -w + b30 x^3 + b31 x^2 y + b32 x y^2 + b33 y^3
p := 1 + α X + β Y + γ Z + δ W (5)
> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
> de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := subs( x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y = (1·Y + 0·X + q23·Z + q24·W) / p, z
= (1·Z + q34·W) / p, w = (0·Z + q44·W) / p, F1 ) :
> F21 := subs( x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y = (1·Y + 0·X + q23·Z + q24·W) / p, z
= (1·Z + q34·W) / p, w = (0·Z + q44·W) / p, F2 ) :
> #-----
> Vamos substituí-las em F11 e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := (subs(Z = X^2 + Y^2 + V1·X^3 + V2·X^2·Y + V3·X·Y^2 + V4·Y^3, W = U1·X^3 + U2·X^2
·Y + U3·X·Y^2 + U4·Y^3, (p^3·F11))) :
> F22 := (subs(Z = X^2 + Y^2 + V1·X^3 + V2·X^2·Y + V3·X·Y^2 + V4·Y^3, W = U1·X^3 + U2·X^2
·Y + U3·X·Y^2 + U4·Y^3, (p^3·F21))) :
> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F12.
> F13 := subs(X = x·T, Y = y·T, F12) :
> R1 := series(F13, T = 0, 4) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 3)), [x, y], 4)
S1 := (2 q23 + a33 - V4 - q34 U4 - β) y^3 + (a30 - V1 - q34 U1 - α + 2 q13) x^3
+ (a31 - q34 U2 - V2 - β + 2 q23) y x^2 + (-α - V3 + 2 q13 + a32 - q34 U3) y^2 x (6)

```

Figura 8.14: Página 2

```

> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F22.
> F23 := subs(X=x*T, Y=y*T, F22) :
> R2 := series(F23, T=0, 4) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 3), [x, y], 4)
S2 := (b30 - q44 U1) x^3 + (b31 - q44 U2) y x^2 + (-q44 U3 + b32) y^2 x + (-q44 U4
+ b33) y^3 (7)

> # Colocando todos os coeficientes do 3-jato igual a zero, obtemos 8
equações que possuem a seguinte solução.
> solve({coeff(coeff(S1, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y,
2) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y, 3) = 0, coeff(coeff(S2, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x,
2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 0), y, 3) = 0}, {V1, V2, V3,
V4, U1, U2, U3, U4})
{U1 = b30/q44, U2 = b31/q44, U3 = b32/q44, U4 = b33/q44, V1
= (q44 a30 - q44 α + 2 q44 q13 - q34 b30)/q44, V2
= (q44 a31 - q44 β + 2 q44 q23 - q34 b31)/q44, V3
= (-q44 α + 2 q44 q13 + q44 a32 - q34 b32)/q44, V4
= (2 q44 q23 + q44 a33 - q44 β - q34 b33)/q44 } (8)

> # Observe que quando q44 é diferente de zero a solução acima
existe. Assim, podemos eliminar apenas três dos coeficientes V1,V2,
V3 e V4 sem alterar a codimensão da superfície. Se consider V1=V2=
V3=0 obtemos a seguinte solução em função de alpha, beta e q44.
> solve({(q44 a30 - q44 α + 2 q44 q13 - q34 b30)/q44 = 0,
(-q44 α + 2 q44 q13 + q44 a32 - q34 b32)/q44 = 0,
(2 q44 q23 + q44 a33 - q44 β - q34 b33)/q44 = 0}, {q44, alpha, beta})
{α = -(2 q13 b32 - 2 q13 b30 - a32 b30 + b32 a30)/(-b32 + b30), β =
- (2 q23 b32 - 2 q23 b30 + b32 a33 - b30 a33 + a30 b33 - a32 b33)/(-b32 + b30), q44
= (q34 (-b32 + b30))/(a30 - a32) } (9)

```

Figura 8.15: Na solução da Figura, tomando $q_{13} = q_{23} = 0$ e $q_{34} = a_{30} - a_{32} \neq 0$ obtemos o desejado.

```

>
> restart :
> #-----
> # A classificação projetiva no caso inflexão, com o 2-jato dado por
  (x^2+y^2,0).
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge e p como abaixo.

> F1 := -z + x·y + a30·x^3 + a31·x^2·y + a32·x·y^2 + a33·y^3; F2 := -w + b30·x^3 + b31·x^2·y
  + b32·x·y^2 + b33·y^3; p := 1 + p1·X + p2·Y + p3·Z + p4·W;
  F1 := -z + x y + a30 x^3 + a31 x^2 y + a32 x y^2 + a33 y^3
  F2 := -w + b30 x^3 + b31 x^2 y + b32 x y^2 + b33 y^3
  p := 1 + p1 X + p2 Y + p3 Z + p4 W
(1)

> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
  de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := subs(x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W)/p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·W + q24·Z)/p, z = q33·Z + q34·W/p, w = q44·W + q43·Z/p,
  F1) :
> F21 := subs(x = (q11·X + q12·Y + q13·Z + q14·W)/p, y
  = (q22·Y + q21·X + q23·W + q24·Z)/p, z = q33·Z + q34·W/p, w = q44·W + q43·Z/p,
  F2) :

> #-----
> # Considere outra forma de Monge (Z,W). Vamos substituí-las em F11
  e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := (subs(Z = X·Y + A1·X^3 + B1·X^2·Y + C1·X·Y^2 + D1·Y^3, W = A2·X^3 + B2·X^2·Y
  + C2·X·Y^2 + D2·Y^3, (p^3·F11))) :
> F22 := (subs(Z = X·Y + A1·X^3 + B1·X^2·Y + C1·X·Y^2 + D1·Y^3, W = A2·X^3 + B2·X^2·Y
  + C2·X·Y^2 + D2·Y^3, (p^3·F21))) :

> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F12.
> F13 := subs(X = x·T, Y = y·T, F12) :
> R1 := mtaylor(F13, [T], 4) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 2)), [x, y], 4)
  S1 := q12 y^2 q22 + q11 x^2 q21 + (-q33 + q11 q22 + q12 q21) x y
(2)

> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 2 de F22.
> F23 := subs(X = x·T, Y = y·T, F22) :

```

Figura 8.16: Página 1


```

> R2 := mtaylor(F23, [T], 4) :
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 2), [x, y], 4)
      S2 := -q43 xy
(3)

> # Colocando todos os coeficientes do 2-jato igual a zero, obtemos 5
    equações que possuem a seguinte solução.
> solve( {coeff(coeff(S1, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y,
    2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 2), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x,
    0), y, 2) = 0, }, {q21, q12, q43, q33, })
      {q12 = 0, q21 = 0, q33 = q11 q22, q43 = 0}
(4)

> # A solução pode ser dada tomando q11=q22=q33=1 e q21=q12=q43=0.
    Substituindo na transformação projetiva e refazendo as contas
    novamente obtemos
> #=====
> restart :
> # Considere F1 e F2 a forma normal de Monge e p como abaixo.
> F1 := -z + x·y + a30·x3 + a31·x2·y + a32·x·y2 + a33·y3; F2 := -w + b30·x3 + b31·x2·y
    + b32·x·y2 + b33·y3; p := 1 + p1·X + p2·Y + p3·Z + p4·W;
      F1 := -z + x y + a30 x3 + a31 x2 y + a32 x y2 + a33 y3
      F2 := -w + b30 x3 + b31 x2 y + b32 x y2 + b33 y3
      p := 1 + p1 X + p2 Y + p3 Z + p4 W
(5)

> #-----
> # Substituindo a transformação projetiva em F1 e F2, que chamamos
    de F11 e F21, respectivamente.
> F11 := subs( x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y = (1·Y + 0·X + q23·W + 0 q24·Z) / p, z
    = (1·Z + q34·W) / p, w = (q44·W + 0·Z) / p, F1 ) :
> F21 := subs( x = (1·X + 0·Y + q13·Z + q14·W) / p, y = (1·Y + 0·X + q23·W + 0 q24·Z) / p, z
    = (1·Z + q34·W) / p, w = (q44·W + 0·Z) / p, F2 ) :

> #-----
> Vamos substituí-las em F11 e F21. Chamaremos de F12 e F22.
> F12 := (subs(Z = X·Y + A1·X3 + B1·X2·Y + C1·X·Y2 + D1·Y3, W = A2·X3 + B2·X2·Y
    + C2·X·Y2 + D2·Y3, (p3·F11))) :
> F22 := (subs(Z = X·Y + A1·X3 + B1·X2·Y + C1·X·Y2 + D1·Y3, W = A2·X3 + B2·X2·Y
    + C2·X·Y2 + D2·Y3, (p3·F21))) :

> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F12.
> F13 := subs(X = x·T, Y = y·T, F12) :
> R1 := mtaylor(F13, [T], 4) :
> S1 := mtaylor(simplify(coeff(R1, T, 3)), [x, y], 4)
    S1 := (a33 - D1 - q34 D2) y3 + (-A1 + a30 - q34 A2) x3 + (-q34 B2 - B1 - p1

```

Figura 8.17: Página 2

```

+ a31) y x^2 + (-C1 + q13 + a32 - p2 - q34 C2) y^2 x
> #-----
> # Expansão de Taylor até grau 3 de F22.
> F23 := subs(X=x.T, Y=y.T, F22) :
> R2 := mtaylor(F23, [T], 4)
R2 := (-q44 (A2 x^3 + B2 x^2 y + C2 x y^2 + D2 y^3) + b30 x^3 + b31 x^2 y + b32 x y^2
+ b33 y^3) T^3 (7)
> S2 := mtaylor(coeff(R2, T, 3), [x, y], 4)
S2 := (b30 - q44 A2) x^3 + (b31 - q44 B2) y x^2 + (-q44 C2 + b32) y^2 x + (-q44 D2
+ b33) y^3 (8)
> # Colocando todos os coeficientes do 3-jato igual a zero, obtemos 8
equações que possuem a seguinte solução.
> solve({coeff(coeff(S1, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S1, x, 2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S1, x, 1), y,
2) = 0, coeff(coeff(S1, x, 0), y, 3) = 0, coeff(coeff(S2, x, 3), y, 0) = 0, coeff(coeff(S2, x,
2), y, 1) = 0, coeff(coeff(S2, x, 1), y, 2) = 0, coeff(coeff(S2, x, 0), y, 3) = 0}, {A1, B1, C1,
D1, A2, B2, C2, D2})
{A1 = (q44 a30 - q34 b30) / q44, A2 = b30 / q44, B1 = (-q44 p1 + q44 a31 - q34 b31) / q44, B2 = b31 / q44, C1
= (-q34 b32 + q44 q13 + q44 a32 - q44 p2) / q44, C2 = b32 / q44, D1 = (q44 a33 - q34 b33) / q44, D2
= b33 / q44} (9)
> # Observe que quando q44 é diferente de zero a solução acima
existe. Assim, podemos eliminar apenas três dos coeficientes A1, B1,
C1 e D1 sem alterar a codimensão da superfície. Se consider A1=B1=
C1=D1=0 obtemos a seguinte solução em função de p1, p2 e q44.
> solve({(-q44 p1 + q44 a31 - q34 b31) / q44 = 0, (-q34 b32 + q44 q13 + q44 a32 - q44 p2) / q44 = 0,
(q44 a33 - q34 b33) / q44 = 0}, {p1, q44, p2})
{p1 = (b33 a31 - b31 a33) / b33, p2 = (-b32 a33 + b33 q13 + b33 a32) / b33, q44 = (q34 b33) / a33} (10)
>

```

Figura 8.18: Na solução da Figura, tomando $q_{13} = 0$ e $q_{34} = a_{33} \neq 0$ obtemos o desejado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of differential equations*, Springer, (1983).
- [2] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts*. Monographs in Mathematics, vol. 82, Birkhauser, 1985.
- [3] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, Cusps of Gauss mappings. *Research Notes in Mathematics* 55(1982), Pitman (Advanced Publishing Program).
- [4] J. W. Bruce, A note on first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution, *Bull. London Math. Soc.* 16, (1984), 139–144.
- [5] J. W. Bruce, On families of symmetric matrices. *Moscow Math. J.* 3 (2003), 335–360.
- [6] J. W. Bruce, Projections and reflections of generic surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Math. Scand.* 54 (1984), 262–278.
- [7] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals. *Pitman Research Notes in Mathematics*. 333 (1995), 148–178.
- [8] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, Families of surfaces: height functions and projections to planes. *Math. Scan.* 82 (1998), 165–185.

- [9] J. W. Bruce and A. C. Nogueira, Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality. *Quart. J. Math. Oxford Ser. Ser. (2)* 49 (1998), 433–443.
- [10] J. W. Bruce and F. Tari, Families of surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 45 (2002), 181–203.
- [11] J. W. Bruce and F. Tari, Duality and implicit differential equations. *Nonlinearity*. 13 (2000), 791–811.
- [12] J. W. Bruce and F. Tari, On binary differential equations, *Nonlinearity*. 8 (1995), 255–271.
- [13] J. W. Bruce and F. Tari, On the multiplicity of implicit differential equations. *J. Differential Equations*. 148 (1998), 122–147.
- [14] J. W. Bruce and T. C. Wilkinson, Folding maps and focal sets. *Lecture Notes in Math.* 1462 (1991), Springer, Berlin, 63–72.
- [15] M. Cibrario, Sulla riduzione a forma delle equazione lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto, *Accademia di Scienze e Lettere, Istituto Lomardo Redicconti*. 65 (1932), 889–906.
- [16] L. Dara, Singularites generiques des equations differentielles multi-forms, *Bol. Soc. Bras. Mat.* No. 6 (1975) 95–129.
- [17] A. A. Davydov, *Qualitative control theory*. Translations of Mathematical Monographs 142, AMS, Providence, RI, 1994.
- [18] J.L. Deolindo-Silva and Y. Kabata. Projective classification of jets of surfaces in $\mathbb{P}^4$. Submitted, 2016.
- [19] J. L. Deolindo-Silva, Y. Kabata, T. Ohmoto and H. Sano. Projective classification of jets of surfaces in 3-space. Accept in Bol. Soc. Bras. Mat. 2016.

- [20] F. S. Dias, *Geometria das singularidades de projeções*. Tese de doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2005.
- [21] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster and M. A. S. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 3029–3043.
- [22] R. Garcia, L. F. Mello and J. Sotomayor, Principal mean curvature foliations on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$. EQUADIFF 2003, 939–950, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- [23] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 25 (1979).
- [24] C. G. Gibson, C. A. Hobbs, W. L. Marar, On versal unfoldings of singularities for general two-dimensional spatial motions. *Acta Applicandae Mathematicae*. 47 (1997), 221–242.
- [25] B. Guilfoyle and W. Klingenberg, Proof of the Caratheodory conjecture by mean curvature flow in the space of oriented affine lines. Preprint, arXiv:0808.0851v1, 2008.
- [26] C. Gutierrez, I. Guadalupe, R. Tribuzy and V. Guíñez, Lines of curvatures on surface in $\mathbb{R}^4$. *Bol. Soc. Bras. Mat.* 28 (1997), 233–251.
- [27] C. A. Hoobs, N. P. Kirk, On the classification and bifurcation of multi-germs of maps from surfaces to 3-space, *Math. Scand.* 89 (2001), 57–96
- [28] E. E. Landis, Tangential singularities, *Funt. Anal. Appl.* 15 (1981), 103–114 (translation).
- [29] J. A. Little, On the singularities of submanifolds of heigher dimensional Euclidean space. *Annli Mat. Pura et Appl.* (4A) 83 (1969), 261–336.

- [30] D.K.H. Mochida, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas, Some global properties of surfaces in 4-space, *Proceedings of the 1st International Meeting on Geometry and Topology*, (Braga, 1997), (eletronic), Cent. Mat. Univ. Minho, Braga, (1998), 175–183.
- [31] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. *Geometria Dedicata* 54 (1995), 323–332.
- [32] D. M. Q. Mond, On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$. *Proc. London Math. Soc.* 50 (1985), 333–369.
- [33] D. M. Q. Mond, *Classification of certain singularities and applications to differential geometry*. Ph.D. thesis, University of Liverpool, 1982.
- [34] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas and F. Tari. *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, vol. 1, 2015.
- [35] J. A. Montaldi, On contact between submanifolds, *Michigan Math. J.* 33 (1986), 195–199.
- [36] J. A. Montaldi, On generic composite of maps, *Bull. Lond. Math. Soc.* 23 (1991), 81–85.
- [37] J. A. Montaldi, Surfaces in 3-space and their contact with circles, *J. Differential Geometry.* 23 (1986), 109–126
- [38] R. J. Morris, The sub-parabolic lines of a surface. The mathematics of surfaces, VI (Uxbridge, 1994), pp. 79–102, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., 58, Oxford Univ. Press, 1996.
- [39] T. Nagai, The Gauss map of a hypersurface in Euclidean sphere and the spherical Legendrian duality. Preprint, Hokkaido University, 2009.

- [40] J. J. Nuño-Ballesteros and F. Tari, Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and their projections to 3-spaces. *Roy. Proc. Edinburgh Math. Soc.* 137A (2007), 1313–1328.
- [41] J. Oliver, On the characteristic curves on a smooth surface. *J. London Math. Soc.* 2011.
- [42] J. Oliver, *Pairs of geometric foliations of regular and singular surfaces*. Ph.D. thesis, Durham University, 2010.
- [43] A. Ortiz-Rodríguez, Quelques aspects sur la géométrie des surfaces algébriques réelles. (French) [On some aspects of the geometry of real algebraic surfaces] *Bull. Sci. Math.* 127 (2) (2003), 149–177.
- [44] R. Oset-Sinha and F. Tari, Projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^3$ and the geometry of their singular images. *Rev. Mat. Iberoam.* 31, 1 (2015), 33–50.
- [45] O. A. Platonova, Singularities of the mutual disposition of a surface and a line, *Uspekhi Mat. Nauk*, 36, 1 (1981), 221–222.
- [46] O. A. Platonova, Projections of smooth surfaces, *J. Soviet Math.* 35, 6 (1986), 2796–2808
- [47] A. Ramírez-Galarza and F. Sánchez-Bringas, Lines of curvatures near umbilic points on immersed surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Annals of Global Analysis and Geometry.* 13 (1995), 129–140.
- [48] K. Saji, Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications. *Journal of Gokova Geometry Topology.* 4 (2010), 67–81.
- [49] F. Tari , Geometric properties of the integral curves of an implicit differential equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems.* 17 (2007), 349–364.
- [50] F. Tari, Pairs of foliations on surfaces. *Real and Complex Singularities*, Edited by M. Manoel, M. C. Romero Fuster, C. T. C. Wall. London Mathematical Society Lecture Notes Series 380 (2010), 305–337.

- [51] F. Tari, Self-adjoint operators on surfaces in $\mathbb{R}^n$. *Differential Geom. Appl.* 27 (2009), 296–306.
- [52] F. Tari, Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space. Submeted, 2010.
- [53] R. Uribe-Vargas, A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve. *Mosc. Math. J.* 6 (2006), 731–768, 772.
- [54] R. Uribe-Vargas, Surface evolution, implicit differential equations and pairs of Legendrian fibrations. Pre-print.
- [55] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth mappings *Bull. Lond. Math. Soc.* 13 (1981), 481–539.
- [56] R. Wik Atique, On the classification of multi-germs of maps from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$ under $\mathcal{A}$ -equivalence. Real and complex singularities (São Carlos, 1998), 119–133, Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math., 412, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [57] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. *Ann. of Math.* 62 (1955), 374–410.
- [58] H. Whitney, The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space, *Ann. of Math.* 45 (1944), 247–293.