Grafos de Lyapunov, desigualdades de Poincaré-Hopf e de Morse¹

Maria Alice Bertolim

Orientadora: *Profª. Dra. Ketty Abaroa de Rezende*

Co-orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Outubro de 2002

¹ Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP, processo nº 98/13434-7.

Palavras chaves: Grafos de Lyapunov, fluxos do tipo gradiente, Continuação, desigualdades de Poincaré-Hopf.

Desigualdades de Morse

E-mail: bertolim@icmc.sc.usp.br

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Ketty A de Rezende

Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto

Maria do Carmo Carbinatto

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Marco Antonio Teixeira

Profa. Dra. Maria Herminia de Paula Leite Mello

Maria Herminia de Paula Leite Mello

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Caio José Colletti Negreiros

♡ *Aos meus pais Casemiro e Santina* ♡

*“Entrega teu caminho ao Senhor, confia Nele e o mais Ele
fará” Sl 36*

Viver, e não ter a vergonha de ser feliz.

Cantar e cantar e cantar

A beleza de ser um eterno aprendiz...

(Gonzaguinha)

Agradecimentos

Existem pessoas que são importantes pelo simples fato de existirem. Elas são capazes de nos ajudar com uma simples palavra, um sorriso ou até mesmo com um olhar. Foram muitas as pessoas que, de alguma forma, me ajudaram na realização deste trabalho, e tentarei registrar nestas linhas o meu agradecimento. São elas:

Ketty A. de Rezende, não só pela orientação, mas também por toda amizade e acima de tudo pela confiança depositada em mim em todos os aspectos, e a toda a sua família, em especial a Pedro J. de Rezende, que sempre esteve presente me auxiliando na parte técnica, e a Djairo e Maruja que me acolheram em sua própria casa.

Oziride Manzoli Neto, por todo carinho e incentivo para que eu continuasse meus estudos.

Aos meus pais Casemiro e Santina, meus irmãos Edson e Wilson, minhas cunhadas Shirlei e Mirian, minhas sobrinhas Mariana, Ana Alice e 'aquele' que há de vir com muita saúde. Obrigada por todo carinho, incentivo e por sempre terem compreendido a minha ausência. Amo vocês!

A todos os professores e funcionários de:

- E.E.P.S.G. "Ferdinando Ienny" de Ouro Verde, onde iniciei os meus estudos;
- FCT-UNESP de Presidente Prudente, que me incentivaram a continuar os meus estudos;
- ICMC-USP de São Carlos, em especial Farid, Maria do Carmo e Ires;
- IMECC-UNICAMP, em especial a Profa. Margarida P. Mello pela importante participação na realização deste trabalho;
- Northwestern University, em especial ao Prof. John Franks por toda atenção e a Marco por todo o carinho.

Aos amigos:

- "de guerra": Vera, Luciana, José, Márcio e Eliane, presentes desde o meu mestrado;
- "de música": Peter, Thelma, Fabiano, Ezequiel, Daniela, Gian e Lucas, vocês são especiais!
- "de noite": Daniela, Cláudia, Ana Paula e Marcinha, vou sentir saudades dos nossos passeios!
- "anjo da guarda do lab": Sadao;
- "engenheiras de Campinas" Rúbia, Tatiane e Aline;
- Andréa, Luciene, Liane, Humberto, Auri, Cecília, Ana Lúcia e a todos os meus amigos.

A você, por talvez ter apenas sorrido para mim e tornado meus dias mais bonitos.

Agradeço enfim a Deus não somente pelo dom da vida, mas também por ter me orientado durante todo este trabalho e por ter me dado a oportunidade de conviver com todas as pessoas acima citadas.

Obrigada!

Resumo

Grafos de Lyapunov carregam informações dinâmicas de fluxos do tipo gradiente bem como informações topológicas do espaço de fase correspondente, o qual tomamos como uma variedade orientável fechada de dimensão n . Neste trabalho, os grafos de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ considerados podem representar fluxos suaves em variedades orientáveis fechadas de dimensão maior ou igual a dois, com cycle number κ . Mostramos que as desigualdades de Poincaré-Hopf são condições necessárias e suficientes para um grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ . A continuação, que é apresentada por meio de um algoritmo, é mostrada ser única em dimensões dois e três. Em outras dimensões, apresentamos números exatos de possíveis continuações de $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$. Mostramos também que um grafo abstrato de Lyapunov em dimensão maior ou igual a dois, com cycle number κ , satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf se, e somente se, satisfaz as desigualdades de Morse e o primeiro número de Betti γ_1 é pelo menos κ . Definimos o politopo de Morse, $P_\kappa(h_0, \dots, h_n)$, como sendo o casco convexo da coleção de todos os vetores de números de Betti obtidos das desigualdades de Morse e da desigualdade $\gamma_1 \geq \kappa$ para dados pré-fixados $(h_0, \dots, h_n, \kappa)$. Finalmente, associamos um politopo de Morse a uma família de grafos de Lyapunov $\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ e estabelecemos propriedades geométricas deste politopo.

Abstract

Lyapunov graphs carry dynamical information of gradient-like flows as well as topological information of its phase space which is taken to be a closed orientable n -manifold. In this thesis the Lyapunov graphs $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ considered may represent smooth flows on closed orientable n -manifolds, $n \geq 2$, with cycle number κ . We will show that the Poincaré-Hopf inequalities are necessary and sufficient conditions for an abstract Lyapunov graph $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ to be continued to an abstract Lyapunov graph of Morse type with cycle rank greater or equal to κ . The continuation which is presented by means of a constructive algorithm, is shown to be unique in dimensions two and three. In all other dimensions, the exact number of possible continuations of L are presented. We show that an abstract Lyapunov graph $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ in dimension n greater than or equal to two, with cycle number κ , satisfies the Poincaré-Hopf inequalities if and only if it satisfies the Morse inequalities and the first Betti number γ_1 is at least equal to κ . The convex hull of the collection of all Betti number vectors which satisfy the Morse inequalities and the inequality $\gamma_1 \geq \kappa$ for a pre-assigned data determines a Morse polytope $\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n)$. Finally, we associate a Morse polytope, $\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n)$ to a family of Lyapunov graphs $\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ and determine geometrical properties of this polytope.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Fluxos do tipo gradiente	7
1.2 Grafos de Lyapunov	9
1.3 Teoria de Conley	11
1.4 Teoria de alças	16
1.5 Explosões e implosões de vértices	22
2 Desigualdades de Poincaré-Hopf	25
2.1 Desigualdades de Morse	25
2.2 Filtração do grafo	27
2.3 Desigualdades de Poincaré-Hopf	29
2.3.1 Dualidade do índice de Conley	29
2.3.2 Seqüência longa exata de um par índice	30
2.3.3 Caso de dimensão ímpar, $n = 2i + 1$	31
2.3.4 Caso de dimensão par, $n = 2i$	34
2.4 Desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas	37
3 Continuação de Grafos de Lyapunov	39
3.1 Algoritmo da Explosão	40
3.1.1 Explosão Parcial de um vértice	40
3.1.2 Algoritmo da explosão de um vértice do tipo sela	44
3.1.3 Algoritmo de Explosão para $n = 2$	53

3.2	Soluções para os Sistemas Lineares	54
3.2.1	Caso n ímpar	54
3.2.2	Caso $n = 0 \bmod 4$	73
3.2.3	Caso $n = 2 \bmod 4$	89
3.3	Conclusão	95
4	Desigualdades de Poincaré-Hopf e Desigualdades de Morse	99
4.1	Resultados de equivalência	100
4.1.1	Caso n ímpar	101
4.1.2	Caso $n = 0 \bmod 4$	111
4.1.3	Caso $n = 2 \bmod 4$	119
4.2	Politopos	121
4.2.1	Caso n ímpar	122
4.2.2	Caso $n = 0 \bmod 4$	129
4.2.3	Caso $n = 2 \bmod 4$	135
5	Grafos de Lyapunov, Desigualdades de Poincaré-Hopf e Desigualdades de Morse	137
5.1	Resultados de Continuação	139
5.2	Resultados sobre as desigualdades de Morse	150
5.3	Politopo de Morse	159
5.3.1	Caso n ímpar	160
5.3.2	Caso n par	166
	Lista de figuras	171
	Tabela de símbolos	173
	Referências Bibliográficas	175
	Índice Remissivo	178

Introdução

Grafos de Lyapunov foram inicialmente introduzidos por Franks em [12]. Usamos estes grafos como um organizador de informações homológicas locais e globais do fluxo e do espaço de fase M , uma variedade orientável fechada de dimensão n .

Dado um fluxo contínuo $\phi_t : M \rightarrow M$, resultados de Conley [5] implicam na existência de uma função contínua de Lyapunov $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ associada ao fluxo com a propriedade que f decresce ao longo das órbitas fora do conjunto recorrente por cadeia, isto é, se $x \notin R$ então $f(\phi_t(x)) < f(\phi_s(x))$ para $t > s$ e é constante sobre as componentes do conjunto recorrente por cadeia R .

Definimos a relação de equivalência sobre M onde $x \sim_f y$ se, e somente se, x e y pertencem a mesma componente conexa de um conjunto de nível de f . Chamamos $M / \sim_f$ um *grafo de Lyapunov*. Cada vértice v_k representa uma componente R_k do conjunto recorrente por cadeia R ou, mais geralmente, um conjunto de Morse e logo pode ser rotulado com invariantes dinâmicos. Cada aresta representa um conjunto de nível cartesiano um intervalo e logo pode ser rotulada com invariantes topológicos do conjunto de nível.

Um *grafo abstrato de Lyapunov em dimensão n* é um grafo orientado, finito e conexo, sem ciclos orientados, e com rótulos nos seus vértices e arestas. Cada vértice pode ser rotulado com um fluxo recorrente por cadeia sobre um espaço compacto de dimensão n ou com algum invariante dinâmico deste fluxo. Cada aresta pode ser rotulada com invariantes topológicos de uma variedade fechada de dimensão $(n - 1)$. Neste trabalho, rotulamos o vértice v_k de um grafo abstrato de Lyapunov com as dimensões dos índices homológicos de Conley de uma componente do conjunto recorrente por cadeia, R_k , $\dim CH_j(R_k) = h_j(v_k)$, com $j = 0, \dots, n$. Logo, cada vértice é rotulado com uma lista de inteiros não negativos $(h_0(v_k), \dots, h_n(v_k), \kappa(v_k))$, onde $\kappa(v_k)$ é o cycle number do vértice v_k . Uma notação

alternativa é rotular o vértice com $h_j(v_k) = n_j$ sempre que $n_j \neq 0$ e $\kappa(v_j) = k_j$ sempre que $k_j \neq 0$. A última notação é mais conveniente sempre que $(h_0(v_k), \dots, h_n(v_k), \kappa(v_k))$ tenha muitas entradas iguais a zero. Também, por simplicidade omitimos a referência ao vértice v_k sempre que possível. Escolhemos rotular as arestas com os números de Betti de uma variedade fechada de dimensão $(n - 1)$ o qual agrupamos num vetor de números de Betti. Um *vetor de números de Betti de dimensão n* é um vetor de inteiros não negativos com $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$ onde $\gamma_{n-k} = \gamma_k$, $\gamma_0 = \gamma_n = 1$ e $\gamma_{n/2}$ é par se n é par². Denotamos por $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ um grafo abstrato de Lyapunov L com conjunto de vértices V e cycle rank κ_L , onde $h_j = \sum_{v_k \in V} h_j(v_k)$ e $\kappa_V = \sum_{v_k \in V} \kappa(v_k)$ e $\kappa = \kappa_L + \kappa_V$. Nos referimos a κ como o *cycle number* de um grafo abstrato de Lyapunov.

Um *grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse* será definido subseqüentemente, mas basicamente é um grafo abstrato de Lyapunov com cada vértice v rotulado com singularidades não degeneradas de índice de Morse j , i.e., $h_j(v) = 1$ e todos os cycle numbers dos vértices iguais a zero. É fácil ver que o cycle number de um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse é igual a seu cycle rank.

Certos invariantes topológicos da variedade, bem como invariantes do fluxo impoem restrições sobre o grafo de Lyapunov. Por exemplo, em [8] foi mostrado que o cycle rank³ κ de um grafo de Lyapunov é o limite inferior para o gênero de Cornea⁴ da variedade $g(M)$, que é sempre menor ou igual ao primeiro número de Betti de M , $\kappa \leq g(M) \leq \gamma_1(M)$. Isto generaliza um teorema de Franks [12] que afirma que se M é simplesmente conexa então $\kappa = 0$. Outros teoremas de caracterização de fluxos sobre variedades usando grafos de Lyapunov e alguns resultados de realização de um grafo abstrato de Lyapunov para casos particulares encontram-se em [7], [9], [10], [11].

A motivação inicial deste trabalho foi verificar quais grafos abstratos de Lyapunov L poderiam ser realizados como fluxos em variedades. Esta pergunta é demasiadamente

²Relaxamos a condição de γ_i ser par no caso $2i = 0 \bmod 4$ quando consideramos vetores de números de Betti nas desigualdades de Morse

³O *cycle rank* de um grafo é o número máximo de arestas que podem ser removidas sem desconectar o grafo.

⁴Este gênero é o número máximo de subvariedades mutuamente disjuntas, suaves, compactas, conexas de codimensão um (two-sided de codimensão um) que não desconectam as variedades fechadas suaves M . Ver [6].

geral e a tratamos inicialmente do ponto de vista dinâmico da continuação de fluxos. Inspirados no trabalho de Reineck [19] que trata da continuação de fluxos a fluxos gradientes (i.e. fluxos Morse), verificamos sob quais condições, L , pode ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse.

Como cada vértice deve representar uma componente do conjunto recorrente por cadeia que assumimos ser um conjunto invariante isolado dentro de um bloco isolante, é natural que tratemos em primeiro lugar a questão da continuação local. A continuação de L tem que ser feita em cada vértice v através da explosão de v . Esta explosão que será definida posteriormente, consiste em substituir v por um semi-grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse L_v respeitando os rótulos das arestas incidentes a v e mantendo as dimensões dos índices homológicos de v na soma dos índices homológicos dos vértices de L_v . Provamos que L pode ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse se e somente se os vértices satisfizerem as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes.

Um grafo que não admite uma continuação a um grafo de Lyapunov do tipo Morse não pode ser realizado como um fluxo contínuo em nenhuma variedade. Isto nos levou a investigar as condições globais que assegurariam a continuação de um grafo abstrato de Lyapunov L a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse. Verificamos que L admite uma continuação se e somente se satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23). Dizemos que um grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf se os dados $(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfazem as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23).

Posteriormente, verificamos que o grafo abstrato de Lyapunov satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf se e somente se satisfaz as desigualdades generalizadas de Morse para alguma escolha de vetor de números de Betti. Mais ainda, dado um conjunto de números inteiros positivos $(h_0, \dots, h_n)$ que satisfazem as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas encontramos todos os possíveis vetores de números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse (1) para esse conjunto.

A novidade nas demonstrações destes resultados é a utilização das singularidades de índice k do tipo k -desconectante e $(k - 1)$ -conectante que aparecem como as variáveis h^{cd_i} s do sistema linear gerado pelo algoritmo de explosão, associado à continuação. Este sistema linear pode ser visto como um problema de fluxo em rede. Todas as soluções

deste problema podem ser obtidas por meio de uma solução particular e de circulações elementares nesta rede. A partir destas soluções, estabelecemos um método para construir números de Betti satisfazendo (1) e $\gamma_1 \geq \kappa$.

Obtemos também propriedades destes conjuntos de desigualdades e igualdades importantes sob o ponto de vista de análise convexa. Estabelecemos que o conjunto de soluções não-negativas de qualquer deles é um poliedro limitado, ou seja um politopo. Sabe-se que um politopo é completamente caracterizado por seus pontos extremos, ou vértices, sendo constituído pelo casco convexo de seus vértices. Frequentemente, no entanto, o casco convexo dos pontos inteiros pertencentes a um politopo está contido propriamente no politopo. É surpreendente constatar que isto não ocorre com relação aos politopos considerados. Demonstramos que os cascos convexos dos vetores h^{cd} inteiros não negativos e dos vetores inteiros de números de Betti coincidem com os politopos definidos pelos respectivos conjuntos de desigualdades e igualdades. Ao último destes politopos, denominamos *politopo de Morse*. Outro fato surpreendente é a estreita relação entre estes conjuntos de vetores que, juntamente com a caracterização obtida para os politopos permite obter todos os vetores de números de Betti a partir dos h^{cd} 's e vice-versa.

Este trabalho está dividido nos seguintes capítulos. Capítulo 1 introduzimos algumas definições tal como explosões e implosões de grafos abstratos de Lyapunov que serão necessárias para definir a continuação de um grafo.

No Capítulo 2 introduzimos as desigualdades de Poincaré-Hopf mais gerais (2.16)–(2.20) para blocos isolantes e apresentamos o caso particular, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) para variedades fechadas. A diferença principal entre estas versões é que as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.16)–(2.20) para blocos isolantes N envolvem os números de Betti dos bordos de saída e entrada de N .

No Capítulo 3 apresentamos os resultados de continuação de um grafo abstrato de Lyapunov. Tratamos o problema local, isto é, dado um vértice v , apresentamos o algoritmo de explosão o qual é se traduz num sistema linear que denotamos por sistema h_{κ}^{cd} . Provamos que este sistema tem solução inteira não negativa se e somente se as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.16)–(2.20) são satisfeitas no caso $\kappa = 0$. Além do mais, produzimos todas as soluções neste caso. Em outras palavras, como cada solução corresponde a uma continuação do semi-grafo de Lyapunov associado ao vértice v , L_v , apresentamos todas

as possíveis continuações de L_v a um semi-grafo de Lyapunov do tipo Morse com cycle rank $\kappa = 0$.

No Capítulo 4 apresentamos as desigualdades de Morse generalizadas, também conhecidas como desigualdades de Morse-Conley. Estas desigualdades valem para fluxos contínuos ϕ_t sobre uma n -variedade M , orientável, fechada, com conjunto recorrente por cadeia R possuindo um número finito de componentes. Cada componente R_k é um conjunto invariante isolado e seja $(h_0(R_k), \dots, h_n(R_k))$ as dimensões dos índices homológicos de Conley de R_k . Em [5] foi provado que, dado ϕ_t sobre M com $R = \cup R_k$, $h_j = \sum_{R_k \subset R} h_j(R_k)$ e γ_i o i -ésimo número de Betti de M então temos as seguintes desigualdades de Morse generalizadas:

$$\begin{aligned}
 \gamma_n - \gamma_{n-1} + - \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 &= h_n - h_{n-1} + - \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 & (n) \\
 \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} + - \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 &\leq h_{n-1} - h_{n-2} + - \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 & (n-1) \\
 &\vdots & \\
 \gamma_j - \gamma_{j-1} + - \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 &\leq h_j - h_{j-1} + - \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 & (j) \\
 \gamma_{j-1} - \gamma_{j-2} + - \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 &\leq h_{j-1} - h_{j-2} + - \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 & (j-1) \\
 &\vdots & \\
 \gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_0 &\leq h_2 - h_1 + h_0 & (2) \\
 \gamma_1 - \gamma_0 &\leq h_1 - h_0 & (1) \\
 \gamma_0 &\leq h_0 & (0)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Nosso trabalho usa fortemente a propriedade da dualidade do índice de Conley. Seja R_k uma componente do conjunto recorrente do fluxo ϕ_t e $\bar{R}_k$ uma componente do conjunto recorrente do fluxo reverso ϕ_{-t} . A *condição de dualidade do índice de Conley* assegura que $h_j(\bar{R}_k) = h_{n-j}(R_k)$. Ou melhor, $\bar{h}_j = h_{n-j}$. Para maiores detalhes ver [16]. Note que as desigualdades de Morse (1) se mantêm para os índices de Conley duais $\bar{h}_j$ e nos referimos a estas como *desigualdades de Morse duais*. Isto corresponde a passar a barra somente sobre o lado direito das desigualdades já que o lado esquerdo se mantém inalterado.

Por outro lado, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) apresentam cotas inferiores para os números h_j e h_{n-j} com respeito a somas alternadas de diferenças entre h_s e seu dual h_{n-s} , com $s < j$. Nestas desigualdades não se faz referência ao espaço

de fase. Neste capítulo provamos um resultado surpreendente, que as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) com $\kappa = 0$ são satisfeitas, se e somente se as desigualdades de Morse são satisfeitas para algum vetor de números de Betti $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$.

Para efeito de ilustração, vejamos um corolário do resultado acima, no caso clássico de fluxos gradientes. Dado um conjunto $\{c_0, \dots, c_n\}$ de números, onde c_i representa o número de pontos críticos de índice de Morse i , podemos pré-processar estes dados pelas desigualdades de Poincaré-Hopf e afirmar, primeiramente se os dados são possíveis de ser realizados em algum fluxo gradiente em alguma variedade fechada orientável. Segundo, podemos determinar todos os números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse com esses dados pré-fixados. Apresentamos, ainda neste capítulo, o politopo de Morse no caso $\kappa = 0$.

No Capítulo 5, tratamos os grafos abstratos de Lyapunov em toda generalidade, isto é, com a presença de ciclos. Mostramos um teorema de continuação para grafos abstratos de Lyapunov com a presença de ciclos o qual generaliza o teorema de continuação do Capítulo 3. Provamos um teorema de equivalência mais geral que o do Capítulo 4. Este resultado afirma que as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) são satisfeitas se, e somente se, $\gamma_1 \geq \kappa$ e as desigualdades de Morse são satisfeitas. Finalmente descrevemos o politopo de Morse neste caso.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fluxos do tipo gradiente

Um ponto $x \in M$ é um *ponto recorrente por cadeia* se dado $\varepsilon > 0$ existe uma ε -cadeia de x a x , i.e., existem pontos $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ e $t(i) \geq 1$ tais que

$$d(\phi_{t(i)}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \forall \quad 1 \leq i < n.$$

Um conjunto de tais pontos é denotado por $\mathcal{R}$ e é chamado um *conjunto recorrente por cadeia*. Veja Figura 1.1.

Figura 1.1: ε -cadeia

Dado um fluxo suave $\phi_t : M \rightarrow M$, resultados de Conley implicam que existe uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ associada a este fluxo com a propriedade que f decresce ao longo das órbitas fora do conjunto recorrente por cadeia $\mathcal{R}$, isto é:

Teorema de Conley Dado um fluxo contínuo $\phi_t : M \rightarrow M$, existe uma função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- se $x \notin \mathcal{R}$ então $f(\phi_t(x)) < f(\phi_s(x))$ sempre que $t > s$;
- se $x, y \in \mathcal{R}$ então $f(x) = f(y)$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existem pontos em $\mathcal{R}$, $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = y, x_{n+1}, \dots, x_{2n} = x$ e números reais $t(i) > 0$ tal que

$$d(\phi_{t(i)}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \forall 1 \leq i < 2n.$$

Esta função é chamada *função de Lyapunov*. Nos referimos a ϕ_t como um fluxo do *tipo gradiente* com respeito a f por causa das propriedades mencionadas no Teorema de Conley que o torna semelhante aos fluxos gradientes. Veja Figura 1.2.

Figura 1.2: Função de Lyapunov.

1.2 Grafos de Lyapunov

Recordemos que uma função de Lyapunov $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ associada a um fluxo, determina um grafo de Lyapunov pela seguinte relação de equivalência sobre M : $x \sim_f y$ se, e somente se, x e y pertencem a mesma componente conexa de um conjunto de nível de f . Portanto, $M / \sim_f$ é um grafo de Lyapunov. É possível escolher f tal que cada nível crítico contém uma única componente R de $\mathcal{R}$. Um ponto sobre $M / \sim_f$ é um *ponto de vértice* se com respeito a relação de equivalência, corresponde a uma componente conexa do conjunto de nível contendo uma componente R de $\mathcal{R}$. Todos os outros pontos são pontos de *aresta*. Cada aresta representa uma subvariedade Q de M , de codimensão um, cartesiano um intervalo aberto limitado I , $Q \times I$. Para reter algumas informações topológicas de $Q \times I$, as arestas serão rotuladas com os números de Betti de Q . Todos os grupos de homologia serão calculados com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Veja Figura 1.3.

Figura 1.3: Grafo de Lyapunov.

Um grafo abstrato de Lyapunov de dimensão n é um grafo orientado sem ciclos orientados tal que cada vértice v é rotulado com uma lista de inteiros não negativos $(h_0(v) = k_0, \dots, h_n(v) = k_n, \kappa(v))$, onde κ é o cycle number do vértice. Também, os

rótulos sobre cada aresta ($\beta_0 = 1, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \beta_{n-1} = 1$) deve ser um vetor de números de Betti.

Uma notação alternativa é rotular o vértice com $h_j(v_k) = n_j$ sempre que $n_j \neq 0$ e $\kappa(v_j) = k_j$ sempre que $k_j \neq 0$. A última notação é mais conveniente sempre que $(h_0(v_k), \dots, h_n(v_k), \kappa(v_k))$ tenha muitas entradas iguais a zero. Também, por simplicidade omitimos a referência ao vértice v_k sempre que possível. Escolhemos rotular as arestas com os números de Betti de uma variedade fechada de dimensão $(n-1)$ que agruparemos num vetor de números de Betti. Um *vetor de números de Betti de dimensão n* é um vetor de inteiros não negativos com $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$ onde $\gamma_{n-k} = \gamma_k$, $\gamma_0 = \gamma_n = 1$ e $\gamma_{n/2}$ é par se n é par. Para simplificar a notação do vetor de números de Betti basta representá-lo até a dimensão média por causa da dualidade de Poincaré. Isto é,

$$(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \leftrightarrow (1, \gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

Veja Figura 1.4.

Exemplo

Figura 1.4: Grafo abstrato de Lyapunov em dimensão 7.

Existe uma correspondência natural entre uma n -variedade fechada e um grafo abstrato de Lyapunov de dimensão n . Para estabelecer a correspondência com o bloco isolante

precisamos definir um semi-grafo. Para este fim, precisamos estender a noção de um grafo direcionado levando em conta um vértice distinguido, que denotaremos por ∞ .

Dado um conjunto finito V definimos um *semi-grafo direcionado* $G' = (V', E')$ como um par de conjuntos $V' = V \cup \{\infty\}$, $E' \subset V' \times V'$. Como sempre, chamamos os elementos de V' vértices e os elementos de E' considerados como pares ordenados, são chamados *arestas direcionadas*. Além disso as arestas da forma (∞, v) e (v, ∞) são chamadas *semi-arestas* (ou arestas *dangling* como em [9]). Note que sempre que G' não contém semi-arestas G' é um grafo no sentido usual. A representação gráfica do grafo terá as semi-arestas representadas como uma aresta com um único vértice.

Um bloco isolante N de um conjunto invariante isolado Λ com conjunto de entrada para o fluxo N^+ e conjunto de saída para o fluxo N^- , pode ser associado a um semi-grafo de Lyapunov L_N , consistindo de um vértice rotulado com as dimensões da homologia dos índices de Conley de Λ e semi-arestas de entrada e saída rotuladas com vetores de números de Betti. O número de arestas incidentes positivamente (negativamente) e^+ (e^-) corresponde ao número de componentes conexas de N^+ (N^-). Os rótulos sobre as arestas correspondem aos vetores de números de Betti das subvariedades fechadas de codimensão um N^+ e N^- .

1.3 Teoria de Conley

Um conjunto $S \subset M$ é *invariante* se $\phi_t(S) = S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Um conjunto compacto $N \subset M$ é uma *vizinhança isolante* se $\text{inv}(N, \phi) = \{x \in N : \phi_t(x) \subset N, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \text{int}N$. Um conjunto invariante S é chamado um *conjunto invariante isolado* se é um conjunto invariante maximal em alguma vizinhança isolante N , isto é, $S = \text{inv}(N, \phi)$. Veja Figura 1.5.

Um par de espaços compactos (N, N^-) é um *par-índice* se:

- $\text{cl}(N - N^-)$ é uma vizinhança isolante para S ;
- é positivamente invariante em N , isto é, se $x \in N^-$ e $\phi_{[0,T]}(x) \subset N$ então $\phi_{[0,T]}(x) \subset N^-$;

$$S = \{(0, 0)\}$$

Figura 1.5: Conjunto invariante isolado.

- N^- é um conjunto de saída para o fluxo, isto é, se $x \in N$ e $\phi_{[0,\infty)}(x) \not\subset N$ então existe um $T > 0$ tal que $\phi_{[0,T]}(x) \subset N$ e $\phi_T(x) \in N^-$.

Veja Figuras 1.6 e 1.7.

Figura 1.6: Par-índice.

Um conjunto compacto N é um *bloco isolante* se $N^- = \{x \in N : \phi_{[0,t)}(x) \not\subset N, \forall t > 0\}$ é fechado e $\text{inv}(N, \phi) \subset \text{int } N$.

Uma componente R de $\mathcal{R}$ do fluxo ϕ_t é um exemplo de um conjunto invariante. Trabalharemos sob as hipóteses que $\mathcal{R}$ é a união finita de conjuntos invariantes isolados R_i . Se f é uma função de Lyapunov associada a um fluxo e $c = f(R)$ então para $\varepsilon > 0$, a componente de $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ que contém R é um bloco isolante para R . Veja Figuras 1.8 e 1.9.

Figura 1.7: Par-Índice

Figura 1.8: Blocos isolantes para selas em dimensão 2.

Figura 1.9: Blocos isolantes para selas em dimensão 3.

Tome $(N, N^-) = (f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon], f^{-1}(c-\varepsilon))$ como um par índice para $S = R$. O índice de Conley é definido como o tipo de homotopia de N/N^- e é denotado por $\mathcal{H}(S)$. O índice

de Conley homológico é denotado por $CH_*(S)$ e utilizando coeficientes $\mathbb{Z}_2$ denotamos a dimensão de $CH_*(S)$ por $h_* = \dim CH_*(S)$. Para maiores detalhes ver [5]. Veja nas Figuras 1.10, 1.11, 1.12 e 1.13 os passos para a obtenção de $\mathcal{H}(S)$ onde $S = \{P\}$.

Figura 1.10: Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$.

Figura 1.11: Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$.

Figura 1.12: Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$. Figura 1.13: Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$.

$S = \{(0, 0)\}$ is invariant set and $\mathcal{H}(S) = \Sigma^1$.

Uma propriedade importante do índice de Conley é que se mantém constante para conjuntos relacionados por continuação. Uma família parametrizada de fluxos sobre M é uma coleção de fluxos $\{\phi_t^\lambda \mid \lambda \in I\}$ indexados por $I = [0, 1]$ tal que $\Phi_t(x, \lambda) = (\phi_t^\lambda x, \lambda)$ é um fluxo suave sobre $M \times I$. Dizemos que S^0 , um conjunto invariante para ϕ_t^0 , e S^1 , um conjunto invariante para ϕ_t^1 , estão *relacionados por continuação* se existe um conjunto invariante isolado $\Sigma \subset M \times I$ para Φ_t tal que $S^0 = \Sigma \cap \{(x, 0)\}$ e $S^1 = \Sigma \cap \{(x, 1)\}$. Temos ainda que se S^0 e S^1 estão relacionados por continuação então $\mathcal{H}(S^0) = \mathcal{H}(S^1)$.

Temos ainda que se N é uma vizinhança isolante para ϕ_t^λ para todo $\lambda \in I$ e $\Sigma = \text{Inv}(N \times I)$ em Φ_t , então Σ define uma *continuação* de $\Sigma \cap \{(x, 0)\}$ a $\Sigma \cap \{(x, 1)\}$.

Veja na Figura 1.14 um exemplo de continuação para a seguinte família parametrizada de fluxos definidos na reta: $\dot{x} = x(1 - x^2) - \lambda \equiv f(x, \lambda)$

Figura 1.14: Continuação do índice de Conley.

1.4 Teoria de alças

Nesta seção descrevemos como as alças podem ser coladas e faremos um resumo das técnicas desenvolvidas em [7]. A principal idéia é desenvolver uma abordagem no espírito da teoria de Morse analisando as mudanças da variedade conforme as alças são coladas. Para este fim, faremos uma conexão entre a colagem de alças e a passagem no grafo de Lyapunov L por um vértice. Os diferentes tipos de colagens das alças corresponderão aos diferentes rótulos dos vértices de L .

Denote por D^j uma j -bola unitária fechada. O bordo de D^j , ∂D^j é a $(j-1)$ -esfera S^{j-1} .

Seja $\bar{N} = \bar{N}^- \times [0, 1]$ a n -variedade obtida como um colarinho de N^- e $H = D^\ell \times D^{n-\ell}$. Seja $\theta : \partial D^\ell \times D^{n-\ell} \rightarrow \partial \bar{N}$ um mergulho que define a nova variedade $N' = N \cup_\theta H$, que é o resultado de colar uma ℓ -alça a $\bar{N}$. As seguintes notações são usadas $N' = \bar{N} \cup H^{(\ell)}$ ou $N' = \bar{N} \cup H$ onde $\partial N' = N^+ \cup N^-$. Veja Figura 1.15.

Em termos de um grafo de Lyapunov L , a colagem de uma alça corresponde a passagem através de um vértice na direção oposta a orientação do grafo. Logo um vértice de L representa a singularidade. O vértice juntamente com suas arestas incidentes rotuladas representam N' . As arestas incidentes positivamente representam $N^+ \times J$ e as arestas incidentes negativamente representam $N^- \times J$ onde J é um intervalo limitado aberto. Veja Figura 1.16.

Figura 1.15: Alça H a ser colada.

Figura 1.16: Colando alças em dimensão 2

A seguinte definição classifica as alças de acordo com os efeitos algébricos que causam sobre os números de Betti de N^+ uma vez que a alça é colada em um colarinho de N^- .

Dada uma singularidade não degenerada, uma abordagem clássica é associar à singularidade seu índice de Morse j . Mais geralmente, podemos associar as dimensões dos índices homológicos de Conley, $h_j = 1$ e $h_k = 0$ para todo $k \neq j$. Em [7] singularidades são classificadas não apenas pelo seu índice, mas também pelo efeito causado sobre os números de Betti dos bordos de entrada e saída, N^+ e N^- , do fluxo definido sobre um bloco isolante N contendo a singularidade. Em outras palavras, uma alça contendo uma singularidade de índice ℓ ou respectivamente, o vértice correspondente sobre L é chamado ℓ -desconectante, ou simplesmente ℓ -d, se esta alça tem o efeito algébrico de aumentar o ℓ -ésimo número de Betti de N^+ ou respectivamente, o correspondente rótulo β_ℓ sobre a

aresta incidente positivamente. Uma alça contendo uma singularidade de índice ℓ ou o correspondente vértice sobre L é chamado $(\ell - 1)$ -conectante, ou $(\ell - 1)$ -c, se esta alça tem o efeito algébrico de diminuir o $(\ell - 1)$ -ésimo número de Betti de N^+ ou respectivamente, o correspondente rótulo $\beta_{\ell-1}$ sobre a aresta incidente positivamente. Uma alça contendo uma singularidade de índice ℓ ou o vértice correspondente sobre L é chamado β -invariante, ou β -i, se todos os números de Betti se mantêm constantes. Ver Figura 1.17. Mais adiante utilizamos a notação h_j^d para representar o número de vértices rotulados com $h_j = 1$ do tipo j -d e h_j^c o número de vértices rotulados com $h_j = 1$ do tipo $j - 1$ -c.

Figura 1.17: Os três possíveis efeitos algébricos.

Os blocos isolantes N' de uma singularidade de índice $h_1 = 1$ em uma variedade de dimensão 2 do tipo $\beta - i$, $0 - c$ e $1 - d$ são mostrados na Figura 1.18. Ver [11]. Note a presença de uma aresta extra, no caso $0 - c$ e $1 - d$ precisamente porque os números de Betti que diminuem e aumentam respectivamente controlam o número de componentes conexas. Será mostrado no Teorema 1.4.1 que sobre variedades orientáveis de dimensão n par, singularidades $\beta - i$ podem ocorrer somente se $n = 0 \bmod 4$.

Os blocos isolantes N' de uma singularidade de índice $h_1 = 1$ correspondendo aos casos 0 -c e 1 -d e seus respectivos semi-grafos de Lyapunov estão representados na Figura 1.19. Ver [9].

Figura 1.18: Semi-grafos de Lyapunov para selas em dimensão 2

Figura 1.19: Semi-grafos de Lyapunov para selas em dimensão 3.

As arestas incidentes positivamente e negativamente serão rotuladas com o vetor de números de Betti de N^- e N^+ .

Utilizaremos o seguinte teorema que decorre do resultado principal em [7].

Teorema 1.4.1 *Seja $\phi_t : M \rightarrow M$ um fluxo de Morse-Smale com função de Lyapunov $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Seja v um vértice do grafo de Lyapunov associado L . Seja N um bloco isolante contendo apenas uma singularidade que corresponde a v . Seja N^- , N^+ as componentes de entrada e saída de N . Se v é rotulado como uma singularidade de índice ℓ então*

1. v é ℓ -d, $(\ell - 1)$ -c ou β -i;
2. a soma dos rótulos sobre as arestas incidentes positivamente a v (isto é, o número de

Betti total de N^+) muda com respeito a soma dos rótulos sobre as arestas incidentes negativamente a v (isto é, o número de Betti total de N^-) por ± 2 ou 0;

3. v não pode ser β -i se $n \neq 0 \pmod{4}$.

Um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse em dimensão n é um grafo abstrato de Lyapunov que satisfaz as seguintes condições locais:

1. todo vértice é rotulado com $h_j = 1$ para algum $j = 0, \dots, n$ e o cycle number de cada vértice é igual a zero.
2. o número de arestas incidentes positivamente, e^+ , e o número de arestas incidentes negativamente, e^- , de um vértice deve satisfazer:
 - (a) se $h_j = 1$ para $j \neq 0, 1, n-1, n$ então $e^+ = 1$ e $e^- = 1$;
 - (b) se $h_1 = 1$ então $e^+ = 1$ e $0 < e^- \leq 2$; se $h_{n-1} = 1$ então $e^- = 1$ e $0 < e^+ \leq 2$;
 - (c) se $h_0 = 1$ então $e^- = 0$ e $e^+ = 1$; se $h_n = 1$ então $e^+ = 0$ e $e^- = 1$.
3. todo vértice rotulado com $h_\ell = 1$ deve ser do tipo ℓ -d ou $(\ell - 1)$ -c. Além disso se $n = 2i = 0 \pmod{4}$ e $h_i = 1$ então v pode ser rotulado com β -i.

Essas condições locais podem melhor ser vistas na Figura 1.20.

Figura 1.20: Condições locais para um grafo de Lyapunov do tipo Morse.

Os efeitos algébricos específicos do vértice do tipo ℓ -d, $(\ell - 1)$ -c ou β -i sobre os rótulos β_ℓ^+ das arestas incidentes positivamente ao vértice são especificados em uma série de Proposições em [7]. Seja v um vértice rotulado com $\tilde{n}_v = 1$ em L , onde L representa um fluxo cujo espaço de fase é uma variedade M , de dimensão n . A dimensão de M , n , é referida como a dimensão *ambiente*. Sempre que M é uma variedade de dimensão par e ℓ coincide com sua dimensão média ou sempre que M é uma variedade de dimensão ímpar e ℓ coincide com as duas dimensões médias então a análise é um pouco mais elaborada. Estes casos serão referidos como os casos de dimensão média e resumimos os resultados na seguinte proposição.

Proposição 1.4.2 1. *Seja $n = 2i$ e $\ell \neq i$ ou $n = 2i + 1$ e $\ell \neq i, i + 1$. Então*

(a) *se v é ℓ -d então*

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq \ell, n - \ell - 1 \\ \beta_k(N^+) - 1 & \text{para } k = \ell, n - \ell - 1 \end{cases}$$

ou,

(b) *se v é $(\ell - 1)$ -c então*

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq \ell - 1, n - \ell \\ \beta_k(N^+) + 1 & \text{para } k = \ell - 1, n - \ell \end{cases}$$

2. *se $n = 2i$ e $\ell = i$ então*

(a) *se v é $(\beta$ -i) então*

$$\beta_k(N^-) = \beta_k(N^+) \text{ para todo } k$$

(b) *se v é ℓ -d então*

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i, i - 1 \\ \beta_k(N^+) - 1 & \text{para } k = i, i - 1 \end{cases}$$

ou,

(c) *se v é $((\ell - 1)$ -c) então*

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i, i - 1 \\ \beta_k(N^+) + 1 & \text{para } k = i, i - 1 \end{cases}$$

3. se $n = 2i + 1$ e $\ell = i$ então

(a) se v é $(\ell-d)$ então

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i \\ \beta_k(N^+) - 2 & \text{para } k = i \end{cases}$$

ou,

(b) se v é $((\ell - 1)-c)$ então

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i + 1, i - 1 \\ \beta_k(N^+) + 1 & \text{para } k = i + 1, i - 1 \end{cases}$$

4. se $n = 2i + 1$ e $\ell = i + 1$ então

(a) se v é $((\ell - 1)-c)$ então

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i \\ \beta_k(N^+) + 2 & \text{para } k = i \end{cases}$$

ou,

(b) se v é $(\ell-d)$ então

$$\beta_k(N^-) = \begin{cases} \beta_k(N^+) & \text{para todo } k \neq i + 1, i - 1 \\ \beta_k(N^+) - 1 & \text{para } k = i + 1, i - 1 \end{cases}$$

1.5 Explosões e implosões de vértices

Vamos agora estabelecer a noção de *explosão de um vértice* a fim de definir a continuação de grafos abstratos de Lyapunov. Seja v um vértice sobre um grafo abstrato de Lyapunov rotulado com $(h_0(v), h_1(v), \dots, h_n(v), \kappa_v)$. Um vértice v pode ser explodido se v pode ser removido e substituído por um grafo abstrato de Lyapunov I do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ_v . O grafo I deve respeitar as orientações e rótulos das arestas incidentes positivamente e negativamente em v . Em outras palavras, o novo grafo obtido deve ser orientado e com cycle rank maior ou igual a κ_v . As arestas incidentes positivamente (negativamente) em v , devem ser as arestas incidentes positivamente (negativamente) nos

vértices de I e os rótulos das arestas devem respeitar as restrições dos vértices do tipo Morse. Além disso,

$$h_\lambda(v) = \sum_{j=1}^k h_\lambda(v_j), \text{ para } \lambda = 1, \dots, n-1, \text{ onde } v_j \in I.$$

Para ilustrar o uso dos vértices ℓ -d e $(\ell-1)$ -c considere a seguinte explosão de um vértice rotulado com $(h_1 = 3, h_2 = 3, h_3 = 2, h_4 = 2, \kappa = 0)$ e arestas rotuladas com inteiros não-negativos como na Figura 1.21. A dimensão ambiente é $n = 5$.

Figura 1.21: Vértice a ser explodido.

Será mostrado que este vértice admite duas diferentes explosões como na Figura 1.22.

Um grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, h_1, \dots, h_n, \kappa)$ admite uma *continuação* a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse L_M se cada vértice pode ser explodido e L_M tem cycle rank maior ou igual a κ .

Dado um grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ com cycle number igual a κ , podemos definir uma *implosão do grafo* L como um grafo abstrato de Lyapunov L_C com:

1. um vértice do tipo sela ν rotulado com $(h_1(\nu), \dots, h_{n-1}(\nu), \kappa)$ onde

$$\sum_{v \in V} h_\lambda(v) = h_\lambda(\nu),$$

onde V é o conjunto de vértices de L ;

2. o vértice ν terá $\sum_{v \in V} h_n(v) = e^+$, arestas incidentes positivamente e terá $\sum_{v \in V} h_0(v) = e^-$ arestas incidentes negativamente;

Figura 1.22: Explosões do vértice

3. as arestas incidentes positivamente de ν são arestas incidentes negativamente de e^+ vértices rotulados com $h_n = 1$ e as arestas incidentes negativamente de ν são arestas incidentes positivamente de e^- vértices rotulados com $h_0 = 1$;
4. os rótulos de todas as arestas satisfazem $B_j^+ = B_j^- = 0$, para todo $j \neq 0, n - 1$, e $B_j^+ = B_j^- = 1$, para $j = 0, n - 1$.

Capítulo 2

Desigualdades de Poincaré-Hopf

A validade das desigualdades de Poincaré-Hopf, quando testadas nos dados que aparecem nos rótulos de um grafo abstrato de Lyapunov, constitui-se na hipótese fundamental dos resultados principais estabelecidos nesta monografia.

Na Seção (2.1) as Desigualdades de Morse clássicas são lembradas. Na subsequente Seção (2.2) uma filtração de grafo é definida que corresponde a uma filtração induzida pelo fluxo sobre M . Isto torna possível transferir informações do fluxo sobre M ao grafo de Lyapunov e vice-versa. Finalmente, esta filtração é usada para provar as desigualdades generalizadas de Morse. Na Seção (2.3) mostramos as desigualdades de Poincaré-Hopf. Estas desigualdades em contraste com as desigualdades de Morse relacionam os índices de homologia de um conjunto invariante isolado aos números de Betti dos conjuntos de entrada e saída de um bloco isolante. As desigualdades de Poincaré-Hopf são deduzidas de uma análise das seqüências exata longa dos pares índice. Devido a filtração do grafo na Subseção (2.2) estes resultados podem ser transferidos ao grafo.

2.1 Desigualdades de Morse

A relação entre a topologia de M e os pontos críticos de uma função de valores reais em M são descritas pelas desigualdades de Morse clássicas. Nesta seção resultados básicos são enunciados e maiores detalhes podem ser encontrados em [17].

Definição 2.1.1 Seja S uma função de certos pares de espaços nos inteiros. S é *subaditiva* se dado que $X \supset Y \supset Z$ temos $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$. S é *aditiva* se a igualdade se mantém.

Considerando $\beta_\lambda(X, Y)$ como o λ -th número de Betti de (X, Y) , isto é, $\beta_\lambda(X, Y) = \text{rank}(H_\lambda(X, Y))$ e $\chi(X, Y) = \sum (-1)^\lambda \beta_\lambda(X, Y)$ como a característica de Euler, pode ser mostrado analisando a seqüência longa exata de (X, Y, Z) que β_λ é subaditiva e χ é aditiva.

Lema 2.1.2 Se S é subaditiva e $X_0 \subset \dots \subset X_n$, então $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$. Se S é aditiva então a igualdade se mantém. Se $X_0 = \emptyset$ então $S(X_n) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$ e a igualdade se mantém se S é aditiva.

Demonstração: A prova é feita por indução em n . ■

Dada uma variedade compacta M e uma função diferenciável em M com pontos críticos isolados não-degenerados, defina uma filtração $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$, onde $a_1 < \dots < a_k$. Neste caso, a soma dos ranks de $H_*(M_{a_i}, M_{a_{i-1}})$ é $\sum_{i=1}^k \beta_\lambda(M_{a_i}, M_{a_{i-1}}) = C_\lambda$.

Como β_λ é subaditiva e χ é aditiva para a filtração $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$, os seguintes resultados são obtidos:

1. *Desigualdades de Morse fracas*

$$\beta_\lambda(M) \leq C_\lambda.$$

2. *Igualdade de Poincaré-Hopf*

$$\sum (-1)^\lambda \beta_\lambda(M) = \sum (-1)^\lambda C_\lambda,$$

onde C_λ denota o número de pontos críticos de índice λ .

Defina a função subaditiva $S_\lambda(X, Y) = \beta_\lambda(X, Y) - \beta_{\lambda-1}(X, Y) + \dots \pm \beta_0(X, Y)$. As desigualdades de Morse são obtidas usando esta função na filtração $\emptyset = M^{a_0} \subset M^{a_1} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$.

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^n S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0$$

ou em outras palavras,

$$\beta_\lambda(M) - \beta_{\lambda-1}(M) + \dots \pm \beta_0(M) \leq C_\lambda - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0.$$

2.2 Filtração do grafo

Nesta seção descrevemos um procedimento de ordenamento parecido a ordem topológica de um grafo orientado, conexo e finito sem ciclos orientados. Dado um fluxo suave sobre M com grafo de Lyapunov L definimos uma filtração sobre L . Esta filtração induz uma filtração sobre M .

Definição 2.2.1 Seja $v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{k_1}$ vértices de L de outdegree 0. Considere as arestas incidentes positivamente a estes vértices. Denote por $N_1^1, N_1^2, \dots, N_1^{k_1}$ os blocos isolantes associados a estes vértices e arestas. Defina $M_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} N_1^i$. Conecte todos os vértices v_1^j , $j = 1, \dots, k_1$ com os vértices v_2^j , $j = 1, \dots, k_2$ tal que as arestas incidentes negativamente destes vértices são as arestas incidentes positivamente dos vértices v_1^j , $j = 1, \dots, k_1$. Considere as arestas incidentes positivamente e negativamente dos vértices v_2^j , $j = 1, \dots, k_2$. Denote por $N_2^1, N_2^2, \dots, N_2^{k_2}$ os blocos isolantes associados a estes vértices e suas arestas. Defina $M_2 = M_1 \cup \bigcup_{i=1}^{k_2} N_2^i$. Repita este processo até que todos os vértices do grafo estejam conectados. Isto define uma filtração sobre M , $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\ell = M$ que será chamada *filtração do grafo*,

$$M_\ell = M_{\ell-1} \cup \bigcup_{i=1}^{k_\ell} N_\ell^i.$$

O *índice de Conley homotópico* do vértice v_i^j que representa um conjunto invariante isolado, é denotado por $\mathcal{H}(v_i^j)$, e sua homologia $H_*(\mathcal{H}(v_i^j))$ é o *índice homológico de Conley* do vértice v_i^j e é denotado por $CH_*(v_i^j)$. Cada vértice v_i^j do grafo está rotulado com os ranks dos índices de homologia de Conley, $h_*(v_i^j)$. Se $CH_*(v_i^j)$ é trivial então por simplicidade omitimos $h_*(v_i^j) = 0$.

Dado um fluxo suave sobre M com grafo de Lyapunov L , uma linha de fluxo sobre M corresponde a um caminho orientado sobre L . Se não existe caminho orientado entre dois vértices v e w em L então não existe órbita conectante entre Λ_v e Λ_w .

É importante notar que a escolha da filtração do grafo $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\ell = M$ implica que não existe caminho orientado conectando vértices que estejam no mesmo nível $\{v_i\}_{j=1}^{k_i}$ e portanto Λ_i^j associado a estes vértices não tem órbitas conectantes. Logo, esta filtração define um par-índice (M_i, M_{i-1}) para os conjuntos invariantes isolados associados

a $\bigcup_{j=1}^{k_i} v_i^j$, $\bigcup_{j=1}^{k_i} \Lambda_i^j$. Isto pode facilmente ser visto já que (M_i, M_{i-1}) é um par de espaços compactos tais que:

1. $cl(M_i, M_{i-1})$ é uma vizinhança isolante para a união disjunta dos conjuntos invariantes isolados $\bigcup_{j=1}^{k_i} \Lambda_i^j$;
2. M_{i-1} é positivamente invariante em M_i , isto é, se $x \in M_{i-1}$ e $\phi_{[0,T]}(x) \subset M_i$ então $\phi_{[0,T]}(x) \subset M_{i-1}$;
3. M_{i-1} é o conjunto de saída para o fluxo, isto é, se $x \in M_i$ e $\phi_{[0,\infty]}(x) \not\subset M_i$ então existe um $T > 0$ tal que $\phi_{[0,T]}(x) \subset M_i$ e $\phi_T(x) \subset M_{i-1}$ (esta última condição é satisfeita por vacuidade).

Usando a filtração do grafo, a subaditividade de β_λ e a aditividade de χ como na seção anterior, os seguintes resultados são obtidos:

1. *desigualdades de Morse fracas generalizadas*

$$\beta_\lambda(M) \leq h_\lambda(M).$$

2. *igualdade de Poincaré-Hopf generalizada*

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda h_\lambda(M),$$

onde $rank(CH_\lambda(M_i, M_{i-1})) = h_\lambda(M_i, M_{i-1})$ e $\sum_i h_\lambda(M_i, M_{i-1}) = h_\lambda(M)$.

Defina a função subaditiva S_λ como na seção anterior e use a filtração do grafo para obter as *desigualdades de Morse generalizadas*:

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^{\ell} S_\lambda(M_i, M_{i-1}) = h_\lambda(M) - h_{\lambda-1}(M) + \dots \pm h_0(M),$$

isto é,

$$\beta_\lambda(M) - \beta_{\lambda-1}(M) + \dots \pm \beta_0(M) \leq h_\lambda(M) - h_{\lambda-1}(M) + \dots \pm h_0(M).$$

2.3 Desigualdades de Poincaré-Hopf

2.3.1 Dualidade do índice de Conley

As desigualdade de Poincaré-Hopf que obtemos usa fortemente a propriedade da dualidade do índice de Conley. Seja R_k uma componente do conjunto recorrente do fluxo ϕ_t e $\bar{R}_k$ uma componente do conjunto recorrente do fluxo reverso ϕ_{-t} . A *condição de dualidade do índice de Conley* assegura que $h_j(\bar{R}_k) = h_{n-j}(R_k)$. Ou melhor, $\bar{h}_j = h_{n-j}$. Ver [16].

Existem muitos exemplos de conjuntos invariantes isolados que satisfazem a exigência acima. Por exemplo se um fluxo ϕ_t tem uma singularidade P de índice de Conley S^k ($h_k = 1$), então a singularidade P para o fluxo reverso ϕ_{-t} tem índice de Conley S^{n-k} ($h_{n-k} = 1$). O mesmo se mantém para uma órbita periódica γ de um fluxo ϕ_t com índice de Conley $S^k \vee S^{k+1}$ ($h_k = h_{k+1} = 1$). O fluxo reverso ϕ_{-t} tem γ como uma órbita periódica de índice de Conley $S^{n-k-1} \vee S^{n-k}$ ($h_{n-k-1} = h_{n-k} = 1$). Logo, o dual de $h_k = 1$ é $h_{n-k} = 1$ e o dual de $h_{k+1} = 1$ é $h_{n-(k+1)} = 1$.

Isto pode também ser visto em fluxos 3-dimensionais que possuem como conjunto isolado invariante uma suspensão do subshift do tipo finito σ com matriz $A^{n \times n}$. A suspensão será denotada por $\tilde{\sigma}$. O índice homológico de Conley de $\tilde{\sigma}$ é

$$\begin{aligned} CH_1(\tilde{\sigma}) &= F^n / (I - A)F^n \\ CH_2(\tilde{\sigma}) &= \ker(I - A) \text{ on } F^n. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_1 = \dim CH_1(\tilde{\sigma}) = \dim F^n / (I - A)F^n = \dim \ker(I - A) = \dim CH_2(\tilde{\sigma}) = h_2.$$

Considerando o fluxo reverso, $\tilde{\sigma}^{-1}$ é a suspensão do subshift do tipo finito σ^{-1} com a transposta de A , A^t como sua matriz. Também, a suspensão do subshift do tipo finito para o fluxo inverso tem índices homológicos de Conley iguais a:

$$\begin{aligned} CH_1(\tilde{\sigma}^{-1}) &= F^n / (I - A^t)F^n \\ CH_2(\tilde{\sigma}^{-1}) &= \ker(I - A^t) \text{ on } F^n \end{aligned}$$

Logo, dado que $\bar{h}_i$ representa a dimensão do índice homológico de Conley para o fluxo reverso,

$$\bar{h}_1 = \dim F^n / (I - A^t)F^n = \dim \ker(I - A^t) = \bar{h}_2.$$

Como $\ker(I - A^t) \cong \ker(I - A)$, isto implica que $h_1 = h_2 = \bar{h}_1 = \bar{h}_2$. Portanto, h_1 é dual a $\bar{h}_2$.

2.3.2 Seqüência longa exata de um par índice

Seja (N, N^-) um par-índice para Λ e (N, N^+) um par-índice para Λ' .

Considere a seguinte seqüência longa exata para os pares (N, N^-) e (N, N^+) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(N^-) \xrightarrow{i_n} H_n(N) \xrightarrow{p_n} H_n(N, N^-) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(N^-) \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(N) \xrightarrow{p_{n-1}} \\ \rightarrow H_{n-1}(N, N^-) \xrightarrow{\partial_{n-1}} H_{n-2}(N^-) \xrightarrow{i_{n-2}} H_{n-2}(N) \xrightarrow{p_{n-2}} H_{n-2}(N, N^-) \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \\ \xrightarrow{\partial_4} H_3(N^-) \xrightarrow{i_3} H_3(N) \xrightarrow{p_3} H_3(N, N^-) \xrightarrow{\partial_3} H_2(N^-) \xrightarrow{i_2} H_2(N) \xrightarrow{p_2} H_2(N, N^-) \xrightarrow{\partial_2} \\ \rightarrow H_1(N^-) \xrightarrow{i_1} H_1(N) \xrightarrow{p_1} H_1(N, N^-) \xrightarrow{\partial_1} H_0(N^-) \xrightarrow{i_0} H_0(N) \xrightarrow{p_0} H_0(N, N^-) \rightarrow 0 \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(N^+) \xrightarrow{i'_n} H_n(N) \xrightarrow{p'_n} H_n(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_n} H_{n-1}(N^+) \xrightarrow{i'_{n-1}} H_{n-1}(N) \xrightarrow{p'_{n-1}} \\ \rightarrow H_{n-1}(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_{n-1}} H_{n-2}(N^+) \xrightarrow{i'_{n-2}} H_{n-2}(N) \xrightarrow{p'_{n-2}} H_{n-2}(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_{n-2}} \dots \\ \xrightarrow{\partial'_4} H_3(N^+) \xrightarrow{i'_3} H_3(N) \xrightarrow{p'_3} H_3(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_3} H_2(N^+) \xrightarrow{i'_2} H_2(N) \xrightarrow{p'_2} H_2(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_2} \\ H_1(N^+) \xrightarrow{i'_1} H_1(N) \xrightarrow{p'_1} H_1(N, N^+) \xrightarrow{\partial'_1} H_0(N^+) \xrightarrow{i'_0} H_0(N) \xrightarrow{p'_0} H_0(N, N^+) \rightarrow 0 \quad (2.2) \end{aligned}$$

É um resultado elementar provar que dado uma seqüência longa exata de espaços vetoriais,

$$\xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \dots \rightarrow D \rightarrow 0$$

$\text{rank Im } h + \text{rank Im } i = \text{rank } A$. Isto segue do fato que $\text{rank } A = \text{rank Im } i + \text{rank ker } i$ e da exatidão da seqüência $\text{ker } i = \text{Im } h$. Logo,

$$\text{rank } h = \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \dots \pm \text{rank } D \geq 0.$$

Assumimos também que $h_i = 0$ for $i = 0, n$. Esta última hipótese será removida no final da seção. Aplicando estes argumentos à seqüência longa exata dos pares (N, N^-) e (N, N^+) , e considerando $H_n(N) = H_n(N^\pm) = 0$, $\text{rank } H_i(N, N^-) = h_i$, $\text{rank } H_i(N, N^+) =$

h_{n-i} , $\text{rank } H_0(N^-) = e^-$, $\text{rank } H_0(N^+) = e^+$, $\text{rank } H_0(N) = 1$ e $\text{rank}(H_i(N^\pm)) = B_i^\pm$, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \text{rank } \partial_n &= B_{n-1}^- - \text{rank}(H_{n-1}(N)) + h_{n-1} - B_{n-2}^- + \text{rank}(H_{n-2}(N)) - h_{n-2} \dots \\ &\quad \pm B_3^- \pm \text{rank}(H_3(N)) \pm h_3 \pm B_2^- \pm \text{rank}(H_2(N)) \pm h_2 \\ &\quad \pm B_1^- \pm \text{rank}(H_1(N)) \pm h_1 \pm e^- \pm 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na subseção seguinte, a análise da seqüência longa exata dos pares será considerada em dois casos separados, quando $\dim N$ é ímpar ou par. No primeiro caso, a igualdade de Poincaré-Hopf clássica é obtida.

2.3.3 Caso de dimensão ímpar, $n = 2i + 1$.

A dualidade de Poincaré sobre o bordo de N implica que $B_{2i-j}^- = B_j^-$. Também, como $\text{rank } \partial_{2i+1} = 0$, segue de (2.3) que:

$$\begin{aligned} 2e^- - 2B_1^- + 2B_2^- - + \dots \pm 2B_{i-1}^- \pm B_i^- + h_{2i} - h_{2i-1} + - \dots - h_3 + h_2 - h_1 = \\ = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \text{rank}(H_j(N)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Analogamente, usando a seqüência longa exata do par (N, N^+) e usando a dualidade dos índices, $h_j(\Lambda) = h_{(2i+1)-j}(\Lambda')$ a seguinte equação se mantém:

$$\begin{aligned} 2e^+ - 2B_1^+ + 2B_2^+ - + \dots \pm 2B_{i-1}^+ \pm B_i^+ + h_1 - h_2 + - \dots - h_{2i-2} + h_{2i-1} - h_{2i} = \\ = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \text{rank}(H_j(N)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Subtraindo (2.4) de (2.5) e dividindo por dois, temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} (e^+ - e^-) - (B_1^+ - B_1^-) + - \dots \pm (B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) \pm \frac{(B_i^+ - B_i^-)}{2} \\ - h_{2i} + h_{2i-1} - + \dots \pm h_i \pm \dots - h_2 + h_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

que pode ser representada por:

$$B^+ - B^- = e^- - e^+ + \sum_{j=1}^{2i} (-1)^j h_j \quad (2.7)$$

onde,

$$B^+ = \frac{(-1)^i}{2} B_i^+ \pm B_{i-1}^+ \pm \dots - B_1^+$$

$$B^- = \frac{(-1)^i}{2} B_i^- \pm B_{i-1}^- \pm \dots - B_1^-$$

Isto é uma forma alternativa da igualdade de *Poincaré-Hopf* clássica. See [7] para maiores detalhes.

A fim de atingir nossos objetivos, é suficiente analisar a sequência longa exata dos pares começando na dimensão média.

Analisando os ranks de p_i em (2.1), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{rank } p_i &= h_i - B_{i-1}^- + \text{rank}(H_{i-1}) - h_{i-1} + B_{i-2}^- - \text{rank}(H_{i-2}) + h_{i-2} - + \dots \\ &\quad \pm B_2^- \pm \text{rank}(H_2) \pm h_2 \pm B_1^- \pm \text{rank}(H_1) \pm h_1 \pm e^- \pm 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_i \geq B_{i-1}^- - B_{i-2}^- + - \dots \pm B_2^- \pm B_1^- + h_{i-1} - h_{i-2} + - \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm e^- \pm 1$$

$$- \text{rank}(H_{i-1}) + \text{rank}(H_{i-2}) - + \dots \pm \text{rank}(H_2) \pm \text{rank}(H_1) \quad (2.8)$$

Analogamente, considerando $\text{rank } \partial'_i$ em (2.2) e usando a dualidade dos índices, temos a seguinte desigualdade:

$$- \text{rank}(H_{i-1}) + \text{rank}(H_{i-2}) - + \dots \pm \text{rank}(H_2) \pm \text{rank}(H_1) \geq -B_{i-1}^+ + B_{i-2}^+ - + \dots \pm B_2^+ \pm B_1^+$$

$$-h_{i+2} - + \dots \pm h_{2i-1} \pm h_{2i} \pm e^+ \pm 1 \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.8) temos a seguinte desigualdade:

$$h_i \geq - (B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + (B_{i-2}^+ - B_{i-2}^-) + - \dots \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-)$$

$$-(h_{i+2} - h_{i-1}) + (h_{i+3} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i-1} - h_2) \pm (h_{2i} - h_1) \pm (e^+ - e^-) \quad (2.10)$$

Analogamente analisando p'_i e ∂_i como acima e usando a dualidade dos índices, a seguinte desigualdade é obtida:

$$h_{i+1} \geq -[(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + (B_{i-2}^+ - B_{i-2}^-) + \dots \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-)]$$

$$-(h_{i+2} - h_{i-1}) + (h_{i+3} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i-1} - h_2) \pm (h_{2i} - h_1) \pm (e^+ - e^-) \quad (2.11)$$

Note que na equação (2.10) h_i é maior ou igual a um número inteiro e na equação (2.11), h_{i+1} é maior ou igual a este mesmo número com sinal oposto. Obviamente, como h_i e h_{i+1} são inteiros não negativos, uma das desigualdades é redundante. Isto continuará ocorrer nas desigualdades seguintes.

O restante das desigualdades serão obtidas analisando dois pares de aplicações ao mesmo tempo,

$$\{[(p_{i-1}, \partial'_{i-1}), (p'_{i-1}, \partial_{i-1})], \dots [(p_2, \partial'_2), (p'_2, \partial_2)]\}.$$

Note que a análise destes pares produz as desigualdades tanto no caso de dimensão ímpar, $n = 2i + 1$, como no caso de dimensão par, $n = 2i$, e serão escritas com respeito a n .

Logo, o último par a ser analisado é (p_2, ∂'_2) e (p'_2, ∂_2) . A análise do primeiro par implica que:

$$h_2 \geq -(B_1^+ - B_1^-) - (h_{n-1} - h_1) + (e^+ - e^-) \quad (2.12)$$

enquanto a análise do último:

$$h_{n-2} \geq -[(B_1^+ - B_1^-) - (h_{n-1} - h_1) + (e^+ - e^-)] \quad (2.13)$$

As últimas desigualdades são obtidas analisando p_1 e p'_1 :

$$\begin{aligned} e^- &\leq h_1 + 1 \\ e^+ &\leq h_{n-1} + 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

A análise das seqüências longa exatas dos blocos isolantes produz uma coleção de desigualdades, igualdade (2.7) e desigualdades (2.10), (2.11) e sucessivamente até as desigualdades (2.12), (2.13) e (2.14) que serão chamadas *desigualdades de Poincaré-Hopf* para o caso de dimensão ímpar.

2.3.4 Caso de dimensão par, $n = 2i$.

Nesta seção, as desigualdades são obtidas da mesma maneira, isto é, analisando as seqüências longa exatas dos pares $(N, N^\pm)$ onde $\dim N = 2i$.

As desigualdades serão obtidas analisando dois pares de aplicações ao mesmo tempo,

$$\{[(p_i, \partial'_i), (p'_i, \partial_i)], \dots [(p_2, \partial'_2), (p'_2, \partial_2)]\}.$$

As últimas desigualdades são obtidas analisando p_1 e p'_1 .

Portanto, as desigualdades de Poincaré-Hopf para o caso de dimensão par são idênticas ao caso de dimensão ímpar exceto na dimensão média:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i \geq -(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + (B_{i-2}^+ - B_{i-2}^-) + \dots \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ \quad -(h_{i+1} - h_{i-1}) + (h_{i+2} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i-2} - h_2) \pm (h_{2i-1} - h_1) \pm (e^+ - e^-) \\ \\ h_i \geq -[-(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + (B_{i-2}^+ - B_{i-2}^-) + \dots \pm (B_2^+ - B_2^-) \pm (B_1^+ - B_1^-) \\ \quad -(h_{i+1} - h_{i-1}) + (h_{i+2} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i-2} - h_2) \pm (h_{2i-1} - h_1) \pm (e^+ - e^-)] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Além disso, no caso $n = 2 \bmod 4$ é necessário exigir que

$$h_i - \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (B_j^+ - B_j^-) - \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j (h_{2i-j} - h_j) + (e^- - e^+) \text{ seja par.} \quad (2.16)$$

É interessante notar que a igualdade de Poincaré-Hopf não existe no caso de dimensão par.

Removendo a restrição $h_n = h_0 = 0$ obtemos as desigualdades de Poincaré-Hopf em toda sua generalidade. Essencialmente adicionamos ou subtraímos o termo $(h_n - h_0)$ nas desigualdades (2.10)–(2.15) e nas igualdades (2.7) e (2.16). Logo, as desigualdades de Poincaré-Hopf gerais são representadas por (2.17), (2.18) e (2.20) abaixo.

$$B^+ - B^- = e^- - e^+ + \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j h_j \quad (2.17)$$

onde,

$$\mathcal{B}^+ = \frac{(-1)^i}{2} B_i^+ \pm B_{i-1}^+ \pm \dots - B_1^+$$

$$\mathcal{B}^- = \frac{(-1)^i}{2} B_i^- \pm B_{i-1}^- \pm \dots - B_1^-$$

$$h_i - \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (B_j^+ - B_j^-) - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (h_{2i-j} - h_j) + (e^- - e^+) \text{ ser par, para } 2i \equiv 2 \pmod{4}. \quad (2.18)$$

A desigualdade de Poincaré-Hopf no caso $n = 2$ é

$$\left\{ h_1 - h_2 - h_0 + 2 - (e^+ + e^-) \geq 0 \text{ e par.}^1 \right. \quad (2.19)$$

Esta desigualdade (2.19) aparece em [11].

Agora, vamos considerar estas desigualdades com a presença de um parâmetro κ associado ao bloco isolante N . Assim, as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes

¹Se M é não orientável a desigualdade de Poincaré-Hopf é a mesma, contudo a expressão do lado direito da desigualdade (2.19) não precisa ser par.

2.4 Desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas

Na seção anterior as desigualdades de Poincaré-Hopf em toda a sua generalidade são introduzidas para fluxos em blocos isolantes N . Estas desigualdades envolvem os números de Betti dos bordos de entrada e saída de N .

Estas mesmas desigualdades podem ser obtidas num caso particular das desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes que denominaremos por desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas (2.21), (2.22) e (2.23). Estas desigualdades apresentam cotas inferiores sobre os números h_j com respeito as somas alternadas de diferenças entre h_s e h_{n-s} para $s < j$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n = 2i + 1 \left\{ -h_i \leq (h_{i+2} - h_{i-1}) - (h_{i+3} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i} - h_1) \pm (h_{2i+1} - h_0) \leq h_{i+1} \right. \\ n = 2i \left\{ -h_i \leq (h_{i+1} - h_{i-1}) - (h_{i+2} - h_{i-2}) + \dots \pm (h_{2i-2} - h_2) \pm (h_{2i} - h_0) \leq h_i \right. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -h_j \leq (h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) - (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \pm (h_{n-1} - h_1) \pm (h_n - h_0) \leq h_{n-j} \text{ (j)} \\ \vdots \\ -h_2 \leq (h_{n-1} - h_1) - (h_n - h_0) \leq h_{n-2} \text{ (2)} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1 \geq h_0 - 1 + \kappa \\ h_{n-1} \geq h_n - 1 + \kappa \end{array} \right. \text{ (1)} \end{array} \right. \quad (i) \quad (2.21)$$

No caso $n = 2i + 1$ temos

$$\sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j h_j = 0 \quad (2.22)$$

e no caso $n = 2i = 2 \bmod 4$ temos

$$h_i - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (h_{2i-j} - h_j) \text{ be even.} \quad (2.23)$$

Estas desigualdades são obtidas da seguinte forma. Dado um fluxo contínuo qualquer numa variedade, considere um grafo de Lyapunov abstrato $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ associado ao

fluxo. Seja L_C a implosão do grafo L e ν o único vértice do tipo sela de L_C . O vértice do tipo sela ν é rotulado com $(h_1(\nu), \dots, h_{n-1}(\nu), \kappa)$ onde

$$\sum_{v \in V} h_\lambda(v) = h_\lambda(\nu),$$

onde V é o conjunto de vértices. Observe que $h_0(\nu) = 0$ e $h_n(\nu) = 0$. O vértice ν tem $e^+ = \sum_{v \in V} h_n(v) = h_n$, arestas incidentes positivamente e tem $e^- = \sum_{v \in V} h_0(v) = h_0$ arestas incidentes negativamente. Os rótulos de todas as arestas incidentes ao vértice ν satisfazem $B_j^+ = B_j^- = 0$, para todo $j \neq 0, n-1$, e $B_j^+ = B_j^- = 1$, para $j = 0, n-1$. Substituindo estes dados nas desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes (2.17), (2.18) e (2.20), obtemos as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas (2.21), (2.22) e (2.23).

Capítulo 3

Continuação de Grafos de Lyapunov

O objetivo deste capítulo é descrever sob quais condições um grafo abstrato de Lyapunov pode ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse. Estas condições são as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes as quais mostramos serem necessárias e suficientes para a continuação ocorrer.

No Capítulo 1 definimos a explosão de um vértice a fim de definirmos a continuação de grafos abstratos de Lyapunov. Lembremos que um grafo abstrato de Lyapunov admite uma *continuação* a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse se cada vértice pode ser explodido.

A explosão de um vértice é apresentada por meio de um algoritmo construtivo. Apresentamos o número de possíveis explosões para o vértice.

Embora o algoritmo considere a inserção de κ ciclos no processo de explosão, neste capítulo não estaremos interessados no controle dos mesmos, ou seja, estamos considerando $\kappa = 0$. Dessa forma, explosões com ciclos podem ocorrer, mas esse controle só será feito no Capítulo 5 onde tratamos o grafo em toda sua generalidade. Assim, para facilitar omitimos κ nos resultados.

Anunciamos o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.0.1 *Todo grafo abstrato de Lyapunov que satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf em cada vértice pode ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse.*

Este capítulo está dividido em três seções. Na Seção (3.1) um algoritmo para a explosão

de um vértice é apresentado. O algoritmo descreve o número dos diferentes tipos de vértices que substituirão v . Este algoritmo será um pouco diferente se o vértice está num grafo abstrato de Lyapunov de dimensão ímpar, de dimensão par igual a $0 \bmod 4$ ou de dimensão par igual a $2 \bmod 4$. Cada passo do algoritmo impõe uma série de restrições sobre o números e o tipo de vértices que substituirão v na explosão que são descritas por equações lineares. Assim formamos três famílias de sistemas lineares, cada qual produz pelo menos uma solução que representa o número de diferentes tipos de vértices que substituirão v na explosão.

Na Seção (3.2) os sistemas lineares serão tratados rigorosamente usando técnicas de programação linear inteira. Em outras palavras será provado que as três diferentes famílias de sistemas lineares sempre tem solução inteira não negativa se certas desigualdades são satisfeitas. Mais ainda, o número de soluções é obtido.

Na Seção (3.3) é mostrado que as desigualdades na Seção (3.2) requerida para a existência de soluções inteira não negativa são precisamente as desigualdades de Poincaré-Hopf.

3.1 Algoritmo da Explosão

Nesta seção será apresentado um algoritmo para a explosão de um vértice. Primeiramente faremos uma explosão parcial, que consiste em explodir um vértice a um vértice do tipo sela. Os três passos seguintes do algoritmo não dependem da paridade de n . Contudo, o quarto passo distinguirá três casos: n ímpar, $n = 0 \bmod 4$, $n = 2 \bmod 4$, produzindo três algoritmos diferentes. Cada algoritmo gera um sistema linear h_{κ}^{cd} cujas soluções são precisamente o número de diferentes vértices (ℓ -d, ℓ -c, β -i) do tipo Morse usado na explosão do vértice v . A última subseção trata o caso especial $n = 2$.

3.1.1 Explosão Parcial de um vértice

Nesta seção consideramos a explosão parcial de um vértice do tipo sela generalizada, vértices repulsor e atrator. Esta explosão parcial consiste em explodir um tal vértice a um vértice do tipo sela.

Um vértice num grafo abstrato de Lyapunov rotulado com $(h_0, h_1, \dots, h_n, \kappa)$ é um *vértice repulsor* se tem grau de entrada zero e $h_n > 0$ (respectivamente, é um *vértice atrator* se tem grau de saída zero e $h_0 > 0$). Caso contrário, um vértice com grau de entrada e grau de saída positivo é um *vértice do tipo sela generalizada*. Um caso particular deste último caso ocorre quando o vértice é rotulado com $(h_0 = 0, h_1, \dots, h_n = 0, \kappa)$ e o denotaremos por *vértice do tipo sela*. O algoritmo da explosão parcial consiste em executar uma explosão sobre um vértice que o reduz a um vértice do tipo sela.

Caso 1 - Vértice do tipo sela generalizada

Figura 3.1: Vértice do tipo sela generalizada.

Dado um vértice do tipo sela generalizada rotulado com $(h_0, h_1, \dots, h_n, \kappa)$, uma explosão parcial será feita para obter um vértice do tipo sela rotulado com $(0, h_1, \dots, h_{n-1}, 0, \kappa)$.

A explosão parcial consiste em acrescentar ao vértice os semi-grafos G_0^+ e G_0^- como segue:

1. G_0^+ é formado com h_n vértices rotulados com $h_n = 1$ e $h_n - 1$ vértices rotulados com $h_{n-1} = 1$ do tipo $(n-1)$ -d e com uma aresta incidente negativamente que conecta a v .
2. G_0^- é formado com h_0 vértices rotulados com $h_0 = 1$ e $h_0 - 1$ vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 0-c e com uma aresta incidente positivamente em v .

Agora, o vértice v tem $e^+ + 1$ arestas incidentes positivamente e $e^- + 1$ arestas incidentes negativamente. Mais ainda, o vértice está agora rotulado com

$$(h_n = 0, h_{n-1} - (h_n - 1), h_{n-2}, \dots, h_3, h_2, h_1 - (h_0 - 1), h_0 = 0, \kappa).$$

Figura 3.2: Explosão parcial de um vértice do tipo sela generalizada.

Observe que este vértice parcialmente explodido satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes. É fácil ver que isto se segue substituindo os novos rótulos para o vértice parcialmente explodido, isto é, h_{n-1} por $h_{n-1} - (h_n - 1)$, h_1 por $h_1 - (h_0 - 1)$, e^+ por $e^+ + 1$ e e^- por $e^- + 1$, em (2.7), (2.10), (2.11) no caso de dimensão ímpar ou (2.15), (2.16) no caso de dimensão par e sucessivamente até as desigualdades (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos as desigualdades gerais de Poincaré-Hopf (2.17), (2.18) e (2.20).

Caso 2 - Vértices atrator and repulsor

Considere um vértice repulsor, $e^+ = 0$, rotulado com $(h_0, h_1, \dots, h_n, \kappa)$, uma explosão parcial será feita para obter um vértice rotulado com $(0, h_1, \dots, h_{n-1}, 0, \kappa)$.

Os grafos G_0^+ e G_0^- serão definidos como no caso anterior.

Agora, o vértice v tem 1 aresta incidente positivamente e $e^- + 1$ arestas incidentes

Figura 3.3: Vértice Repulsor.

negativamente. Além disso, o vértice está agora rotulado com

$$(h_n = 0, h_{n-1} - (h_n - 1), h_{n-2}, \dots, h_3, h_2, h_1 - (h_0 - 1), h_0 = 0, \kappa).$$

Figura 3.4: Explosão parcial de um vértice repulsor.

Observe que substituindo os novos rótulos no vértice parcialmente explodido, isto é, h_{n-1} por $h_{n-1} - (h_n - 1)$, h_1 por $h_1 - (h_0 - 1)$, e^+ por 1 e e^- por $e^- + 1$, em (2.7), (2.10), (2.11) no caso de dimensão ímpar ou (2.15), (2.16) no caso de dimensão par e sucessivamente até as desigualdades (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos as desigualdades de Poincaré-Hopf gerais (2.17), (2.18) e (2.20).

3.1.2 Algoritmo da explosão de um vértice do tipo sela

Na Seção 3.1.1, a explosão parcial de um vértice a um vértice do tipo sela foi estabelecida. Nesta seção continuaremos a denotar o vértice parcialmente explodido por v . Agora v é um vértice do tipo sela rotulado com $(0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, 0, \kappa)$ e arestas incidentes positivamente rotuladas com $((\beta_0^+, \dots, \beta_{n-1}^+)_i)_{i=1}^{e^+}$ e arestas incidentes negativamente rotuladas com $((\beta_0^-, \dots, \beta_{n-1}^-)_i)_{i=1}^{e^-}$, onde i denota a aresta. Seja $B_j^+ = \sum_{i=1}^{e^+} (\beta_j^+)_i$ e $B_j^- = \sum_{i=1}^{e^-} (\beta_j^-)_i$. Ver Figura 3.5. Observe que $B_0^- = e^-$ e $B_0^+ = e^+$.

Esquematizamos o algoritmo que explode um vértice do tipo sela em quatro etapas básicas:

1. ajuste das arestas incidentes $\longrightarrow$ define G^+ e G^- ;
2. inserção de ciclos;
3. explosão linear fora das dimensões médias $\longrightarrow$ define $G^+ \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} L_j^+$ e $G^- \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} L_j^-$ onde $\ell < \text{dimensão média}$;
4. explosão da dimensão média $\longrightarrow$ consideramos n ímpar, $n = 0 \bmod 4$, $n = 2 \bmod 4$.

A primeira parte do algoritmo consiste em ajustar as arestas incidentes do grafo. Para este propósito definimos dois grafos G^+ e G^- . O grafo G^+ tem a propriedade de ter e^+ arestas incidentes positivamente e uma aresta incidente negativamente. Será formado usando apenas singularidades de índice $n-1$ do tipo $(n-1)$ -d. O grafo G^- tem a propriedade de ter e^- arestas incidentes negativamente e uma aresta incidente positivamente. Será formado usando apenas singularidades de índice 1 do tipo 0-c.

A segunda parte do algoritmo consiste em unir a aresta incidente negativamente de G^+ ao grafo linear L^+ formado por vértices do tipo Morse rotulados com $h_{n-j} = 1$ e $j < \text{dimensões médias}$. Analogamente, a aresta incidente positivamente de G^- será unida ao grafo linear L^- formado por vértices do tipo Morse rotulados com $h_j = 1$ e $j < \text{dimensões médias}$. Relembre que a variação dos rótulos sobre as arestas é sempre considerada na direção oposta a orientação do grafo.

A terceira parte do algoritmo consiste em inserir os ciclos.

A quarta parte do algoritmo consiste em inserir singularidades na dimensão média, se existir, e unir L^+ a L^- se estes já não tiverem sido unidos n passo anterior. Certamente, tudo isto é feito, de forma que os pesos sobre as duas últimas arestas a serem unidas coincidam.

Prosseguiremos descrevendo o algoritmo.

Algoritmo

Figura 3.5: Vértice a ser explodido.

Ajuste das arestas incidentes: G^- e G^+ .

Escolha $e^- - 1$ vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 0-c. Isto é possível pela última desigualdade em (2.20). Escolhendo este número de vértices rotulados com 1-singularidades, G^- é formado com e^- arestas incidentes negativamente e uma aresta incidente positivamente. Singularidades do tipo 0-c não alteram β_i com $0 < i < n - 1$. Este tipo de singularidade decrece β_0 e por dualidade β_{n-1} . Logo, a aresta incidente positivamente de G^- tem $B_0^- = B_{n-1}^- = 1$ e $B_j^- = \sum_{i=1}^{e^-} (\beta_j^-)_i$ com $j = \{1, \dots, n - 2\}$. Ver Figura 3.6.

Analogamente, o grafo G^+ é formado escolhendo $e^+ - 1$ vértices rotulados $h_{n-1} = 1$ do tipo $(n - 1)$ -d. Este grafo terá e^+ arestas incidentes positivamente e uma aresta incidente negativamente. Estas singularidades não alteram β_i , $0 < i < n - 1$. A aresta incidente negativamente de G^+ será rotulada com $B_0^+ = B_{n-1}^+ = 1$ e $B_j^+ = \sum_{i=1}^{e^+} (\beta_j^+)_i$ com $j = \{1, \dots, n - 2\}$.

Inserção de ciclos

Figura 3.6: Explosão das arestas incidentes negativamente.

Um *ciclo elementar* é um par de (h_1^c, h_{n-1}^d) com uma aresta rotulada com $(1, 0, \dots, 0, 1)$ e outra aresta rotulada com $(1, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 1)$. Ver Figura 3.7.

Figura 3.7: Par (h_1^c, h_{n-1}^d)

Sem perda de generalidade, junte a G^- , κ ciclos elementares onde $(1, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 1) = (1, B_1^-, \dots, B_{n-2}^-, 1)$. Naturalmente isto pode também ser feito a G^+ . É claro que uma vez que κ ciclos são inseridos o número de vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 0-c é maior ou igual a κ . Analogamente, o número de vértices rotulados com $h_{n-1} = 1$ do tipo $(n-1)$ -d é maior ou igual a κ .

Logo, inserimos $h_1^c = \kappa + e^- - 1$ vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 0-c. Analogamente, inserimos $h_{n-1}^d = \kappa + e^+ - 1$ vértices rotulados com $h_{n-1} = 1$ do tipo $(n-1)$ -d. Isto é possível devido as duas últimas desigualdades em (2.20), que assegura que para este

vértice do tipo sela v ($h_0 = h_n = 0$):

$$\begin{cases} h_1 \geq -1 + e^- + \kappa \\ h_{n-1} > -1 + e^+ + \kappa \end{cases} \quad (3.1)$$

O último ciclo inserido (veja Figura 3.8) tem aresta incidente positivamente rotulada com

$$(1, B_1^-, B_2^-, \dots, B_{mid}^-, \dots, B_{n-2}^-, 1).$$

Figura 3.8: Arestas incidentes negativamente explodidas e ciclos inseridos.

A explosão linear fora das dimensões médias (Passo 1, ..., Passo ℓ)

Passo 1 - O ajuste de B_1 e por dualidade B_{n-2} .

O rótulo da aresta incidente positivamente a G^- é

$$\{1, B_1^-, B_2^-, \dots, B_{mid}^-, \dots, B_{n-2}^-, 1\}.$$

Para ajustar B_1^- e por dualidade B_{n-2}^- adicione um grafo linear L_1^- a G^- . Isto é feito inserindo h_1^d vértices $h_1 = 1$ do tipo 1-d a G^- . Logo, o rótulo sobre a aresta incidente

positivamente ao último vértice deste tipo inserido será $B_1^- + h_1^d$. Observe que a inserção de vértices $h_2 = 1$ do tipo 1-c decresce B_1^- . Assim, após a inserção de h_2^c vértices $h_2 = 1$ do tipo 1-c, $G^- \cup L_1^-$ é formado. O rótulo sobre a aresta incidente positivamente a $G^- \cup L_1^-$ será $B_1^- + h_1^d - h_2^c$. Por dualidade o rótulo B_{n-2}^- foi modificado para $B_{n-2}^- + h_1^d - h_2^c$.

O rótulo da aresta incidente negativamente a G^+ é

$$\{1, B_1^+, B_2^+, \dots, B_{mid}^+, \dots, B_{n-2}^+, 1\}.$$

Para ajustar B_1^+ e por dualidade B_{n-2}^+ adicione um grafo linear L_1^+ a G^+ . Isto é feito inserindo h_{n-1}^c vértices $h_{n-1} = 1$ do tipo $(n-2)$ -c. Após a inserção destes vértices o rótulo sobre a aresta incidente negativamente ao último vértice deste tipo será $B_{n-2}^+ + h_{n-1}^c$. Subseqüentemente, adicione h_{n-2}^d vértices $h_{n-2} = 1$ do tipo $(n-2)$ -d formando $G^+ \cup L_1^+$. Após a inserção destes vértices o rótulo sobre as arestas incidentes negativamente a $G^+ \cup L_1^+$ será $B_{n-2}^+ - h_{n-2}^d + h_{n-1}^c$. Por dualidade, o rótulo B_1^+ foi modificado para $B_1^+ - h_{n-2}^d + h_{n-1}^c$.

Como a inserção de qualquer outro tipo de vértice não altera o primeiro e o $(n-2)$ -ésimo número de Betti é necessário que

$$B_1 = B_1^- + h_1^d - h_2^c = B_1^+ - h_{n-2}^d + h_{n-1}^c. \quad (3.2)$$

Se a igualdade acima é verdadeira então por dualidade temos a seguinte desigualdade:

$$B_{n-2} = B_{n-2}^- + h_1^d - h_2^c = B_{n-2}^+ + h_{n-2}^d - h_{n-1}^c.$$

Assim os rótulos de B_1 e B_{n-2} foram ajustados. A aresta incidente positivamente a $G^- \cup L_1^-$ tem os seguintes rótulos:

$$\{1, B_1, B_2^-, \dots, B_\ell^-, \dots, B_{mid}^-, \dots, B_{n-\ell-1}^-, \dots, B_{n-3}^-, B_{n-2}, 1\}$$

e da aresta incidente negativamente a $G^+ \cup L_1^+$ tem os seguintes rótulos:

$$\{1, B_1, B_2^+, \dots, B_\ell^+, \dots, B_{mid}^+, \dots, B_{n-\ell-1}^+, \dots, B_{n-3}^+, B_{n-2}, 1\}$$

Este processo de ajustar B_ℓ^+ e $B_{n-\ell-1}^+$ será repetido em ordem crescente exceto nas dimensões médias. O processo geral será representado no próximo passo.

Passo ℓ - O ajuste de B_ℓ e por dualidade $B_{n-\ell-1}$

$G^- \cup L_1^-$ Figura 3.9: Explosão linear: L^- e L_1^+ .

Neste ponto, assumiremos por indução que os ajustes de B_j for $j < \ell$ e por dualidade B_{n-j-1} for $j < \ell$ foram feitos em ordem crescente para j . Logo, vários grafos lineares já foram adicionados a G^+ formando neste ponto um grafo $G^+ \cup \bigcup_{i=1}^{\ell-1} L_i^+$ cuja aresta incidente negativamente ao último vértice inserido está rotulada com

$$\{1, B_1, \dots, B_{\ell-1}, B_{\ell}^+, \dots, B_{mid}^+, \dots, B_{n-\ell-1}^+, B_{n-\ell}, \dots, B_{n-2}, 1\}.$$

Analogamente, vários grafos lineares foram adicionados a G^- formando neste ponto um grafo linear $G^- \cup \bigcup_{i=1}^{\ell-1} L_i^-$ cuja aresta incidente positivamente ao último vértice inserido está rotulada com

$$\{1, B_1, \dots, B_{\ell-1}, B_{\ell}^-, \dots, B_{mid}^-, \dots, B_{n-\ell-1}^-, B_{n-\ell}, \dots, B_{n-2}, 1\}.$$

Para ajustar B_{ℓ} e por dualidade $B_{n-\ell-1}$ insira h_{ℓ}^d vértices $h_{\ell} = 1$ do tipo ℓ -d a $G^- \cup \bigcup_{i=1}^{\ell-1} L_i^-$. Logo, o rótulo sobre a aresta incidente positivamente do último vértice deste tipo inserido será $B_{\ell}^- + h_{\ell}^d$. Observe que a inserção de vértices do tipo ℓ -c decresce B_{ℓ}^- . Assim,

após a inserção de $h_{\ell+1}^c$ vértices $h_{\ell+1} = 1$ do tipo ℓ -c o rótulo sobre a aresta incidente positivamente a $G^- \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} L_i^-$ será $B_{\ell}^- + h_{\ell}^d - h_{\ell+1}^c$. Por dualidade o rótulo $B_{n-\ell-1}^-$ foi modificado para $B_{n-\ell-1}^- + h_{\ell}^d - h_{\ell+1}^c$.

Analogamente, a inserção de $h_{n-\ell}^c$ vértices $h_{n-\ell} = 1$ do tipo $(n - \ell - 1)$ -c produzirá uma aresta incidente positivamente rotulada com $B_{n-\ell-1}^+ + h_{n-\ell}^c$. Subseqüentemente a inserção de $h_{n-\ell-1}^d$ vértices $h_{n-\ell-1} = 1$ do tipo $(n - \ell - 1)$ -d formará $G^+ \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} L_i^+$ e os rótulos sobre a aresta incidente negativamente é $B_{n-\ell-1}^+ - h_{n-\ell-1}^d + h_{n-\ell}^c$. Por dualidade o rótulo B_{ℓ}^+ foi modificado para $B_{\ell}^+ - h_{n-\ell-1}^d + h_{n-\ell}^c$.

Como a inserção de qualquer outro tipo de vértice não altera o ℓ -ésimo e o $(n - \ell - 1)$ -ésimo número de Betti é necessário que

$$B_{\ell} = B_{\ell}^- + h_{\ell}^d - h_{\ell+1}^c = B_{\ell}^+ - h_{n-\ell-1}^d + h_{n-\ell}^c. \quad (3.3)$$

Se a igualdade acima for verdadeira então por dualidade temos a seguinte igualdade:

$$B_{n-\ell-1} = B_{n-\ell-1}^- + h_{\ell}^d - h_{\ell+1}^c = B_{n-\ell-1}^+ - h_{n-\ell-1}^d + h_{n-\ell}^c.$$

Os rótulos de B_{ℓ} e $B_{n-\ell-1}$ para $0 < \ell < mid$ foram todos ajustados. Resta ajustar os rótulos da dimensão média. Isto será feito no próximo passo.

Explosão da dimensão média

Neste ponto os ajustes dos rótulos nas dimensões médias devem ser feitos. É necessário considerar o caso quando $n - 1$ é par e logo existe apenas um rótulo na dimensão média $B_{\frac{n-1}{2}}$ e o caso quando $n - 1$ é ímpar e existem dois rótulos na dimensão média.

Caso $n - 1$ par

Seja $n = 2i + 1$. Neste ponto existem dois grafos $G^- \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^-$ com aresta incidente positivamente rotulada com $\{1, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i^-, B_{i+1}, \dots, B_{2i-1}, 1\}$ e $G^+ \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^+$ com aresta incidente negativamente rotulada com $\{1, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i^+, B_{i+1}, \dots, B_{2i-1}, 1\}$.

Para ajustar B_i^- insira h_i^d vértices $h_i = 1$ do tipo i -d na aresta incidente positivamente a $G^- \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^-$. Logo, o rótulo sobre a aresta incidente positivamente ao último vértice inserido deste tipo é $B_i^- + 2h_i^d$.

Assim, após a inserção de h_{i+1}^c vértices $h_{i+1} = 1$ do tipo i -c na aresta incidente negativamente a $G^+ \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^+$, o rótulo sobre a aresta incidente negativamente do último vértice inserido deste tipo é $B_i^+ + 2h_{i+1}^c$.

Mais ainda, é necessário que

$$B_i = B_i^- + 2h_i^d = B_i^+ + 2h_{i+1}^c. \quad (3.4)$$

Como, os rótulos sobre a aresta incidente negativamente de um dos grafos agora coincide inteiramente com os rótulos sobre a aresta incidente positivamente do outro grafo, eles podem ser unidos formando um grafo conexo.

Sistema h_κ^{cd}

Logo, no final deste ajuste, (3.2), (3.3), (3.4), o seguinte sistema linear deve ser resolvido para $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d, \kappa)$, para que o algoritmo funcione.

$$\begin{cases} e^- - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d, \quad j = 1, \dots, 2i\} \\ e^+ - 1 - h_{2i}^d + \kappa = 0 \\ \begin{cases} -(B_1^+ - B_1^-) + h_1^d - h_2^c - h_{2i}^c + h_{2i-1}^d = 0 \\ -(B_2^+ - B_2^-) + h_2^d - h_3^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ \vdots \\ \frac{-(B_i^+ - B_i^-)}{2} + h_i^d - h_{i+1}^c = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

Caso $n - 1$ ímpar.

Seja $n = 2i$. Existem dois casos a considerar:

Caso 1: $n = 0 \pmod{4}$.

Observe que neste caso a variação do número de Betti na dimensão média B_{i-1}^- e seu dual B_i^- varia por 0 se o vértice é do tipo β -i ou por 1 caso contrário.

Insira h_{i-1}^d vértices $h_{i-1} = 1$ do tipo $(i-1)$ -d na aresta incidente negativamente a $G^- \cup \bigcup_{j=1}^{i-2} L_j^-$. Logo, o rótulo sobre a aresta incidente positivamente ao último vértice deste tipo será $B_{i-1}^- + h_{i-1}^d$. Subseqüentemente, insira h_i^c vértices $h_i = 1$ do tipo $(i-1)$ -c. O rótulo sobre a aresta incidente positivamente a $G^- \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^-$ será $B_{i-1}^- + h_{i-1}^d - h_i^c$. Por dualidade o rótulo B_i^- será modificado para $B_i^- + h_{i-1}^d - h_i^c$.

Analogamente, insira h_{i+1}^c vértices $h_{i+1} = 1$ do tipo i -c na aresta incidente negativamente a $G^+ \cup \bigcup_{j=1}^{i-2} L_j^+$. Logo, o rótulo sobre a aresta incidente negativamente ao último vértice deste tipo inserido será $B_i^+ + h_{i+1}^c$. Subseqüentemente, insira h_i^d vértices $h_i = 1$ do tipo i -d formando $G^+ \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j^+$ e o rótulo sobre a aresta incidente negativamente a este grafo será $B_i^+ - h_i^d + h_{i+1}^c$. Por dualidade o rótulo B_{i-1}^+ foi modificado para $B_{i-1}^- - h_i^d + h_{i+1}^c$.

Mais ainda, é necessário que

$$B_{i-1}^- + h_{i-1}^d - h_i^c = B_{i-1}^+ - h_i^d + h_{i+1}^c. \quad (3.6)$$

Por dualidade se temos a equação acima então a seguinte é verdadeira

$$B_i^- + h_{i-1}^d - h_i^c = B_i^+ - h_i^d + h_{i+1}^c.$$

Como os rótulos da aresta incidente negativamente a um dos grafos agora coincide inteiramente com os rótulos da aresta incidente positivamente ao outro grafo, estes podem se unidos para formar um grafo conexo.

Sistema h_κ^{cd}

Logo, no final deste ajuste, (3.2), (3.3), (3.6), ficamos com o seguinte sistema linear que deve ser resolvido para $(h_1^c, h_1^d, \dots, \beta^i, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d, \kappa)$ que o algoritmo funcione.

$$\left\{ \begin{array}{l} e^- - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d + \beta^i, \quad j = 1, \dots, 2i-1, \beta^i = 0 \text{ if } j \neq i\} \\ e^+ - 1 - h_{2i-1}^d + \kappa = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -(B_1^+ - B_1^-) + h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ -(B_2^+ - B_2^-) + h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = 0 \\ \vdots \\ -(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Caso 2: $n = 2 \bmod 4$.

Os ajustes neste caso são idênticos ao caso anterior exceto pelo fato que não existem vértices do tipo β -i.

Neste caso o sistema linear que deve ser resolvido para $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d, \kappa)$ é:

$$\begin{cases} e^- - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d, \quad j = 1, \dots, 2i-1\} \\ e^+ - 1 - h_{2i-1}^d + \kappa = 0 \\ \begin{cases} -(B_1^+ - B_1^-) + h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ -(B_2^+ - B_2^-) + h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = 0 \\ \vdots \\ -(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.8)$$

O vértice poderá ser explodido se o sistema h_κ^{cd} possui solução. As hipóteses do Teorema 3.0.1 afirmam que o vértice satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.10), (2.11) e sucessivamente até as desigualdades (2.12), (2.13) e (2.14) no caso ímpar, e desigualdades (2.15) no caso par. Mostramos na Seção 3.2 que o sistema h_κ^{cd} tem soluções inteiras não-negativas se e somente se as desigualdades de Poincaré-Hopf estiverem satisfeitas. Além disso, o número de explosões que um dado vértice pode ter ou equivalentemente o número de soluções não-negativas que o sistema h_κ^{cd} possui, é também determinado.

3.1.3 Algoritmo de Explosão para $n = 2$

Seja v um vértice do tipo sela generalizada com $\{h_0, h_1, h_2\}$ e com e^+ arestas incidentes positivamente e e^- arestas incidentes negativamente.

Como nos casos anteriores o primeiro passo no algoritmo realizará a explosão parcial como na Subseção 3.1.1 para obter um vértice do tipo sela com $\{h_0 = 0, h_1 - ((h_2 - 1) + (h_0 - 1)), h_2 = 0\}$. Esta parte do algoritmo usa (2.19) para garantir que $h_1 - ((h_2 - 1) + (h_0 - 1)) \geq (e^+ + e^-) \geq 0$. Nesta explosão parcial o número de arestas incidentes positivamente e negativamente aumentou por um.

O próximo passo será o que ajusta as arestas incidentes. Em outras palavras, usaremos $((e^+ + 1) - 1)$ vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 1-d e $((e^- + 1) - 1)$ vértices rotulados com $h_1 = 1$ do tipo 0-c. Este passo está garantido pela desigualdade de Poincaré-Hopf (2.19) que assegura que $h_1 - ((h_2 - 1) + (h_0 - 1) + (e^+ + e^-)) \geq 0$.

Seja $\kappa = h_1 - ((h_2 - 1) + (h_0 - 1) + (e^+ + e^-))$. Se $\kappa = 0$ a explosão foi completada. Se

$\kappa > 0$ a condição que requer que κ seja par¹ nos permite concluir a explosão com pares de $\{h_1^d, h_1^c\}$ formando $\frac{\kappa}{2}$ ciclos. Obviamente esta explosão é única e representa um fluxo sobre um bloco orientável de gênero $g_v = \frac{\kappa}{2}$ com e^+ componentes de bordo de entrada e e^- componentes de bordo de saída.

Figura 3.10: Par $\{h_1^d, h_1^c\}$

3.2 Soluções para os Sistemas Lineares

Existem quatro possibilidades para n , a saber $n = 0, 1, 2$ ou $3 \bmod 4$. A segunda e quarta possibilidades correspondem ao caso n ímpar. Este caso é considerado na Subseção 3.2.1. A primeira e terceira possibilidades são analisadas nas Subseções 3.2.2 e 3.2.3, respectivamente.

3.2.1 Caso n ímpar

O sistema linear

Assuma $n \geq 3$, $n = 2i + 1$. Queremos encontrar uma solução inteira não negativa do sistema linear

¹Se é ímpar a explosão pode ainda ser completada e representará um fluxo em um bloco não orientável.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{l}
1^{\text{a}} \text{ conj.} \\
(2i+2) \\
\text{linhas}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1 & 1 & 0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \boxed{0 & 0 & 0} & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{l}
1^{\text{a}} \text{ conj.} \\
i \text{ linhas}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \boxed{-1 & 0 & 0} & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{0 & 1 & -1} & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \boxed{0 & 0 & 0} & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \right.
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
\vdots \\
x_{4i-2} \\
x_{4i-1} \\
x_{4i}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\
d_2 \\
\theta_3 \\
d_4 \\
\vdots \\
\theta_4 \\
d_3 \\
\theta_2 \\
d_1 \\
\beta_1 \\
\beta_2 \\
\vdots \\
\beta_i
\end{pmatrix}
\quad (3.9)
\end{array}$$

onde θ_j e d_j , para $j = 1, \dots, i+1$, são inteiros positivos e β_j , para $j = 1, \dots, i$, são inteiros. As equações em (3.9) são divididas em dois conjuntos, o primeiro contendo $2i+2$ equações e o seguinte contendo i equações, respectivamente. As linhas da matriz dos coeficientes $\bar{A}$ de (3.9) e seu vetor do lado direito $\bar{b}$ herdam esta partição. As fórmulas para a j -ésima linha do primeiro grupo e o elemento correspondente do lado direito são

$$\bar{A}_j = \begin{cases} \mathbf{e}_1, & \text{se } j = 1 \\ \mathbf{e}_{2j-3} + \mathbf{e}_{2j-2}, & \text{se } 2 \leq j \leq 2i+1 \\ \mathbf{e}_{4i}, & \text{se } j = 2i+2 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_j = \begin{cases} \theta_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i+1, j \text{ ímpar} \\ d_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i+1, j \text{ par} \\ \theta_{2i+3-j}, & \text{se } i+1 < j \leq 2i+2, j \text{ ímpar} \\ d_{2i+3-j}, & \text{se } i+1 < j \leq 2i+2, j \text{ par} \end{cases},$$

onde e_j é o j -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{4i}$. No segundo grupo, a j -ésima linha e respectivo elemento do lado direito são como segue

$$\bar{A}_{2i+2+j} = \begin{cases} e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4i-2j} - e_{4i-2j+1}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-1 \\ e_{2i} - e_{2i+1}, & \text{se } j = i \end{cases}$$

e $\bar{b}_{2i+2+j} = \beta_j$, se $1 \leq j \leq i$.

Quatro variáveis em (3.9) têm valores inteiros únicos que dependem de certos elementos do lado direito. Logo, a condição de não negatividade da solução se traduz em um conjunto de desigualdades que estes sistemas devem satisfazer. Eliminando estas variáveis ficamos com um sistema reduzido nas variáveis restantes — as caixas destacadas em (3.9) contém a matriz de coeficientes deste sistema reduzido. Na Subseção 7 mostramos que a matriz de coeficientes deste novo sistema é totalmente unimodular². Este fato, juntamente com a integralidade do lado direito, implica que se o sistema tem uma solução não negativa então ele terá uma solução inteira não negativa. Um conjunto de restrições que é equivalente à existência de soluções não negativas para o sistema reduzido é construído na Subseção 7.

As seguintes equações podem ser usadas para eliminar algumas variáveis em (3.9):

1. A primeira equação implica que $x_1 = \theta_1$.
2. A primeira e a segunda equação implicam que $x_2 = d_2 - \theta_1$.
3. A $(2i+2)$ -ésima equação implica que $x_{4i} = d_1$.
4. A $(2i+2)$ -ésima e $(2i+1)$ -ésima equações implicam que $x_{4i-1} = \theta_2 - d_1$.

Portanto, usando o fato que os vetores θ , d e β são inteiros, as seguintes condições são necessárias e suficientes para a solução parcial $(x_1, x_2, x_{4i}, x_{4i-1})$ ser uma 4-upla inteira não negativa:

$$\begin{cases} d_2 - \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2 - d_1 \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Tendo tratado as variáveis x_1 , x_2 , x_{4i-1} e x_{4i} , passaremos a considerar o sistema reduzido anteriormente mencionado. Resta obter condições necessárias e suficientes para a existência de soluções inteiras não negativas deste último. Note, contudo, que quando

²Estas matrizes foram consideradas por Poincaré [18], 1900.

$n = 3$, ou, equivalentemente, $i = 1$, não existe sistema reduzido, já que o sistema original contém apenas quatro incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 , tendo, portanto, uma única solução.

Unimodularidade total da matriz dos coeficientes do sistema reduzido

Chegamos no sistema reduzido (3.11) abaixo após eliminar equações 1, 2, $2i + 1$ e $2i + 2$ e variáveis x_1, x_2, x_{4i-1} e x_{4i} em (3.9):

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \text{ conj.} \\ (2i-2) \\ \text{linhas} \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_3 \\ \vdots \\ x_{4i-2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ \theta_4 \\ d_3 \\ \bar{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_i \end{array} \right), \quad (3.11)$$

onde $\bar{\beta}_1 = \beta_1 - x_2 + x_{4i-1} = \beta_1 + \theta_1 + \theta_2 - d_1 - d_2$. Este sistema reduzido tem $3i - 2$ equações em $4i - 4$ incógnitas.

As linhas de $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{b}}$, a matriz de coeficientes e o lado direito do vetor de (3.11), herdam a partição estabelecida para para suas correspondentes em (3.9). Logo, o primeiro conjunto tem $2i - 2$ linhas/elementos (quatro equações foram eliminadas) enquanto o segundo conjunto mantém suas i linhas/elementos. As fórmulas para a j -ésima linha e elementos do lado direito devem ser atualizadas de modo a incorporar a eliminação de linhas e colunas (equações e variáveis). No primeiro grupo temos

$$\bar{\bar{A}}_j = e_{2j-1} + e_{2j}, \text{ se } 1 \leq j \leq 2i - 2$$

e

$$\bar{\bar{b}}_j = \begin{cases} \theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i - 1, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i - 1, j \text{ par} \\ \theta_{2i+1-j}, & \text{se } i - 1 < j \leq 2i - 2, j \text{ ímpar} \\ d_{2i+1-j}, & \text{se } i - 1 < j \leq 2i - 2, j \text{ par} \end{cases},$$

e, no segundo conjunto,

$$\bar{\bar{A}}_{2i-2+j} = \begin{cases} -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{4i-4}, & \text{se } j = 1 \\ \mathbf{e}_{2j-2} - \mathbf{e}_{2j-1} + \mathbf{e}_{4i-2-2j} - \mathbf{e}_{4i-1-2j}, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1, \\ \mathbf{e}_{2i-2} - \mathbf{e}_{2i-1}, & \text{se } j = i \end{cases}$$

enquanto que $\bar{\bar{b}}_{2i-1} = \bar{\beta}_1$ e $\bar{\bar{b}}_{2i-2+j} = \beta_j$, para $j = 2, \dots, i$. Note que $\mathbf{e}_\ell$ é agora o ℓ -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{4i-4}$. O seguinte diagrama em blocos ajuda a compreender a estrutura de $\bar{\bar{A}}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & & \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ conj.} \\ (2i-2) \text{ li-} \\ \text{nhas} \\ \\ 2^\circ \text{ conj.} \\ i \text{ linhas} \end{array} \right.$$

O primeiro conjunto de linhas forma uma matriz diagonal em blocos enquanto no segundo conjunto existem dois blocos por linha, posicionados simetricamente com relação ao meio.

Lema 3.2.1 Cada coluna de $\bar{\bar{A}}$ contém exatamente dois coeficientes não nulos, um no primeiro conjunto de linhas e o outro no segundo conjunto.

Demonstração: Cada entrada em $\bar{\bar{A}}$ pertence a $\{0, 1, -1\}$. Assim é suficiente mostrar que cada coluna de $\bar{\bar{A}}$, a matriz obtida de $\bar{\bar{A}}$ substituindo cada entrada pelo seu valor absoluto, contém dois 1's, um em cada conjunto de linhas.

Para tanto calculamos a soma das linhas no primeiro e segundo conjunto de $\tilde{A}$:

1. Somando as linhas no primeiro conjunto, isto é, linhas 1 a $2i - 2$ de $\tilde{A}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{2i-2} \tilde{A}_j &= \sum_{j=1}^{2i-2} \bar{\tilde{A}}_j = \sum_{j=1}^{2i-2} (e_{2j-1} + e_{2j}) \\
 &= \sum_{\substack{\ell \in \{1, \dots, 4i-4\} \\ \ell \text{ ímpar}}} e_\ell + \sum_{\substack{\ell \in \{1, \dots, 4i-4\} \\ \ell \text{ par}}} e_\ell \\
 &= \sum_{\ell=1}^{4i-4} e_\ell = \mathbf{1}_{4i-4},
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{1}_m$ denota o vetor de uns em $\mathbb{R}^m$. Portanto cada coluna de $\tilde{A}$ contém exatamente uma entrada não nula no primeiro conjunto de linhas, ou seja, 1.

2. Somando as i linhas no segundo conjunto:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{2i-2+j} &= e_1 + e_{4i-4} + \\
 &\quad \sum_{j=2}^{i-1} (e_{2j-2} + e_{2j-1} + e_{4i-2-2j} + e_{4i-1-2j}) \\
 &\quad + e_{2i-2} + e_{2i-1} \\
 &= e_1 + e_{4i-4} + \sum_{\substack{\ell \in \{2, \dots, 2i-3\} \\ \ell \text{ par}}} e_\ell + \sum_{\substack{\ell \in \{2, \dots, 2i-3\} \\ \ell \text{ ímpar}}} e_\ell \\
 &\quad + \sum_{\substack{\ell \in \{1, \dots, 2i-4\} \\ \ell \text{ par}}} e_{4i-4-\ell} + \sum_{\substack{\ell \in \{1, \dots, 2i-4\} \\ \ell \text{ ímpar}}} e_{4i-4-\ell} + e_{2i-2} + e_{2i-1} \\
 &= e_1 + e_{4i-4} + \sum_{\ell=2}^{2i-3} e_\ell + \sum_{\ell=2i}^{4i-5} e_\ell + e_{2i-2} + e_{2i-1} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{4i-4} e_\ell = \mathbf{1}_{4i-4}.
 \end{aligned}$$

Isso implica que cada coluna de $\tilde{A}$ contém exatamente uma entrada não nula, ou seja, 1, no segundo conjunto de linhas.

Os dois itens anteriores concluem a demonstração. $\blacksquare$

Multiplicando por -1 as equações ímpares em (3.11), este sistema é transformado no sistema equivalente (3.12) abaixo:

$$\begin{array}{l} \text{1}^{\text{o}} \text{ conj.} \\ (2i-2) \\ \text{linhas} \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} x_3 \\ \vdots \\ x_{4i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ -\theta_4 \\ d_3 \\ -\tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ (-1)^i \beta_i \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A matriz de coeficientes A de (3.12) e seu vetor do lado direito b herdam a partição estabelecida para os anteriores no sistema (3.9) e (3.11). As novas fórmulas para a j -ésima linha e o elemento do lado direito no primeiro conjunto são:

$$A_j = (-1)^j (e_{2j-1} - e_{2j}), \text{ se } 1 \leq j \leq 2i-2$$

e

$$b_j = \begin{cases} -\theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-1, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-1, j \text{ par} \\ -\theta_{2i+1-j}, & \text{se } i-1 < j \leq 2i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{2i+1-j}, & \text{se } i-1 < j \leq 2i-2, j \text{ par} \end{cases},$$

e no segundo conjunto temos:

$$A_{2i-2+j} = \begin{cases} -(-e_1 + e_{4i-4}), & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j (e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-2-2j} - e_{4i-1-2j}), & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \\ (-1)^i (e_{2i-2} - e_{2i-1}), & \text{se } j = i \end{cases}.$$

$$b_{2i-2+j} = \begin{cases} -\tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j \beta_j, & \text{se } 2 \leq j \leq i \end{cases}$$

Teorema 3.2.2 *Cada coluna de A contém precisamente duas entradas não nulas: 1 e -1 .*

Demonstração: O Lema 3.2.1 implica que A tem duas entradas não nulas de valor absoluto 1 por coluna. Para concluir que este par é 1, -1 , é suficiente mostrar que somando todas as linhas produzimos o vetor nulo. Calculamos separadamente as somas das linhas no primeiro e segundo conjunto:

$$\sum_{j=1}^{2i-2} A_j = \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^j (\mathbf{e}_{2j-1} + \mathbf{e}_{2j}) \quad (3.13)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i A_{2i-2+j} &= \sum_{j=1}^i (-1)^j \bar{A}_{2i-2+j} \\ &= -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{4i-4}) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^j (\mathbf{e}_{2(j-1)} + \mathbf{e}_{2(j-1)+1} + \mathbf{e}_{4i-4-2(j-1)} + \mathbf{e}_{4i-4-2(j-1)+1}) \\ &\quad + (-1)^i (\mathbf{e}_{2i-2} + \mathbf{e}_{2i-1}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{i-2} (-1)^{\ell+1} (\mathbf{e}_{2\ell} + \mathbf{e}_{4i-4-2\ell}) + (-1)^i (\mathbf{e}_{2i-2} + \mathbf{e}_{4i-4}) \\ &\quad + \mathbf{e}_1 + (-1)^{i+1} \mathbf{e}_{2i-1} + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} (\mathbf{e}_{2j-1} + \mathbf{e}_{4i-4-2(j-1)+1}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{i-2} (-1)^{\ell+1} \mathbf{e}_{2\ell} + (-1)^i \mathbf{e}_{2i-2} + \sum_{k=i}^{2i-3} (-1)^{k+1} \mathbf{e}_{2k} + \mathbf{e}_{4i-4} \\ &\quad + \mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} \mathbf{e}_{2j-1} + (-1)^{i+1} \mathbf{e}_{2i-1} + \sum_{\ell=i+1}^{2i-2} (-1)^{\ell+1} \mathbf{e}_{2\ell-1} \\ &= \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1} \mathbf{e}_{2j} + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1} \mathbf{e}_{2j-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

As equações (3.13) e (3.14) implicam que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3i-2} A_j &= \sum_{j=1}^{2i-2} A_j + \sum_{j=1}^i A_{2i-2+j} \\ &= \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^j (\mathbf{e}_{2j-1} + \mathbf{e}_{2j}) + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1} (\mathbf{e}_{2j} + \mathbf{e}_{2j-1}) \\ &= \mathbf{0}_{4i-4}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{0}_m$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^m$. Logo a soma das linhas de A é o vetor nulo de $\mathbb{R}^{4i-4}$, o que implica que as duas entradas não nulas de cada coluna de A são 1 e -1 . ■

O Teorema 3.2.2 implica, ver [21, p. 274], que A (e assim também $\overline{A}$) é uma matriz totalmente unimodular. Além disso, A tem a estrutura da matriz de incidência de um digrafo, o que pode ser usado ao explorar o conjunto solução do sistema linear.

Soluções do sistema reduzido

Segue do Teorema 3.2.2 que A é totalmente unimodular e pode ser interpretada como a matriz de incidência de um digrafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, com conjunto de nós $\mathcal{N}$ e conjunto de arcos (direcionados) $\mathcal{A}$. Se as entradas não nulas 1 e -1 da coluna j pertencem às linhas k e ℓ , respectivamente, então o arco correspondente sai do nó k e entra no nó ℓ . A variável x_{j+2} associada à coluna j é interpretada como o fluxo no arco j (partindo do nó k e entrando no nó ℓ), logo a i -ésima equação pode ser lida como

$$\text{fluxo que entra no nó } i - \text{fluxo que sai do nó } i = b_i,$$

representando uma equação de equilíbrio de fluxo. Um valor positivo (resp., negativo) para b_i é interpretado como a demanda (resp., $-\text{suprimento}$) do nó i .

Procuramos um fluxo inteiro não negativo que satisfaça as equações de equilíbrio. Como A é totalmente unimodular e b é inteiro, é bem conhecido—ver, por exemplo, [21, p. 266–267]—que a existência de um fluxo não negativo implica na existência de um fluxo inteiro não negativo.

A estrutura de $\mathcal{G}$ torna possível traduzir a existência de fluxo não negativo em um conjunto de restrições envolvendo o vetor demanda/suprimento b . A seguinte condição necessária para a existência de soluções para (3.12) é uma simples consequência do Teorema 3.2.2, e tem um enunciado natural em termos do modelo de fluxo descrito: suprimento deve ser igual a demanda. Como a soma das linhas de A é igual ao vetor nulo em

$\mathbb{R}^{4i-4}$, a soma dos elementos de b também deve ser zero:

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{j=3}^{i+1} \theta_j + \sum_{j=3}^{i+1} d_j + \sum_{j=1}^i b_{2i-2+j} \\
&= -\sum_{j=3}^{i+1} \theta_j + \sum_{j=3}^{i+1} d_j - \tilde{\beta}_1 + \sum_{j=2}^i (-1)^j \beta_j \\
&= -\sum_{j=3}^{i+1} \theta_j + \sum_{j=3}^{i+1} d_j - (\beta_1 + \theta_1 + \theta_2 - d_1 - d_2) + \sum_{j=2}^i (-1)^j \beta_j \\
&= -\sum_{j=1}^{i+1} \theta_j + \sum_{j=1}^{i+1} d_j + \sum_{j=1}^i (-1)^j \beta_j.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Teorema 3.2.3 *O conjunto $\mathcal{A}$ pode ser particionado em $i-1$ subconjuntos, cada um correspondendo a um ciclo não direcionado de $\mathcal{G}$. O j -ésimo ciclo é dado pela seguinte seqüência de nós e arcos:*

Se j é ímpar:

$$\begin{aligned}
&\{j, (j, 2i-2+j), 2i-2+j, (2i-2+j, 2i-1-j), \\
&2i-1-j, (2i-1+j, 2i-1-j), 2i-1+j, (j, 2i-1+j), j\}
\end{aligned}$$

Se j é par:

$$\begin{aligned}
&\{2i-1-j, (2i-1-j, 2i-2+j), 2i-2+j, (2i-2+j, j), \\
&j, (2i-1+j, j), 2i-1+j, (2i-1-j, 2i-1+j), 2i-1-j\}
\end{aligned}$$

Demonstração: Como cada ciclo tem quatro arcos, é suficiente mostrar que o digrafo contém os ciclos descritos e que eles são arco-disjuntos, já que então a união destes ciclos terá $4(i-1)$ arcos, que é precisamente a cardinalidade de $\mathcal{A}$.

Denotando por $\mathcal{N}_j$ o conjunto de nós $\{j, 2i-1-j, 2i-2+j, 2i-1+j\}$, as linhas na matriz aumentada $A|b$ associada com nós em $\mathcal{N}_j$ são:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_j & b_j \\ \hline A_{2i-1-j} & b_{2i-1-j} \\ A_{2i-2+j} & b_{2i-2+j} \\ A_{2i-1+j} & b_{2i-1+j} \end{array} \right), \tag{3.16}$$

onde os elementos $b_j, b_{2i-1-j}, b_{2i-2+j}$ e b_{2i-1+j} são dados pela Tabela 3.1.

	$1 \leq j \leq i-1$	
	j odd	j par
b_j	$-\theta_{j+2}$	d_{j+2}
b_{2i-1-j}	d_{j+2}	$-\theta_{j+2}$
b_{2i-2+j}	$-\tilde{\beta}_1$, se $j = 1$ $-\beta_j$, se $j \geq 3$	β_j
b_{2i-1+j}	β_{j+1}	$-\beta_{j+1}$

Tabela 3.1: Demanda/suprimento constantes para nós em $\mathcal{N}_j$

Portanto, os elementos do lado direito associados com nós em $\mathcal{N}_j$, independentemente da paridade de j , são

$$-\theta_{j+2}, (-1)^j \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ \beta_j, & \text{se } 1 < j \leq i-1 \end{array} \right\} d_{j+2}, (-1)^{j+1} \beta_{j+1},$$

e a interseção dos subgrafos $\mathcal{G}_j$ e $\mathcal{G}_\ell$ induzidos respectivamente por $\mathcal{N}_j$ e $\mathcal{N}_\ell$, para $1 < j, \ell \leq i-1$, é:

$$\mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_\ell = \begin{cases} \{2i-1+j\}, & \text{se } \ell = j+1 \\ \{2i-2+j\}, & \text{se } \ell = j-1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Isto é, a interseção contém no máximo um nó, o que significa que os subgrafos induzidos $\mathcal{G}_j$ e $\mathcal{G}_\ell$ são arc0-disjuntos. Resta mostrar que $\mathcal{G}_j$ consiste do ciclo $\mathcal{C}_j$ da Figura 3.11 abaixo.

Obs.: o número escrito dentro do nó é o elemento do lado direito da equação associada.

Figura 3.11: Ciclo $\mathcal{C}_j$.

Para $j = 1$ a submatriz em (3.16) se reduz a

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & -\theta_3 \\ A_{2i-2} & d_3 \\ A_{2i-1} & -\tilde{\beta}_1 \\ A_{2i} & \beta_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -e_1 - e_2 & -\theta_3 \\ e_{4i-5} + e_{4i-4} & d_3 \\ e_1 - e_{4i-4} & -\tilde{\beta}_1 \\ e_2 - e_3 + e_{4i-6} - e_{4i-5} & \beta_2 \end{array} \right) \quad (3.17)$$

Os arcos em $\mathcal{G}_1$ são aqueles que têm ambas as extremidades em $\mathcal{N}_1$. Assim a matriz de incidência de $\mathcal{G}_1$ contém as colunas de (3.17) que tem seus dois elementos não nulos na submatriz (3.17):

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4i-5 & 4i-4 & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\tilde{\beta}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \beta_2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 1 \\ 2i-2 \\ 2i-1 \\ 2i \end{array} \end{array}$$

o que implica que $\mathcal{G}_1$ consiste dos ciclos não direcionados $\mathcal{C}_1$

$$\{1, (1, 2i-1), 2i-1, (2i-1, 2i-2), 2i-2, (2i, 2i-2), 2i, (1, 2i), 1\},$$

de acordo com o enunciado do teorema.

Se $2 \leq j < i-1$, a submatriz em (3.16) é, usando o fato que $2i$ é par:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}) & b_j \\ (-1)^{2i-1-j}(e_{4i-3-2j} + e_{4i-2-2j}) & b_{2i-1-j} \\ (-1)^{2i-2+j}(e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-2-2j} - e_{4i-1-2j}) & (-1)^{2i-2+j}\beta_j \\ (-1)^{2i-1+j}(e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j}) & (-1)^{2i-1+j}\beta_{j+1} \end{array} \right) \\ &= (-1)^j \left(\begin{array}{c|c} e_{2j-1} + e_{2j} & (-1)^j b_j \\ -e_{4i-3-2j} - e_{4i-2-2j} & (-1)^j b_{2i-1-j} \\ e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-2-2j} - e_{4i-1-2j} & \beta_j \\ -e_{2j} + e_{2j+1} - e_{4i-4-2j} + e_{4i-3-2j} & -\beta_{j+1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Isto implica que a matriz de incidência de $\mathcal{G}_j$ é:

$$(-1)^j \begin{pmatrix} 2j-1 & 2j & 4i-3-2j & 4i-2-2j \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} (-1)^j b_j \\ (-1)^j b_{2i-1-j} \\ \beta_j \\ -\beta_{j+1} \end{array} \end{pmatrix} \begin{array}{l} j \\ 2i-1-j \\ 2i-2+j \\ 2i-1+j \end{array}$$

Desta matriz de incidência e dos valores de b_j e b_{2i-1-j} dados na Tabela 3.1, concluimos que $\mathcal{G}_j$ é o ciclo $\mathcal{C}_j$ descrito na Figura 3.11.

Finalmente, se $j = i - 1$, a submatriz em (3.16) tem os valores

$$\begin{pmatrix} (-1)^{i-1}(e_{2i-3} + e_{2i-1}) & b_{i-1} \\ (-1)^i(e_{2i-1} + e_{2i}) & b_i \\ (-1)^{3i-3}(e_{2i-4} - e_{2i-3} + e_{2i} - e_{2i+1}) & (-1)^{3i-3}\beta_{i-1} \\ (-1)^{3i-2}(e_{2i-2} - e_{2i-1}) & (-1)^{2i-1+j}\beta_i \end{pmatrix} \\ = (-1)^{i-1} \begin{pmatrix} e_{2i-3} + e_{2i-2} & (-1)^{i-1}b_{i-1} \\ -e_{2i-1} - e_{2i} & (-1)^{i-1}b_i \\ e_{2i-4} - e_{2i-3} + e_{2i} - e_{2i+1} & \beta_{i-1} \\ -e_{2i-2} + e_{2i-1} & -\beta_i \end{pmatrix}.$$

O subgrafo $\mathcal{G}_{i-1}$ tem, portanto, matriz de incidência

$$(-1)^{i-1} \begin{pmatrix} 2i-3 & 2i-2 & 2i-1 & 2i \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} (-1)^{i-1}b_{i-1} \\ (-1)^{i-1}b_i \\ \beta_{i-1} \\ -\beta_i \end{array} \end{pmatrix} \begin{array}{l} i-1 \\ i \\ 3i-3 \\ 3i-2 \end{array}.$$

Esta matriz e a Tabela 3.1 implicam que $\mathcal{G}_{i-1}$ consiste de $\mathcal{C}_{i-1}$, como desejado. ■

O Teorema 3.2.3 implica que o digrafo $\mathcal{G}$ tem a estrutura descrita na Figura 3.12. Isto é, o grafo obtido removendo a orientação dos arcos de $\mathcal{G}$ pode ser decomposto em $i - 1$ componentes biconexas, onde cada uma delas é um ciclo com quatro nós e arcos. Nós com índices $2i$, $2i + 1$, $\dots$, $3i - 3$ são nós de corte, já que a remoção de qualquer deles desconecta o grafo. Note que estes nós correspondem a linhas no segundo conjunto da

partição. De fato cada linhas no segundo conjunto está associada a um nó de corte, exceto a primeira e a última.

Figura 3.12: Estrutura de digrafo $\mathcal{G}$.

Teorema 3.2.4 *Se a equação (3.15) se mantém, o sistema (3.12) é equivalente a um conjunto de $i - 1$ sistemas lineares independentes. O j -ésimo sistema é dado por*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_{j+2} \\ d_{j+2} \\ \hat{\beta}_j \\ -\hat{\beta}_j + \theta_{j+2} - d_{j+2} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde

$$\hat{\beta}_j = \sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 1, \dots, i - 1, \quad (3.19)$$

e

$$w^j = \begin{cases} (x_{2j+1}, x_{2j+2}, x_{4i-1-2j}, x_{4i-2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i - 1 \text{ é ímpar} \\ (x_{4i-2j}, x_{4i-1-2j}, x_{2j+2}, x_{2j+1}), & \text{se } 1 \leq j \leq i - 1 \text{ é par} \end{cases}. \quad (3.20)$$

Demonstração: A decomposição de um problema de fluxo em um grafo em um conjunto equivalente de problemas nas componentes biconexas do grafo é um resultado bem conhecido, como mencionado em [14]. Esta decomposição envolve o conceito da árvore de corte do grafo ([22, p. 90–92]). É talvez mais fácil verificar esta equivalência diretamente por meio de uma simples prova de indução.

Considere as equações 1, $2i - 2$ e $2i - 1$ de (3.12):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_{4i-3} \\ x_{4i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_3 \\ -\tilde{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

Somando estas equações à equação $2i$ obtemos

$$\begin{aligned} -x_5 + x_{4i-4} &= \beta_2 - \tilde{\beta}_1 - \theta_3 + d_3 \\ &= \beta_2 - (\beta_1 + \theta_1 + \theta_2 - d_1 - d_2) - \theta_3 + d_3 \\ &= \beta_2 - \beta_1 - \sum_{\ell=1}^3 (\theta_\ell - d_\ell) = \hat{\beta}_2 \end{aligned}$$

Trocando a equação $2i$ de (3.12) com a equação acima conseguimos um sistema equivalente, já que somente operações elementares de linha foram executadas. No novo sistema, as variáveis x_3 , x_4 , x_{4i-3} e x_{4i-2} aparecem apenas nas equações 1, $2i - 2$, $2i - 1$ e estas equações não contêm nenhuma outra variável. Este novo sistema pode, portanto, ser decomposto no par de sistemas lineares independentes:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_{4i-3} \\ x_{4i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_3 \\ -\tilde{\beta}_1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_{2i-3} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{A}_{2i} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{3i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ \vdots \\ x_{4i-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ \vdots \\ -\theta_4 \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\beta}_2 \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{3i-2} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

onde a linha $\tilde{A}_j$ é obtida de A_j eliminando quatro colunas: as duas primeiras e duas últimas. Como A é a matriz de incidência do digrafo descrito na Figura 3.12 e as colunas

e linhas eliminadas estão associadas aos arcos e nós das componentes biconexas $\mathcal{C}_1$, com exceção do nó de corte, a matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_{2i-3} \\ \tilde{A}_{2i} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{3i-2} \end{pmatrix}$$

é a matriz de incidência do digrafo dado pela união das componentes restantes: $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{i-1}$.

Além disso, usando o fato que $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$, temos que o sistema (3.23) abaixo é equivalente ao sistema (3.21), já que ele é obtido do segundo anexando uma equação redundante:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_{4i-3} \\ x_{4i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_3 \\ \hat{\beta}_1 \\ -\hat{\beta}_1 + \theta_3 - d_3 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Note que (3.23) é o sistema (3.18), para $i = 1$, e o vetor de incógnitas é w^1 .

Suponha por indução que, após k passos análogos, um conjunto de $k + 1$ sistemas, equivalente a (3.12), foi obtido, como segue: k sistemas do tipo (3.18), para $j = 1, \dots, k$, e o sistema

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{2i-2-k} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{A}_{2i-1+k} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{3i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{3+2k} \\ \vdots \\ x_{4i-2-2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ \vdots \\ b_{2i-2-k} \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\beta}_{k+1} \\ b_{2i+k} \\ \vdots \\ b_{3i-2} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

cujas matrizes de coeficientes $\tilde{A}$ é a matriz de incidência do digrafo dado por $\cup_{j=k+1}^{i-1} \mathcal{C}_j$, obtido eliminando de A as colunas e linhas associadas com os arcos e nós em $\cup_{j=1}^k \mathcal{C}_j$, com exceção do nó de corte $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1}$.

As equações associadas com os nós em $\mathcal{C}_{k+1}$, com exceção do nó de corte $\mathcal{C}_{k+1} \cap \mathcal{C}_{k+2}$, são

$$(-1)^k \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k+3} \\ x_{2k+4} \\ x_{4i-3-2k} \\ x_{4i-2-2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ b_{2i-2-k} \\ \hat{\beta}_{k+1} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

A equação associada com o nó $\mathcal{C}_{k+1} \cap \mathcal{C}_{k+2}$ é

$$(-1)^k (x_{2k+4} - x_{2k+5} + x_{4i-4-2k} - x_{4i-3-2k}) = b_{2i+k} = (-1)^{k+2} \beta_{k+2} \quad (3.26)$$

Somando as equações (3.25) e a equação (3.26), e usando a Tabela 3.1 temos

$$\begin{aligned} (-1)^k (-x_{2k+5} + x_{4i-4-2k}) &= (-1)^{k+2} \beta_{k+2} - \theta_{k+3} + d_{k+3} + \hat{\beta}_{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \beta_j - \sum_{j=1}^{k+3} (\theta_j - d_j) \\ &= \hat{\beta}_{k+2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Logo (3.24) é equivalente ao sistema obtido substituindo a equação (3.26) pela equação (3.27). Mas esta substituição produz um sistema que pode novamente ser dividido em dois: um do tipo (3.18) para $j = k+1$ (no vetor de incógnitas w^{k+1}) e o outro cuja matriz de coeficiente é a matriz de incidência do digrafo $\cup_{j=k+2}^{i-1} \mathcal{C}_j$ e cujo vetor do lado direito é dado por $b_{k+2}, \dots, b_{2i-3-k}, \hat{\beta}_{k+2}, b_{2i+1+k}, \dots, b_{3i-2}$. Portanto, por indução, isto implica que (3.12) é equivalente a um conjunto de $(i-1)$ sistemas: sistemas $(i-2)$ são do tipo (3.18), para $j = 1, \dots, i-2$, e o $(i-1)$ -ésimo sistema é

$$(-1)^i \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \\ x_{2i+1} \\ x_{2i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i-1} \\ b_i \\ \hat{\beta}_{i-1} \\ (-1)^i \beta_i \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Usando Tabela 3.1, somando os três primeiros elementos do lado direito de (3.28) obtemos

$$\begin{aligned} b_{i-1} + b_i + \hat{\beta}_{i-1} &= -\theta_{i+1} + d_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \beta_j - \sum_{j=1}^i (\theta_j - d_j) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \beta_j - \sum_{j=1}^{i+1} (\theta_j - d_j) \end{aligned}$$

Como assumimos a equação (3.15), isto é, $(-1)^i \beta_i = -(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \beta_j - \sum_{j=1}^{i+1} (\theta_j - d_j))$, a Tabela 3.1 e a equação (3.15) implicam que (3.28) é também do tipo (3.18) para $j = i - 1$.

■

O Teorema 3.2.4 implica que a solução do sistema original (3.9) é o produto cartesiano de 4-uplas do tipo $q_j = (x_{2j-1}, x_{2j}, x_{4i+1-2j}, x_{4i+2-2j})$, para $j = 1, \dots, i$. Na Subseção 3.2.1 vimos que q_1 tem um único valor, determinado pelas equações 1, 2, $2i + 2$ e $2i + 1$ de (3.9). A 4-upla q_j , para $j = 2, \dots, i$, é uma reordenação de um vetor w que deve satisfazer um sistema linear do tipo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \delta \\ \xi \\ -\xi + t - \delta \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Lema 3.2.5 *A solução geral do sistema (3.29) é dada por*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ t - \xi \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Substituindo, pode ser facilmente verificado que $(\xi, t - \xi, \delta, 0)$ é uma solução de (3.29) e que $(1, -1, -1, 1)$ é uma solução da versão homogênea de (3.29). Como o espaço nulo da matriz de coeficientes de (3.29) tem dimensão 1 e a diferença entre duas soluções é um vetor deste espaço nulo, a fórmula (3.30) descreve todas as soluções de (3.29). ■

Lema 3.2.6 *Se t, ξ e δ são inteiros, e t, δ são não negativos, o sistema (3.29) tem uma solução inteira não negativa se, e somente se, as seguintes desigualdades são válidas*

$$\begin{cases} \delta & \geq & -\xi \\ t & \geq & \xi \end{cases} \quad (3.31)$$

Além disso, o número de soluções inteiras não negativas de (3.29) é igual ao número de inteiros no intervalo

$$[\max\{0, -\xi\}, \min\{t - \xi, \delta\}].$$

Demonstração: A matriz de coeficientes de (3.29) é uma submatriz de A e assim é totalmente unimodular. Seu lado direito é inteiro. Estes fatos implicam que o sistema (3.29) tem solução inteira não negativa se, e somente se, ela tem uma solução não negativa. O Lema 3.2.5 implica que (3.29) tem uma solução não negativa se, e somente se, as desigualdades (3.32) são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \xi + \alpha &\geq 0 \\ t - \xi - \alpha &\geq 0 \\ \delta - \alpha &\geq 0 \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Aplicando o método de Fourier-Motzkin (ver [1, p. 57–62]) para eliminar a variável α em (3.32), as seguintes desigualdades são obtidas:

$$\begin{aligned} t - \xi &\geq \alpha \\ \delta &\geq \alpha \\ \alpha &\geq -\xi \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \min\{t - \xi, \delta\} \geq \alpha \geq \max\{0, -\xi\}.$$

O Lema 3.2.5 estabelece que a solução geral para (3.29) é dada por $(\xi, t - \xi, \delta, 0) + \alpha(1, -1, -1, 1)$. Portanto, para cada valor inteiro α no intervalo $[\max\{0, -\xi\}, \min\{t - \xi, \delta\}]$ existe uma solução inteira não negativa de (3.29).

Finalmente, o intervalo $[\max\{0, -\xi\}, \min\{t - \xi, \delta\}]$ é não vazio se, e somente se, as desigualdades abaixo são satisfeitas:

$$t - \xi \geq 0 \tag{3.33}$$

$$\delta \geq 0 \tag{3.34}$$

$$t - \xi \geq -\xi \tag{3.35}$$

$$\delta \geq -\xi \tag{3.36}$$

As desigualdades (3.34) e (3.35) são satisfeitas, já que δ e t são assumidos não negativos. As duas restantes constituem o sistema (3.31). ■

Reunimos abaixo as condições necessárias e suficientes para a existência de soluções inteiras não negativas de (3.9)

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2 \geq \theta_1 \\ \theta_2 \geq d_1 \\ \sum_{j=1}^i (-1)^j \beta_j - \sum_{j=1}^{i+1} (\theta_j - d_j) = 0 \\ \theta_{j+2} \geq \sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ d_{j+2} \geq - \left(\sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell) \right), \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

O número de soluções é dado pelo produto $\prod_{j=1}^{i-1} n_j$, onde n_j é o número de inteiros no intervalo $[\max\{0, -\hat{\beta}_j\}, \min\{\theta_{j+2} - \hat{\beta}_j, d_{j+2}\}]$ e $\hat{\beta}_j = \sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell)$.

3.2.2 Caso $n = 0 \pmod{4}$

O sistema linear

Seja $4 \leq n = 2i$ um inteiro múltiplo de 4 (ou, equivalentemente, $2 \leq i$ é par). Queremos encontrar uma solução inteira não negativa do sistema linear:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
1^{\text{a}} \text{ conj.} \\
(2i+1) \\
\text{linhas}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \right\}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
\vdots \\
x_{2i-1} \\
y \\
x_{2i} \\
\vdots \\
x_{4i-4} \\
x_{4i-3} \\
x_{4i-2}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\
d_2 \\
\theta_3 \\
d_4 \\
\vdots \\
d_i \\
\Theta \\
\theta_i \\
\vdots \\
\theta_4 \\
d_3 \\
\theta_2 \\
d_1 \\
\beta_1 \\
\beta_2 \\
\vdots \\
\beta_{i-1}
\end{pmatrix},
\end{array}
\begin{array}{l}
2^{\text{a}} \text{ conj.} \\
i-1 \text{ linhas}
\end{array}
\end{array}
\tag{3.38}$$

onde Θ , θ_j e d_j , para $j = 1, \dots, i$, são inteiros positivos e β_j , para $j = 1, \dots, i-1$, são inteiros. O sistema tem $3i$ equações e $4i-1$ incógnitas, matriz de coeficientes $\bar{A}$ e vetor do lado direito $\bar{b}$. As equações, linhas de $\bar{A}$ e $\bar{b}$ são particionados em dois conjuntos, contendo o primeiro $2i+1$ equações e o seguinte $i-1$. As fórmulas para a j -ésima linha do primeiro grupo e o elemento correspondente do lado direito são

$$\bar{A}_j = \begin{cases} e_1, & \text{se } j = 1 \\ e_{2j-3} + e_{2j-2}, & \text{se } 2 \leq j \leq i \\ e_{2i-1} + e_{2i} + e_{2i+1}, & \text{se } j = i+1 \\ e_{2j-2} + e_{2j-1}, & \text{se } i+2 \leq j \leq 2i \\ e_{4i-1}, & \text{se } j = 2i+1 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_j = \begin{cases} \theta_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i, j \text{ ímpar} \\ d_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i, j \text{ par} \\ \Theta, & \text{se } j = i + 1 \\ \theta_{2i+2-j}, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i + 1, j \text{ par} \\ d_{2i+2-j}, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i + 1, j \text{ ímpar} \end{cases},$$

onde e_j é o j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{4i-1}$. No segundo grupo, a j -ésima linha e respectivo elemento do lado direito são como segue

$$\bar{A}_{2i+1+j} = e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4i-1-2j} - e_{4i-2j}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq i - 1$$

e

$$\bar{b}_{2i+1+j} = \beta_j, \quad \text{se } 1 \leq j \leq i - 1.$$

Como no caso de n ímpar, quatro variáveis em (3.38) são unicamente determinadas. O restante das variáveis devem satisfazer um sistema reduzido. A matriz de coeficiente do sistema reduzido não é totalmente unimodular. No entanto, mostra-se na Subseção 3.2.2 que, se removemos a coluna associada à variável x_{2i} , a matriz restante é totalmente unimodular. Exploramos este fato na Subseção 3.2.2 para produzir um conjunto de condições que é equivalente à existência de solução inteira não negativa do sistema reduzido.

As equações que podem ser usadas para eliminar as quatro variáveis em (3.38) são:

1. A primeira equação implica que $x_1 = \theta_1$.
2. A primeira e a segunda equação implicam que $x_2 = d_2 - \theta_1$.
3. A $(2i + 1)$ -ésima equação implica que $x_{4i-2} = d_1$.
4. A $(2i + 1)$ -ésima e $2i$ -ésima equações implicam que $x_{4i-3} = \theta_2 - d_1$.

Assim as desigualdades (3.10), já obtidas na Subseção 3.2.1, são condições necessárias e suficientes para a solução parcial estabelecida em 1-4 acima ser um vetor inteiro não negativo.

O sistema reduzido obtido com a remoção da 4-upla (x_1, x_2, x_{4i-3}) e das equações mencionadas em 1-4 acima é estudado a seguir.

O sistema reduzido

Chegamos no sistema reduzido (3.39) abaixo após eliminar as equações 1, 2, $2i$ e $2i + 1$ e as variáveis x_1 , x_2 , x_{4i-3} e x_{4i-2} em (3.38):

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 1^{\text{o}} \text{ conj.} \\
 (2i-3) \text{ linhas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 0 & \dots & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \ddots & & & & & \ddots \\
 0 & \dots & & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & & 0
 \end{array} \right)
 \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2i-1} \\ y \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{4i-5} \\ x_{4i-4} \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} \theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_i \\ \Theta \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_1 \\ d_3 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \end{pmatrix}
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad (3.39)$$

onde $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - x_2 + x_{4i-3} = \beta_1 + \theta_1 + \theta_2 - d_1 - d_2$. Este sistema reduzido tem $3i - 4$ equações e $4i - 5$ incógnitas.

As linhas de $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{b}}$, a matriz de coeficientes e o vetor do lado direito de (3.39), herdam a partição estabelecida para suas contrapartes em (3.38). Logo os dois conjuntos tem $2i - 3$ e $i - 1$ linhas/elementos, respectivamente. As fórmulas para a j -ésima linha e elemento do lado direito devem ser atualizadas a fim de considerar eliminação de linhas e colunas (equações e variáveis). No primeiro grupo temos:

$$\bar{\bar{A}}_j = \begin{cases} e_{2j-1} + e_{2j}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \\ e_{2i-3} + e_{2i-2} + e_{2i-1}, & \text{se } j = i-1 \\ e_{2j} + e_{2j+1}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_j = \begin{cases} \theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ par} \\ \Theta, & \text{se } j = i-1 \\ \theta_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ par} \\ d_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ ímpar} \end{cases}.$$

No segundo conjunto, as fórmulas são:

$$\bar{A}_{2i-3+j} = \begin{cases} -e_1 + e_{4i-5}, & \text{se } j = 1 \\ e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-3-2j} - e_{4i-2-2j}, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_{2i-3+j} = \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ \beta_j, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}.$$

Note que e_j é agora o j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{4i-5}$.

Lema 3.2.7 *Cada coluna de $\bar{A}$, exceto a coluna (central) $2i-2$, contém exatamente dois coeficientes não nulos, um no primeiro conjunto de linhas e o outro no segundo conjunto. A coluna $2i-2$ contém somente um elemento não nulo, 1, na linha $i-1$.*

Demonstração: Considere a matriz $\tilde{A}$ com cada entrada de $\bar{A}$ substituída por seu valor absoluto. Somando as linhas no primeiro conjunto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2i-3} \tilde{A}_j &= \sum_{j=1}^{i-2} (e_{2j-1} + e_{2j}) + e_{2i-3} + e_{2i-2} + e_{2i-1} + \sum_{j=i}^{2i-3} (e_{2j} + e_{2j+1}) \\ &= \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, 2i-4\} \\ j \text{ ímpar}}} e_j + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, 2i-4\} \\ j \text{ par}}} e_j + e_{2i-3} + e_{2i-2} + e_{2i-1} + \\ &\quad \sum_{\substack{j \in \{2i, \dots, 4i-5\} \\ j \text{ par}}} e_j + \sum_{\substack{j \in \{2i, \dots, 4i-5\} \\ j \text{ ímpar}}} e_j \\ &= \mathbf{1}_{4i-5}. \end{aligned}$$

Somando as linhas no segundo conjunto:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{A}_{2i-3+j} &= e_1 + e_{4i-5} + \sum_{j=2}^{i-1} (e_{2j-2} + e_{2j-1} + e_{4i-3-2j} + e_{4i-2-2j}) \\
 &= e_1 + \sum_{\substack{j \in \{2, \dots, 2i-3\} \\ j \text{ par}}} e_j + \sum_{\substack{j \in \{2, \dots, 2i-3\} \\ j \text{ ímpar}}} e_j + \\
 &\quad \sum_{\substack{j \in \{2i-1, \dots, 4i-6\} \\ j \text{ ímpar}}} e_j + \sum_{\substack{j \in \{2i-1, \dots, 4i-6\} \\ j \text{ par}}} e_j + e_{4i-5} \\
 &= 1_{4i-5} - e_{2i-2}.
 \end{aligned}$$

A primeira soma implica que cada coluna contém um elemento não nulo, 1 (já que as linhas no primeiro conjunto tem entradas não negativas), no primeiro conjunto de linhas. Incidentemente, a linha $i-1$ contribui com a entrada não nula na coluna $2i-2$. A segunda soma implica que cada coluna, com exceção da coluna $2i-2$ contém um elemento não nulo, com valor absoluto 1, no segundo conjunto de linhas. A coluna $2i-2$ não contém elementos não nulos no segundo conjunto. Assim o lema está demonstrado. ■

Multiplicando por -1 a j -ésima equação, onde escolhemos j ímpar se $1 \leq j \leq i-1$, e par j se $i \leq j \leq 3i-4$. O sistema resultante é

$$\begin{array}{l}
 2i-3 \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & & \end{array} \right) \\ \vdots \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right. \\
 i-1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & & \end{array} \right) \end{array} \right.
 \end{array} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2i-1} \\ y \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{4i-5} \\ x_{4i-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_i \\ -\Theta \\ -\theta_i \\ \vdots \\ -\theta_4 \\ d_3 \\ -\bar{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_{i-1} \end{pmatrix}.$$

(3.40)

O novo sistema (3.40) tem matriz de coeficiente $\hat{A}$ e o vetor do lado direito $\hat{b}$. Como antes ele estão particionados em dois conjuntos. A j -ésima linha e o elemento do lado direito no primeiro conjunto são dados por:

$$\hat{A}_j = \begin{cases} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \\ -e_{2i-3} - e_{2i-2} - e_{2i-1}, & \text{se } j = i-1 \\ (-1)^{j+1}(e_{2j} + e_{2j+1}), & \text{se } i \leq j \leq 2i-3 \end{cases},$$

$$\hat{b}_j = \begin{cases} -\theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ par} \\ -\Theta, & \text{se } j = i-1 \\ -\theta_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ par} \\ d_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ ímpar} \end{cases}.$$

No segundo conjunto, as fórmulas são:

$$\hat{A}_{2i-3+j} = \begin{cases} e_1 - e_{4i-5}, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j(e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-3-2j} - e_{4i-2-2j}), & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases},$$

$$\hat{b}_{2i-3+j} = \begin{cases} -\tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j\beta_j, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}.$$

Teorema 3.2.8 *A j -ésima coluna de $\hat{A}$ contém*

$$\begin{aligned} &\text{duas entradas não nulas, } 1 \text{ e } -1, && \text{se } j \neq 2i-2, 2i-1, \\ &\text{uma entrada não nula, } -1, && \text{se } j = 2i-2, \\ &\text{duas entradas não nulas, ambas } -1, && \text{se } j = 2i-1. \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Lema 3.2.7 e o fato que as entradas de $\hat{A}$ pertencem a $\{0, -1, 1\}$, é suficiente mostrar que a soma das linhas de $\hat{A}$ resultam em $-e_{2i-2} - 2e_{2i-1}$.

Somando as linhas no primeiro conjunto, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2i-3} \hat{A}_j &= \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}) - e_{2i-3} - e_{2i-2} - e_{2i-1} + \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^{j+1}(e_{2j} + e_{2j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j e_{2j-1} + \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j e_{2j} - e_{2i-2} - e_{2i-1} + \\ &\quad \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^{j+1} e_{2j} + \sum_{j=i+1}^{2i-2} (-1)^j e_{2j-1}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Para o segundo conjunto, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i-1} \hat{A}_{2i-3+j} &= e_1 - e_{4i-5} + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^j (e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-3-2j} - e_{4i-2-2j}) \\
&= e_1 - e_{4i-5} + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^j e_{2j-2} + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} e_{2j-1} + \\
&\quad \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^j e_{4i-3-2j} + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} e_{4i-2-2j} \\
&= \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{j+1} e_{2j} + e_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} e_{2j-1} + \\
&\quad \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^{j+1} e_{2j-1} - e_{4i-5} + \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^j e_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{j+1} e_{2j} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} e_{2j-1} + \\
&\quad \sum_{j=i}^{2i-2} (-1)^{j+1} e_{2j-1} + \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^j e_{2j}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

As equações (3.41) e (3.42) implicam no resultado desejado. ■

O Teorema 3.2.8 implica que a matriz obtida de $\hat{A}$ removendo a coluna $2i-1$ é totalmente unimodular. Para explorar este fato, consideramos o sistema linear parametrizado obtido interpretando-se x_{2i} (a variável associada a coluna $2i-1$) como um parâmetro. Assim, para cada valor fixado p deste parâmetro temos um sistema linear com lado direito igual a $\hat{b}$ menos p vezes a coluna $2i-1$ de $\hat{A}$. Além disso, se adicionamos a equação redundante $e_{2i-2}x = -\sum_{j=1}^{3i-4} \hat{b}_j - 2p$, a matriz de coeficiente do sistema parametrizado será a matriz de incidência de um digrafo.

Soluções do sistema parametrizado

O sistema parametrizado, correspondendo a $x_{2i} = p$, descrito na subseção anterior tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} 2i-3 \\ \vdots \\ i \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccccccccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & & 1 & \cdots & & & 0 & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2i-1} \\ y \\ x_{2i+1} \\ \vdots \\ x_{4i-5} \\ x_{4i-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_i \\ -\Theta + p \\ -\theta_i \\ \vdots \\ -\theta_4 \\ d_3 \\ -\bar{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_{i-1} + p \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix}. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

A matriz de coeficiente A de (3.43) é $(3i-3) \times (4i-6)$. O primeiro conjunto da partição é o mesmo que antes. Temos, para a j -ésima linha de A e j -ésimo elemento do lado direito de b de (3.43) no primeiro conjunto:

$$\begin{aligned}
 A_j &= \begin{cases} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-1 \\ (-1)^{j+1}(e_{2j-1} + e_{2j}), & \text{se } i \leq j \leq 2i-3 \end{cases}, \\
 b_j &= \begin{cases} -\theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ par} \\ -\Theta + p, & \text{se } j = i-1 \\ -\theta_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ par} \\ d_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ ímpar} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

A equação redundante é adicionada ao segundo conjunto da partição, assim temos:

$$A_{2i-3+j} = \begin{cases} e_1 - e_{4i-6}, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j(e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j}), & \text{se } 2 \leq j \leq i-2 \\ -e_{2i-4} + e_{2i-3} + e_{2i-1}, & \text{se } j = i-1 \\ e_{2i-2}, & \text{se } j = i \end{cases},$$

$$b_{2i-3+j} = \begin{cases} -\tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j \beta_j, & \text{se } 2 \leq j < i-1 \\ -\beta_{i-1} + p, & \text{se } j = i-1 \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p, & \text{se } j = i \end{cases}.$$

Como os vetores de linha pertencem a $\mathbb{R}^{4i-6}$, tomamos e_k como o k -ésimo vetor da base canônica deste espaço.

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ o digrafo cuja matriz de incidência nó-arco é A . As equações (3.43) representam um problema de fluxo paramétrico. Como o parâmetro p é inteiro, o problema terá solução inteira não negativa se tiver solução não negativa. A estrutura de $\mathcal{G}$ é explicitada no próximo teorema. Ela ajudará a decompor (3.43) em um conjunto de sistemas menores, como feito na Subseção 7.

Teorema 3.2.9 *O conjunto $\mathcal{A}$ pode ser particionado em $i-1$ subconjuntos. Destes, $i-2$ correspondem a ciclos não-direcionados de comprimento quatro em $\mathcal{G}$, e os restantes correspondem a um caminho não-direcionado. O j -ésimo subconjunto é o conjunto de arcos $\mathcal{A}_j$ no subgrafo $\mathcal{G}_j = (\mathcal{N}_j, \mathcal{A}_j)$ induzido pelos nós:*

$$\text{Se } j \leq i-2: \quad \mathcal{N}_j = \{j, 2i-2-j, 2i-3+j, 2i-2+j\}$$

$$\text{Se } j = i-1: \quad \mathcal{N}_j = \{i-1, 3i-4, 3i-3\}$$

Demonstração: É suficiente mostrar que os subgrafos $\mathcal{G}_j$ têm a estrutura descrita e são arco-disjuntos, já que a soma das cardinalidades de $\mathcal{A}_j$, para $j = 1, \dots, i-1$, é $4(i-2) + 2 = 4i-6$, a cardinalidade de $\mathcal{A}$. Os elementos do lado direito correspondentes aos nós em $\mathcal{N}_j$ são dados na Tabela 3.2.

$1 \leq j \leq i-2$				
	j ímpar	j par		
b_j	$-\theta_{j+2}$	d_{j+2}	$j = i-1$	
b_{2i-2-j}	d_{j+2}	$-\theta_{j+2}$	b_{i-1}	$-\Theta + p$
b_{2i-3+j}	$-\tilde{\beta}_1$, se $j = 1$ $-\beta_j$, se $j \geq 3$	β_j	b_{3i-4}	$-\beta_{i-1} + p$
b_{2i-2+j}	β_{j+1}	$-\beta_{j+1}$, se $1 \leq j < i-2$ $-\beta_{i-1} + p$, se $j = i-2$	b_{3i-3}	$-\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p$

Tabela 3.2: Demanda/suprimeto constantes para nós em $\mathcal{N}_j$

Da tabela é claro que os subgrafos $\mathcal{G}_j$ são arco-disjuntos já que

$$\mathcal{N}_\ell \cap \mathcal{N}_j = \begin{cases} \{2i-3+j\}, & \text{se } j = \ell+1 \\ \{2i-2+j\}, & \text{se } j = \ell-1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A submatriz de $A|b$ associada aos nós em $\mathcal{N}_j$ é

$$\left(\begin{array}{c|c} A_j & b_j \\ \hline A_{2i-2-j} & b_{2i-2-j} \\ A_{2i-3+j} & b_{2i-3+j} \\ A_{2i-2+j} & b_{2i-2+j} \end{array} \right). \quad (3.44)$$

Para $j = 1$ a submatriz (3.44) torna-se:

$$\left(\begin{array}{c|c} -e_1 - e_2 & -\theta_3 \\ \hline e_{4i-7} + e_{4i-6} & d_3 \\ e_1 - e_{4i-6} & -\tilde{\beta}_1 \\ e_2 - e_3 + e_{4i-8} - e_{4i-7} & \beta_2 \end{array} \right). \quad (3.45)$$

Portanto $\mathcal{G}_j$, o subgrafo induzido por $\mathcal{N}_j$ tem matriz de incidência

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4i-7 & 4i-6 & \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & -\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\tilde{\beta}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \beta_2 \end{array} \right) \begin{matrix} 1 \\ 2i-3 \\ 2i-2 \\ 2i-1 \end{matrix}$$

Se substituirmos $j = 1$ na Figura 3.13, obtemos o subgrafo $\mathcal{G}_1$. Note a similaridade com a Figura 3.11. Mostraremos que todos os subgrafos, exceto o último, têm esta estrutura.

Figura 3.13: O subgrafo $\mathcal{G}_j$ consiste dos ciclos não-orientados $\mathcal{C}_j$, para $j = 1, \dots, i-2$.

A submatriz (3.44), para $2 \leq j < i-2$, é dada por

$$= (-1)^j \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}) \\ (-1)^{2i-1-j}(e_{4i-5-2j} + e_{4i-4-2j}) \\ (-1)^j(e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j}) \\ (-1)^{j+1}(e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4i-6-2j} - e_{4i-5-2j}) \end{matrix} & \begin{matrix} b_j \\ b_{2i-2-j} \\ (-1)^j \beta_j \\ \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{j+1} \beta_{j+1}, \text{ se } j < i-2 \\ -\beta_{i-1} + p, \text{ se } j = i-2 \end{array} \right\} \end{matrix} \end{array} \right) \\ = (-1)^j \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} e_{2j-1} + e_{2j} \\ -e_{4i-5-2j} - e_{4i-4-2j} \\ e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j} \\ -e_{2j} + e_{2j+1} - e_{4i-6-2j} + e_{4i-5-2j} \end{matrix} & \begin{matrix} (-1)^j b_j \\ (-1)^j b_{2i-2-j} \\ \beta_j \\ \left\{ \begin{array}{l} -\beta_{j+1}, \text{ se } j < i-2 \\ -\beta_{i-1} + p, \text{ se } j = i-2 \end{array} \right\} \end{matrix} \end{array} \right).$$

Assim a matriz de incidência de $\mathcal{G}_j$, para $j = 2, \dots, i-2$, é

$$(-1)^j \left(\begin{array}{cccc|c} & 2j-1 & 2j & 4i-5-2j & 4i-4-2j & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & & i \\ 0 & 0 & -1 & -1 & & 2i-2-j \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & 2i-3+j \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & 2i-2+j \end{array} \begin{array}{c} (-1)^j b_j \\ (-1)^j b_{2i-2-j} \\ \beta_j \\ \left\{ \begin{array}{l} -\beta_{j+1}, \text{ se } j < i-2 \\ -\beta_{i-1} + p, \text{ se } j = i-2 \end{array} \right\} \end{array} \right)$$

Usando a Tabela 3.2 e a matriz acima concluímos que $\mathcal{G}_j$ tem a estrutura desejada.

Finalmente, consideremos submatriz de linhas associadas aos nós em $\mathcal{N}_{i-1}$:

$$\begin{pmatrix} -e_{2i-3} - e_{2i-2} & -\Theta + p \\ -e_{2i-4} + e_{2i-3} + e_{2i-1} & -\beta_{i-1} + p \\ e_{2i-2} & -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2i-4 & 2i-3 & 2i-2 & 2i-1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Theta + p \\ -\beta_{i-1} + p \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix} \begin{matrix} i-1 \\ 3i-4 \\ 3i-3 \end{matrix}$$

Onde $\tilde{\Theta} = \Theta - p$, $\tilde{\beta}_{i-1} = \beta_{i-1} - p$ e $s = \sum_{j=1}^{3i-4} b_j + 2p$

Figura 3.14: O subgrafo $\mathcal{G}_{i-1}$.

Logo o subgrafo $\mathcal{G}_{i-1}$, descrito na Figura 3.14 acima, contém somente dois arcos, associados às colunas $2i-3$ e $2i-2$ da matriz A dada em (3.43). ■

O digrafo $\mathcal{G}$ é a união dos subgrafos $\mathcal{G}_j$, para $j = 1, \dots, i-1$. A Figura 3.15 dá uma idéia do digrafo inteiro. Os nós associados com o segundo conjunto de equações $2i-1, \dots, 3i-4$, pode ser usado para dividir o sistema linear (3.43) em um conjunto equivalente de sistemas lineares menores, como feito na Subseção 7.

Teorema 3.2.10 *O sistema linear (3.43) é equivalente a um conjunto de $i-1$ sistemas.*

O j -ésimo sistema neste conjunto, para $1 \leq j \leq i-2$, é dado por

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_{j+2} \\ d_{j+2} \\ \hat{\beta}_j \\ -\hat{\beta}_j + \theta_{j+2} - d_{j+2} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

Figura 3.15: Estrutura do digrafo $\mathcal{G}$.

onde

$$\hat{\beta}_j = \sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 1, \dots, i-2, \quad (3.47)$$

e

$$w^j = \begin{cases} (x_{2j+1}, x_{2j+2}, x_{4i-3-2j}, x_{4i-2-2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \text{ é ímpar} \\ (x_{4i-2-2j}, x_{4i-3-2j}, x_{2j+2}, x_{2j+1}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \text{ é par} \end{cases}. \quad (3.48)$$

O $(i-1)$ -ésimo sistema é

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Theta + p \\ \hat{\beta}_{i-1} + p \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

onde

$$\hat{\beta}_{i-1} = -\beta_{i-1} + \hat{\beta}_{i-2} - \theta_i + d_i. \quad (3.50)$$

Demonstração: O digrafo $\mathcal{G}$ é a união de $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{i-2}, \mathcal{G}_{i-1}$, onde os primeiros $i-2$ subgrafos são ciclos iguais aos da Figura 3.13 e o último é descrito na Figura 3.14. O procedimento de divisão usado na demonstração dada para o Teorema 3.2.4 pode ser repetido, com resultados análogos, até a $(i-3)$ -ésima divisão inclusive.

Isto é, no primeiro passo o nó de corte $2i-1$ (com lado direito β_2) é usado para “separar” o subgrafo $\mathcal{G}_1$ do resto de $\mathcal{G}$. Algebricamente falando, o sistema linear (3.43) é dividido em dois pares de sistemas, um associado ao subgrafo $\mathcal{G}_1$ e o outro a $\cup_{j=2}^{i-1} \mathcal{G}_j$. O

sistema associado a $\mathcal{G}_1$ é dado por (3.46), para $j = 1$. Após $i - 3$ tais divisões, teremos produzido um conjunto com $i - 3$ sistemas lineares dados por (3.46) com $j = 1, \dots, i - 3$, mais um sistema linear associado com o digrafo $\mathcal{G}_{i-2} \cup \mathcal{G}_{i-1}$, onde a constante associada ao nó de corte $\mathcal{G}_{i-3} \cap \mathcal{G}_{i-2}$ é $\hat{\beta}_{i-2}$, satisfazendo (3.47). Assim, o sistema linear restante é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-3} \\ x_{2i-2} \\ x_{2i-1} \\ y \\ x_{2i+1} \\ x_{2i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i \\ -\Theta + p \\ -\theta_i \\ \hat{\beta}_{i-2} \\ -\beta_{i-1} + p \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Somando a primeira, terceira e quarta equações de (3.51) à quinta, e reorganizando linhas e colunas, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{2i-3} \\ x_{2i-2} \\ x_{2i+1} \\ x_{2i+2} \\ x_{2i-1} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i \\ -\theta_i \\ \hat{\beta}_{i-2} \\ -\Theta + p \\ -\beta_{i-1} + p + \hat{\beta}_{i-2} - \theta_i + d_i \\ -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p \end{pmatrix}$$

O sistema acima é claramente decomponível ao longo das linhas exibidas em dois subsistemas: o primeiro equivale a (3.46) para $j = i - 2$ (note que a última equação em (3.46) é redundante) e o segundo é precisamente (3.49), dado as fórmulas (3.47) e (3.50) para $\hat{\beta}_{i-2}$ e $\hat{\beta}_{i-1}$, respectivamente. ■

É importante notar que apenas duas componentes no vetor de incógnitas do sistema parametrizado (3.43), ou seja, x_{2i-1} e y , dependerão do parâmetro p (o valor de x_{2i}), já que este parâmetro aparece somente no subsistema (3.49). Logo a solução de (3.38) foi subdividida em $(i - 1)$ 4-uplas e uma 3-upla. A primeira 4-upla, $q_1 = (x_1, x_2, x_{4i-3}, x_{4i-2})$ tem valor único $(\theta_1, d_2 - \theta_1, \theta_2 - d_1, d_1)$. A j -ésima 4-upla, para $2 \leq j \leq i - 1$, $q_j =$

$(x_{2j-1}, x_{2j}, x_{4i-1-2j}, x_{4i-2j})$, é a reordenação apropriada da solução do sistema linear

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{j-1} \\ w_2^{j-1} \\ w_3^{j-1} \\ w_4^{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_{j+1} \\ d_{j+1} \\ \hat{\beta}_{j-1} \\ -\hat{\beta}_{j-1} + \theta_{j+1} - d_{j+1} \end{pmatrix}$$

Pelo Lema 3.2.5, $w^{j-1} = (\hat{\beta}_{j-1}, \theta_{j+1} - \hat{\beta}_{j-1}, d_{j+1}, 0) + \alpha(1, -1, -1, 1)$, para $j = 2, \dots, i-1$, e o Lema 3.2.6 dá condições necessárias e suficientes para uma tal solução ser inteira não negativa, bem como o número de soluções. A última parte do “quebra-cabeça” é $q_i = (x_{2i-1}, y, x_{2i})$. O Sistema (3.49) tem uma solução se, e somente se,

$$-\Theta + p + \hat{\beta}_{i-1} + p - \sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p = 0.$$

Mas, como a condição acima é, por construção, sempre satisfeita, concluimos que $q_i = (\hat{\beta}_{i-1} + p, -\sum_{j=1}^{3i-4} b_j - 2p, p)$. Este último vetor deve também satisfazer condições de não negatividade e integralidade. Agora q_i é inteiro se, e somente se, p é inteiro, já que todos os dados do problema são inteiros. As condições de não negatividade são equivalentes as três desigualdades:

$$\begin{aligned} p &\geq -\hat{\beta}_{i-1} \\ \frac{-\sum_{j=1}^{3i-4} b_j}{2} = \frac{\Theta - \hat{\beta}_{i-1}}{2} &\geq p \\ p &\geq 0 \end{aligned}$$

Eliminando p com o método de Fourier-Motzkin conseguimos

$$\begin{aligned} \Theta &\geq -\hat{\beta}_{i-1} \\ \Theta &\geq \hat{\beta}_{i-1} \end{aligned}$$

Assim (3.38) tem uma solução inteira não negativa se, e somente se, as seguintes

condições são satisfeitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_2 \geq \theta_1 \\ \theta_2 \geq d_1 \\ \theta_{j+1} \geq \hat{\beta}_{j-1} = \sum_{\ell=1}^{j-1} (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^j (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 2, \dots, i-1 \\ d_{j+1} \geq -\hat{\beta}_{j-1} = -\sum_{\ell=1}^{j-1} (-1)^\ell \beta_\ell + \sum_{\ell=1}^j (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 2, \dots, i-1 \\ \Theta \geq -\sum_{\ell=1}^{i-1} (-1)^\ell \beta_\ell + \sum_{\ell=1}^i (\theta_\ell - d_\ell) \\ \Theta \geq \sum_{\ell=1}^{i-1} (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^i (\theta_\ell - d_\ell) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

O número de soluções é dado pelo produto $\prod_{j=2}^i n_j$, onde n_j é o número de inteiros no intervalo $[\max\{0, -\hat{\beta}_{j-1}\}, \min\{\theta_{j+1} - \hat{\beta}_{j-1}, d_{j+1}\}]$, para $j = 2, \dots, i-1$, e n_i é o número de inteiros no intervalo $[\max\{0, -\hat{\beta}_{i-1}\}, (\Theta - \hat{\beta}_{i-1})/2]$.

3.2.3 Caso $n = 2 \bmod 4$

O sistema linear

Agora vamos assumir $n = 2i$, onde $i \geq 3$ é ímpar. O problema é encontrar uma solução inteira não negativa do sistema linear:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
1^{\text{o}} \text{ conj.} \\
(2i+1) \\
\text{linhas}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
& & \ddots & & & & \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
& & & & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 \\
& & & \ddots & & & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
\vdots \\
x_{2i-1} \\
x_{2i} \\
\vdots \\
x_{4i-4} \\
x_{4i-3} \\
x_{4i-2}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\
d_2 \\
\theta_3 \\
d_4 \\
\vdots \\
\theta_i \\
\Theta \\
d_i \\
\vdots \\
\theta_4 \\
d_3 \\
\theta_2 \\
d_1 \\
\beta_1 \\
\beta_2 \\
\vdots \\
\beta_{i-1}
\end{pmatrix},
\end{array}
\right.
\end{array}
\begin{array}{l}
2^{\text{o}} \text{ conj.} \\
(i-1) \text{ linhas}
\end{array}
\end{array}
\tag{3.53}$$

onde Θ , θ_j e d_j , para $j = 1, \dots, i$, são inteiros positivos e β_j , para $j = 1, \dots, i-1$, são inteiros. A matriz de coeficientes A de (3.53) é $3i \times (4i-2)$, e suas linhas são particionadas em dois conjuntos, o primeiro contendo as linhas 1 até $2i+1$ e, o segundo, linhas $2i+2$ até $3i$. O lado direito $\bar{b}$ e as equações são particionadas da mesma forma. As fórmulas para a j -ésima linha do primeiro grupo e o elemento correspondente do lado direito são

$$\bar{A}_j = \begin{cases} e_1, & \text{se } j = 1 \\ e_{2j-3} + e_{2j-2}, & \text{se } 2 \leq j < 2i \\ e_{2j-4}, & \text{se } j = 2i+1 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_j = \begin{cases} \theta_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i, j \text{ ímpar} \\ d_j, & \text{se } 1 \leq j \leq i, j \text{ par} \\ \Theta, & \text{se } j = i + 1 \\ \theta_{2i+2-j}, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i + 1, j \text{ par} \\ d_{2i+2-j}, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i + 1, j \text{ ímpar} \end{cases},$$

onde e_j é o j -ésimo vetor da base canônica $\mathbb{R}^{4i-2}$. No segundo grupo, a j -ésima linha e respectivo lado direito são como segue

$$\bar{A}_{2i+1+j} = e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4i-2-2j} - e_{4i-1-2j}, \text{ se } 1 \leq j \leq i-1$$

e

$$\bar{b}_{2i+1+j} = \beta_j, \text{ se } 1 \leq j \leq i-1.$$

Seguiremos a abordagem adotada nos casos anteriores estudados. Nossa exposição será bem sucinta, já que esta é a terceira vez que esta abordagem é usada. O primeiro passo é eliminar as variáveis x_1, x_2, x_{4i-2} e x_{4i-3} , para reduzir o sistema. As equações usadas e os valores obtidos são os mesmos como na Subseção 3.2.2. Mais uma vez obtemos o conjunto de desigualdades (3.10), surgidas inicialmente na Subseção 3.2.1, condições necessárias e suficientes para a solução parcial $(x_1, x_2, x_{4i-2}, x_{4i-3}) = (\theta_1, d_2 - \theta_1, \theta_2 - d_1, d_1)$ ser não negativa. A próxima subseção trata do sistema reduzido.

O sistema reduzido e suas soluções

Eliminando as variáveis x_1, x_2, x_{4i-3} e x_{4i-2} e as equações 1, 2, $2i+1$ e $2i$ o sistema reduzido (3.54) é obtido de (3.53):

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 1^{\circ} \text{ conj.} \\
 (2i-3) \\
 \text{linhas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 0 & \dots\dots\dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots\dots\dots & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots\dots\dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 0 & \dots\dots\dots & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots\dots\dots & 0
 \end{array} \right)
 \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2i-1} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{4i-5} \\ x_{4i-4} \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} \theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \Theta \\ d_i \\ \vdots \\ \theta_4 \\ d_3 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \end{pmatrix},
 \end{array}
 \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2^{\circ} \text{ conj.} \\
 (i-1) \text{ linhas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad (3.54)$$

onde $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \theta_1 + \theta_2 - d_1 - d_2$. Este sistema reduzido tem $3i-4$ equações e $4i-6$ incógnitas.

O sistema (3.54) tem matriz de coeficientes $\bar{A}$ e o lado direito $\bar{b}$, que herdam a partição de $\bar{A}$ e $\bar{b}$. A j -ésima linha e o elemento do lado direito no primeiro conjunto são dados por

$$\bar{A}_j = e_{2j-1} + e_{2j}, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2i-3$$

e

$$\bar{b}_j = \begin{cases} \theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 < j \leq i-2, j \text{ par} \\ \Theta, & \text{se } j = i-1 \\ \theta_{2i-j}, & \text{se } i \leq j \leq 2i-3, j \text{ ímpar} \\ d_{2i-j}, & \text{se } i \leq j < 2i-3, j \text{ ímpar} \end{cases}$$

No segundo conjunto, as fórmulas são:

$$\bar{A}_{2i-3+j} = \begin{cases} -e_1 + e_{4i-6}, & \text{se } j = 1 \\ e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j}, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

e

$$\bar{b}_{2i-3+j} = \begin{cases} \tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ \beta_j, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}.$$

Note que e_j é agora j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{4i-6}$.

Lema 3.2.11 *Cada coluna de $\bar{A}$, contém exatamente dois coeficientes não nulos, um no primeiro conjunto de linhas e o outro no segundo conjunto.*

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração dos Lemas 3.2.1 e 3.2.7. ■

Multiplicando por -1 a j -ésima equação de (3.54), onde $1 \leq j \leq i-2$ é ímpar e $i-1 \leq j \leq 3i-4$ é par, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & \dots & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2i-1} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{4i-5} \\ x_{4i-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ -\theta_i \\ -\Theta \\ d_i \\ \vdots \\ -\theta_4 \\ d_3 \\ -\tilde{\beta}_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

As fórmulas para a j -ésima linha e elementos do lado direito devem ser adaptados adequadamente. Mantendo a partição e denotando por A e b , respectivamente, a matriz de

coeficientes e o vetor do lado direito (3.55), temos, para o primeiro conjunto:

$$A_j = \begin{cases} (-1)^j(e_{2j-1} + e_{2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \\ (-1)^{j+1}(e_{2j-1} + e_{2j}), & \text{se } i-1 \leq j \leq 2i-3 \end{cases},$$

$$b_j = \begin{cases} -\theta_{j+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq i-2, j \text{ ímpar} \\ d_{j+2}, & \text{se } 1 < j \leq i-2, j \text{ par} \\ -\Theta, & \text{se } j = i-1 \\ -\theta_{2i-j}, & \text{se } i < j \leq 2i-3, j \text{ par} \\ d_{2i-j}, & \text{se } i < j \leq 2i-3, j \text{ ímpar} \end{cases}.$$

No segundo conjunto, as fórmulas são:

$$A_{2i-3+j} = \begin{cases} e_1 - e_{4i-6}, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j(e_{2j-2} - e_{2j-1} + e_{4i-4-2j} - e_{4i-3-2j}), & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases},$$

$$b_{2i-3+j} = \begin{cases} -\tilde{\beta}_1, & \text{se } j = 1 \\ (-1)^j\beta_j, & \text{se } 2 \leq j \leq i-1 \end{cases}.$$

Teorema 3.2.12 *O sistema (3.55) é equivalente ao conjunto de $i-1$ sistemas menores.*

O j -ésimo sistema, para $1 \leq j \leq i-2$, é dado por

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_{j+2} \\ d_{j+2} \\ \hat{\beta}_j \\ -\hat{\beta}_j + \theta_{j+2} - d_{j+2} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

onde

$$\hat{\beta}_j = \sum_{\ell=1}^j (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^{j+1} (\theta_\ell - d_\ell), \quad \text{para } j = 1, \dots, i-2, \quad (3.57)$$

e

$$w^j = \begin{cases} (x_{2j+1}, x_{2j+2}, x_{4i-3-2j}, x_{4i-2-2j}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \text{ é ímpar} \\ (x_{4i-2-2j}, x_{4i-3-2j}, x_{2j+2}, x_{2j+1}), & \text{se } 1 \leq j \leq i-2 \text{ é par} \end{cases} \quad (3.58)$$

O sistema $i-1$, o último, é dado por

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Theta \\ \hat{\beta}_{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

onde

$$\hat{\beta}_{i-1} = \sum_{\ell=1}^{i-1} (-1)^\ell \beta_\ell - \sum_{\ell=1}^i (\theta_\ell - d_\ell)$$

Demonstração: Aplicando precisamente a mesma decomposição que foi usada nas provas dos Teoremas 3.2.4 e 3.2.10 para (3.55), obtemos $(i - 2)$ problemas de fluxos em ciclos não direcionados de comprimento quatro, do tipo (3.56). O sistema restante é (3.59). ■

O sistema (3.59) tem solução única $(x_{2i-1}, x_{2i}) = ((\Theta - \hat{\beta}_{i-1})/2, (\Theta + \hat{\beta}_{i-1})/2)$. Este subvetor de x é não negativo e inteiro se, e somente se, as seguintes condições se mantêm:

$$\begin{aligned} \Theta - \hat{\beta}_{i-1} &\text{ é par} \\ \Theta &\geq \hat{\beta}_{i-1} \\ \Theta &\geq -\hat{\beta}_{i-1} \end{aligned} \tag{3.60}$$

A decomposição fornecida pelo Teorema 3.2.12 imediatamente leva a um conjunto de condições para a existência de valores inteiros não negativos para as componentes restantes de x . O conjunto de todas as condições resultam no sistema (3.52) juntamente com a restrição que $\Theta - \hat{\beta}_{i-1}$ seja par. O número de soluções é dado pelo produto $\prod_{j=2}^{i-1} n_j$, onde n_j é o número de inteiros no intervalo $[\max\{0, -\hat{\beta}_{j-1}\}, \min\{\theta_{j+1} - \hat{\beta}_{j-1}, d_{j+1}\}]$, para $j = 2, \dots, i - 1$.

3.3 Conclusão

Nesta seção o teorema principal é provado, estabelecendo a correspondência entre os sistemas lineares obtidos dos algoritmos na Seção 3.1 e a álgebra na Seção 3.2.

Prova do Teorema 3.0.1..

É fácil ver que os sistemas lineares (3.5), (3.7) e (3.8) obtidos do algoritmo na Seção 3.1 são representados pelas seguintes matrizes.

Caso de dimensão ímpar:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 h_1^c \\
 h_1^d \\
 h_2^c \\
 h_2^d \\
 h_3^c \\
 h_3^d \\
 \vdots \\
 h_{2i}^c \\
 h_{2i}^d
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 e^- - 1 \\
 h_1 \\
 h_2 \\
 h_3 \\
 \vdots \\
 h_{2i} \\
 e^+ - 1 \\
 B_1^+ - B_1^- \\
 B_2^+ - B_2^- \\
 \vdots \\
 \frac{B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-}{2}
 \end{pmatrix}$$

Caso de dimensão par $n = 0 \bmod 4$:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 0 & \cdots & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 0 & \cdots & & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 h_1^c \\
 h_1^d \\
 h_2^c \\
 h_2^d \\
 h_3^c \\
 h_3^d \\
 \vdots \\
 h_i^c \\
 h_i^d \\
 \beta^i \\
 h_i^d \\
 \vdots \\
 h_{2i-1}^c \\
 h_{2i-1}^d
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 e^- - 1 \\
 h_1 \\
 h_2 \\
 h_3 \\
 \vdots \\
 h_i \\
 \vdots \\
 h_{2i-1} \\
 e^+ - 1 \\
 B_1^+ - B_1^- \\
 B_2^+ - B_2^- \\
 \vdots \\
 B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-
 \end{pmatrix}$$

Caso de dimensão par $n = 2 \bmod 4$:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & & & \\
 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 & & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 \\
 & & \ddots & & \ddots & & \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 h_1^c \\
 h_1^d \\
 h_2^c \\
 h_2^d \\
 h_3^c \\
 h_3^d \\
 \vdots \\
 h_i^c \\
 h_i^d \\
 \vdots \\
 h_{2i-1}^c \\
 h_{2i-1}^d
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 e^- - 1 \\
 h_1 \\
 h_2 \\
 h_3 \\
 \vdots \\
 h_i \\
 \vdots \\
 h_{2i-1} \\
 e^+ - 1 \\
 B_1^+ - B_1^- \\
 B_2^+ - B_2^- \\
 \vdots \\
 B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-
 \end{pmatrix}$$

Estas matrizes correspondem a (3.9), (3.38) e (3.53) respectivamente, na Seção 3.2. Naquela seção condições necessárias e suficientes foram provadas para a existência de soluções inteiras não negativas para estes sistemas. Estas condições são resumidas na Seção 3.2 no caso de dimensão ímpar em (3.37), no caso $0 \bmod 4$ em (3.52) e no caso $2 \bmod 4$ em (3.52) e (3.60). Estas condições correspondem as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.17), (2.18) e (2.20) onde h_n e h_0 são tomados iguais a zero.

Logo as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.17), (2.18) e (2.20) são condições necessárias e suficientes para um vértice explodir. A continuação do grafo abstrato de Lyapunov ocorrerá se esta condição é verificada para cada vértice.

Capítulo 4

Desigualdades de Poincaré-Hopf e Desigualdades de Morse

Neste capítulo mostraremos que as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) são satisfeitas, se e somente se, as desigualdades de Morse são satisfeitas (1) para algum vetor de números de Betti $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$.

Vamos estabelecer o teorema principal deste capítulo em termos de uma coleção de números não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_n, \kappa)$, com $\kappa = 0$.

Teorema 4.0.1 *Um conjunto de números não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf em (2.21) se, e somente se, satisfaz as desigualdades de Morse (1) para algum vetor de números de Betti $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$.*

O passo crucial na prova do teorema principal é definir um sistema linear, chamado *sistema h^{cd} reduzido* que pode ser caracterizado pelas dimensões do índice de Conley homológico $(h_0, \dots, h_n)$ e cujas incógnitas são precisamente $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d)$. Soluções não negativas para estes sistemas correspondem a diferentes formas que podemos escolher h_j^c e h_j^d para dados de índice pré-fixados $(h_0, \dots, h_n)$. No Capítulo 3 foi mostrado que o sistema h^{cd} tem uma solução inteira não negativa se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21), (2.22) e (2.23) são satisfeitas. Também mostramos neste mesmo capítulo que este sistema h^{cd} constitui um problema de fluxo em rede, com possíveis restrições adicionais. A natureza da rede envolvida permite uma caracterização completa de todas as soluções possíveis do sistema h^{cd} por meio da solução particular do sistema

(um ponto extremo, ou vértice, do politopo associado com o sistema h^{cd}) e as circulações simples da rede (soluções elementares da versão homogênea do sistema h^{cd}).

A novidade aqui é que o h_j^c e h_j^d serão usados para definir um vetor de números de Betti que satisfaz as desigualdades de Morse para dados de índice pré-fixados $(h_0, \dots, h_n)$. Considerando uma solução particular e todas as possíveis combinações de circulações, podemos construir o casco convexo de todos os vetores de números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse para um dado de índice pré-fixado. O casco convexo da coleção de vetores de números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse constitui um politopo. O politopo de Morse $\mathcal{P}(h_0, \dots, h_n)$ (ou simplesmente $\mathcal{P}$, se consideramos um genérico fixado $(h_0, \dots, h_n)$) é a intersecção deste casco convexo com o quadrante não negativo.

Este capítulo é dividido em duas seções. Na Seção 4.1 os principais resultados de equivalência são estabelecidos, isto é, o sistema h^{cd} admite soluções inteiras não negativas se, e somente se, existem vetores de números de Betti inteiros não negativos que satisfazem as desigualdades de Morse. Na Seção 4.2 descrevemos o politopo de Morse $\mathcal{P}$ e apresentamos propriedades geométricas adicionais.

4.1 Resultados de equivalência

No Capítulo 3 foi mostrado que

Proposição 4.1.1 *Os sistemas (4.1) e (4.2) têm solução inteira não negativas $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d)$ se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.20), (2.7), (2.16), para blocos isolantes são satisfeitas.*

$$n = 2i + 1 \left\{ \begin{array}{l} e^- - 1 - h_1^c = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d, \quad j = 1, \dots, 2i\} \\ e^+ - 1 - h_{2i}^d = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -(B_1^+ - B_1^-) + h_1^d - h_2^c - h_{2i}^c + h_{2i-1}^d = 0 \\ -(B_2^+ - B_2^-) + h_2^d - h_3^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ \vdots \\ \frac{-(B_i^+ - B_i^-)}{2} + h_i^d - h_{i+1}^c = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$n = 2i \left\{ \begin{array}{l} e^- - 1 - h_1^c = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d + \beta^i, \quad j = 1, \dots, 2i-1, \beta^i = 0 \text{ if } j \neq i \text{ and } 2i \neq 0 \bmod 4 \\ e^+ - 1 - h_{2i-1}^d = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -(B_1^+ - B_1^-) + h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ -(B_2^+ - B_2^-) + h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = 0 \\ \vdots \\ -(B_{i-1}^+ - B_{i-1}^-) + h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Neste capítulo trabalharemos com um caso particular da Proposição 4.1.1 tomando $B_j^- = B_j^+$. Logo o sistema (4.1) se reduz a (4.3) e o sistema (4.2) se reduz a (4.34) no caso $n = 0 \bmod 4$ ou a (4.61) no caso $n = 2 \bmod 4$. Pela Proposição 4.1.1, os sistemas (4.3), (4.34) e (4.61) têm uma solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d)$ se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21), (2.22) e (2.23) são satisfeitas.

Subseqüentemente mostramos que (4.3) (resp., (4.61)) tem soluções inteiras não negativas se, e somente se, existem vetores de números de Betti inteiros não negativos que satisfazem as desigualdades de Morse (4.5) (resp., (4.64)). O resultado envolvendo (4.34) e (4.38), correspondendo ao caso $n = 0 \bmod 4$, acrescenta a hipótese adicional que os dados de índice pré-fixados $(h_0, \dots, h_n)$ satisfazem a condição que o número $\sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} h_j$ é par.

4.1.1 Caso n ímpar

Suponha que existam inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i+1}, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, onde $i \geq 1$, que satisfazem o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1^c &= h_0 - 1 \\ h_j^c + h_j^d &= h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2i \\ h_{2i}^d &= h_{2i+1} - 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-j}^d - h_{2i-j+1}^c &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ h_i^d - h_{i+1}^c &= 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Considere os inteiros não negativos fixados $(h_0, h_1, \dots, h_{2i+1})$ que formam parte de uma solução de (4.3). Então, para estes $(h_0, h_1, \dots, h_{2i+1})$ fixados, existem inteiros não negativos $(h_1^c, h_1^d, h_2^c, h_2^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ que resolvem (4.3) e portanto são também solução do sistema equivalente abaixo, obtido multiplicando as equações ímpares em (4.3) por -1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -h_1^c &= -(h_0 - 1) \\ (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) &= (-1)^{j+1}h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2i \\ h_{2i}^d &= h_{2i+1} - 1 \\ (-1)^j(h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-j}^d - h_{2i-j+1}^c) &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ (-1)^i(h_i^d - h_{i+1}^c) &= 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Pode-se mostrar, como no Capítulo 3, que o sistema (4.4) constitui um problema de fluxo de rede. A matriz de coeficientes de (4.4) é a matriz de incidência nó-arco de um digrafo. As variáveis representam fluxo ao longo dos arcos e cada equação em (4.4) garante o equilíbrio de fluxo no nó correspondente. A rede contém uma cadeia de $i - 1$ ciclos de comprimento quatro. Os arcos no j -ésimo ciclo estão associados às variáveis $h_{j+1}^d, h_{2i-j}^c, h_{2i-j}^d$ e h_{j+1}^c , e a orientação dos dois primeiros arcos é oposta à orientação dos dois últimos, com respeito a uma orientação arbitrária do ciclo. Os nós no j -ésimo ciclo estão associados às equações $j + 2, 2i + 1 - j, 2i + 2 + j$ e $2i + 3 + j$, de (4.4). Assim os nós associados à $(2i + 2 + j)$ -ésima equação de (4.4) constitui a interseção de ciclos $j - 1$ e j . A sequência de arcos associadas com $(h_1^c, h_1^d, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, as variáveis que ainda não foram consideradas, formam um caminho não orientado que é adjacente ao primeiro ciclo. A interseção deste caminho e o primeiro ciclo é o nó associado à equação $2i + 3$ de (4.4). Arcos correspondendo às variáveis de fluxo $(h_1^c, h_1^d, h_2^c, h_2^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, nesta ordem, formam um caminho Euleriano não orientado percorrendo cada arco do digrafo. Este caminho tem uma forma de zig-zag na imersão planar do digrafo exemplificada na Figura 4.1 para o caso $i = 3$. No interior de cada nó escrevemos o elemento do lado direito da equação de equilíbrio de fluxo correspondente.

Proposição 4.1.2 *Se, para um dado conjunto de inteiros $(h_0, h_1, \dots, h_{2i}, h_{2i+1})$ o sistema (4.4) tem uma solução inteira não negativa, então existem inteiros não negativos*

Figura 4.1: Exemplo de rede, para $i = 3$.

$(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i}, \gamma_{2i+1})$ satisfazendo

$$\sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} = \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } k = 0 \\ \geq \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i+1, k \text{ ímpar} \\ \leq \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i+1, k \text{ par} \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$\gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1 \quad (4.6)$$

$$\gamma_j = \gamma_{2i+1-j}, \text{ para } 1 \leq j \leq i \quad (4.7)$$

Demonstração: Seja $h^{cd} = (h_1^c, h_1^d, h_2^c, h_2^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ uma solução inteira não negativa de (4.4). Assuma, sem perda de generalidade, que h^{cd} satisfaz as equações

$$h_j^c h_{2i+1-j}^d = 0, \text{ para } j = 2, \dots, i, \quad (4.8)$$

já que, dado um fluxo arbitrário h^{cd} satisfazendo (4.4), podemos reduzir a zero pelo menos um dos fluxos em (4.8) enviando ao $(j - 1)$ -ésimo ciclo uma circulação de valor $\min\{h_j^c, h_{2i+1-j}^d\}$ na direção oposta aquela do arco associado with h_j^c . A circulação inteira assim construída é uma solução da versão homogênea do sistema (4.4), cuja soma ao fluxo (uma solução do sistema (4.4)) resulta em um outro fluxo inteiro não negativo satisfazendo (4.4) e (4.8).

Afirmamos que o vetor γ definido por

$$\gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1$$

$$\gamma_j = \begin{cases} h_j^d - h_{j+1}^c, & \text{se } 1 \leq j < i \\ h_i^d, & \text{se } j = i \\ h_{i+1}^c, & \text{se } j = i + 1 \\ -h_{j-1}^d + h_j^c, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i \end{cases} \quad (4.9)$$

é uma solução inteira não negativa de (4.5), (4.6) e (4.7).

A integralidade de γ segue facilmente da integralidade de h^{cd} . Além disso, as equações $2i + 2 + j$ de (4.4) implicam em

a) Se $1 \leq j < i$

$$\begin{aligned} (-1)^j(h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-j}^d - h_{2i-j+1}^c) &= \\ (-1)^j(\gamma_j - \gamma_{2i+1-j}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

b) Se $j = i$

$$\begin{aligned} (-1)^i(h_i^d - h_{i+1}^c) &= \\ (-1)^i(\gamma_i - \gamma_{i+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

As equações (4.10) e (4.11), e a definição de γ_0 e γ_{2i+1} dadas em (4.9) implicam que γ definido acima satisfaz as condições de fronteira e simetria (4.6)–(4.7).

Dado que (4.7) está estabelecida, a não negatividade de γ é estabelecida se mostrarmos que γ_j ou γ_{2i+1-j} , para $0 \leq j \leq i$, é não negativo. Isto é trivialmente verdadeiro para $j = 0$ e i . Considere $1 \leq j \leq i - 1$. Por definição e (4.7),

$$\gamma_j = h_j^d - h_{j+1}^c = -h_{2i-j}^d + h_{2i+1-j}^c = \gamma_{2i+1-j}.$$

De (4.8) temos que $h_{j+1}^c h_{2i-j}^d = 0$. Se $h_{j+1}^c = 0$, então $\gamma_{2i+1-j} = \gamma_j = h_j^d - h_{j+1}^c = h_j^d \geq 0$. Se $h_{2i-j}^d = 0$, então $\gamma_j = \gamma_{2i+1-j} = -h_{2i-j}^d + h_{2i+1-j}^c = h_{2i+1-j}^c \geq 0$. Portanto o vetor γ definido acima é não negativo. Mostraremos a seguir que o vetor também satisfaz (4.5).

Somando as equações 1 até $2i + 2$ de (4.4) obtemos

$$\begin{aligned}
& -h_1^c + \sum_{j=1}^{2i} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) + h_{2i}^d = \\
& -h_1^c + h_1^c + h_1^d + \sum_{j=2}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) - h_{2i}^c - h_{2i}^d + h_{2i}^d = \\
& h_1^d + \sum_{j=2}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) - h_{2i}^c = \\
& \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} h_j^d + \sum_{j=2}^{2i} (-1)^{j+1} h_j^c = \\
& \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} h_j^d + \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^j h_{j+1}^c = \\
& \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) = -(h_0 - 1) + \sum_{j=1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j + h_{2i+1} - 1 \\
& = \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

A soma alternada de γ 's, de acordo com (4.9), resulta em

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} h_i^d + (-1)^{i+2} h_{i+1}^c + \\
& \sum_{j=i+2}^{2i} (-1)^{j+1} (-h_{j-1}^d + h_j^c) + 1 \\
&= \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + \sum_{j=i+1}^{2i-1} (-1)^j (-h_j^d + h_{j+1}^c) \\
&= \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

As equações (4.12) e (4.13) implicam que

$$\sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} \gamma_j = \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j, \tag{4.14}$$

isto é, γ satisfaz a primeira equação em (4.5).

Agora considere a soma das equações 1 até $2i + 2 - \ell$ de (4.4), onde $1 \leq \ell \leq 2i$:

$$\begin{aligned}
& -h_1^c + \sum_{j=1}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) = \\
& h_1^d + \sum_{j=2}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) = \\
& \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j^d + \sum_{j=2}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j^c + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+1-\ell}^d = \\
& \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+1-\ell}^d = -(h_0 - 1) + \sum_{j=1}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j.
\end{aligned}$$

A última igualdade implica que

$$-1 + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+1-\ell}^d = \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \quad (4.15)$$

Consideramos três casos, quando calculamos a soma alternada parcial das primeiras $2i + 2 - \ell$ componentes de γ :

a) $1 \leq \ell \leq i$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} h_i^d + (-1)^{i+2} h_{i+1}^c + \\
& \sum_{j=i+2}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (-h_{j-1}^d + h_j^c) \\
&= -1 + \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + \sum_{j=i+1}^{2i-\ell} (-1)^j (-h_j^d + h_{j+1}^c) \\
&= -1 + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c). \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.16) em (4.15) obtemos

$$\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+1-\ell}^d = \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \quad (4.17)$$

Taking into account the fact that $h_j^d \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, 2i$, a equação (4.17)

implica

$$\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} \geq \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i, \ell \text{ ímpar} \\ \leq \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i, \ell \text{ par} \end{cases} \quad (4.18)$$

o que significa que γ definido em (4.9) satisfaz as desigualdades em (4.5), para $1 \leq \ell \leq i$.

b) $\ell = i + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} h_i^d \\ &= -1 + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+1-\ell}^d. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De (4.19) e (4.15) concluímos que, para $\ell = i + 1$,

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \gamma_j = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j, \quad (4.20)$$

e assim γ também satisfaz (4.5) para $\ell = i + 1$.

c) $i + 2 \leq \ell \leq 2i$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) \\ &= -1 + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+2-\ell} (h_{2i+1-\ell}^d - h_{2i+2-\ell}^c). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando (4.21) e (4.15) obtemos

$$\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{2i+2-\ell} h_{2i+2-\ell}^c = \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j, \quad (4.22)$$

que implica que (4.18), dando a não negatividade de h_j^c , para todo j .

A primeira equação em (4.4), $-h_1^c = -(h_0 - 1)$ e o fato que $h_1^c \geq 0$ implicam que $h_0 \geq 1 = \gamma_0$, assim a última desigualdade em (4.5) é também satisfeita.

Assim estabelecemos que o γ definido em (4.9) satisfaz as restrições em (4.5). $\blacksquare$

A seguinte proposição estabelece a recíproca da Proposição 4.1.2, i.e., se (4.5)–(4.7) tem uma solução inteira não negativa então (4.3) também tem.

Proposição 4.1.3 *Se, para um dado conjunto de inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i}, h_{2i+1})$, existe um inteiro não negativo $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i}, \gamma_{2i+1})$ que satisfaz (4.5)–(4.7), então o sistema (4.3) tem uma solução inteira não negativa.*

Demonstração: Assumimos sem perda de generalidade que a solução inteira não negativa γ de (4.5)–(4.7) satura a desigualdade correspondente a $k = i + 1$ em (4.5),

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \gamma_j = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j,$$

já que, se fixamos em seus valores correntes todos γ 's exceto γ_i e γ_{i+1} , que deixamos livres para variar, então todas as desigualdades em (4.5)–(4.7) são satisfeitas contanto que as seguintes condições se mantenham:

$$\gamma_i = \gamma_{i+1} \quad (4.23)$$

$$(-1)^{i+1} \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j \quad (4.24)$$

$$\gamma_i, \gamma_{i+1} \geq 0. \quad (4.25)$$

Isto é devido ao fato que todas as desigualdades lineares em (4.5) exceto a acima contêm a diferença $\pm(\gamma_i - \gamma_{i+1})$ ou não contêm γ_i nem γ_{i+1} . Segue que

$$0 \leq \gamma_i = \gamma_{i+1} \leq (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \right) = h_i + (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j). \quad (4.26)$$

O intervalo $\left[0, h_i + (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j)\right]$ é não vazio (contém o valor corrente de γ_i) e tem extremos inteiros, já que γ é inteiro e não negativo por suposição. Assim podemos assumir que γ_i (e, portanto, γ_{i+1}) está no extremo direito do intervalo acima.

Agora defina o vetor h^{cd} de acordo com

$$h_{2i+1-\ell}^d = (-1)^\ell \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ para } 1 \leq \ell \leq i \quad (4.27)$$

$$h_{2i+2-\ell}^c = (-1)^\ell \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ para } i+2 \leq \ell \leq 2i+1 \quad (4.28)$$

$$h_\ell^d = \gamma_\ell + h_{\ell+1}^c, \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq i-1 \quad (4.29)$$

$$h_\ell^c = \gamma_\ell + h_{\ell-1}^d, \quad \text{para } i+2 \leq \ell \leq 2i \quad (4.30)$$

$$h_i^d = \gamma_i \quad (4.31)$$

$$h_{i+1}^c = \gamma_{i+1}. \quad (4.32)$$

Afirmamos que o vetor h^{cd} assim definido é uma solução inteira não negativa de (4.3). A integralidade segue facilmente da integralidade de γ e h . Reescrevendo (4.5) como

$$(-1)^k \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} = \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } k = 0 \\ \leq (-1)^k \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i+1 \end{cases} \quad (4.33)$$

concluimos que as componentes de h^{cd} definidas em (4.27) e (4.28) são não negativas. Este fato, por outro lado, juntamente com as hipóteses $h \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, implicam que as componentes definidas em (4.29)–(4.32) são também não negativas.

Agora devemos verificar que h^{cd} satisfaz as restrições em (4.3). As equações (4.28) para $\ell = 2i+1$ e (4.6) implicam

$$h_1^c = (-1)^{2i+1} (-1)^1 (h_0 - \gamma_0) = h_0 - 1,$$

assim h^{cd} satisfaz a primeira equação em (4.3). As equações (4.27) para $\ell = 1$, (4.6) e a primeira equação de (4.5) implicam

$$\begin{aligned} h_{2i}^d &= (-1)^1 \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= - \left(\sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) - (h_{2i+1} - \gamma_{2i+1}) \right) \\ &= h_{2i+1} - \gamma_{2i+1} \\ &= h_{2i+1} - 1, \end{aligned}$$

que implica a $(2i+2)$ -ésima equação de (4.3).

As últimas i equações de (4.3),

$$\begin{aligned} h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-j}^d - h_{2i+1-j}^c &= (\gamma_j + h_{j+1}^c) - h_{j+1}^c + h_{2i-j}^d - (\gamma_{2i+1-j} + h_{2i-j}^d) \\ &= \gamma_j - \gamma_{2i+1-j} = 0, & \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \\ h_i^d - h_{i+1}^c &= \gamma_i - \gamma_{i+1} = 0, \end{aligned}$$

são válidas usando (4.7).

Seja $i+2 \leq \ell \leq 2i$. Somando as equações adequadas em (4.28) obtemos

$$\begin{aligned} h_{2i+2-\ell}^c + h_{2i+1-\ell}^c &= (-1)^\ell \left(\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) - \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \right) \\ &= (-1)^\ell (-1)^{2i+2-\ell} (h_{2i+1-\ell} - \gamma_{2i+1-\ell}) \\ &= h_{2i+1-\ell} - \gamma_{2i+1-\ell}, \end{aligned}$$

que implica, usando (4.29), a $(2i + 2 - \ell)$ -ésima equação de (4.3):

$$\gamma_{2i+1-\ell} + h_{2i+2-\ell}^c + h_{2i+1-\ell}^c = h_{2i+1-\ell}^d + h_{2i+1-\ell}^c = h_{2i+1-\ell}.$$

Assim, as equações $(1 + j)$ de (4.3), para $1 \leq j \leq i - 1$, são satisfeitas por h^{cd} .

A $(1 + i)$ -ésima equação de (4.3) segue de (4.28), (4.31) e (4.26):

$$\begin{aligned} h_i^c + h_i^d &= (-1)^{i+2} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + \gamma_i \\ &= (-1)^{i+2} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + h_i + (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= h_i, \end{aligned}$$

e a $(1 + (i + 1))$ -ésima equação de (4.3) segue de (4.27), (4.32) e (4.26):

$$\begin{aligned} h_{i+1}^c + h_{i+1}^d &= \gamma_{i+1} + (-1)^i \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= h_i + (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + (-1)^i \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= h_i + (-1)^i \left((-1)^{i+1} (h_i - \gamma_i) + (-1)^{i+2} (h_{i+1} - \gamma_{i+1}) \right) \\ &= h_i - (h_i - \gamma_i) + (h_{i+1} - \gamma_{i+1}) \\ &= h_{i+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que h^{cd} satisfaz as equações restantes de (4.3): equações $(i + 2 + j)$, para $1 \leq j \leq i - 1$. Seja $1 \leq \ell \leq i - 1$. Usando (4.27) temos

$$\begin{aligned} h_{2i+1-\ell}^d + h_{2i-\ell}^d &= (-1)^\ell \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + (-1)^{\ell+1} \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= (-1)^\ell (-1)^{2i+2-\ell} (h_{2i+1-\ell} - \gamma_{2i+1-\ell}). \end{aligned}$$

Portanto, considerando a definição (4.30)

$$h_{2i+1-\ell}^d + \gamma_{2i+1-\ell} + h_{2i-\ell}^d = h_{2i+1-\ell}^d + h_{2i+1-\ell}^c = h_{2i+1-\ell}.$$

■

4.1.2 Caso $n = 0 \bmod 4$

Assuma $n = 2i$, onde $i \geq 2$ é par. Suponha que existam inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i+1}, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ que satisfazem o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1^c = h_0 - 1 \\ h_j^c + h_j^d = h_j, & \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ h_i^c + \beta + h_i^d = h_i \\ h_j^c + h_j^d = h_j, & \text{para } j = i+1, \dots, 2i-1 \\ h_{2i-1}^d = h_{2i} - 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c = 0, & \text{para } j = 1, \dots, i-1 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Fixe os valores inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i})$ tais que (4.34) tem uma solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, h_2^c, h_2^d, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d)$. Então este último vetor satisfaz (4.35) abaixo, equivalente a (4.34), obtido multiplicando-se por -1 as equações ímpares até a $i+1$ -ésima e as equações pares daí por diante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -h_1^c = -(h_0 - 1) \\ (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) = (-1)^{j+1}h_j, & \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ -h_i^c - \beta - h_i^d = -h_i \\ (-1)^j(h_j^c + h_j^d) = (-1)^jh_j, & \text{para } j = i+1, \dots, 2i-1 \\ h_{2i-1}^d = h_{2i} - 1 \\ (-1)^j(h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c) = 0, & \text{para } j = 1, \dots, i-1. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

O sistema (4.35) pode ser decomposto, veja o Capítulo 3, em dois sistemas independentes: (4.36) e (4.37). O sistema (4.36) é um problema de fluxo em rede definido sobre um digrafo cuja matriz de incidência é a matriz de coeficientes de (4.4) para $n = 2i - 1$. Assim para o caso $i = 4$ o digrafo tem precisamente a estrutura descrita na Figura 4.1, mas naturalmente com diferentes rótulos sobre arcos e nós. No caso geral, o digrafo com matriz de incidência dado pela matriz de coeficientes de (4.36) tem $i - 2$ ciclos de comprimento quatro mais um caminho não orientado também de comprimento quatro. O j -ésimo ciclo contém arcos associados às variáveis h_{j+1}^d , h_{2i-1-j}^c , h_{2i-1-j}^d e h_{j+1}^c , e a orientação dos dois primeiros arcos é oposta à orientação dos dois últimos, com respeito

a uma orientação arbitrária do ciclo. Nós do j -ésimo ciclo estão associados às equações $j + 2, 2i + 2 + j, 2i - j$ e $2i + 1 + j$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -h_1^c &= -(h_0 - 1) \\ (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) &= (-1)^{j+1}h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ (-1)^j(h_j^c + h_j^d) &= (-1)^jh_j, \quad \text{para } j = i+1, \dots, 2i-1 \\ h_{2i-1}^d &= h_{2i} - 1 \\ (-1)^j(h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c) &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-2 \\ -h_{i-1}^d + h_{i+1}^c &= -\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}h_j - \sum_{j=i+1}^{2i}(-1)^jh_j \end{array} \right. \quad (4.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -h_i^c - \beta - h_i^d &= -h_i \\ h_i^c - h_i^d &= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}h_j + \sum_{j=i+1}^{2i}(-1)^jh_j \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Proposição 4.1.4 *Se, para um dado conjunto de inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i})$ o sistema (4.35) tem uma solução inteira não negativa, então existem inteiros não negativos $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i})$ satisfazendo*

$$\sum_{j=0}^{2i-k}(-1)^{j+1}\gamma_j \left\{ \begin{array}{ll} = \sum_{j=0}^{2i}(-1)^{j+1}h_j, & \text{se } k = 0 \\ \leq \sum_{j=0}^{2i-k}(-1)^{j+1}h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i, k \text{ ímpar} \\ \geq \sum_{j=0}^{2i-k}(-1)^{j+1}h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i, k \text{ par} \end{array} \right. \quad (4.38)$$

e

$$\gamma_0 = \gamma_{2i} = 1 \quad (4.39)$$

$$\gamma_j = \gamma_{2i-j}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1. \quad (4.40)$$

O vetor γ satisfaz também a condição γ_i par se, e somente se, $\sum_{j=0}^{2i}(-1)^jh_j$ é par.

Demonstração: Se γ satisfaz (4.38) e (4.40) então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i}(-1)^{j+1}\gamma_j &= \\ 2 \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j+1}\gamma_j + (-1)^{i+1}\gamma_i &= \sum_{j=0}^{2i}(-1)^{j+1}h_j. \end{aligned}$$

Portanto se $\gamma_i = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j h_j - 2 \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j$ é par, então $\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j h_j$ é também par.

Por outro lado, se $\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j h_j$ é par então $\Gamma = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - 2 \sum_{j=i}^{2i} (-1)^{j+1} h_j = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} h_j + \sum_{j=i}^{2i} (-1)^j h_j$ também é, e neste caso, somos capazes de construir, como mostrado na seqüência, uma solução γ satisfazendo (4.38), (4.40) e tal que γ_i é par.

Seja $h^{cd} = (h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, \beta, h_i^d, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d)$ uma solução inteira não negativa de (4.35). Se Γ é par, então é fácil ver de (4.37) que β é par. Assuma, sem perda de generalidade, que h^{cd} satisfaz as equações

$$h_j^c h_{2i-j}^d = 0, \quad \text{for } j = 2, \dots, i. \quad (4.41)$$

Para $2 \leq j \leq i-1$, o truque é o mesmo utilizado na prova da Proposição 4.1.2, isto é, adicione a uma solução arbitrária h^{cd} de (4.35) a circulação apropriada ao longo do $(j-1)$ -ésimo ciclo. Contudo, quando $j = i$, a solução do sistema homogêneo $\tilde{h}^{cd}$ que é adicionada a h^{cd} é tal que $(\tilde{h}_i^c, \tilde{\beta}, \tilde{h}_i^d) = \min\{h_i^c, h_i^d\}(-1, 2, -1)$ e o restante das componentes são zero. Note que ambos os tipos de adição preservam a não negatividade e integralidade da solução de (4.35), enquanto a última, a única que pode modificar os valores das componentes β , preserva sua paridade.

Afirmamos que o vetor γ definido por

$$\gamma_0 = \gamma_{2i} = 1$$

$$\gamma_j = \begin{cases} h_j^d - h_{j+1}^c, & \text{se } 1 \leq j \leq i-1 \\ \beta, & \text{se } j = i \\ -h_{j-1}^d + h_j^c, & \text{se } i+1 \leq j \leq 2i-1 \end{cases} \quad (4.42)$$

é uma solução inteira não negativa de (4.38)–(4.40).

A integralidade de h^{cd} implica a integralidade de γ . As equações $2i+1+j$, para $1 \leq j \leq i-1$, de (4.35) implicam

$$\begin{aligned} (-1)^j (h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c) &= \\ (-1)^j (\gamma_j - \gamma_{2i-j}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

o que significa que γ satisfaz (4.40). A condição (4.39) é satisfeita por definição.

A não negatividade de γ_j é trivial para $j = 0, i$ e $2i$, e, para $1 \leq j \leq 2i-1$, segue de (4.40) e (4.41), como na prova da Proposição 4.1.2. Resta mostrar que γ também

satisfaz (4.38). A prova é análoga à prova da Proposição 4.1.2, assim é conveniente definir o sistema (4.44), equivalente a (4.34), obtido multiplicando-se as equações ímpares por -1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -h_1^c &= -(h_0 - 1) \\ (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) &= (-1)^{j+1}h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ -h_i^c - \beta - h_i^d &= -h_i \\ (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) &= (-1)^{j+1}h_j, \quad \text{para } j = i+1, \dots, 2i-1 \\ -h_{2i-1}^d &= -(h_{2i} - 1) \\ (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c) &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Somando as equações 1 até $2i+1$ de (4.44) obtemos

$$\begin{aligned} -h_1^c + \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) - h_{2i-1}^d - \beta &= \\ h_1^d + \sum_{j=2}^{2i-2} (-1)^{j+1}(h_j^c + h_j^d) + h_{2i-1}^c - \beta &= \\ \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1}h_j^d + \sum_{j=2}^{2i-1} (-1)^{j+1}h_j^c - \beta &= \\ \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1}h_j^d + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^j h_{j+1}^c - \beta &= \\ \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta &= -(h_0 - 1) + \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1}h_j - (h_{2i} - 1) \\ &= 2 + \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1}h_j. \end{aligned} \quad (4.45)$$

A soma alternada dos γ 's, de acordo com (4.42), resulta em

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1}\gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta + \sum_{j=i+1}^{2i-1} (-1)^{j+1}(-h_{j-1}^d + h_j^c) - 1 \\ &= -2 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c) + \sum_{j=i}^{2i-2} (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta \\ &= -2 + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1}(h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Comparando (4.45) e (4.46) concluímos que

$$\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \quad (4.47)$$

isto é, γ satisfaz a primeira equação em (4.38).

Ao calcular a soma parcial das equações 1 até $2i + 1 - \ell$ de (4.44), existem dois casos a considerar:

a) $1 \leq \ell \leq i$

$$\begin{aligned} -h_1^c + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) - \beta &= \\ h_1^d + \sum_{j=2}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) - \beta &= \\ \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j^d - \sum_{j=1}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} h_{j+1}^c - \beta &= \\ \sum_{j=1}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+1-\ell} h_{2i-\ell}^d - \beta &= -(h_0 - 1) + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \end{aligned} \quad (4.48)$$

b) $i + 1 \leq \ell \leq 2i$

$$\begin{aligned} -h_1^c + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) &= \\ h_1^d + \sum_{j=2}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^c + h_j^d) &= \\ \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j^d - \sum_{j=1}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} h_{j+1}^c &= \\ \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{2i+1-\ell} h_{2i+1-\ell}^c &= -(h_0 - 1) + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Da mesma forma, separamos em duas possibilidades a soma parcial $\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j$:

a) $1 \leq \ell \leq i$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta + \sum_{j=i+1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (-h_{j-1}^d + h_j^c) \\
 &= -1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + \sum_{j=i}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta \\
 &= -1 + \sum_{j=1}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - \beta.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Comparando (4.50) e (4.48) concluímos que

$$\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{2i+1-\ell} h_{2i-\ell}^d = \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \tag{4.51}$$

Usando o fato que $h_j^d \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, 2i-1$, a equação (4.51) implica

$$\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} \leq \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i, \ell \text{ odd} \\ \geq \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i, \ell \text{ par} \end{cases} \tag{4.52}$$

o que significa que γ definido em (4.42) satisfaz as desigualdades em (4.38), para $1 \leq \ell \leq i$.

b) $i+1 \leq \ell \leq 2i-1$

$$\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j = -1 + \sum_{j=1}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c). \tag{4.53}$$

Comparando (4.53) e (4.49) concluímos que

$$\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{2i+1-\ell} h_{2i+1-\ell}^c = \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j. \tag{4.54}$$

Usando o fato que $h_j^c \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, 2i-1$, a equação (4.54) implica que γ satisfaz (4.52) para $i+1 \leq \ell \leq 2i-1$.

Finalmente, de (4.49) com $\ell = 2i$ temos $-h_1^c = 1 - h_0$ e como, por hipótese, $h_1^c \geq 0$, então $-h_0 \leq -1 = -\gamma_0$, a última desigualdade em (4.38).

Assim, estabelecemos que γ definido em (4.42) satisfaz as restrições em (4.38). $\blacksquare$

Proposição 4.1.5 *Se, para um dado conjunto de inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i}, h_{2i})$, existem inteiros não negativos $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i})$ que satisfazem (4.38)–(4.40), então o sistema (4.34) tem uma solução inteira não negativa.*

Demonstração: A prova é por construção. Considere o vetor h^{cd} definido por

$$h_{2i-\ell}^d = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ for } 1 \leq \ell \leq i \quad (4.55)$$

$$h_{2i+1-\ell}^c = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ for } i+1 \leq \ell \leq 2i \quad (4.56)$$

$$h_\ell^d = \gamma_\ell + h_{\ell+1}^c, \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq i-1 \quad (4.57)$$

$$h_\ell^c = \gamma_\ell + h_{\ell-1}^d, \quad \text{para } i+1 \leq j \leq 2i-1 \quad (4.58)$$

$$\beta = \gamma_i. \quad (4.59)$$

Claramente, o vetor h^{cd} dado por (4.55)–(4.59) é inteiro, já que γ e h o são. Reescrevendo (4.38) como

$$(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } k = 0 \\ \leq (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i \end{cases} \quad (4.60)$$

concluimos que as componentes de h^{cd} definidas em (4.55) e (4.56) são não negativas. Este fato, por outro lado, juntamente com a hipótese $h \geq 0$ e $\gamma \geq 0$, implica que as componentes definidas em (4.57)–(4.59) são também não negativas.

De (4.56) com $\ell = 2i$ obtemos

$$h_1^c = (-1)^{2i+1} (-1)^{0+1} (h_0 - \gamma_0) = h_0 - 1,$$

isto é, a primeira equação em (4.34). Por outro lado, (4.55) com $\ell = 1$ dá

$$\begin{aligned} h_{2i-1}^d &= (-1)^{1+1} \sum_{j=0}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) - (-1)^{2i+1} (h_{2i} - \gamma_{2i}) \\ &= h_{2i} - 1, \end{aligned}$$

que é a $(2i+1)$ -ésima equação de (4.34).

As últimas $i - 1$ equações de (4.34) são facilmente verificadas:

$$\begin{aligned} h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c &= (\gamma_j + h_{j+1}^c) - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - (\gamma_{2i-j} + h_{2i-1-j}^d) \\ &= \gamma_j - \gamma_{2i-j} = 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1. \end{aligned}$$

Seja $i+1 \leq \ell \leq 2i-1$. Somando as equações adequadas em (4.56) obtemos

$$\begin{aligned} h_{2i+1-\ell}^c + h_{2i-\ell}^c &= (-1)^{\ell+1} \left(\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) - \sum_{j=0}^{2i-\ell-1} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \right) \\ &= (-1)^{\ell+1} (-1)^{2i+1-\ell} (h_{2i-\ell} - \gamma_{2i-\ell}) \\ &= h_{2i-\ell} - \gamma_{2i-\ell}, \end{aligned}$$

o que implica, usando (4.57), a $(2i+1-\ell)$ -ésima equação de (4.34):

$$\gamma_{2i-\ell} + h_{2i+1-\ell}^c + h_{2i-\ell}^c = h_{2i-\ell}^d + h_{2i-\ell}^c = h_{2i-\ell}.$$

Assim, as equações $(1+j)$ de (4.34), para $1 \leq j \leq i-1$, são satisfeitas por h^{cd} .

Verificando a $(i+1)$ -ésima equação de (4.34):

$$\begin{aligned} h_i^c + \beta + h_i^d &= (-1)^{i+2} \sum_{j=0}^{2i-(i+1)} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + \gamma_i + (-1)^{i+1} \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \\ &= (-1)^{i+1} (-1)^{i+1} (h_i - \gamma_i) + \gamma_i \\ &= h_i. \end{aligned}$$

Finalmente, seja $1 \leq \ell \leq i-1$. Temos

$$\begin{aligned} h_{2i-\ell}^d + h_{2i-1-\ell}^d &= (-1)^{\ell+1} \left(\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) - \sum_{j=0}^{2i-1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \right) \\ &= (-1)^{\ell+1} (-1)^{2i+1-\ell} (h_{2i-\ell} - \gamma_{2i-\ell}) \\ &= h_{2i-\ell} - \gamma_{2i-\ell}, \end{aligned}$$

o que implica, usando (4.57)

$$h_{2i-\ell}^d + h_{2i-1-\ell}^d + \gamma_{2i-\ell} = h_{2i-\ell}^d + h_{2i-\ell}^c = h_{2i-\ell},$$

o que completa a verificação que h^{cd} satisfaz (4.34). ■

4.1.3 Caso $n = 2 \bmod 4$

Nesta seção assumimos $n = 2i$, onde $i \geq 3$ é ímpar. Suponha que existam inteiros não negativos $\{h_0, h_1, \dots, h_{2i+1}, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d\}$ que satisfazem o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1^c &= h_0 - 1 \\ h_j^c + h_j^d &= h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2i - 1 \\ h_{2i-1}^d &= h_{2i} - 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i - 1 \end{array} \right. \quad (4.61)$$

Se o sistema (4.61) tem uma solução, então o sistema (4.62), obtido de (4.61) adicionando a variável δ na $i+1$ -ésima equação, também tem, já que qualquer solução de (4.61) pode ser transformada em uma solução de (4.62) tomando δ zero.

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1^c &= h_0 - 1 \\ h_j^c + h_j^d &= h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, i - 1 \\ h_i^c + \delta + h_i^d &= h_i \\ h_j^c + h_j^d &= h_j, \quad \text{para } j = i + 1, \dots, 2i - 1 \\ h_{2i-1}^d &= h_{2i} - 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c + h_{2i-1-j}^d - h_{2i-j}^c &= 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, i - 1. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Note que o sistema (4.62) é do mesmo tipo que o sistema (4.34). Além disso, para (4.61) ter uma solução, devemos ter, conforme visto no Capítulo 3, $\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} h_j + \sum_{j=i}^{2i} (-1)^j h_j$ par. Se multiplicarmos por -1 as equações ímpares com índice no conjunto $\{1, \dots, i\}$, e as equações pares com índices maiores, o sistema resultante, equivalente a (4.62), pode ser decomposto em dois sistemas lineares independentes. O primeiro é dado por (4.36) e o segundo por (4.63). Portanto, o primeiro sistema é um problema de fluxo de rede definido sobre um digrafo cuja matriz de incidência é a matriz de coeficientes de (4.4) para $n = 2i - 1$. Este digrafo tem $i - 2$ ciclos de comprimento quatro mais um caminho não orientado também de comprimento quatro. O j -ésimo ciclo contém arcos associados às variáveis h_{j+1}^d , h_{2i-1-j}^c , h_{2i-1-j}^d e h_{j+1}^c , e a orientação dos primeiros dois arcos é oposta à orientação dos dois últimos, com respeito a uma orientação arbitrária do ciclo. Nós do

j -ésimo ciclo estão associados às equações $j + 2$, $2i + 2 + j$, $2i - j$ e $2i + 1 + j$.

$$\begin{cases} -h_i^c - \delta - h_i^d = -h_i \\ -h_i^c + h_i^d = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} h_j + \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^j h_j \end{cases} \quad (4.63)$$

Proposição 4.1.6 *Se, para um dado conjunto de inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i})$, o sistema (4.61) tem uma solução inteira não negativa, então existem inteiros não negativos $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i})$ satisfazendo*

$$\sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } k = 0 \\ \leq \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i, k \text{ ímpar} \\ \geq \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq 2i, k \text{ par} \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_{2i} = 1 \\ \gamma_j &= \gamma_{2i-j}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq i-1 \end{aligned} \quad (4.65)$$

e tal que γ_i é par.

Demonstração: Seja $h^{cd} = (h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, 0, h_i^d, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d)$ uma solução inteira não negativa de (4.62) obtida tomando uma solução inteira não negativa de (4.61) e estendendo-a a uma solução de (4.62) tomando δ zero. Empregando o argumento baseado na manipulação de circulações utilizado na prova da Proposição 4.1.2, podemos justificar a afirmação que h^{cd} satisfaz as equações

$$h_j^c h_{2i-j}^d = 0, \quad \text{para } j = 2, \dots, i-1. \quad (4.66)$$

Quando $j = i$, a solução para o sistema homogêneo $\tilde{h}^{cd}$ que é adicionada a h^{cd} é tal que $(\tilde{h}_i^c, \tilde{\delta}, \tilde{h}_i^d) = \min\{h_i^c, h_i^d\}(-1, 2, -1)$ e o restante das componentes são zero. Assim os valores de δ na solução considerada são zero ou um número par positivo.

O restante da prova é análogo à prova da Proposição 4.1.4 de (4.42). ■

Proposição 4.1.7 *Se, para um dado conjunto de inteiros não negativos $(h_0, h_1, \dots, h_{2i}, h_{2i})$, existem inteiros não negativos $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i})$, com γ_i par, que satisfazem (4.64)–(4.65), então o sistema (4.61) tem uma solução inteira não negativa.*

Demonstração: Primeiro construímos uma solução inteira não negativa $\tilde{h}^{cd} = (h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, \delta, h_i^d, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d)$ to (4.62), com δ par:

$$h_{2i-\ell}^d = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ for } 1 \leq \ell \leq i \quad (4.67)$$

$$h_{2i+1-\ell}^c = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ for } i+1 \leq \ell \leq 2i \quad (4.68)$$

$$h_\ell^d = \gamma_\ell + h_{\ell+1}^c, \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq i-1 \quad (4.69)$$

$$h_\ell^c = \gamma_\ell + h_{\ell-1}^d, \quad \text{para } i+1 \leq j \leq 2i-1 \quad (4.70)$$

$$\delta = \gamma_i. \quad (4.71)$$

Como as equações de (4.62) têm a mesma estrutura que (4.34), a prova da Proposição 4.1.5 podem ser facilmente adaptada para mostrar que $\tilde{h}^{cd}$ é uma solução inteira não negativa de (4.62). A suposição que γ_i é par implica que δ é par.

Finalmente, suponha $\delta = 2k$, onde k é um inteiro não negativo. Afirmamos que $h^{cd} = (h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c + k, h_i^d + k, \dots, h_{2i-1}^c, h_{2i-1}^d)$ é uma solução inteira não negativa de (4.61). Para ver isto precisamos apenas verificar as equações contendo h_i^c e h_i^d :

$$\begin{aligned} h_i &= h_i^c + \delta + h_i^d = h_i^c + 2k + h_i^d = (h_i^c + k) + (h_i^d + k), \\ 0 &= h_{i-1}^d - h_i^c + h_i^d - h_{i+1}^c = h_{i-1}^d - h_i^c - k + k + h_i^d - h_{i+1}^c = \\ &= h_{i-1}^d - (h_i^c + k) + (h_i^d + k) - h_{i+1}^c. \end{aligned}$$

■

4.2 Politopos

Nesta seção estudaremos o poliedro $\mathcal{P}$ constituído pelas soluções não negativas de (1) para um dado de índices pré-fixados $(h_0, \dots, h_n)$, que satisfazem as condições de dualidade $\gamma_k = \gamma_{n-k}$, para $k = 0, \dots, n$.

Primeiramente mostramos que $\mathcal{P}$ é um politopo, i.e., um poliedro limitado. Isto segue da restrição de não negatividade sobre γ e do fato que, somando todos os possíveis pares de desigualdades consecutivas em (1), concluímos $\gamma_j \leq h_j$, para $j = 1, \dots, n$.

Além disso, mostramos que este politopo tem vértices inteiros, o que implica que $\mathcal{P}$ é o casco convexo dos vetores inteiros em $\mathcal{P}$. ou, equivalentemente, $\mathcal{P}$ é o casco convexo da

coleção dos vetores de números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse (1).

4.2.1 Caso n ímpar

As Proposições 4.1.2 e 4.1.3 não somente estabelecem que (4.3) tem uma solução se, e somente se, (4.5)–(4.7) também tem uma, elas também mostram como construir um γ não negativo satisfazendo (4.5)–(4.7) de um h^{cd} não negativo apropriado satisfazendo (4.3) e vice-versa. Isto sugere a existência de algum tipo de relacionamento entre os poliedros definidos pelos dois sistemas de desigualdades.

No Capítulo 3 mostramos que o poliedro composto dos h^{cd} não negativos satisfazendo (4.3) é um politopo inteiro, isto é, um poliedro limitado com vértices inteiros. Mais ainda, do desenvolvimento neste capítulo podemos extrair uma “receita” para construir todos os h^{cd} inteiros não negativos deste politopo.

Mostraremos nesta seção que propriedades similares se mantêm para o politopo de γ 's não negativos satisfazendo (4.5)–(4.7). Além disso, o conhecimento ganho sobre a geração de h^{cd} viáveis no Capítulo 3, a construção exibida na prova da Proposição 4.1.3, e as características que serão estabelecidas para este politopo, levam a um mecanismo para construir todos os γ 's pertencentes a este politopo.

Para simplificar a exposição, as condições (4.6)–(4.7) serão usadas para eliminar mais da metade das variáveis, a saber $\gamma_0, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{2i+1}$. Usando as equações (4.6)–(4.7), temos que

$$\sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} \gamma_j = -1 + \sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j.$$

Também note que as condições (4.6) e (4.7) implicam que as restrições correspondendo a $k = 0, 1$ e $2i + 1$ em (4.5) representam, na verdade, restrições sobre o vetor (fixado) $h = (h_0, \dots, h_n)$. Existe uma correspondência 1-a-1 entre $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{2i+1})$'s não negativos satisfazendo (4.5)–(4.7) e $\gamma^r = (\gamma_1, \dots, \gamma_i)$'s não negativos satisfazendo (4.72) abaixo. Assim, ao invés de $\mathcal{P}$, podemos considerar o politopo $\mathcal{P}^r = \{\gamma^r \in \mathbb{R}^i \mid \text{restrições em (4.72)}\}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j, \quad 0 \leq h_0 - 1, \quad 0 \leq h_{2i+1} - 1 \\
\sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j &\leq 1 + \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{for } 2 \leq k \leq 2i, k \text{ even} \\
\sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j &\geq 1 + \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{para } 2 \leq k \leq 2i, k \text{ ímpar} \\
\gamma^r &\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Proposição 4.2.1 *O politopo $\mathcal{P}^r$ dado por (4.72) satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Os vértices de $\mathcal{P}^r$ são inteiros.*
2. *Cada vértice de $\mathcal{P}^r$ pertence a uma das seguintes faces: $\mathcal{F}_i = \{\gamma \in \mathcal{P}^r \mid \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} h_j\}$ ou $\mathcal{F}_0 = \{\gamma \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_i = 0\}$.*
3. *Cada γ^r não negativo (inteiro) em $\mathcal{F}_i$ corresponde a um h^{cd} não negativo inteiro satisfazendo (4.3).*

Demonstração:

1. Seja A a matriz de coeficientes do sistema de desigualdades em $\mathcal{P}^r$, com exceção das restrições de não negatividade. A variável γ_j aparece apenas nas linhas $3+j$ até $3+2i-j$, com coeficientes $(-1)^{j+1}$. Assim a matriz $0,1 \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (|a_{ij}|)$ tem a propriedade de 1's consecutivos, o que implica que é totalmente unimodular, ver [13, 15]. Como A é obtida de $\tilde{A}$ multiplicando colunas pares por -1 , A é também totalmente unimodular. Finalmente note que os elementos do lado direito nas desigualdades que definem o politopo $\mathcal{P}^r$ são claramente inteiros. Assim, o politopo $\mathcal{P}^r$ definido por (4.72) tem vértices inteiros, ou equivalentemente, é o casco convexo dos vetores inteiros satisfazendo as desigualdades em (4.72).
2. Seja $\bar{\gamma}^r \in \mathcal{P}^r$ e seja $M\bar{\gamma}^r = q$ o conjunto de restrições que estão saturadas em $\bar{\gamma}^r$. Então $\bar{\gamma}^r$ é vértice de $\mathcal{P}$ se, e somente se, o posto de M é igual a i . Mas $\tilde{A}$ contém precisamente i colunas, o que implica que M não pode conter uma coluna de zeros. Como existem apenas duas desigualdades contendo γ_i , pelo menos uma delas deve estar saturada em $\bar{\gamma}$, caso contrário a i -ésima coluna de M será o vetor

nulo. Portanto se $\tilde{\gamma}$ é um vértice ele deve pertencer a uma das faces $\mathcal{F}_i = \{\gamma \in \mathcal{P}^r \mid (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{i+1} (1 + \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} h_j)\}$ ou $\mathcal{F}_0 = \{\gamma \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_i = 0\}$.

3. Se $\gamma^r \in \mathcal{P}^r$ (inteiro) pertence a $\mathcal{F}_i$, então γ não negativo dado por $\gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1$ e $\gamma_{2i+1-j} = \gamma_j$, para $j = 1, \dots, i$ satisfaz (4.5)–(4.7) e satura a desigualdade correspondente a $k = i + 1$ em (4.5). Mas então h^{cd} dado pelas equações (4.27)–(4.32) é um vetor não negativo (inteiro) satisfazendo (4.3), como mostrado na prova da Proposição 4.1.3. ■

Suponha que o sistema de equações (4.4) admite soluções não negativas. Seja $\tilde{h}^{cd1}$ a solução inteira não negativa que também satisfaz as condições de complementaridade dadas em (4.8). Seja $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{2i+1})$ a solução inteira não negativa de (4.5)–(4.7) dada por (4.9). Sua restrição $\tilde{\gamma}^r$ representa um papel especial em $\mathcal{P}^r$, como evidenciado na próxima proposição.

Proposição 4.2.2 *Suponha que o sistema de equações (4.4) admite soluções não negativas. Então o politopo $\mathcal{P}^r$ pode ser reescrito como*

$$\mathcal{P}^r = \{0 \leq \gamma^r \in \mathbb{R}^i \mid (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j, \text{ for } 1 \leq k \leq i\}. \quad (4.73)$$

Além disso, $\tilde{\gamma}^r$ é um vértice de $\mathcal{P}^r$ e também seu vetor máximo, componente-a-componente.

Demonstração: Se (4.4) admite soluções não negativas, as restrições $0 = \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j$, $0 \leq h_0 - 1$ e $0 \leq h_{2i+1} - 1$ são redundantes e podem ser descartadas. Agora note que

$$\min\{k-1, 2i+1-k\} = \begin{cases} k-1, & \text{se } 2 \leq k \leq i \\ i = k-1 = 2i+1-k, & \text{se } k = i+1 \\ 2i+1-k, & \text{se } i+2 \leq k \leq 2i \end{cases}$$

Portanto, a soma parcial $\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j$, para $1 \leq \ell \leq i-1$, aparece duas vezes em (4.72), quando $k = \ell + 1$ e quando $k = 2i + 1 - \ell$. Como $\ell + 1$ e $2i + 1 - \ell$ são ou ambos

¹Se as condições de complementaridade (4.8) estão satisfeitas então o subgrafo induzido pelo suporte de $\tilde{h}^{cd}$ é uma floresta, o que implica que $\tilde{h}^{cd}$ é a única solução com um tal suporte.

ímpares ou ambos pares, podemos juntar estas duas desigualdades como segue:

$$\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} \geq 1 + \max\{\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} h_j\}, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i-1, \ell \text{ par} \\ \leq 1 + \min\{\sum_{j=0}^{2i-\ell} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} h_j\}, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i-1, \ell \text{ ímpar.} \end{cases}$$

O fato que $\tilde{\gamma}$ é uma solução inteira não negativa de (4.5)–(4.7) implica que $\tilde{\gamma}^r \in \mathcal{P}^r$. Além disso, usando (4.7), as equações (4.17) e (4.22), para $2 \leq \ell \leq i$ e $k = 2i + 2 - \ell$ (assim $i + 2 \leq k \leq 2i$), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{2i+2-\ell} \tilde{h}_{2i+1-\ell}^d &= \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{2i+2-\ell} \tilde{h}_{2i+1-\ell}^d = \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j \quad (4.74) \\ \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{2i+2-k} \tilde{h}_{2i+2-k}^c &= \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{\ell} \tilde{h}_{\ell}^c = \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} h_j \quad (4.75) \end{aligned}$$

Como, por (4.8), $\tilde{h}_{\ell}^c \tilde{h}_{2i+1-\ell}^d = 0$, pelo menos uma das duas desigualdades acima envolvendo a soma parcial $\sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j$, deve ser satisfeita como igualdade. Assim $\tilde{\gamma}^r$ satisfaz:

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j = \begin{cases} \max\{\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} h_j\}, & \text{se } 2 \leq \ell \leq i, \ell \text{ ímpar} \\ \min\{\sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{j+1} h_j\}, & \text{se } 2 \leq \ell \leq i, \ell \text{ par} \end{cases} \quad (4.76)$$

o que implica (4.73) para $k \neq i$, levando em conta que $\tilde{\gamma}_0 = 1$. Finalmente, a desigualdade em (4.72) correspondendo a $k = i$ é satisfeita como igualdade por $\tilde{\gamma}$, como visto em (4.20) e assim

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j.$$

Os casos pares e ímpares podem ser combinados pela multiplicação adequada, produzindo as desigualdades desejadas, que, juntamente com as restrições de não negatividade, produzem uma definição alternativa para $\mathcal{P}^r$:

$$\begin{aligned} (-1)^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j &< (-1)^{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j, \quad \text{para } 1 \leq \ell \leq i \\ \gamma^r &> 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Isto completa a prova da equivalência entre (4.72) e (4.73).

Finalmente, a primeira desigualdade em (4.77) dá $\gamma_1 \leq \tilde{\gamma}_1$, e, se acrescentamos as desigualdades $j-1$ e j de (4.77) obtemos $\gamma_j \leq \tilde{\gamma}_j$. Assim $\tilde{\gamma}^r$ é o vetor máximo, componente-a-componente, de $\mathcal{P}$. Então $\tilde{\gamma}^r$ deve ser um vértice de $\mathcal{P}^r$. ■

A Proposição 4.2.1 e o argumento na prova da Proposição 4.1.3 expressada em (4.26) implica que $\mathcal{F}_0$ é a projeção de $\mathcal{F}_t$ sobre o hiperplano $\gamma_i = 0$, e $\mathcal{P}$ é o casco convexo de $\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_0$. Também pela Proposição 4.2.1, cada vetor (inteiro) em $\mathcal{F}_t$ pode ser obtido de um h^{cd} correspondente satisfazendo (4.3) (ou, equivalentemente, (4.4)), embora isto não venha a constituir, em geral, uma correspondência 1-a-1. Agora, dada uma solução particular inteira $\tilde{h}^{cd}$, que satisfaça (4.8), podemos construir todos os vetores inteiros em $\mathcal{F}_t$ pela adição sucessiva de circulações à solução particular e cálculo do γ^r correspondente. O seguinte exemplo ilustra estes fatos em um contexto concreto.

Exemplo Seja $n = 2i + 1 = 7$, $(h_0, \dots, h_7) = (2, 5, 11, 10, 5, 3, 3, 3)$. Usando fórmulas desenvolvidas no Capítulo 3 para a solução geral h^{cd} de (4.4) podemos obter a solução (particular) $\tilde{h}^{cd}$ que satisfaz (4.8), $\tilde{h}^{cd} = (1, 4, 3, 8, 5, 5, 0, 3, 0, 1, 2)$, exibida na Figura 4.2. Todas as outras soluções inteiras não negativas de (4.4) podem ser obtidas acrescentando-se múltiplos inteiros da circulação unitária ao longo do ciclo 1, $h^{cd1} = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0)$, e/ou da circulação unitária ao longo do ciclo 2, $h^{cd2} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0)$. De $\tilde{h}^{cd}$ obtemos o vetor $\tilde{\gamma} = (1, 1, 3, 5, 5, 3, 1, 1)$, e, usando a Proposição 4.2.2, o politopo $\mathcal{P}^r$ é dado pelas desigualdades

$$\begin{aligned} \gamma_1 & \leq 1 \\ \gamma_1 - \gamma_2 & \geq -2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 & \leq 3 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

A Figura 4.3 contém quatro vistas do politopo $\mathcal{P}^r$. Neste exemplo nenhuma desigualdade é redundante, e o politopo tem seis faces. A face $\mathcal{F}_0$ está sempre escondida, mas podemos ver com a ajuda da Figura 4.4, que esta face é a projeção da face do topo $\mathcal{F}_t$ sobre o plano $\gamma_3 = 0$. O vetor máximo $\tilde{\gamma}^r$ está rotulado sobre a primeira vista de $\mathcal{P}^r$.

Para ver a relação entre as soluções h^{cd} obtidas como somas de circulações e o γ^r correspondente, é mais conveniente olhar para o “esqueleto” do politopo $\mathcal{P}^r$, descrito na Figura 4.4(a), juntamente com o reticulado determinada pelos vetores inteiros no quadrante não negativo. Os pontos inteiros não negativos pertencentes a $\mathcal{P}^r$ são enfatizados. Denote por $\gamma^1 = \tilde{\gamma}^r$, $\gamma^2, \dots, \gamma^7$ os vetores inteiros pertencentes a $\mathcal{F}_t$, no sentido anti-horário. Note que acrescentar h^{cd1} a h^{cd} tem o efeito de subtrair 1 de γ_1 e γ_2 . Similarmente,

Figura 4.2: Solução $\tilde{h}^{cd}$ do exemplo.

Figura 4.3: Quatro vistas do politopo $\mathcal{P}^r$.

acrescentar h^{cd2} a h^{cd} tem o efeito de subtrair 1 de γ_2 e γ_3 . A Figura 4.4(b) focaliza $\mathcal{F}_t$ e seus pontos inteiros. O seguinte diagrama resume as operações com circulações sobre h^{cd} necessárias para gerar todos os pontos em $\mathcal{F}_t$. Note que não existe uma correspondência 1-a-1 entre os inteiros não negativos h^{cd} satisfazendo (4.4) e os inteiros não negativos γ^r em $\mathcal{F}_t$. Por exemplo, o vetor $h^{cd(4)} + h^{cd2} = (1, 4, 4, 7, 8, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 2)$ é uma solução inteira não negativa válida de (4.4), mas o γ^r correspondente viola as restrições de não negatividade, pois $\gamma_2 \geq 0$.

O conhecimento de $\gamma^1, \dots, \gamma^7$ de fato torna possível calcular todos os pontos inteiros em $\mathcal{P}^r$, já que eles ficam em um dos segmentos $[\gamma^i, \hat{\gamma}_i]$, para $i = 1, \dots, 7$, onde $\hat{\gamma}_j^i = \gamma_j^i$, para $j \neq 3$, e $\hat{\gamma}_3 = 0$.

(a) Grade dos pontos inteiros em $\mathcal{P}^r$.

(b) Pontos inteiros na face $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{P}^r$.

Figura 4.4: Esqueleto do politopo $\mathcal{P}^r$.

4.2.2 Caso $n = 0 \bmod 4$

Suponha $n = 2i$, onde $i \geq 2$ é par. Considere o sistema linear em $\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i}\}$ constituído por (4.38) (4.40) e as restrições de não negatividade (4.78) abaixo.

$$\gamma \geq 0, \quad (4.78)$$

onde o vetor $(h_0, \dots, h_{2i})$ é tal que $\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j h_j$ é par.

A primeira desigualdade em (4.38) pode ser usada para eliminar γ_i do sistema. Isto é realizado ao substituir

$$\gamma_i = (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j \right). \quad (4.79)$$

nas equações contendo γ_i em (4.38), i.e., aquelas correspondentes a $k = 1, \dots, i$. A restrição correspondente a um $k \in \{1, \dots, i\}$ genérico é transformada como segue:

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+1} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2i-k} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{2(i+1)} \left(- \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j \right) \right) \\ &= -(-1)^{k+1} \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j \\ &\leq (-1)^{k+1} \left(\sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j - (-1)^{2(i+1)} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right) \\ &= -(-1)^{k+1} \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \end{aligned}$$

Usando (4.40), as restrições acima tornam-se

$$\begin{aligned} -(-1)^{k+1} \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j &= -(-1)^{k+1} \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_{2i-j} \\ &= -(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \\ &\leq -(-1)^{k+1} \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \end{aligned}$$

e $\gamma_i \geq 0$ implica

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j \right) = \\
 & (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_{2i-j} \right) = \\
 & (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{\ell=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_\ell \right) = \\
 & (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j - 2 \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Portanto existe uma correspondência 1-a-1 entre as soluções $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i})$ de (4.38)–(4.78) e as soluções $\gamma^r = (\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1})$ de (4.80). Assim, podemos simplificar nosso estudo de $\mathcal{P}$ considerando, em seu lugar, $\mathcal{P}^r = \{\gamma^r \in \mathbb{R}^{i-1} \mid \text{restrições em (4.80)}\}$.

$$\begin{aligned}
 & 0 > 1 - h_{2i} \\
 & \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} \leq 1 + \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ ímpar} \\ \geq 1 + \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ par} \end{cases} \\
 & (-1)^i \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \geq (-1)^i \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right) \tag{4.80} \\
 & \sum_{j=1}^{2i-k} (-1)^{j+1} \gamma_j \begin{cases} \leq 1 + \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } i+1 \leq k \leq 2i-1, k \text{ ímpar} \\ \geq 1 + \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } i+1 \leq k \leq 2i-1, k \text{ par} \end{cases} \\
 & 0 \geq 1 - h_0 \\
 & \gamma_j > 0, \quad \text{for } 1 \leq j \leq i-1
 \end{aligned}$$

Proposição 4.2.3 *O politopo $\mathcal{P}^r$ definido por (4.80) tem vértices inteiros e cada γ^r (inteiro) no politopo corresponde a um h^{cd} não negativo (inteiro) satisfazendo (4.34). Cada*

vértice de $\mathcal{P}^r$ pertence a uma das três faces:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &= \left\{ \gamma \in \mathcal{P}^r \mid \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \min \left\{ \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right\} \right\} \\ \mathcal{F}_b &= \left\{ \gamma \in \mathcal{P}^r \mid \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right\} \\ \mathcal{F}_0 &= \{ \gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_{i-1} = 0 \}.\end{aligned}$$

Demonstração: A matriz de coeficientes A correspondente as desigualdades em (4.80), exceto as de não negatividade, é uma matriz $0, \pm 1$. É fácil ver que a matriz $0, 1$ $\tilde{A} = (|a_{ij}|)$ tem propriedade de 1's consecutivos e assim é totalmente unimodular. Como A é obtida de $\tilde{A}$ multiplicando as colunas pares por -1 , esta última matriz é também totalmente unimodular. Levando em conta o fato que o lado direito de (4.80) é inteiro, concluímos que todos os vértices em $\mathcal{P}^r$ são inteiros.

A correspondência entre pontos inteiros de $\mathcal{P}^r$ e h^{cd} satisfazendo (4.34) imita a prova do item 3 da Proposição 4.2.1.

O argumento que justifica a última afirmação é similar ao dado na prova do item 2 da Proposição 4.2.1. Para que um $\tilde{\gamma}^r$ em $\mathcal{P}^r$ seja um vértice, o conjunto de restrições saturadas em $\tilde{\gamma}^r$ deve incluir uma das quatro desigualdades envolvendo γ_{i-1} em (4.80), repetidas abaixo por conveniência. Note que usamos o fato que i é par.

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \leq 1 + \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \quad (4.81)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \leq 1 + \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \quad (4.82)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \geq 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \quad (4.83)$$

$$\gamma_{i-1} \geq 0 \quad (4.84)$$

As desigualdades (4.81)–(4.82) são equivalentes às desigualdades abaixo.

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \leq 1 + \min \left\{ \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right\}. \quad (4.85)$$

Como uma das três desigualdades (4.85), (4.83) ou (4.84), deve estar saturada em um vértice, o vértice deve pertencer a $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_b$ ou $\mathcal{F}_0$, respectivamente. ■

A próxima proposição é a análoga à Proposição 4.2.2 para o caso $n = 0 \pmod{4}$. Como antes, escolhemos o vetor $\tilde{\gamma}$ correspondente à solução $\tilde{h}^{cd}$ de (4.35) satisfazendo (4.41).

Proposição 4.2.4 *Assuma que (4.35) tem uma solução não negativa. Seja $\tilde{\gamma}$ a solução inteira não negativa de (4.38)–(4.40) correspondendo a $\tilde{h}^{cd}$, a solução inteira não negativa de (4.35) que satisfaz (4.41). O politopo $\mathcal{P}^r$ pode ser reescrito como*

$$\mathcal{P}^r = \left\{ 0 \leq \gamma^r \left| \begin{array}{l} (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} h_j, \text{ para } 1 \leq k \leq i-1 \\ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \end{array} \right. \right\} \quad (4.86)$$

Além disso, $\tilde{\gamma}$ (resp., $\tilde{\gamma}^r$) é um vértice e o vetor máximo em $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}^r$), componente-a-componente.

Demonstração: Se assumimos que (4.35) tem uma solução, as desigualdades $0 \geq 1 - h_{2i}$ e $0 \geq 1 - h_0$ são redundantes e podem ser eliminadas. Agrupando o restante das desigualdades em (4.38) temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \gamma_j & \begin{cases} \leq 1 + \min \left\{ \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} h_j \right\} & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ ímpar} \\ \geq 1 + \max \left\{ \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} h_j \right\} & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ par} \end{cases} \\ \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j & \geq 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \\ \gamma_j & \geq 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

for $1 \leq j \leq i-1$

Agora $\tilde{\gamma}$ satisfaz a primeira equação em (4.38) e (4.51). Usando a primeira equação

em (4.38) para eliminar $\tilde{\gamma}_i$ em (4.51), e então usando (4.40), temos

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{2i+1-k} h_{2i-k}^d \\
 &= - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^{2i+1-k} h_{2i-k}^d \\
 &= - \sum_{j=2i+1-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{para } 1 \leq k \leq i
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

A equação (4.54) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j + (-1)^k h_k^c = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{para } 2 \leq k \leq i. \tag{4.89}$$

As equações (4.88) (4.89), os fatos que $\tilde{h}^{cd}$ satisfaz (4.8), $\tilde{\gamma}_0 = 1$ e que $\tilde{\gamma}^r$ satisfaz (4.80) implicam

$$\min \left\{ \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} h_j \right\} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j, \quad \text{para } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ ímpar}$$

e

$$\max \left\{ \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=0}^0 (-1)^{j+1} h_j \right\} = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j, \quad \text{para } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ par}.$$

Substituindo as expressões acima em (4.87) obtemos (4.86).

Com respeito da última afirmação da proposição, note que a primeira desigualdade em (4.87) lê-se $\gamma_1 \leq \tilde{\gamma}_1$ e as desigualdades correspondentes a $k = \ell - 1$ e $k = \ell$ implicam $\gamma_\ell \leq \tilde{\gamma}_\ell$, para $2 \leq \ell - 1$. Portanto $\tilde{\gamma}^r$ é o vetor máximo, componente-a-componente, de $\mathcal{P}^r$. Isto implica que ele é um vértice de $\mathcal{P}^r$. Finalmente, (4.79) e (4.86) implicam, usando o fato que i é par,

$$\gamma_i = 2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j - \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right) \leq 2 \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j - \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right),$$

que dá um limite superior para γ_i , realizado por $\tilde{\gamma}_i$. Assim $\tilde{\gamma}$ é o vetor máximo em $\mathcal{P}$, componente-a-componente, e portanto um vértice de $\mathcal{P}$. ■

O próximo exemplo ilustra a relação entre as soluções inteiras não negativas h^{cd} de (4.35) e os vetores inteiros γ^r de $\mathcal{P}^r$.

Exemplo Seja $n = 2i = 8$ e $(h_0, \dots, h_8) = (3, 5, 7, 8, 5, 2, 2, 2, 2)$. A Figura 4.5 dá uma representação não ortodoxa para as restrições (4.35). Note que os dois arcos pendurados nos dois nós mais à direita representam a mesma variável, a saber h_4^d . Isto não está de acordo com as convenções assumidas para problemas de flucos em redes. Assim, enquanto h^{cd1} e h^{cd2} , estão associados aos ciclos 1 e 2 como no último exemplo, existe uma terceira “circulação” h^{cd3} cujo suporte é dado por $(h_4^c, \beta, h_4^d) = (1, -2, 1)$. No entanto, se levarmos esta anomalia em consideração, podemos ainda usar a figura para rapidamente calcular todas as possíveis soluções inteiras, que podem ser obtidas acrescentando múltiplos inteiros de h^{cdi} , para $1 \leq i \leq 3$, à solução $\tilde{h}^{cd}$ satisfazendo (4.41) descrita na Figura 4.5.

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 & \leq 1 \\
 \gamma_1 - \gamma_2 & \geq -1 \\
 \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 & \leq 1 \\
 \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 & \geq 0 \\
 \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 & \geq 0
 \end{aligned}$$

Figura 4.5: Solução $\tilde{h}^{cd}$ do exemplo.

O Polítopo $\mathcal{P}^r$ correspondente a um determinado dado é mostrado na Figura 4.6. Todos os inteiros γ^r podem ser obtidos começando no vetor máximo $\tilde{\gamma}^r$ e adicionando múltiplos inteiros apropriados dos vetores $(-1, -1, 0)$, $(0, -1, -1)$, $(0, 0, -1)$, $(1, 0, -1)$ e

$(-1, 0, 0)$. A operação correspondente sobre h^{cd} é mostrada abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\gamma} & \xrightarrow{(-1, -1, 0)} & \hat{\gamma} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \bar{h}^{cd} & \xrightarrow{+h^{cd1}} & \hat{h}^{cd}
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\gamma} & \xrightarrow{(0, -1, -1)} & \hat{\gamma} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \bar{h}^{cd} & \xrightarrow{+h^{cd2}} & \hat{h}^{cd}
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\gamma} & \xrightarrow{(0, 0, -1)} & \hat{\gamma} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \bar{h}^{cd} & \xrightarrow{+h^{cd3}} & \hat{h}^{cd}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\gamma} & \xrightarrow{(1, 0, -1)} & \hat{\gamma} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \bar{h}^{cd} & \xrightarrow{+h^{cd2} - h^{cd1}} & \hat{h}^{cd}
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\gamma} & \xrightarrow{(1, 0, 0)} & \hat{\gamma} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \bar{h}^{cd} & \xrightarrow{-h^{cd1} + h^{cd2} - h^{cd3}} & \hat{h}^{cd}
 \end{array}
 \end{array}$$

4.2.3 Caso $n = 2 \bmod 4$

Suponha $n = 2i$, onde $i \geq 3$ é ímpar, e $\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} h_j$ é par. As restrições (4.64) são uma cópia de (4.38) e pode ser manipulada como na seção 4.2.2 para obter o sistema equivalente menor (4.80) em $\gamma^r = (\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1})$. As Proposições 4.2.3 e 4.2.4 assim também se mantêm para o caso $n = 2 \bmod 4$, com a regra para a construção de h^{cd} ligeiramente diferente correspondendo a um dado γ satisfazendo (4.64) dado no final da prova da Proposição 4.1.7.

- (a) $\mathcal{F}^1 = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_1 = 1\}$.
 (b) $\mathcal{F}^2 = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_1 - \gamma_2 = -1\}$.
 (c) $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}_t = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 1\}$.

- (d) $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}_b = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0\}$.
 (e) $\mathcal{F}^5 = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_1 = 0\}$.
 (f) $\mathcal{F}^6 = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_2 = 0\}$.

- (g) $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}_0 = \{\gamma^r \in \mathcal{P}^r \mid \gamma_3 = 0\}$.

Figura 4.6: Faces de $\mathcal{P}^r$ e grade inteira.

Capítulo 5

Grafos de Lyapunov, Desigualdades de Poincaré-Hopf e Desigualdades de Morse

Neste capítulo trataremos dos grafos de Lyapunov em toda sua generalidade, isto é, consideraremos grafos em dimensão maior ou igual a dois com cycle number κ . Estaremos generalizando os resultados dos Capítulos 3 e 4. Mais precisamente mostraremos os seguintes dois resultados que generaliza o Teorema de Continuação demonstrado no Capítulo 3.

Teorema 5.0.5 *Considere um fluxo sobre um bloco isolante B e seu semi-grafo de Lyapunov L_B onde o vértice v associado a B é rotulado com $(h_0(v), \dots, h_n(v), \kappa_v)$ então L_B admite continuações a semi-grafos do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ_v se e somente se, L_B satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.20)–(2.16). Mais ainda, $\kappa_v \leq \min\{h_1 - (e^- + h_0 - 1), h_{n-1} - (e^+ + h_n - 1)\}$.*

O Teorema 5.0.5 implica no seguinte teorema.

Teorema 5.0.6 *Todo grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ que satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.20)–(2.16) em cada vértice pode ser continuado a um grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ . Mais ainda, $\kappa \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$.*

No Capítulo 4 foi mostrado que o caso particular das desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) com $\kappa = 0$ são condições necessárias e suficientes para as desigualdades de Morse generalizadas (1) se manterem para algum vetor de números de Betti. Neste capítulo mostraremos que:

Teorema 5.0.7 *Um grafo abstrato Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) se, e somente se, $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfaz as desigualdades de Morse (1) e a desigualdade $\gamma_1 \geq \kappa$ para algum vetor de números de Betti $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$.*

Também neste capítulo estabeleceremos que as desigualdades (1), $\gamma_1 \geq \kappa$ e as restrições que um vetor de números de Betti devem satisfazer, ou seja, $\gamma_0 = \gamma_n = 1$, $\gamma_j = \gamma_{n-j}$, para $j = 1, \dots, n-1$, $\gamma \geq 0$, definem um politopo inteiro, como no capítulo anterior. Mais precisamente mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 5.0.8 *Um grafo $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ que satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf determina o politopo de Morse $\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n)$. Mais ainda, temos $\mathcal{P}_{\kappa_1}(h_0, \dots, h_n) \subset \mathcal{P}_{\kappa_2}(h_0, \dots, h_n)$, para $\kappa_1 \geq \kappa_2$.*

Estes resultados generalizam resultados análogos obtidos no Capítulo 4 para o caso $\kappa = 0$. Note que se $\kappa = 0$, $\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n) = \mathcal{P}(h_0, \dots, h_n)$.

Este capítulo está dividido nas seguintes seções. Na Seção 5.1, mostraremos que o sistema h_κ^{cd} tem uma solução se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes estão satisfeitas. Logo, provaremos um teorema de continuação para grafos abstratos de Lyapunov com a presença de ciclos. Na Seção 5.2 apresentaremos o sistema reduzido h_κ^{cd} que tem uma solução se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas são satisfeitas. Usamos as soluções do sistema reduzido h_κ^{cd} para estabelecer a suficiência das desigualdades de Poincaré-Hopf para que as desigualdades de Morse sejam satisfeitas e por último, provamos a necessidade. Na Seção 5.3 descrevemos o politopo de Morse e provamos o Teorema 5.0.8. Também, propriedades geométricas adicionais do politopo serão apresentadas.

5.1 Resultados de Continuação

A prova do Teorema 5.0.5 é dividida nas duas seguintes proposições. No Capítulo 3 foi demonstrada a seguinte proposição com $\kappa = 0$.

Proposição 5.1.1 *Um vértice do tipo sela v rotulado com $(0, h_1, \dots, h_{n-1}, 0, \kappa)$ pode ser explodido a um semi-grafo de Lyapunov do tipo Morse com cycle rank maior ou igual a κ e $\kappa \leq \min\{h_1 - (e^- - 1), h_{n-1} - (e^+ - 1)\}$, se, e somente se, o sistema h_κ^{cd} (4.1) ou (4.2) tem uma solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d)$.*

Demonstração: Segue diretamente dos passos descritos no algoritmo de explosão do vértice tipo sela para a construção dos sistemas h_κ^{cd} . ■

No Capítulo 3 consideramos as seguintes formas gerais dos sistemas lineares (4.1) e (4.2):

$$n = 2i + 1 \left\{ \begin{array}{l} h_1^c = b_0 \\ \{h_j^c + h_j^d = b_j, \quad j = 1, \dots, 2i\} \\ h_{2i}^d = b_{2i+1} \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1^d - h_2^c - h_{2i}^c + h_{2i-1}^d = \delta_1 \\ h_2^d - h_3^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = \delta_2 \\ \vdots \\ h_i^d - h_{i+1}^c = \delta_i \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

ou

$$n = 2i \left\{ \begin{array}{l} h_1^c = b_0 \\ \{h_j^c + h_j^d + \beta^i = b_j, \quad j = 1, \dots, 2i-1, \quad \beta^i = 0 \text{ se } j \neq i \text{ e } 2i \neq 0 \bmod 4\} \\ h_{2i-1}^d = b_{2i} \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = \delta_1 \\ h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = \delta_2 \\ \vdots \\ h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = \delta_{i-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Os casos especiais (4.1) e (4.2) podem ser obtidos com as seguintes substituições:

$$n = 2i + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = -1 + e^- + \kappa \\ b_j = h_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, 2i \\ b_{2i+1} = -1 + e^+ + \kappa \\ \delta_j = B_j^+ - B_j^-, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1 \\ \delta_i = (B_i^+ - B_i^-)/2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$n = 2i \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = -1 + e^- + \kappa \\ b_j = h_j, \quad \text{for } j = 1, \dots, 2i-1 \\ b_{2i} = -1 + e^+ + \kappa \\ \delta_j = B_j^+ - B_j^-, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Foi também mostrado no Capítulo 3 que o sistema (5.1) pode ser visto como um problema de fluxo em rede por meio de uma mudança adequada de sinais em metade das equações. As variáveis h^{cd} são interpretadas como fluxos sobre os arcos da rede e cada equação pode ser lida como “fluxo que entra – fluxo que sai = constante (demanda/suprimento) associada ao nó”. As redes correspondentes a $n = 2i + 1$ são descritas nas Figuras 5.1 e 5.2, com as constantes associadas aos nós indicadas dentro dos nós. Na imersão planar adotada nesta figura, a forma em zig-zag da componente digrafo da rede forma uma seqüência de losangos com um losango “aberto” em uma das extremidades. Arcos correspondentes as variáveis $(h_1^c, h_1^d, h_2^c, h_2^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, nesta ordem, formam um caminho não orientado Euleriano cobrindo todo o digrafo.

Quando $n = 2i + 1$ e i é par, o digrafo é um pouco diferente, ver o ciclo mais à direita no digrafo da Figura 5.2. Ambos os digrafos contêm uma cadeia de $i - 1$ ciclos de comprimento quatro e a seqüência de arcos associadas com $(h_1^c, h_1^d, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ formam um caminho não orientado que é adjacente ao primeiro ciclo. Os arcos no j -ésimo ciclo estão associados com as variáveis $h_{j+1}^d, h_{2i-j}^c, h_{2i-j}^d$ e h_{j+1}^c , e a orientação dos dois primeiros arcos é oposta a orientação dos dois últimos, com respeito a uma orientação arbitrária do ciclo.

O conjunto das equações (5.2) pode ser visto como um problema de fluxo em rede com restrições adicionais. A Figura 5.3 representa a “rede” para o caso par $n = 0 \bmod 4$. As aspas são necessárias pelo fato de que este problema não pode ser classificado como

Figura 5.1: Rede para o caso $n = 2i + 1$, i ímpar. Figura 5.2: Rede para $n = 2i + 1$, i par.

um problema clássico de fluxo em rede. Note na figura os arcos verticais apontando para baixo na direita. Estes arcos correspondem à mesma variável no sistema linear, o que não é permitido no modelo clássico. Poderíamos associar a cada arco uma variável diferente, digamos $\tilde{h}_i^d$ e $hath_i^d$, e acrescentar a restrição adicional $\tilde{h}_i^d = hath_i^d$, criando assim um problema de fluxo com restrições adicionais. O fato que os arcos estão “pendurados”, ou sejam, não terminam em nós, não é problema: pode-se criar um nó que receba todos estes arcos e colocar como constante para este nó o negativo da soma das constantes de todos os outros nós, pois a equação associada a este nó seria redundante. Note, no entanto, que, se fixamos os valores de h_i^d obtemos um problema de fluxo em rede usual.

A Figura 5.4 descreve a “rede” correspondente ao caso $n = 2 \bmod 4$. Novamente o problema não é um problema clássico de fluxo em rede, as considerações feitas no parágrafo anterior podem ser aplicadas a este caso também. Ambos os problemas são suficientemente próximos do problema clássico, sendo fácil realizar as adaptações necessárias à teoria geral e aos métodos para pode empregá-los na resolução deste caso especial. Portanto, para simplificar a discussão, iremos nos referir a todos estes problemas como problemas de fluxo em rede, chamando atenção para as considerações especiais que os casos pares requerem quando aparecem.

A solução geral do sistema (5.1) (ou (5.2)) é a soma de uma solução particular e uma solução da versão homogênea do sistema, isto é, uma solução que satisfaz a condição “fluxo que entra = fluxo que sai” em todo nó. A primeira é chamada de *fluxo* e, a última, de *circulação*. Assim o conjunto de circulações é um subespaço linear, o espaço nulo da matriz dos coeficientes do sistema linear. Rockafellar em [20] mostrou que um vetor de um espaço linear é a soma de vetores elementares deste espaço. Um *vetor elementar* de um subespaço é um vetor deste subespaço com suporte mínimo. É bem conhecido que as circulações elementares são aquelas cujo suporte corresponde a um ciclo simples no digrafo.

Portanto as soluções elementares de (5.1) e (5.2) são fáceis de determinar. Nos casos ímpar e par existem uma circulação elementar associada a cada ciclo. Nos casos pares existe uma circulação elementar adicional, associada com aos fluxos na extremidade direita dos digrafos descritos nas Figuras 5.3 e 5.4. No caso $n = 2i = 0 \bmod 4$ (resp., $n = 2i = 2 \bmod 4$), esta circulação adicional tem $(h_i^c, \beta^i, h_i^d) = (1, -2, 1)$ (resp., $(h_i^c, h_i^d) = (11)$) e

componentes restantes iguais a zero. Finalmente, se removermos um arco de cada ciclo e o arco associado a h_i^d (resp., h_i^c) no caso $n = 2i = 0 \bmod 4$ (resp., $n = 2i = 2 \bmod 4$), os arcos restantes formam uma árvore. As colunas da matriz de coeficientes do sistema h_κ^{cd} associadas aos arcos desta árvore são linearmente independentes e assim este subsistema tem uma solução única, se admitir solução (a submatriz do subsistema tem mais linhas do que colunas). Uma solução de um sistema linear cujo suporte corresponde a colunas linearmente independentes da matriz de coeficientes do sistema é chamada uma *solução básica*. Geometricamente, estas soluções básicas correspondem a pontos extremos, ou vértices, do poliedro definido pelas equações de equilíbrio de fluxo e restrições de não negatividade. Pode-se também mostrar que cada vértice está associado a alguma árvore. Soluções básicas do sistema (5.1) (ou (5.2)) correspondentes a alguma árvore conhecida são fáceis de calcular: comece nas folhas da árvore (nós com apenas um arco incidente) e determine os fluxos dos arcos incidentes a estes nós; feito isso retire estes nós e arcos da árvore, modificando adequadamente as constantes dos nós adjacentes aos arcos que foram retirados e repita o processo até a retirada de todos os arcos. Em linguagem algébrica, isto é equivalente a permutar as linhas e colunas da submatriz associada ao problema de fluxo na árvore de modo a torná-la triangular e então resolver o sistema linear correspondente por substituição.

Proposição 5.1.2 *Os sistemas h_κ^{cd} (4.1) e (4.2) têm soluções inteiras não negativas se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.20), (2.7) e (2.16), para blocos isolantes estão satisfeitas. Mais ainda, o conjunto de todas as soluções para o sistema h_κ^{cd} podem ser obtidas de uma única solução básica e das circulações elementares do problema de fluxo em redes correspondente.*

Demonstração: O truque para mostrar a equivalência entre os problemas de fluxo em rede e as desigualdades de Poincaré-Hopf no Capítulo 3 foi dividir o problema de fluxo em rede em um conjunto de i , no caso n ímpar, ou $i + 1$, no outro caso, problemas independentes menores de fluxo de rede. O primeiro passo tomado foi dividir o problema em dois. Isto foi feito eliminando do sistema as variáveis h_1^c , h_1^d , h_{n-1}^c e h_{n-1}^d , cujos valores são facilmente determinados do sistema. Em termos de rede, isto é equivalente a dividir a rede em duas, como descrito na Figura 5.5.

Figura 5.5: Dividindo o problema em dois.

Quatro variáveis em (5.1), ou (5.2), são determinadas de forma única:

$$\begin{cases} -h_1^c = -b_0 \\ h_1^c + h_1^d = b_1 \\ -h_{n-1}^c - h_{n-1}^d = -b_{n-1} \\ h_{n-1}^d = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^c = b_0 \\ h_1^d = b_1 - b_0 \\ h_{n-1}^d = b_n \\ h_{n-1}^c = b_{n-1} - b_n \end{cases} \quad (5.5)$$

A rede da esquerda da Figura 5.5 contém as quatro equações de (5.1), ou (5.2), mostradas acima, mais a equação redundante (por definição de η_1) $h_{n-1}^c - h_1^d = -\eta_1$. Substituindo os valores determinados acima na (única) equação de (5.1), ou (5.2), que contém as quatro variáveis h_1^d , h_2^c , h_{n-1}^c e h_{n-2}^d , obtemos

$$\begin{aligned} h_1^d - h_2^c - h_{n-1}^c + h_{n-2}^d &= \delta_1 \\ \Downarrow \\ h_2^c - h_{n-2}^d &= -\delta_1 + \eta_1, \end{aligned}$$

que é precisamente a equação associada ao nó da extremidade esquerda da rede na direita da Figura 5.5. Como o resto da rede é uma cópia da rede original, todas as equações restantes estão representadas nesta rede. Portanto o problema de fluxo de rede original foi dividido com sucesso em dois problemas de fluxo de rede independentes.

A mesma divisão pode ser feita em cada um dos nós na linha intermediária da rede, os nós com grau 4. A Figura 5.6 fornece as próximas três divisões. Note que $\tilde{\delta}_j$ dá a

soma cumulativa das constantes associadas aos nós à esquerda do nó com constante $\pm\delta_j$ inclusive.

$$\tilde{\delta}_j = \sum_{k=0}^j ((-1)^{k+1} b_k + (-1)^k b_{n-k}) + \sum_{k=1}^j (-1)^k \delta_k, \quad \text{para } j = 1, \dots, i-1. \quad (5.6)$$

Assim todos as constantes dos nós das redes independentes produzidos pelas divisões podem ser expressas em termos das constantes originais.

Figura 5.6: Divisão seguinte.

A Figura 5.7 fornece a última divisão para todos os casos. Note que a divisão de redes correspondentes ao caso $n = 2i + 1$ produz apenas dois tipos de redes: a rede “caminho” na esquerda da Figura 5.5 e a rede “ciclo”, cuja componente do digrafo é um ciclo não orientado de comprimento 4. Um representante típico desta última rede é ilustrado na Figura 5.8. Por outro lado, a divisão de redes correspondentes ao caso $n = 2i$ produzem três tipos de redes, dois deles coincidem com os obtidos no primeiro caso, mas o último não é em geral uma rede pois contém os problemáticos arcos “pendurados”, associados ao mesmo fluxo, ver Figura 5.7.

O problema de determinar se (5.1) (ou (5.2)) tem uma solução inteira não negativa se reduz a verificar se cada um dos sistemas lineares independentes produzidos com a divisão tem tal solução. Isto segue diretamente, dada a estrutura simples dos sistemas lineares independentes.

O primeiro sistema linear, correspondendo à rede caminho, é o mais fácil, pois tem solução única. Levando em conta que b e δ são vetores inteiros não negativos, a única

Figura 5.7: Últimos problemas independentes.

solução, dada em (5.5), é trivialmente inteira. Assim a solução será não negativa e inteira se, e somente se, as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} b_0 &\geq 0 \\ b_1 &\geq b_0 \\ b_n &\geq 0 \\ b_{n-1} &\geq b_n. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Foi mostrado no Capítulo 3 que o sistema linear correspondendo à rede ciclo da Figura 5.8 tem uma solução inteira não negativa se, e somente se, as seguintes condições se verificam:

$$-\theta + \alpha + d + \xi = 0 \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} d &\geq -\alpha \\ \theta &\geq \alpha \end{aligned} \tag{5.9}$$

Além disso, a solução geral (solução particular mais múltiplos de circulações elementares) para este sistema linear é $(x, y, z, w) = (\alpha, \theta - \alpha, d, 0) + m(1, -1, -1, 1)$. O número de soluções inteiras não-negativas é o número de valores inteiros admissíveis para m , isto é, aqueles para os quais (x, y, z, w) é não negativo. Note que (5.8) está satisfeita por construção para todas as redes produzidas pela divisão, exceto a última rede obtida na decomposição da rede original quando $n = 2i + 1$. Assim para $n = 2i + 1$, uma condição no conjunto de condições necessárias e suficientes para a existência de soluções inteiras não negativas de (5.1) é

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\delta}_{i-1} + (-1)^{i+1}b_i + (-1)^ib_{i+1} + (-1)^i\delta_i \\ &= \sum_{k=0}^{i-1}((-1)^{k+1}b_k + (-1)^kb_{n-k}) + \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k\delta_k + (-1)^{i+1}b_i + (-1)^ib_{i+1} + (-1)^i\delta_i \\ &= \sum_{k=0}^i((-1)^{k+1}b_k + (-1)^kb_{n-k}) + \sum_{k=1}^i(-1)^k\delta_k. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Substituindo os valores de b e δ dados por (5.3) na equação (5.10) obtemos a igualdade de Poincaré-Hopf (2.7), que deve ser satisfeita no caso $n = 2i + 1$.

Se $n = 2i = 0 \pmod{4}$, então foi mostrado no Capítulo 3 que o último sistema linear, que envolve h_i^e , h_i^d e β^i (ver Figura 5.7), tem uma solução inteira não negativa se, e

Figura 5.8: Exemplo genérico de ciclo de rede.

somente se, as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} b_i &\geq -\bar{\delta}_{i-1} \\ b_i &\geq \bar{\delta}_{i-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

A solução geral deste sistema é $(h_i^c, \beta^i, h_i^d) = (\bar{\delta}_{i-1}, b_i - \bar{\delta}_{i-1}, 0) + m(1, -2, 1)$. Novamente, o número de soluções inteiras não-negativas é o número de valores inteiros admissíveis para m , que, neste caso, são aqueles para os quais (h_i^c, β^i, h_i^d) é não negativo.

No caso $n = 2i = 2 \bmod 4$, o último sistema tem a solução única $(h_i^c, h_i^d) = ((b_i - \bar{\delta}_{i-1})/2, (b_i + \bar{\delta}_{i-1})/2)$, que é não negativa e inteira se, e somente se,

$$b_i - \bar{\delta}_{i-1} \text{ é par} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} b_i &\geq -\bar{\delta}_{i-1} \\ b_i &\geq \bar{\delta}_{i-1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Note que temos os meios para construir soluções para todos os sistemas, e logo, para o sistema original. Com a exceção dos sistemas com solução única, gerar soluções envolve adicionar múltiplos das circulações elementares.

Finalmente, substituindo (5.3) (ou (5.4) nas condições apropriadas, dentre as obtidas (5.7), (5.7), (5.9), (5.8), (5.11), (5.12) e (5.13), concluímos que o sistema h_κ^{cd} tem uma solução se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf (2.20)–(2.16) são satisfeitas. ■

As Proposições 5.1.1 e 5.1.2 implicam no Teorema 5.0.5 e conseqüentemente parte do Teorema 5.0.6, já que cada explosão de um vértice corresponde a uma solução inteira não negativa do sistema h_κ^{cd} .

Em outras palavras, mostramos que se cada vértice de um grafo de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf para blocos isolantes (2.20)–(2.16), o grafo admite uma continuação a um grafo do tipo Morse com cycle rank

maior ou igual a κ . Considerando a implosão do grafo $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ é fácil ver que $\kappa \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$.

Dado $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfazendo as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas (2.21)–(2.23), o conjunto de todas as possíveis continuações determinam a família $\cup_{j \geq \kappa} \mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, j)$ de grafos de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, j)$, $\kappa \leq j \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$.

O número de continuações, isto é, o número de fluxos inteiros não negativos, foi calculado no Capítulo 3 para $\kappa = 0$. Pela Proposição 5.1.2, este número é o número de múltiplos admissíveis da circulação elementar adequada em cada subproblema independente. Como os valores de h_1^c , h_1^d , h_{2i}^c e h_{2i}^d são unicamente determinados, isto é o número de fluxos inteiros não negativos das redes menores obtidos após a eliminação destas quatro variáveis do sistema de equações (5.1) ou (5.2). é fácil verificar que esta eliminação resultará na mesma subrede, independentemente do valor de κ . Assim, o número total de continuações é simplesmente o número de valores possíveis de κ ($1 + \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$) vezes o número de continuações para $\kappa = 0$.

5.2 Resultados sobre as desigualdades de Morse

Como foi mostrado na seção anterior, todo grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ que satisfaz as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas (2.21)–(2.23) podem se continuados a algum grafo na família $\cup_{j \geq \kappa} \mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, j)$ de grafos de Lyapunov $L(h_0, \dots, h_n, j)$, $\kappa \leq j \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}$. Cada grafo nesta família pode ser associado a uma solução inteira não negativa para o sistema h_κ^{cd} adequado.

Também, usando $B_j^- = B_j^+$, $e^- = h_0$ e $e^+ = h_n$ obtemos as versões particulares (5.14) e (5.15) dos sistemas (4.1) e (4.2). Logo, o Corolário 5.2.1 segue diretamente da Proposição 5.1.2.

Corolário 5.2.1 *Os sistemas abaixo tem uma solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d)$ se, e somente se, as desigualdades de Poincaré-Hopf para variedades fechadas*

(2.21)–(2.23) são satisfeitas.

$$n = 2i + 1 \left\{ \begin{array}{l} h_0 - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d, \quad j = 1, \dots, 2i\} \\ h_n - 1 - h_{2i}^d + \kappa = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1^d - h_2^c - h_{2i}^c + h_{2i-1}^d = 0 \\ h_2^d - h_3^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ \vdots \\ h_i^d - h_{i+1}^c = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

$$n = 2i \left\{ \begin{array}{l} h_0 - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d + \beta^i, \quad j = 1, \dots, 2i-1, \quad \beta^i = 0 \text{ se } j \neq i \text{ e } 2i \neq 0 \bmod 4\} \\ h_n - 1 - h_{2i-1}^d + \kappa = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = 0 \\ \vdots \\ h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Nos referimos aos sistemas acima como sistemas h_κ^{cd} reduzidos.

Vale a pena enfatizar que a prova construtiva da equivalência entre a existência de soluções inteiras não negativas para o sistema reduzido h_κ^{cd} e a viabilidade das desigualdades de Poincaré-Hopf (2.21)–(2.23) também produz os métodos para construir todas as soluções do sistema reduzido h_κ^{cd} , um fato que será explorado na Seção 5.3.

A prova que as desigualdades de Poincaré-Hopf implicam as desigualdades de Morse é também construtiva. Produziremos fórmulas para produzir um vetor de números de Betti $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ que satisfaz as desigualdades de Morse de soluções básicas do sistema h^{cd} reduzido (apropriado).

Primeiro consideramos o caso $n = 2i + 1$. Seja h^{cd} uma solução inteira não negativa do sistema h_κ^{cd} reduzido (5.14). Assumiremos que esta solução satisfaz a condição de complementaridade

$$h_j^c h_{2i+1-j}^d = 0, \quad \text{para } j = 2, \dots, i. \quad (5.16)$$

Isto segue do fato que se $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{w})$ é uma solução inteira não negativa do problema do fluxo na rede ciclo descrita na Figura 5.8, então $(x', y', z', w') = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{w}) - \min\{x, w\}(-1, 1, 1, -1)$ é ainda uma outra solução inteira não negativa, satisfazendo $x' w' = 0$. Assim, dada uma solução inteira não negativa arbitrária h^{cd} podemos transformá-la em uma solução inteira não negativa satisfazendo (5.16) somando múltiplos adequados das circulações elementares. Observe que esta nova solução é uma solução básica.

Suponhamos $n = 2i = 0 \pmod{4}$. Sem perda de generalidade podemos considerar uma solução inteira não negativa do sistema h_κ^{cd} reduzido (5.15) que satisfaz (5.16). O argumento para $2 \leq j \leq i - 1$ é o mesmo que antes. Agora se $(\hat{h}_i^c, \hat{\beta}^i, \hat{h}_i^d)$ é uma solução inteira não negativa do último problema independente descrito na Figura 5.7, então $(\tilde{h}_i^c, \tilde{\beta}^i, \tilde{h}_i^d) = (\hat{h}_i^c, \hat{\beta}^i, \hat{h}_i^d) + \min\{\hat{h}_i^c, \hat{h}_i^d\}(-1, 2, -1)$ é uma outra solução deste subproblema que satisfaz (5.16).

Para cuidar do caso $n = 2i = 2 \pmod{4}$, introduzimos o sistema auxiliar abaixo.

$$n = 2i = 2 \pmod{4} \left\{ \begin{array}{l} h_0 - 1 - h_1^c + \kappa = 0 \\ \{h_j = h_j^c + h_j^d + \delta, \quad j = 1, \dots, 2i - 1, \quad \delta = 0 \text{ se } j \neq i\} \\ h_n - 1 - h_{2i-1}^d + \kappa = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} h_1^d - h_2^c - h_{2i-1}^c + h_{2i-2}^d = 0 \\ h_2^d - h_3^c - h_{2i-2}^c + h_{2i-3}^d = 0 \\ \vdots \\ h_{i-1}^d - h_i^c - h_{i+1}^c + h_i^d = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Se (5.15) tem uma solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, h_i^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, então (5.17) tem a solução $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, 0, h_i^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ (simplesmente faça $\delta = 0$). A vantagem de introduzir (5.17) é que agora temos espaço de manobra para transformar uma dada solução inteira não negativa $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_i^c, 0, h_i^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ de (5.17) em uma que satisfaça (5.16) da mesma forma como feito no caso $n = 2i = 0 \pmod{4}$.

Dadas estas soluções básicas pode ser mostrado que as fórmulas abaixo definem vetores

de números de Betti $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ que satisfazem as desigualdades de Morse.

$$\begin{aligned}
 & \gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1 \\
 n = 2i + 1 \quad \gamma_j = & \begin{cases} h_1^d - h_2^c + \kappa, & \text{se } j = 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c, & \text{se } 2 \leq j < i \\ h_i^d, & \text{se } j = i \\ h_{i+1}^c, & \text{se } j = i + 1 \\ -h_{j-1}^d + h_j^c, & \text{se } i + 2 \leq j \leq 2i - 1 \\ -h_{2i-1}^d + h_{2i}^c + \kappa, & \text{se } j = 2i \end{cases} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma_0 = \gamma_{2i} = 1 \\
 n = 2i \quad \gamma_j = & \begin{cases} h_1^d - h_2^c + \kappa, & \text{se } j = 1 \\ h_j^d - h_{j+1}^c, & \text{se } 2 \leq j < i - 1 \\ \beta^i, & \text{se } j = i \text{ e } 2i = 0 \bmod 4 \\ \delta, & \text{se } j = i \text{ e } 2i = 2 \bmod 4 \\ -h_{j-1}^d + h_j^c, & \text{se } i + 1 \leq j \leq 2i - 2 \\ -h_{2i-2}^d + h_{2i-1}^c + \kappa, & \text{se } j = 2i - 1 \end{cases} \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

O único papel da condição de complementaridade (5.16) é garantir a não negatividade de γ definido acima. Outras soluções dos sistemas h_κ^{cd} reduzidos levam a vetores de números de Betti que satisfazem as desigualdades de Morse e as condições de dualidade mas podem ter componentes negativas. Estes vetores de números de Betti não serão considerados neste contexto.

Dado o Corolário 5.2.1, a parte da suficiência do Teorema 5.0.7 é estabelecida pela seguinte proposição, que foi provada no Capítulo 4 para $\kappa = 0$.

Proposição 5.2.2 *Se o sistema h_κ^{cd} reduzido tem uma solução inteira não negativa, então existe um vetor de números de Betti inteiro não negativo $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ que satisfaz as desigualdades de Morse (1) e a desigualdade $\gamma_1 > \kappa$.*

Demonstração:

Caso $n = 2i + 1$.

Por definição (5.18), γ é claramente inteiro. As equações $h_j^d - h_{j+1}^c - h_{2i+1-j}^c + h_{2i-j}^d = 0$ em (5.14), para $j = 1, \dots, i - 1$, implicam $\gamma_j = \gamma_{2i+1-j}$, para $j = 1, \dots, i - 1, i + 2, \dots, 2i$.

Da mesma forma, as equações $h_i^d - h_{i+1}^c = 0$ em (5.14) implicam que $\gamma_i = \gamma_{i+1}$. Portanto o vetor γ dado por (5.18) satisfaz as condições $\gamma_j = \gamma_{2i+1-j}$, para $j = 0, \dots, 2i+1$.

Para mostrar que $\gamma \geq 0$ é suficiente mostrar que γ_j ou γ_{2i+1-j} , para $1 \leq j \leq i-1$, é não negativo, já que $\gamma_j = \gamma_{2i+1-j}$, para $j = 0, \dots, 2i+1$, $\gamma_i = \gamma_{i+1} = h_i^d \geq 0$ e $\gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1$. A definição de γ e (5.16) implicam isto, já que

$$h_{j+1}^c h_{2i-j}^d = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_{j+1}^c = 0 \Rightarrow \gamma_{2i+1-j} = \gamma_j = h_j^d - h_{j+1}^c = h_j^d \geq 0 \\ \text{ou} \\ h_{2i-j}^d = 0 \Rightarrow \gamma_j = \gamma_{2i+1-j} = -h_{2i-j}^d + h_{2i+1-j}^c = h_{2i+1-j}^c \geq 0 \end{cases} \quad \text{para } 2 \leq j \leq i-1$$

e

$$h_2^c h_{2i-1}^d = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_2^c = 0 \Rightarrow \gamma_{2i} = \gamma_1 = h_1^d - h_2^c + \kappa = h_1^d + \kappa \geq \kappa \geq 0 \\ \text{ou} \\ h_{2i-1}^d = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_{2i} = -h_{2i-1}^d + h_{2i}^c + \kappa = h_{2i}^c + \kappa \geq \kappa \geq 0 \end{cases} \quad \text{para } 2 \leq j \leq i-1.$$

Dado que $h_j = h_j^c + h_j^d$, $j = 1, \dots, 2i$, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j &= -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - h_{2i}^d + h_{2i+1} \\ &= -1 + \kappa + \sum_{j=1}^{2i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - \kappa + 1 \\ &= -\gamma_0 + h_1^d - h_2^c + \kappa + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) \\ &\quad + (-1)^{i+1} h_i^d - (-1)^{i+1} h_{i+1}^c \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{2i-2} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + h_{2i-1}^d - h_{2i}^c - \kappa + \gamma_{2i+1} \\ &= -\gamma_0 + \gamma_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{i+1} \gamma_i + (-1)^{i+2} \gamma_{i+1} \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{2i-2} (-1)^{j+1} (-\gamma_{j+1}) + (-1)^{2i+1} \gamma_{2i} + \gamma_{2i+1} \\ &= \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} \gamma_j. \end{aligned}$$

Logo, provamos a igualdade de Morse, e primeira equação em (1).

Analogamente, pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} h_j &= -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{\ell+1} h_{\ell}^d \\ &= -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{\ell+1} h_{\ell+1}^c. \end{aligned}$$

As equações acima implicam que

$$\sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} h_j = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{\ell+1} h_{\ell}^d, & \text{se } i+1 \leq \ell \leq 2i \\ \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \gamma_j, & \text{se } \ell = i \\ \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{\ell+1} h_{\ell+1}^c, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i-1. \end{cases} \quad (5.20)$$

Assim, levando em consideração a não negatividade de $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$, obtemos todas exceto a última desigualdade de Morse a partir de (5.20).

Pelo sistema $h_{(\kappa)}^{cd}$ reduzido temos que $h_0 = h_1^c - (\kappa - 1)$. Como $\gamma_0 = 1$, isto implica que $h_0 = h_1^c - \kappa + \gamma_0$. Como $h_1^c \geq \kappa$ se $h_0 \geq \gamma_0$, fica assim estabelecida a última desigualdade de Morse.

Caso $n = 2i$.

Este caso é análogo ao caso de dimensão ímpar. A integralidade e não negatividade seguem da integralidade e não negatividade da solução de h^{cd} e da condição de complementaridade. Com relação à satisfação das desigualdades de Morse, daremos detalhes para o caso $2i = 0 \pmod{4}$. Os argumentos podem ser facilmente adaptados para o caso $2i = 2 \pmod{4}$ simplesmente substituindo β^i por δ .

Somando as primeiras $2i + 1$ equações de (5.15) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j &= -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} \beta^i + h_{2i-1}^d - h_{2i} \\
&= -1 + \kappa + \sum_{j=1}^{2i-2} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} \beta^i + \kappa - 1 \\
&= -\gamma_0 + h_1^d - h_2^c + \kappa + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} \beta^i \\
&\quad + \sum_{j=i}^{2i-3} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) - h_{2i-2}^d + h_{2i-1}^c + \kappa - \gamma_{2i} \\
&= -\gamma_0 + \gamma_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{i+1} \gamma_i \\
&\quad + \sum_{j=i}^{2i-2} (-1)^{j+1} (-\gamma_{j+1}) + \gamma_{2i-1} - \gamma_{2i} \\
&= \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} \gamma_j.
\end{aligned}$$

Logo, provamos a igualdade de Morse.

As próximas equações são obtidas de modo análogo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} h_j &= \begin{cases} -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{i+1} \beta^i + (-1)^{\ell+1} h_{\ell}^d, \\ \text{se } i \leq \ell \leq 2i-1 \\ -h_0 + h_1^c + \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} (h_j^d - h_{j+1}^c) + (-1)^{\ell+1} h_{\ell+1}^c, \\ \text{se } 1 \leq \ell < i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{\ell+1} h_{\ell}^d, & \text{se } i \leq \ell \leq 2i-1 \\ \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} \gamma_j + (-1)^{\ell+1} h_{\ell+1}^c, & \text{se } 1 \leq \ell \leq i-1. \end{cases} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

A não negatividade de $(h_1^c, h_1^d, \dots, h_{2i}^c, h_{2i}^d)$ implica em todas exceto a última desigualdade de Morse. A última desigualdade é estabelecida exatamente como no caso $n = 2i + 1$. ■

Provamos a seguir a necessidade das desigualdades de Poincaré-Hopf no Teorema 5.0.7 para as desigualdades de Morse serem satisfeitas.

Conclusão da prova do Teorema 5.0.7:

Pela desigualdade (1) de (1) temos que

$$h_1 \geq \gamma_1 - \gamma_0 + h_0.$$

Usando o fato que $\gamma_1 \geq \kappa$ temos

$$h_1 \geq \kappa - 1 + h_0.$$

Pela dualidade dos índices de Conley e usando o fato que $\gamma_{n-1} \geq \kappa$ temos

$$h_{n-1} \geq \kappa - 1 + h_n,$$

e portanto obtemos as desigualdades (1) de (2.21).

Para $j = 2, \dots, i$, segue o procedimento descrito abaixo. Da desigualdade (j) de (1) temos que

$$\begin{aligned} h_j &\geq \gamma_j - \gamma_{j-1} + \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 + h_{j-1} - h_{j-2} + \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 \\ &\geq -\gamma_{j-1} + \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 + h_{j-1} - h_{j-2} + \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_j + \gamma_{j-1} - \gamma_{j-2} + \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 \geq h_{j-1} - h_{j-2} + \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 \quad (5.22)$$

Também segue das desigualdades de Morse duais que

$$\gamma_{j-1} - \gamma_{j-2} + \dots \pm \gamma_2 \pm \gamma_1 \pm \gamma_0 \leq h_{n-(j-1)} - h_{n-(j-2)} + \dots \pm h_{n-2} \pm h_{n-1} \pm h_n \quad (5.23)$$

Substituindo (5.23) em (5.22) temos que

$$\begin{aligned} h_j + h_{n-(j-1)} - h_{n-(j-2)} + \dots \pm h_{n-2} \pm h_{n-1} \pm h_n &\geq h_{j-1} - h_{j-2} + \dots \pm h_2 \pm h_1 \pm h_0 \\ \Rightarrow h_j &\geq -(h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) + (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \pm (h_{n-1} - h_1) \pm (h_n - h_0) \end{aligned}$$

Multiplicando por (-1) temos que

$$-h_j \leq (h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) - (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \pm (h_{n-1} - h_1) \pm (h_n - h_0) \quad (5.24)$$

Usando a dualidade dos índices de Conley temos que

$$-\bar{h}_j \leq (\bar{h}_{n-(j-1)} - \bar{h}_{j-1}) - (\bar{h}_{n-(j-2)} - \bar{h}_{j-2}) + \dots \pm (\bar{h}_{n-1} - \bar{h}_1) \pm (\bar{h}_n - \bar{h}_0) \quad (5.25)$$

Finalmente multiplicando por (-1) e usando a dualidade dos índices de Conley, $\bar{h}_j = h_{n-j}$, temos que

$$h_{n-j} \geq (h_{n-(j-1)} - h_{j-1}) - (h_{n-(j-2)} - h_{j-2}) + \dots \pm (h_{n-1} - h_1) + (h_n - h_0) \quad (5.26)$$

Logo obtemos as desigualdades (j) de (2.21) com $j = 2, \dots, i-1$.

Para obter as desigualdades nas dimensões médias o procedimento é análogo. Contudo, devemos observar que se $n = 2i$ temos que $n - i = i$ e logo h_i é dual a ele mesmo. Se $n = 2i + 1$ o dual de h_i é h_{i+1} . ■

Apresentaremos um exemplo na Figura 5.9 de um grafo de Lyapunov em dimensão 7, que pode possivelmente representar um fluxo sobre uma variedade M de dimensão 7. Se este é o caso, lembre que cada aresta do grafo representa uma variedade N conexa e fechada de dimensão 6 vezes um intervalo e logo é necessário somente rotular com os números de Betti $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ da variedade N . Na Figura 5.9 o grafo abstrato de Lyapunov $L(h_0, h_1, \dots, h_7, \kappa) = L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$ é apresentado. Teoricamente, cada vértice v deve ser rotulado com $(h_0(v), h_1(v), \dots, h_7(v), \kappa_v)$. Contudo, se este vetor contém muitos zeros, por exemplo, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa = 0)$ adotamos a notação alternativa $h_1 = 1$ conforme mencionamos na introdução. Sempre que um vértice é rotulado com $h_j = 1$, $j \neq 0, 7$, também especificaremos se o vértice é j -desconectante, j -d, ou $(j-1)$ -conectante, $(j-1)$ -c.

Figura 5.9: Grafo abstrato de Lyapunov $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$

Na Figura 5.10 apresentamos duas possíveis continuações de $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa =$

2) que pertencem à família $\mathcal{L}(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$. Note que qualquer grafo em $\mathcal{L}(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$ deve ter cycle number $2 \leq \leq \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_6 - (h_7 - 1)\} =$

3. Lembre que κ está relacionado ao primeiro número de Betti γ_1 da variedade M pela desigualdade $\gamma_1 \geq \kappa$.

Figura 5.10: Grafos na família $\mathcal{L}(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$.

Finalmente, na Figura 5.11 apresentamos a implusão de $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$.

5.3 Politopo de Morse

Considere um conjunto de dados de índice pré-fixado $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ e seja κ um inteiro no intervalo $[0, \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{n-1} - (h_n - 1)\}]$. A permissão da existência de ciclos adiciona uma desigualdade extra $\gamma_1 \geq \kappa$ ao conjunto das desigualdades de Morse. Este conjunto maior de desigualdades, mais as restrições de contorno $\gamma_0 = \gamma_n = 1$, as restrições

Figura 5.11: Implosão de $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$.

de dualidade $\gamma_j = \gamma_{n-j}$, para $j = 0, \dots, n$, e as restrições não negativas $\gamma \geq 0$, definem um poliedro $\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n)$, que por simplicidade nos referimos como $\mathcal{P}_\kappa$, em $\mathbb{R}^{n+1}$, que será o assunto desta seção. Este poliedro é de fato um politopo, isto é, um poliedro limitado, já que $0 \leq \gamma \leq h_j$ (temos o limite superior pelas desigualdades (j) e $(j-1)$ de (1)), para $1 \leq j \leq n-1$. Muito será herdado do estudo do politopo de Morse feito no capítulo anterior, já que a adição da desigualdade $\gamma > \kappa$ conduzirá a pequenas modificações do politopo.

O conjunto de soluções não negativas do sistema h_κ^{cd} reduzido (casos especiais de (4.1) e (4.2)) também constituem um politopo. É notável que ambos os politopos tenham vértices inteiros, e que exista uma relação (apesar não 1-a-1) entre os elementos inteiros em cada politopo.

5.3.1 Caso n ímpar

O estudo de $\mathcal{P}_\kappa$ pode ser significativamente simplificado considerando o politopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ reduzido, obtido eliminando $\gamma_0, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{2i+1}$, usando as equações de contorno e dualidade. Estas condições implicam que

$$\sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} \gamma_j = -1 + \sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j.$$

Portanto, $\mathcal{P}_\kappa^r$ é o conjunto de $\gamma^r \in \mathbb{R}^i$ que satisfaz

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^{j+1} h_j, \quad 0 \leq h_0 - 1, \quad 0 \leq h_{2i+1} - 1 \\
 \sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j &\leq 1 + \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{para } 2 \leq k \leq 2i, k \text{ par} \\
 \sum_{j=1}^{\min\{k-1, 2i+1-k\}} (-1)^{j+1} \gamma_j &\geq 1 + \sum_{j=0}^{2i+1-k} (-1)^{j+1} h_j, \quad \text{para } 2 \leq k \leq 2i, k \text{ ímpar} \\
 \gamma^r &\geq 0 \\
 \gamma_1 &\geq \kappa.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Claramente, existe uma correspondência 1-a-1 entre $\gamma^r = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i)$ em $\mathcal{P}_\kappa^r$ e $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2i+1})$ em $\mathcal{P}_\kappa$.

A proposição seguinte estende os resultados obtidos no Capítulo 4 para $\kappa = 0$.

Proposição 5.3.1 *O politopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ dado por (5.27) satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Os vértices de $\mathcal{P}_\kappa^r$ são inteiros.*
2. *Cada vértice de $\mathcal{P}_\kappa^r$ pertence a uma das faces: $\mathcal{F}_i = \{\gamma \in \mathcal{P}_\kappa^r \mid \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} h_j\}$ ou $\mathcal{F}_0 = \{\gamma \in \mathcal{P}_\kappa^r \mid \gamma_i = 0\}$.*
3. *Se $\tilde{\gamma}^r \in \mathcal{F}_i$, então $(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{i-1}, 0) \in \mathcal{F}_0$, isto é, $\mathcal{F}_0$ é a projeção de $\mathcal{F}_i$ sobre o plano $\gamma_i = 0$.*
4. *Cada γ^r (inteiro) em $\mathcal{F}_i$ corresponde a um h^{cd} (inteiro) não negativo satisfazendo (5.14).*

Demonstração:

1. No Capítulo 4 foi mostrado que a matriz de coeficientes correspondendo a todas, exceto a última, as desigualdades em (5.27) é totalmente unimodular. Mas a linha de coeficientes correspondendo à última desigualdade é $(1, 0, \dots, 0)$. Anexando uma tal linha a uma matriz totalmente unimodular preserva esta propriedade. Como o lado direito é obviamente inteiro, os vértices de $\mathcal{P}_\kappa^r$ são inteiros.

2. A prova para a proposição correspondente no Capítulo 4 pode ser aplicada literalmente aqui.
3. Apenas duas das desigualdades em (5.27) contém γ_i : $\gamma_i \geq 0$ e $(-1)^{i+1} \sum_{j=1}^i (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{i+1} (1 + \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} h_j)$ (a desigualdade obtida quando $k = i + 1$). A última é equivalente a

$$(-1)^{i+1} (-1)^{i+1} \gamma_i = \gamma_i \leq (-1)^{i+1} \left(1 - h_0 + h_1 \sum_{j=2}^i (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) \right).$$

Para $\tilde{\gamma}^r \in \mathcal{F}_t$ a desigualdade acima é

$$\tilde{\gamma}_i = \tilde{u} = (-1)^{i+1} \left(1 - h_0 + h_1 \sum_{j=2}^i (-1)^{j+1} (h_j - \tilde{\gamma}_j) \right).$$

Portanto $(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{i-1}, \xi) \in \mathcal{P}_\kappa^r$ para $0 \leq \xi \leq \tilde{u}$.

4. Dado um γ^r (inteiro) em $\mathcal{F}_t$, considere sua extensão natural γ in $\mathcal{P}_\kappa$, isto é, seja $\gamma_0 = \gamma_{2i+1} = 1$ e $\gamma_{2i+1-\ell} = \gamma_\ell$, para $1 \leq \ell \leq i$. A prova da Proposição 4.1.3 do Capítulo 4 pode ser facilmente adaptada para mostrar que o vetor h^{cd} definido abaixo é uma solução (inteira) não negativa para (5.14):

$$\begin{aligned} h_{2i}^d &= - \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j) + \kappa, \\ h_{2i+1-\ell}^d &= (-1)^\ell \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ para } 2 \leq \ell \leq i \\ h_{2i+2-\ell}^c &= (-1)^\ell \sum_{j=0}^{2i+1-\ell} (-1)^{j+1} (h_j - \gamma_j), \text{ para } i+2 \leq \ell \leq 2i \\ h_1^c &= h_0 - \gamma_0 + \kappa, \\ h_1^d &= \gamma_1 + h_2^c - \kappa, \\ h_\ell^d &= \gamma_\ell + h_{\ell+1}^c, & \text{para } 2 \leq \ell \leq i-1 \\ h_\ell^c &= \gamma_\ell + h_{\ell-1}^d, & \text{para } i+2 \leq \ell \leq 2i-1 \\ h_{2i}^c &= \gamma_{2i} + h_{2i-1}^d - \kappa, \\ h_i^d &= \gamma_i \\ h_{i+1}^c &= \gamma_{i+1}. \end{aligned}$$

■

A Proposição 5.3.1 assim implica que $\mathcal{P}_\kappa$ é o casco convexo dos vetores dos números de Betti inteiros não negativos que satisfazem as desigualdades de Morse e a desigualdade $\gamma_1 \geq \kappa$. Suponha que exista soluções inteiras não negativas de (5.14). Seja $\bar{h}^{cd}$ a solução inteira não negativa do sistema reduzido h_0^{cd} que satisfaz as condições de complementaridade (5.16). Seja $\bar{\gamma}$ o vetor dos números de Betti em $\mathcal{P}_\kappa$ construídos de $\bar{h}^{cd}$ usando (5.18).

Proposição 5.3.2 *Suponha que o sistema reduzido h_κ^{cd} (5.14) admite soluções não negativas. $\mathcal{P}_\kappa^r$ pode ser reescrito como*

$$\mathcal{P}_\kappa^r = \{0 \leq \gamma^r \in \mathbb{R}^i \mid \gamma_1 \geq \kappa, \text{ e } (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \bar{\gamma}_j, \text{ para } 1 \leq k \leq i\}.$$

Além disso, $\bar{\gamma}$ é o vetor máximo de $\mathcal{P}_\kappa^r$, componente a componente.

Demonstração: Esta proposição foi provada no Capítulo 4 para $\kappa = 0$. Assim a primeira afirmação é trivialmente verdadeira, já que $\mathcal{P}_\kappa^r = \mathcal{P}_0^r \cap \{0 \leq \gamma^r \in \mathbb{R}^i \mid \gamma_1 \geq \kappa\}$. Agora note que se $\bar{h}^{cd}$ é a solução do sistema reduzido h_0^{cd} , então $\bar{h}^{cd}(\kappa)$ dado por

$$\begin{aligned} h_1^c(\kappa) &= \bar{h}_1^c + \kappa, \\ \bar{h}_1^d(\kappa) &= \bar{h}_1^d - \kappa = h_1 - (h_0 - 1) - \kappa, \\ h_j^c(\kappa) &= \bar{h}_j^c, & \text{para } 2 \leq j \leq 2i - 1 \\ \bar{h}_j^d(\kappa) &= \bar{h}_j^d, & \text{para } 2 \leq j \leq 2i - 1 \\ \bar{h}_{2i}^c(\kappa) &= h_{2i}^c - \kappa = h_{2i} - (h_{2i+1} - 1) - \kappa, \\ \bar{h}_{2i}^d(\kappa) &= \bar{h}_{2i}^d + \kappa. \end{aligned}$$

é uma solução inteira não negativa do sistema reduzido h_κ^{cd} , para inteiros κ em $[0, \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{2i} - (h_{2i+1} - 1)\}]$. Além disso, o vetor de números de Betti correspondente dado por (5.18) é o mesmo $\bar{\gamma}$. Portanto $\bar{\gamma}^r \in \mathcal{P}_\kappa^r$ para κ em $[0, \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{2i} - (h_{2i+1} - 1)\}]$. Como $\mathcal{P}_{\kappa_1}^r \supset \mathcal{P}_{\kappa_2}^r$ se $\kappa_1 \leq \kappa_2$, e $\bar{\gamma}^r$ pertence a $\mathcal{P}_\kappa^r$, para todo κ em $[0, \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{2i} - (h_{2i+1} - 1)\}]$, concluímos que $\bar{\gamma}^r$ é o vetor máximo de $\mathcal{P}_\kappa^r$, para todo κ em $[0, \min\{h_1 - (h_0 - 1), h_{2i} - (h_{2i+1} - 1)\}]$. ■

Os vários fatos estabelecidos até agora são ilustrados no próximo exemplo. Note que $\mathcal{P}_\kappa^r$ é também o casco convexo de $\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_0$. Além disso, como $\mathcal{F}_0$ é a projeção de $\mathcal{F}_t$ e todos

os elementos em $\mathcal{F}_t$ podem ser obtidos das soluções do sistema h_κ^{cd} reduzido, temos meios, ainda que indiretos, de obter todos os elementos em $\mathcal{P}_\kappa^r$ dos vetores h^{cd} .

Exemplo Seja $n = 2i + 1 = 7$ e $(h_0, \dots, h_7) = (1, 5, 11, 10, 5, 3, 4, 3)$. A solução do sistema reduzido h_0^{cd} que satisfaz (5.16) é $\bar{h}^{cd} = (0, 5, 3, 8, 5, 5, 5, 0, 3, 0, 2, 2)$, e as circulações elementares são $h^{cd1} = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0)$ e $h^{cd2} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0)$, correspondendo a ciclos 1 e 2 descritos na Figura 5.12. O elemento máximo de $\mathcal{P}_0$ é $\bar{\gamma} = (1, 2, 3, 5, 5, 3, 2, 1)$. Assim, a Proposição 5.3.2 implica que politopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ é dado pelas desigualdades

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq 2 \\ \gamma_1 - \gamma_2 &\geq -1 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 &\leq 4 \\ \gamma_1 &\geq \kappa \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Figura 5.12: Solução $\bar{h}^{cd}$ do exemplo.

Neste caso κ pode assumir os valores 0, 1 e 2. A Figura 5.13 descreve os três politopos, delineando suas arestas e enfatizando seus elementos inteiros. A relação entre dois γ^r 's em $\mathcal{F}_t$ e seus h^{cd} 's correspondentes pode ser obtida pela base na seguinte tabela.

$\hat{\gamma}^r - \bar{\gamma}^r$	$\hat{h}^{cd} - \bar{h}^{cd}$
$(-1, -1, 0)$	h^{cd1}
$(0, -1, -1)$	h^{cd2}

Assim a solução do sistema reduzido h_0^{cd} correspondente a $\hat{\gamma}^r = (1, 2, 5) = \bar{\gamma}^r + (-1, -1, 0)$ é $h^{cd} = \bar{h}^{cd} + h^{cd1} = (0, 5, 4, 7, 5, 5, 5, 0, 2, 1, 2, 2)$. Da mesma forma, se $\hat{\gamma}^r = (1, 1, 4) = \bar{\gamma}^r + (-1, -2, -1) = \bar{\gamma}^r + (-1, -1, 0) + (0, -1, -1)$, então $h^{cd} = \bar{h}^{cd} + h^{cd1} + h^{cd2} = (0, 5, 4, 7, 6, 4, 4, 4, 2, 1, 2, 2)$.

(a) $\mathcal{P}_0^r$ e seus elementos inteiros. (b) $\mathcal{P}_1^r$ e seus elementos inteiros. (c) $\mathcal{P}_2^r$ e seus elementos inteiros.Figura 5.13: Politopos $\mathcal{P}_\kappa^r$.

Apenas como curiosidade mostramos na Figura 5.14 todos os γ^r 's inteiros que são gerados de soluções inteiras, não necessariamente não negativas, para o sistema reduzido h_κ^{cd} . Como o fluxo no ciclo 1 pode variar de 0 a 3 e no ciclo 2 de 0 a 5, existem 24 fluxos inteiros não negativos que resolvem o sistema h_κ^{cd} . Como esperado, os γ^r 's correspondentes satisfazem as desigualdades de Morse (de fato, eles pertencem a $\{\gamma^r \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 4\}$), mas não são necessariamente não negativos.

Figura 5.14: Face estendida $\mathcal{F}_t$ produzida pela circulação.

5.3.2 Caso n par

Inicialmente, seja $n = 2i$, onde $i \geq 2$ é par, e suponha que o conjunto de dados de índice pré-fixado $(h_0, \dots, h_{2i})$ é tal que $\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j h_j$ é par. Neste caso temos as condições de dualidade para eliminar $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{2i-1}$, as condições de fronteira para eliminar γ_0 e γ_{2i} , e a primeira equação em (1) para eliminar γ_i do sistema de desigualdades que define $\mathcal{P}_\kappa$. Como antes, o sistema resultante de desigualdades (5.28) em $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1})$ define um polítopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ cujos elementos estão em correspondência 1-a-1 com os elementos de $\mathcal{P}_\kappa$.

Detalhes da dedução de (5.28) são provados no Capítulo 4.

$$\begin{aligned}
0 &\geq 1 - h_{2i} \\
\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \gamma_j &\begin{cases} \leq 1 + \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ ímpar} \\ \geq 1 + \sum_{j=2i-k}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } 1 \leq k \leq i-1, k \text{ par} \end{cases} \\
(-1)^i \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j &\geq (-1)^i \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right) \tag{5.28} \\
\sum_{j=1}^{2i-k} (-1)^{j+1} \gamma_j &\begin{cases} \leq 1 + \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } i+1 \leq k \leq 2i-1, k \text{ ímpar} \\ \geq 1 + \sum_{j=0}^{2i-k} (-1)^{j+1} h_j, & \text{se } i+1 \leq k \leq 2i-1, k \text{ par} \end{cases} \\
0 &\geq 1 - h_0 \\
\gamma_j &\geq 0, \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \\
\gamma_1 &\geq \kappa.
\end{aligned}$$

A seguinte proposição foi provada no Capítulo 4 para o caso $\kappa = 0$.

Proposição 5.3.3 *O politopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ definido por (5.28) tem vértices inteiros e cada γ^r (inteiro) no politopo corresponde a um h^{cd} (inteiro) não negativo satisfazendo (5.15). Cada vértice de $\mathcal{P}_\kappa^r$ pertence a uma das três faces:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t &= \left\{ \gamma \in \mathcal{P}_\kappa^r \mid \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \min \left\{ \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j, \sum_{j=i+1}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right\} \right\} \\
\mathcal{F}_b &= \left\{ \gamma \in \mathcal{P}_\kappa^r \mid \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \right\} \\
\mathcal{F}_0 &= \{ \gamma^r \in \mathcal{P}_\kappa^r \mid \gamma_{i-1} = 0 \}.
\end{aligned}$$

Demonstração: A prova no Capítulo 4 pode ser facilmente adaptada ao caso $\kappa \neq 0$, como feito para Proposição 5.3.1. ■

As desigualdades definindo $\mathcal{P}_\kappa^r$ podem ser bem simplificadas se recorremos ao uso de $\bar{\gamma}$, o vetor dos números de Betti em $\mathcal{P}_\kappa$ correspondendo a solução $\bar{h}^{cd}$ do sistema reduzido h_κ^{cd}

que satisfaz as condições de complementaridade (5.16). A próxima proposição é análoga à Proposição 5.3.2 para o caso $n = 0 \bmod 4$.

Proposição 5.3.4 *Suponha que (5.15) tem uma solução não negativa. O politopo $\mathcal{P}_\kappa^r$ pode visto como*

$$\mathcal{P}_\kappa^r = \left\{ 0 \leq \gamma^r \left| \begin{array}{l} (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \gamma_j \leq (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \tilde{\gamma}_j, \text{ para } 1 \leq k \leq i-1 \\ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} \gamma_j \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^{j+1} h_j \\ \gamma_1 \geq \kappa \end{array} \right. \right\} \quad (5.29)$$

Além disso, $\tilde{\gamma}^r$ é o vetor máximo em $\mathcal{P}_\kappa^r$, componente a componente.

Demonstração: A adaptação da prova da proposição correspondente no Capítulo 4 imita o que foi feito na prova da Proposição 5.3.2. ■

Desenvolvimentos análogos, isto é, redução no número de variáveis e versões das Proposições 5.3.3 e 5.3.4 podem ser obtidas para os casos $n = 2 \bmod 4$ diretamente.

Concluimos esta seção com a observação que a família $\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ está associada ao $\mathcal{P}_\kappa^r$. Esta associação é estabelecida pelo fato que qualquer grafo em $\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ tem um conjunto de dados fixados que determinam $\mathcal{P}_\kappa^r$. Embora todo grafo em $\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$ satisfaça as desigualdades de Morse para qualquer vetor de números de Betti em $\mathcal{P}_\kappa^r$ é um problema aberto se estes grafos podem ser realizados como fluxos sobre variedades com estes números de Betti.

O que sabemos é que para uma dada continuação, $L(h_0, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d, h_n, \kappa)$, do grafo $L(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h_n, \kappa)$ existe uma correspondência com um elemento inteiro v sobre a face estendida $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{P}(h_0, \dots, h_n)$ como na Figura 5.14. De fato, este elemento em $L(h_0, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d, h_n, \kappa)$ que define as coordenadas do vetor dos números de Betti que determinam v . Também, não existe interpretação topológica para os grafos $L(h_0, h_1^c, h_1^d, \dots, h_{n-1}^c, h_{n-1}^d, h_n, \kappa)$ que determinam vetores de números de Betti fora do quadrante não negativo.

Lista de Figuras

1.1	ε -cadeia	7
1.2	Função de Lyapunov.	8
1.3	Grafo de Lyapunov.	9
1.4	Grafo abstrato de Lyapunov em dimensão 7.	10
1.5	Conjunto invariante isolado.	12
1.6	Par-índice.	12
1.7	Par-Índice	13
1.8	Blocos isolantes para selas em dimensão 2.	13
1.9	Blocos isolantes para selas em dimensão 3.	13
1.10	Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$	14
1.11	Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$	14
1.12	Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$	15
1.13	Passos para obtenção de $\mathcal{H}(S)$	15
1.14	Continuação do índice de Conley.	16
1.15	Alça H a ser colada.	17
1.16	Colando alças em dimensão 2	17
1.17	Os três possíveis efeitos algébricos.	18
1.18	Semi-grafos de Lyapunov para selas em dimensão 2	19
1.19	Semi-grafos de Lyapunov para selas em dimensão 3.	19
1.20	Condições locais para um grafo de Lyapunov do tipo Morse.	20
1.21	Vértice a ser explodido.	23
1.22	Explosões do vértice	24
3.1	Vértice do tipo sela generalizada.	41

3.2	Explosão parcial de um vértice do tipo sela generalizada.	42
3.3	Vértice Repulsor.	43
3.4	Explosão parcial de um vértice repulsor.	43
3.5	Vértice a ser explodido.	45
3.6	Explosão das arestas incidentes negativamente.	46
3.7	Par (h_1^c, h_{n-1}^d)	46
3.8	Arestas incidentes negativamente explodidas e ciclos inseridos.	47
3.9	Explosão linear: L e $L^\dagger$	49
3.10	Par $\{h_1^d, h_1^c\}$	54
3.11	Ciclo $\mathcal{C}_j$	64
3.12	Estrutura de digrafo $\mathcal{G}$	67
3.13	O subgrafo $\mathcal{G}_j$ consiste dos ciclos não-orientados $\mathcal{C}_j$, para $j = 1, \dots, i - 2$	84
3.14	O subgrafo $\mathcal{G}_{i-1}$	85
3.15	Estrutura do digrafo $\mathcal{G}$	86
4.1	Exemplo de rede, para $i = 3$	103
4.2	Solução $\tilde{h}^{cd}$ do exemplo.	127
4.3	Quatro vistas do politopo $\mathcal{P}^r$	127
4.4	Esqueleto do politopo $\mathcal{P}^r$	128
4.5	Solução $\tilde{h}^{cd}$ do exemplo.	134
4.6	Faces de $\mathcal{P}^r$ e grade inteira.	136
5.1	Rede para o caso $n = 2i + 1$, i ímpar.	141
5.2	Rede para $n = 2i + 1$, i par.	141
5.3	Rede para o caso $n = 2i = 0 \bmod 4$	143
5.4	Rede para o caso $n = 2i = 2 \bmod 4$	143
5.5	Dividindo o problema em dois.	145
5.6	Divisão seguinte.	146
5.7	Últimos problemas independentes.	147
5.8	Exemplo genérico de ciclo de rede.	149
5.9	Grafo abstrato de Lyapunov $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$	158
5.10	Grafos na família $\mathcal{L}(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$	159

5.11 Implosão de $L(2, 4, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \kappa = 2)$	160
5.12 Solução $\tilde{h}^{cd}$ do exemplo.	164
5.13 Politopos $\mathcal{P}_\kappa^r$	165
5.14 Face estendida $\mathcal{F}_i$ produzida pela circulação.	166

Tabela de Símbolos

Ordem alfabética

B_j^+	soma dos j -ésimos números de Betti das arestas incidentes positivamente
B_j^-	soma dos j -ésimos números de Betti das arestas incidentes negativamente
D^j	j -disco unitário fechado
e^+	aresta incidente positivamente
e^-	aresta incidente negativamente
f	função de Lyapunov
$g(M)$	gênero de Cornea
H	handle $D^\ell \times D^{n-\ell}$
h_j	dimensão do índice homológico de Conley
$\bar{h}_j$	dimensão do índice homológico de Conley para o fluxo reverso
$\mathcal{H}(S)$	índice de Conley
$CH_*(S)$	índice homológico de Conely
I	intervalo
J	intervalo aberto
L	grafo de Lyapunov
$L(h_0, \dots, h_n, \kappa)$	grafo abstrato de Lyapunov
L_B	semi-grafo
$\mathcal{L}(h_0, \dots, h_n, \kappa)$	família de grafos de Lyapunov
M	variedade orientável fechada de dimensão n
N	bloco isolante
N^+	conjunto de entrada para o fluxo
N^-	conjunto de saída para o fluxo

(N, N^-)	par-índice para o fluxo
(N, N^+)	par-índice para o fluxo inverso
$\mathcal{P}_\kappa(h_0, \dots, h_n)$	politopo de Morse
Q	subvariedade de codimensão um
R	componentes do conjunto recorrente por cadeia
$\mathcal{R}$	conjunto recorrente por cadeia
$\bar{R}$	componentes do conjunto recorrente por cadeia para o fluxo reverso
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
S	conjunto invariante isolado
S^{j-1}	$(j-1)$ -esfera
v	vértice do grafo
V	conjunto de vértices
$\mathbb{Z}_2$	conjunto dos números inteiros mod 2

Símbolos

$\sim$	relação de equivalência
--------	-------------------------

Letras gregas

ϕ_t	fluxo contínuo Phi
ϕ_{-t}	fluxo reverso
κ	número de ciclos
κ_v	número de ciclos do vértice
κ_L	cycle rank
γ	número de Betti de M
β	número de Betti das arestas do grafo

Referências Bibliográficas

- [1] A. Bachem and M. Grötschel. New aspects of polyhedral theory. In: B. Korte, ed., *Applied Modern Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [2] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende. *Lyapunov graph continuation*. Technical Report IMECC-UNICAMP, RP46/01. Available in [//www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2001/rp46-01.html](http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2001/rp46-01.html). To appear in *Ergodic Theory Dynam. Systems*.
- [3] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende. *Poincaré-Hopf Inequalities*. Technical Report IMECC-UNICAMP, RP 19-02. Available in [//www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2002/rp19-02.html](http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2002/rp19-02.html).
- [4] M. A. Bertolim, M. P. Mello and K. A. de Rezende. *Lyapunov Graphs, Poincaré-Hopf and Morse Inequalities*. Technical Report IMECC-UNICAMP, RP 40-02. Available in [//www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2002/rp40-02.html](http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2002/rp40-02.html). Submitted to *Annals of Mathematics*.
- [5] C. Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [6] O. Cornea. *The genus and the fundamental group of high-dimensional manifolds*. *Stud. Cerc. Mat.* 41 (1989), no. 3, 169-178.
- [7] R. N. Cruz and K. A. de Rezende. *Gradient-like flows on high-dimensional manifolds*. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 19 (1999), no. 2, 339-362.

- [8] R. N. Cruz and K. A. de Rezende. *Cycle rank of Lyapunov graphs and the genera of manifolds*. Proceedings of the American Mathematical Society 126 (1998), no. 12, 3715–3720.
- [9] K. A. de Rezende. *Smale flows on the three-sphere*. Transactions of the American Mathematical Society 303 (1987), no. 1, 283–310.
- [10] K. A. de Rezende. *Gradient-like flows on 3-manifolds*. Ergodic Theory Dynam. Systems 13 (1993), no. 3, 557–580.
- [11] K. A. de Rezende and R. D. Franzosa. *Lyapunov graphs and flows on surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 340 (1993), no. 2, 767–784.
- [12] J. Franks. *Nonsingular Smale flows on S^3* . Topology 24 (1985), no. 3, 265–282.
- [13] D. R. Fulkerson and O. A. Gross. *Incidence matrices and interval graphs*. Pacific Journal of Mathematics 15 (1965), 835–855.
- [14] F. Granot and A. F. Veinott, Jr. Substitutes, complements and ripples in network flows. *Mathematics of Operations Research*, 10(3), August 1985.
- [15] A. J. Hoffman and J. B. Kruskal. *Integral boundary points of convex polyhedra*. In *Linear Inequalities and Related Systems* (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), 223–246, Annals of Mathematics Studies, No. 38, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.
- [16] C. McCord. *Poincaré-Lefschetz duality for the homology Conley index*. Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), no. 1, 233–252.
- [17] J. Milnor. *Morse Theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N. J. 1963.
- [18] H. Poincaré. *Second complément à l'analysis situs* Proceedings of the London Mathematical Society, 32 (1900) 277–308 [reprinted in *Ouvres de Henri Poincaré*, Tome VI. Gauthier-Villars, Paris, 1953, pp.338–370.]

- [19] J. F. Reineck. *Continuation to Gradient Flows*. Duke Mathematical Journal 64 (1991), no. 2, 261–269.
- [20] R. T. Rockafellar. The elementary vectors of a subspace of $\mathbb{R}^n$. In R. C. Bosc and T. A. Dowling, editors, *Combinatorial Mathematics and its Applications*, pages 104–127. University of North Carolina Press, 1969.
- [21] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, Chichester, 1986.
- [22] W. T. Tutte *Connectivity in Graphs*. Univ. Toronto Press, Toronto, 1966.

Índice Remissivo

- $(\ell - 1)$ -conectante, 18
- β -invariante, 18
- ℓ -desconectante, 17
- algoritmo
 - da explosão, 40
 - da explosão para $n = 2$, 53
- aresta
 - direcionada, 11
 - do grafo, 9
 - semi-aresta, 11
- Betti
 - vetor de números de, 2, 10
- bloco isolante, 12
- ciclo elementar, 46
- conjunto
 - invariante, 11
 - isolado, 11
 - recorrente por cadeia, 7
- Conley
 - continuação do índice de, 15
 - dualidade do índice de, 29
 - Teorema de, 8
- continuação, 15
 - de um grafo, 23
 - do índice de Conley, 15
 - Teorema de, 39
 - prova, 95
- Cornea
 - gênero de, 2
- cycle rank, 2
- desigualdades de Morse duais, 5
- dualidade do índice de Conley, 29
- explosão de um vértice, 22
- fluxo
 - do tipo gradiente, 8
- função de Lyapunov, 1, 8
- grafo
 - continuação de um, 23
 - de Lyapunov, 1, 9
 - implosão, 23
 - semi-grafo direcionado, 11
- grafo abstrato
 - de Lyapunov do tipo Morse, 20
 - de Lyapunov em dimensão n , 1, 9
- gênero de Cornea, 2
- implosão do grafo L , 23
- Lyapunov

- função de, 1, 8
- grafo abstrato de, 9
- grafo abstrato de Lyapunov do tipo Morse, 20
- grafo abstrato em dimensão n , 1
- grafo de, 1, 9
- Morse
 - desigualdades duais, 5
 - grafo abstrato de Lyapunov do tipo, 20
 - politopo de, 4
- par-índice, 11
- politopo de Morse, 4
- ponto recorrente por cadeia, 7
- semi-arestas, 11
- semi-grafo direcionado, 11
- sistema h_{κ}^{cd} , 51
- Sistemas Lineares
 - soluções, 54
- soluções para os Sistemas Lineares, 54
- Teorema
 - de Conley, 8
 - de Continuação, 39
 - prova, 95
 - de equivalência, 99
- teoria de alças, 16
- totalmente unimodular, 56
- vetor de números de Betti, 2, 10
- vizinhança
 - isolante, 11
 - vértice
 - atrator, 41
 - do grafo, 9
 - do tipo sela, 41
 - generalizada, 41
 - repulsor, 41