Homotopia simples e classificação dos espaços lenticulares

Luiz Roberto Hartmann Junior

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 16 de janeiro de 2007

Assinatura: _____

Homotopia simples e classificação dos espaços lenticulares

Luiz Roberto Hartmann Junior

Orientador: *Prof. Dr. Mauro Flavio Spreafico*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos

Fevereiro/2007

*Aos meus pais,
Roberto e Ana, e
meus irmãos,
Hannah Ingrid e
Marcelo.*

Agradecimentos

Agradeço à Deus por tudo na minha vida, das dificuldades às alegrias.

Aos meus pais pelo apoio, carinho, incentivo e confiança. Vocês serão sempre meus verdadeiros heróis. Pai e mãe amo vocês!

Ao meu irmão Marcelo e minha irmã Ingrid; não conheço palavras que descrevam a importância de vocês. Admiro muito vocês! Muito obrigado por existirem!

À minha avó Lidia, minha tia Ana e meu tio Paulo, pelas adoráveis conversas de domingo de manhã pelo telefone que me davam mais força para continuar esse sonho, pelos deliciosos bolos e pães que recebia quando vinha para São Carlos e pela ajuda na minha criação. Sem esquecer do meu tio Cido, ele é uma das maiores fontes de inspiração que conheço, depois de meus pais. À minha tia Armelinda e seus filhos Melina, Mayara e Juninho, pelos ótimos momentos de descontração que passei em sua casa. E a todos os meus tios e primos, muito obrigado. Ao meu avô Anésio e a minha avó Maria. Ao Dercio e a Ivete que tiveram um papel muito importante na minha educação.

À minha noiva Carla pela compreensão, lealdade e paciência por todo esse tempo que estive longe. Pela amizade, amor, incentivo e companheirismo desses seis anos que estou com ela, que a cada dia me dá mais confiança e vontade de seguir em frente. Agradeço também toda a sua família por tudo que fizeram por mim e em especial ao Antônio que me ajudou sempre que precisei sem nunca me cobrar nada em troca.

Aos meus amigos e colegas de curso por todos os sofrimentos ou felicidades que tivemos juntos: Fabrício, Fernando, Luciana, Amanda, Thiago e Michele. Aos colegas de sala que sempre estiveram dispostos a ensinar o que sabem: Luciene, Patrícia, Sandro e Walter. Aos grandes amigos que fiz no ICMC: Marcio, Mario, Ubarana, Urso, Julianio, Marcus e Tatiana. Sem me esquecer da ajuda do Thiago de Melo com o $\text{\LaTeX}$, a todos muito obrigado!

A todos os meus amigos que conheço há muito tempo e que sem dúvida tem um papel fundamental em tudo na minha vida: Renato, Rogério, Éder, Renato Japonês, Eduardo, Carlos Eduardo, Elton, Rogério Gordo, Hugo e Robson.

Às pessoas que não estão mais aqui, mas tenho certeza que estiveram comigo esse tempo todo: meu amigo Luis, meu primo Ricardo e meu Avô Henrique; é uma pena que só agora sei o valor que vocês tinham.

Ao Prof. Dr. Mauro Flavio Spreafico pela orientação e dedicação a este trabalho. Agradeço também, pelo meu crescimento acadêmico, aos professores: Eduardo, Adalberto, Cidinha, Dide, Nelson Galante, Zé Roberto, Messias Meneguete, Biroca, Gabriel, Castelo, Robson e Ronaldo.

A todos os funcionários do ICMC sempre dispostos a ajudar no que for preciso.

E por fim à CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Fizemos uma apresentação detalhada, com um enfoque geométrico, da Teoria de Homotopia Simples e como aplicação, uma análise detalhada da classificação por homotopia e homotopia simples dos Espaços Lenticulares.

Abstract

We made a detailed presentation, with a geometric approach, of Simple Homotopy Theory and as a major application we present a detailed analysis of homotopy and simple homotopy classification of Lens Spaces.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	1
1 Homotopia e complexos CW	3
1.1 Equivalência homotópica e retração por deformação	3
1.2 Complexo CW	5
1.3 Homologia celular	7
1.4 Espaços de recobrimento	10
2 Uma aproximação geométrica para a teoria de homotopia	19
2.1 Introdução	19
2.2 Deformações formais	21
2.3 Cilindro da aplicação e deformações	23
2.4 O grupo de Whitehead de um complexo CW	29
2.5 Simplificando um par CW homotopicamente trivial	32
2.6 Matrizes e deformações formais	36
3 Ferramentas algébricas	45
3.1 Convenções algébricas	46
3.2 Matrizes inversíveis e $K_G(R)$	47
3.3 Algumas informações sobre o grupo de Whitehead	52
3.4 (R, G) - Complexos	53
3.5 Complexo de cadeia acíclico	55

3.6	Definição da torção de um complexo de cadeia acíclico	58
3.7	Caracterização da torção de um complexo de cadeia	63
3.8	Mudando os anéis	65
4	Torção de Whitehead na categoria CW	69
4.1	A torção de um par CW	69
4.2	Propriedades da torção de um par CW	75
4.3	A equivalência natural de $Wh(L)$ e $\oplus Wh(\pi_1(L_j))$	79
4.4	A torção de uma equivalência de homotopia	80
4.5	Teoremas de produtos e soma	86
4.6	A comparação entre homotopia e homotopia simples	91
4.7	A invariância da torção	94
5	Espaços lenticulares	97
5.1	Definição dos espaços lenticulares	97
5.2	Os espaços 3 - dimensionais $L_{p,q}$	100
5.3	Estrutura celular e os grupos de homologia	102
5.4	Classificação por homotopia	104
5.5	A equivalência de homotopia simples dos espaços lenticulares	111
5.6	A classificação completa	114
	Tabela de Símbolos e Abreviações	117
	Referências Bibliográficas	119
	Índice Remissivo	122

Introdução

Na topologia, duas funções de um mesmo espaço topológico em outro são chamadas de homotópicas, que vem do grego *homo* (idêntico) e *topos* (lugar), se uma pode ser “continuamente deformada” na outra. Nesse sentido dados X e Y dois espaços topológicos queremos identificar quando esses espaços são homotopicamente equivalentes, ou seja, existem funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que $f \circ g \simeq 1_X$ e $g \circ f \simeq 1_Y$. Esse é um assunto clássico da topologia. Em geral, é muito difícil determinar quando dois espaços são ou não homotópicos. Um outro problema muito estudado é a classificação de espaços por equivalências de homotopia, ou seja, dado um espaço topológico X queremos determinar todas as classes de equivalência, por homotopia, das equivalências homotópicas de X . Existem várias ferramentas que ajudam, mas nem sempre apresentam respostas satisfatórias, como por exemplo, os grupos de homotopia. Nesse intuito a teoria de homotopia simples é mais uma ferramenta que permite dizer, em alguns casos de maneira realmente simples, não somente quando dois espaços são ou não homotópicos, mas também ajuda na classificação das equivalências homotópicas. Um bom exemplo disso são os espaços lenticulares.

O trabalho se divide em cinco capítulos, sendo que o capítulo inicial é dedicado as preliminares. Nele encontram-se as definições e resultados básicos que serão usados em todo o texto.

O capítulo seguinte inicia a Teoria de Homotopia Simples definindo colapsos, expansões, deformações e o grupo de Whitehead de um complexo CW. Estes são os pilares de toda a teoria, mas para conclusões mais fortes, ferramentas algébricas serão necessárias.

No terceiro capítulo apresentamos as ferramentas que servirão para complementar o capítulo 2, e o grupo de Whitehead de um grupo.

O quarto capítulo é o principal da dissertação, onde juntamos a parte topológica com a parte algébrica e obtemos resultados interessantes para a teoria, como por exemplo a equivalência entre o grupo de Whitehead de um complexo CW e o grupo de Whitehead do grupo fundamental desse complexo CW e a comparação entre homotopia e homotopia simples.

No último capítulo mostramos uma aplicação da teoria, onde esta fica mais concreta: os espaços lenticulares, permitindo a classificação desses espaços.

Alguns conceitos básicos de topologia algébrica serão necessários tais como os grupos de homotopia, grupos de homologia, complexos de cadeia, entre outros. Como referência para os grupos de homotopia recomendamos [12] e [24], para topologia algébrica em geral [9] e [20]. O estudo desenvolvido nesse trabalho baseia-se na referência [6].

Homotopia e complexos CW

Nesse capítulo apresentaremos todas as ferramentas utilizadas no texto. Usaremos definição e resultados básicos de teoria de homotopia, teoria de homologia e espaços de recobrimento. Como referência usamos [9], [16], [20], [23], [26].

Dados X e Y espaços topológicos, entenderemos por uma aplicação de X em Y uma função de X em Y contínua.

1.1 Equivalência homotópica e retração por deformação

Denotaremos o intervalo $[0, 1]$ por I . Se X é um espaço topológico, 1_X é a função identidade de X .

Quando duas aplicações, f e g de X em Y , são homotópicas escreveremos $f \simeq g$ e quando dois espaços são homotopicamente equivalentes denotaremos por $X \simeq Y$.

Um tipo particular de equivalência homotópica é uma retração por deformação forte.

Definição 1.1.1. *Se $X \subset Y$ então $D : Y \longrightarrow X$ é uma retração por deformação forte se existe uma aplicação $F : Y \times I \longrightarrow Y$ tal que:*

- (i) $F(x, 0) = 1_Y$;

$$(ii) \quad F(x, t) = x, \forall x \in X;$$

$$(iii) \quad F(y, 1) = D(y), \forall y \in Y.$$

Sem muita dificuldade é possível mostrar que se D é uma retração por deformação forte então D é uma equivalência homotópica, de fato, a inversa homotópica de D é a inclusão $i : X \subset Y \longrightarrow Y$. Para $D \circ i \simeq 1_X$ basta considerar a homotopia $G : X \times I \longrightarrow X$ tal que $G = F|_{X \times I}$ e para $i \circ D \simeq 1_Y$ a própria F nos dá a homotopia requerida.

Definição 1.1.2. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação então o Cilindro da Aplicação M_f é dado pela união disjunta de $X \times I$ e Y (denotamos $(X \times I) \sqcup Y$) e identificamos $(x, 1)$ com $f(x)$, ou seja,

$$M_f = \frac{(X \times I) \sqcup Y}{f(x) = (x, 1)}.$$

A aplicação de identificação $(X \times I) \sqcup Y \longrightarrow M_f$ será sempre denotada por q . Como $q|_{X \times [0,1]}$ e $q|_Y$ são imersões, escreveremos $q(X \times 0) = X$ e $q(Y) = Y$ quando o contexto permitir e ainda escreveremos $q(z) = [z]$, $\forall z \in (X \times I) \sqcup Y$.

Lema 1.1.3. Seja $f : X \longrightarrow Y$ então a aplicação $p : M_f \longrightarrow Y$, dada por:

$$p[x, t] = [x, 1] = f(x) \text{ se } t \leq 1;$$

$$p[y] = y,$$

é uma retração por deformação forte.

Demonstração: Consideremos $H : M_f \times I \longrightarrow M_f$ dada por: se $([x, s], t) \in ((X \times I) \times I)$ então $H([x, s], t) = [x, t + s - st]$; e se $([y], t) \in (Y \times I)$ então $H([y], t) = [y]$. Claramente H é contínua e ainda $H_0([x, s]) = [x, s]$ e $H_0([y]) = [y]$ e assim $H_0 = i_{M_f}$. Temos ainda $H_1([x, s]) = [x, 1] = [f(x)]$ e $H_1([y]) = [y]$ e, portanto, $H_1 = p$. Como $H_t([y]) = [y]$, $\forall t$ logo p é uma retração por deformação forte. ■

Lema 1.1.4. Suponha $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Seja $i : X \longrightarrow M_f$ a inclusão. Então:

(a) O diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & M_f \\ f \downarrow & \swarrow p & \\ Y & & \end{array}$$

(b) i é uma equivalência homotópica se, e somente se, f é uma equivalência homotópica.

Demonstração: (a) $p \circ i(x) = p[x, 0] = f(x)$, onde $i(x) = [x, 0]$, logo $p \circ i = f$.

(b) $(\Leftarrow)$ Se i é uma equivalência homotópica então, como p é uma equivalência homotópica, temos que $f = p \circ i$ é uma equivalência homotópica.

$(\Rightarrow)$ Se f é uma equivalência homotópica então existe $r : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ r \simeq 1_Y$ e $r \circ f \simeq 1_X$. Lembrando que p também é uma equivalência homotópica, existe uma g tal que $p \circ g \simeq 1_Y$ e $g \circ p \simeq 1_{M_f}$. Como $f = p \circ i$ temos que $(r \circ p) \circ i \simeq 1_X$ e ainda,

$$(p \circ i) \circ r \simeq 1_Y \Rightarrow g \circ (p \circ i) \circ r \simeq g \Rightarrow (g \circ p) \circ (i \circ r) \simeq i \circ r \simeq g \Rightarrow i \circ (r \circ p) \simeq g \circ p \simeq 1_{M_f}.$$

■

1.2 Complexo CW

Um complexo CW, K , é um espaço de Hausdorff junto com uma família $\{e_\alpha\}$ de células abertas topológicas de várias dimensões, tal que as condições a seguir são satisfeitas. Denotaremos por K^j , o j -esqueleto de K , com $K^j = \{\cup e_\alpha \mid \dim(e_\alpha) \leq j\}$.

CW 1: $K = \bigcup_{\alpha} e_\alpha$ e $e_\alpha \cap e_\beta = \emptyset$ sempre que $\alpha \neq \beta$.

CW 2: Para cada célula e_α , existe uma aplicação $\varphi_\alpha : Q^n \rightarrow K$ onde Q^n é a bola topológica (homeomorfo a $I^n = [0, 1]^n$) de dimensão $\dim(e_\alpha) = n$ tal que:

(a) $\varphi_\alpha|_{\overset{\circ}{Q}}$ é um homeomorfismo sobre e_α ;

(b) $\varphi_\alpha(\partial Q^n) \subset K^{n-1}$;

CW 3: Cada $\bar{e}_{\alpha_0}$ está contido em uma união finita de e_α .

CW 4: Um conjunto $A \subset K$ é fechado em K se, e somente se, $A \cap \bar{e}_\alpha$ é fechado em $\bar{e}_\alpha$ para todo e_α .

Observamos que quando K possui um número finito de células **CW 3** e **CW 4** são automaticamente satisfeitas.

Uma aplicação $\varphi : Q^n \rightarrow K$, como em **CW 2**, é chamada uma aplicação característica e então $\varphi|_{\partial Q^n}$ é chamada aplicação de colagem para e . Notemos que φ nos dá uma aplicação característica $\varphi' : I^n \rightarrow K$, simplesmente colocando $\varphi' = \varphi \circ h$ para algum homeomorfismo $h : I^n \rightarrow Q^n$. Usaremos a aplicação característica com domínio I^n .

Definição 1.2.1. Um subcomplexo de um complexo CW K é um subconjunto L junto com uma sub-família $\{e_\beta\}$ de células de K tal que $L = \bigcup_{\beta} e_\beta$ e cada $e_\beta \subset L$, escrevemos $L < K$.

Isso nos dá que L é um subconjunto fechado de K e forma um complexo CW. Chamamos (K, L) de um par CW. Se e é uma célula de K que não está em (e assim não intercepta) L escrevemos $e \in K - L$.

Dois complexos CW K e L são isomorfos (denotaremos por $K \cong L$) se existe um homeomorfismo h de K em L tal que a imagem de cada célula de K é uma célula em L . Nesse caso h é chamado um isomorfismo CW. Vale a pena observar que h^{-1} também é um isomorfismo CW.

Uma propriedade importante é que qualquer par CW é uma cofibração em outras palavras, satisfaz a propriedade da extensão homotópica.

Teorema 1.2.2. *Suponha que $L < K$. Dado uma aplicação $f : K \longrightarrow X$ (X espaço qualquer) e uma homotopia $g : L \times I \longrightarrow X$ tal que $g(x, 0) = f|_L$ então existe uma homotopia $G : K \times I \longrightarrow X$ tal que $G(x, 0) = f$ e $G_t|_L = g_t|_L$, $0 \leq t \leq 1$. ([23], p. 198)*

Como decorrência deste fato temos:

Teorema 1.2.3. *Se $L < K$ as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (a) L é uma retrato por deformação forte de K ;
- (b) A inclusão $i : L \subset K$ é uma equivalência homotópica;
- (c) $\pi_n(K, L) = 0$, $n \leq \dim(K - L)$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Direta.

(b) $\Rightarrow$ (c) Direta.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja $n = \dim(K - L)$. Por hipótese $\pi_0(K, L) = 0$, ou seja, qualquer ponto $p \in K - L$ existe um ponto $l_p \in L$ e um caminho $\alpha_p : I \rightarrow K$ tal que $\alpha_p(0) = p$ e $\alpha_p(1) = l_p$.

Consideremos então $G^0 : (K^0 \cup L) \times I \longrightarrow K$ dada por: se $e_0 \in K^0 - L$ então $G^0(e_0, t) = \alpha_{e_0}(t)$ e para qualquer $l \in L$, $G^0(l, t) = l$. Note que $G^0_0 = 1_{K^0 \cup L}$, $G^0_1(K^0 \cup L) \subset L$ e G^0 é contínua $\forall (k, t) \in (K^0 \cup L) \times I$. Logo pela propriedade da Extensão Homotópica existe $H^0 : K \times I \longrightarrow K$ tal que $H^0(K, 0) = 1_K$ e $H^0_t|_{K^0 \cup L} = G^0_t$ para $0 \leq t \leq 1$ e chamamos $f_0 = H^0(K, 1)$. Observamos que G^0 é única a menos de homotopia.

Sabemos também que $\pi_1(K, L) = 0$, ou seja, qualquer caminho com pontos iniciais e finais em L , que passa por K é homotópico a um caminho em L em relação ∂I . Assim seja e_1 uma 1-célula em $K - L$ sabemos que existe $\varphi_{e_1} : I \longrightarrow K$ tal que $\varphi_{e_1}(\overset{\circ}{I}) = e_1$ e $\varphi_{e_1}(\partial I) = \{\varphi_{e_1}(0), \varphi_{e_1}(1)\}$ que são 0-células. Dessa maneira se $e_1 \in K^1 - (K^0 \cup L)$ temos que $f_0 \circ \varphi_{e_1} : I \longrightarrow K$ é um caminho com $f_0 \circ \varphi_{e_1}(\partial I) \subset L$ e então existe uma $J_{e_1} : I \times I \longrightarrow K$ tal que $J_{e_1}(t, 0) = f_0 \circ \varphi_{e_1}(t)$ e $J_{e_1}(t, 1) \in L$, $\forall t \in I$. Como φ_{e_1} é um homeomorfismo entre e_1 e $\overset{\circ}{I}$, podemos escrever $J_{e_1} : e_1 \cup L \times I \longrightarrow K$ com $J_{e_1}(k, 0) = f_0(k)$ e $J_{e_1}(k, 1) \in L$ e assim temos que existe $G^1 : (K^1 \cup L) \times I \longrightarrow K$ tal que, $G^1_0 = f_0|_{K^1 \cup L}$ e $G^1_1(K^1 \cup L) \subset L$.

Usando novamente a propriedade da Extensão Homotópica existe $H^1 : K \times I \longrightarrow K$ tal que $H^1(k, 0) = f_0(k)$ e $H_t^1|_{K^1 \cup L} = G_t^1$ para $0 \leq t \leq 1$ e chamamos $f_1 = H^1(K, 1)$. Prosseguindo por indução vamos ter que $1_k \simeq f_0 \simeq \dots \simeq f_n$ e $f_n : K \longrightarrow L$ e então L é um retrato por deformação forte de K . ■

Definição 1.2.4. Se K_0 e K_1 são complexos CW uma aplicação $f : K_0 \longrightarrow K_1$ é celular se $f(K_0^n) \subset K_1^n$ para todo n , mais geralmente, se (K_0, L_0) e (K_1, L_1) são pares CW uma aplicação $f : (K_0, L_0) \longrightarrow (K_1, L_1)$ é celular se $f(K_0^n \cup L_0) \subset (K_1^n \cup L_1)$ para todo n .

Observamos que a definição não implica que $f|_{L_0} : L_0 \longrightarrow L_1$ é celular. Se $f \simeq g$ e g é celular então f é chamada aproximação celular para f .

Teorema 1.2.5 (Aproximação Celular). Qualquer aplicação entre pares CW, $f : (K_0, L_0) \longrightarrow (K_1, L_1)$ é homotópica (rel. L_0) à uma aplicação celular. ([23], p. 199)

Definição 1.2.6. Se A é um conjunto fechado de X e $f : A \longrightarrow Y$ é uma aplicação definimos então

$$X \cup_f Y = \frac{X \sqcup Y}{x = f(x)}.$$

Teorema 1.2.7. Suponha que $K_0 < K$ e $f : K_0 \longrightarrow L$ é uma aplicação, tal que dada qualquer célula e de dimensão n , $e \in K - K_0$, $f(\bar{e} \cap K_0) \subset L^{n-1}$. Então $K \cup_f L$ é um complexo CW na qual suas células são as células de $K - K_0$ e as de L . (Mais precisamente as células de $K \cup_f L$ são da forma $q(e)$ onde e é uma célula qualquer de $K - K_0$ ou de L e $q : K \sqcup L \longrightarrow K \cup_f L$ é a aplicação identificação. Será omitido q sempre que possível.) ([26], p. 77)

Usando o teorema anterior e a estrutura de $K \times I$ temos:

Corolário 1.2.8. Se $f : K \longrightarrow L$ é uma aplicação celular então a Aplicação Cilindro M_f é um complexo CW com células que são ou de L ou da forma $e \times 0$ ou $e \times]0, 1[$, onde e é uma célula qualquer de K . ([26], p. 77)

Juntando os lemas 1.1.4, 1.2.3 e o corolário 1.2.8 temos:

Teorema 1.2.9. Uma aplicação celular $f : K \longrightarrow L$ é uma equivalência homotópica se, e somente se, K é uma retração por deformação forte de M_f .

1.3 Homologia celular

Definição 1.3.1. Se (K, L) é um par CW, o complexo de cadeia celular é definido por $C_n(K, L) = H_n(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L)$ e $d_n : C_n(K, L) \longrightarrow C_{n-1}(K, L)$ sendo o operador bordo na seqüência exata para a homologia singular da tripla $(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L, K^{n-2} \cup L)$.

$C_n(K, L)$ é usualmente visto como “o módulo livre gerado pelas n -células de $K - L$ ”. Para isso vamos adotar uma orientação padrão w_n para I^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), onde $J^n = \overline{(\partial I^{n+1} - I^n)} (I^n \equiv I^n \times 0)$, da seguinte maneira:

considere a seqüência

$$H_{n-1}(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \xrightarrow{Ex} H_{n-1}(\partial I^n, J^{n-1}) \xleftarrow{\partial} H_{n-1}(\partial I^n) \xleftarrow{\partial} H_n(I^n, \partial I^n). \quad (1)$$

Para $n = 1$, temos a seqüência

$$H_0(I^0) \longrightarrow H_0(\partial I, J^0) \longleftarrow H_0(\partial I) \longleftarrow H_1(I, \partial I).$$

Sendo w_0 o gerador de $H_0(I^0)$ e $w_1 = [w_0, p]$ o gerador de $H_1(I, \partial I)$, assim ficamos com a seqüência

$$[w_0] \longrightarrow [w_0] \xleftarrow{i} [w_0] \oplus [p] \xleftarrow{\partial} [-w_1].$$

Dessa maneira, $i \circ \partial(-w_1) = i(w_0 - p) = w_0$ e, então, $i \circ \partial$ é um isomorfismo, de modo que w_0 é levado em $-w_1$.

Similarmente, segue o caso para $n = 2$, de maneira que w_1 seja levado em $-w_2$

Agora se $n \geq 3$ então a seqüência (1) é um isomorfismo, o que se deve ao fato de que, neste caso,

$$H_{n-1}(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \xrightarrow{Ex} H_{n-1}(\partial I^n, J^{n-1})$$

é uma excisão, e os isomorfismos

$$H_{n-1}(\partial I^n, J^{n-1}) \xleftarrow{\partial} H_{n-1}(\partial I^n) \xleftarrow{\partial} H_n(I^n, \partial I^n)$$

provêm das seqüências exatas dos pares $(I^n, \partial I^n)$ e $(\partial I^n, J^{n-1})$. Consideramos, então, que w_{n-1} seja levado em $-w_n$.

Se $\varphi_\alpha : I^n \longrightarrow K$ é uma aplicação característica para $e_\alpha \in K - L$, denotaremos por $\langle \varphi_\alpha \rangle = (\varphi_\alpha)_*(w_n)$, onde $(\varphi_\alpha)_* : H_n(I^n, \partial I^n) \longrightarrow H_n(K^n \cup L, K^{n-1} \cup L)$ é a aplicação induzida. Então toda essa situação será descrita nos próximos dois resultados.

Lema 1.3.2. *Suponha que uma aplicação característica φ_α é escolhida para cada n -célula e_α de $K - L$. Denote $K_j = K^j \cup L$. Então*

- (a) $H_i(K_n, K_{n-1}) = 0$, se $i \neq n$;
- (b) $H_n(K_n, K_{n-1})$ é livre com base $\{\langle \varphi_\alpha \rangle \mid e_\alpha^n \in K - L\}$;
- (c) Se c é um n -ciclo singular de $K \bmod L$ representado por $\gamma \in H_n(K_n, K_{n-1})$ e se $|c|$ não inclui a n -célula e_{α_0} então $n_{\alpha_0} = 0$ na expressão $\gamma = \sum_\alpha n_\alpha \langle \varphi_\alpha \rangle$.

([20], p. 224)

Uma aplicação celular $f : (K, L) \longrightarrow (K', L')$ induz uma aplicação cadeia $f_* : C(K, L) \longrightarrow C(K', L')$ e então um homomorfismo, de $H(C(K, L))$ para $H(C(K', L'))$, que também será denotado por f_* . Com esse fato, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.3. *Existe uma equivalência natural T entre o funtor “Homologia Celular” e o funtor “Homologia Singular”. Em outras palavras, para todo par (K, L) de CW, existe um isomorfismo $T_{K,L} : H(C(K, L)) \rightarrow H(|K|, |L|)$, e para toda aplicação $f : (K, L) \rightarrow (K', L')$ o diagrama a seguir comuta*

$$\begin{array}{ccc} H(C(K, L)) & \xrightarrow{T_{K,L}} & H(|K|, |L|) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H(C(K', L')) & \xrightarrow{T_{K',L'}} & H(|K'|, |L'|) \end{array}$$

O isomorfismo $T_{K,L}$ leva a classe de homologia de um ciclo $\sum_i n_i \langle \varphi_{\alpha_i} \rangle \in C_n(K, L)$ na classe de homologia do ciclo $\sum_i n_i \tilde{\varphi}_{\alpha_i} \in S_n(K, L)$, onde $\tilde{\varphi}_{\alpha_i}$ é uma cadeia singular. ([20], p. 225)

Teorema 1.3.4. *Suponha $f : K \rightarrow L$ uma aplicação celular com cilindro da aplicação M_f . Então $C(M_f, K)$ é naturalmente isomorfo ao complexo de cadeia $(\mathcal{C}, \partial)$ - “O cone da aplicação” de $f_* : C(K) \rightarrow C(L)$ que é dada por*

$$\mathcal{C}_n = C_{n-1}(K) \oplus C_n(L)$$

$$\partial_n(x + y) = -d_{n-1}(x) + [f_*(x) + d'_n(y)], \quad x \in C_{n-1}(K), \quad y \in C_n(L),$$

onde d e d' são os operadores bordo em $C(K)$ e $C(L)$ respectivamente.

O “isomorfismo natural” é entendido por: para cada n , o isomorfismo construído algebricamente faz a correspondência entre n -células de $M_f - K$ e células de $K^{n-1} \cup L^n$ dado por, $e^{n-1} \times]0, 1[\leftrightarrow e^{n-1}$ e $u^n \leftrightarrow u^n$ (e^{n-1} uma célula de K e u^n uma célula de L).

Demonstração: Seja e_α as células de K e suponha φ_α as aplicações características já escolhidas. Então $(K \times I, K \times 0)$ é um par CW com células relativas da forma $e_\alpha \times 1$ e $e_\alpha \times (0, 1)$ possuindo aplicações características óbvias, $\varphi_{\alpha,1}$ e $\varphi_\alpha \times 1_I$. Se $\dim e_\alpha = n - 1$, seja $\langle \varphi_\alpha \rangle = (\varphi_{\alpha,1})_*(w_{n-1})$ e $\langle \varphi_\alpha \rangle \times I = (\varphi_\alpha \times 1_I)_*(w_n)$. Em geral, se $c = \sum_i n_i \langle \varphi_{\alpha_i} \rangle$ é um elemento arbitrário de $C_{n-1}(K)$, seja $c \times I = \sum_i n_i (\langle \varphi_{\alpha_i} \rangle \times I)$. Consideremos a inclusão $i_{j,\epsilon} : I^{n-1} \rightarrow I^n$ dada por, $i_{j,\epsilon}(t_1, \dots, t_{n-1}) = (t_1, \dots, t_{j-1}, \epsilon, t_j, \dots, t_{n-1})$, $\epsilon = 0, 1$. Procedendo por indução e utilizando a estrutura celular produto de I^n temos que, $w_n \in C_n(I^n)$ e

$$d(w_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} (i_{j,1*}(w_{n-1}) - i_{j,0*}(w_{n-1})).$$

Temos que $d(w_n) = i_{n,1*}(w_{n-1}) - i_{n,0*}(w_{n-1}) - (d(w_{n-1}) \times I)$, e considerando em relação a $C(I^n, I \times 0)$ obtemos $d(w_n) = i_{n,1*}(w_{n-1}) - (d(w_{n-1}) \times I)$ e aplicando na aplicação cadeia $(\varphi_\alpha \times 1_I)_*$ temos

$$d(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I) = \langle \varphi_\alpha \rangle - (d(\langle \varphi_\alpha \rangle) \times I) \in C_{n-1}(K \times I, K \times 0).$$

Seja $\{\mu_\beta\}$ as células de L , com aplicações características ψ_β . Então considerando $q_* : C(K \times I) \oplus C(L) \longrightarrow C(M_f, K)$, $C(M_f, K)$ tem como base (da estrutura natural de M_f) o conjunto

$$\{q_*(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I \mid e_\alpha \in K\} \cup \{q_*(\langle \psi_\beta \rangle) \mid \mu_\beta \in L\}.$$

Defina $T : C(M_f, K) \longrightarrow \mathcal{C}$ por $T(q_*(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I)) = \langle \varphi_\alpha \rangle$ e $T(q_*(\langle \psi_\beta \rangle)) = \langle \psi_\beta \rangle$. Isso nos dá um homomorfismo, e ainda que $Tq_*|_{C(K \times I)} = f_* : C(K) \longrightarrow C(L)$ e $Tq_*(c \times I) = c$, para qualquer $c \in C(K)$. Então T é uma aplicação cadeia. De fato,

$$\begin{aligned} Td[q_*(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I)] &= Tq_*d[\langle \varphi_\alpha \rangle \times I] \\ &= Tq_*[\langle \varphi_\alpha \rangle - d\langle \varphi_\alpha \rangle \times I] \\ &= Tq_*(\langle \varphi_\alpha \rangle) - Tq_*(d\langle \varphi_\alpha \rangle \times I) \\ &= f_*(\langle \varphi_\alpha \rangle) - d\langle \varphi_\alpha \rangle \\ &= \partial T[q_*(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Td'[q_*(\langle \psi_\beta \rangle)] &= Tq_*d'[\langle \psi_\beta \rangle] \\ &= d'[\langle \psi_\beta \rangle] \\ &= \partial(\langle \psi_\beta \rangle) \\ &= \partial Tq_*(\langle \psi_\beta \rangle). \end{aligned}$$

Claramente T é um isomorfismo, já que sua inversa é $S : \mathcal{C} \longrightarrow C(M_f, K)$ definida por $S(\langle \varphi_\alpha \rangle) = q_*(\langle \varphi_\alpha \rangle \times I)$ e $S(\langle \psi_\beta \rangle) = q_*(\langle \psi_\beta \rangle)$. ■

1.4 Espaços de recobrimento

Definição 1.4.1. *Seja $p : E \longrightarrow K$ uma aplicação sobrejetora. O aberto U de K é dito eventualmente coberto por p se a imagem inversa $p^{-1}(U)$ pode ser escrito como a união de abertos disjuntos V_α em E , tal que para cada α , a restrição de p a V_α é um homeomorfismo de V_α sobre U .*

Definição 1.4.2. *Seja $p : E \longrightarrow K$ uma aplicação sobrejetora. Se todo ponto $x \in K$ possui uma vizinhança U que é eventualmente coberta por p , então p é chamado aplicação de recobrimento, e E é dito um espaço de recobrimento de K . Diremos que E é um espaço de recobrimento universal, se E é simplesmente conexo.*

Teorema 1.4.3. *Todo complexo CW conexo é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. ([23], p. 250)*

Teorema 1.4.4. *Se K é um complexo CW então K é localmente contrátil. Dessa maneira para K também conexo, para qualquer subgrupo $G \subset \pi_1(K)$ existe um espaço de recobrimento $p : E \longrightarrow K$ tal que $p_\#(\pi_1(E)) = G$. Em particular K possui um espaço de recobrimento universal. ([16], p. 172)*

Definição 1.4.5. *Seja E e K complexos CW. Diremos que $p : E \longrightarrow K$ é um recobrimento na categoria CW, se p é um recobrimento e ainda a imagem de cada célula de E é uma célula de K .*

Por recobrimento entenderemos sempre um recobrimento na categoria CW se o domínio é um complexo CW. Mas ao considerar o proximo teorema não há mudanças relevantes.

Teorema 1.4.6. *Suponha que K é um complexo CW conexo e $p : E \longrightarrow K$ é um recobrimento de K . Então*

$$\{\tilde{e}_\alpha \mid e_\alpha \in K, \tilde{e}_\alpha \text{ é um levantamento para } e_\alpha \text{ em } E\}$$

é uma estrutura celular em E , com respeito ao qual, E torna-se um complexo CW. Se $\varphi_\alpha : I^n \longrightarrow K$ é uma aplicação característica para a célula e_α , se $\tilde{e}_\alpha$ é o levantamento de e_α e se $\tilde{\varphi}_\alpha : I^n \longrightarrow E$ é um levantamento de φ_α tal que $\tilde{\varphi}_\alpha(x) \in \tilde{e}_\alpha$ para algum $x \in \overset{\circ}{I}^n$, então $\tilde{\varphi}_\alpha$ é uma aplicação característica para $\tilde{e}_\alpha$. De maneira que $p(\tilde{e}_\alpha) = e_\alpha$. ([23], p. 251)

Diremos que uma aplicação sobrejetiva $f : X \longrightarrow Y$ possui a propriedade de levantamento único de caminhos quando, dados arbitrariamente $a : I \longrightarrow Y$ e um ponto $x \in X$ com $f(x) = a(0)$, existir um único caminho $\tilde{a} : I \longrightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{a} = a$ e $\tilde{a}(0) = x$.

Proposição 1.4.7. *Seja K um espaço localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo. Uma aplicação $p : K' \longrightarrow K$ é um recobrimento se, e somente se, é um homeomorfismo local sobrejetor com a propriedade de levantamento único de caminhos. ([16], p. 138)*

Teorema 1.4.8. *Sejam K e K' complexos CW, com K conexo. Se $p : E \longrightarrow K$ é um recobrimento e $f : K' \longrightarrow K$ é uma aplicação celular com levantamento $\tilde{f} : K' \longrightarrow E$ então $\tilde{f}$ é celular. Mais ainda se E é conexo e f é um recobrimento, na categoria CW, então $\tilde{f}$ é um recobrimento na categoria CW.*

Demonstração: Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ K' & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

Como f é celular dado um n -esqueleto K'^n de K' temos que $f(K'^n) \subset K^n$, onde K^n é o n -esqueleto de K e então

$$\tilde{f}(K'^n) \subset p^{-1}(p(\tilde{f}(K'^n))) \subset p^{-1}(K^n) = \bigcup_{\dim e_\alpha \leq n} p^{-1}(e_\alpha) = \bigcup_{\dim e_\alpha \leq n} \tilde{e}_\alpha = E^n$$

e assim $\tilde{f}$ é celular, onde $p \circ \tilde{f} = f$.

Vamos supor que E seja conexo e que f seja recobrimento. Dessa maneira, sabemos que, E e K são conexos por caminhos, localmente conexos por caminhos e localmente contrateis. Agora seja $x_1 \in K'$ e $x_2 = \tilde{f}(x_1)$, se $a : I \rightarrow E$ é um caminho qualquer começando em x_2 , escrevemos $a_0 = p \circ a$ e consideramos $\tilde{a} : I \rightarrow K'$ o levantamento de a_0 com respeito a f com início em x_1 . Então $\tilde{f} \circ \tilde{a} : I \rightarrow E$ é um levantamento de a_0 relativo a p começando em x_2 , segue da unicidade do levantamento de caminhos pelo recobrimento que $\tilde{f} \circ \tilde{a} = a$. Em particular $\tilde{f}(\tilde{a}(1)) = a(1)$. Como E é conexo por caminhos, qualquer um de seus ponto é da forma $a(1)$, logo $\tilde{f}$ é sobrejetora. Com o mesmo argumento temos também que $\tilde{f}$ tem a propriedade de levantamento único. Falta mostrar que $\tilde{f}$ é um homeomorfismo local e que leva células de K' em células de E . Para o homeomorfismo local, seja $x_1 \in K'$, $f(x_1) \in K$, $V \subset K$ com $f(x_1) \in V$ uma vizinhança coberta tal que existem $U' \subset K'$ e $U \subset E$ tal que $f(U') = V = p(U) = p \circ \tilde{f}(U')$ então $\tilde{f}(U') = (p|_U)^{-1} \circ f(U') = U$ logo $\tilde{f}$ é um homeomorfismo local. Agora seja e'_α um célula em K' assim $f(e'_\alpha) = e_\alpha \subset K$ e $\tilde{f}(e'_\alpha) \subset p^{-1}(e_\alpha)$, logo $\tilde{f}(e'_\alpha) \subset e_\beta$ e $p(e_\beta) = e_\alpha$ e assim $\tilde{f}(e'_\alpha) = (p|_{e_\beta})^{-1}(f(e'_\alpha)) = e_\beta$. Logo $\tilde{f}$ é um recobrimento. ■

Observamos que um recobrimento que também é um homeomorfismo é um isomorfismo celular, e pelo teorema 1.4.8, temos que o espaço de recobrimento universal é único por isomorfismo celular.

Teorema 1.4.9. *Suponha (K, L) é um par de complexos CW e que $p : \tilde{K} \rightarrow K$ é o recobrimento universal com K conexo, e $\tilde{L} = p^{-1}(L)$ então $p_\# : \pi_n(\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(K, L, x_0)$, com $x_0 \in L$, é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: : Precisamos apenas mostrar a injetividade e a sobrejetividade já que é o homomorfismo induzido por p , definido por $p_\#([f]) = [p \circ f]$ com $[f] \in \pi_n(\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{x}_0)$, é claro. Sobrejetividade: Dado $[g] \in \pi_n(K, L, x_0)$. Seja $z_0 \in J^{n-1}$ tal que $g(z_0) = x_0$. Como I^n é simplesmente conexo e $g_\# : \pi_1(I^n, z_0) \rightarrow \pi_1(K, x_0)$ e $p_\# : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(K, x_0)$ temos que $g_\#(\pi_1(I^n, z_0)) \subset p_\#(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$. Da unicidade do levantamento ([23], p. 242), existe uma única $\tilde{g} : I^n \rightarrow \tilde{K}$ tal que $p \circ \tilde{g} = g$ e $\tilde{g}(z_0) = \tilde{x}_0$. Notemos que $\tilde{g}(\partial I^n) \subset \tilde{L}$ já que $p \circ \tilde{g}(\partial I^n) = g(\partial I^n) \subset L$ e $p^{-1}(L) = \tilde{L}$. Considere $z_1 \in J^{n-1}$ e seja v um caminho de z_0 e z_1 contido em J^{n-1} . Considere o caminho $g \circ v$, trata-se de um caminho em x_0 . Então existe um único $\tilde{g}v$ com $p(\tilde{g}v) = g \circ v$ e $\tilde{g}v(0) = \tilde{x}_0$. Seja $c_{\tilde{x}_0}$ o caminho constante em $\tilde{x}_0$, assim $p(\tilde{x}_0) = g \circ v$. Logo $(\tilde{g}v) = c_{\tilde{x}_0}$. Assim considere o caminho $\tilde{g}v$. Note que $\tilde{g}v(0) = \tilde{g}(v(0)) = \tilde{g}(z_0) = \tilde{x}_0$ e $p(\tilde{g} \circ v) = g \circ v$. Segue que $\tilde{g}v = c_{\tilde{x}_0}$. Daí, $g(z_1) = \tilde{x}_0$ e assim $\tilde{g}(J^{n-1}) = \tilde{x}_0$. Logo $\tilde{g} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{x}_0)$ e então $p_\#([\tilde{g}]) = [g]$.

Injetividade: Sejam $[f], [h] \in \pi_n(\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{x}_0)$ tal que $p_\#([f]) = p_\#([h])$, ou seja, $[p \circ f] = [p \circ h]$. Dessa maneira $p \circ f \simeq p \circ h$. Logo existe $\phi : I^n \times I \rightarrow K$ tal que $\phi_0 = p \circ f$ e $\phi_1 = p \circ h$ e essa homotopia é relativa a J^{n-1} . Assim existe uma única $\tilde{\phi} : I^n \times I \rightarrow \tilde{K}$ tal que $p \circ \tilde{\phi} = \phi$

e de [23] p. 238, $\tilde{\phi}_0 = f$ e $\tilde{\phi}$ é relativo a J^{n-1} e ainda $p \circ \tilde{\phi}_1 = \phi_1 = p \circ h$. Segue da unicidade do levantamento ([23], p. 242), $\tilde{\phi}_1 = h$. Logo $f \simeq h$ e o resultado segue. ■

Teorema 1.4.10. *Suponha (K, L) é um par de complexos CW e que $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ é o recobrimento universal com K conexo. Seja $\tilde{L} = p^{-1}(L)$. Se $i_{\#} : \pi_1(L) \xrightarrow{\subset} \pi_1(K)$ é um isomorfismo então $p|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \longrightarrow L$ é o recobrimento universal de L . Mais ainda, se L é um retrato por de formação forte de K então $\tilde{L}$ é um retrato por de formação forte de $\tilde{K}$.*

Demonstração: Já que $\tilde{L}$ é imagem inversa de fechado que é união de células de $\tilde{K}$ (os levantamentos das células de L), então $\tilde{L}$ é um subcomplexo de $\tilde{K}$ e claramente $p|_{\tilde{L}}$ é um recobrimento de L . Mostremos que se $i_{\#}$ é um isomorfismo então $\tilde{L}$ é conexo e simplesmente conexo. Pelo teorema anterior o recobrimento induz um isomorfismo entre $\pi_i(\tilde{K}, \tilde{L})$ e $\pi_i(K, L)$ para todo $i \geq 1$. Para ver que $\tilde{L}$ é conexo, note que $\pi_1(K, L) = 0$ pela seqüência exata

$$\pi_1(L) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(K, L) \longrightarrow \pi_0(L) \xrightarrow{\cong} \pi_0(K)$$

já que L e K são conexos. Dessa maneira $\pi_1(\tilde{K}, \tilde{L}) = 0$. Assim pela conectividade de $\tilde{K}$ e a exatidão da seqüência

$$0 = \pi_1(\tilde{K}, \tilde{L}) \longrightarrow \pi_0(\tilde{L}) \longrightarrow \pi_0(\tilde{K}) = 0$$

segue que $\tilde{L}$ é conexo. E pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{L}) & \xrightarrow{\subset} & \pi_1(\tilde{K}) = 0 \\ \text{injetora} \downarrow & & \downarrow 0 \\ \pi_1(L) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(K) \end{array}$$

temos que $\tilde{L}$ é simplesmente conexo logo $p : \tilde{L} \longrightarrow L$ é um recobrimento universal. Agora se L é um retrato por de formação forte de K então $\pi_i(K, L) = 0$ e assim $\pi_i(\tilde{K}, \tilde{L}) = 0$ para todo $i \geq 1$ e então $\tilde{L}$ é um retrato por de formação forte de $\tilde{K}$. ■

Teorema 1.4.11. *Suponha $f : K \longrightarrow L$ uma aplicação celular entre complexos CW tal que $f_{\#} : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L)$ é um isomorfismo. Se $\tilde{K}, \tilde{L}$ são espaços de recobrimento universais de K, L (conexos) e $\tilde{f} : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{L}$ é um levantamento de f então $M_{\tilde{f}}$ é um espaço de recobrimento de M_f .*

Demonstração: Sabemos que $\tilde{f}$ é celular e $\tilde{L}$ é um retrato por de formação forte de $M_{\tilde{f}}$ então $\pi_i(M_{\tilde{f}}) = \pi_i(\tilde{L})$, como $\tilde{L}$ é recobrimento universal de L temos que $M_{\tilde{f}}$ é um complexo CW simplesmente conexo. Sejam $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ e $p' : \tilde{L} \longrightarrow L$ os recobrimentos. Dessa maneira temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{L} \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

Defina $\alpha : M_{\tilde{f}} \longrightarrow M_f$ por

$$\begin{cases} \alpha[w, t] = [p(w), t] & 0 \leq t \leq 1, w \in \tilde{K} \\ \alpha(z) = [p'(z)] & z \in \tilde{L} \end{cases}$$

Se $[w, 1] = [z]$ então $\tilde{f}(w) = z$ e assim $\alpha[w, 1] = [p(w), 1] = [f(p(w))] = [p'[\tilde{f}(w)]] = [p'(z)]$ logo α está bem definida, e ainda é contínua. Note que $\alpha|_{M_{\tilde{f}} - \tilde{L}} = \alpha|_{\tilde{K} \times [0, 1]} = p \times 1_{[0, 1]}$ e $\alpha|_{\tilde{L}} = p'$. Então $\alpha|_{M_{\tilde{f}} - \tilde{L}}$ e $\alpha|_{\tilde{L}}$ são recobrimentos e α leva células homeomorficamente em células.

Consideremos $\beta : \hat{M}_f \longrightarrow M_f$ o recobrimento universal de M_f , com $\hat{K} = \beta^{-1}(K)$, $\hat{L} = \beta^{-1}(L)$. Pelo teorema anterior, $\beta|_{\hat{L}} : \hat{L} \longrightarrow L$ é um recobrimento universal. Como $f_{\#} : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L)$ é um isomorfismo, pelo lema 1.1.4, $i_{\#} : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(M_f)$ também é um isomorfismo. Assim $\hat{K}$ é simplesmente conexo usando o teorema anterior novamente ($\hat{K}$ será o recobrimento universal de K). Temos ainda que $\beta|_{\hat{M}_f - \hat{L}} : \hat{M}_f - \hat{L} \longrightarrow M_f - L$ é um recobrimento e $\pi_i(\hat{M}_f - \hat{L}, \hat{K}) = \pi_i(M_f - L, K) = 0$ para todo i . Assim $\hat{M}_f - \hat{L}$ é simplesmente conexo e $\beta|_{\hat{M}_f - \hat{L}}$ é um recobrimento universal também.

Agora seja $\hat{\alpha} : M_{\tilde{f}} \longrightarrow \hat{M}_f$ um levantamento de α . Pela unicidade dos espaços de recobrimento universal de $M_f - L$ e L , $\hat{\alpha}$ leva $M_{\tilde{f}} - \tilde{L}$ homeomorficamente sobre $\hat{M}_f - \hat{L}$ e $\tilde{L}$ homeomorficamente sobre $\hat{L}$. Então $\hat{\alpha}$ é uma bijeção contínua, já que claramente leva cada célula e homeomorficamente a uma célula $\hat{\alpha}(e)$. E ainda leva $\bar{e}$ homeomorficamente em $\hat{\alpha}(\bar{e})$, e isso é apenas $\overline{\hat{\alpha}(e)}$, pois se φ é uma aplicação característica para e , $\hat{\alpha} \circ \varphi$ é uma aplicação característica para $\hat{\alpha}(e)$, tal que $\overline{\hat{\alpha}(e)} = \hat{\alpha} \circ \varphi(I^n) = \hat{\alpha}(\bar{e})$. Como $M_{\tilde{f}}$ e $\hat{M}_f$ tem a topologia fraca com respeito as células fechadas segue que $\hat{\alpha}$ é um homeomorfismo. Como $\beta \circ \hat{\alpha} = \alpha$ segue que α é um recobrimento. ■

Consideremos agora o complexo de cadeia celular $C(\tilde{K}, \tilde{L})$, onde $\tilde{K}$ é o espaço de recobrimento universal de K e $L < K$. Sabemos que $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo, por resultados anteriores. Mostremos agora que $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é na verdade um $\mathbb{Z}(G)$ -módulo onde G é o grupo dos homeomorfismos de recobrimento de $\tilde{K}$. Mostraremos também que este é isomorfo ao grupo fundamental de K .

Definição 1.4.12. Se G é um grupo e $\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros então $\mathbb{Z}(G)$ - o anel do grupo integral de G - é conjunto de todas as somas formais finitas $\sum_i n_i g_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in G$, com a adição e multiplicação dadas por

$$\begin{aligned} \sum_i n_i g_i + \sum_i m_i g_i &= \sum_i (n_i + m_i) g_i \\ \left(\sum_i n_i g_i \right) \left(\sum_j m_j g_j \right) &= \sum_{i,j} (n_i m_j) (g_i g_j) \end{aligned}$$

Similarmente podemos definir $\mathbb{A}(G)$ para um anel qualquer $\mathbb{A}$.

Seja $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ o recobrimento universal e $G = \{\text{O conjunto dos homeomorfismos } h : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{K} \text{ tal que } p \circ h = p\}$. Suponha que $L < K$ e $\tilde{L} = p^{-1}(L)$. Cada $g \in G$, pelo teorema 1.4.8, é um isomorfismo celular de $\tilde{K}$ induzindo, para cada n , o homomorfismo $g_* : C_n(\tilde{K}, \tilde{L}) \longrightarrow C_n(\tilde{K}, \tilde{L})$ e satisfazendo $dg_* = g_*d$ (onde d é o bordo em $C(\tilde{K}, \tilde{L})$). Vamos definir uma ação de G em $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ por $g.c = g_*(c)$, ($g \in G$, $c \in C(\tilde{K}, \tilde{L})$), dessa maneira $d(gc) = d(g_*(c)) = g_*(dc) = g(dc)$. Então se definirmos

$$\left(\sum_i n_i g_i \right) c = \sum_i n_i (g_i c) = \sum_i n_i (g_i)_*(c)$$

$C(\tilde{K}, \tilde{L})$ torna-se um $\mathbb{Z}(G)$ -complexo livre com uma classe natural de bases como veremos na proposição a seguir.

Proposição 1.4.13. *Suponha que $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ é o recobrimento universal, com K conexo, e que G é o grupo dos homeomorfismos de recobrimento de $\tilde{K}$. Assuma $L < K$ e $\tilde{L} = p^{-1}(L)$. Para cada célula e_α de $K - L$ considere uma aplicação característica específica $\varphi_\alpha : I^n \longrightarrow K$ ($n = n(\alpha)$) e um levantamento específico $\tilde{\varphi}_\alpha : I^n \longrightarrow \tilde{K}$ de φ_α escolhido. Então $\{\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle \mid e_\alpha \in K - L\}$ é uma base para $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ como um $\mathbb{Z}(G)$ -complexo.*

Demonstração: Seja $*$ $=$ $*_n$ um ponto no interior de I^n para cada n . Para cada $y \in p^{-1}\varphi_\alpha(*)$, seja $\hat{\varphi}_{\alpha,y}$ o único levantamento de φ_α com $\hat{\varphi}_{\alpha,y}(*) = y$. Mostremos que G age livremente e transitivamente em cada fibra de $p^{-1}(x)$.

Livremente: Sejam $f, g : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{K}$, $f, g \in G$. Mostremos que se existe $\tilde{x} \in \tilde{K}$ tal que $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$ então $f = g$. Para isso consideremos $A = \{\tilde{x} \in \tilde{K} \mid f(\tilde{x}) = g(\tilde{x})\}$, já que $\tilde{K}$ é conexo, mostremos que A é aberto e fechado. Seja $\tilde{y} \in \bar{A}$, assim $f(\tilde{y}), g(\tilde{y}) \in p^{-1}(x)$ para algum $x \in K$, já que $p \circ f(\tilde{y}) = p \circ g(\tilde{y}) = p(\tilde{y})$, e vamos assumir que $f(\tilde{y}) \neq g(\tilde{y})$. Seja U uma vizinhança coberta de x e seja V_f e V_g as componentes de $p^{-1}(U)$ que contêm $f(\tilde{y})$ e $g(\tilde{y})$, respectivamente. Como f e g são contínuas existe uma vizinhança W de $\tilde{y}$ tal que $f(W) \subset V_f$ e $g(W) \subset V_g$, mas isso é absurdo pois $W \cap A = \emptyset$ e $\tilde{y} \in W$, assim $f(\tilde{y}) = g(\tilde{y})$ e $A = \bar{A}$. Seja $\tilde{y} \in A$ como antes $p \circ f(\tilde{y}) = p \circ g(\tilde{y}) = p(\tilde{y}) = x$, então existe uma vizinhança coberta de x , V_x , e $U \subset \tilde{K}$ tal que $p(U) = V_x$ e U aberto. Então $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(U)$ são abertos com $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U) \neq \emptyset$ logo $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U) \subset A$, assim A é aberto. Logo $A = \emptyset$ ou $A = \tilde{K}$. Logo G age livremente pois se existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$ então $g = 1_{\tilde{K}}$.

Transitivamente: Seja $x \in K$ e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{K}$ tal que $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, como $\tilde{K}$ é recobrimento universal, $\tilde{K}$ é um simplesmente conexo logo $\pi_1(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_2))$, então existe um homeomorfismo $h : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{K}$ tal que $h(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ (corolário 6.4 de [18], p.131). Logo age transitivamente.

Então cada $\hat{\varphi}_{\alpha,y}$ é unicamente expresso como $\hat{\varphi}_{\alpha,y} = g \circ \tilde{\varphi}_\alpha$ para algum $g \in G$ e $\{\hat{\varphi}_{\alpha,y} \mid y \in p^{-1}(*)\} = \{g \circ \tilde{\varphi}_\alpha \mid g \in G\}$. Mas pelo lema 1.3.2 e do teorema 1.4.6, $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é um $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base

$$\{\langle \hat{\varphi}_{\alpha,y} \rangle\} = \{\langle g \circ \tilde{\varphi}_\alpha \rangle\} = \{g_*(\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle)\} = \{g \cdot \langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle\}$$

onde g varia em G e φ_α varia sobre as aplicações características dadas para $K - L$. Então para cada $c \in C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é unicamente representado como uma soma finita

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i, \alpha} n_{i, \alpha} (g_i \langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\sum_i (n_{i, \alpha} g_i) \langle \tilde{\varphi} \rangle \right) \\ &= \sum_{\alpha} r_{\alpha} \langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle, \quad r_{\alpha} \in \mathbb{Z}(G). \end{aligned}$$

Portanto $\{\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle \mid e_\alpha \text{ é uma célula em } K - L\}$ é uma base para $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ como um $\mathbb{Z}(G)$ -módulo. ■

Mostremos agora o isomorfismo entre o grupo fundamental K e o grupo dos homeomorfismos de recobrimento G .

Teorema 1.4.14. *Seja $p : \tilde{K} \rightarrow K$ um recobrimento universal, onde K é um complexo CW conexo, então $\pi_1(K, x) = G$ onde $x \in K$.*

Demonstração: Seja $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Para cada $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (K, x)$, seja $\tilde{\alpha}$ o levantamento de α , com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Seja $g_{[\alpha]} : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ o único homeomorfismo de recobrimento tal que $g_{[\alpha]}(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}(1)$. Afirmamos que se $y \in \tilde{K}$ e se $w : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{K}, \tilde{x}, y)$ é um caminho qualquer, $g_{[\alpha]}(y) = \widetilde{\alpha * pw}(1)$ onde pw é a composição de p e w e “ $*$ ” representa a concatenação dos caminhos. Para ver isso, note que $\widetilde{\alpha * pw}(1) = \widetilde{pw}(1)$, onde $\widetilde{pw}$ é o único levantamento de pw com $\widetilde{pw}(0) = \tilde{\alpha}(1)$. Mas considerando $\widetilde{pw}$ o único levantamento de pw com $\widetilde{pw}(0) = \tilde{x}$, $g_{[\alpha]}(\widetilde{pw}(0)) = g_{[\alpha]}(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}(1)$, assim $g_{[\alpha]} \circ \widetilde{pw}$ é ainda um levantamento de pw . Então $\widetilde{pw} = g_{[\alpha]} \circ \widetilde{pw}$ e

$$\widetilde{\alpha * pw}(1) = \widetilde{pw}(1) = g_{[\alpha]}(\widetilde{pw}(1)) = g_{[\alpha]}(y).$$

Definimos então a função $\theta = \theta(x, \tilde{x}) : \pi_1(K) \rightarrow G$ dada por $[\alpha] \mapsto g_{[\alpha]}$, que está bem definida pelos comentários anteriores. É um homomorfismo, pois, para quaisquer $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(K)$ temos

$$\begin{aligned} g_{[\alpha]}(g_{[\beta]}(\tilde{x})) &= g_{[\alpha]}(\tilde{\beta}(1)) \\ &= \widetilde{\alpha * p\tilde{\beta}}(1) \\ &= \widetilde{\alpha * \beta}(1) = g_{[\alpha][\beta]}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Assim $g_{[\alpha]} \circ g_{[\beta]} = g_{[\alpha][\beta]}$ já que são iguais em um ponto. É sobrejetora já que dado $g \in G$ temos que $g(\tilde{x}) = \tilde{y} \in p^{-1}(x)$, considere o laço em $\pi_1(K)$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ e $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{y}$ com $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e assim $\theta([\alpha]) = g_{[\alpha]}$. É injetora pois de $\theta[\tilde{\alpha}] = \theta[\tilde{\beta}] \Rightarrow g_{[\alpha]}(\tilde{x}) = g_{[\beta]}(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ e assim $[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}]$ é um caminho fechado então $[\alpha\beta^{-1}] = [e_x]$ o que implica que $[\alpha] = [\beta]$. Logo θ é um isomorfismo de grupos. ■

Para terminar, suponha agora que $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ e $p' : \tilde{L} \longrightarrow L$ são recobrimentos universais com $p(\tilde{x}) = x$ e $p'(\tilde{y}) = y$, e que G_K e G_L são os grupos das transformações de recobrimento. Então qualquer aplicação $f : (K, x) \longrightarrow (L, y)$ induz uma única $f_{\#} : G_K \longrightarrow G_L$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} G_K & \xrightarrow{f_{\#}} & G_L \\ \theta(x, \tilde{x}) \uparrow & & \uparrow \theta(y, \tilde{y}) \\ \pi_1(K, x) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(L, y) \end{array} \quad (\star)$$

Essa aplicação satisfaz.

Teorema 1.4.15. *Se $g \in G_K$ e $\tilde{f} : (\tilde{K}, \tilde{x}) \longrightarrow (\tilde{L}, \tilde{y})$ cobre f então $f_{\#}(g) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ g$.*

Demonstração: Mostremos que $f_{\#}(g) \circ \tilde{f}$ e $\tilde{f} \circ g$ cobrem $\tilde{f}$, de fato, seja $x \in \tilde{K}$ então

$$p'(f_{\#}(g) \circ \tilde{f}(x)) = p' \circ f_{\#}(\tilde{f}(x)) = p' \circ \tilde{f}(x) = f \circ p(x)$$

e

$$p'(\tilde{f}(g(x))) = p' \circ f(g(x)) = f \circ p(g(x)) = f \circ p(x)$$

Logo é suficiente mostrar que são iguais em um ponto, diremos $\tilde{x}$. Dessa maneira seja α um laço tal que $[\alpha]$ corresponde a g por $\theta(x, \tilde{x})$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \circ g(\tilde{x}) &= \tilde{f}(\tilde{\alpha}(1)) \\ &= \widetilde{f \circ \alpha}(1), \text{ como } \tilde{f}(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{y} = \widetilde{f \circ \alpha}(0) \\ &= \theta(y, \tilde{y})(f_{\#}([\alpha]))(\tilde{y}) \text{ onde } f_{\#} : \pi_1(K, x) \longrightarrow \pi_1(L, y) \\ &= \theta(y, \tilde{y})(f_{\#}(\theta(x, \tilde{x})^{-1}(g)))(\tilde{y}) \\ &= f_{\#}(g)(\tilde{y}) \\ &= (f_{\#}(g) \circ \tilde{f})(\tilde{x}). \end{aligned}$$

■

Uma aproximação geométrica para a teoria de homotopia

Neste capítulo faremos a introdução dos pilares da teoria de homotopia simples.

2.1 Introdução

Dado dois espaços topológicos é muito difícil decidir quando estes são homotopicamente equivalentes. Por exemplo, consideremos o 2-dimensional complexo H - “A casa de dois quartos” - na figura 2.1. H é construído começando com a parede $S^1 \times I$, adicionando o teto e o chão (cada um D^2 com um interior de D^2 removido), adicionando um piso no meio (um D^2 com o interior de dois discos, D^2 , removidos) e finalmente colocando paredes cilíndricas A e B . Como indicado nas setas uma entrada por cima e outra por baixo. Apesar de não parecer que há maneira de contraí-lo, esse espaço é contrátil (homotopicamente equivalente a um ponto). Seria interessante que a homotopia dissesse o por quê de maneira simples.

A partir de 1930, com a topologia combinatorial, a classificação de um homeomorfismo de um complexo simplicial finito foi atacado introduzindo mudanças elementares, dois complexos K e L sendo “combinatorialmente equivalente” se obtermos K de L fazendo uma sequência

Figura 2.1: Casa de dois quartos

finita de mudanças elementares. Desse modo, J.H.C Whitehead, tentando entender a equivalência homotópica, procedeu com o mesmo espírito. Faremos uma introdução desses fatos.

Se K e L são complexos simpliciais finitos diremos que existe um “colapso simplicial elementar” de K em L se L é um subcomplexo de K e $K = L \cup aA$ onde a é um vértice de K , A e aA são simplexos de K e $aA \cap L = a(\partial A)$. Por exemplo

Diremos que K “colapsa simplicialmente” em L - escrevemos $K \searrow^s L$ - se existe uma seqüência finita de colapsos elementares simpliciais $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_q = L$.

Se $K \searrow^s L$ ainda escrevemos $L \nearrow^s K$ e dizemos que L “expande simplicialmente” até K . Diremos que K e L tem o mesmo tipo de homotopia simples, que Whitehead chamou originalmente de “nucleus”, se existe uma seqüência $K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_q = L$ onde cada seta representa uma expansão simplicial ou um colapso simplicial.

Como um colapso simplicial elementar determina um retrato por deformação forte (unicamente por homotopia) segue que, se K e L possuem o mesmo tipo de homotopia simples então K e L possuem o mesmo tipo de homotopia. Dessa maneira Whitehead perguntou:

Se dois complexos simpliciais finitos possuem o mesmo tipo de homotopia, eles necessariamente, possuem o mesmo tipo de homotopia simples?

Apesar das restrições aparentes das expansões e colapsos é pouco aceitável que a resposta seja sim. Para ilustrar isso e mostrar que o tipo de homotopia simples é uma noção muito útil retornaremos a casa de dois quartos.

Pensaremos em H sendo triangularizado como um subcomplexo do cilindro sólido $D^2 \times I$ onde $D^2 \times I \searrow^s D^2 \times 0 \searrow^s *$ ($=$ ponto). Agora imaginando que o cilindro sólido foi feito de argila idealmente macia, podemos deslocar a tampa superior do cilindro A para baixo, por dentro deste, entrando no sólido inferior da metade de $D^2 \times I$, empurrando a argila contra as paredes, no teto e no chão, limpando a sala inferior em H . Simetricamente, faz-se o mesmo em B . Tendo terminado, apenas nos resta H . Então podemos ver, sem uma prova rigorosa, que $*$ $\nearrow^s D^2 \times I \searrow^s H$. Logo H tem o mesmo tipo de homotopia simples de um ponto, ou seja, H é contrátil.

Mas, os complexos simpliciais dificultaram o desenvolvimento de tais conceitos, o que levou a Whitehead ([28] e [29]) criar os complexos CW ([30]) e esses termos deram origem a teoria ([31]). Na próxima seção as expansões e colapsos são definidos sobre a categoria de complexos CW e é nesta categoria que iremos trabalhar.

2.2 Deformações formais

A partir daqui todo complexo CW mencionado será assumido finito, a não ser os complexos CW que aparecem como espaço de recobrimento.

Definição 2.2.1. *Suponha que (K, L) é um par CW finito. Então $K \searrow^e L$ - isto é, K colapsa em L por um colapso elementar - se e só se*

- (1) $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ onde e^n e e^{n-1} não estão em L ;
- (2) Existe um par de bolas $(Q^n, Q^{n-1}) \approx (I^n, I^{n-1})$ e uma aplicação $\varphi : Q^n \longrightarrow K$ tal que:
 - (a) φ é uma aplicação característica para e^n ;
 - (b) $\varphi|_{Q^{n-1}}$ é uma aplicação característica para e^{n-1}
 - (c) $\varphi(J^{n-1}) \subset L^{n-1}$

Nessas circunstâncias ainda escrevemos $L \nearrow^e K$ e dizemos que L expande para K por uma expansão elementar.

Geometricamente, as expansões elementares de L correspondem precisamente a colagem de uma bola em L ao longo da face da bola por uma aplicação, pois se colocarmos $\varphi_0 = \varphi|_{J^{n-1}}$

na definição, então $\varphi_0 : (J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \longrightarrow (L^{n-1}, L^{n-2})$ e $(K, L) \cong (L \cup_{\varphi_0} Q^n, L)$. Por outro lado, dado L , qualquer aplicação $\varphi_0 : (J^{n-1}, \partial J^{n-1}) \longrightarrow (L^{n-1}, L^{n-2})$ determina uma expansão elementar, de fato, seja $K = L \cup_{\varphi_0} Q^n$ e $\varphi : L \sqcup Q^n \longrightarrow K$ a aplicação quociente e defina $\varphi(\overset{\circ}{Q}^{n-1}) = e^{n-1}$, $\varphi(\overset{\circ}{Q}^n) = e^n$. Então $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$ é um complexo CW e $L \xrightarrow{e} K$.

Proposição 2.2.2. *Se $K \searrow^e L$ então existe um retração por deformação forte celular $D : K \longrightarrow L$. E ainda, quaisquer duas retrações por deformação forte de K em L são homotópicas em relação a L .*

Demonstração: Seja $K = L \cup e^{n-1} \cup e^n$. Por hipótese existe uma aplicação $\tilde{\varphi}_0 : J^{n-1} \longrightarrow L^{n-1}$ tal que $(K, L) \approx (L \cup_{\varphi_0} Q^n, L)$, e usando que $J^{n-1} \approx I^{n-1}$ e $Q^n \approx I^n$ temos que existe $\varphi_0 : I^{n-1} \longrightarrow L^{n-1}$ tal que $(K, L) \approx (L \cup_{\varphi_0} I^n, L)$. Mas $L \cup_{\varphi_0} I^n$ é o cilindro da aplicação de φ_0 , já que $\varphi_0 : I^{n-1} \longrightarrow L^{n-1}$ e assim

$$M_{\varphi_0} = \frac{I^{n-1} \times I \sqcup L^{n-1}}{(x, 1) = \varphi_0(x)} = L \cup_{\varphi_0} I^n$$

Assim pelo lema 1.1.3 existe uma retração por deformação forte $D : K \longrightarrow L$ tal que $D(\overline{e^n}) = D(I^{n-1} \times I) = \varphi_0(I^{n-1}) \subset L^{n-1}$, e assim D é celular.

Considere agora $D_1, D_2 : K \longrightarrow L$ duas retrações por deformação forte e $i : L \subset K$ a inclusão, então $i \circ D_1 \simeq 1_K \simeq i \circ D_2$. Assim $D_1 = D_1 \circ i \circ D_1 \simeq D_1 \circ i \circ D_2 = D_2$. ■

Definição 2.2.3. *Diremos que K colapsa em L (L expande em K) - $K \searrow L$ ($L \nearrow K$) - se e só se existe uma seqüência finita (possivelmente vazia) de colapsos elementares (expansões elementares)*

$$K = K_0 \searrow^e K_1 \searrow^e K_2 \searrow^e \dots \searrow^e K_q = L$$

Definição 2.2.4. *Uma seqüência finita de operações que é ou uma expansão elementar ou um colapso elementar é chamada deformação formal e escrevemos $K \frown L$. Claramente, se $K \frown L$ então $L \frown K$, K e L são ditos tendo o mesmo tipo de homotopia simples. Se K e L tem um subcomplexo K_0 , de maneira que nenhuma célula é removida durante a deformação formal, escrevemos $K \frown L$ rel K_0*

Suponha que $K = K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_q = L$ é uma deformação formal. Defina $f_i : K_i \longrightarrow K_{i+1}$ sendo a inclusão se $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$ e, usando a proposição 2.2.2, seja f_i uma retração por deformação forte celular de K_i sobre K_{i+1} , se $K_i \searrow^e K_{i+1}$. Então $f = f_{q-1} \dots f_1 f_0$ é chamada de *deformação*, que é uma equivalência de homotopia unicamente determinada, por homotopia, por meio da deformação formal dada. Se $K' < K$, $f = f_{q-1} \dots f_1 f_0 : K \longrightarrow L$ é uma deformação com $f_i|_{K'} = 1$ (ou seja $K \frown L$ rel K'), então diremos que f é uma deformação rel K' .

Definição 2.2.5. *Uma equivalência de homotopia simples $f : K \longrightarrow L$ é uma aplicação que homotópica a uma deformação. f é uma equivalência de homotopia simples em relação a K' se é homotópica, em relação a K' , a uma deformação em relação a K' .*

2.3 Cilindro da aplicação e deformações

Nessa seção introduziremos alguns dos fatos importantes relacionados ao cilindro da aplicação e deformações formais.

Proposição 2.3.1. *Se $K \searrow L$ então qualquer seqüência de colapsos elementares pode ser reordenada de maneira que $K = K_0 \searrow^e K_1 \searrow^e \dots \searrow^e K_q = L$ com $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i-1} \cup e^{n_i}$ onde $n_{q-1} \leq n_{q-2} \leq \dots \leq n_1 \leq n_0$.*

Demonstração: Se $K \searrow L$ então existe uma seqüência

$$K = \tilde{K}_0 \searrow^e \tilde{K}_1 \searrow^e \dots \searrow^e \tilde{K}_q = L$$

e por definição $\tilde{K}_i = \tilde{K}_{i+1} \cup e^{\tilde{n}_i-1} \cup e^{\tilde{n}_i}$, para $0 \leq i \leq q-1$ e respectivas funções características $\varphi_{\tilde{n}_i}$, dessa maneira

$$K = L \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1} e^{\tilde{n}_i-1} \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1} e^{\tilde{n}_i} \right).$$

Consideremos o conjunto dos $\{\tilde{n}_i \mid 0 \leq i \leq q-1\}$ e fazemos o seguinte processo até obtermos um conjunto ordenado; se $\tilde{n}_i \geq \tilde{n}_{i+1}$ então deixo como está, caso contrário permutamos suas posições. Fazendo esse processo um numero finito de vezes temos uma ordenação para o conjunto $\{\tilde{n}_i \mid 0 \leq i \leq q-1\}$, tal que

$$n_{q-1} \leq n_{q-2} \leq \dots \leq n_2 \leq n_1 \leq n_0,$$

onde $n_j = \tilde{n}_i$ para algum i entre 0 e $q-1$. Então

$$K = L \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1} e^{n_i-1} \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1} e^{n_i} \right).$$

Note que as $\varphi_{\tilde{n}_j}$ passam a ser φ_{n_i} para algum i entre 0 e $q-1$. Seja

$$K_j = L \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1-j} e^{n_i-1} \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q-1-j} e^{n_i} \right)$$

para $0 \leq j \leq q$, logo $K_0 = K$ e $K_q = L$. Assim temos $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i-1} \cup e^{n_i}$, $\varphi_{n_i} : Q^{n_i} \rightarrow K_i$, $\varphi_{n_i}|_{Q_{n_i}^\circ} = e^{n_i}$, $\varphi_{n_i}|_{Q_{n_i-1}^\circ} = e^{n_i-1}$ e $\varphi_{n_i}(J^{n_i-1}) \subset K_{i+1}^{n_i-1} - S$, pela ordenação escolhida, já que as células e^{n_i} e e^{n_i-1} são coladas em $K_{i+1}^{n_i-1} - S = K_{i+1}^{n_i-1} \subset K_{i+1}$ onde S é o conjunto das células que já foram colapsadas. Dessa maneira temos que

$$K = K_0 \searrow^e K_1 \searrow^e \dots \searrow^e K_q = L$$

e $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i-1} \cup e^{n_i}$ onde $n_{q-1} \leq \dots \leq n_1 \leq n_0$. ■

Teorema 2.3.2. *Se $f : K \longrightarrow L$ é uma aplicação celular e se $K_0 < K$ então $M_f \searrow M_{f|_{K_0}}$.*

Demonstração: Seja $K = K_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_r$ onde e_i são células de $K - K_0$ colocada na ordem crescente da dimensão. Então $K_i = K_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_i$ é um subcomplexo de K , já que $\bar{e}_k = e_k \cup (\cup e_j)$ onde e_j são células de dimensões menores que k , assim $\bar{e}_k \subset K_i$ para todo $k \leq i$ e claramente K_i é fechado. Colocaremos $M_i = M_{f|_{K_i}}$ e afirmamos que $M_i \xrightarrow{e} M_{i-1}$ para todo i . De fato, seja φ_i uma aplicação característica para e_i e seja $q : (K_i \times I) \sqcup L \longrightarrow M_i$ a aplicação quociente. Então $M_i = M_{i-1} \cup e_i \cup (e_i \times (0, 1))$ e $q \circ (\varphi_i \times 1) : I^{n_i} \times I \longrightarrow M_i$ é uma aplicação característica para $e_i \times (0, 1)$ que restrita a $I^{n_i} \times 0$ é uma aplicação característica para e_i . E ainda o complementar de $I^{n_i} \times 0$ em $\partial(I^{n_i} \times I)$ é levado em $M_{i-1}^{n_i}$. Logo $M_i \xrightarrow{e} M_{i-1}$ e então $M_f \searrow M_{f|_{K_0}}$. ■

Observamos que $I \xrightarrow{e} \{0\}$, pois $I = \{0\} \cup e^0 \cup e^1$, onde $e^0 = \{1\}$, $e^1 = (0, 1)$ e aplicação característica $f : I \longrightarrow I$ dada por $f(x) = 1 - x$. De uma maneira similar tem-se que $I \xrightarrow{e} \{1\}$.

Corolário 2.3.3. *Se $f : K \longrightarrow L$ é uma aplicação celular então $M_f \searrow L$.*

Demonstração: Para $K_0 = \{x\}$ uma 0-célula de K temos que

$$M_{f|_{\{x\}}} = \frac{(\{x\} \times I) \sqcup L}{(x, 1) = f(x)} \searrow L$$

e assim usando o teorema anterior $M_f \searrow M_{f|_{\{x\}}}$, logo $M_f \searrow L$. ■

Corolário 2.3.4. *Se $K_0 < K$ então $K \times I \searrow (K_0 \times I) \cup (K \times i)$, $i = 0$ ou $i = 1$.*

Demonstração: Para $f = 1_K$ temos

$$M_f = \frac{(K \times I) \sqcup K}{(x, 1) = x} = K \times I$$

e

$$M_{f|_{K_0}} = \frac{(K_0 \times I) \sqcup K}{(x, 1) = x} = (K_0 \times I) \cup (K \times 1) \approx (K_0 \times I) \cup (K \times 0)$$

e assim, como $M_f \searrow M_{f|_{K_0}}$, temos que $K \times I \searrow (K_0 \times I) \cup (K \times i)$ para $i = 0, 1$. ■

Corolário 2.3.5. *Se $K_0 < K$ e vK é o cone em K então $vK \searrow vK_0$*

Demonstração: Seja $f : K \longrightarrow \{v\}$, então

$$M_f = \frac{(K \times I) \sqcup \{v\}}{(x, 1) = f(x) = v} = vK$$

e

$$M_{f|_{K_0}} = \frac{(K_0 \times I) \sqcup \{v\}}{(x, 1) = f(x) = v} = vK_0$$

e assim $vK \searrow vK_0$. ■

Como passaremos de complexos CW dados para complexos isomorfos sem comentários, daremos o lema a seguir que permite tal processo.

Lema 2.3.6. (a) Se (K, K_1, K_2) é uma tripla na qual é isomorfa, de maneira CW, a (J, J_1, J_2) e se $K \frown K_1 \text{ rel } K_2$ então $J \frown J_1 \text{ rel } J_2$.

(b) Se K_1, K_2 e L são complexos CW com $L < K_1$ e $L < K_2$ e se $h : K_1 \longrightarrow K_2$ é um isomorfismo CW tal que $h|_L = 1_L$ então $K_1 \frown K_2 \text{ rel } L$.

Demonstração: (a) Se $(K, K_1, K_2) \cong (J, J_1, J_2)$ então existe $h : K \longrightarrow J$ tal que $h|_{K_1} : K_1 \longrightarrow J_1$ e $h|_{K_2} : K_2 \longrightarrow J_2$ são homeomorfismos e levam células em células homeomorficamente. Assim se $K \frown K_1 \text{ rel } K_2$, é só compor com h as deformações elementares e obtemos $J \frown J_1 \text{ rel } J_2$.

(b) Consideremos primeiro o caso onde $(K_1 - L) \cap (K_2 - L) = \emptyset$. Considere a Aplicação Cilindro de h , M_h assim $M_h \searrow M_{h|_L}$ e

$$M_{h|_L} = \frac{(L \times I) \sqcup K_2}{(x, 1) = h|_L(x)} = (L \times I) \cup (K_2 \times 1)$$

já que $h|_L = 1_L$, e h sendo isomorfismo a mesma prova pode ser usada para colapsar no outro lado, ou seja, $M_h \searrow (L \times I) \cup (K_1 \times 0)$. Agora seja $\overline{M}_h$ dado a partir de M_h identificando $(x, t) = x$ se $x \in L$, $0 \leq t \leq 1$. Como $(K_1 - L) \cap (K_2 - L) = \emptyset$, podemos (considerando uma cópia apropriada de $\overline{M}_h$) assumir que K_1 e K_2 mesmos, e não meramente cópias, estão contidos nos dois finais de $\overline{M}_h$. Então os colapsos de $M_h(\text{rel } L \times I)$ podem ser feitos nesse novo contexto, já que $M_h - (L \times I)$ é isomorfo a $\overline{M}_h - L$, com a identificação temos que $\overline{M}_h \searrow K_1$ e $\overline{M}_h \searrow K_2$. E obtemos que $K_1 \nearrow \overline{M}_h \searrow K_2 \text{ rel } L$, isto é $K_1 \frown K_2 \text{ rel } L$. Agora se $(K_1 - L) \cap (K_2 - L) \neq \emptyset$ podemos, por meio de pontos remanescentes, construir um par (K, L) e isomorfismos $h_i : K \longrightarrow K_i$, $i = 1, 2$ tal que $(K - L) \cap (K_i - L) = \emptyset$ e $h_i|_L = 1_L$. Então nesse caso $K_1 \frown K \frown K_2 \text{ rel } L$. ■

Se $f : L \times I \longrightarrow L$ é a projeção natural, o argumento na última sentença do lema anterior é um caso especial do teorema a seguir.

Teorema 2.3.7 (O Princípio da Relatividade). Suponha que $L_1 < K$ e $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é uma aplicação celular. Se $K \frown J \text{ rel } L_1$, então $K \cup_f L_2 \frown J \cup_f L_2 \text{ rel } L_2$ (pela mesma seqüência de expansões e colapsos).

Demonstração: Suponha que $K = K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_p = J$ é uma seqüência de deformações elementares em relação a L_1 (ou seja, expansões ou colapsos elementares). Seja $q_i : K_i \sqcup L_2 \longrightarrow K_i \cup_f L_2$ o quociente das aplicações para $0 \leq i \leq p$. Suponha que $K_{i\pm 1} \xrightarrow{e} K_i = K_{i\pm 1} \cup e^{n-1} \cup e^n$, e $\varphi : I^n \longrightarrow K_i$ é uma aplicação característica para e^n , tal que $\varphi|_{I^{n-1}}$ é uma aplicação característica para e^{n-1} , então $q_i \circ \varphi$ e $q_i \circ \varphi|_{I^{n-1}}$ são aplicações

características para $q_i(e^n)$ e $q_i(e^{n-1})$, já que $q_i|_{K_i-L_1}$ é um homeomorfismo e f é celular. Então

$$(K_{i\pm 1} \cup_f L_2) \xrightarrow{e} (K_i \cup_f L_2) = (K_{i\pm 1} \cup_f L_2) \cup q_i(e^{n-1}) \cup q_i(e^n)$$

E assim o resultado segue por indução no número de deformações. ■

Observemos que na formação de $K \cup_f L_2$ e $J \cup_f L_2$ usamos uma cópia de L_2 disjunta de K e J , mas do lema 2.3.6 isso não faz diferença. Em particular se f é uma inclusão temos o corolário.

Corolário 2.3.8. *Suponha que $K \cup L_2$ e $J \cup L_2$ são complexos CW, com subcomplexos K , L_2 , e J , L_2 respectivamente, e suponha que $K \cap L_2 = J \cap L_2 = L_1$. Se $K \frown J$ rel L_1 então $K \cup L_2 \frown J \cup L_2$ rel L_2 .*

Demonstração: Quando $f : L_1 \longrightarrow L_1$ é a identidade em L_1 então

$$K \cup_f L_2 = \frac{K \sqcup L_2}{x = f(x)} = K \cup L_2$$

e de modo análogo $J \cup_f L_2 = J \cup L_2$ e o resultado segue do teorema anterior. ■

Proposição 2.3.9. *Se $f : K \longrightarrow L$ é uma aplicação celular e $K \searrow K_0$ então $M_f \searrow K \cup M_{f|_{K_0}}$.*

Demonstração: Suponha que

$$K = K_p \searrow^e K_{p-1} \searrow^e \dots \searrow^e K_0.$$

Para i fixo sejam $K_{i+1} = K_i \cup e^{n-1} \cup e^n$ e $\varphi : (I^n, I^{n-1}) \longrightarrow (\overline{e^n}, \overline{e^{n-1}})$ uma aplicação característica. Então

$$K \cup M_{f|_{K_{i+1}}} = K \cup M_{f|_{K_i}} \cup (e^{n-1} \times (0, 1)) \cup (e^n \times (0, 1)).$$

Então q sendo uma aplicação quociente, $q \circ (\varphi \times 1) : (I^n \times I, I^{n-1} \times I) \longrightarrow K \cup M_{f|_{K_{i+1}}}$ dá a aplicação característica para essas células e satisfaz as especificações para um colapso elementar. Assim

$$K \cup M_{f|_{K_{i+1}}} \searrow^e K \cup M_{f|_{K_i}}$$

e o resultado segue por indução. ■

Proposição 2.3.10. *Se $f, g : K \longrightarrow L$ são aplicações celulares homotópicas então $M_f \frown M_g$ rel $(K \cup L)$.*

Demonstração: Seja $F : K \times I \longrightarrow L$ a homotopia com $F_0 = f$ e $F_1 = g$. Pelo teorema da aproximação celular (teorema 1.2.5) podemos assumir F celular. Então da proposição 2.3.9, e usando o corolário 2.3.4 para $K \times I \searrow (\{x\} \times I) \cup (K \times i) \searrow K \times i$, temos

$$M_{F_0} \cup (K \times I) \nearrow M_F \searrow M_{F_1} \cup (K \times I).$$

Agora seja $\pi : K \times I \longrightarrow K$ a projeção natural e $M = M_F \cup_\pi K$. Pelo princípio da relatividade (teorema 2.3.7), a deformação acima nos dá

$$[M_{F_0} \cup (K \times I)] \cup_\pi K \nearrow M_F \cup_\pi K \searrow [M_{F_1} \cup (K \times I)] \cup_\pi K \text{ rel } K$$

e então

$$M_f \nearrow M \searrow M_g \text{ rel } (K \cup L).$$

Já que L permanece inalterado nas deformações. ■

Proposição 2.3.11. *Se $f : K_1 \longrightarrow K_2$ e $g : K_2 \longrightarrow K_3$ são aplicações celulares então $M_{g \circ f} \frown M_f \cup M_g \text{ rel } (K_1 \cup K_3)$ onde $M_f \cup M_g$ é a união disjunta de M_f e M_g colados juntos pela aplicação identidade em K_2 .*

Demonstração: Seja $p : M_f \longrightarrow K_2$ a retração natural e $F = g \circ p$, $F : M_f \longrightarrow K_3$. Assim F é celular, e $F|_{K_1} = g \circ f$ e $F|_{K_2} = g$. Como $M_f \searrow K_2$, segue da proposição 2.3.9, $M_F \searrow M_f \cup M_{F|_{K_2}} \Rightarrow M_F \searrow M_f \cup M_g$. Por outro lado como $K_1 < M_f$, do teorema 2.3.2 temos que $M_F \searrow M_{F|_{K_1}} \Rightarrow M_F \searrow M_{g \circ f}$. Então

$$M_{g \circ f} \nearrow M_F \searrow M_f \cup M_g$$

onde todos os complexos envolvidos contém $K_1 \cup K_3$ fixos nas deformações. ■

Mais geralmente temos que

Teorema 2.3.12. *Se $K_1 \xrightarrow{f_1} K_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{q-1}} K_q$ é uma seqüência de aplicações celulares e $f = f_{q-1} \dots f_1$ então*

$$M_f \frown M_{f_1} \cup M_{f_2} \dots M_{f_{q-1}} \text{ rel } (K_1 \cup K_q),$$

onde essa união é disjunta das M_{f_i} com o contra-domínio de um trivialmente identificado com o domínio do próximo.

Demonstração: Para $q = 2$ segue da proposição anterior. Procedendo indutivamente seja $g = f_{q-1} \dots f_2$ e assim por hipótese de indução $M_g \frown M_{f_2} \cup M_{f_3} \cup \dots \cup M_{f_{q-1}} \text{ rel } (K_2 \cup K_q)$. Então da proposição anterior e pelo corolário 2.3.8

$$\begin{aligned} M_f &= M_{g \circ f_1} \frown M_{f_1} \cup M_g \text{ rel } (K_1 \cup K_q) \\ &\frown M_{f_1} \cup M_{f_2} \cup \dots \cup M_{f_{q-1}} \text{ rel } (K_1 \cup K_q). \end{aligned}$$
■

Teorema 2.3.13. *Dada uma aplicação $f : K \longrightarrow L$, as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (a) *f é uma equivalência de homotopia simples;*
- (b) *Existe uma aproximação celular g para f tal que $M_g \frown K \text{ rel } K$;*

(c) Para qualquer aproximação celular g de f , $M_g \frown K \text{ rel } K$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b)

Por definição de equivalência de homotopia simples, existe uma deformação formal

$$K = K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_q = L$$

tal que f é homotópica a qualquer deformação associada com essa deformação formal. Seja $g = g_{q-1} \dots g_1 g_0$ essa deformação onde $g_i : K_i \longrightarrow K_{i+1}$. Note que para todo i , $M_{g_i} \searrow K_i$ de fato, se $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$ então

$$M_{g_i} = (K_i \times I) \cup_{g_i} K_{i+1} \searrow K_i \times I \searrow (K_i \times 0) \equiv K_i$$

e se $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$ então da proposição 2.3.9

$$M_{g_i} \searrow M_{g_i|_{K_{i+1}}} \cup K_i = (K_{i+1} \times I) \cup (K_i \times 0) \searrow (K_{i+1} \times 0) \cup (K_i \times 0) \searrow K_i \times 0 \equiv K_i.$$

Então do teorema anterior

$$\begin{aligned} M_g \frown M_{g_0} \cup \dots \cup M_{g_{q-1}} \searrow (M_{g_0} \cup \dots \cup M_{g_{q-2}} \cup K_{q-1}) = \\ = (M_{g_0} \cup \dots \cup M_{g_{q-2}}) \searrow \dots \searrow M_{g_0} \searrow K_0 = K \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Suponha que g é uma aproximação celular para f tal que $M_g \frown K \text{ rel } K$ e g' uma aproximação celular qualquer então pela proposição 2.3.10, $M_{g'} \frown M_g \frown K \text{ rel } K$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja g uma aproximação celular qualquer para f . Por hipótese $M_g \frown K \text{ rel } K$. Então a inclusão $i : K \subset M_g$ é uma deformação. Ainda o colapso $M_g \searrow L$ determina uma deformação $P : M_g \longrightarrow L$. Como qualquer duas retrações por deformação forte são homotópicas, P é homotópica a projeção natural $p : M_g \longrightarrow L$. Então $f \simeq g = p \circ i \simeq P \circ i =$ deformação. Logo f é uma equivalência de homotopia simples. ■

Teorema 2.3.14 (Teorema da Extensão de Homotopia Simples). *Suponha que $X < K_0 < K$ é uma tripla CW e que $f : K_0 \longrightarrow L_0$ é uma equivalência de homotopia simples celular tal que $f|_X = 1_X$. Seja $L = K \cup_f L_0$. Então existe uma equivalência de homotopia simples $F : K \longrightarrow L$ tal que $F|_{K_0} = f$. Ainda $K \frown L \text{ rel } X$.*

Demonstração: Seja $F : K \longrightarrow L$ a restrição de $h : K \sqcup L_0 \longrightarrow L = K \cup_f L_0$ à K . Então

$$\begin{aligned} M_F &= \frac{(K \times I) \sqcup (K \cup_f L_0)}{F(x) = (x, 1)} \\ &= \frac{(K \times I) \sqcup \left(\frac{(K_0 \times I) \sqcup L_0}{f(x) = (x, 1)} \right)}{q(x_0, t) = (x_0, t)} = \frac{(K \times I) \sqcup M_f}{q(x_0, t) = (x_0, t)} = (K \times I) \cup_q M_f \end{aligned}$$

onde $q : K_0 \times I \longrightarrow M_f$ é ainda a restrição de uma aplicação quociente. Mas sabemos que $K \times I \searrow (K_0 \times I) \cup (K \times 0)$, assim $M_F \searrow M_f \cup (K \times 0) \equiv M_f \cup K$, pelo teorema 2.3.7 (considerando a aplicação já que $K_0 \times I < K \times I$). Do teorema anterior $M_f \frown K_0 \text{ rel } K_0$, e do corolário 2.3.8, $M_f \cup K \frown K_0 \cup K \text{ rel } K$ e assim $M_f \cup K \frown K \text{ rel } K$. Claramente $F|_{K_0} = f$, do teorema anterior novamente, como $M_F \frown K \text{ rel } K$, F é uma equivalência de homotopia simples. A última afirmação do teorema é verdadeira pois

$$K \frown M_F \searrow M_{F|_X} = (X \times I) \cup L \nearrow L \times I \searrow L \times 0 \equiv L$$

tudo feito em relação a $X = X \times 0$. ■

2.4 O grupo de Whitehead de um complexo CW

Para um complexo CW finito, L , consideraremos uma estrutura nas classes de pares CW, (K, L) , tal que L é um retrato por deformação forte de K .

Definição 2.4.1. Se (K, L) e (K', L) são pares CW homotopicamente triviais, ou seja L é um retrato por deformação forte de K e também de K' , defina $(K, L) \sim (K', L)$ se e só se $K \frown K' \text{ rel } L$.

Essa definição dá uma relação de equivalência, de fato,

- (i) [Reflexiva] Como $K \frown K \text{ rel } L$, $(K, L) \sim (K, L)$;
- (ii) [Simétrica] Se $K \frown K' \text{ rel } L$ da definição de deformação $K' \frown K \text{ rel } L$, logo se $(K, L) \sim (K', L)$ então $(K', L) \sim (K, L)$;
- (iii) [Transitiva] Temos que se $K \frown K' \text{ rel } L$ e $K' \frown J \text{ rel } L$ então $K \frown K' \frown J \text{ rel } L \Rightarrow K \frown J \text{ rel } L$, logo se $(K, L) \sim (K', L)$ e $(K', L) \sim (J, L)$ então $(K, L) \sim (J, L)$.

Definição 2.4.2. Seja $[K, L]$ denotando a classe de equivalência de (K, L) . Uma adição de classes de equivalência é definido colocando

$$[K, L] + [K', L] = [K \cup_L K', L]$$

onde $K \cup_L K'$ é a união disjunta de K e K' identificado pela identidade em L .

Note que pelo lema 2.3.6 não faz diferença que união seja disjunta identificada pela identidade em L , já que podemos considerar complexos CW J e J' isomorfos a K e K' de maneira que os isomorfismos restritos a L são a identidade em L e que $J \cap J' = L$. Assim $J \cup_L J'$ é isomorfo a $K \cup_L K'$ tal que o isomorfismo restrito a L é a identidade então

$$K \cup_L K' \frown J \cup_L J' \text{ rel } L.$$

Definição 2.4.3. O grupo de Whitehead de L é definido sendo o conjunto das classes de equivalência com a adição dada e é denotado por $Wh(L)$.

Teorema 2.4.4. $Wh(L)$ está bem definido e é um grupo abeliano.

Demonstração: Se L é um retrato por deformação forte de K e também de K' então existem $D_K : K \rightarrow L$ e $D'_K : K' \rightarrow L$ retrações por deformação forte. Como $K \cup_L K'$ é uma união disjunta, seja $D : K \cup_L K' \rightarrow L$ dada por $D(x) = D_K(x)$ se $x \in K - L$, $D(x) = D'_K(x)$ se $x \in K' - L$ e $D(x) = D_K(x) = D'_K(x) = x$ se $x \in L$. Claramente D é uma retração por deformação forte e então $[K \cup_L K', L]$ é um elemento de $Wh(L)$, se $[K, L]$ e $[K', L]$ o são. Ainda se $[K, L] = [J, L]$ então $K \cup_L K' \frown J \cup_L K' \text{ rel } L$ pelo corolário 2.3.8, então $[K \cup_L K', L] = [J \cup_L K', L]$. Similarmente se $[K', L] = [J', L]$ então $[K \cup_L K', L] = [K \cup_L J', L]$. Dessa maneira a adição está bem definida.

A adição é associativa e comutativa pois a união desses conjuntos tem essas propriedades.

O elemento $[L, L]$ é a identidade denotado por 0.

Se $[K, L] \in Wh(L)$, seja $D : K \rightarrow L$ uma retração por deformação forte celular. Seja $2M_D$ constituindo de duas cópias de M_D , identificado pela identidade em K . Mais precisamente seja $2M_D = K \times [-1, 1]$ com as identificações $(x, -1) = (D(x), -1)$ e $(x, 1) = (D(x), 1)$ para todo $x \in K$. Observemos que L é um retrato de deformação forte de $2M_D$ pois $D_1 : 2M_D \rightarrow L \times 0$ dada por $D_1(x, t) = (D(x), 0)$ é uma retração por deformação forte. Afirmamos que $[2M_D, L] = -[K, L]$, de fato,

Figura 2.2: Um exemplo de $2M_D \cup_L K$

$$\begin{aligned}
 [2M_D, L] + [K, L] &= [2M_D \cup_L K, L] \\
 &= [(M_D \cup_L K) \cup M'_D, L] \\
 &= [M_{i \circ D} \cup M'_D, L] \text{ onde } i : L \xrightarrow{\subseteq} K
 \end{aligned}$$

[Mas $i \circ D \simeq 1_K$ e assim pela proposição 2.3.10 $M_{i \circ D} \frown K \times I \text{ rel } (K \times 0) \cup K$. E assim pelo corolário 2.3.8 temos]

$$\begin{aligned}
&= [K \times I \cup M'_D, L] \\
&= [L \times I \cup M'_D, L] \text{ como } K \times I \searrow L \times I \cup K \times 0 \\
&= [L \times [-1, 1], L] \text{ como } M'_D \searrow L \times [-1, 0] \\
&= [L, L] = 0 \text{ como } L \times [-1, 1] \searrow L \times 1 \equiv L
\end{aligned}$$

E isto completa a prova. ■

Definição 2.4.5. Se $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é uma aplicação celular, definimos $f_* : Wh(L_1) \longrightarrow Wh(L_2)$ por $f_*([K, L_1]) = [K \cup_{L_1} M_f, L_2]$ ou $f_*([K, L_1]) = [K \cup_f L_2, L_2]$.

Essas definições são equivalentes pois a projeção $p : M_f \longrightarrow L_2$ é uma equivalência de homotopia simples (já que do lema 1.1.3 é uma retração por deformação forte) com $p|_{L_2} = 1_{L_2}$ que do teorema 2.3.14, determina a deformação

$$(M_f \cup_{L_1} K) \searrow (M_f \cup_{L_1} K) \cup_p L_2 = K \cup_f L_2 \text{ rel } L_2$$

Segue da segunda definição que f_* é um homomorfismo de grupos, já que

$$\begin{aligned}
f_*([K, L] + [K', L]) &= [(K \cup_{L_1} K') \cup_f L_2, L_2] \\
&= [(K \cup_f L_2) \cup_{L_2} (K' \cup_f L_2), L_2] \\
&= [K \cup_f L_2, L_2] + [K' \cup_f L_2, L_2] \\
&= f_*([K, L_1]) + f_*([K', L_1])
\end{aligned}$$

Da primeira definição e da proposição 2.3.11 segue que $g_* f_* = (g \circ f)_*$, de fato, seja $f : L_1 \longrightarrow L_2$ e $g : L_2 \longrightarrow L_3$ aplicações celulares, $f_* : Wh(L_1) \longrightarrow Wh(L_2)$ e $g_* : Wh(L_2) \longrightarrow Wh(L_3)$ as induzidas e $[K, L] \in Wh(L_1)$ assim

$$\begin{aligned}
(g \circ f)_*([K, L]) &= [K \cup_{L_1} M_{g \circ f}, L_3] \\
&= [K \cup_{L_1} (M_g \cup_{L_2} M_f), L_3] \\
&= [(K \cup_{L_1} M_f) \cup_{L_2} M_g, L_3] \\
&= g_*([K \cup_{L_1} M_f, L_2]) = g_* \circ f_*([K, L]).
\end{aligned}$$

Teorema 2.4.6. Existe um funtor covariante da categoria dos complexos CW finitos e aplicações celulares na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos dado por

$$L \longrightarrow Wh(L)$$

$$(f : L_1 \longrightarrow L_2) \longrightarrow (f_* : Wh(L_1) \longrightarrow Wh(L_2)).$$

Mais ainda, se $f \simeq g$ então $f_* = g_*$

Demonstração: Falta verificar a igualdade, assim se $f \simeq g$ pela proposição 2.3.10

$$M_f \frown M_g \text{ rel } (L_1 \cup L_2)$$

e então $f_*([K, L]) = [K \cup_{L_1} M_f, L_2] = [K \cup_{L_1} M_g, L_2] = g_*([K, L])$. ■

Definição 2.4.7. Definiremos a torção $\tau(f)$ de uma equivalência de homotopia celular $f : L_1 \longrightarrow L_2$ por

$$\tau(f) = f_*[M_f, L_1] = [M_f \cup_{L_1} M_f, L_2] \in Wh(L_2).$$

2.5 Simplificando um par CW homotopicamente trivial

Nessa seção consideramos um par CW (K, L) , tal que L é um retrato por deformação forte de K e simplificamos por expansões e colapsos $\text{rel } L$. Começaremos com um lema que relaciona o tipo de homotopia simples de um complexo com as aplicações de colagem na qual foi construído.

Lema 2.5.1. Se $K_0 = L \cup e_0$ e $K_1 = L \cup e_1$ são complexos CW, onde os e_i ($i = 0, 1$) são n -células com aplicações características $\varphi_i : I^n \longrightarrow K_i$ tal que $\varphi_0|_{\partial I^n}$ e $\varphi_1|_{\partial I^n}$ são aplicações homotópicas do ∂I^n em L então $K_0 \frown K_1 \text{ rel } L$

Demonstração: Primeiro consideremos os caso onde $e_0 \cap e_1 = \emptyset$ e, assumindo isso, dando ao conjunto $L \cup e_0 \cup e_1$ a topologia e a estrutura CW que faz K_0 e K_1 subcomplexos.

Seja $F : \partial I^n \times I \longrightarrow L$ com $F_i = \varphi_i|_{\partial I^n}$ ($i = 0, 1$). Dê ao ∂I^n uma estrutura CW e $\partial I^n \times I$ a estrutura produto. Então, pelo teorema da aproximação celular 1.2.5, a aplicação $F : (\partial I^n \times I, \partial I^n \times \{0, 1\}) \longrightarrow (L, L^{n-1})$ é homotópica a uma aplicação G tal que $G|_{\partial I^n \times \{0, 1\}} = F|_{\partial I^n \times \{0, 1\}}$ e $G(\partial I^n \times I) \subset L^n$. Defina $\varphi : \partial(I^n \times I) \longrightarrow (L \cup e_0 \cup e_1)^n$ colocando

$$\varphi|_{\partial I^n \times I} = G; \quad \varphi|_{I^n \times i} = \varphi_i \quad i = 0, 1.$$

Agora colaremos uma $(n+1)$ -célula até $L \cup e_0 \cup e_1$ por φ obtendo o complexo CW $K = (L \cup e_0 \cup e_1) \cup_{\varphi} (I^n \times I)$. Como $\varphi|_{I^n \times i}$ é uma aplicação característica para e_i , temos que $K_0 = K \cup_{e_0} \xrightarrow{e} K \xleftarrow{e} L \cup e_1 = K_1 \text{ rel } L$.

Se $e_0 \cap e_1 \neq \emptyset$, construímos um complexo CW $\hat{K} = L \cup \hat{e}_0$ tal que $\hat{e}_0 \cap (e_0 \cup e_1) = \emptyset$ tal que $\hat{e}_0$ tem a mesma aplicação colagem de e_0 . Então, pelo caso anterior

$$K_0 \frown \hat{K}_0 \frown K_1 \text{ rel } L.$$
■

Figura 2.3: Duncce Hat

Um exemplo interessante da aplicação desse lema pode ser usado para mostrar que o Chapéu de Bobo (“Duncce Hat”) D possui o mesmo tipo de homotopia simples de um ponto.

D é usualmente definido como sendo um 2 - simplexo Δ^2 com seus lados identificados como indicado na figura 2.3. Agora D pode ser visto como o 1 - simplexo $\partial\Delta^2$ com a 2 - célula Δ^2 colada nele pela aplicação $\varphi : \partial\Delta^2 \longrightarrow \partial\Delta^2$ que leva cada lado completamente sobre a circunferência, cada um na direção indicada. Temos que $\varphi \simeq 1_{\partial\Delta^2}$, já que considerando o homeomorfismo entre S_1 e $\partial\Delta^2$, essas aplicações podem ser vistas de S^1 em S^1 . Desse modo, como as duas aplicações tem grau 1 elas são homotópicas (ver [24], p. 398). Logo pelo lema 2.5.1

$$D = \partial\Delta^2 \cup_{\varphi} \Delta^2 \simeq \partial\Delta \cup_{1_{\Delta}} \Delta^2 = \Delta^2 \searrow *$$

Lema 2.5.2. *Se (K, L) é um par de complexos CW conexos e r é um inteiro tal que:*

(a) $\pi_r(K, L) = 0$;

(b) $K = L \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_r} e_i^r\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_{r+1}} e_i^{r+1}\right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_n} e_i^n\right)$.

Então $K \simeq L$ rel L onde M é um complexo CW da forma

$$M = L \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_{r+1}} f_i^{r+1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_r+K_{r+2}} f_i^{r+2}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_{r+3}} f_i^{r+3}\right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{i=1}^{K_n} f_i^n\right)$$

(onde os e_i^j e f_i^j denotam j - células.)

Demonstração: Seja $\varphi_i^r : I^r \longrightarrow K$ uma aplicação característica para e_i^r ($i = 1, 2, \dots, K_r$). Assim $\varphi_i^r(\partial I^r) \subset K^{r-1} = L^{r-1}$ e então $\varphi_i^r : (I^r, \partial I^r) \longrightarrow (K, L)$. Como $\pi_r(K, L) = 0$ existe uma aplicação $F_i : I^r \times I \longrightarrow K$ tal que $F_i|_{I^r \times 0} = \varphi_i^r$, $F_i|_{\partial I^r \times t} = \varphi_i^r|_{\partial I^r}$ $0 \leq t \leq 1$ e $F_i(I^r \times 1) \subset L$. Podemos assumir adicionalmente que $F_i(\partial I^{r+1}) \subset K^r$ e $F_i(I^{r+1}) \subset K^{r+1}$. Isso porque se F_i não possui essas propriedades podemos usar o teorema da aproximação celular como segue. Primeiro fazemos uma homotopia de $F_i|_{\partial I^{r+1}}$, relativa a $(I^r \times 0) \cup (\partial I^r \times I)$, a uma aplicação G_i com $G_i(I^r \times 1) \subset L^r$. Pela propriedade da extensão homotópica, G_i pode ser estendida, chamaremos ainda de G_i , para I^{r+1} em K . Então, usando novamente

o teorema de aproximação celular, $G_i : I^{r+1} \longrightarrow K$ é homotópica, em relação a ∂I^{r+1} , a $H_i : I^r \times I \longrightarrow K^{r+1}$ e H_i terá essas propriedades.

Seja $P = K \cup_{F_1} I^{r+2} \cup_{F_2} I^{r+2} \cup \dots \cup_{F_{K_r}} I^{r+2}$ e seja $\psi_i : I^{r+2} \longrightarrow P$ uma aplicação de identificação determinada pela condição que $\psi_i|_{I^{r+1} \times 0} = F_i$. Colocamos

$$E_i^{r+2} = \psi_i(I^{r+2}) \text{ e } E_i^{r+1} = \psi(J^{r+1}), \quad 1 \leq i \leq K_r.$$

Então da definição de expansão temos que

$$K \nearrow P = L \cup (\cup E_i^{r+1}) \cup (\cup E_i^{r+2}).$$

Considere $P_0 = L \cup (\cup e_i^r) \cup (E_i^{r+1})$. Então quando existe uma única r -célula e $r = 0$ a situação parece como

Figura 2.4: Figura de P_0

Figura 2.5: Figura de P

Como $\psi(\partial J^{r+1}) = F_i(\partial I^{r+1}) \subset K^r$, P_0 é um subcomplexo bem definido de P . Ainda I^r é uma face de J^{r+1} tal que $\psi_i|_{I^r} = \varphi_i$, uma aplicação característica para e_i^r . Assim temos $P_0 \searrow L$ e $P - P_0 = (\cup e_i^{r+1}) \cup ((\cup e_i^{r+2}) \cup (\cup E_i^{r+2})) \cup (\cup e_i^{r+3}) \cup \dots \cup (\cup e_i^n)$

Seja $g : P_0 \longrightarrow L$ a deformação celular correspondente a esse colapso. Aplicando o teorema 2.3.14 e sendo $G : P \longrightarrow P \cup_g L$ a aplicação induzida por g temos

$$K \nearrow P \searrow P \cup_g L \text{ rel } L$$

onde

$$P \cup_g L = L \cup (\cup G(e_i^{r+1})) \cup (\cup G(e_i^{r+2})) \cup (\cup G(E_i^{r+2})) \cup (\cup G(e_i^{r+3})) \cup \dots \cup (\cup G(e_i^n))$$

e a prova termina para $M = P \cup_g L$. ■

Teorema 2.5.3. *Suponha que (K, L) é um par de complexos CW conexos tal que L é um retrato por deformação forte de K . Seja $n = \dim(K - L)$ e seja $r \geq n - 1$ um inteiro. Seja e^0 uma 0-célula de L . Então $K \searrow M$ rel L onde*

$$M = L \cup \left(\bigcup_{j=1}^a e_j^r \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^a e_i^{r+1} \right)$$

e onde e_j^r e e_i^{r+1} possuem aplicações características $\psi_j : I^r \longrightarrow M$ e $\varphi_i : I^{r+1} \longrightarrow M$ tal que $\psi_j(\partial I^r) = e^0 = \varphi_i(J^r)$.

Demonstração: Como L é um retrato por deformação forte de K , $\pi_i(K, L) = 0, \forall i$. Então do lema anterior, podemos trocar as 0-células relativas de K por 2-células, as 1-células por 3-células, e assim por diante até chegarmos a um complexo $\widehat{K}$ onde as células de menor dimensão de $\widehat{K} - L$ são r dimensionais. Como $r \geq n - 1$, não haverá células de dimensão maiores que $r + 1$. Notemos que no processo anterior, em cada passo L é um retrato de deformação forte desse novo complexo. Então podemos escrever

$$\widehat{K} = L \cup \left(\bigcup_{j=1}^a \hat{e}_j^r \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^b \hat{e}_j^{r+1} \right).$$

Seja $\hat{e}_j^r$ tendo aplicações características $\hat{\psi}_j$.

Afirmamos que para cada j , $\hat{\psi}_j|_{\partial I^r}$ é homotópica em L a uma aplicação constante do ∂I^r em e^0 . De fato, como L é um retrato por deformação forte de $\widehat{K}$ existe uma retração $R : \widehat{K} \longrightarrow L$. Então $R \circ \hat{\psi}_j : I^r \longrightarrow L$ e $R \circ \hat{\psi}_j|_{\partial I^r} = \hat{\psi}_j|_{\partial I^r}$, como $\hat{\psi}_j|_{\partial I^r} \subset \widehat{K}^{r-1} \subset L$. Então $\hat{\psi}_j|_{\partial I^r}$ é homotópica a uma constante em L e, L sendo conexo por caminhos, é homotópica a aplicação constante em e^0 . Então do lema 2.5.1

$$L \cup (\cup \hat{e}_j^r) \searrow L \cup (\cup e_j^r) \text{ rel } L.$$

Assim usando o teorema 2.3.14 (considerando $K_0 = L \cup (\cup \hat{e}_j^r)$, $K = L \cup (\cup \hat{e}_j^r) \cup (\cup \hat{e}_i^{r+1})$ e $L_0 = L \cup (\cup e_j^r)$ e f sendo a aplicação que dá a deformação acima) temos

$$L \cup (\cup \hat{e}_j^r) \cup (\cup \hat{e}_i^{r+1}) \searrow L \cup (\cup e_j^r) \cup (\cup f_i^{r+1}).$$

Considere os f_i^{r+1} tendo aplicações características $\hat{\varphi}_i$. Como J^r é contrátil a um ponto por uma homotopia de ∂I^{r+1} a aplicação colagem $\hat{\varphi}_i|_{\partial I^{r+1}}$ é homotópica a aplicação $\varphi_i : \partial I^{r+1} \longrightarrow L \cup (\cup e_j^r)$ tal que $\varphi_i(J^r) = e_0$ e então pelo lema 2.5.1 novamente

$$L \cup (\cup e_j^r) \cup (\cup f_i^{r+1}) \searrow L \cup (\cup e_j^r) \cup (\cup e_i^{r+1}) \text{ rel } L,$$

onde e_i^{r+1} possui aplicação característica φ_i tal que $\varphi_i(J^r) = e^0$. Chamamos esse último complexo de M .

Finalmente para ver que o número de r -células de $M - L$ é igual ao número de $r + 1$ -células de $M - L$, note que pelo lema 1.3.2, esses números são precisamente iguais aos geradores dos

módulos livres de Homologia $H_r(M^r \cup L, L)$ e $H_{r+1}(M, M^r \cup L)$. Mas como L é um retrato por deformação forte M a seqüência exata tripla $(M, M^r \cup L, L)$ nos dá

$$\dots \longrightarrow H_{r+1}(M, L) \longrightarrow H_{r+1}(M, M^r \cup L) \xrightarrow{d} H_r(M^r \cup L, L) \longrightarrow H_r(M, L) \longrightarrow \dots$$

onde $H_{r+1}(M, L) = H_r(M, L) = 0$. Então d é um isomorfismo e os números de geradores são os mesmos. ■

Definição 2.5.4. *Se L é conexo e L é um retrato por deformação forte de M , e (M, L) satisfaz a conclusão do teorema 2.5.3 com $r \geq 2$ então (M, L) está na forma simplificada.*

2.6 Matrizes e deformações formais

Dado um par CW homotopicamente trivial, mostramos que pode ser transformado em um par na forma simplificada. Então considere um par simplificado (K, L) , $K = L \cup (\cup e_j^r) \cup (\cup e_i^{r+1})$ onde e_j^r são trivialmente coladas e^0 . Se, dado r e L , queremos distinguir um dado par de outro então claramente a informação crucial para isso é como as células e_i^{r+1} são coladas - isto é, esta informação está nas aplicações $\varphi_i|_{\partial I^{r+1}} : \partial I^{r+1} \longrightarrow L \cup (\cup e_j^r)$, onde φ_i é uma aplicação característica para e_i^{r+1} . Denotando $K_r = L \cup (\cup e_j^r)$, estudaremos essas aplicações colagem em termos do operador bordo $\partial : \pi_{r+1}(K, K_r; e^0) \longrightarrow \pi_r(K_r, L; e^0)$ na seqüência exata tripla de homotopia (K, K_r, L) . Como, no entanto, aplicações de colagem livremente homotópicas dão (lema 2.5.1) o mesmo resultado para o tipo de homotopia simples, não queremos ser limitados a homotopia que mantém o ponto base fixo. Para recuperar esse nível extra de liberdade formal, pensaremos nos grupos de homotopia, não meramente como grupos, mas módulos sobre $\mathbb{Z}(\pi_1(L, e^0))$. Que é feito da seguinte forma:

Dado um par de complexos conexos (P, P_0) e um ponto $x \in P_0$, sabemos por [24] que $\pi_1 = \pi_1(P_0, x)$ age em $\pi_n(P, P_0; x)$ pela condição que $[\alpha][\varphi] = [\varphi']$, onde α e φ representam os elementos $[\alpha]$ e $[\varphi]$ de π_1 e $\pi_n(P, P_0; x)$ respectivamente, e $\varphi' : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (P, P_0, x)$ é homotópica a φ por uma homotopia levando $\varphi(J^{n-1})$ pelo laço α^{-1} . Essa ação possui as propriedades:

- (0) $[\ast][\varphi] = [\varphi]$, onde $[\ast]$ é o elemento identidade em π_1 ;
- (1) $[\alpha]([\varphi_1] + [\varphi_2]) = [\alpha][\varphi_1] + [\alpha][\varphi_2]$;
- (2) $([\alpha][\beta])[\varphi] = [\alpha]([\beta][\varphi])$;
- (3) Comuta com todos os homomorfismos na seqüência exata de homotopia do par (P, P_0) .

Dessa maneira segue que $\pi_n(P, P_0; x)$ torna-se um $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulo se definirmos a multiplicação por

$$(\sum n_j [\alpha_j])[\varphi] = \sum n_j ([\alpha_j][\varphi]), \quad [\alpha_j] \in \pi_1, \quad [\varphi] \in \pi_n(P, P_0; x)$$

e a seqüência exata de homotopia de (P, P_0, x) torna-se uma seqüência exata de $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulos. No caso do par simplificado (K, L) o lema a seguir será usado para nos dar a estrutura de $\pi_{r+1}(K, K_r; e^0)$ e de $\pi_r(K_r, L; e^0)$.

Lema 2.6.1. *Suponha que (P, P_0) é um par CW com $P = P_0 \cup (\cup_{i=1}^a e_i^n)$ onde P_0 é conexo. Suponha que $\varphi_i : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (P, P_0; e^0)$ são aplicações características para as e_i^n e que ou $n \geq 3$ ou $n = 2$ e $\varphi_i(\partial I^n) = e^0$ para todo i . Então $\pi_n(P, P_0; e^0)$ é um $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulo livre com base $[\varphi_1], \dots, [\varphi_a]$.*

Demonstração: Afiramos que a aplicação inclusão induz um isomorfismo

$$i_{\#} : \pi_1(P_0, e^0) \rightarrow \pi_1(P, e^0),$$

para todo $n \geq 2$. De fato, $i_{\#}$ é sobrejetora pois, pelo teorema da aproximação celular, qualquer aplicação $(I, \partial I)$ em (P, e^0) é homotópica a uma aplicação celular $(I, \partial I)$ em (P, e^0) em relação a ∂I e como $n \geq 2$ as 1-células estão em P_0 , logo dado $[f] \in \pi_1(P, e^0)$, $f(I) \subset P_0$ e assim $[f] \in \pi_1(P_0, e^0)$ e $i_{\#}([f]) = [f]$. Para todo $n \geq 3$, $i_{\#}$ é injetora, pois se $F_0, F_1 : (I, \partial I) \rightarrow (P, e^0)$ são homotópicas por $F : (I \times I, \partial(I \times I)) \rightarrow (P, e^0)$, pelo teorema da aproximação celular podemos trocar F por $G : (I \times I, \partial(I \times I)) \rightarrow (P_0, e^0)$, já que $n \geq 3$ e então se $i_{\#}([F_1]) = i_{\#}([F_2])$ então $[F_1] = [F_2]$. Se $n = 2$, $\varphi_i(\partial I^2) = e^0$ por hipótese. Seja $R : P \rightarrow P_0$ sendo a retração tal que $R(\cup e_i^2) = e^0$. Então se duas aplicações $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (P, e^0)$ são homotópicas em P pela homotopia F_t , eles são homotópicas em P_0 pela homotopia $R \circ F_t$, assim $i_{\#}$ é injetora nesse caso também.

Seja $p : \tilde{P} \rightarrow P$ o recobrimento universal de P . Seja $\tilde{P}_0 = p^{-1}(P_0)$. Então $\tilde{P}_0$ é o recobrimento universal de P_0 com aplicação recobrimento $p|_{\tilde{P}_0}$ (pelo teorema 1.4.10). Seja G o grupo das transformações de recobrimento homeomorfas de $\tilde{P}$. Escolha um ponto base $\tilde{e}^0 \in p^{-1}(e^0)$. Para cada i ($1 \leq i \leq a$), seja $\tilde{\varphi}_i : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (\tilde{P}, \tilde{P}_0, \tilde{e}^0)$ que cobre φ_i . Então, pela proposição 1.4.13, $H_*(\tilde{P}, \tilde{P}_0)$ é um $\mathbb{Z}(G)$ -módulo livre com base $\{\langle \tilde{\varphi}_i \rangle\}$ onde $\langle \tilde{\varphi}_i \rangle = (\tilde{\varphi}_i)_*(w_n)$, w_n sendo um gerador de $H_n(I^n, \partial I^n)$. Podemos primeiro identificar G com $\pi_1(P, e^0)$ e então usamos o isomorfismo $i_{\#}$ para identificar G com $\pi_1 = \pi_1(P_0, e^0)$. Se $[\alpha] \in \pi_1$, seja $g_{[\alpha]}$ sendo o homeomorfismo correspondente de recobrimento. Assim $H_*(\tilde{P}, \tilde{P}_0)$ é um $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulo com base $\{\langle \tilde{\varphi}_i \rangle\}$. Completamos a prova demonstrando que $H_n(\tilde{P}, \tilde{P}_0)$ é isomorfo a $\pi_n(P, P_0; e^0)$ como um $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulo, por um isomorfismo que leva $\langle \tilde{\varphi}_i \rangle$ sobre $[\varphi_i]$ para cada i . Para isso, considere o homomorfismo $T = (p_{\#}) \circ h^{-1}$ dado por

$$H_n(\tilde{P}, \tilde{P}_0) \xrightarrow{h^{-1}} \pi_n(\tilde{P}, \tilde{P}_0; \tilde{e}^0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(P, P_0; e^0).$$

Onde h é o homomorfismo de Hurewicz que leva cada $[\psi] \in \pi_n(\tilde{P}, \tilde{P}_0; \tilde{e}^0)$ sobre $\psi_*(w_n)$, e aplicando o Teorema de Hurewicz ([24], p. 397), h é um isomorfismo pois $\tilde{P}$ e $\tilde{P}_0$ são conexos,

simplesmente conexos e do teorema da aproximação celular $\pi_i(\tilde{P}, \tilde{P}_0) = 0$, para $i \leq n - 1$. Ainda $p_\#$ é um isomorfismo para $n \geq 1$ do teorema 1.4.9. Então T é um isomorfismo e claramente $T(\langle \tilde{\varphi}_i \rangle) = p_\#[\tilde{\varphi}_i] = [p \circ \tilde{\varphi}_i] = [\varphi_i]$. Finalmente para ver que T é um isomorfismo de Z_{π_1} -módulo, é suficiente mostrar que $T(\sum_i a_i \langle \tilde{\varphi}_i \rangle) = \sum_i a_i [\varphi_i]$ para todo $a_i = \sum_j n_{ij} [\alpha_j] \in \mathbb{Z}_{\pi_1}$. Mas por definição de multiplicação escalar e nossa identificação de Z_{π_1} com $\mathbb{Z}(G)$,

$$\sum_i a_i \langle \tilde{\varphi}_i \rangle = \sum_i \left(\sum_j n_{ij} [\alpha_j] \right) (\tilde{\varphi}_{i*}(w_n)) = \sum_{i,j} ((g_{[\alpha_j]} \circ \tilde{\varphi}_i)_*(w_n)).$$

Mas $g_{[\alpha_j]} \tilde{\varphi}_i$ é livremente homotópica a aplicação $\tilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]} \tilde{\varphi}_i$, que é dada levando a imagem de J^{n-1} (que é $g_{[\alpha_j]}(\tilde{e}^0)$) pelo caminho $\tilde{\alpha}_j^{-1}$ homotopicamente. Então pela propriedade de homotopia na homologia temos:

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \langle \tilde{\varphi}_i \rangle &= \sum_{i,j} n_{ij} ((\tilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]} \tilde{\varphi}_i)_*(w_n)) \\ &\xrightarrow{h^{-1}} \sum_{i,j} n_{ij} [\tilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]} \tilde{\varphi}_j] \\ &\xrightarrow{p_\#} \sum_{i,j} n_{ij} [p \circ (\tilde{\alpha}_j \cdot g_{[\alpha_j]} \tilde{\varphi}_j)] \\ &= \sum_{i,j} n_{ij} ([\alpha_j] \cdot [\varphi_i]) \\ &= \sum_i \left(\sum_j n_{ij} [\alpha_j] \right) [\varphi_i] \\ &= \sum_i a_i [\varphi_i]. \end{aligned}$$

■

Suponha agora que (K, L) está na forma simplificada onde

$$K = L \cup \left(\bigcup_{j=1}^a e_j^r \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^a e_i^{r+1} \right).$$

Seja φ_i e ψ_j aplicações características para e_i^{r+1} e e_j^r , respectivamente. Então pelo lema anterior $\{[\varphi_i]\}$ e $\{[\psi_j]\}$ são bases para os $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -módulos, $\pi_{r+1}(K, K_r)$ e $\pi_r(K_r, L)$, onde $K_r = L \cup (\cup e_j^r)$.

Definição 2.6.2. A matriz de (K, L) com respeito a aplicação característica $\{\varphi_i\}$ e $\{\psi_j\}$ sendo a $(a \times a)$ $\mathbb{Z}_{\pi_1}$ -matriz (a_{ij}) , dado por $\partial[\varphi_i] = \sum a_{ij} [\psi_j]$ onde $\partial : \pi_{r+1}(K, K_r) \longrightarrow \pi_r(K_r, L)$ é o operador bordo usual da seqüência exata da tripla (K, K_r, L) .

Note que a matriz é não singular, pois $\pi_{r+1}(K, L) = \pi_r(K, L) = 0$, como L é um retrato por deformação forte de K , e então pela exatidão da seqüência de homotopia, ∂ é um isomorfismo.

O exemplo mais simples de um par na forma simplificada ocorre quando as aplicações características φ_i, ψ_j satisfazem $\varphi_i(J^r) = e^0$ e $\varphi_i|_{I^r} = \psi_i$. Nesse caso temos, algebricamente,

que a matriz de (K, L) com respeito com respeito a essas bases é a $a \times a$ matriz identidade e, geometricamente, que $K \searrow L$ (na verdade $K = L \cup [\text{produto wedge de bolas}]$), mais geralmente, quando a matriz é boa podemos cancelar células como segue:

Teorema 2.6.3. *Se (K, L) é um par simplificado e se a matriz com respeito a alguma escolha das aplicações características φ_i, ψ_j é a identidade então $K \searrow L \text{ rel } L$.*

Demonstração: Considere a aplicação característica $\varphi_1 : (I^{r+1}, I^r, J^r) \longrightarrow (K, K_r, e^0)$ e $\psi_1 : (I^r, \partial I^r) \longrightarrow (K_r, e^0)$. Por hipótese $[\psi_1] = \partial[\varphi_1] = [\varphi_1|_{I^r}] \in \pi_r(K_r, L, e^0)$. Então existe uma homotopia $h_t : (I^r, I^{r+1}, J^{r-1}) \longrightarrow (K_r, L, e^0)$ tal que $h_0 = \varphi_1|_{I^r}$ e $h_1 = \psi_1$, pelo teorema da extensão homotópica podemos estender $h_t|_{\partial I^r}$ a uma homotopia $g_t : J^r \longrightarrow L$ tal que $g_0|_{J^r} = \varphi_1|_{J^r}$. Combinado h_t e g_t temos uma homotopia $H_t : (\partial I^{r+1}, I^r, J^r) \longrightarrow (K_r, K_r, L)$ com $H_0 = \varphi_1|_{\partial I^{r+1}}$ e $H_1|_{I^r} = \psi_1$. Pelo teorema da aproximação celular H_1 é homotópica *rel* I^r a $\widehat{\varphi}_1$ onde $\widehat{\varphi}_1(J^r) \subset L^r$. Se colarmos uma $r+1$ -célula em K_r por $\widehat{\varphi}_1 : \partial I^{r+1} \longrightarrow K_r$ então pelo lema 2.5.1 temos

$$\begin{aligned} K &= L \cup (\cup_j e_j^r) \cup (\cup_i e_i^{r+1}) \searrow L \cup (\cup_j e_j^r) \cup (\cup_{i>1} e_i^{r+1}) \cup \widetilde{e}_1^{r+1} \text{ rel } L \\ &\searrow L \cup (\cup_{j>1} e_j^r) \cup (\cup_{i>1} e_i^{r+1}) = K' \end{aligned}$$

Onde o último colapso toma lugar pois $\widetilde{\varphi}_1|_{I^r} = \psi_1$.

Finalmente a matriz de (K', L) com respeito as aplicações características remanescentes é a matriz identidade com uma linha e coluna a menos, de fato, suponha que

$$\partial' : \pi_{r+1}(K', K'_r) \longrightarrow \pi_r(K'_r, L),$$

i' é a inclusão de K' em K , $\varphi_i = i' \circ \varphi'_i$ e que $\psi_j = i' \circ \psi'_j$. Se $\partial'[\varphi'_i] = \sum (a'_{ij})[\psi'_j]$ então

$$[\psi_i] = \partial[\varphi_i] = i'_\# \partial'[\varphi'_i] = i'_\# \sum a'_{ij}[\psi'_j] = \sum a'_{ij}[\psi_j].$$

Assim $a'_{ij} = \delta_{ij}$. E assim podemos proceder por indução no número de células de $K - L$ para obter $K \searrow L \text{ rel } L$ ■

Se a matriz do par simplificado (K, L) não é a identidade podemos, no entanto, ser capazes de expandir e colapsar para obter o par (M, L) cuja a matriz é a identidade. O lema a seguir mostra certas mudanças algébricas da matriz de um dado par podem ser realizadas expandindo e colapsando.

Teorema 2.6.4. *Assuma que o par (K, L) está na forma simplificada e possui matriz (a_{ij}) com respeito a algum conjunto de aplicações características. Suponha mais que a matriz (a_{ij}) pode ser transformada na matriz (b_{ij}) pelas seguintes operações:*

- (I) $R_i \longrightarrow \pm \alpha R_i$ ($\alpha \in \pi_1 \subset \mathbb{Z}_{\pi_1}$) (multiplicar a i -ésima linha a esquerda por $\pm$ um elemento do grupo)

(II) $R_k \longrightarrow R_k + \rho R_i (\rho \in Z_{\pi_1})$ (adicionar a linha uma outra linha multiplicada a esquerda por um elemento do grupo anel)

(III) $(a_{ij}) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ (expandir por adição uma diagonal com a identidade.)

Então existe um par simplificado (M, L) tal que $K \frown M$ rel L e um conjunto de aplicações características com respeito ao qual (M, L) possui a matriz (b_{ij}) .

Demonstração: Suponha, como usual, que $K = L \cup (\cup e_j^r) \cup (\cup e_i^{r+1})$ e denote as aplicações características dadas para as r e $r+1$ -células por $\{\psi_j\}$ e $\{\varphi_i\}$ respectivamente.

Para realizar $R_1 \longrightarrow -R_1$, ponha $M = K$ e colocamos uma nova aplicação característica $\widehat{\varphi}_1$ no lugar de φ_1 , onde $\widehat{\varphi}_1 = \varphi_1 \circ R$ e $R : I^{r+1} \longrightarrow I^{r+1}$ por

$$R(x_1, \dots, x_{r+1}) = (1 - x_1, \dots, x_{r+1}).$$

Claramente $[\widehat{\varphi}_1] = -[\varphi_1]$ e assim $\partial[\widehat{\varphi}_1] = -\partial[\varphi_1] = -\sum a_{ij}[\psi_j]$. Para realizar $R_1 \longrightarrow \alpha R_1$, seja $f : (I^r, \partial I^r) \longrightarrow (K_r, e^0)$ representando $\alpha \cdot [\varphi_1|_{I^r}] \in \pi_1(K_r, L)$. Estenda f trivialmente para ∂I^{r+1} . Ponha

$$M = L \cup \left(\bigcup_j e_j^r \right) \cup \left(\bigcup_{i>1} e_i^{r+1} \right) \cup \widehat{e}_1^{r+1}$$

onde $\widehat{e}_1^{r+1}$ possui aplicação característica $\widehat{\varphi}_1$ com $\widehat{\varphi}_1|_{\partial I^{r+1}} = f$. Então $\partial[\widehat{\varphi}_1] = [\widehat{\varphi}_1|_{I^r}] = [f] = \alpha \cdot [\varphi_1|_{I^r}] = \alpha \cdot \partial[\varphi_1]$. Mas $\widehat{\varphi}_1|_{\partial I^{r+1}}$ é livremente homotópica em K_r à $\varphi_1|_{\partial I^{r+1}}$. Então pelo lema 2.5.1 $K \frown M$ rel L .

Para realizar a operação $R_1 \longrightarrow R_1 + \rho R_2$, seja $\varphi : (I^{r+1}, I^r, J^r) \longrightarrow (K, K_r, e^0)$ sendo representado na forma canônica por $[\varphi_1] + [\varphi'_2]$ onde φ'_2 representa $\rho[\varphi_2]$.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \varphi_1 & \varphi'_2 \\ \hline \end{array} \quad I^{r+1}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{I^r}$

Então $\partial[\varphi] = \partial[\varphi_1] + \rho\partial[\varphi_2] = \sum_j (a_{1j} + \rho a_{2j})[\psi_j]$. Note que $\varphi(\partial I^{r+1}) \subset K_r \subset K_r \cup e_2^{r+1}$. Ainda $\varphi|_{\partial I^{r+1}}$ é homotópica em $K_r \cup e_2^{r+1}$ à $\varphi_1|_{\partial I^{r+1}}$ pois $\varphi'_2|_{I^r}$ é homotópica (rel ∂I^r) em $K_r \cup e_2^{r+1}$ a uma aplicação constante em e^0 e $\varphi'_2(J^r) = e^0$ (na verdade φ'_2 é a homotopia). Então podemos colar uma nova célula com aplicação característica $\widehat{\varphi}_1$ tal que $\widehat{\varphi}_1|_{\partial I^{r+1}} = \varphi|_{\partial I^{r+1}}$ e então construímos um novo complexo M com a matriz requerida tal que

$$K = [K_r \cup (\bigcup_i e_i^{r+1})] \frown [K_r \cup (\bigcup_{i>1} e_i^{r+1}) \cup_{\varphi|_{\partial I^{r+1}}} I^{r+1}] = M, \text{ rel } K_r \cup_{i>1} e_i^{r+1}$$

Finalmente a operação (III) pode ser realizada por meio de expansões elementares de K . ■

Teorema 2.6.5. *Suponha que o par (K, L) está na forma simplificada e possui matriz A com respeito a algum conjunto de aplicações características. Suponha mais, que A pode ser transformada na matriz identidade I_q por operações do tipo (I) ao (V), onde (I), (II) e (III) são como no teorema anterior e (IV) e (V) são as operações colunas análogas*

$$(IV) \ C_j \longrightarrow \pm C_j \alpha (\alpha \in \pi_1 \subset \mathbb{Z}_{\pi_1})$$

$$(V) \ C_k \longrightarrow C_k + C_i \rho (\rho \in \mathbb{Z}_{\pi_1})$$

Então existe um par simplificado $K \frown L$ rel L .

Demonstração: Suponha que $(a_{ij}) \longrightarrow I_q$ por essas 5 operações. Obviamente o tipo (III) pode ser feito primeiro. Então as operações do tipo (I) e (II) ((IV) e (V)) correspondem a multiplicação esquerda (direita) por matrizes elementares (por matrizes elementares entenderemos, ou uma matriz diagonal com todos 1 exceto um único $\pm\alpha$ ($\alpha \in \pi_1$) na diagonal, ou uma matriz que possui só 1 na diagonal e um único elemento não nulo de entrada $a_{ij} = \rho$ ($\rho \in \mathbb{Z}_{\pi_1}$) fora da diagonal). Então temos

$$I_q = B \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} C \Rightarrow C^{-1} = B \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$I_q = CB \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Assim A pode ser transformada na identidade apenas com operações (I), (II) e (III). Assim pelos teoremas 2.6.3 e 2.6.4 $K \frown L$ rel L . ■

Teorema 2.6.6. *Se (K, L) é um par CW tal que K e L são 1-conexos e L é um retrato por deformação forte de K então $K \frown L$ rel L .*

Demonstração: Pelo teorema 2.5.3 $K \frown J$ rel L , onde (J, L) está na forma simplificada. Seja A a matriz de (J, L) com respeito a algumas aplicações características. Então como $\pi_1(L) = \{1\}$, $\mathbb{Z}_{\pi_1} = \mathbb{Z}$. Então A é uma matriz não singular com coeficientes inteiros. Tal matriz pode ser transformada na identidade por operações do tipo (I), (II), (IV) e (V) ([17], p.181). Então, pelo teorema 2.6.5, $J \frown L$ rel L . Logo $K \frown L$ rel L . ■

A prova no teorema 2.6.6 dependo do fato $\mathbb{Z}$ é um anel sobre o qual matrizes não singulares podem ser transformadas na identidade. O próximo lema mostra que a algebra não é sempre tão simples.

Se G é um grupo então as unidades em $\mathbb{Z}(G)$ é um elemento com inverso multiplicativo dos dois lados. Os elementos do grupo $\pm G = \{g \mid g \in G\} \cup \{-g \mid g \in G\}$ são chamados de unidades triviais, e todas as outras são chamadas de unidades não triviais.

Lema 2.6.7. (a) *Suponha que G é um grupo abeliano tal que $\mathbb{Z}(G)$ possui unidades não triviais. Então existe uma matriz não singular com coeficientes em $\mathbb{Z}(G)$, A , que não pode ser transformada na identidade por qualquer seqüência finita de operações de (I) à (V).*

(b) *O grupo $G = \mathbb{Z}_5$ é um grupo cíclico não abeliano tal que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_5)$ possui unidades não triviais.*

Demonstração: (a) Seja a uma unidade não trivial de $\mathbb{Z}(G)$ e seja $A = (a)$ a matriz 1×1 com entrada a . Como G é abeliano, $\mathbb{Z}(G)$ é comutativa. Então a operação determinante está bem definida nas matrizes quadradas de $\mathbb{Z}(G)$ em $\mathbb{Z}(G)$ que satisfaz as propriedades usuais de determinantes. As operações (II), (III) e (V) transforma qualquer matriz dada em outra matriz de mesmo determinante. As operações (I) e (IV) multiplicam o determinante por uma unidade trivial. Então se B é a matriz em que A pode ser transformada, $\det(B) = g \det(A) = ga$ para alguma unidade trivial g . Então $\det(B)$ é uma unidade não trivial e, em particular, B não pode ser transformada na identidade.

(b) Para ver que $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_5)$ possui unidades não triviais, seja $\mathbb{Z}_5 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. Então $a = 1 - t + t^2$ é uma unidade não trivial como $(1 - t + t^2)(t + t^2 - t^4) = 1$. ■

Teorema 2.6.8. *Se G é um grupo que possui uma apresentação finita e A uma $\mathbb{Z}(G)$ matriz não singular então*

- (1) *Existe um complexo conexo L com $\pi_1(L, e^0) = G$;*
- (2) *Para qualquer complexo conexo L com $\pi_1(L, e^0) = G$, existe um par $CW(K, L)$ na forma simplificada tal que a matriz de (K, L) com respeito a algum conjunto de aplicações características é precisamente A .*

Demonstração: (1) Por hipótese, suponha que G é dado por geradores $x_1, \dots, x_m$ e relações $R_i(x_1, \dots, x_m) = 1$, ($i = 1, \dots, n$). Seja $L^1 = e^0 \cup (e_1^1 \cup \dots \cup e_m^1)$ um produto wedge de círculos e seja x_j um elemento do grupo livre $\pi_1(L^1, e^0)$ representado pela aplicação característica de e_j^1 . Seja $\varphi_i : \partial I^2 \rightarrow L^1$ representando o elemento $R_i(x_1, \dots, x_m)$. Finalmente seja $L^1 \cup_{\varphi_1} I^2 \cup \dots \cup_{\varphi_n} I^2$. Agora seja $X_i = L^1 \cup_{\varphi_i} I^2$, dessa maneira $\pi_1(X_i, e^0) = [x_1, \dots, x_m | R_i(x_1, \dots, x_n)]$, e fazendo aplicações sucessivas do teorema de Van Kampen, temos que $\pi_1(L, e^0) = G$.

(2) Escreva $A = (a_{ij})$, uma $p \times p$ matriz. Seja $K_2 = L \cup e_1^2 \cup \dots \cup e_p^2$ onde as e_j^2 possui aplicação característica ψ_j com $\psi_j(\partial I^2) = e^0$. Como usual $[\psi_j]$ denota o elemento de $\pi_2(K_2, L)$ representado por $\psi_j : (I^2, I^1, J^1) \rightarrow (K_2, L, e^0)$. Seja $\langle \psi_j \rangle$ denotando o elemento de $\pi_2(K_2, e^0)$ representado por ψ_j e seja $\alpha : (K_2, e^0, e^0) \rightarrow (K_2, L, e^0)$ a inclusão. Claramente $\alpha_{\#}(\langle \psi_j \rangle) = [\psi_j]$. Seja $f_i : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (K_2, e^0)$ representado por $\sum_j a_{ij} \langle \psi_j \rangle$. Finalmente colamos uma 3-célula em K_2 para obter $K = K_2 \cup e_1^3 \cup \dots \cup e_p^3$ onde as e_i^3 possuem aplicações $\varphi_i : (I^3, I^2, J^2) \rightarrow (K, K_2, e^0)$ com $\varphi_i|_{I^2} = \alpha \circ f_i$. Então $\partial[\varphi_i] = [\varphi_i|_{I^2}] = [\alpha \circ f_i] = \alpha_{\#}(\sum_j a_{ij} \langle \psi_j \rangle) = \sum_j a_{ij} [\psi_j]$. Então construímos um par (K, L) com $K - L = (\cup e_j^2) \cup (\cup e_i^3)$ tal que $\partial : \pi_3(K, K_2, e^0) \rightarrow \pi_2(K_2, L, e^0)$ possui a matriz A .

Precisamos mostrar apenas que L é um retrato por deformação forte de K . É suficiente, pelo teorema 1.2.3, mostrar que $\pi_n(K, L) = 0$ para $n \leq 3$. Para $n = 0$ como $\pi_0(K) = \pi_0(L) \Rightarrow \pi_0(K, L) = 0$, para $n = 1$ seja $[\alpha] \in \pi_1(K, L)$ então $\alpha : (I, \partial I, \{0\}) \longrightarrow (K, L, e^0)$. Pelo Teorema da Aproximação Celular α é homotópica a uma aplicação celular $\beta : (I, \partial I, \{0\}) \longrightarrow (K, L, e^0)$ e assim $\beta(I) \subset K^1 = L$ logo $[\beta] = 0 \Rightarrow [\alpha] = 0$ e assim $\pi_1(K, L) = 0$. Para $n = 2$ e $n = 3$ usaremos o fato que ∂ é um isomorfismo já que A é assumido não singular. Então, para $n = 2$, temos a seqüência

$$\pi_3(K, L) \xrightarrow{\partial} \pi_2(K_2, L) \xrightarrow{j} \pi_2(K, L) \xrightarrow{k} \pi_2(K, K_2)$$

e como $\text{Ker}(j) = \text{Im}(\delta) = \pi_2(K_2, L)$ e $\{0\} = \text{Im}(j) = \text{Ker}(k) = \pi_2(K, L)$, já que $\pi_2(K, K_2) = 0$ pois $K - K_2$ é uma união de 3-células e assim é só usar o teorema da aproximação celular, temos que $\pi_2(K, L) = 0$. Finalmente note que $\pi_3(K, L) \cong \pi_3(\tilde{K}, \tilde{L}) \cong H_3(\tilde{K}, \tilde{L})$ o último isomorfismo vem do teorema de Hurewicz que é aplicado pois $\pi_i(K, L) = \pi_i(\tilde{K}, \tilde{L})$ para $i = 1, 2$ e porque $\tilde{L}$ é 1-conexo, pelo teorema 1.4.10, já que usando a seqüência do par (K, L) obtemos que $\pi_1(L) \cong \pi_1(K)$. Para ver que $H_3(\tilde{K}, \tilde{L}) = 0$ considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H_3(\tilde{K}_2, L) & \longrightarrow & H_3(\tilde{K}, \tilde{L}) & \xrightarrow{j} & H_3(\tilde{K}, \tilde{K}_2) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & H_2(\tilde{K}_2, \tilde{L}) \\ & & & & \downarrow \text{Hurewicz} \cong & & \downarrow \text{Hurewicz} \cong \\ & & & & \pi_3(\tilde{K}, \tilde{K}_2) & \longrightarrow & \pi_2(\tilde{K}_2, \tilde{L}) \\ & & & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & & & \pi_3(K, K_2) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \pi_2(K_2, L) \end{array}$$

dessa maneira vê-se que $\tilde{\partial}$ é um isomorfismo então da exatidão da linha de cima como j é injetora e $\text{Im}(j) = \{0\}$ temos que $H_3(\tilde{K}, \tilde{L}) = 0$. Assim $\pi_3(K, L) = 0$. Então L é um retrato por deformação forte de K . ■

Foi mostrado em certos casos de um par homotopicamente trivial (K, L) que $K \frown L \text{ rel } L$. Isso ocorre quando toda matriz não singular sobre $\mathbb{Z}(\pi_1(L))$ pode ser transformada na identidade. Então os conceitos de equivalência de homotopia e homotopia simples coincidem sobre os complexos CW com uma boa importância dos grupos fundamentais. Mas por outro lado, mostramos que existem pares simplificados com matrizes que não podem ser transformadas na identidade. Perguntamos agora quando essas matrizes - ou melhor, suas classes de equivalência pelas operações de **(I)** a **(III)** - são intrínsecos no problema ou quando são meramente artefatos.

Duas observações são cruciais. Primeiro, as classes de equivalência das matrizes não singulares formam um grupo, o grupo de Whitehead de $\pi_1(L)$ - escrito $Wh(\pi_1(L))$ (isso será provado no próximo capítulo). Segundo, se $K \frown J \text{ rel } L$ onde (J, L) está na forma simplificada então está implícito na prova do lema 2.6.1 que a matriz de (J, L) é a matriz do operador

bordo

$$H_{r+1}(\tilde{J}, \tilde{J}_r) \longrightarrow H_r(\tilde{J}_r, \tilde{L}).$$

Pela definição de complexos de cadeia celular esse é o operador bordo em $C(\tilde{J}, \tilde{L})$ onde $C(\tilde{J}, \tilde{L})$ é o complexo de cadeia

$$0 \longrightarrow C_{r+1}(\tilde{J}, \tilde{L}) \xrightarrow{\partial} C_r(\tilde{J}, \tilde{L}) \longrightarrow 0.$$

Como $\tilde{L}$ é um retrato de deformação forte de $\tilde{J}$, $C(\tilde{J}, \tilde{L})$ é um $\mathbb{Z}(\pi_1(L))$ complexo acíclico. Então para um $\mathbb{Z}(\pi_1(L))$ complexo temos associado um elemento de $Wh(\pi_1(L))$. Queremos mostrar então que o elemento determinado por $C(\tilde{J}, \tilde{L})$ é pré determinado por $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ e assim por (K, L) .

A partir de agora, uma aproximação algébrica mais sofisticada é necessária. O próximo capítulo será considerado um estudo puramente algébrico dos complexos de cadeia acíclicos, dos grupos de Whitehead, e das ricas informações que podem ser retiradas.

Ferramentas algébricas

Nesse capítulo definiremos o grupo de Whitehead e a torção. Como será um capítulo puramente algébrico daremos uma motivação geométrica.

Queremos determinar quando uma equivalência de homotopia pode ser entendida da seguinte maneira. Assuma que $f : L \rightarrow K$ é uma inclusão celular, e uma equivalência de homotopia. Então se $\pi = \pi_1(L) = \pi_1(K)$, o complexo de cadeia relativo $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ (onde $\tilde{K}$, $\tilde{L}$ são os recobrimentos universais) é um $\mathbb{Z}(\pi)$ - complexo de cadeia livre, acíclico e possui uma $\mathbb{Z}(\pi)$ - base dada pelas células de $K - L$. Colapsos elementares e mudanças de ponto base mudam o complexo de cadeia celular $C(\tilde{K}, \tilde{L})$, e assim queremos classificar complexos de cadeia acíclicos baseados sobre $\mathbb{Z}(\pi)$ por um relação de equivalência, tal que $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é equivalente a 0 se, e somente se, $K \rightarrow L$ é uma equivalência de homotopia simples. O resultado principal, que será apresentado no próximo capítulo, é que o complexo de cadeia $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ determina um elemento $\tau(K, L) \in Wh(\pi)$ que se anula se, e somente se, f é uma equivalência de homotopia simples.

3.1 Convenções algébricas

Daqui em diante, R denotará um anel satisfazendo:

(*) SE M É QUALQUER MÓDULO LIVRE FINITAMENTE GERADO SOBRE R ENTÃO QUAISQUER DUAS BASES DE M POSSUEM A MESMA CARDINALIDADE.

Todos os módulos serão assumidos finitamente gerados a esquerda, isto é, quando multiplicamos, elementos do anel são escritos a esquerda dos elementos do módulo. Claramente um módulo finitamente gerado possui apenas bases finitas. Assim, com essas convenções, um R -módulo livre sempre significará um R -módulo com base finita, e quaisquer duas bases possuem a mesma cardinalidade. Sabemos que anéis de divisão satisfazem (*). Mais geralmente que:

Proposição 3.1.1. *A condição (*) é satisfeita pelo anel R se existe um anel de divisão D e um homomorfismo não nulo $f : R \rightarrow D$.*

Demonstração: Considerando as matrizes que aparecem nas mudanças de base, temos que (*) é satisfeita por um dado anel se e só se toda matriz A , com entradas em R , para o qual existe B com $A.B = I_m$ e $B.A = I_n$ é quadrada, isto é, $n = m$. Seja f_* a aplicação induzida levando as matrizes de R em matrizes de D dada por $f_*(a_{ij}) = (f(a_{ij}))$. Como f é um homomorfismo de anéis $f_*(A.B) = f_*(A).f_*(B)$, para todo A, B . Agora suponha que A, B matrizes quaisquer tal que $A.B = I_m$ e $B.A = I_n$. Como $f(1_R) = 1_D$, $f(I_q) = I_q$, $\forall q$. Então $f_*(A).f_*(B) = I_m$ e $f_*(B).f_*(A) = I_n$. Assim, já que D é um anel de divisão, $f_*(A)$ é quadrada e então A é quadrada. Logo R satisfaz (*). ■

Corolário 3.1.2. *Se G é um grupo $\mathbb{Z}(G)$ satisfaz (*).*

Demonstração: A aplicação avaliação, $A : \mathbb{Z}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $A(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i$ é um homomorfismo não nulo de anéis, da proposição anterior $\mathbb{Z}(G)$ satisfaz (*). ■

Se $f : M_1 \rightarrow M_2$ é um homomorfismo de módulos onde M_1 e M_2 possuem bases ordenadas $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ respectivamente então $\langle f \rangle_{x,y}$ denota a matriz (a_{ij}) onde $f(x_i) = \sum_j a_{ij} y_j$. Então cada linha de $\langle f \rangle_{x,y}$ nos dá a imagem de um elemento de X . Quando essas bases são claras no contexto simplificaremos escrevendo $\langle f \rangle$ para denotar a matriz. Com essas convenções levam a $\langle f_2 \circ f_1 \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$.

Se $x = \{x_1, \dots, x_p\}$ e $y = \{y_1, \dots, y_q\}$ são duas bases ordenadas do mesmo módulo, então $\langle x/y \rangle$ denota a matriz não singular (a_{ij}) , onde $x_i = \sum_j a_{ij} y_j$. Se x, y, z são bases de M então $\langle x/z \rangle = \langle x/y \rangle \langle y/z \rangle$.

Suponha que $f : M_1 \rightarrow M_2$ é um homomorfismo de módulos, e que x e x' são bases para M_1 e y e y' são bases para M_2 . Então $\langle f \rangle_{x',y'} = \langle x'/x \rangle \langle f \rangle_{x,y} \langle y/y' \rangle$. O fato que uma

matriz pode representar ou uma aplicação ou uma mudança de base possui a expressão a seguir nessa notação. Se $x = \{x_1, \dots, x_p\}$ e $y = \{y_1, \dots, y_p\}$ são duas bases para o módulo M e se $f : M \longrightarrow M$ é o isomorfismo $f(y_i) = x_i$ para todo i , então $\langle f \rangle_{y,y} = \langle x/y \rangle$, já que $f(y_i) = x_i = \sum_j a_{ij}y_j$.

Definição 3.1.3. Se $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow D$ então $f \oplus g : A \oplus B \longrightarrow C \oplus D$ é definida por $(f \oplus g)(a, b) = ((f(a)), (g(b)))$

3.2 Matrizes inversíveis e $K_G(R)$

Definição 3.2.1. Denote por $GL(n, R)$ o grupo de todas as $n \times n$ matrizes sobre R que possuem inversas do dois lados. Uma inclusão $GL(n, R) \hookrightarrow GL(n+1, R)$ é definida por

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $GL(R) = \cup_n GL(n, R)$. Pensaremos em $GL(R)$ como o grupo de todas as matrizes inversíveis que são quase sempre a identidade. Sempre identificaremos uma matriz inversível com sua imagem em $GL(R)$. Em particular, se A e B são matrizes inversíveis, seu produto em $GL(R)$ faz sentido mesmo que suas dimensões sejam diferentes. Ou ainda $GL(R)$ pode ser visto como o limite direto $GL(R) = \varinjlim GL(n, R)$.

Definição 3.2.2. $E(R) \subset GL(R)$ é o subgrupo gerado pelas matrizes elementares, isto é, as matrizes da forma

$$I + rE_{ij} \ (i \neq j)$$

onde I é a matriz identidade, E_{ij} é a matriz com 1 na entrada ij e 0 caso contrário, e $r \in R$.

Queremos estudar $GL(R)/E(R)$. Defina uma relação de equivalência em $GL(R)$ por:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{existem elementos } E_1, E_2 \in E(R) \text{ tal que } A = E_1 B E_2.$$

Lembremos que o subgrupo comutador de um grupo G é o subgrupo $[G, G]$ gerado por todos os comutadores $ghg^{-1}h^{-1}$ onde $g, h \in G$. Esse é o menor subgrupo normal de G tal que o grupo quociente correspondente é abeliano.

Mostraremos que $E(R)$ é normal mostrando que $E(R) = [GL(R), GL(R)]$, para isso, observamos que $A \sim B$ se, e somente se, A for dada a partir de B por um sequência finita de operações que consistem da adição de um múltiplo a esquerda de uma linha por outra, ou um múltiplo a direita de uma coluna por outra. Mais geralmente usando linhas, se P_1 e P_2 são

submatrizes $p \times n$ e $q \times n$ de uma matriz não singular $n \times n$ A e se X é uma $p \times q$ matriz, as afirmações a seguir valem,

$$I_l : A = \begin{pmatrix} \text{====} \\ P_1 \\ \text{====} \\ P_2 \\ \text{====} \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} \text{=====} \\ P_1 + XP_2 \\ \text{=====} \\ P_2 \\ \text{=====} \end{pmatrix}$$

Se $p = q$

$$II_l : A = \begin{pmatrix} \text{====} \\ P_1 \\ \text{====} \\ P_2 \\ \text{====} \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} \text{====} \\ P_2 \\ \text{====} \\ -P_1 \\ \text{====} \end{pmatrix}$$

As operações correspondentes nas colunas nos dão equivalências análogas que chamaremos de I_c e II_c .

Lema 3.2.3. Se $A, B \in GL(R)$ então $AB \sim BA$.

Demonstração: Por suficiência maior n , assumimos que A, B são $n \times n$ matrizes. Então

$$AB \sim \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} AB & A \\ -B & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente

$$BA \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

e usando II_c e II_l temos

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

■

Proposição 3.2.4. $E(R)$ é o subgrupo comutador de $GL(R)$.

Demonstração: Se $E \in E(R)$ e $x \in GL(R)$ então $(XE)X^{-1} \sim X^{-1}(XE) = E$ pelo lema anterior, e então $XEX^{-1} = E_1EE_2 \in E(R)$. Dado um comutador $ABA^{-1}B^{-1}$ aplicamos isso com $X = BA$ pra obter

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = (E_1(BA)E_2)(BA)^{-1} = E_1((BA)E_2(BA)^{-1}) \in E(R)$$

já que $(BA)E_2(BA)^{-1} \sim E_2$. Logo $[GL(R), GL(R)] \subset E(R)$. Por outro lado um gerador típico de $E(R)$ é da forma $(I + rE_{ij})$. Notando que $(I + rE_{i,j})^{-1} = (I - rE_{i,j})$ vemos que esse gerador é um comutador pois

$$(I + rE_{i,k}) = (I + rE_{i,j})(I + E_{j,k})(I - rE_{i,j})(I - E_{j,k})$$

■

Assim $E(R)$ é um subgrupo normal de $GL(R)$ e o quociente $GL(R)/E(R)$ é abeliano. Suponha que G é um subgrupo do grupo das unidades de R . Seja E_G o grupo gerado por $E(R)$ e todas as matrizes $(I + (g - 1)E_{ii})$ onde $g \in G$. Como $E(R) \subset E_G$, E_G é normal e assim

Definição 3.2.5. *Definimos*

$$K_G(R) = \frac{GL(R)}{E_G}.$$

Dessa maneira $K_G(R)$ é abeliano. Denotaremos a aplicação quociente $\tau : GL(R) \longrightarrow K_G(R)$ e chamamos de $\tau(A)$ a torção da matriz A . Como $K_G(R)$ é abeliano, denotaremos aditivamente $\tau(A.B) = \tau(A) + \tau(B)$.

Alguns exemplos de $K_G(R)$ para a escolha mais popular de G :

- (1) Se $G = \{1\}$ então $E_G = E(R)$ e $K_1(R) = GL(R)/E(R)$;
- (2) Se $G = \{1, -1\}$, $\overline{K}_1(R) = K_G(R)$ chamado K - grupo reduzido.
- (3) G é um grupo dado, $R = \mathbb{Z}(G)$ e $T = G \cup (-G)$ é o grupo das unidades triviais então $Wh(G) = K_T(\mathbb{Z}(G))$.

$\overline{K}_1(R)$ tem uma vantagem, como qualquer outro $K_G(R)$ com $-1 \in G$, que multiplica uma linha (coluna) por -1 e não muda a torção da matriz, e então, por $II_l(II_c)$ não muda a torção da matriz trocando duas linhas(ou colunas). O grupo de Whitehead de G é o qual estamos mais interessados.

Se G e G' são subgrupos das unidades de R e R' respectivamente então qualquer homomorfismo de anel $f : R \longrightarrow R'$ tal que $f(G) \subset G'$ induz um homomorfismo de grupo $f_* : K_G(R) \longrightarrow K_{G'}(R')$ dado por $f_*(\tau(a_{ij})) = \tau(f(a_{ij}))$. f_* está bem definida, já que se $(a_{ij}) \in E_G$ então $(f(a_{ij})) \in E_{G'}$. Então temos um funtor covariante

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{pares}(R, G) \\ \\ \text{homomorfismo de anéis} \\ f : R \longrightarrow R' \text{ com } f(G) \subset G' \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{grupos abelianos } K_G(R) \\ \\ \text{homomorfismo de grupos} \\ f_* : K_G(R) \longrightarrow K_{G'}(R') \end{array} \right\}$$

Isso leva a um funtor covariante da categoria dos grupos, e homomorfismo de grupos na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} G &\mapsto Wh(G) \\ (f : G \longrightarrow G') &\mapsto (f_* : Wh(G) \longrightarrow Wh(G')) \end{aligned}$$

onde f induz o homomorfismo de anel $\mathbb{Z}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}(G')$ dado por $\sum n_i g_i \longrightarrow \sum n_i f(g_i)$, e isso induz a f_* como do início do parágrafo.

Lema 3.2.6. *Se $g \in G$ e se $f : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos tal que $f(x) = gxg^{-1}$ para todo x então $f_* : Wh(G) \longrightarrow Wh(G)$ é a identidade.*

Demonstração: Seja $\hat{f} : \mathbb{Z}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}(G)$ dada por $\hat{f}(\sum n_i g_i) = \sum n_i f(g_i) = \sum n_i (gg_i g^{-1}) = g(\sum n_i g_i)g^{-1}$. Assim podemos considerar $f_* : Wh(G) \longrightarrow Wh(G)$ e então

$$f_*(\tau(A)) = \tau(f(A)) = \tau(xIAx^{-1}I) = \tau(xI) + \tau(A) + \tau(x^{-1}I) = \tau(A)$$

onde $A = (a_{ij})$. Logo f_* é a identidade. ■

Proposição 3.2.7. *Se A , B e X são $n \times n$, $m \times m$ e $n \times m$ matrizes respectivamente e se $\tau : GL(R) \longrightarrow K_G(R)$, onde G é um subgrupo qualquer das unidades de R , e se A possui inversa a direita ou B possui inversa a esquerda, então*

$$(1) \quad \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ é não singular} \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são não singulares}$$

(2) Se A e B são não singulares então

$$\tau \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau(A) + \tau(B)$$

Demonstração: (1) vale pois, se B possui inversa a esquerda

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -XB^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

e se A tem inversa a direita

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

onde $\begin{pmatrix} I_n & -XB^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ estão em $E(R)$ (são resultados das operações nas linhas de I_{n+m}), e assim não singular.

(2) Quando A e B são não singulares da equação anterior temos

$$\tau \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) = \tau(A) + \tau \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Mas uma seqüência de aplicações de II_l e então de II_c temos

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & B \\ (-1)^m I_n & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (-1)^{2m} I_n \end{pmatrix}$$

$$\text{e assim } \tau \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \tau(A) + \tau(B)$$

■

Teorema 3.2.8. *Suponha que R é um anel comutativo e G é um subgrupo de U das unidades de R . Seja $SK_1(R) = \tau_G(SL(R))$ onde $\tau_G : GL(R) \rightarrow K_G(R)$ e $SL(R)$ é o subgrupo de $GL(R)$ das matrizes de determinante 1. Então existe uma seqüência exata curta que cinde*

$$0 \rightarrow SK_1 \xrightarrow{i} K_G(R) \xrightleftharpoons[s]{[\det]} \frac{U}{G} \rightarrow 0$$

onde $[\det](\tau(A)) \equiv (\text{classe lateral de } \det A) \text{ em } U/G$, e $s(u.G)$ é a torção da matriz 1×1 (u). Em particular, se R é um corpo, $[\det]$ é um isomorfismo.

Demonstração: A seqüência acima é exata pois, se $\tau(A) \in \text{Im}(i)$ então $i(\tau(A)) = \tau(A)$ e $[\det](\tau(A)) = (\det A).G = 1.G = G$, logo $\text{Im}(i) \subset \text{Ker}[\det]$. Dado $\tau(B) \in \text{Ker}[\det]$ temos que $\det B = g \in G$. Para $A = I + (g^{-1} - 1)E_{ii}$, $B \sim AB$, onde $\det A = g^{-1}$, então $A.B \in SL(R)$ e $\tau(AB) = \tau(B) \in SK_1(R)$ logo $i(A.B) = \tau(A.B) = \tau(B)$, portanto, $\text{Ker}[\det] = \text{Im}(i)$. Temos ainda que

$$[\det] \circ s(u.G) = [\det(\tau(u))] = (\det u).G = u.G$$

e assim $[\det] \circ s = 1_{U/G}$. E então a seqüência cinde.

Mostremos agora que o grupo $SK_1(R) = \tau_G(SL(R))$ é independente de G . Pois temos

$$\begin{array}{ccc} GL(R) & \xrightarrow{\tau_1} & K_1(R) \xrightarrow{\pi} K_G(R) \\ & \searrow \tau_G & \nearrow \end{array}$$

onde π a projeção natural, e então $\pi|_{\tau_1(SL(R))} : \tau_1(SL(R)) \xrightarrow{\cong} \tau_G(SL(R))$, de fato, dado $A \in SL(R)$ tal que $\pi(A) = 0$, por manipulações simples em E_G , temos que $A \in E(R)$ e assim $\text{Ker}(\pi) = \{0\}$. Agora como em $\tau_G(SL(R))$ as em E_G não alteram o determinante ou o multiplicam por algum $g \in G$, se $\tau(B) \in \tau_G(SL(R))$ e $\det B = g$ então como antes existe A com $\det A = g^{-1}$, $\pi(A) = 0$ e $AB \xrightarrow{E_G} B$ então $AB \in \tau_1(SL(R))$ e $\pi(AB) = B$, logo é sobrejetora. E o isomorfismo segue. Agora se R é um corpo $U = R^*$ e $G \leq U$. Como $SK_1(R)$ não depende de G , para $G = R^*$ temos que $SK_1(R) = 0$. Dessa maneira, $SK_1(R) = 0$ para qualquer $G \leq U$. Como a seqüência é exata, $[\det]$ é um isomorfismo.

■

3.3 Algumas informações sobre o grupo de Whitehead

Na última seção definimos para qualquer grupo G , o grupo abeliano $Wh(G)$ dado por $Wh(G) = K_T(\mathbb{Z}(G))$, onde $T = G \cup (-G)$ são as unidades triviais de $\mathbb{Z}(G)$. Daremos alguns exemplos e alguns fatos importantes nessa seção.

Proposição 3.3.1. $Wh(\{1\}) = \{0\}$

Demonstração:

$$Wh(\{1\}) = K_T(\mathbb{Z}) = \frac{GL(\mathbb{Z})}{E_T} = \{0\},$$

já que qualquer $A \in GL(\mathbb{Z})$ pode ser transformado na identidade por meio de operações em $E(R)$. ■

Proposição 3.3.2. $Wh(\mathbb{Z}) = \{0\}$

A prova se encontra em [10]

Teorema 3.3.3. $Wh(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) = \{0\}$

É um teorema de [2]

Podemos ainda exibir vários grupos de Whitehead não nulos. Se G é um grupo abeliano, seja U o grupo de todas as unidades de $\mathbb{Z}(G)$, e T o subgrupo das unidades triviais pelo teorema 3.2.8,

$$Wh(G) \cong SK_1(\mathbb{Z}(G)) \oplus \frac{U}{T}.$$

E no lema 2.6.7 temos que $Wh(\mathbb{Z}_5) \neq 0$ já que $U/T \neq 0$. Mais geralmente temos o resultado, que não será provado aqui,

Teorema 3.3.4. *Se G é um grupo que contém um elemento x de ordem $q \neq 1, 2, 3, 4, 6$ então $Wh(G) \neq 0$. Na verdade, seja j, k e a inteiros tal que $j > 1$, $k > 1$, $j + k < q$, $jk = aq \pm 1$ tais inteiros sempre existem. Então uma unidade não trivial u de $\mathbb{Z}(G)$ é dada pela fórmula*

$$u = (1 + x + \dots + x^{j-1})(1 + x + \dots + x^{k-1}) - a(1 + x + \dots + x^{q-1})$$

([6], p. 44)

Para grupos cíclicos o teorema 3.3.4 pode ser refinado. Na verdade temos de [10], [1] p.54 e [3] proposição 4.14,

Teorema 3.3.5. *Se $\mathbb{Z}_q$ é um grupo cíclico de ordem finita q então:*

(a) *$Wh(\mathbb{Z}_q)$ é um grupo livre abeliano de dimensão $(q/2) + 1 - \delta(q)$ onde $\delta(q)$ é o número de divisores de q . (Em particular $Wh(\mathbb{Z}_q) = 0$ se $q = 1, 2, 3, 4, 6$)*

- (b) $SK_1(\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_q)) = 0$ assim (pelo teorema 3.2.8) a aplicação determinante dá um isomorfismo $[det] : Wh(\mathbb{Z}_q) \longrightarrow U/T$.

E por [25] temos

Teorema 3.3.6. *Se G_1 e G_2 são grupos então $Wh(G_1 * G_2) = Wh(G_1) \oplus Wh(G_2)$.*

3.4 (R, G) - Complexos

Daqui em diante assumiremos que G é um subgrupo das unidades de R que contém o elemento (-1) .

Definição 3.4.1. *Um (R, G) - módulo é definido como sendo um R -módulo M junto com uma família distinguida $\mathcal{B}$ de bases que satisfazem: Se b e b' são bases de M e se $b \in \mathcal{B}$ então*

$$b' \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \tau(\langle b/b' \rangle) = 0 \in K_G(R).$$

Definição 3.4.2. *Se M_1 e M_2 são (R, G) - módulos e se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é um isomorfismo de módulos então a torção de f - $\tau(f)$ - é definida sendo $\tau(A) \in K_G(R)$ onde A é a matriz de f com respeito a qualquer base distinguida M_1 e M_2 .*

Observemos que $\tau(f)$ é independente da escolha das bases(dentro das famílias distinguidas), de fato, seja x, x' , bases distinguidas para M_1 e y, y' , bases distinguidas para M_2 , sabemos que $\langle f \rangle_{x', y'} = \langle x'/x \rangle \langle f \rangle_{x, y} \langle y/y' \rangle$ e então

$$\begin{aligned} \tau(\langle f \rangle_{x', y'}) &= \tau(\langle x'/x \rangle) + \tau(\langle f \rangle_{x, y}) + \tau(\langle y/y' \rangle) \\ &= \tau(\langle f \rangle_{x, y}) \end{aligned}$$

Definição 3.4.3. *Diremos que f é um isomorfismo simples de (R, G) - módulos se $\tau(f) = 0$. Nesse caso escrevemos $f : M_1 \cong_{\Sigma} M_2$.*

Definição 3.4.4. *Um (R, G) - complexo é um complexo de cadeia livre sobre R*

$$C : 0 \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

tal que cada C_i é um (R, G) - módulo. Uma base distinguida de C significará sempre uma base $c = \cup c_i$ onde c_i é uma base distinguida para C_i .

Definição 3.4.5. *Se G é um grupo então $Wh(G)$ - complexo é definido como sendo (R, T) - complexo, onde $R = \mathbb{Z}(G)$ e $T = G \cup (-G)$ é o grupo das unidades triviais de $\mathbb{Z}(G)$.*

Definição 3.4.6. *Um isomorfismo simples de (R, G) - complexos $f : C \longrightarrow C'$ é uma aplicação cadeia tal que $f|_{C_i} : C_i \cong_{\Sigma} C'_i$ para todo i . Escrevemos $f : C \cong_{\Sigma} C'$.*

Veja que, essa é a noção direta de isomorfismo na categoria na categoria de (R, G) - complexos, observando que $f : C \cong_{\Sigma} C'$ existem bases distinguidas com respeito ao qual para cada inteiro i , a matriz de $f|_{C_i}$ é a identidade e a matriz de $d_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$ é identicamente a de $d'_i : C'_i \longrightarrow C'_{i-1}$.

Note que um isomorfismo simples de complexos de cadeia não é meramente uma aplicação cadeia $f : C \longrightarrow C'$ que é um isomorfismo simples de (R, G) - módulos C e C' . Por exemplo, seja A uma matriz não singular sobre R com $\tau(A) \neq 0$. Seja C_1, C'_1, C_2 e C'_2 módulos livre de dimensão n com bases distinguidas especificadas. Seja $C = C_1 \oplus C_2$ e $C' = C'_1 \oplus C'_2$. Defina $f : C \longrightarrow C'$ e operadores bordo d e d' pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{\langle f_2 \rangle = A} & C'_2 \\ \langle d \rangle = A \downarrow & & \downarrow \langle d' \rangle = A^{-1} \\ C_1 & \xrightarrow{\langle f_1 \rangle = A^{-1}} & C'_1 \end{array}$$

Então f é uma aplicação cadeia e claramente não é um isomorfismo simples de complexo de cadeia. Mas é um isomorfismo de módulos com a matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

e pela proposição 3.2.7, $\tau(f) = 0$.

Nosso propósito em estudar os complexos de cadeia é associar a todo (R, G) - complexo acíclico C um bem definido elemento torção $\tau(C) \in K_G(R)$ com as propriedades:

P1 : Se $C \cong_{\Sigma} C'$ então $\tau(C) = \tau(C')$

P2 : Se $C' \oplus C''$ é o somando direto de C' e C'' na categoria de (R, G) - complexos (isto é, as bases distinguidas para $(C' \oplus C'')_i$ são determinadas por uma base que é a união de bases de C'_i e C''_i) então $\tau(C' \oplus C'') = \tau(C') + \tau(C'')$.

P3 : Se C é o complexo

$$C : 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \longrightarrow 0$$

$$\text{então } \tau(C) = (-1)^{n-1} \tau(d).$$

Mostremos que, na verdade, existe um único funtor τ satisfazendo essas propriedades e que essas propriedades geram informações muito úteis.

3.5 Complexo de cadeia acíclico

Nessa seção desenvolveremos os materiais que servirão de base para a prova da afirmação da seção anterior, nos concentrando em complexos acíclicos.

Definição 3.5.1. *Um R -módulo M é dito estavelmente livre se existem módulos livres F_1 e F_2 tal que $M \oplus F_1 = F_2$.*

Note que se M é um R -módulo estavelmente livre e se $j : A \rightarrow M$ é uma sobrejeção então existe um homomorfismo $s : M \rightarrow A$ tal que $j \circ s = 1_M$, isto é, uma seção. Note que M é estavelmente livre não significa que M ser livre. Mostremos a afirmação anterior, como M é estavelmente livre existe F tal que $M \oplus F$ é livre então $j \oplus 1 : A \oplus F \rightarrow M \oplus F$ é sobrejetora e assim existe uma seção $S : M \oplus F \rightarrow A \oplus F$ (levando cada elemento da base em um elemento da imagem inversa). Então $s = p_1 \circ s \circ i_1$ é a seção requerida, onde $i_1 : M \rightarrow M \oplus F$ e $p_1 : A \oplus F \rightarrow A$ são aplicações naturais.

Teorema 3.5.2. *Suponha que C é um complexo acíclico livre sobre R com operador bordo d . Denote $B_i = d(C_{i+1})$ para todo i . Então*

- (a) B_i é estavelmente livre para todo i .
- (b) Existe um homomorfismo de grau 1, $\delta : C \rightarrow C$, tal que $\delta d + d\delta = 1$ (tal homomorfismo é chamado uma contração de cadeia).
- (c) Se $\delta : C \rightarrow C$ é uma contração qualquer então, para cada i , $d\delta|_{B_{i-1}} = 1$ e $C_i = B_i \oplus \delta(B_{i-1})$.

Demonstração: (a) $B_0 = d(C_1) = C_0$ (pois C é acíclico), e assim é estavelmente livre. Assuma indutivamente que B_{i-1} é estavelmente livre. Então existe uma seção $s : B_{i-1} \rightarrow C_i$. Como C é acíclico a seqüência

$$0 \rightarrow B_i \xrightarrow{\hookrightarrow} C_i \xrightleftharpoons[s]{d} B_{i-1} \rightarrow 0$$

é exata e cinde. Assim $C_i = B_i \oplus s(B_{i-1})$, onde $s(B_{i-1})$ é isomorfo a B_{i-1} , é estavelmente livre. Assim existem módulos livres F_1, F_2 tal que $s(B_{i-1}) \oplus F_1 = F_2$ e então

$$B_i \oplus F_2 = B_i \oplus s(B_{i-1}) \oplus F_1 = C_i \oplus F_1.$$

Como C_i é livre, temos que B_i é estavelmente livre e (a) está provado.

(b) Por (a), podemos escolher, para cada sobrejeção $d_i : C_i \rightarrow B_{i-1}$, uma seção $\delta_i : B_{i-1} \rightarrow C_i$. Como na prova de (a), segue que $C_i = B_i \oplus \delta_i(B_{i-1})$. Defina $\delta : C \rightarrow C$ pela condição que, para todo i ,

$$\delta|_{B_i} = \delta_{i+1} ; \delta|_{\delta_i(B_{i-1})} = 0.$$

Que nos dá:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_i & \xrightleftharpoons[\delta]{d} & C_{i-1} & \xrightleftharpoons[s]{d} & C_{i-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & B_{i-1} & \xrightarrow{0} & B_{i-1} & \xrightarrow{0} & B_{i-2} & & \\
 & \oplus & & \nearrow d & \oplus & \nearrow d & \oplus & & \\
 & & \delta(B_{i-1}) & \xleftarrow{0} & \delta(B_{i-2}) & \xleftarrow{0} & \delta(B_{i-3}) & &
 \end{array}$$

E assim claramente $d\delta + \delta d = 1$.

(c) Suponha dado $\delta : C \rightarrow C$ tal que $d\delta + \delta d = 1$. Então $d\delta|_{B_{i-1}} = (d\delta + \delta d)|_{B_{i-1}} = 1_{B_{i-1}}$. Assim $\delta|_{B_{i-1}} : B_{i-1} \rightarrow C_i$ é uma seção, como em (a), $C_i = B_i \oplus \delta(B_{i-1})$. ■

Observamos que δ é construído na prova de (b) ainda satisfazendo $\delta^2 = 0$, tal que existe uma boa simetria entre d e δ . Mais ainda, dado qualquer contração de cadeia δ , uma contração de cadeia δ' com $(\delta')^2 = 0$ pode ser construído colocando $\delta' = \delta d \delta$.

Proposição 3.5.3. *Se*

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata de complexos de cadeias sobre R , onde C'' é livre e acíclica, então existe uma seção $s : C'' \rightarrow C$ tal que s é uma aplicação cadeia e $i + s : C' \oplus C'' \rightarrow C$ é um isomorfismo de cadeia.

Demonstração: Seja d, d' e d'' o operador bordo em C, C' e C'' , respectivamente. Seja $\delta'' : C'' \rightarrow C''$ uma contração de cadeia. Como cada C''_k é livre, existem seções $\sigma_k : C''_k \rightarrow C_k$. Combinamos essas informações para obter uma seção $s : C'' \rightarrow C$. Seja $s = d\sigma\delta'' + \sigma d''$. Então $ds = d\sigma\delta''d''$ e $sd'' = d\sigma\delta''d''$ e então $ds = sd''$. E assim s é uma aplicação cadeia. Ainda $js = j(d\sigma\delta'' + \sigma d'') = jd\sigma\delta'' + j\sigma d'' = d''(j\sigma)\delta'' + \delta''d'' = d''\delta'' + \delta''d'' = 1$. Então s é uma seção. Finalmente, o isomorfismo $i + s$ vem da seqüência exata

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightleftharpoons[s]{j} C'' \rightarrow 0$$

e claramente é uma aplicação cadeia. ■

A motivação para escolher s como na proposição anterior vem do fato que, a aplicação $\sigma d'' - d\sigma$ é um homomorfismo de grau (-1) que mede o quanto que σ falha em ser uma aplicação cadeia. Se adicionarmos um fator corretor em σ - isto é, um homomorfismo de módulo de grau zero f tal que $\sigma + f$ é uma aplicação cadeia - então um candidato razoável é a aplicação $f = (d\sigma - \sigma d'')\delta''$. Notando que então $\sigma + f = d\sigma\delta'' + \sigma d''$, já que,

$$f = (d\sigma - \sigma d'')\delta'' = d\sigma\delta'' - \sigma d''\delta'' = d\sigma\delta'' - \sigma + \sigma d''d'' \Rightarrow$$

$$\sigma + f = d\sigma\delta'' + \sigma\delta''d''$$

como $d''\delta'' + \delta''d'' = 1$.

Mostremos a não dependência da contração de cadeia de um complexo acíclico, no cálculo da torção.

Lema 3.5.4. *Suponha que C é um (R, G) - complexo acíclico com contrações de cadeia δ e δ' . Para i fixo, seja $1 \oplus \delta d : C_i \longrightarrow C_i$ definido por*

$$1 \oplus \delta d : B_i \oplus \delta'(B_{i-1}) = C_i \longrightarrow B_i \oplus \delta(B_{i-1}) = C_i$$

Então **(A)** $1 \oplus \delta d$ é um isomorfismo simples.

(B) Se B_i e B_{i-1} são módulos livres com bases b_i e b_{i-1} e se c_i é uma base de C_i então $\tau(\langle b_i \cup \delta(b_{i-1})/c_i \rangle) = \tau(\langle b_i \cup \delta'(b_{i-1})/c_i \rangle)$.

Demonstração: Denote $g = 1 \oplus \delta d$. Claramente g é um isomorfismo, como pelo teorema 3.5.2c, $\delta d : \delta'(B_{i-1}) \xrightarrow{\cong} \delta(B_{i-1})$. Se B_i e $\delta'(B_{i-1})$ são livres então poderíamos, usando uma base para C_i que é união de uma base de B_i e de $\delta'(B_{i-1})$, escrever uma matriz que reflete claramente a estrutura de g . Essa observação motiva a prova a seguir de **(A)**.

(A) B_i e $\delta'(B_{i-1})$ são estavelmente livres, assim existem módulos livres F_1 e F_2 tal que $F_1 \oplus B_i$ e $\delta'(B_{i-1}) \oplus F_2$ são livres. Fixe bases para F_1 e F_2 e considere a união dessas com uma base distinguidas para C_i para obter uma base c de $F_1 \oplus C_i \oplus F_2$. Seja

$$G = 1_{F_1} \oplus g \oplus 1_{F_2} : F_1 \oplus C_i \oplus F_2 \longrightarrow F_1 \oplus C_i \oplus F_2.$$

Então

$$\langle G \rangle_{c,c} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ & \langle g \rangle \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Assim $\tau(\langle G \rangle_{c,c}) = \tau(\langle g \rangle)$.

Agora escolha bases b_1 e b_2 para $(F_1 \oplus B_i)$ e $(\delta'(B_{i-1}) \oplus F_2)$ e seja $b = b_1 \cup b_2$, outra base para $F_1 \oplus C_i \oplus F_2$. Note que $\langle G \rangle_{c,c} = \langle c/b \rangle \langle G \rangle_{b,b} \langle c/b \rangle^{-1}$, assim $\tau(\langle G \rangle_{c,c}) = \tau(\langle c/b \rangle) + \tau(\langle G \rangle_{b,b}) - \tau(\langle c/b \rangle) = \tau(\langle G \rangle_{b,b})$. E ainda $\langle G \rangle_{b,b}$ é igual a

$$\begin{array}{cc} & F_1 \oplus B_i & \delta'(B_{i-1}) \oplus F_2 \\ \begin{array}{c} F_1 \oplus B_i \\ \delta'(B_{i-1}) \oplus F_2 \end{array} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ver isso suponha $y = \delta'(z) + w$, onde $z \in B_{i-1}$ e $w \in F_2$. Então $G(y) = \delta d(\delta'(z)) + w = \delta(z) + w$. Como $d(\delta(z) - \delta'(z)) = z - z = 0$, podemos escrever $\delta(z) = \delta'(z) + x$, $x \in B_i$. Então $G(y) = (\delta'(z) + x) + w = x + y$, $x \in F_1 \oplus B_i$. Logo $\tau(\langle g \rangle) = \tau(\langle G \rangle_{c,c}) = \tau(\langle G \rangle_{b,b}) = 0$.

Para **(B)** suponha que $b_i = \{u_1 \dots, u_p\}$ e $b_{i-1} = \{v_1 \dots v_p\}$ são bases de B_i e B_{i-1} respectivamente. Seja $b = b_i \cup \delta'(b_{i-1})$. Então $(1 \oplus \delta d)(u_j) = u_j$ e $(1 \oplus \delta d)(\delta'(v_k)) = \delta(v_k)$ e então

$$\left\langle \frac{b_i \cup \delta(b_{i-1})}{b_i \cup \delta'(b_{i-1})} \right\rangle = \langle 1 \oplus \delta d \rangle_{b,b}.$$

Por **(A)** $\tau(\langle 1 \oplus \delta d >_{b,b} \rangle) = 0$ então

$$\begin{aligned} 0 &= \tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta(b_{i-1})}{b_i \cup \delta'(b_{i-1})} \right\rangle\right) = \tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle \left\langle \frac{b_i \cup \delta'(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle^{-1}\right) \\ &= \tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle\right) - \tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta'(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle\right) \Rightarrow \\ &\tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle\right) = \tau\left(\left\langle \frac{b_i \cup \delta'(b_{i-1})}{c_i} \right\rangle\right) \end{aligned}$$

■

3.6 Definição da torção de um complexo de cadeia acíclico

Definição 3.6.1. Um (R, G) - complexo C é definido sendo um complexo elementarmente trivial se é da forma

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \longrightarrow 0$$

onde d é um isomorfismo simples de (R, G) - módulos.

Observamos então que se obtivermos um complexo elementarmente trivial então, com respeito a bases distinguidas de C_n e C_{n-1} , $\langle d \rangle$ é a identidade.

Definição 3.6.2. Um (R, G) - complexo C é trivial se é um somando direto, na categoria de (R, G) - complexos, de complexos elementarmente triviais.

Definição 3.6.3. Dois (R, G) - complexos C e C' são estavelmente equivalentes - denotado por $C \stackrel{s}{\sim} C'$ - se existe T e T' , complexos triviais, tal que $C \oplus T \cong_{\Sigma} C' \oplus T'$.

Claramente esta definição é uma relação de equivalência. Do mesmo modo que foi mostrado em 2.5, que um par homotopicamente trivial CW (K, L) é equivalente por homotopia simples a um par que possui células em apenas duas dimensões, mostraremos que qualquer (R, G) - complexo acíclico é estavelmente equivalente a um complexo que é zero exceto em duas dimensões.

Lema 3.6.4. Se C é um (R, G) - complexo acíclico da forma

$$C : 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_{i+3}} C_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \longrightarrow 0$$

e se $\delta : C \longrightarrow C$ é uma contração de cadeia então $C \stackrel{s}{\sim} C_\delta$ onde C_δ é o complexo

$$C_\delta : 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_{i+3}} C_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow \delta_{i+1} \\ & \oplus & \\ & C_i & \end{array}$$

Demonstração: Para simplificar a notação, assumiremos $i = 0$. Mas isso não terá nenhum efeito na prova.

Seja T um complexo trivial com $T_1 = T_2 = C_0$ e $T_i = 0$ caso contrário e $\partial_2 : T_2 \longrightarrow T_1$, a identidade em C_0 . Seja T' o complexo trivial $T'_0 = T'_1 = C_0$ e $T'_i = 0$ caso contrário e $\partial'_1 : T'_1 \longrightarrow T'_0$, $\partial'_1 = 1_{C_0}$. Afirmamos que $C \oplus T \cong_\Sigma C_\delta \oplus T'$.

Defina $f : C \oplus T \longrightarrow C_\delta \oplus T'$ por $f_i = 1$, se $i \neq 1$ e $f_1(c_0 + c_1) = \delta_1 c_0 + (c_1 + d_1(c_1))$, $c_0 \in C_0$ e $c_1 \in C_1$. Os diagramas relevantes são:

$$\begin{array}{ccccccc} C \oplus T : & \cdots & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow f_3 & & & \downarrow f_0 \\ & & & & \oplus & \xrightarrow{d_2 \oplus \partial_2} & \oplus \\ & & & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\ C_\delta \oplus T' : & \cdots & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \longrightarrow 0 \\ & & & & & \uparrow \oplus \delta_1 & \uparrow \oplus \partial'_1 \\ & & & & & C_0 & C_0 \end{array}$$

Claramente f é uma aplicação cadeia. Para mostrar que f é um isomorfismo simples temos que mostrar que cada f_i é um isomorfismo simples. Que é obvio para todo $i \neq 1$. Para $i = 1$, $\langle f_1 \rangle$ é igual a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_0 & C_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_0 \\ C_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 0 & \langle \delta_1 \rangle \\ \langle d_1 \rangle & I \end{array} \right) \end{array}$$

que é igual à $\begin{pmatrix} -I & \langle \delta_1 \rangle \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \langle d_1 \rangle & I \end{pmatrix}$. Isto e pelas convenções de 3.1,

$$\langle \delta_1 \rangle \langle d_1 \rangle = \langle d_1 \delta_1 \rangle = \langle d_1 \delta_1 + \delta_0 d_0 \rangle = I.$$

Então pela proposição 3.2.7, $\tau(\langle f_1 \rangle) = 0$

■

Se C é um (R, G) -complexo acíclico um uso indutivo do resultado anterior resulta $C \stackrel{s}{\sim} C'$ para algum (R, G) -complexo C' que é zero exceto em duas dimensões. No sentido de motivar a próxima definição, mostraremos (pelo menos no caso que $\delta^2 = 0$) como C' é construído por aplicações repetidas do lema anterior.

Proposição 3.6.5. *Seja C um (R, G) -complexo acíclico com operador bordo d e contrações de cadeia δ satisfazendo $\delta^2 = 0$ e seja*

$$C_{\text{impar}} = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots$$

$$C_{\text{par}} = C_0 \oplus C_2 \oplus \dots$$

Então C é estavelmente equivalente a um (R, G) -complexo da forma

$$C' : 0 \longrightarrow C'_m = C_{\text{impar}} \xrightarrow{(d+\delta)|_{C_{\text{impar}}}} C'_{m-1} = C_{\text{par}} \longrightarrow 0$$

para algum inteiro ímpar m .

Demonstração: Seja m ímpar tal que C é da forma $0 \longrightarrow C_m \longrightarrow C_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ (dessa maneira temos a possibilidade de $C_m = 0$). Se $j \leq m$, seja $C'_j = C_j \oplus C_{j-2} \oplus C_{j-4} \oplus \dots$. Seja D^i o complexo de cadeia

$$D^i : 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_{i+2} \xrightarrow{d} C'_{i+1} \xrightarrow{d'} C'_i \longrightarrow 0$$

onde d é o operador bordo em C e $d' = (d|_{C_{i+1}}) + (d + \delta)|_{C'_{i-1}}$. Claramente $D^0 = C$ e $D^{m-1} = C'$. E ainda com cálculos simples é fácil mostrar que D^i é um complexo de cadeia. Agora defina $\Delta^i = \Delta : D^i \longrightarrow D^i$, um homomorfismo de grau um por

$$\Delta|_{C_j} = \delta|_{C_j} \text{ se } j \geq i + 2$$

$$\Delta|_{C'_{i+1}} = (\delta|_{C_{i+1}}) \circ \pi, \text{ onde } \pi : C'_{i+1} \longrightarrow C_{i+1}, \text{ é a projeção natural}$$

$$\Delta|_{C'_i} = (d + \delta)|_{C'_i}$$

Então Δ é uma contração de cadeia de D^i . É fácil verificar que

$$\begin{aligned} (d'\Delta + \Delta d')|_{C'_{i+1}} &= (d\delta + \delta d)|_{C_{i+1}} \oplus (d + \delta)^2|_{C'_{i-1}} \\ &= 1_{C'_{i+1}} \end{aligned}$$

como $d^2 = \delta^2 = 0$. Então D^i e Δ^i satisfazem as hipóteses do lema anterior. A indução desse lema mostra precisamente que $D^i \stackrel{s}{\sim} D^{i+1}$. Assim por indução $C \stackrel{s}{\sim} C'$.

■

Definição 3.6.6. *Seja C um (R, G) - complexo acíclico com operador bordo d . Seja δ uma contração de cadeia qualquer de C . Ponha*

$$C_{\text{impar}} = C_1 \oplus C_3 \oplus \dots$$

$$C_{\text{par}} = C_0 \oplus C_2 \oplus \dots$$

$$(d + \delta)_{\text{impar}} = (d + \delta)|_{C_{\text{impar}}} : C_{\text{impar}} \longrightarrow C_{\text{par}}.$$

Então $\tau(C) = \tau(\langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle) \in K_G(R)$.

Em particular, se C é um $Wh(G)$ - complexo então $\tau(C) = \tau(\langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle) \in Wh(G)$.

Diferente da proposição 3.6.5, a definição não assume que $\delta^2 = 0$. Isso pode ser uma convenção totalmente desnecessária, apesar de ser um modesta conveniência na prova que $\tau(C)$ está bem definida. Denotaremos por $d + \delta$ ao invés de $(d + \delta)_{\text{impar}}$ quando não ocorrer confusão. É entendido que $\tau(C)$ é definido em função de bases distinguidas de C_{impar} e C_{par} . Se $c = \cup c_i$ é uma base distinguida de C então $\tau(C) = \tau(\langle d + \delta \rangle_{c_{\text{impar}}, c_{\text{par}}})$ onde $c_{\text{impar}} = c_1 \cup c_3 \cup c_5 \dots$ e $c_{\text{par}} = c_0 \cup c_2 \cup \dots$. Para conveniência $\langle d + \delta \rangle_{c_{\text{impar}}, c_{\text{par}}}$ será abreviado para $\langle d + \delta \rangle_c$ ou simplesmente para $\langle d + \delta \rangle$ quando o contexto permitir.

A forma de $\langle d + \delta \rangle$ é

$$\begin{array}{c} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{array} \begin{pmatrix} C_0 & C_2 & C_4 \\ \langle d_1 \rangle & \langle \delta_2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle d_3 \rangle & \langle \delta_4 \rangle \\ 0 & 0 & \langle d_5 \rangle \end{pmatrix}$$

No entanto não podemos concluir que $\tau(d + \delta) = \tau(d_1) + \tau(d_3) + \dots$, pois as matrizes $\langle d_i \rangle$ são usualmente não inversíveis ou até mesmo quadradas.

Para mostrar que $\tau(C)$ está bem definido, temos que mostrar que $\langle d + \delta \rangle$ é não singular e que $\tau(d + \delta)$ é independente das bases distinguidas e da contração δ usada.

Proposição 3.6.7. *Seja c uma base para C . Então $\langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle_c$ e $\langle (d + \delta)_{\text{par}} \rangle_c$ são não singular com $\tau(\langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle_c) = -\tau(\langle (d + \delta)_{\text{par}} \rangle_c)$.*

Demonstração: Note que $(d + \delta)_{\text{par}} \circ (d + \delta)_{\text{impar}}$ faz sentido já que

$$C'_{2i+1} \longrightarrow C'_{2i} \longrightarrow C'_{2i-1}$$

e então

$$\begin{aligned} (d + \delta)_{\text{par}} \circ (d + \delta)_{\text{impar}} &= (d^2 + d\delta + \delta d\delta^2)|_{C_{\text{impar}}} \\ &= (1 + \delta^2)|_{C_{\text{impar}}}. \end{aligned}$$

Portanto $\langle (d + \delta)_{\text{par}} \rangle_c \langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle_c$ é igual a matriz abaixo dada por

$$\begin{array}{c} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{array} \begin{pmatrix} C_1 & C_3 & C_5 \\ I & \langle \delta_3 \delta_2 \rangle & 0 \\ 0 & I & \langle \delta_5 \delta_4 \rangle \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Pela proposição 3.2.7 essa matriz é não singular e tem torção nula. Uma afirmação similar vale para $\langle (d + \delta)_{\text{impar}} \rangle_c \langle (d + \delta)_{\text{par}} \rangle_c$, e o resultado segue. ■

Proposição 3.6.8. *Seja $c = \cup c_i$ e $c' = \cup c'_i$ bases de c , onde c_i e c'_i são bases arbitrárias de C_i . Então*

$$\tau(\langle d + \delta \rangle_c) = \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'}) + \sum_i (-1)^i \tau(\langle c'_i / c_i \rangle).$$

Em particular, se os c_i e c'_i são bases distinguidas, $\tau(\langle d + \delta \rangle_c) = \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'})$, assim $\tau(\langle d + \delta \rangle)$ é independente das escolhas de bases distinguidas.

Demonstração: $\langle d + \delta \rangle_c = \langle c_{\text{impar}} / c'_{\text{impar}} \rangle \langle d + \delta \rangle_{c'} \langle c'_{\text{par}} / c_{\text{par}} \rangle =$

$$= \begin{pmatrix} \langle c_1 / c'_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle c_3 / c'_3 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \langle d + \delta \rangle_{c'} \begin{pmatrix} \langle c'_0 / c_0 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle c'_2 / c_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Então usando a proposição 3.2.7,

$$\begin{aligned} \tau(\langle d + \delta \rangle_c) &= \sum_i \tau(\langle c_{2i+1} / c'_{2i+1} \rangle) + \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'}) + \sum_i \tau(\langle c'_{2i} / c_{2i} \rangle) \\ &= \sum_i \tau(\langle c'_{2i+1} / c_{2i+1} \rangle^{-1}) + \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'}) + \sum_i \tau(\langle c'_{2i} / c_{2i} \rangle) \\ &= \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'}) + \sum_i (-1)^i \tau(\langle c'_i / c_i \rangle) \end{aligned}$$

E se as bases são distinguidas então $\tau(\langle d + \delta \rangle_c) = \tau(\langle d + \delta \rangle_{c'})$ ■

Proposição 3.6.9. *, Suponha que C é um (R, G) - complexo acíclico com contração de cadeia δ e δ' . Então $\tau(d + \delta) = \tau(d + \delta')$.*

Demonstração: Todos os cálculos serão feitos com bases distinguidas fixadas.

$$\begin{aligned} \tau(d + \delta') - \tau(d + \delta) &= \tau(\langle (d + \delta')_{c_{\text{impar}}} \rangle) + \tau(\langle (d + \delta)_{c_{\text{par}}} \rangle) \text{ pela proposição 3.6.7} \\ &= \tau(\langle (d + \delta')_{c_{\text{impar}}} \rangle) \tau(\langle (d + \delta)_{c_{\text{par}}} \rangle) \\ &= \tau(\langle (d + \delta) \rangle \circ \langle (d + \delta') \rangle |_{C_{\text{impar}}}) \\ &= \tau(\langle d^2 + d\delta' + \delta d + \delta\delta' \rangle |_{C_{\text{impar}}}) \end{aligned}$$

que é igual a torção de

$$\begin{array}{c} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{array} \begin{pmatrix} C_1 & C_3 & C_5 \\ \langle \delta d + d\delta' \rangle & \langle \delta\delta' \rangle & 0 \\ 0 & \langle \delta d + d\delta' \rangle & \langle \delta\delta' \rangle \\ 0 & 0 & \langle \delta d + d\delta' \rangle \end{pmatrix}$$

que é igual a $\sum_i \tau(\langle (\delta d + d\delta')|_{C_{2i+1}} \rangle)$, pela proposição 3.2.7. Se cada $(\delta d + d\delta')|_{C_{2i+1}}$ é não singular. Note que, $(\delta d + d\delta')|_{C_j} = 1 \oplus \delta d : B_j \oplus \delta'(B_{j-1}) \longrightarrow B_j \oplus \delta(B_{j-1})$. Pois se $b_j \in B_j$ e $b_{j-1} \in B_{j-1}$ temos

$$\begin{aligned} (\delta d + d\delta')(b_j) &= b_j \\ (\delta d + d\delta')(\delta'(b_{j-1})) &= \delta d(\delta'(b_{j-1})) + (1 - \delta' d)(\delta'(b_{j-1})) \\ &= \delta d(\delta'(b_{j-1})) + \delta'(b_{j-1}) - \delta'(b_{j-1}) \\ &= \delta d(\delta'(b_{j-1})). \end{aligned}$$

Assim pelo 3.5.4A, $(\delta d + d\delta')|_{C_{2i+1}}$ é um isomorfismo simples. Então $\tau(d + \delta) = \tau(d + \delta')$. ■

3.7 Caracterização da torção de um complexo de cadeia

Teorema 3.7.1. *Se R é um anel e G um subgrupo das unidades de R contendo (-1) , e se $\mathfrak{C}$ é a classe dos (R, G) -complexos acíclicos, então a aplicação torção $\tau : \mathfrak{C} \longrightarrow K_G(R)$ definida na seção anterior satisfaz:*

P1: $C \cong_{\Sigma} C' \Rightarrow \tau(C) = \tau(C')$

P2: $\tau(C' \oplus C'') = \tau(C') + \tau(C'')$

P3: $\tau(0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \longrightarrow 0) = (-1)^{n-1} \tau(d)$

Demonstração: No que segue d , d' e d'' são os operadores bordos de C , C' e C'' respectivamente.

P1: Suponha que $f : C \cong_{\Sigma} C'$. Como visto em 3.4, existe bases distinguidas de C e C' tal que $\langle d_n \rangle = \langle d'_n \rangle$ e $\langle f_n \rangle = I$ para todo n . Escolha uma contração de cadeia $\delta : C \longrightarrow C$ e $\delta' = f\delta f^{-1}$ então $\langle \delta' \rangle = \langle f \rangle \langle \delta \rangle \langle f^{-1} \rangle = \langle \delta \rangle$. Então $\langle d + \delta \rangle = \langle d' + \delta' \rangle$ e portanto $\tau(C) = \tau(C')$.

P2: Assuma $C = C' \oplus C''$ (assim $d = d' \oplus d''$) e que δ' e δ'' são contrações de cadeia para C' e C'' . Segue que $\delta = \delta' \oplus \delta''$ é uma contração de cadeia para C . Como a permutação de

linhas e colunas não muda a torção, temos

$$\begin{aligned}\tau(C) &= \tau(\langle d + \delta \rangle) = \tau(\langle (d' \oplus d'') + (\delta' \oplus \delta'') \rangle) \\ &= \tau \begin{pmatrix} \langle d' + \delta' \rangle & 0 \\ 0 & \langle d'' + \delta'' \rangle \end{pmatrix} \\ &= \tau(C') + \tau(C'')\end{aligned}$$

P3: Suponha $C : 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \rightarrow 0$. Ponha $\delta_j = 0$ se $j \neq n$ e $\delta_n = d_n^{-1} : C_{n-1} \rightarrow C_n$. Se n é ímpar $\delta|_{C_{\text{ímpar}}} = 0$ e assim $\tau(C) = \tau(\langle d + \delta \rangle) = \tau(\langle d \rangle) = (-1)^{n-1} \tau(\langle d \rangle)$. Se n é par, $\delta|_{C_{\text{ímpar}}} = 1_{C_{\text{ímpar}}}$ e $d|_{C_{\text{ímpar}}} = 0$ então $\tau(\langle d + \delta \rangle) = \tau(\langle \delta \rangle) = \tau(\langle d_n^{-1} \rangle) = (-1) \tau(\langle d_n \rangle) = -\tau(d) = (-1)^{n-1} \tau(d)$. ■

A propriedade **P2**, como afirmada, é muito restrita para situações práticas onde o caso mais geral da seqüência exata curta usualmente ocorre. Provaremos um caso mais geral, que chamaremos de **P2'**.

Proposição 3.7.2. *Suponha que $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0$ é uma seqüência exata curta de complexo de cadeia acíclicos e que $\sigma : C'' \rightarrow C$ é uma seção de grau-zero (mas não necessariamente uma aplicação cadeia). Assuma ainda que C, C' e C'' são (R, G) -complexos com bases distinguidas c, c' e c'' . Então*

$$\tau(C) = \tau(C') + \tau(C'') + \sum (-1)^k \tau \left(\left\langle \frac{c'_k c''_k}{c_k} \right\rangle \right)$$

onde $c'_k c''_k = i(c'_k) \cup \sigma(c''_k)$. Em particular se $i(c'_k) \cup \sigma(c''_k)$ é uma base distinguida de C_k para todo k então $\tau(C) = \tau(C') + \tau(C'')$.

Demonstração: Pela proposição 3.5.3, existe uma seção $s : C'' \rightarrow C$ tal que $i + s : C' \oplus C'' \rightarrow C$ é um isomorfismo. As bases $j_k = i(c'_k) \cup s(c''_k)$ de C_k geram em C um novo (R, G) -complexo C^γ . Temos então $i + s : C' \oplus C'' \cong_\Sigma C^\gamma$. Assim usando **P1** e **P2**, $\tau(C^\gamma) = \tau(C') + \tau(C'')$. Seja δ uma contração de cadeia de C . Então

$$\begin{aligned}\tau(C) &= \tau(\langle d + \delta \rangle_c) \\ &= \tau(\langle d + \delta \rangle_\gamma) + \sum_k (-1)^k \tau(\langle \gamma_k / c_k \rangle) \text{ pela proposição 3.6.8} \\ &= \tau(C^\gamma) + \sum_k (-1)^k \tau(\langle \gamma_k / c_k \rangle) \\ &= \tau(C') + \tau(C'') + \sum_k (-1)^k \tau(\langle \gamma_k / c_k \rangle).\end{aligned}$$

Finalmente, $\tau(\langle c'_k c''_k / c_k \rangle) = \tau(\langle \gamma_k / c_k \rangle)$, pois, as seqüências exatas curtas podem ser vistas como (R, G) -módulos $0 \rightarrow C'_k \rightarrow C_k \rightarrow C''_k \rightarrow 0$ e então como um (R, G) -complexo acíclico, e assim segue pelo lema 3.5.4b. ■

Teorema 3.7.3. *Se $\mathfrak{C}$ é a classe de (R, G) - complexos acíclicos então a aplicação torção $\tau : \mathfrak{C} \longrightarrow K_G(R)$ é a única função satisfazendo **P1** até **P3** do teorema 3.7.1.*

Demonstração: Pelo teorema 3.7.1, τ satisfaz essas propriedades. Suponha que exista $\mu : \mathfrak{C} \longrightarrow K_G(R)$ também satisfaz. Dado $C \in \mathfrak{C}$, usando o teorema 3.5.2, existe δ uma contração de cadeia tal que $\delta^2 = 0$, e assim pela proposição 3.6.5, existe C' tal que $C' \stackrel{s}{\sim} C$ onde C' é da forma $0 \longrightarrow C'_m \xrightarrow{d'} C'_{m-1} \longrightarrow 0$. Então $C \oplus T \cong_{\Sigma} C' \oplus T'$ para algum complexo trivial T, T' . As propriedades **P1** - **P3** implicam que $\tau(C) = \tau(C) + \tau(T) = \tau(C') + \tau(T') = \tau(C')$. Da mesma maneira $\mu(C) = \mu(C')$. Mas por **P3**, $\tau(C') = (-1)^{m-1} \tau(d') = \mu(C')$. Então $\tau(C) = \mu(C)$. ■

3.8 Mudando os anéis

Como usual (R, G) e (R', G') cada um denota um anel e um subgrupo das unidades de G que contém o (-1) .

Se C é um (R, G) - complexo e $h : R \longrightarrow R'$ é um homomorfismo de anéis com $h(G) \subset G'$ então podemos construir um (R', G') - complexo C_h como segue: Escolha uma base distinguida $c = \{c'_k\}$ para C , seja C_h o R' - módulo livre graduado gerado por c . Denotaremos $c = \hat{c}$ quando c é ainda um subconjunto de C_h . Defina $\hat{d} : C_h \longrightarrow C_h$ por $\hat{d}(\hat{c}_k^i) = \sum_j h(a_{kj}) \hat{c}_j^{i-1}$ se $d(\hat{c}_k^i) = \sum_j a_{kj} \hat{c}_j^{i-1}$. Estipulamos que $\hat{c}$ é uma base distinguida de C_h , então torna C_h um (R', G') - complexo (que C_h é independente, por isomorfismo simples, da escolha de c segue do fato que a aplicação induzida $h_* : GL(R) \longrightarrow GL(R')$ leva matrizes de torção zero em matrizes de torção zero. Mais detalhes de como isso é feito mais consistente, é indicado no final dessa seção, quando redefiniremos C_h como $R' \otimes_h C$).

Essa mudança de anéis é muito útil por vários motivos. Uma razão é que C_h pode ser acíclico mesmo C não sendo. Então temos um invariante algébrico para C - chamado $\tau_h(C)$ - definido por

$$\tau_h(C) = \tau(C_h) \in K_{G'}(R')$$

O exemplo a seguir desse fenômeno ocorre no estudo dos espaços de lenticulares.

Proposição 3.8.1. *Suponha que:*

$$\mathbb{Z}_p = \{1, t, \dots, t^{p-1}\},$$

$$R = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_p)$$

$$R' = \mathbb{C} \text{ (o corpo dos números complexos)}$$

$$\xi \text{ é uma } p\text{-ésima raiz da unidade; } \xi \neq 1$$

$$G' = \{\pm \xi^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

$$(r_1, \dots, r_n) = \text{uma sequência de números primos relativos } p.$$

$$\sum(t) = 1 + t + \dots + t^{p-1} \in R$$

$$h : R \longrightarrow R'; \quad h\left(\sum_j n_j t^j\right) = \sum_j n_j \xi^j.$$

Suponha que C é o (R, G) - complexos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_{2n-1} \xrightarrow{\langle t^{r_n}-1 \rangle} C_{2n-2} \xrightarrow{\langle \sum(t) \rangle} C_{2n-3} \xrightarrow{\langle t^{r_{n-1}}-1 \rangle} \\ C_{2n-4} \xrightarrow{\langle \sum(t) \rangle} \dots \xrightarrow{\langle t^{r_1}-1 \rangle} C_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

onde cada C_j ($0 \leq j \leq 2n-1$) tem posto 1 e a 1×1 matriz de d_j está escrita sobre a seta de $C_j \longrightarrow C_{j-1}$. Então C não é acíclico enquanto C_h é acíclico com $\tau(C_h) \in K_{G'}(\mathbb{C})$ igual a torção da matriz $\langle \Pi_{j=1}^n (\xi^{r_j} - 1) \rangle$.

Demonstração: C é um complexo de cadeia pois

$$\sum(t)(t^{r_j-1}) = \sum(t)(t-1)(1+t+\dots+t^{r_j-1}) = (t^p-1)(1+\dots+t^{r_j-1}) = 0.$$

C não é acíclico. Pois, se $\{c_i\}$ é uma base para C_i , $\sum(t)(c_{2n-1})$ não é bordo de ninguém, já que $c_{2n-1} \neq 0$ e ainda $\sum(t) \neq 0 \in R$ então $\sum(t)(c_{2n-1}) \neq 0$ e os bordos $(0 \longrightarrow c_{2n-1})$ são nulos. Porém é um ciclo já que $d(\sum(t)(c_{2n-1})) = (t^{r_n-1}) \sum(t)c_{2n-2} = 0$. No entanto C_h é acíclico. Pois, $(1 + \xi + \dots + \xi^{p-1}) = (\xi^p - 1)/(\xi - 1) = 0$ e conseqüentemente C_h é da forma

$$0 \longrightarrow C_{2n-1} \xrightarrow{\langle \xi^{r_n}-1 \rangle} C_{2n-2} \xrightarrow{0} C_{2n-3} \xrightarrow{\langle \xi^{r_{n-1}}-1 \rangle} C_{2n-4} \xrightarrow{0} \dots$$

Como r_j é primo com p , temos que $\xi^{r_j} \neq 1$. Então cada matriz $\langle \xi^{r_j} - 1 \rangle$ é não singular e C_h é acíclico. Mostremos que $\tau(C_h) = \tau(\Pi_{j=1}^n (\langle \xi^{r_j} - 1 \rangle))$.

Seja $\delta : C_h \longrightarrow C_h$, $\delta_i : C_{i-1} \longrightarrow C_i$ é dado por; se $i-1$ é par então $\delta_i = \langle \xi^{r_{i-1}}-1 \rangle^{-1}$, se $i-1$ é ímpar $\delta_i = 0$. Claramente δ é uma contração de cadeia e $\delta^2 = 0$. Assim usando a notação das seções anteriores $C_h \stackrel{s}{\sim} C'_h$ onde

$$C'_h : 0 \longrightarrow C'_{2n-1} \xrightarrow{\langle d+\delta \rangle} C'_{2n-2} \longrightarrow 0$$

e assim $\tau(C_h) = \tau(C'_h) = \tau(\langle d + \delta \rangle)$ e claramente vê-se que

$$\tau(\langle d + \delta \rangle) = \tau(\Pi_{i=1}^n \langle d_{2i-1} \rangle) = \tau(\langle \Pi_{j=1}^n (\xi^{r_j} - 1) \rangle).$$

■

As vezes, quando C é acíclico, $\tau(C)$ é muito difícil de calcular enquanto $\tau_h(C)$ é muito fácil. Quando tal homomorfismo h pode ser encontrado é feita a mudança de anel como anteriormente, já que:

Proposição 3.8.2. *Se C é um (R, G) - complexo acíclico e $h : (R, G) \longrightarrow (R', G')$ é um homomorfismo de anel então C_h é acíclico e $\tau_h(C) = h_*(\tau(C))$ onde $h_* : K_G(R) \longrightarrow K_{G'}(R')$ é a aplicação induzida.*

Demonstração: Escolha uma contração de cadeia δ de C e suponha que $\delta(c_i^k) = \sum_j (b_{kj}) c_j^{i+1}$. Defina $\hat{\delta} : C_h \longrightarrow C_h$ por $\hat{\delta}(c_i^k) = \sum_j h(b_{kj}) \hat{c}_j^{i+1}$. Como $h(G) \subset G'$ temos $h(1) = 1$ tal que $\langle \hat{d}\hat{\delta} + \hat{\delta}\hat{d} \rangle = h_*(\langle d\delta + \delta d \rangle) = h_*(I) = I$, e $h_*(\langle d + \delta \rangle) = \langle \hat{d} + \hat{\delta} \rangle$. Então $\hat{\delta}$ é uma contração de cadeia e $\tau_h(C) = \tau(C_h) = h_*\tau(C)$. Se C é acíclico claramente C_h é acíclico.

■

Como uma aplicação temos que:

Teorema 3.8.3. *Suponha que C é um acíclico $Wh(G)$ - complexo com operador bordo d . Se existe uma base distinguida c de C com respeito ao qual $\langle d \rangle$ possui apenas entradas integrais, (isto é, $\langle d \rangle = (a_{ij})$ onde $a_{ij} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}(G)$) então $\tau(C) = 0$.*

Demonstração: Seja $C' \subset C$ um $\mathbb{Z}$ - módulo gerado por c . Seja $d' = d|_{C'}$. Como d só possui entradas em $\mathbb{Z}$, $d' : C' \longrightarrow C'$, tal que C' torna-se um complexo de cadeia e nesse sentido um $(\mathbb{Z}, \{-1, 1\})$ -complexo se especificarmos c como uma base distinguida. Seja $h : (\mathbb{Z}, \{\pm 1\}) \longrightarrow (\mathbb{Z}(G), G \cup -G)$ a inclusão. Podemos assim identificar $C \equiv C'_h$.

Afirmamos que C'_h é acíclico. De fato, suponha que $d'(x) = 0$ onde $x \in C'_j$. Então $x = d(y)$ para $y \in C_{i+1}$ já que C é acíclico. Suponha que $x = \sum_k n_k c_k^i$ e $y = \sum_j r_j c_j^{i+1}$ ($n_k \in \mathbb{Z}$, $r_j \in \mathbb{Z}(G)$). Temos

$$d(y) = \sum_j r_j \sum_k a_{kj} c_k^i \quad ; (a_{kj} \in \mathbb{Z})$$

e assim, $n_k = \sum_j r_j a_{jk}$. Seja $A : \mathbb{Z}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo de anéis dado por $A(\sum_j m_j g_j) = \sum_j m_j$ e seja $y' = \sum_j A(r_j) c_j^{i+1} \in C'_{i+1}$. Então

$$\begin{aligned}
d'(y') &= \sum_{j,k} A(r_j) a_{j,k} c_k^i \\
&= \sum_{j,k} A(r_j a_{jk}) c_k^i \\
&= \sum_k A\left(\sum_j r_j a_{jk}\right) c_k^i \\
&= \sum_k A(n_k) c_k^i \\
&= \sum_k n_k c_k^i = x
\end{aligned}$$

Então todo ciclo é um bordo e C' é acíclico pela proposição anterior, $\tau(C) = \tau(C'_h) = h_*(\tau(C'))$, mas $\tau(C') \in Wh(\{1\}) = 0$. Assim $\tau(C) = 0$. ■

Daremos agora apenas uma pequena idéia de como é feito a mudança de anéis de uma maneira mais rigorosa. Apresentaremos apenas os fatos. Uma boa referência é [20].

- 1 - R' torna-se um R - módulo a direita se definirmos $r'.r = r'h(r)$, $\forall r \in R, r' \in R'$.
- 2 - $R' \otimes_R C$ então torna-se um grupo abeliano bem definido tal que $r' \otimes rx = r'h(r) \otimes x$, $\forall (r, r', x) \in R' \times R \times C$. Denotaremos $R' \otimes_R C = R' \otimes_h C$.
- 3 - $R' \otimes_h C$ torna-se um R' - módulo a esquerda se definirmos $\rho(r' \otimes x) = pr' \otimes x$, $\forall (\rho, r', x) \in R' \times R' \times C$.
- 4 - Se $f : C \longrightarrow D$ é um homomorfismo na categoria de R - módulos então $1 \otimes f : R' \otimes_h C \longrightarrow R' \otimes D$ é um homomorfismo na categoria de R' - módulos.
- 5 - $(R' \otimes_h C, 1 \otimes d)$ é um complexo de cadeia sobre R' .
- 6 - Se $c = \{c_k^i\}$ é uma base de C então $\bar{c} = \{1 \otimes c_k^i\}$ é uma base de $R' \otimes_h C$. Se b é outra base de C dando uma base similar $\bar{b}$ de $R' \otimes_h C$ então $\langle \bar{c}/\bar{b} \rangle = h_*(\langle c/b \rangle)$. Se (a_{kj}) é a matriz de d_i com respeito a c então $(h(a_{kj}))$ é a matriz de $1 \otimes d_i$ com respeito a $\bar{c}$.
- 7 - Existe um isomorfismo simples de (R', G') - complexos, $R' \otimes_h C \cong C_h$ que leva os elementos base $1 \otimes c_k^i$ sobre os elementos da base de $\tilde{c}_k^i$.
- 8 - Se $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de (R, G) - complexos que cinde com bases distinguidas c, c', c'' tal que $c = \alpha(c') \cup b$ onde $\beta(b) = c''$ então

$$0 \longrightarrow C'_h = R' \otimes_h C' \xrightarrow{1 \otimes \alpha} C_h = R' \otimes_h C \xrightarrow{1 \otimes \beta} C''_h = R' \otimes_h C'' \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata de (R', G') - complexos na qual possuem bases distinguidas com propriedade análoga.

Torção de Whitehead na categoria CW

Nesse capítulo, todo complexo CW mencionado, exceto os que aparecerem como espaço de recobrimento, serão assumidos finitos.

4.1 A torção de um par CW

Usando as propriedades geométrica do segundo capítulo e as propriedades algébricas do terceiro capítulo definimos:

Definição 4.1.1. *Se (K, L) é um par de complexos CW finito e conexo tal que L é um retrato por deformação forte de K então a torção de (K, L) - denotado $\tau(K, L)$ - é definida por*

$$\tau(K, L) = \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) \in Wh(\pi_1(L))$$

onde $(\tilde{K}, \tilde{L})$ é o recobrimento universal de (K, L) .

Mostraremos que $\tau(K, L)$ está bem definida e estende a definição para o caso não conexo.

Suponha que (K, L) é um par CW conexo e que L é um retrato por deformação forte de K . Sejam $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ um recobrimento universal e $G = \text{Cov}(\tilde{K})$, o grupo de homeomorfismos de recobrimento. Então $p^{-1}(L) = \tilde{L}$ é um recobrimento universal de L e $\tilde{L}$ é um retrato de deformação forte de $\tilde{K}$, pelo teorema 1.4.10. O complexo de cadeia celular $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é um $\mathbb{Z}(G)$ - complexo. Se escolhermos, para cada célula $e_\alpha \in K - L$, uma aplicação característica φ_α e um levantamento específico $\tilde{\varphi}_\alpha$ de φ_α então pela proposição 1.4.13, $B = \{\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle \mid e_\alpha \in K - L\}$, é uma base para $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ como $\mathbb{Z}(G)$ -complexo. Seja $\mathfrak{B}$ o conjunto de todas as bases construídas dessa maneira então temos:

Teorema 4.1.2. *O complexo $C(\tilde{K}, \tilde{L})$, com a família de bases $\mathfrak{B}$, determina um $Wh(G)$ - complexo acíclico.*

Demonstração: $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é acíclico pois $\tilde{L}$ é um retrato por deformação forte de $\tilde{K}$, e assim pelo teorema 1.3.3, $H(C(\tilde{K}, \tilde{L})) \cong H(|\tilde{K}|, |\tilde{L}|) = 0$. Considere agora que $c, c' \in \mathfrak{B}$, restrita as bases $c_n = \{\langle \tilde{\varphi}_1 \rangle, \dots, \langle \tilde{\varphi}_q \rangle\}$ e $c'_n = \{\langle \tilde{\psi}_1 \rangle, \dots, \langle \tilde{\psi}_n \rangle\}$ de $C_n(\tilde{K}, \tilde{L})$. Então

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_j \rangle &= \sum_k a_{jk} \langle \tilde{\varphi}_k \rangle \text{ para algum } a_{jk} = \sum_i n_i^{j,k} g_i \in \mathbb{Z}(G) \\ &= \sum_{i,k} n_i^{j,k} \langle g_i \tilde{\varphi}_k \rangle. \end{aligned}$$

Mas a célula $\tilde{\psi}_j(I^n)$, como um levantamento de e_j , é igual a uma célula $g_{i_j} \tilde{\varphi}_j(I^n)$ e disjunta das outras. Então pelo lema 1.3.2 item c, os coeficientes da ultima soma são zero exceto para $N = n_{i_j}^{j,j}$, dessa maneira $\langle \tilde{\psi}_j \rangle = N \langle g_{i_j} \tilde{\varphi}_j \rangle$. Mas então $\tilde{\psi}_j(I^n) = g_{i_j}^{-1} \tilde{\varphi}_j(I^n)$, e da mesma maneira $\langle \tilde{\varphi}_j \rangle = N' \langle g_{i_j}^{-1} \tilde{\psi}_j \rangle$. Assim $\langle \tilde{\psi}_j \rangle = N \langle g_{i_j} \tilde{\varphi}_j \rangle = NN' \langle g_{i_j} g_{i_j}^{-1} \tilde{\psi}_j \rangle = NN' \langle \tilde{\psi}_j \rangle$ e então $N = \pm 1$ (pois $NN' = 1$) e $\langle \tilde{\psi}_j \rangle = \pm g_{i_j} \langle \tilde{\varphi}_j \rangle$. Então

$$\langle c_n / c'_n \rangle = \begin{pmatrix} \pm g_{i_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm g_{i_q} \end{pmatrix}$$

e $\tau(\langle c_n / c'_n \rangle) = 0 \in Wh(G)$. Então $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ torna-se um $Wh(G)$ - complexo se estabelecermos que b é uma base distinguida se, e somente se, $\tau(\langle c/b \rangle) = 0$, para qualquer $c \in \mathfrak{B}$. ■

Lembremos de 3.2, que existe um funtor covariante, que leva todo grupo no grupo de Whitehead do grupo e todo homomorfismo $G \longrightarrow G'$ a um homomorfismo induzido $Wh(G) \longrightarrow Wh(G')$. Em particular consideraremos isomorfismos induzidos, nos grupos de Whitehead, correspondentes aos isomorfismos de mudanças de pontos base, $\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$.

Proposição 4.1.3. *Se X é um espaço conexo por caminhos contendo os pontos x e y então todos os caminhos de x em y induzem o mesmo isomorfismo $f_{x,y}$ de $Wh(\pi_1(X, x))$ em $Wh(\pi_1(X, y))$. Mais ainda $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.*

Demonstração: Seja α um caminho que liga os pontos x e y , seja $f_\alpha : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$ o isomorfismo usual dado por $f_\alpha(w) = [\bar{\alpha} * w * \alpha]$, onde $\bar{\alpha}$ é o caminho inverso de α . Então se α, β são dois caminhos

$$f_\beta^{-1} f_\alpha = [\beta * \bar{\alpha}] * [w] * [\alpha * \bar{\beta}] = [\beta * \bar{\alpha}] * [w] * [\bar{\beta} * \bar{\alpha}]$$

E assim pelo lema 3.2.6 é um automorfismo interno, ou seja,

$$(f_\beta)_*^{-1} (f_\alpha)_* = (f_\beta^{-1} f_\alpha)_* = 1.$$

Então $(f_\beta)_* = (f_\alpha)_*$, para qualquer α e β , colocamos então $f_{x,y} = (f_\alpha)_*$. É claro que $f_{y,z} \circ f_{x,y} = f_{x,z}$.

■

Como vimos na seção 1.4 existe um isomorfismo entre $\pi_1(K, x)$ e G , que é feito com pontos base $x \in K$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, e assim $\theta = \theta(x, \tilde{x}) : \pi_1(K, x) \longrightarrow G$, é o isomorfismo, denotaremos $\theta([\alpha]) = \theta_{[\alpha]}$ para todo $[\alpha] \in \pi_1(K, x)$. Assim $\theta_{[\alpha]}(y) = \alpha * \widetilde{pw}(1)$ onde $y \in \tilde{K}$, w é um caminho de $\tilde{x}$ em y , e $\alpha * \widetilde{pw}(0) = \tilde{x}$. Se identificarmos $\pi_1(K, x)$ com G por θ então pelo teorema 4.1.2, $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ é um $Wh(\pi_1(K, x))$ -complexo e podemos definir $\tau(K, L) \in Wh(\pi_1(K, x))$.

Para fazer a última sentença mais precisa o isomorfismo de $\psi = \theta^{-1} : G \longrightarrow \pi_1(K, x)$ induz um isomorfismo de anéis, que chamaremos também de $\psi, \psi : \mathbb{Z}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}(\pi_1(K, x))$, e queremos fazer a troca de anéis como na seção 3.8 para construir $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ o $Wh(\pi_1(K, x))$ -complexo $C(\tilde{K}, \tilde{L})_\psi$. Que $\tau(K, L)$ é independente de todas as escolhas segue de:

Teorema 4.1.4. *Seja $\tilde{p} : \tilde{K} \longrightarrow K$ e $\hat{p} : \hat{K} \longrightarrow K$ recobrimentos universais do complexo conexo K , com $\tilde{G}$ e $\hat{G}$ como grupo de homeomorfismo de recobrimento, respectivamente. Seja $x, y \in K$, $\tilde{x} \in \tilde{p}^{-1}(x)$ e $\hat{y} \in \hat{p}^{-1}(y)$. Seja $\tilde{\psi} : \tilde{G} \longrightarrow \pi_1(K, x)$ e $\hat{\psi} : \hat{G} \longrightarrow \pi_1(K, y)$ os isomorfismos de grupos determinados por $(x, \tilde{x})$ e $(y, \hat{y})$. Então $\tau(C(\hat{K}, \hat{L})_{\hat{\psi}}) = f_{x,y}(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})_{\tilde{\psi}}))$.*

Demonstração: Seja $h : \tilde{K} \longrightarrow \hat{K}$ um homeomorfismo que cobre a identidade em K e seja $H : \tilde{G} \longrightarrow \hat{G}$ dada por $H(g) = hgh^{-1}$. Afirmamos que $\tau(C(\hat{K}, \hat{L})) = H_*(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})))$, onde $H_* : Wh(\tilde{G}) \longrightarrow Wh(\hat{G})$ é a aplicação induzida. Para isso seja $\{\langle \tilde{\varphi}_k^i \rangle\}$ base para $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ como no teorema 4.1.2 e seja $\hat{\varphi}_k^i = h \circ \tilde{\varphi}_k^i$, para todo i e k . Então pelo teorema 4.1.2 as torsões de $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ e $C(\hat{K}, \hat{L})$ pode ser computadas usando essas bases. Mas como h induz um isomorfismo de cadeia $C(\tilde{K}, \tilde{L}) \longrightarrow C(\hat{K}, \hat{L})$ quando esses são vistos como complexos sobre $\mathbb{Z}$, e se $(a_{jl}) \in GL(\mathbb{Z}(\tilde{G}))$ é a matriz do operador bordo $\tilde{d}_i$ então a matriz correspondente, de

$\widehat{d}_i$, é $H(a_{jl})$ onde $H : \mathbb{Z}(\widetilde{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}(\widehat{G})$ é induzida de $H : \widetilde{G} \longrightarrow \widehat{G}$, já que

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\widehat{\varphi}_k^i) &= \widehat{d}(h(\widetilde{\varphi}_k^i)) = h(\widetilde{d}(\widetilde{\varphi}_k^i)) = \sum_j h(a_{kj} \langle \widetilde{\varphi}_j^{i-1} \rangle) \\ &= \sum_{j,l} n_j^{k,l} h(\langle g_l \widetilde{\varphi}_j^{i-1} \rangle) \\ &= \sum_{j,l} n_j^{k,l} h g_l h^{-1}(\langle h \widetilde{\varphi}_j^{i-1} \rangle) \\ &= \sum_{j,l} n_j^{k,l} H(g_l)(\langle \widehat{\varphi}_j^{i-1} \rangle) \\ &= \sum_j H(a_{kj}) \langle \widehat{\varphi}_j^{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

Então da prova da proposição 3.8.2 $\tau(C(\widehat{K}, \widehat{L})) = H_*(\tau(C(\widetilde{K}, \widetilde{L})))$.

Agora seja $\widehat{x} = h(\widetilde{x})$ e escolha um caminho $\Omega : (I, 0, 1) \longrightarrow (\widehat{K}, \widehat{x}, \widehat{y})$. Seja $w = \widehat{p}(\Omega)$ e $f_w : \pi_1(K, x) \longrightarrow \pi_1(K, y)$ dada por $f_w([\alpha]) = [\overline{w} * \alpha * w]$. Denotando $\widetilde{\theta} = \theta(x, \widetilde{x}) = \widetilde{\psi}^{-1}$ e $\widehat{\theta} = \theta(y, \widehat{y}) = \widehat{\psi}^{-1}$, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K, x) & \xrightarrow{f_w} & \pi_1(K, y) \\ \widetilde{\theta} \downarrow & & \downarrow \widehat{\theta} \\ \widetilde{G} & \xrightarrow{H} & \widehat{G} \end{array}$$

já que se $[\alpha] \in \pi_1(K, x)$ temos

$$\begin{aligned} (\widehat{\theta} f_w([\alpha]))(\widehat{y}) &= (\widehat{\theta}([\overline{w} * \alpha * w]))(\widehat{y}) \\ &= \widehat{\theta}_{[\overline{w} * \alpha * w]}(\widehat{y}) \\ &= \widehat{\theta}_{\widehat{\overline{w} * \alpha * w}(1)} \text{ já que } \widehat{y} \text{ é o ponto inicial de } \overline{w} * \alpha * w \\ &= \widehat{\theta}_{\widehat{\alpha * w}(1)} \text{ onde } \widehat{\alpha * w}(0) = \widehat{\Omega}(1) = \widehat{x} \\ &= h(\widehat{\alpha * w}(1)) \text{ pois } h(\widehat{\alpha * w}(0)) = \widehat{x} \\ &= h(\widehat{\alpha * \widetilde{p} h^{-1} \Omega}(1)) \text{ pois } w = \widehat{p} \Omega = \widetilde{p} h^{-1} \Omega \\ &= h(\widetilde{\theta}_{[\alpha]}(h^{-1} \Omega(1))) \\ &= (h \widetilde{\theta}_{[\alpha]} h^{-1})(\widehat{y}) \\ &= H(\widetilde{\theta}_{[\alpha]})(\widehat{y}). \end{aligned}$$

Já que $\widehat{\theta} f_w[\alpha]$ e $H \widetilde{\theta}[\alpha]$ são iguais em um ponto são iguais em todos os pontos. Como $[\alpha]$ é qualquer, $\widehat{\theta} f_w = H \widetilde{\theta}$.

Dessa maneira temos

$$\begin{aligned}
 f_{x,y}(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})_{\tilde{\psi}})) &= (f_w)_* \tilde{\psi}_*(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L}))) \\
 &= \hat{\psi}_* H_*(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L}))) \\
 &= \hat{\psi}_*(\tau(C(\hat{K}, \hat{L}))) \\
 &= \tau(C(\hat{K}, \hat{L})_{\hat{\psi}})
 \end{aligned}$$

■

Estamos interessados em $\tau(K, L)$ definido como um único elemento de um único grupo. Então definimos:

Definição 4.1.5. Usando a proposição 4.1.3 definimos

$$Wh(\pi_1(K)) = \left[\bigcup_{x \in K} Wh(\pi_1(K, x)) \right] / \sim$$

onde $a \sim b$ se $a \in Wh(\pi_1(K, x))$, $b \in Wh(\pi_1(K, y))$ e $f_{x,y}(a) = b$.

Seja $j_x : Wh(\pi_1(K, x)) \longrightarrow Wh(\pi_1(K))$ a inclusão que na verdade, como K é conexo, é uma bijeção. Estabelecendo que j_x é um isomorfismo de grupos dando a $Wh(\pi_1(K))$ uma estrutura de grupo que é independente de x . Note que $j_y^{-1} j_x = f_{x,y}$. Se $f : (K, x) \longrightarrow (K', x')$ então o homomorfismo induzido no grupo fundamental nos dá uma composta de homomorfismo, que é definido como o homomorfismo entre os grupos de Whitehead de $\pi_1(K)$ e $\pi_1(K')$ que é dado por

$$f_* : Wh(\pi_1(K)) \xrightarrow{j_x^{-1}} Wh(\pi_1(K, x)) \xrightarrow{f_{\#}} Wh(\pi_1(K', x')) \xrightarrow{j_{x'}} Wh(\pi_1(K'))$$

Teorema 4.1.6. O homomorfismo induzido f_* é independente do par (x, x') com $f(x) = x'$ escolhido. Então existe um funtor covariante da categoria dos complexos CW conexos finitos e aplicações na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos definido por

$$K \mapsto Wh(\pi_1(K))$$

$$\{f : K \longrightarrow K'\} \mapsto \{f_* : Wh(\pi_1(K)) \longrightarrow Wh(\pi_1(K'))\}.$$

Mais ainda se $f \simeq g$ então $f_* = g_*$.

Demonstração: Seja (y, y') um outro par então consideramos os isomorfismos $f_{x,y}$ e $f_{x',y'}$, então temos o diagrama abaixo que é comutativo, e mostra a independência dos pares escolhidos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 Wh(\pi_1(K)) & \xrightarrow{j_x^{-1}} & Wh(\pi_1(K, x)) & \xrightarrow{f_{\#}} & Wh(\pi_1(K', x')) & \xrightarrow{j_{x'}} & Wh(\pi_1(K')) \\
 \downarrow 1 & & \downarrow f_{x,y} & & \downarrow f_{x',y'} & & \downarrow 1 \\
 Wh(\pi_1(K)) & \xrightarrow{j_y^{-1}} & Wh(\pi_1(K, y)) & \xrightarrow{f_{\#}} & Wh(\pi_1(K', y')) & \xrightarrow{j_{y'}} & Wh(\pi_1(K'))
 \end{array}$$

Claramente f_* é um homomorfismo, já que é uma composta de homomorfismos e se $(K, k) \xrightarrow{f} (L, l) \xrightarrow{g} (X, x)$ então

$$f_* \circ g_* = j_k^{-1} f_{\#} j_l j_l^{-1} g_{\#} j_x = j_k^{-1} (f \circ g)_{\#} j_x = (f \circ g)_*.$$

E ainda $(1_K)_* = (1)_{Wh(\pi_1(K))}$.

Agora se $f \simeq g$ então $f_{\#} = g_{\#}$ logo $f_* = g_*$. ■

E dessa maneira $\tau(K, L) \in Wh(\pi_1(L))$ é definido (no caso conexo) como segue

Definição 4.1.7. Escolha um ponto $x \in K$, um espaço de recobrimento universal $p : (\tilde{K}, \tilde{L}) \longrightarrow (K, L)$ e um ponto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Seja $i : L \longrightarrow K$ a inclusão. Então $\tau(K, L)$ é final da seqüência:

$$\begin{array}{c} \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) \in Wh(G) \\ \downarrow \psi(x, \tilde{x})_* \\ \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) \in Wh(\pi_1(K, x)) \\ \downarrow j_x \\ \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) \in Wh(\pi_1(K)) \\ \downarrow i_*^{-1} \\ \tau(K, L) \in Wh(\pi_1(L)) \end{array}$$

A boa definição segue dos teoremas 4.1.2 ao 4.1.6 e da proposição 4.1.3.

Para o caso desconexo temos:

Definição 4.1.8. Assuma que K e L são complexos finitos e que L é um retrato por deformação forte de K . Seja $K_1, \dots, K_q$ e $L_1, \dots, L_q$ as componentes de K e L respectivamente, ordenada tal que L_j é um retrato de deformação forte de K_j para todo j . Definimos:

$$\tau(K, L) = \sum_j \tau(K_j, L_j) \in \oplus Wh(\pi_1(L_j))$$

Desse modo o teorema 4.1.6 pode ser generalizado para:

Teorema 4.1.9. Existe um funtor covariante da categoria dos complexos CW e aplicações na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos definidos por

$$K \mapsto \oplus_{j=1}^q Wh(\pi_1 K_j)$$

$$\{f : K \longrightarrow K'\} \mapsto \{f_* = \sum_{i=1}^q (f_i)_* : \oplus_{j=1}^q Wh(\pi_1(K_j)) \longrightarrow \oplus_{i=1}^r Wh(\pi_1(K'_i))\}$$

onde $K_1, \dots, K_q$ e $K'_1, \dots, K'_r$ são as componentes de K e K' respectivamente, e $(f_j)_* : Wh(\pi_1(K_j)) \longrightarrow Wh(\pi_1(K'_{i_j}))$ é induzido por f com $f(K_j) \subset K'_{i_j}$. Mas ainda se $f \simeq g$ então $f_* = g_*$.

4.2 Propriedades da torção de um par CW

Teorema 4.2.1. *Se (K, L) é um par CW tal que L é um retrato de deformação forte de K e se cada componente de $K - L$ é simplesmente conexa então $\tau(K, L) = 0$.*

Demonstração: É suficiente provar quando K é conexo. Seja c uma componente de $K - L$. Então c é fechado em $K - L$, assim $\bar{c} \subset L \cup c$ e então $L \cup c$ é fechado. Se e é uma célula de K que intercepta c então e não pode estar em L , já que L é um subcomplexo, então $e \cap L = \emptyset$. Assim se $e \subset K - L$ e conseqüentemente $e \subset c$. Com isso temos que $L \cup c$ é um subcomplexo de K e $c = (K \cup L) - L$ é uma união de células.

Agora seja $p : \tilde{K} \rightarrow K$ um recobrimento universal com G o grupo dos homeomorfismos de recobrimento. Como c é simplesmente conexo, c levanta homeomorficamente em $\tilde{K}$. Seja C o levantamento de c , assim $p|_C : C \rightarrow c$ é um homeomorfismo. Seja $\{gC \mid 1 \neq g \in G\}$ os outros levantamentos. Esses levantamentos são disjuntos dois a dois já que c é conexo. De fato, vamos supor por absurdo que $g_i(C) \cap g_j(C) \neq \emptyset$ com $i \neq j$, seja $f : c \rightarrow \tilde{K}$ o levantamento da inclusão de c em K e seja $a \in g_i(C) \cap g_j(C)$. Então existem $z, y \in c$ tal que $g_i(f(z)) = a = g_j(f(y))$ e então $p(g_i(f(z))) = p(g_j(f(y))) \Rightarrow p((f(z))) = p((f(y))) \Rightarrow z = y$, dessa maneira como C conexo o conjunto $\{x \in C \mid g_i(x) = g_j(x)\}$ é vazio pois G age livremente e transitivamente nas fibras (como na proposição 1.4.13), onde $g_i, g_j, \neq 1_{\tilde{K}}$. Para cada p -célula e_α de c , seja $\tilde{\varphi}_\alpha$ o levantamento da aplicação característica de maneira que $\tilde{\varphi}_\alpha(\overset{\circ}{I}^p) \subset C$. Fazendo isso para todas as componentes de c de $K - L$, e todas as células e_α , temos uma base distinguida $\{\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle\}$ para $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ (que estamos pensando como um $Wh(G)$ -complexo).

Para um n -célula e_α fixa da componente c de $K - L$

$$\partial(\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle) \in H_{n-1}(\tilde{K}^{n-1} \cup \tilde{L}, \tilde{K}^{n-2} \cup \tilde{L})$$

é representado por um ciclo singular levado por $\tilde{\varphi}_\alpha(\partial I^n)$. No entanto $\tilde{\varphi}_\alpha(\overset{\circ}{I}^n) \subset C$ e $\varphi_\alpha(I^n) \subset L \cup c$ assim $\tilde{\varphi}_\alpha(\partial I^n) \subset \tilde{L} \cup C$. Então qualquer $n - 1$ -célula de $\tilde{K} - \tilde{L}$ que intercepta $\tilde{\varphi}_\alpha(\partial I^n)$ tem que estar em C . Segue do lema 1.3.2 que na expressão

$$\partial(\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle) = \sum_{\beta, j} n_{\alpha\beta, j} g_j \langle \tilde{\varphi}_\beta \rangle = \sum_{\beta, j} n_{\alpha\beta, j} \langle g_j \tilde{\varphi}_\beta \rangle$$

($n_{\alpha\beta, j} \in \mathbb{Z}, g_j \in G$) $n_{\alpha\beta, j} = 0$ a não ser que $g_j \tilde{\varphi}_\beta(n - 1) \subset C$. Mas da escolha da base distinguida isso acontece somente quando $g_j = 1_{\tilde{K}}$. Então

$$\partial(\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle) = \sum_{\beta} n_{\alpha\beta} \langle \tilde{\varphi}_\beta \rangle$$

e assim a matriz ∂ tem apenas entradas inteiras, pelo teorema 3.8.3 $\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) = 0 \in Wh(G)$. ■

Teorema 4.2.2. *Se $M < L < K$ onde L é um retrato de deformação forte de K e M é um retrato por deformação forte de L então*

$$\tau(K, M) = \tau(L, M) + i_*^{-1}(\tau(K, L))$$

onde $i : M \longrightarrow L$ é a inclusão.

Demonstração: Sem perda de generalidade vamos assumir K conexo. Seja $p : \tilde{K} \longrightarrow K$ o recobrimento universal. Seja $\tilde{L} = p^{-1}(L)$, G' e G os grupos de recobrimentos universais homeomorfos de $\tilde{L}$ e $\tilde{K}$ respectivamente. Se $j : L \xrightarrow{\subseteq} K$ então, pelo diagrama $(\star)$ do capítulo 1, temos que $j_{\#} : G' \longrightarrow G$ é um isomorfismo. Note que, usando o teorema 1.4.15 com $\tilde{j} : \tilde{L} \xrightarrow{\subseteq} \tilde{K}$, $j_{\#}(g') \in G$ é a única extensão de g' . Seja $J = j_{\#}$ e ainda seja J denotando a aplicação induzida $\mathbb{Z}(G') \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}(G)$.

Pelo teorema 4.1.2, $C(\tilde{K}, \tilde{M})$ e $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ são $Wh(G)$ -complexos e $C(\tilde{L}, \tilde{M})$ é um $Wh(G')$ -complexo. Mas $C(\tilde{L}, \tilde{M})$ pode ser visto como um $Wh(G)$ -complexo se, dado $g \in G$ e $x \in C(\tilde{L}, \tilde{M})$, definirmos $gx = g'(x)$ onde $J(g') = g$. Escolha uma base preferida $\{\langle \tilde{\varphi}_{\alpha} \rangle \mid e_{\alpha} \in K - M\}$ para $C(\tilde{K}, \tilde{M})$ como $\mathbb{Z}(G)$ -módulo e use o mesmo levantamento $\tilde{\varphi}_{\alpha}$ para as bases distinguidas $\{\langle \tilde{\varphi}_{\alpha} \rangle \mid e_{\alpha} \in K - L\}$ e $\{\langle \tilde{\varphi}_{\alpha} \rangle \mid e_{\alpha} \in L - M\}$ para os $\mathbb{Z}(G)$ -módulos $C(\tilde{K}, \tilde{L})$ e $C(\tilde{L}, \tilde{M})$. Então as inclusões induzem uma seqüência exata curta que cinde

$$0 \longrightarrow C(\tilde{L}, \tilde{M}) \xrightarrow{j} C(\tilde{K}, \tilde{M}) \xrightarrow{i} C(\tilde{K}, \tilde{L}) \longrightarrow 0.$$

Assim, pela proposição 3.7.2, $\tau(C(\tilde{K}, \tilde{M})) = \tau(C(\tilde{L}, \tilde{M})) + \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L}))$.

Agora pense em $C(\tilde{L}, \tilde{M})$ como um $Wh(G')$ -complexo e note que, por definição de $C(\tilde{L}, \tilde{M})_J$ existe uma base trivial preservando o isomorfismo de $C(\tilde{L}, \tilde{M})_J$ com o complexo $C(\tilde{L}, \tilde{M})$ “visto como $Wh(G)$ -complexo” discutido anteriormente. Então a torção do último complexo é igual a $\tau(C(\tilde{L}, \tilde{M})_J) = J_*(C(\tilde{L}, \tilde{M}))$. Assim $\tau(C(\tilde{K}, \tilde{M})) = \tau(C(\tilde{K}, \tilde{L})) + J_*(C(\tilde{L}, \tilde{M}))$. Para concluir considere o diagrama de isomorfismos, onde i, j, k são inclusões e θ_1, θ_2 as aplicações discutidas na seção anterior:

$$\begin{array}{ccc} Wh(G') & \xrightarrow{J_*} & Wh(G) \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \theta_2 \\ Wh(\pi_1(L)) & \xrightarrow{j_*} & Wh(\pi_1(K)) \\ & \nwarrow i_* \quad \nearrow k_* & \\ & Wh(\pi_1(M)) & \end{array}$$

Dessa maneira é só seguir o diagrama da definição 4.1.7 para obtermos o resultado. ■

Lema 4.2.3 (Lema da Excisão). *Se K, L e M são subcomplexos do complexo $K \cup L$, com $M = K \cap L$, e se M é um retrato por deformação forte de K então $\tau(K \cup L, L) = j_*(\tau(K, M))$ onde $j : M \longrightarrow L$ é a inclusão.*

Demonstração: É suficiente provar quando L é conexo (isso não significa que K e M são conexos). De fato, suponha que L e $K \cup L$ tem componentes $L_1, \dots, L_q$ e $P_1, \dots, P_q$ onde L_i é um retrato por deformação forte de P_i , para todo i . Seja $M_i = M \cap L_i$ e $K_i = K \cap P_i$ tendo componentes $M_{i_1}, \dots, M_{i_s}$ e $K_{i_1}, \dots, K_{i_s}$, respectivamente, onde M_{i_k} é um retrato por deformação forte de K_{i_k} . Então assumindo o Lema da Excisão para cada L_i , temos

$$\begin{aligned} \tau(K \cup L, L) &= \sum_i \tau(P_i, L_i) \\ &= \sum_i (j_i)_* (\tau(K_i, M_i)) \text{ onde } j_i : M_i \hookrightarrow L_i \\ &= \sum_i (j_i)_* \left(\sum_k \tau(K_{i_k}, M_{i_k}) \right) \\ &= \sum_{i,k} (j_i|_{M_{i_k}})_* (\tau(K_{i_k}, M_{i_k})) \\ &= j_* (\tau(K, M)) \end{aligned}$$

Assim assumiremos L (conseqüentemente $K \cup L$) conexo e que M e K possuem componentes $M_1, \dots, M_s$ e $K_1, \dots, K_s$ com M_i um retrato por deformação forte de K_i . A prova consiste de uma técnica de interpretar o fato que $(K \cup L) - L = \cup_i (K_i - M_i)$ onde $K_i - M_i$ são disjuntos.

Seja $p : \widetilde{K \cup L} \rightarrow K \cup L$ um recobrimento universal de $K \cup L$ e denote $\tilde{X} = p^{-1}(X)$ se $X \subset K \cup L$ (em geral $\widetilde{K_i}$ não é recobrimento universal de K_i). Seja G o grupo de homeomorfismos de recobrimento de $\widetilde{K \cup L}$. E ainda $C(\widetilde{K \cup L}, \tilde{L}) = \oplus_i C(\widetilde{K_i \cup L}, \tilde{L})$ onde todas os complexos de cadeias nessa equação podem ser vistos como $Wh(G)$ -complexos, de fato, como M_i é um retrato por deformação forte de K_i implica que L é um retrato por deformação forte de $K \cup L$ e então $K_i \cup L$ é um retrato por deformação forte de $K \cup L$ (já que os K_i são disjuntos) assim $\widetilde{K_i \cup L}$ é um recobrimento universal de $K_i \cup L$ e G é isomorfo ao grupo de homeomorfismos de recobrimento de $\widetilde{K_i \cup L}$. Assim pelo teorema 3.7.1

$$\tau(K \cup L, L) = \sum_i \tau(C(\widetilde{K_i \cup L}, \tilde{L})) \in Wh(G).$$

Para calcular $\tau(C(\widetilde{K_i \cup L}, \tilde{L}))$ vamos considerar o recobrimento universal $\hat{p} : (\hat{K}_i, \hat{M}_i) \rightarrow (K_i, M_i)$ com $\hat{G}_i$ sendo o grupo dos recobrimento homeomorfos de $\hat{K}_i$. Fixando pontos base $x \in M_i$, $\hat{x} \in \hat{p}^{-1}(x)$, e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e colocando $J_i : (K_i, x) \rightarrow (K \cup L, x)$ a inclusão os diagramas comutativos a seguir são determinados:

$$\begin{array}{ccc} (\hat{K}_i, \hat{x}) & \xrightarrow{\hat{J}_i} & (\widetilde{K \cup L}, \tilde{x}) \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow p \\ (K_i, x) & \xrightarrow{J_i} & (K \cup L, x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{G}_i & \xrightarrow{\lambda} & G \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_1(K_i, x) & \xrightarrow{(J_i)_\#} & \pi_1(K \cup L, x) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \pi_1(M_i, x) & \xrightarrow{(j|_{M_i})_\#} & \pi_1(L, x) \end{array}$$

Usaremos o teorema 1.4.15 que $\tilde{J}_i \circ g = \lambda(g) \circ \tilde{J}_i$, se $g \in \widehat{G}_i$ (no teorema 1.4.15 a aplicação λ é ainda denotada por $(J_i)_\#$).

Agora cada célula $e_\alpha \in K_i - M_i$ com aplicação característica φ_α escolha um levantamento fixado $\widehat{\varphi}_\alpha$ para $\widehat{K}_i$ e defina $\tilde{\varphi}_\alpha = \tilde{J}_i \circ \widehat{\varphi}_\alpha$. Então $\{\langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle\}$ é uma base para o $Wh(G)$ -complexo $C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$. Ainda $\tilde{J}_i$ induz uma aplicação cadeia (sobre $\mathbb{Z}$), como $\tilde{J}_i$ é celular. Assim se $\partial \langle \widehat{\varphi}_\alpha \rangle = \sum n_{\alpha, \beta, \gamma} g_\gamma \langle \widehat{\varphi}_\beta \rangle$, onde $g_\gamma \in \widehat{G}_i$, temos

$$\begin{aligned} \partial \langle \tilde{\varphi}_\alpha \rangle &= \partial \langle \tilde{J}_i(\widehat{\varphi}_\alpha) \rangle = (\tilde{J}_i)_*(\partial \langle \widehat{\varphi}_\alpha \rangle) \\ &= \sum n_{\alpha, \beta, \gamma} (\tilde{J}_i \circ g_\gamma)_* \langle \widehat{\varphi}_\beta \rangle \\ &= \sum n_{\alpha, \beta, \gamma} (\lambda(g_\gamma) \circ \tilde{J}_i)_* \langle \widehat{\varphi}_\beta \rangle \\ &= \sum n_{\alpha, \beta, \gamma} \lambda(g_\gamma) \langle \tilde{\varphi}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Assim $C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L})$ é simplesmente isomorfo a $C(\widehat{K}_i, \widehat{M}_i)_{\lambda_*}$. Então $\tau(C(\widetilde{K_i \cup L}, \widetilde{L}))$ é igual a $\lambda_*(\tau(C(\widehat{K}_i, \widehat{M}_i))) \in Wh(G)$. Isso corresponde pelo diagrama da direita a $(j|_{M_i})_*(\tau(K_i, M_i)) \in Wh(\pi_1(L))$. Então

$$\tau(K \cup L, L) = \sum_i (j|_{M_i})_* \tau(K_i, M_i) = j_*(\tau(K, M)).$$

■

Corolário 4.2.4. *Se K, L e M são subcomplexos do complexo $K \cup L$, com $M = K \cap L$ e se M é um retrato por deformação forte de K e de L então $\tau(K \cup L, M) = \tau(K, M) + \tau(L, M)$.*

Demonstração: Como M é um retrato por deformação forte de K e de L então é um retrato por deformação forte de $K \cup L$. Sendo $i : M \hookrightarrow L$ a inclusão temos dos dois teoremas anteriores que $\tau(K \cup L, M) = \tau(L, M) + i_*^{-1}(\tau(K \cup L, L))$ e $\tau(K \cup L, L) = i_*(\tau(K, M))$, logo $\tau(K \cup L, M) = \tau(K, M) + \tau(L, M)$.

■

Teorema 4.2.5. *Suponha que (K, L) é um par conexo CW na forma simplificada, $K = L \cup (\cup_j e_j^n) \cup (\cup_i e_i^{n+1})$ ($n \geq 2$), e que $\{\psi_j\}$ e $\{\varphi_i\}$ são aplicações características para e_j^n e e_i^{n+1} . Seja $K_n = L \cup (\cup_j e_j^n)$. Seja $\langle \partial \rangle$ a matriz - com entradas em $\mathbb{Z}(\pi_1(L; e^0))$ - do operador bordo $\partial : \pi_{n+1}(K, K_n; e^0) \longrightarrow \pi_n(K_n, L; e^0)$ com respeito as bases $\{[\psi_j]\}$ e $\{[\varphi_i]\}$ dado no lema 2.6.1. Então $\tau(K, L) = (-1)^n \tau(\langle \partial \rangle)$.*

Demonstração: Segue da prova do lema 2.6.1 e do fato que a aplicação de Hurewicz comuta com os operadores bordos que existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
0 = H_{n+2}(\tilde{K}^{n+2} \cup \tilde{L}, \tilde{K}^{n+1} \cup \tilde{L}) = C_{n+2}(\tilde{K}, \tilde{L}) & & \\
\downarrow & & \\
C_{n+1}(\tilde{K}, \tilde{L}) = H_{n+1}(\tilde{K}, \tilde{K}_n) & \xrightarrow[\langle I \rangle]{\cong} & \pi_{n+1}(K, K_n; e^0) \\
\partial \downarrow & & \downarrow \partial \\
C_n(\tilde{K}, \tilde{L}) = H_n(\tilde{K}_n, \tilde{L}) & \xrightarrow[\langle I \rangle]{\cong} & \pi_n(K_n, L; e^0) \\
\downarrow & & \\
0 = H_{n-1}(\tilde{K}^{n-1} \cup \tilde{L}, \tilde{K}^{n-2} \cup \tilde{L}) = C_{n-1}(\tilde{K}, \tilde{L}) & &
\end{array}$$

em que as bases preferidas $\{\langle \psi_j \rangle\}$ e $\{\langle \varphi_i \rangle\}$ vão nas bases $\{[\psi_j]\}$ e $\{[\varphi_i]\}$. Como a coluna da esquerda é $C(\tilde{K}, \tilde{L})$, o resultado segue do teorema 3.7.1. ■

4.3 A equivalência natural de $Wh(L)$ e $\oplus Wh(\pi_1(L_j))$

Foi considerado em duas seções anteriores dois funtores da categoria dos complexos CW finitos e aplicações na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos de grupos. Em 2.4 definimos o funtor,

$$L \mapsto Wh(L)$$

$$\{f : L \longrightarrow L'\} \mapsto \{f_* : Wh(L) \longrightarrow Wh(L')\}$$

e no teorema 4.1.9 definimos o funtor

$$L \mapsto \oplus_j Wh(\pi_1(L_j)), \text{ } (L_1, \dots, L_q \text{ as componentes de } L)$$

$$\{f : L \longrightarrow L'\} \mapsto \{f_* = \sum_j f_j : \oplus_j Wh(\pi_1(L_j)) \longrightarrow \oplus_i Wh(\pi_1(L'_i))\}.$$

O propósito da seção é provar.

Teorema 4.3.1. *Para todo complexo CW finito L defina $T_L : Wh(L) \longrightarrow \oplus_j Wh(\pi_1(L_j))$, onde L_j são componentes conexas de L , por $T_L([K, L]) = \tau(K, L)$. Então $T = \{T_L\}$ é uma equivalência natural de funtores.*

Demonstração: Para cada L , T_L está bem definido: De fato, considere $L < K < K'$, onde $K' \searrow^e K$, então K é um retrato por deformação forte K' e $K' - K$ é simplesmente

conexo. Então dos teoremas 4.2.1 e 4.2.2 $\tau(K', L) = \tau(K, L) + i_*^{-1}\tau(K', K) = \tau(K, L)$ já que $\tau(K', K) = 0$. Por indução no número de colapsos elementares vemos que $\tau(K, L) = \tau(K', L)$ se $K \searrow K' \text{ rel } L$. Assim $T_L([K, L]) = T_L([K', L])$ se $[K, L] = [K', L]$. Para cada L , T_L é um homomorfismo pelo corolário 4.2.4.

T_L é injetora: Suponha que $T_L([K, L]) = \tau(K, L) = 0$. Podemos assumir, pelo teorema 2.5.3 e o fato que T_L está bem definido, que cada componente de (K, L) está na forma simplificada. Assim, pelo teorema 4.2.5, $\tau(\partial^j) = 0$, onde ∂^j é o operador bordo usual da homotopia na j -ésima componente. Mas então $\langle \partial^j \rangle$ pode ser transformada na identidade por meio de operações elementares que pelo teorema 2.6.5 implica que $K \searrow L \text{ rel } L$. Então $[K, L] = 0$.

T_L é sobrejetora dos teoremas 4.2.5 e 2.6.8: Já que dado $A \in \oplus_j Wh(\pi_1(\pi_1(L_j))) = Wh(\pi_1(L))$ existe um par (K, L) na forma simplificada tal que a matriz do par (K, L) é A e assim $\tau(A) = \tau(\langle \partial \rangle)$ e $\tau(K, L) = (-1)^2 \tau(\langle \partial \rangle) = \tau(A)$ e assim $T_L([K, L]) = \tau(K, L) = \tau(A)$. Então para cada L , T_L é um isomorfismo. Para provar que T é uma equivalência natural, falta provar que se $f : L \rightarrow L'$, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} Wh(L) & \xrightarrow{f_*} & Wh(L') \\ T_L \downarrow & & \downarrow T_{L'} \\ \oplus_j Wh(\pi_1(L_j)) & \xrightarrow{f_*} & \oplus_i Wh(\pi_1(L'_i)) \end{array}$$

Podemos assumir f celular. Assim dado $[K, L] \in Wh(L)$,

$$\begin{aligned} T_{L'} \circ f_*([K, L]) &= \tau(K \cup_L M_f, L'), \text{ definição de } f_* \\ &= \tau(M_f, L') + i_*^{-1}\tau(K \cup_L M_f, M_f), \text{ onde } i : L' \subset M_f \\ &= i_*^{-1}\tau(K \cup_L M_f, M_f), \text{ como } M_f \searrow L' \\ &= p_*(\tau(K \cup_L M_f, M_f)), \text{ onde } p : M_f \rightarrow L' \text{ como no lema 1.1.3} \\ &= p_* j_* \tau(K, L), \text{ onde } j : L \rightarrow M_f \\ &= f_* \tau(K, L), \text{ como } p \circ j = f \\ &= f_*(T_L([K, L])). \end{aligned}$$

■

4.4 A torção de uma equivalência de homotopia

Definição 4.4.1. *Suponha que $f : K \rightarrow L$ é uma equivalência de homotopia celular entre complexos CW finitos. Então K é uma retração por deformação forte de M_f e $f_* : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(L)$ é um isomorfismo.*

$Wh(K) \longrightarrow Wh(L)$ é um isomorfismo. Então $\tau(f)$ é definido como sendo $f_*(\tau(M_f, K)) \in Wh(L)$, ou seja, $\tau(f) = f_*(\tau(M_f, K))$.

Nessa seção daremos algumas propriedades formais da torção de uma equivalência de homotopia e mostraremos como, em algumas vezes, pode ser calculada. Usaremos frequentemente a equivalência da seção anterior.

Lema 4.4.2. *Se $f, g : K \longrightarrow L$ são equivalências de homotopia celular homotópicas então $\tau(f) = \tau(g)$.*

Demonstração: $f_* = g_*$ pelo teorema 4.1.9. Então é suficiente mostrar que $\tau(M_f, K) = \tau(M_g, K)$. E isso é verdade já que $M_f \frown M_g \text{ rel } K$ pela proposição 2.3.10. ■

Como consequência desse lema podemos definir $\tau(f)$ quando $f : K \longrightarrow L$ é uma equivalência de homotopia arbitrária colocando $\tau(f) = \tau(g)$, onde g é uma aproximação celular qualquer para f . Então quando proposições e provas nessa seção são feitas para aplicações quaisquer, estaremos sempre pensando nessas proposições como aplicações arbitrárias quaisquer.

Teorema 4.4.3. *Uma equivalência de homotopia celular $f : K \longrightarrow L$ é uma equivalência de homotopia simples se, e somente se, $\tau(f) = 0$.*

Demonstração: Como f_* é um isomorfismo celular, $\tau(f) = 0 \Leftrightarrow \tau(M_f, K) = 0$. Mas pelo teorema 4.3.1 isso é verdade se, e somente se, $M_f \frown K \text{ rel } K$ e pelo teorema 2.3.13 se, e somente se, f é uma equivalência de homotopia simples. ■

Proposição 4.4.4. *Se $L < K$ e L um retrato por deformação forte de K então $\tau(i) = i_*(\tau(K, L))$ onde $i : L \longrightarrow K$ é a inclusão.*

Demonstração: Observamos que i é um equivalência de homotopia por hipótese. Temos $M_i = (L \times I) \cup_{L \times \{1\}} K \times \{1\}$ onde $L \equiv L \times \{0\} < M_i$. Então pelo corolário 2.3.4 $K \times I \searrow M_i$ e então

$$M_i \nearrow K \times I \searrow K \times \{0\} \equiv K \text{ rel } L.$$

Assim $\tau(M_i, L) = \tau(K, L)$, tal que, $\tau(i) = i_*(\tau(M_i, L)) = i_*(\tau(K, L))$. ■

Proposição 4.4.5. *Se $f : K \longrightarrow L$ e $g : L \longrightarrow M$ são equivalências de homotopia celular então $\tau(gf) = \tau(g) + g_*(\tau(f))$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\tau(gf) &= g_*(f_*(\tau(M_{gf}, K))) \\
&= g_*(f_*(\tau(M_f \cup_L M_g, K))), \text{ pela proposição 2.3.11} \\
&= g_*(f_*(\tau(M_f, K) + i_*^{-1}(\tau(M_f \cup_L M_g, M_f)))), \text{ e } i : K \subset M_f, \\
&= g_*(\tau(f)) + g_*(f_*(i_*^{-1}j_*(\tau(M_g, L)))), \text{ onde } j : L \subset M_f \\
&= g_*(\tau(f)) + g_*(\tau(M_g, L)), \\
&= g_*(\tau(f)) + \tau(g)
\end{aligned}$$

Onde foram usados o teorema 4.2.2 e o lema da excisão 4.2.3, e que $f = p \circ i$ e $1_L = p \circ j$ implicam que $f_*i_*^{-1}j_* = 1_{Wh(\pi_1(L))}$. ■

Corolário 4.4.6. *Se $f : K \longrightarrow L$ e $g : L \longrightarrow K$ são equivalências de homotopia celular que são inversas homotópicas uma da outra então $\tau(g) = -g_*(\tau(f))$.*

Demonstração: Como $g \circ f \simeq 1_K$ temos $0 = \tau(gf) = \tau(g) + g_*(\tau(f))$ e então o resultado segue. ■

Teorema 4.4.7. *Se $f : (K, K_0) \longrightarrow (L, L_0)$ onde K_0 é um retrato por deformação de K , e se $f : K \longrightarrow L$ e $\bar{f} = f|_{K_0} : K_0 \longrightarrow L_0$ são equivalências de homotopia celulares então*

- (a) $\tau(f) = j_*(\tau(\bar{f})) + [\tau(j) - f_*(\tau(i))];$
(b) $\tau(L, L_0) = \bar{f}_*(\tau(K, K_0)) + [D_*(\tau(f)) - \tau(\bar{f})]$

onde $i : K_0 \subset K$, $j : L_0 \subset L$, e $D : L \longrightarrow L_0$ é uma retração por deformação forte.

Demonstração:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(K_0) & \xrightarrow[\approx]{i_*} & \pi_n(K) \\
\approx \downarrow \bar{f} & & \approx \downarrow f_* \\
\pi_n(L_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(L)
\end{array}$$

Como esse diagrama comuta, já que $f \circ i = j \circ \bar{f}$, j_* é um isomorfismo para qualquer n e então $\pi_n(L, L_0) = 0$ e, pelo teorema 1.2.3, L_0 é um retrato por deformação forte de L . Então

$$\tau(f) + f_*(\tau(i)) = \tau(j) + j_*(\tau(\bar{f}))$$

que prova (a).

Além disso

$$\begin{aligned}
 \tau(j) &= f_*(\tau(i)) + \tau(f) - j_*(\tau(\bar{f})) \\
 j_*(\tau(L, L_0)) &= f_*(i_*(\tau(K, K_0))) + \tau(f) - j_*(\tau(\bar{f})), \text{ proposição 4.4.4} \\
 \tau(L, L_0) &= D_* \circ f_*(i_*(\tau(K, K_0))) + D_*(\tau(f)) - \tau(\bar{f}) \\
 &= (D \circ f \circ i)_*(\tau(K, K_0)) + D_*(\tau(f)) - \tau(\bar{f}) \\
 &= \bar{f}_*(\tau(K, K_0)) + D_*(\tau(f)) - \tau(\bar{f}),
 \end{aligned}$$

provando (b). ■

Corolário 4.4.8. *Se $f : (K, K_0) \longrightarrow (L, L_0)$ como no teorema anterior e se f e $\bar{f}$ são equivalências de homotopia simples então (a) $\tau(j) = f_*(\tau(i))$ e (b) $\tau(L, L_0) = \bar{f}_*(\tau(K, K_0))$.*

Para fazermos alguns cálculos de $\tau(f)$, faremos como segue: Suponha que $f : K \longrightarrow L$ é uma equivalência de homotopia celular entre espaços conexos e que $\tilde{f} : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{L}$ é um levantamento de f para os espaços de recobrimento universal induzindo $\tilde{f}_* : C(\tilde{K}) \longrightarrow C(\tilde{L})$. Seja $G_K = Cov(\tilde{K})$ e $G_L = Cov(\tilde{L})$, e seja $C(\tilde{K})$ e $C(\tilde{L})$ vistos como $Wh(G_K)$ e $Wh(G_L)$ - complexos com operadores bordos d e d' respectivamente. Escolha pontos base x, y e pontos de recobrimento $\tilde{x}, \tilde{y}$ tal que $f(x) = y$ e $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Seja $f_\# : G_K \longrightarrow G_L$ induzida de $f_\# : \pi_1(K, x) \longrightarrow \pi_1(L, y)$ como no teorema 1.4.15. Ainda seja $f_\#$ denotando as aplicações correspondentes $\mathbb{Z}(G_K) \longrightarrow \mathbb{Z}(G_L)$ e $GL(\mathbb{Z}(G_K)) \longrightarrow GL(\mathbb{Z}(G_L))$. Nessas circunstâncias temos:

Teorema 4.4.9. $\tau(f) \in Wh(G_L)$ é a torção do $Wh(G_L)$ - complexo $\mathcal{C}$ que é dado por

- (1) $\mathcal{C}_n = [C(\tilde{K})_{f_\#}]_{n-1} \oplus C(\tilde{L})$;
 (2) $\partial_n : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathcal{C}_{n-1}$ tem a matriz

$$\begin{array}{cc}
 & [C(\tilde{K})_{f_\#}]_{n-2} \quad C_{n-1}(\tilde{L}) \\
 \begin{array}{c} [C(\tilde{K})_{f_\#}]_{n-2} \\ C_{n-1}(\tilde{L}) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} -f_\# \langle d_{n-1} \rangle & \langle \tilde{f}_* \rangle \\ 0 & \langle d'_n \rangle \end{array} \right)
 \end{array}$$

Em particular se colocarmos $\overline{C}(\tilde{K})$ um $Wh(G_L)$ -complexo com $\overline{C}_n(\tilde{K}) = [C(\tilde{K})]_{n-1}$ e operador bordo $\bar{d}$ dado por $\langle \bar{d}_n \rangle = -f_\# \langle d_{n-1} \rangle$ então $\tau(f) = \tau(\mathcal{C})$ onde existe uma “preservação de base” (Como a última parte da proposição 3.7.2) da seqüência exata curta de $Wh(G_L)$ -complexo

$$0 \longrightarrow C(\tilde{L}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \overline{C}(\tilde{K}) \longrightarrow 0$$

Demonstração: No cálculo $\tau(M_f, K)$ podemos usar, pelo teorema 4.1.4, qualquer recobrimento universal de M_f . Assim, escolhemos a projeção natural, como no teorema 1.4.11,

$\alpha : M_{\tilde{f}} \longrightarrow M_f$ tal que $\alpha|_{\tilde{K}}$ e $\alpha|_{\tilde{L}}$ são recobrimento universais implícitos na hipótese. Seja $G = Cov(M_{\tilde{f}})$. Se $g \in G_K = Cov(\tilde{K})$ defina $E(g) \in G$ sendo a única extensão de g em $M_{\tilde{f}}$, que existe pois

$$E(g)(x) = \begin{cases} (g(x), t), & 0 \leq t \leq 1, x \in \tilde{K} \\ x, & x \in \tilde{L} \end{cases}$$

onde $E(g)$ é um homeomorfismo em $M_{\tilde{f}}$ e $\alpha \circ E(g) = \alpha$, então $E(g) \in G$, e é único pois se existissem uma outra extensão teria que ser igual em $\tilde{K}$ assim igual em todos os pontos de $M_{\tilde{f}}$. Se $h \in G$ defina $R(h) \in G_L$ a restrição de h em $\tilde{L}$. Assim usando o teorema 1.4.15, como no teorema 4.2.2, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} G_K & \xrightarrow{i_{\#}} & G & \xrightarrow{p_{\#}} & G_L \\ \theta(x, \tilde{x}) \uparrow & & \theta(x, \tilde{x}) \uparrow & & \theta(y, \tilde{y}) \uparrow \\ \pi_1(K_x) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(M_f, x) & \xrightarrow{p_{\#}} & \pi_1(L, y) \\ & \searrow f_{\#} & & & \end{array}$$

E ainda $E = i_{\#} : G_K \longrightarrow G$ e $R = p_{\#} : G \longrightarrow G_L$, de fato, considerando $\tilde{i} : \tilde{K} \longrightarrow M_{\tilde{f}}$ e $\tilde{p} : M_{\tilde{f}} \longrightarrow \tilde{L}$ (como no lema 1.1.4) temos do teorema 1.4.15 que

$$\begin{aligned} i_{\#} \circ \tilde{i} &= \tilde{i} \circ g \\ i_{\#}|_{\tilde{K}} &= g = E(g)|_{\tilde{K}} \end{aligned}$$

logo $E = i_{\#}$ e

$$\begin{aligned} p_{\#}(g_M) \circ \tilde{p} &= \tilde{p} \circ g_M \Rightarrow p_{\#} \circ \tilde{p}|_{\tilde{L}} = \tilde{p} \circ g_M|_L \\ p_{\#}(g_M|_{\tilde{L}}) &= g_M|_{\tilde{L}} = R(g_M) \end{aligned}$$

Assim $f_{\#} = R \circ E : G_K \longrightarrow G_L$.

Veremos $C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$ como um $Wh(G)$ complexo, tal que $\tau(M_f, K) = E_*^{-1}\tau(C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K}))$ em $Wh(G_K)$ e $\tau(f) = f_*(\tau(M_f, K)) = R_*(\tau(C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})))$. E então da proposição 3.8.2 $\tau(f) = \tau(\mathcal{C})$ onde $\mathcal{C}$ é o $Wh(G_L)$ -complexo $[C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})]_R$. Para mostrar que $\mathcal{C}$ satisfaz a conclusão do teorema, estudaremos primeiro $C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$.

$C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$ (visto no teorema 1.3.4) é naturalmente isomorfo como um complexo sobre $\mathbb{Z}$, a “Aplicação Cone Algébrica” de $\tilde{f}_*$ que é dado por

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-1}(\tilde{K}) \oplus C_n(\tilde{L}) \\ \partial_n(a) &= -d_{n-1}(a) + \tilde{f}_*(a), \quad a \in C_{n-1}(\tilde{K}) \\ \partial_n(b) &= d'_n(b), \quad b \in C_n(\tilde{L}) \end{aligned}$$

Uma célula típica e^{n-1} de K nos dá, escolhendo um levantamento fixo, um elemento $\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle$ de $C_{n-1}(\tilde{K})$ (omitiremos as aplicações características para simplificar a notação). A imagem de $\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle$ pelo isomorfismo do teorema 1.3.4 é um elemento $\langle \tilde{e}^{n-1} \times (0, 1) \rangle \in C_n(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$. Suponha que, quando $d\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle$ é escrito como uma combinação linear em $\mathbb{Z}(G_K)$, temos que

$$d\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle = \sum_{i,j} n_{ij} g_i \langle \tilde{e}_j^{n-2} \rangle, \quad g_i \in G_K$$

e então sobre $\mathbb{Z}$ temos

$$d\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle = \sum_{i,j} n_{ij} \langle g_i \tilde{e}_j^{n-2} \rangle.$$

Aplicando o isomorfismo do teorema 1.3.4, o bordo correspondente em $C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$ é

$$\begin{aligned} \partial\langle \tilde{e}^{n-1} \rangle &= - \left(\sum_{i,j} n_{ij} \langle g_i \tilde{e}_j^{n-2} \times (0, 1) \rangle \right) + \tilde{f}_* \langle \tilde{e}^{n-1} \rangle \\ &= - \left(\sum_{i,j} n_{ij} E(g_i) \langle \tilde{e}_j^{n-2} \times (0, 1) \rangle \right) + \tilde{f}_* \langle \tilde{e}^{n-1} \rangle \end{aligned}$$

A última equação dá o bordo com coeficientes em $\mathbb{Z}(G)$ e essa equação vale pois $E(g_i)|_{M_{\tilde{f}} - \tilde{L}} = E(g_i)|_{\tilde{K} \times [0,1]} = g_i \times 1_{[0,1]}$.

Do mesmo modo, se $\tilde{f}_* \langle \tilde{e}^{n-1} \rangle$ é escrito como uma combinação linear com coeficientes em $\mathbb{Z}(G_L)$, e se as células de L são denotadas por u , temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_* \langle \tilde{e}^{n-1} \rangle &= \sum_{p,q} m_{pq} \langle h_p \tilde{u}_q^{n-1} \rangle, \quad h_p \in G_L \\ &= \sum_{p,q} m_{pq} \langle R^{-1} h_p \tilde{u}_q^{n-1} \rangle, \quad \text{como } h_p|_{\tilde{L}} = (R^{-1} h_p)|_{\tilde{L}} \\ &= \sum_{p,q} m_{pq} (R^{-1} h_p) \langle \tilde{u}_q^{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Uma discussão similar vale para $\partial\langle \tilde{u}_n \rangle$ e concluímos que a matriz, quando $C(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$ é considerada como um $\mathbb{Z}(G)$ -módulo, de $\partial_n : C_n(M_{\tilde{f}}, \tilde{K}) \rightarrow C_{n-1}(M_{\tilde{f}}, \tilde{K})$ é dada por

$$\begin{array}{cc} & C_{n-2}(\tilde{K}) & C_{n-1}(\tilde{L}) \\ \begin{array}{c} C_{n-1}(\tilde{K}) \\ C_{n-1}(\tilde{L}) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} -E\langle d_{n-1} \rangle & R^{-1}\langle \tilde{f}_* \rangle \\ 0 & R^{-1}\langle d'_n \rangle \end{array} \right) \end{array}$$

onde $\langle d_{n-1} \rangle$ é uma $\mathbb{Z}(G_K)$ matriz e $\langle \tilde{f}_* \rangle$ e $\langle d'_n \rangle$ são $\mathbb{Z}(G_L)$ matrizes. Como $f_{\#} = RE$ temos que $\tau(f) = \tau(\mathcal{C})$, possuindo o operador bordo, e é assim simplesmente isomorfo, ao complexo dado na afirmação do teorema. Afirmação de que a sequência

$$0 \rightarrow C(\tilde{L}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}(\tilde{K}) \rightarrow 0$$

é exata e preserva a base, segue diretamente da primeira parte da prova do teorema. ■

4.5 Teoremas de produtos e soma

Teorema 4.5.1 (Teorema da Soma). *Suponha $K = K_1 \cup K_2$, $K_0 = K_1 \cap K_2$, $L = L_1 \cup L_2$, $L_0 = L_1 \cap L_2$ e que $f : K \rightarrow L$ é uma aplicação que restrita a $f_\alpha : K_\alpha \rightarrow L_\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2$) é uma equivalência de homotopia. Seja $j_\alpha : L_\alpha \rightarrow L$ e $i_\alpha : K_\alpha \rightarrow K$ inclusões. Então f é uma equivalência de homotopia e*

$$(a) \quad \tau(f) = (j_1)_*(\tau(f_1)) + (j_2)_*(\tau(f_2)) - (j_0)_*(\tau(f_0));$$

(b) *Se f é uma inclusão*

$$\tau(L, K) = (i_1)_*(\tau(L_1, K_1)) + (i_2)_*(\tau(L_2, K_2)) - (i_0)_*(\tau(L_0, K_0)).$$

Demonstração: Seja M_α denotando a Aplicação Cilindro de f_α ($\alpha = 0, 1, 2$). Então K_α é um retrato por deformação forte de M_α , já que f_α é uma equivalência de homotopia. Segue que K_1 é um retrato por deformação forte de $M_0 \cup K_1$ ($K_0 \subset K_1$). Assim, pela seqüência exata tripla $(M_1, M_0 \cup K_1, K_1)$, temos que $\pi_i(M_1, M_0 \cup K_1) = 0$ para todo i , já que

$$\cdots \rightarrow \pi_n(M_1, K_1) = 0 \longrightarrow \pi_n(M_1, M_0 \cup K_1) \longrightarrow \pi_{n-1}(M_0 \cup K_1, K_1) = 0 \rightarrow \cdots$$

Assim pelo teorema 1.2.3, $M_0 \cup K_1$ é um retrato por deformação forte de M_1 . Similarmente $M_0 \cup K_2$ é um retrato por deformação forte de M_2 . Então K é um retrato por deformação forte de $M_0 \cup K$, que por sua vez, é de $M_1 \cup K = M_1 \cup K_2$, que é retrato por deformação forte de $M_f = M_1 \cup M_2$ e assim f é uma equivalência de homotopia. Agora o teorema 4.2.2 e o corolário 4.2.4 nos dá:

$$(1) \quad \tau(M_f, K) = (D)_*(\tau(M_f, M_0 \cup K)) + \tau(M_0 \cup K, K)$$

$$(2) \quad \tau(M_f, M_0 \cup K) = \tau(M_1 \cup K) + \tau(M_2 \cup K, M_0 \cup K)$$

$$(3) \quad \tau(M_\alpha \cup K, K) = (D)_*\tau(M_\alpha \cup K, M_0 \cup K) + \tau(M_0 \cup K, K), \quad \alpha = 1, 2$$

onde $D : M_0 \cup K \rightarrow K$ é uma retração por deformação forte. Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \tau(M_f, M_0 \cup K) &= \tau(M_1 \cup K, M_0 \cup K) + \tau(M_2 \cup K, M_0 \cup K) \\ &= (D_*)^{-1}(\tau(M_1 \cup K, K)) + (D_*)^{-1}(\tau(M_2 \cup K, K)) - 2(D_*)^{-1}(\tau(M_0 \cup K, K)) \end{aligned}$$

e assim $D_*(\tau(M_f, M_0 \cup K)) = \tau(M_1 \cup K, K) + \tau(M_2 \cup K, K) - 2(\tau(M_0 \cup K, K))$. Portanto,

$$\tau(M_f, K) = \tau(M_1 \cup K, K) + \tau(M_2 \cup K, K) - \tau(M_0 \cup K, K).$$

Note que $f \circ i_\alpha = j_\alpha \circ f_\alpha$, e usando o Lema da Excisão, $\tau(M_\alpha \cup K, K) = (i_\alpha)_*(\tau(M_\alpha, K_\alpha))$. Então se aplicarmos f na última equação temos:

$$\begin{aligned} \tau(f) &= f_*(\tau(M_f, K)) \\ &= (f \circ i_1)_*(\tau(M_1, K_1)) + (f \circ i_2)_*(\tau(M_2, K_2)) - (f \circ i_0)_*(\tau(M_0, K_0)) \\ &= (j_1 f_1)_*(\tau(M_1, K_1)) + (j_2 f_2)_*(\tau(M_2, K_2)) - (j_0 f_0)_*(\tau(M_0, K_0)) \\ &= (j_1)_*(\tau(f_1)) + (j_2)_*(\tau(f_2)) - (j_0)_*(\tau(f_0)), \text{ provando (a).} \end{aligned}$$

Para (b) segue de (a) e da proposição 4.4.4 e observando que $f_*^{-1}(j_\alpha)_*(f_\alpha)_* = i_*$, de fato, se f é inclusão f_α também são e então $\tau(f_\alpha) = (f_\alpha)_*\tau(L_\alpha, K_\alpha)$ e

$$\begin{aligned} f_*(\tau(L, K)) &= (j_1 f_1)_*(\tau(L_1, K_1)) + (j_2 f_2)_*(\tau(L_2, K_2)) - (j_0 f_0)_*(\tau(L_0, K_0)) \Rightarrow \\ \tau(L, K) &= (f j_1 f_1)_*(\tau(L_1, K_1)) + (f j_2 f_2)_*(\tau(L_2, K_2)) - (f j_0 f_0)_*(\tau(L_0, K_0)) \\ &= (i_1)_*(\tau(L_1, K_1)) + (i_2)_*(\tau(L_2, K_2)) - (i_0)_*(\tau(L_0, K_0)). \end{aligned}$$

■

Lema 4.5.2. *Seja X, P, K , e L complexos CW conexos com $X \subset K \cap L$ e P finito. Se $K \frown L$ rel X então $K \times P \frown L \times P$ rel $X \times P$.*

Demonstração: Observamos que $K \frown L$ rel X é um processo finito de colapsos e expansões elementares, então se mostrarmos o resultado para expansões (ou colapsos) elementares o caso geral segue. Então o problema fica reduzido a:

$$K \searrow^e L \text{ rel } X \Rightarrow K \times P \searrow^e L \times P \text{ rel } X \times P.$$

Assim como P é um complexo CW finito, $P = \cup_{i=1}^n e_i^{K_i}$, onde é escolhido de forma que $K_i \leq K_i + 1$ e então, usando a estrutura produto dos complexos CW,

$$\begin{aligned} K \times P &= (L \cup e^{j-1} \cup^j) \times P \\ &= (L \times P) \cup (e^{j-1} \times P) \cup (e^j \times P) \\ &= (L \times P) \cup (e^{j-1} \times \cup_{i=1}^n e_i^{K_i}) \cup (e^j \times \cup_{i=1}^n e_i^{K_i}) \\ &= (L \times P) \cup (\cup_{i=1}^n e^{j-1} \times e_i^{K_i}) \cup (\cup_{i=1}^n e^j \times e_i^{K_i}) \\ &= (L \times P) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} e^{j-1} \times e_i^{K_i}) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} e^j \times e_i^{K_i}) \cup (e^{j-1} \times e_n^{K_n}) \cup (e^j \times e_n^{K_n}) \\ &= B \cup (e^{j-1} \times e_n^{K_n}) \cup (e^j \times e_n^{K_n}) \end{aligned}$$

com $B = (L \times P) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} e^{j-1} \times e_i^{K_i}) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} e^j \times e_i^{K_i})$. Afirmamos que $K \times P \searrow^e B$. De fato, seja $\psi = \varphi_j \times \varphi_{K_n} : I^j \times I^{K_n} \rightarrow K \times P$ onde φ_j e φ_{K_n} são as aplicações características para e^j e $e_n^{K_n}$ respectivamente.

- (1) $\psi|_{I^j \times I^{K_n}} = \psi|_{I^j \times I^{K_n}}$ é característica para $e^j \times e_n^{K_n}$.
- (2) $\psi|_{I^j \times I^{K_n-1}} = \psi|_{I^{j-1} \times I^{K_n}}$ é característica para $e^{j-1} \times e_n^{K_n}$
- (3) $\psi|_{I^j \times I^{K_n-1}} \subset B^{K_n+j-1}$

A única alternativa que não é clara é (3) mas como

$$\begin{aligned}
 J^{j+K_n-1} &= \overline{\partial I^{j+K_n} - I^{j+K_n-1}} \\
 &= \overline{((\partial I^j \times I^{K_n}) \cup (I^j \times \partial I^{K_n})) - I^{j+K_n-1} \times 0} \\
 &= \overline{(\partial I^j \times I^{K_n}) - I^{j+K_n-1} \times 0} \cup \overline{(I^j \times \partial I^{K_n}) - I^j \times I^{K_n-1} \times 0} \\
 &= \overline{(\partial I^j \times I^{K_n-1} \times I) - I^j \times I^{K_n-1} \times 0} \cup \overline{I^j \times (\partial I^{K_n} - I^{K_n-1} \times 0)} \\
 &= \partial I^j \times I^{K_n} \cup (I^j \times \overline{\partial I^{K_n} - I^{K_n-1} \times 0}) \\
 &= \partial I^j \times I^{K_n} \cup (I^j \times J^{K_n-1})
 \end{aligned}$$

e assim

$$\varphi|_{\partial I^j \times I^{K_n}} = \varphi_j|_{\partial I^j} \times \varphi_{K_n}|_{I^{K_n}} \subset L^{j-1} \times (P^{K_n-1} \cup e_n^{K_n}) \subset B^{K_n+j-1}$$

e

$$\varphi|_{I^j \times J^{K_n-1}} = \varphi_j|_{I^j} \times \varphi_{K_n}|_{J^{K_n-1}} \subset (L^{j-1} \cup e^j) \times P^{K_n-1} \subset B^{K_n+j-1}$$

dessa maneira $K \times P \searrow^e B \text{ rel } X \times P$ e seguindo por indução nas células de P temos que $K \times P \searrow L \times P \text{ rel } X \times P$.

E assim se $K \frown L \text{ rel } X$ então $K \times P \frown L \times P \text{ (rel } X \times P)$.

■

O comportamento da torção, com respeito a produto cartesianos, é bem interessante. Por exemplo, se K_0 é um retrato por deformação forte de K então independente do que seja a torção $\tau(K, K_0)$, temos que $\tau(K \times S^1, K_0 \times S^1) = 0$ onde S^1 é a 1 - esfera. A descrição completa segue de:

Teorema 4.5.3 (Teorema do Produto). **(a)** Se P, K, K_0 são complexos CW finitos onde K_0 é um retrato por deformação forte de K e P é conexo então

$$\tau(K \times P, K_0 \times P) = \chi(P) i_*(\tau(K, K_0))$$

onde $i : K_0 \longrightarrow K_0 \times P$ dada por $i(x) = (x, y)$ para algum y fixo e $\chi(P)$ denota a característica de Euler de P .

(b) Se $f \times g : K \times K' \longrightarrow L \times L'$, onde f, g são equivalências de homotopia entre complexos conexos e se $i : L \longrightarrow L \times L'$ e $j : L' \longrightarrow L \times L'$ como em **(a)** então

$$\tau(f \times g) = \chi(L') i_*(\tau(f)) + \chi(L) j_*(\tau(g))$$

Demonstração: (a) Observamos primeiro que se P é não conexo mas possui componentes $P_1, P_2, \dots, P_q$, o caso conexo implica diretamente que

$$\tau(K \times P, K_0 \times P) = \sum_j \chi(P_j)(i_j)_*(\tau(K, K_0))$$

onde $i_j : K_0 \longrightarrow K_0 \times P_j$ por $i_j(x) = (x, y_j)$ para y_j fixo.

Segundo, se a afirmação (a) é verdadeira para um complexo Q com o mesmo tipo de homotopia simples que a P , é verdadeira para P . Pois suponha que $f : Q \longrightarrow P$ é uma equivalência de homotopia simples celular. Então pelo teorema 2.3.13 $M_f \searrow Q \text{ rel } Q$. Assim $K \times M_f \searrow K \times Q \text{ rel } K \times Q$ pelo lema anterior. Mas

$$M_{1_K \times f} = \frac{(K \times Q) \times I \oplus K \times P}{(1_K \times f)(p, q) = (p, q, 1)} = \frac{K \times (Q \times I) \oplus K \times P}{(p, (q, 1)) = (p, f(q))} = K \times M_f$$

e $1_K \times f : K \times Q \longrightarrow K \times P$ assim como $M_{1_K \times f} \searrow K \times Q \text{ rel } K \times Q$ $1_K \times f$ é uma equivalência de homotopia simples. Similarmente $1_{K_0} \times f$ é uma equivalência de homotopia simples. Denote $1_K \times f$ por F e $1_{K_0} \times f$ por $\bar{F}$. Por hipótese

$$\tau(K \times Q, K_0 \times Q) = \chi(Q)\hat{i}_*(\tau(K, K_0))$$

onde $\hat{i}_*(x, y) = (x, y)$ para y fixo e pelo teorema 4.4.8,

$$\tau(K \times P, K_0 \times P) = \bar{F}_*(\tau(K \times Q, K_0 \times Q)).$$

Assim

$$\tau(K \times P, K_0 \times P) = \chi(Q)(\bar{F}\hat{i})_*\tau(K, K_0) = \chi(P)i_*(\tau(K, K_0))$$

onde $i(x) = (x, f(y)), \forall x$.

Procedemos por indução em $n = \dim(P)$. Quando $n = 0$, P é um ponto e assim

$$\tau(K \times \{p\}, K_0 \times \{p\}) = i_*(\tau(K, K_0)) = \chi(P)i_*(\tau(K, K_0))$$

onde $i(x) = (x, p)$ e $P = \{p\}$.

Suponha que $n > 0$ e o resultando vale para os inteiros menores que n . Considere $e_1, \dots, e_q$ as n - células de P , com aplicações características $\varphi_\alpha : I^n \longrightarrow P$. Fixando uma estrutura CW para ∂I^n , podemos assumir que as aplicações colagem são celulares. Já que se não forem celulares, podemos fazer uma homotopia de cada uma delas com outra celular para obter, pelo lema 2.5.1, um novo complexo equivalente por homotopia simples a P e então provamos a afirmação para esse novo complexo. Considerando q cópias disjuntas $\{I_\alpha^n\}$ de I^n , defina

$$\varphi : (\partial I_1^n) \sqcup \dots \sqcup (\partial I_q^n) \longrightarrow P^{n-1}$$

pela condição $\varphi|_{\partial I_\alpha^n} = \varphi_\alpha|_{\partial I_\alpha^n}$. Então M_φ é um novo complexo CW e colocamos $Q = M_\varphi \cup I_1^n \cup \dots \cup I_q^n$ onde I_α^n é colado a M_φ pela identidade em ∂I_α^n . Como a projeção natural $p : M_\varphi \longrightarrow P^{n-1}$ é uma equivalência de homotopia simples, pelo corolário 2.3.3, e $Q \cup_p P^{n-1}$

é homeomorfo a P e, pelo Teorema da Extensão de Homotopia Simples 2.3.14, Q tem o mesmo tipo de homotopia simples de P . Provemos a afirmação para Q .

Seja $R = I_1^n \cup \dots \cup I_q^n$, um subcomplexo de Q , e seja $\partial R = \partial I_1^n \cup \dots \cup \partial I_q^n$. Assim $Q = M_\varphi \cup R$ e $M_\varphi \cap R = \partial R$. Se $n > 1$ escolha seções constantes $j : K_0 \longrightarrow K_0 \times M_\varphi$, e $K_\alpha : K_0 \longrightarrow \partial I_\alpha^n$ e $m_\alpha : K_0 \longrightarrow K_0 \times I_\alpha^n$ ($1 \leq \alpha \leq q$). Se $n = 1$, note que M_φ possui várias componentes $M_{\varphi,\beta}$ como P^0 são pontos - digamos r componentes - e seja $j_\beta : K_0 \longrightarrow K_0 \times M_{\varphi,\beta}$ as seções constantes para ($1 \leq \beta \leq r$). Seja $K_{\alpha,1}$ e $K_{\alpha,2}$ seções constantes nas componentes de $K_0 \times \partial I_\alpha^1$ e seja $m_\alpha : K_0 \longrightarrow K_0 \times I_\alpha^1$ ainda seções constantes ($1 \leq \alpha \leq q$).

Do teorema da soma temos

$$(1) \quad \tau(K \times Q, K_0 \times Q) = (f_1)_*(\tau(K \times M_\varphi, K_0 \times M_\varphi)) + (f_2)_*(\tau(K \times R, K_0 \times R)) + (f_0)_*(\tau(K \times \partial R, K_0 \times \partial R)) \text{ onde } f_0, f_1, f_2 \text{ são inclusões em } K_0 \times Q$$

Para o caso $n \neq 1$.

$$(2) \quad \tau(K \times M_\varphi, K_0 \times M_\varphi) = \chi(M_\varphi)j_*(\tau(K, K_0))$$

$$(3) \quad \tau(K \times R, K_0 \times R) = \sum_\alpha (m_\alpha)_* \tau(K, K_0)$$

$$(4) \quad \tau(K \times \partial R, K_0 \times \partial R) = \sum_\alpha \chi(S^{n-1})(K_\alpha)_*(\tau(K, K_0)).$$

Onde as afirmações seguem pela hipótese de indução e da observação sobre o mesmo tipo de homotopia simples. Mas da conectividade de P implica que todas as aplicações f_1j, f_2m_α , e f_0k_α são homotópicas a qualquer seção constante $i : K_0 \longrightarrow K_0 \times P$. Assim substituindo em (1) temos

$$\begin{aligned} \tau(K \times Q, K_0 \times Q) &= (\chi(M_\varphi) + q - q\chi(S^{n-1}))i_*(\tau(K, K_0)) \\ &= (\chi(M_\varphi) + q(1 - \chi(S^{n-1})))i_*(\tau(K, K_0)) \\ &= (\chi(M_\varphi) + q(-1)^n)i_*(\tau(K, K_0)) \\ &= \chi(Q)i_*(\tau(K, K_0)) \end{aligned}$$

Já que $(1 - \chi(S^{n-1})) = (-1)^n$.

No caso $n = 1$ as equações anteriores tornam-se

$$(2') \quad \tau(K \times M_\varphi, K_0 \times M_\varphi) = \sum_{\beta=1}^r (j_\beta)_*(\tau(K, K_0))$$

$$(3') \quad \tau(K \times R, K_0 \times R) = \sum_{\alpha=1}^q (m_\alpha)_* \tau(K, K_0)$$

$$(4') \quad \tau(K \times \partial R, K_0 \times \partial R) = \sum_{\alpha=1}^q ((K_{\alpha,1})_*(\tau(K, K_0)) + (K_{\alpha,2})_*(\tau(K, K_0))).$$

Todas as 3 afirmações seguem por indução e do caso não conexo da observação. Agora usando a conectividade de P como acima temos

$$\begin{aligned} \tau(K \times Q, K_0 \times Q) &= (r + q - 2q)i_*(\tau(K, K_0)) \\ &= \chi(P)i_*(\tau(K, K_0)) = \chi(Q)i_*(\tau(K, K_0)) \end{aligned}$$

(b) Precisamos encontrar $\tau(f \times g)$ onde $(f \times g) : K \times K' \longrightarrow L \times L'$. Primeiro considere o caso que $K' = L' = P$, $g = 1_P$. Então

$$\begin{aligned} \tau(f \times 1_P) &= (f \times 1_P)_* \tau(M_{f \times 1_P}, K \times P) \\ &= (f \times 1_P)_* \tau(M_f \times P, K \times P) \\ &\stackrel{(a)}{=} \chi(P)(f \times 1_P)_* \alpha_* \tau(M_f, K) \text{ como } (i \circ f) = (f \times 1_P) \circ \alpha; i : L \longrightarrow L \times P \\ &= \chi(P) i_*(\tau(f)) \end{aligned}$$

O caso geral segue facilmente já que $(f \times g) = (1_L \times g) \circ (f \times 1_{K'})$ e assim

$$\begin{aligned} \tau(f \times g) &= \tau(1_L \times g) + \tau(f \times 1_{K'}) \\ &= \chi(L) j_* \tau(g) + \chi(K') i_* \tau(f) \\ &= \chi(L') i_* \tau(f) + \chi(L) j_* \tau(g) \end{aligned}$$

■

4.6 A comparação entre homotopia e homotopia simples

Mostraremos primeiro que qualquer elemento de $Wh(L)$ pode ser visto como alguma equivalência de homotopia.

Teorema 4.6.1. *Se $\tau_0 \in Wh(L)$ então existe um complexo CW K e uma equivalência de homotopia $f : K \longrightarrow L$ com $\tau(f) = \tau_0$.*

Demonstração: Seja K um complexo CW tal que L é um retrato por deformação forte de K e tal que $\tau(K, L) = -\tau_0$, tal complexo existe pela definição de 2.4 de $Wh(L)$ e usando a equivalência provada em 4.3. Seja $f : K \longrightarrow L$ a inversa homotópica de $i : L \longrightarrow K$ a inclusão. Então, pela proposição 4.4.4 e o corolário 4.4.6, temos que $\tau(f \circ i) = \tau(f) + f_*(\tau(i))$ como $f \circ i \simeq 1_K$ e então

$$\tau(f) = -f_* \tau(i) = -f_* i_*(\tau(K, L)) = -\tau(K, L) = \tau_0$$

■

Proposição 4.6.2. *Suponha que L é um complexo CW dado. Se K é homotopicamente equivalente a L (escreva $K \simeq L$) defina $S_K \subset Wh(L)$ por*

$$S_K = \{\tau(f) \mid f : K \longrightarrow L \text{ é uma equivalência de homotopia}\}$$

Então se $K \simeq L \simeq K'$, as afirmações a seguir são equivalentes:

- (a) $S_K \cap S_{K'} \neq \emptyset$
- (b) K e K' possuem o mesmo tipo de homotopia simples.
- (c) $S_K = S_{K'}$

Então $\mathfrak{F} = \{S_K \mid K \simeq L\}$ é uma família de conjuntos que particionam $Wh(L)$. A cardinalidade de $\mathfrak{F}$ é exatamente a do conjunto das classes de equivalência de homotopia simples dentro das classes de equivalência de homotopia de L .

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b)

Suponha que $S_K \cap S_{K'} \neq \emptyset$. Então existem equivalências de homotopia $f : K \longrightarrow L$ e $g : K' \longrightarrow L$ tal que $\tau(f) = \tau(g)$. Seja $\bar{g}$ a inversa homotópica de g . Então $\bar{g} \circ f : K \longrightarrow K'$ e pela proposição 4.4.5 e o corolário 4.4.6,

$$\tau(\bar{g}f) = \tau(\bar{g}) + \bar{g}_*(\tau(f)) = -\bar{g}_*(\tau(g)) + \bar{g}_*(\tau(f)) = 0$$

logo K e K' possuem o mesmo tipo de homotopia simples.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Suponha que $s : K' \longrightarrow K$ é uma equivalência de homotopia simples. Se $\tau_0 \in S_K$ escolha $f : K \longrightarrow L$ tal que $\tau(f) = \tau_0$. Então $fs : K' \longrightarrow L$ e $\tau(fs) = \tau(f) + f_*(\tau(s)) = \tau(f) = \tau_0$. Logo $S_K \subset S_{K'}$. Por simetria $S_K = S_{K'}$.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Direto já que por definição $S_K \neq \emptyset$

Assim se $A = \{K \mid K \simeq L\}$ é o conjunto dos espaços homotopicamente equivalente a L e a relação de equivalência

$$K \sim K' \Leftrightarrow K \wedge K' \text{ rel } L$$

temos que $|\mathfrak{F}| = |A/\sim|$, já que $T : \mathfrak{F} \longrightarrow A$ dada por $T(S_K) = [K]$ é bijetora. ■

Fixaremos uma notação $v_L = |\mathfrak{F}|$ onde $\mathfrak{F}$ é como na proposição anterior, $\mathcal{E}(L)$ é o grupo das classes de equivalência, por homotopia, das equivalências homotópicas de L em L e $Wh_0(L) = \{\tau(f) \in Wh(L) \mid f_* : Wh(L) \longrightarrow Wh(L) \text{ é a identidade}\}$.

Proposição 4.6.3. $v_L |Wh_0(L)| \leq |Wh(L)| \leq v_L |\mathcal{E}(L)|$.

Demonstração: Se $g : K \longrightarrow L$ é uma equivalência de homotopia fixa então a correspondência $f \mapsto fg$ (f uma equivalência de homotopia própria de L) induz uma bijeção de $\mathcal{E}(L)$ no conjunto $\mathcal{E}(K, L)$ das classes de equivalências, por homotopia, das equivalências de homotopia de $K \longrightarrow L$. De fato, seja $T : \mathcal{E}(L) \longrightarrow \mathcal{E}(K, L)$ dada por $T(f) = f \circ g$. Está bem definida pois se $f \simeq h \Rightarrow f \circ g \simeq h \circ g$. Se $T(f) = T(h)$ então $f \circ g \simeq h \circ g \Rightarrow f \circ g \circ g^{-1} \simeq h \circ g \circ g^{-1} \Rightarrow f \simeq h$, onde g^{-1} é a inversa homotópica de g , logo T é injetora. Agora se $h \in \mathcal{E}(K, L)$, seja $h \circ g^{-1} : L \longrightarrow L$, claramente $h \circ g^{-1} \in \mathcal{E}(L)$, assim $T(h \circ g^{-1}) = h \circ g^{-1} \circ g = h$ logo é sobrejetora. Portanto T é bijetora. Então pelo

lema 4.4.2, $|S_K| \leq |\mathcal{E}(K, L)| = |\mathcal{E}(L)|$ já que funções homotópicas tem a mesma torção e $m : \mathcal{E}(K, L) \longrightarrow S_K$ dada por $m(f) = \tau(f)$ é sobrejetora. Logo

$$\sum_{S_K \in \mathfrak{F}} |S_K| \leq \sum_{S_K \in \mathfrak{F}} |\mathcal{E}(L)| \Rightarrow |Wh(L)| \leq v_L |\mathcal{E}(L)|$$

Por outro lado se $g_0 : K \longrightarrow L$ é uma equivalência de homotopia, para qualquer f que induz a identidade em $Wh(L)$ temos que $\tau(fg_0) = \tau(f) + \tau(g_0) \in S_K$. Assim classe lateral $\tau(g_0) + Wh_0(L)$ está contida em S_K e então $|Wh_0(L)| \leq |S_K|$ e da proposição 4.6.2 $v_L |Wh_0(L)| \leq |Wh(L)|$ e o resultado segue. ■

Proposição 4.6.4. *Suponha que L é um complexo CW. Então*

- (1) *Todo complexo CW homotopicamente equivalente a L é equivalente por homotopia simples se e só se $Wh(L) = \{\tau(f) \mid f \in \mathcal{E}(L)\}$.*
- (2) *Se $Wh(L)$ é infinito e $\mathcal{E}(L)$ é finito, existem infinitas classes de equivalência de homotopia simples dentro das equivalências homotópicas de L .*
- (3) *Todo 2-complexo finito conexo L com $\pi_1(L) \cong \mathbb{Z}_p$, $p \neq 1, 2, 3, 4, 6$ é um espaço com grupo de Whitehead infinito satisfazendo as condições de (1). Todo espaço lenticular $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$, $p \neq 1, 2, 3, 4, 6$ satisfaz a hipótese de (2).*

Demonstração: As afirmações em (1) são equivalentes pois, pela proposição 4.6.2, cada uma é equivalente a afirmação que $S_K = S_L$ para todo K .

A afirmação (2) segue das proposições 4.6.2 e 4.6.3 já que se $|Wh(L)| = \infty$ então $v_L = \infty$.

Para (3) Note que se p é um inteiro positivo, $p \neq 1, 2, 3, 4, 6$ e se $\mathbb{Z}_p$ é um grupo cíclico de ordem p então $Wh(\mathbb{Z}_p)$ é infinito (pelo teoremas 3.3.4 e 3.3.5). No capítulo 5, por outro lado, discutiremos os espaços lenticulares $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$ e mostraremos que $\pi_1(L) = \mathbb{Z}_p$ e que $\mathcal{E}(L)$ está em correspondência injetora com $\{a \mid 0 < a < p, a^n \equiv \pm 1 \pmod{p}\}$. Então (2) está satisfeita.

O plano pseudo-projetivo P_p é o 2- dimensional complexo dado pela colagem de uma única 2-célula em S^1 dada pela aplicação $f : S^1 \longrightarrow S^1$ que é em coordenada complexas dada por $f(z) = z^p$. Dessa maneira, usando o Teorema de Van-Kampen, $\pi_1(P_p) = \mathbb{Z}_p$. Paul Olum estudou os planos pseudo-projetivos em [21] e [22] e mostrou que $\tau_0 \in Wh(P_p)$ é a torção de uma equivalência de homotopia própria de $f : (P_p, e^0) \longrightarrow (P_p, e^0)$ tal que f induz a identidade em $\pi_1(P_p, e^0)$. Então satisfazem (1)

Finalmente, Dyer-Sieradski ([8]) mostrou que qualquer 2- complexo com grupo fundamental cíclico $\mathbb{Z}_p$ é homotopicamente equivalente ao complexo da forma $P_p \vee S^2 \vee \dots \vee S^2$. Então, como esses autores afirmam, o trabalho de Olum implica que as afirmações de (1) são satisfeitas por qualquer 2- complexo. ■

4.7 A invariância da torção

A questão a seguir foi provada para o caso geral por T. Chapman [5],

INVARIÂNCIA TOPOLÓGICA DA TORÇÃO DE WHITEHEAD: SE $h : K \longrightarrow L$ É UM HOMEOMORFISMO ENTRE COMPLEXOS CW FINITO ENTÃO $\tau(h) = 0$?

Apresentaremos algumas respostas afirmativas em alguns casos muito especiais, dentro do nosso contexto.

Definição 4.7.1. Uma subdivisão de um complexo CW é um par (K_*, h) onde K_* é um complexo CW e $h_* : K_* \longrightarrow K$ é um homeomorfismo tal que para cada célula e de K_* existe uma célula e' de K com $h(e) \subset e'$.

Proposição 4.7.2. Se (K_*, h) é uma subdivisão de K então h é uma equivalência de homotopia simples.

Demonstração: Seja $g = h^{-1} : K \longrightarrow K_*$. Claramente g é celular e é suficiente pelo corolário 4.4.6, mostrar que $\tau(g) = 0$, ou, que $\tau(M_g, K) = 0$. Seja $K = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n = K_n$, onde $\dim e_j \leq \dim e_{j+1}$. Seja $K_j = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_j$ e seja M_j o cilindro da aplicação induzida $K_j \mapsto g(K_j)$. Então (M_j, K_j) é homeomorfo a $(K_j \times I, K_j \times 0)$, assim $M_j - M_{j-1} \approx e_j \times [0, 1]$ e os teoremas 4.2.1 e 4.2.2 implicam que

$$\tau(M_f \cup K, K) = \tau(M_{j-1} \cup K, K) + i_*^{-1}(M_j \cup K, M_{j-1} \cup K) = \tau(M_{j-1} \cup K, K)$$

Note que como g é um homeomorfismo é uma equivalência de homotopia e então K é um retrato por deformação forte de $M_j \cup K$ e de $M_{j-1} \cup K$. Dessa maneira $M_{j-1} \cup K$ é um retrato por deformação forte de $M_j \cup K$.

Assim, começando com $(M_g, K) = (M_n, K)$, e usando a indução temos que $\tau(M_g, K) = \tau(M_0 \cup K, K)$ e $M_0 \approx e_0 \times [0, 1] \searrow e_0$, logo $\tau(M_g, K) = \tau(e_0 \cup K, K) = \tau(K, K) = 0$. ■

Proposição 4.7.3. Se $\tau(K, L) = 0$ e se (K_*, L_*) subdivide (K, L) , isto é, uma subdivisão (K_*, h) de K com $K_* = h^{-1}(L)$ então $\tau(K_*, L_*) = 0$.

Demonstração: Seja $\bar{h} : L_* \longrightarrow L$ a restrição de h . Claramente $(L_*, \bar{h})$ é uma subdivisão de L , assim $\bar{h}$ é uma equivalência de homotopia simples. Assim, pelo corolário 4.4.8, $\tau(K_*, L_*) = \bar{h}_*^{-1}(\tau(K, L)) = 0$. ■

A invariância da torção por subdivisão é importante na Topologia Linear por Partes (p.l.).

Definição 4.7.4. Se K e L são complexos simpliciais finitos então uma aplicação $f : |K| \longrightarrow |L|$ é linear por partes (p.l.) se existem subdivisões K_* e L_* $((K_*, 1_{|K|})$ e $(L_*, 1_{|L|})$ na notação do parágrafo anterior) tal que $f : K_* \longrightarrow L_*$ é uma aplicação simplicial.

Os resultados da subdivisão CW implicam facilmente.

Teorema 4.7.5. *Se $h : K \longrightarrow L$ é um homeomorfismo p.l. então $\tau(h) = 0$. Se $h : (K, K_0) \longrightarrow (L, L_0)$ é um homeomorfismo p.l. de pares então $\tau(K, K_0) = 0$ se e só se $\tau(L, L_0) = 0$.*

Demonstração: É só notar que K e L são complexos CW, considerando como células os simplices abertos. ■

E por final resultados, que não serão provados aqui, mostram que a afirmação de h ser p.l. pode ser as vezes retirada. Esses resultados são resumidos por:

Teorema 4.7.6. *Suponha que $h : K \longrightarrow L$ é um homeomorfismo entre poliedros. Se (a) $\dim K = \dim L \leq 3$ ou (b) K e L são p.l. variedades então $\tau(h) = 0$*

REFERÊNCIAS: (a) Segue do resultado de [4] que todo homeomorfismo entre poliedros de dimensão menor ou igual a três é isotópico a um p.l. homeomorfismo.

(b) É um resultado de [15].

Espaços lenticulares

Os espaços lenticulares fazem parte de uma rara classe de espaços que são totalmente classificáveis por homeomorfismos e por tipo de homotopia. Servem ainda como contra exemplo para a clássica conjectura, dada por Hurewicz, que afirma que duas variedades compactas tendo o mesmo tipo de homotopia são homeomorfas. Essa conjectura é verdadeira para dimensão dois, mas falsa para dimensão três já que $L(7, 1)$ e $L(7, 2)$ possuem o mesmo tipo de homotopia e não são homeomorfos. Nesse capítulo daremos uma introdução detalhada para a teoria dos espaços lenticulares. Esse é um bom exemplo que torna a teoria concreta.

5.1 Definição dos espaços lenticulares

Usaremos a linguagem e propriedades da categoria p.l., linear por partes [13].

Definição 5.1.1. *Uma n - variedade p.l. (sem bordo) é um par $(M, \mathcal{A})$ onde M é um espaço métrico separável e $\mathcal{A}$ é uma família de pares (U_i, h_i) tal que $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de M , $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $h_j h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é p.l. para todo i, j . $\mathcal{A}$ é chamado de um p.l. atlas e (U_i, h_i) são chamados cartas coordenadas.*

Definição 5.1.2. Se M_1 e M_2 são variedades p.l. de dimensão m e n respectivamente então $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é uma aplicação p.l. se, para cada $x \in M_1$, existe uma carta (U, h) sobre x e uma carta (V, g) sobre $f(x)$ tal que a aplicação $gh^{-1} : h(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é p.l.

Se M é um espaço topológico e G é o grupo dos auto homeomorfismos de M , então G age livremente em M se:

$$[x \in M, 1 \neq g \in G] \Rightarrow [g(x) \neq x].$$

O conjunto $G(x_0) = \{g(x_0) \mid g \in G\}$ é chamado órbita de x_0 por meio de G .

Denotaremos por M/G o espaço quociente de M pela relação de equivalência: $x \sim y \Leftrightarrow G(x) = G(y)$. Então os pontos de M/G são órbitas por meio de G .

Proposição 5.1.3. Se M é uma variedade p.l. conexa e G é um grupo finito de p.l. homeomorfismos agindo livremente em M então

- (1) A aplicação quociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma aplicação de recobrimento.
- (2) O grupo G é precisamente o grupo dos homeomorfismos de recobrimento.
- (3) π induz uma estrutura p.l. em M/G com respeito ao qual π é p.l.

Demonstração: (1) Claramente π é contínua e sobrejetora. π é aberta, pois se $V \subset M$ é aberto então

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$$

que é aberto em M .

Como G é finito e age livremente em M , dado $x \in M$, se $g \neq h \in G$ então $g(x) \neq h(x)$, e assim, existe $g(x) \in V_g$ e $h(x) \in V_h$ tal que $V_g \cap V_h = \emptyset$ (M é Hausdorff, pois este é métrico). Fixe g e varie h , desta maneira, para cada h existe V_g^h , vizinhança de $g(x)$, tal que $V_g^h \cap V_h = \emptyset$, e assim

$$\bigcap_{g \neq h \in G} V_g^h \cap \left(\bigcup_{g \neq h \in G} V_h \right) = \emptyset.$$

Seja $W_g = \bigcap_{h \in G} V_g^h$ com $h \neq g$. Agora seja $g_1 \neq g$; fazendo o mesmo processo seja $W'_{g_1} = W_{g_1} \cap V_{g_1}$ (onde V_{g_1} é a vizinhança do primeiro processo), fazemos isso para todos os elementos de G . Como G é finito, obtemos W'_{g_1} para cada $g_1 \in G$ diferente de g , que é aberto e $g_1(x) \in W'_{g_1}$. Por abuso de notação chamaremos $W'_g = W_g$. Então, se $g \neq h$, $W'_g \cap W'_h \neq \emptyset$. Agora seja

$$\mathcal{V} = W'_{1_M} \cap \left(\bigcap_{1_M \neq g \in G} g^{-1}(W'_g) \right).$$

Assim $g(\mathcal{V}) \cap h(\mathcal{V}) = \emptyset, \forall g, h \in G$.

Agora para $y = \pi(x) \in M/G$ e $x \in U$, U uma vizinhança aberta como acima. Já que π é aberta, $\pi(U) = V$ é aberto com $y \in V$ e

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

é uma reunião de abertos dois a dois disjuntos e, restrita a cada um deles, π é contínua, aberta, injetiva e, assim, um homeomorfismo sobre $\pi(g(U)) = \pi(U) = V$. E portanto é recobrimento.

(2) Claramente G age transitivamente nas fibras de π e ainda G está contido no grupo de homeomorfismos de recobrimento de M , já que $\pi \circ g = \pi, \forall g \in G$. Seja h um homeomorfismo de recobrimento, dado $x \in M$, $\pi \circ h(x) = \pi(x)$ e então existe $g \in G$ tal que $g(x) = h(x)$ (pois $h(x) \in \pi^{-1}(x)$) e assim $g = h$ da conexidade de M . Logo G é o grupo dos homeomorfismos de recobrimento.

(3) Seja $\{(U_i, h_i)\}_{i \in J}$ um atlas p.l. para M com cartas escolhidas pequenos suficientes tal que $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow \pi(U_i)$ é um homeomorfismo para cada U_i . Denote $\pi_i = \pi|_{U_i}$. Então $\{(\pi(U_i), h_i \pi_i^{-1})\}_{i \in J}$ é um atlas p.l. para M/G . Para provar isso, mostremos que para cada $i, j \in J$, o homeomorfismo $h_j \pi_j^{-1} \pi_i h_i^{-1}$, com domínio $h_i \pi_i^{-1}(\pi_i(U_i) \cap \pi_j(U_j))$, é p.l. Mas em cada componente de $\pi_i^{-1}(\pi_i(U_i) \cap \pi_j(U_j))$ o homeomorfismo $\pi_j^{-1} \pi_i$ é igual a algum elemento de G . Como os elementos de G são p.l., $\pi_j^{-1} \pi_i$ é p.l. Mas h_j^{-1} e h_i são p.l. Assim $h_i \pi_i^{-1} \pi_j h_j^{-1}$ é p.l.

Para ver que $\pi : M \rightarrow M/G$ é p.l., seja $x \in M$ e considere a carta (U_i, h_i) como antes e para $f(x)$ a carta $(\pi(U_i), h_i \pi_i^{-1})$ como antes então $h_i \pi_i^{-1} \pi h_i^{-1} : h_i(U_i \cap \pi^{-1}(U_i)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é claramente p.l., já que $U_i \cap \pi^{-1}(U_i) = U_i$ e assim temos $h_i \pi_i^{-1} (h_i \pi_i^{-1})^{-1} : h_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$, já que $\pi|_{U_i} = \pi_i$, que é p.l. Assim π é uma aplicação p.l. ■

Suponha que $p \geq 2$ é um inteiro (não necessariamente primo) e que $q_1, q_2, \dots, q_n$ são inteiros relativamente primos com p (isto é, $\text{mdc}(p, q_j) = 1$). Então o espaço lenticular $L(p; q_1, q_2, \dots, q_n)$ é uma variedade p.l. de dimensão $2n - 1$ que definiremos como Σ^{2n-1}/G para apropriados Σ^{2n-1} e G .

Se $p > 2$, seja Σ^1 o polígono regular em $\mathbb{R}^2$ (1 - esfera simplicial) com vértices $v_q = e^{\frac{2\pi i q}{p}}$, $q = 0, 1, \dots, p - 1$. Seja Σ^{2n-1} o poliedro em $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ dado pelo join iterado

$$\begin{aligned} \Sigma^{2n-1} &= \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_n \\ &= \{\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n \mid \sum_j \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, z_j \in \Sigma_j\} \end{aligned}$$

Aqui Σ_j é a cópia de Σ^1 em $0 \times \dots \times \mathbb{R}^2 \times 0 \times \dots \times 0$, onde $\mathbb{R}^2$ está na posição j e cada $z \in \Sigma^{2n-1}$ é unicamente expresso como uma soma. Σ^{2n-1} é um complexo simplicial e, como é um join de círculos, é uma p.l. $(2n - 1)$ - esfera.

Quando $p = 2$ temos que modificar o procedimento anterior (como dois pontos não determinam o círculo). Seja Σ^1 o polígono regular com vértices $v_0 = 1$, $A = e^{\frac{\pi i}{2}}$, $v_1 = e^{\pi i}$ e $B = e^{\frac{3\pi i}{2}}$. Σ^{2n-1} é então descrito como acima.

Para construir um grupo G que age em Σ^{2n-1} , seja R_j a rotação de Σ_j por um ângulo de $2\pi q_j/p$. Seja $g = R_1 * R_2 * \dots * R_n : \Sigma^{2n-1} \rightarrow \Sigma^{2n-1}$; isto é

$$g\left(\sum_j \lambda_j z_j\right) = \sum_j \lambda_j R(z_j).$$

Como é um join de isomorfismos simpliciais, g é um isomorfismo simplicial. Claramente $g^p = 1$. Mas, se $1 \leq k \leq p-1$, g^k não possui pontos fixos em Σ^{2n-1} , pois seja $z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j$ onde $\lambda_{j_0} \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} mdc(g_{j_0}, p) = 1 &\Rightarrow (R_{j_0})^k(z_{j_0}) \neq z_{j_0} \Rightarrow \\ g^k(z) &= \sum_j \lambda_j R_j^k(z_j) \neq \sum_j \lambda_j z_j = z \end{aligned}$$

Assim $G = \{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$ é um grupo de ordem p de p.l. auto homeomorfismos que age livremente em Σ^{2n-1} , e com esse G definimos

$$L(p; q_1, \dots, q_n) = \frac{\Sigma^{2n-1}}{G}$$

Observamos ainda que $L(p; q_1, \dots, q_n)$ ainda pode ser naturalmente definido como uma variedade diferencial pensando como um quociente sobre a esfera S^{2n-1} . Seja $\bar{g} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por $\bar{g}(z_1, \dots, z_n) = (R(z_1), \dots, R(z_n))$, onde R_j é a rotação do $\mathbb{R}^2$ por $2\pi q_j/p$ radianos. Então $\bar{g}$ é uma transformação ortogonal tal que $\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{p-1}$, não possuem pontos fixos a não ser o zero. Assim $\bar{G} = \{\bar{g}^k |_{S^{2n-1}} \mid 0 \leq k \leq p-1\}$ é um grupo de difeomorfismos de S^{2n-1} e S^{2n-1}/G é uma variedade suave (por uma prova análoga a da proposição 5.1.3).

Agora a conexão com Σ^{2n-1}/G é dada por notar que $g = \bar{g}|_{\Sigma^{2n-1}}$ e que se $T : \Sigma^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ dada por $T(z) = z/|z|$, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2n-1} & \xrightarrow[\approx]{T} & S^{2n-1} \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g}|_{S^{2n-1}} \\ \Sigma^{2n-1} & \xrightarrow[\approx]{T} & S^{2n-1} \end{array}$$

Disso segue que existe um homeomorfismo diferenciável por partes $H : \Sigma^{2n-1}/G \rightarrow S^{2n-1}/G$ que é coberto por T . Esse homeomorfismo pode ser usado (como na proposição 5.1.3c) para dar a S^{2n-1}/G uma estrutura p.l. que é “compatível com a estrutura suave” e com respeito ao qual H é um homeomorfismo p.l.

5.2 Os espaços 3 - dimensionais $L_{p,q}$

Seja B^3 a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^3$ e seja D_+^2 e D_-^2 , os hemisférios superiores e inferiores fechados da fronteira de B^3 . Suponha que p, q são dados com $p \geq 2$, $mdc(p, q) = 1$. Seja R a rotação do $\mathbb{R}^2$ por $2\pi q/p$ radianos e defina $h : D_-^2 \rightarrow D_+^2$ por $h(x, y, z) = (R(x, y), -z)$. Dessa maneira o 3 - dimensional espaço lenticular é definido como o espaço quociente sobre a relação de equivalência gerada por h

$$L_{p,q} = \frac{B^3}{[x \sim y \text{ se } x \in D_-^2 \text{ e } y = h(x)]}$$

Figura 5.1: Idéia da Identificação de $L_{p,q}$

Nessa seção queremos mostrar intuitivamente o porque $L_{p,q}$ é, por homeomorfismo, o espaço que chamamos $L(p; q, 1)$ na última seção.

Considere a 3 - esfera S^3 como a compactificação por um ponto do $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$). Seja Σ_1 sendo o círculo unitário em $\mathbb{R}^2 \times 0$ e seja $\Sigma_2 = (\text{eixo} - z) \cup \{\infty\}$. Então S^3 pode ser visto como $\Sigma_1 * \Sigma_2$, vendo isso como a união de uma sutil família de cones curvados $v * \Sigma_1$ com v variando em Σ_2 .

Por exemplo, como mostra a figura abaixo, quando $v = (0, 0, 0)$, $v * \Sigma_1 = B^2 \times 0$, quando $v = (0, 0, 1)$, $v * \Sigma_1 = D_+^2$ quando $v = (0, 0, -1)$, $v * \Sigma_1 = D_-^2$, quando $v = \infty$, $v * \Sigma_1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, e quando $v = (0, 0, t)$, $|t| > 1$, $v * \Sigma_1$ parece um turbante. Cada um desses cones obtidos por rotacionar um arco de v a $(0, 1, 0)$ que está no plano- yz , sobre o eixo z , os arcos rotacionados nos dão as linhas do cone.

Agora seja $R_1 : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_1$ a rotação por $2\pi q/p$ radianos. Divida Σ_2 em p segmentos, um deles é o segmento infinito que possui ∞ como um ponto interior. Seja $R_2 : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ o isomorfismo simplicial que troca cada vértice para o próximo mais alto, exceto o vértice mais alto de todos que torna-se o mais baixo de todos. Como todo ponto de $S^3 - \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ está em um único arco de Σ_1 para Σ_2 podemos definir $g = R_1 * R_2 : S^3 \longrightarrow S^3$ por $g(z_1, z_2, t) = (R_1(z_1), R_2(z_2), t)$, onde (a, b, t) denota o ponto que é tL_{ab} unidades de comprimento de arco longitudinalmente do arco de a até b , L_{ab} sendo o comprimento desse arco.

Se nessas observações colocarmos $G = \{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$ é claro que $S^3/G \approx L(p; q, 1)$ como definido na ultima seção. Por outro lado, se $\pi : S^3 \longrightarrow S^3/G$ é a aplicação quociente segue do fato que $\pi g^k = \pi$ e $S^3 = \cup_k g^k(B^3)$, que $\pi(B^3) = S^3/G$. Assim S^3/G é homeomorfo ao espaço quociente de B^3 sobre as identificações induzidas por $\pi|_{B^3}$. Mas esse espaço quociente é precisamente B^3/h como $g|_{D_-^2} = h|_{D_-^2}$, $g(B^3) \cap B^3 = D_+^2$ e $(g^k(B^3) \cap B^3) - S^1 = \emptyset$ se $k \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$. Assim

$$L(p; q, 1) \approx \frac{S^3}{G} \approx \frac{B^3}{h} = L_{p,q}$$

5.3 Estrutura celular e os grupos de homologia

Quando $p > 2$ denotaremos os vértices de Σ^1 por $v_j = e^{2\pi i j/p}$ e os 1 - simplices por $I_j = [v_j, v_{j+1}]$, $0 \leq j \leq p-1$. Quando $p = 2$ os vértices são v_0, A, v_1, B como na seção 5.1 e colocamos $I_0 = [v_0, A] \cup [A, v_1]$ e $I_1 = [v_1, B] \cup [B, v_0]$. Para $0 \leq i \leq n-1$ os seguintes subcomplexos simpliciais de Σ^{2n-1} possuem um papel importante:

$$\begin{aligned} \Sigma^{2i-1} &= \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_i \subset \mathbb{R}^{2i} \\ E_j^{2i} &= \Sigma^{2i-1} * v_j \quad (v_j \in \Sigma_{i+1}) \\ E_j^{2i+1} &= \Sigma^{2i-1} * I_j \subset \Sigma^{2i+1} \end{aligned}$$

(aqui $\Sigma^{-1} \equiv \emptyset$, $E_j^0 \equiv v_j$, $E_j^1 \equiv I_j$). Por exemplo, B^3, D_-^2, D_+^2 de 5.2 corresponde a E_j^3, E_j^2, E_{j+1}^2 onde $v_j = (0, 0, -1)$ e $v_{j+1} = (0, 0, 1)$.

Os E_j^k são células fechadas que dão uma decomposição CW de Σ^{2n-1} com células $e_j^k = \overset{\circ}{E}_j^k$ ($0 \leq j \leq p-1$, $0 \leq k \leq 2n-1$). Fatos elementares sobre os joins implicam que:

- (1) $\partial E_j^{2i} = \Sigma^{2i-1}$
- (2) $\partial E_j^{2i+1} = E_j^{2i} \cup E_{j+1}^{2i}$
- (3) $E_j^{2i} \cap E_k^{2i} = \Sigma^{2i-1}$, se $j \neq k$

$$E_j^{2i+1} \cap E_k^{2i+1} = \begin{cases} \Sigma^{2i-1} & \text{se } j - k \not\equiv 0, \pm 1 \pmod{p} \\ E_{j+1}^{2i} & \text{se } k = j + 1 \pmod{p} \\ E_0^{2i} \cup E_1^{2i} & \text{se } j = 0, k = 1, p = 2 \end{cases}$$

Vamos orientar as bolas E_j^k - pensando nelas por um momento como cadeias simpliciais - estipulando que $E_j^0 = v_j$ é possivelmente orientado e, indutivamente, que então E_j^{2i+1} é orientado para $i \geq 0$ tal que $\partial E_j^{2i+1} = E_{j+1}^{2i} - E_j^{2i}$, é orientado de maneira que $E_j^{2i} \subset \Sigma^{2i+1}$ preserva a orientação, e Σ_j^{2i+2} é orientado tal que $\partial E_j^{2i+2} = \Sigma^{2i+1} = E_0^{2i+1} + E_1^{2i+1} + \dots + E_{p-1}^{2i+1}$. As orientações dos E_j^k determinam naturalmente elementos base para o complexo de cadeia celular $C_k(\Sigma^{2n-1})$ determinado por essa estrutura CW e ainda usaremos e_j^k para denotar esses elementos base (e como antes $\langle \varphi_j^k \rangle$ para alguma aplicação característica φ_j^k).

Agora seja Σ^{2n-1} como o recobrimento universal de $L(p; q_1, \dots, q_n) = \Sigma^{2n-1}/G$. É natural, como veremos brevemente, denotar $e_0^k = \tilde{e}_k$ ($0 \leq k \leq 2n-1$). Se $g = R_1 * R_2 * \dots * R_n$, como antes, note que $g^t|_{\Sigma^{2i-1}} : \Sigma^{2i-1} \longrightarrow \Sigma^{2i-1}$ preserva a orientação por isomorfismo simplicial (já que g é homotópica a identidade) tal que $g^t|_{E_0^{2i}} = (g^t|_{\Sigma^{2i-1}}) * (g^t|_{v_0})$ e $g^t|_{E_0^{2i+1}} = (g^t|_{\Sigma^{2i-1}}) * (g^t|_{I_0})$. Então g^t leva células orientadas, isomorficamente de maneira que preservam a orientação, em células orientadas e as cadeias celulares básicas satisfazem:

$$e_j^k = g^t(\tilde{e}_k) \text{ onde } tq_j \equiv j(\text{mod } p) [t \text{ existe já que } \text{mdc}(q_j, p) = 1]$$

$$\partial \tilde{e}_{2i+1} = g^{r_{i+1}}(\tilde{e}_{2i}) - \tilde{e}_{2i}, \text{ onde } r_{i+1}q_{i+1} \equiv 1(\text{mod } p)$$

$$\partial \tilde{e}_{2i} = \tilde{e}_{2i-1} + g(\tilde{e}_{2i-1}) + \dots + g^{p-1}(\tilde{e}_{2i-1})$$

$$\partial g = g\partial : C_k(\Sigma^{2n-1}) \longrightarrow C_k(\Sigma^{2n-1})$$

$L(p; q_1, \dots, q_n)$ obtém uma estrutura CW natural, com exatamente um célula em cada dimensão a partir da estrutura celular de Σ^{2n-1} por meio da projeção $\pi : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$. As células são os conjuntos $e_k = \pi(\tilde{e}_k) = \pi(e_j^k)$ ($0 \leq j < p$, $0 \leq k \leq 2n-1$) com aplicações características $\pi|_{E_0^k} : E_0^k \longrightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$. A orientação que escolhemos para $\tilde{e}_k$ induz uma orientação em e_k . Ou, mais tecnicamente falando, a aplicação cadeia induzida pela aplicação celular π leva o elemento base $\tilde{e}_k$ de $C_k(\Sigma^{2n-1})$ ao elemento denotado e_k , de $C_k(L(p; q_1, \dots, q_n))$. Para calcular $H_*(L(p; q_1, \dots, q_n))$ simplesmente notamos que

$$\begin{aligned} \partial e_{2i} &= \partial(\pi(\tilde{e}_{2i})) = \pi(\partial(\tilde{e}_{2i})) \\ &= \pi(\tilde{e}_{2i-1} + g(\tilde{e}_{2i-1}) + \dots + g^{p-1}(\tilde{e}_{2i-1})) = p e_{2i-1} \end{aligned}$$

$$\partial e_{2i-1} = \pi(\partial \tilde{e}_{2i+1}) = \pi(g^{r_{i+1}}(\tilde{e}_{2i}) - \tilde{e}_{2i}) = 0$$

Então o complexo de cadeia celular é

$$0 \longrightarrow C_{2n-1} \xrightarrow{0} C_{2n-2} \xrightarrow{\times p} C_{2n-3} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{\times p} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \longrightarrow 0$$

Assim os grupos de Homologia de $L(p; q_1, \dots, q_n)$ com coeficientes inteiros ficam

$$H_{2n-1} = \mathbb{Z}$$

$$H_{2i-1} = \mathbb{Z}_p, \quad 1 \leq i < n$$

$$H_{2i} = 0$$

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

Como a esfera é o recobrimento universal dos espaços lenticulares e G é o grupo de homeomorfismos de recobrimento, $\pi_1(L(p; q_1, \dots, q_n)) = G = \mathbb{Z}_p$ e $\pi_i(L(p; q_1, \dots, q_n)) = \pi_i(S^{2n-1})$, para $i \neq 1$.

A discussão anterior mostra que os diferentes $(2n-1)$ - espaços lenticulares determinados por um p fixo tem os mesmos grupos de homologia e homotopia. Entretanto, mostraremos na próxima seção que não possuem o mesmo tipo de homotopia.

5.4 Classificação por homotopia

Suponhamos nessa seção que $p \geq 2$ é dado e que $(q_1, \dots, q_n)$ e $(q'_1, \dots, q'_n)$ são n -uplas dadas de inteiros relativamente primos com p . Seja R_j e R'_j rotações de Σ_j por $2\pi q_j/p$ e $2\pi q'_j/p$, respectivamente. Seja $g = R_1 * R_2 * \dots * R_n$, $g' = R'_1 * R'_2 * \dots * R'_n$ e seja G e G' grupos cíclicos (de ordem p) gerados por g e g' . Denote $L = L(p; q_1, \dots, q_n) = \Sigma^{2n-1}/G$ e $L' = L(p; q'_1, \dots, q'_n) = \Sigma^{2n-1}/G'$ com aplicações quocientes π e π' . Seja ainda $e_k = \pi(\tilde{e}_k)$ e $e'_k = \pi'(\tilde{e}_k)$, onde $\tilde{e}_k$ é como na seção anterior.

Definição 5.4.1. *Se $f : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ é uma aplicação e $h \in G'$ então f é (g, h) - equivariante se, e somente se, $f \circ g = h \circ f$. Duas aplicações (g, h) -equivariante, f_0 e f_1 , são equivariantemente homotópicas se existe uma homotopia $\{f_t\} : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ tal que f_t é (g, h) -equivariante para todo t .*

Observamos ainda que $f : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ é (g, h) -equivariante para no máximo um h , de fato, vamos supor que f é (g, h) e (g, h') equivariantes então $h \circ f = g \circ f = h' \circ f$ dessa maneira existe um ponto onde h e h' são iguais, como G' age livremente e Σ^{2n-1} é conexo, temos que $h = h'$.

A relação entre aplicações equivariantes de Σ^{2n-1} e aplicações entre os espaços de lenticulares é dada nos próximos dois teoremas.

Teorema 5.4.2. (a) *Se $h \in G'$ e F é uma aplicação (g, h) -equivariante de Σ^{2n-1} , então F cobre uma aplicação bem definida $f : L \longrightarrow L'$.*

(b) *Se $\{F_t\}$ é uma homotopia de Σ^{2n-1} , onde cada F_t é (g, h_t) -equivariante para algum $h_t \in G'$ então $h_t = h_0$, para todo t e $\{F_t\}$ cobre uma bem definida homotopia $\{f_t\} : L \longrightarrow L'$.*

Demonstração: (a) Defina f tal que o diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2n-1} & \xrightarrow{F} & \Sigma^{2n-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ L & \xrightarrow{f} & L' \end{array}$$

Está bem definida pois se $\pi(x) = \pi(y)$ então $g^k(x) = y$ para algum k e assim $\pi'F(y) = \pi'Fg^k(x) = \pi'h^kF(x) = \pi'F(x)$.

(b) Escreva $h_0 = h$ e seja $S = \{t \in [0, 1] \mid h_t \neq h\}$. Vamos supor que $S \neq \emptyset$. Seja $u = \inf S$. Notemos que $u \notin S$. Para ver isso, escolha uma seqüência $t_i \rightarrow u$ tal que $t_i \leq u$ e $h_{t_i} = h$. Fixe um ponto z e note que $h_u^{-1}(F_u(g(z))) = h_u^{-1}(h_u F(z)) = F(z) = \lim_i h^{-1}h_{t_i}F_{t_i}(z) = \lim_i h^{-1}F_{t_i}g(z) = h^{-1}(F_u(g(z)))$ (note que $t_i \geq 0$ e assim F_{t_i} faz sentido). Então h_u^{-1} e h^{-1} são iguais em um ponto, logo $h_u = h$ e $u \notin S$.

Agora seja t_i uma seqüência em S tal que $t_i \rightarrow u$. Assim $h_{t_i} \neq h$. Fixe $z \in \Sigma^{2n-1}$. Se V é uma vizinhança para $F_u(g(z))$ tal que $\pi'|_V$ é injetora, então $h^{-1}(V) \cap h_{t_i}^{-1}(V) = \emptyset$, para todo i . Mas $h^{-1}F_u(g(z)) = h^{-1}hF_u(z) = F_u(z) = \lim_i F_{t_i}(z) = \lim_i h_{t_i}^{-1}h_{t_i}F_{t_i}(z) = \lim_i h_{t_i}^{-1}F_{t_i}(g(z))$, que é absurdo, como $F_{t_i}(g(z))$ está eventualmente em V , dessa maneira $h_{t_i}^{-1}(F_{t_i}(g(z)))$ está fora da vizinhança $h^{-1}(V)$ de $h^{-1}(F_u(g(z)))$. Assim $S = \emptyset$ e vemos que F_t é (g, h) -equivariante.

De (a) cada F_t cobre uma aplicação $f_t : L \rightarrow L'$ e a função resultante $f : L \times I \rightarrow L'$ é contínua como

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2n-1} \times I & \xrightarrow{F} & \Sigma^{2n-1} \\ \pi \times 1 \downarrow & & \downarrow \pi' \\ L \times I & \xrightarrow{f} & L' \end{array}$$

é um diagrama comutativo e $\pi \times 1$ é aberta. ■

Teorema 5.4.3. *Se $f : L \rightarrow L'$, $f_{\#} : G \rightarrow G'$ vem da aplicação induzida dos grupos fundamentais (como no teorema 1.4.15) então a aplicação $f_{\#}$ é independente de qualquer escolha do ponto base. Na verdade, se $h \in G'$ as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (1) $f_{\#}(g) = h$
- (2) Qualquer $\tilde{f} : \Sigma^{2n-1} \rightarrow \Sigma^{2n-1}$ que cobre f é (g, h) -equivariante
- (3) Existe $\tilde{f}$ que cobre f que é (g, h) -equivariante.

Mais ainda se $f_0 \simeq f_1 : L \rightarrow L'$ (são livremente homotópicas) então $f_{0\#} = f_{1\#}$.

Demonstração: Como L e L' são conexos por caminhos, os grupos fundamentais independem do ponto base. Se $\tilde{f}$ cobre f escolha pontos x, y e pontos de recobrimento $\tilde{x}, \tilde{y}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$ e $f(x) = y$. Então pelo teorema 1.4.15, $f_{\#}(g) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ g$. Então todo levantamento $\tilde{f}$ é (g, h) -equivariante para algum h ($h = f_{\#}(g)$) onde $f_{\#} = \theta(y, \tilde{y}) \circ (\text{induzida no } \pi_1) \circ \theta(x, \tilde{x})^{-1}$.

Se $\tilde{f}$ é (g, h) -equivariante e $\hat{f}$ é outro levantamento então $\hat{f} = k\tilde{f}$ com $k \in G'$ e temos $\hat{f}g = k\tilde{f}g = kh\tilde{f} = h\hat{f}$. Então (3) $\Rightarrow$ (2). Claramente (2) $\Rightarrow$ (3), já que o levantamento de $f \circ \pi$ cobre f .

Se $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ são dois levantamentos, cada um com uma induzida $f_{\#}$, uma com $f_{\#}(g) = h$ e outra com $f_{\#}(g) = h'$, então $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ são (g, h) e (g, h') -equivariantes, respectivamente. Como (3) $\Rightarrow$ (2) $h = h'$ e assim $f_{\#}$ está bem definida e é independente das escolhas.

Do que foi feito, as equivalências **(1)** $\Leftrightarrow$ **(2)** $\Leftrightarrow$ **(3)** são óbvias.

Finalmente se $\{f_t\} : L \longrightarrow L'$ é uma homotopia de f_0 a f_1 , seja $\{\tilde{f}_t\}$ um levantamento de homotopia à Σ^{2n-1} . Cada $\tilde{f}_t$ é (g, h_t) -equivariante, onde $(f_t)_\#(g) = h_t$. Mas pelo teorema 5.4.2b, $h_t = h_0$, $\forall t$. Assim $f_{1\#} = f_{0\#}$. ■

Seguindo as idéias dos teoremas 5.4.2 e 5.4.3 apresentamos alguns resultados sobre aplicações equivariantes de Σ^{2n-1} e então interpretaremos esses resultados concentrados nas classes de homotopias das aplicações $L \longrightarrow L'$.

Proposição 5.4.4. *Se f_0 e f_1 são quaisquer duas aplicações (g, h) -equivariantes de Σ^{2n-1} então $\text{grau } f_0 \equiv \text{grau } f_1 \pmod{p}$. Se, na verdade, $\text{grau } f_0 = \text{grau } f_1$ então f_0 e f_1 são equivariantemente homotópicas.*

Demonstração: Seja Σ^{2n-1} visto como um complexo celular - chamaremos de K - como em 5.3, e seja $P = K \times I$, um $2n$ -complexo. Afirmamos que existe uma aplicação $F : P^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ (onde P^i denota o i -esqueleto de P) tal que $F_t = f_t(t = 0, 1)$, $F_t(g(x)) = hF_t(x)$, $\forall (x, t) \in P^{2n-1}$ onde $F_t = F|_{(K \times \{t\}) \cap P^{2n-1}}$.

A função F é construída indutivamente sobre os complexos $P_i = P^i \cup (K \times \{0, 1\})$. Colocamos $F^0|_{P_0} = f_0 \cup f_1$. Suponha que $F^i|_{P_i}$ é definida e satisfaz as propriedades equivariantes onde $0 \leq i < 2n - 1$. Em particular $F^i|_{\partial(E_0^i \times I)}$ é definido já que $\dim(\partial(E_0^i \times I)) = i$. Dessa maneira existe uma extensão $F^{i+1} : E_0^i \times I \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ (usando o teorema 1.2.2). Agora defina $F^{i+1} : E_j^i \times I \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ para $j \geq 1$ por

$$F_t^{i+1}(x) = h^{-q}(F_t^{i+1}|_{E_0^i})g^q(x)$$

onde $g^q(E_j^i) = E_0^i$.

Está bem definido para todo P_{i+1} pois, como $\text{mdc}(q_j, p) = 1$, existe exatamente um $q \pmod{p}$ com $g^q(E_j^i) = E_0^i$, e por causa disso, se $(x, t) \in \partial(E_j^i \times I) \subset P_i$ a hipótese de indução $F_t^i(y) = h^{-1}F_t^i g(y)$ aplicada a $y = g^k(x)$, para $k = 0, 1, \dots, q - 1$ implica que

$$\begin{aligned} F_t^i(x) &= h^{-1}(F_t^i(g(x))) = h^{-2}F_t^i g^{-2}(x) = \dots = h^{-q}F_t^i g^q(x) \\ &= h^{-q}F_t^i|_{E_0^i} g^q(x) = F_t^{i+1}(x). \end{aligned}$$

F^{i+1} possui a propriedade equivariante em P_{i+1} pois se $x \in E_j^i$ então $g(x) \in E_k^i$ onde $g^{q-1}(E_k^i) = E_0^i$. Assim

$$F_t^{i+1}g(x) = h^{-(q-1)}(F_t^{i+1}|_{E_0^i})g^{q-1}(g(x)) = hF_t^{i+1}$$

Ponha $F = F^{2n-1}$, a prova da afirmação está completa.

Como em 5.3 assumamos que Σ^{2n-1} e as E_j^{2n-1} são orientadas tal que a inclusão $E_j^{2n-1} \subset \Sigma^{2n-1}$ ($0 \leq j < p$) preserva a orientação. Dê a $\Sigma^{2n-1} \times I$ a orientação produto tal que $\partial(\Sigma^{2n-1} \times I) = (\Sigma^{2n-1} \times 1) - (\Sigma^{2n-1} \times 0)$. Isso induz uma orientação em cada $E_j^{2n-1} \times I$ e assim em $\partial(E_j^{2n-1} \times I)$. Seja $F_j = F|_{\partial(E_j^{2n-1} \times I)} : \partial(E_j^{2n-1} \times I) \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$. Como a imagem e o domínio

dos F_j são $(2n-1)$ -esferas orientadas o grau de F_j está bem definido. Note que $F_j|_{E_{j+1}^{2n-2} \times I} = F_{j+1}|_{E_{j+1}^{2n-2} \times I}$, já que $E_{j+1}^{2n-2} \times I$ é um subconjunto do domínio em comum de F_j e F_{j+1} , e pensando nas cadeias celulares, $\partial(E_{j+1}^{2n-1} \times I) = E_{j+1}^{2n-1} \times 1 - E_j^{2n-1} \times 0 + E_{j+1}^{2n-2} \times I - E_j^{2n-2} \times I$. Então temos que (ou usando [11], II.1.30 e o homomorfismo de Hurewicz)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{p-1} (F_j)_\# (\partial(E_{j+1}^{2n-1} \times I)) = \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} (F_j)_\# (E_{j+1}^{2n-1} \times 1) - (F_j)_\# (E_j^{2n-1} \times 0) + (F_j)_\# (E_{j+1}^{2n-2} \times I) - (F_j)_\# (E_j^{2n-2} \times I) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} (F_j)_\# (E_{j+1}^{2n-1} \times 1) - (F_j)_\# (E_j^{2n-1} \times 0) = \sum_{j=0}^{p-1} (f_1)_\# (E_{j+1}^{2n-1}) - (f_0)_\# (E_j^{2n-1}) \\ &= (f_1)_\# \left(\sum_{j=0}^{p-1} (E_{j+1}^{2n-1}) \right) - (f_0)_\# \left(\sum_{j=0}^{p-1} (E_j^{2n-1}) \right) = (f_1)_\# (\Sigma^{2n-1}) - (f_0)_\# (\Sigma^{2n-1}) \end{aligned}$$

Dessa forma temos que

$$\sum_j \text{grau } F_j = \text{grau } f_1 - \text{grau } f_0.$$

Mas, como $F_j = h^{-q} F_0 (g^q \times 1)$, onde $g^q \times 1 (\partial(E_j^{2n-1} \times I)) = \partial(E_0^{2n-1} \times I)$ por um homomorfismo de grau 1, e $h^{-q} : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ é ainda de grau 1 e assim $\text{grau } F_j = \text{grau } F_0$. Assim $\text{grau } f_1 - \text{grau } f_0 = \sum_j \text{grau } F_j = p \text{ grau } F_0 \equiv 0 \pmod{p}$. Provando a primeira afirmação da proposição.

Se, na verdade, $\text{grau } f_0 = \text{grau } f_1$ temos que $\text{grau } F_0 = 0$. Pelo teorema de Brouwer [24], F_0 pode ser estendida a $E_0^{2n-1} \times I$ e assim, como antes, F pode ser estendida a $P_{2n} = \Sigma^{2n-1} \times I$, colocando $F_t|_{E_j^{2n-1}} = h^{-q} (F_t|_{E_0^{2n-1}}) g^q$, onde $g^q (E_0^{2n-1}) = E_j^{2n-1}$. Essa extensão é a homotopia equivariante requerida. ■

Teorema 5.4.5. *Se $(d, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ então existe uma aplicação (g, g'^a) equivariante $f : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ de grau d se, e somente se, $d \equiv a^n r_1 \dots r_n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$ onde $r_j q_j \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração: Para cada j fixe um r_j com $r_j q_j \equiv 1 \pmod{p}$. Uma aplicação equivariante de grau $d_0 = a^n r_1 \dots r_n q'_1 \dots q'_n$ pode ser construída simplesmente enrolando cada Σ_j sobre si, $r_j a q'_j$ vezes e considerando o join dessas aplicações. Para tornar isso mais preciso usaremos a notação de números complexos. Defina $T : \Sigma^1 \longrightarrow S^1$ por $T(z) = z/|z|$. Considere as rotações R_j e R'_j agindo em todo o $\mathbb{R}^2$. Elas comutam com T . Seja $m_j(z) = z^{r_j a q'_j}$ ($z \in \mathbb{C}$) e defina $f_j : \Sigma^1 \longrightarrow \Sigma^1$ por $f_j = T^{-1} m_j T$. Então afirmamos que $f = f_1 * \dots * f_n : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ é um aplicação (g, g'^a) equivariante de grau d_0 .

A equivariância segue imediatamente uma vez que $(R'_j)^a f_j = f_j R_j$ e isso vale pois

$$\begin{aligned}
 (R'_j)^a f_j(z) &= (R'_j)^a T^{-1} m_j T(z) = T^{-1} (R'_j)^a m_j (T(z)) \\
 &= T^{-1} (R'_j)^{ar_j q_j} m_j (T(z)) \\
 &= T^{-1} (e^{2\pi q'_j ar_j q_j / p} T(z)^{ar_j q'_j}) \\
 &= T^{-1} ((R_j T(z))^{ar_j q'_j}) = T^{-1} m_j (R_j(T(z))) \\
 &= T^{-1} m_j T(R_j(z)) = f_j R_j(z)
 \end{aligned}$$

Que o grau de f_0 é d_0 pode ser visto diretamente por contagem. Daremos o argumento para $p \neq 2$, alguns ajustes são necessários para $p = 2$. Existe uma subdivisão de $\hat{\Sigma}_j$ de Σ_j em $|pr_j a q'_j| - 1$ - simplexes - digamos que $[v_k, v_{k+1}]$ é dividido em $v_k = v_{k,0}, v_{k,1}, \dots, v_{k,r_j a q'_j} = v_{k+1}$ - tal que f_j leva simplexes de $\hat{\Sigma}_j$ homeomorficamente sobre simplexes de Σ_j ; isto é, $f_j([v_{k,b}, v_{k,b+1}]) = [v_s, v_s \pm 1]$ para algum s , o sinal de acordo com o sinal de $r_j a q'_j$. Seja $\hat{\Sigma}^{2n-1} = \hat{\Sigma}_1 * \dots * \hat{\Sigma}_n$. Então o gerador α dos ciclos simpliciais $Z_{2n-1}(\hat{\Sigma}^{2n-1})$ é a cadeia que é a soma dos $(2n - 1)$ - simplexes da forma

$$[v_{k,a}, v_{k,a+1}] * [v_{l,b}, v_{l,b+1}] * \dots * [v_{m,c}, v_{m,c+1}] < \hat{\Sigma}_1 * \dots * \hat{\Sigma}_n$$

Como um simplexo vai por f em $\pm$ um simplexo típico de uma escolha similar de gerador β de $Z_{2n-1}(\Sigma^{2n-1})$, o sinal é o produto dos sinais de $r_j a q'_j$; isto é, o sinal de d_0 . Contando os possíveis simplexes envolvidos, concluímos que $f_*(\alpha) = d_0 \beta$ como afirmamos. Da proposição 5.4.4 e o fato que existe uma aplicação equivariante de *grau* d_0 concluímos que se d é o grau de qualquer (g, g'^a) aplicação equivariante $d \equiv d_0 \pmod{p}$.

Por outro lado suponha que $d = d_0 + Np$ onde d_0 é o grau de uma (g, g'^a) - aplicação equivariante f . Modificaremos f como se segue para obter uma aplicação (g, g'^a) -equivariante de *grau* d : Seja Q_0 uma bola fechada no interior superior do simplexo E_0^{2n-1} . Usando um sistema de coordenadas com no centro de Q_0 escrevemos

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \{tx \mid x \in \partial Q_0, 0 \leq t \leq 1\}; \quad \frac{1}{2}Q_0 = \{tx \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}, \\
 Q_j &= g^j(Q_0), (0 \leq j \leq p); \quad \frac{1}{2}Q_j = g^j(\frac{1}{2}Q_0).
 \end{aligned}$$

Defina $h : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ por:

(A) $h|_{\Sigma^{2n-1} - (\cup_j \overset{\circ}{Q}_j)} = f|_{\Sigma^{2n-1} - (\cup_j \overset{\circ}{Q}_j)}$

(B) $h(tx) = f((2t - 1)x)$, se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

$h : (\frac{1}{2}Q_0, \partial(\frac{1}{2}Q_0)) \longrightarrow (\Sigma^{2n-1}, f(0))$ é uma aplicação de grau N qualquer e $0 \in Q_0$ é o centro de Q_0 ;

(C) $h|_{Q_j} = (g'^a)^j (h|_{Q_0}) g^{-j}$

h está bem definida e é equivariante, como na prova da proposição 5.4.4. Para verificar o grau de h , seja $C = \Sigma^{2n-1} - \cup_j (\frac{1}{2}\overset{\circ}{Q}_j)$ e $D_j = E_j^{2n-1} - (\frac{1}{2}\overset{\circ}{Q}_j)$. Considerando

$(h|_C)_* : H_{2n-1}(C, \partial C) \longrightarrow H_{2n-1}(\Sigma^{2n-1}, f(0))$ e $(h|_{\frac{1}{2}Q_j})_* : H_{2n-1}(\frac{1}{2}Q_j, \partial(\frac{1}{2}Q_j)) \longrightarrow H_{2n-1}(\Sigma^{2n-1}, f(0))$. E assim de modo análogo na proposição anterior (ou usando [11], II.1.31 e o homomorfismo de Hurewicz) temos que

$$\text{grau } h = \text{grau } (h|_C) + \sum_j \text{grau } (h|_{\frac{1}{2}Q_j})$$

Mas g^{-j} leva Q_j preservando a orientação sobre Q_0 e $(g'^a)^j$ é uma rotação de Σ^{2n-1} . Assim

$$(h|_{\frac{1}{2}Q_j})_*(\text{gerador}) = (h|_{\frac{1}{2}Q_0})_*(\text{gerador}) = N \text{ gerador}.$$

Como o $\text{grau } f = \text{grau } h|_C$, temos que $\text{grau } h = \text{grau } f + \sum_j N = d_0 + Np$, como queríamos. ■

Agora passaremos para a interpretação desses resultados equivariantes como resultados sobre aplicações entre espaços lenticulares.

Teorema 5.4.6. *Suponha que $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$ e $L' = L(p; q'_1, \dots, q'_n)$ são orientados pela de e_{2n-1} e e'_{2n-1} como geradores de H_{2n-1} (ver 5.3).*

- (A) *Se $f_0, f_1 : L \longrightarrow L'$ então $f_0 \simeq f_1 \Leftrightarrow \text{grau } f_0 = \text{grau } f_1$ e $f_{0\#} = f_{1\#} : G \longrightarrow G'$;*
- (B) *Se $(d, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ então existe uma aplicação $f : L \longrightarrow L'$ tal que $\text{grau } f = d$ e $f_{\#}(g) = g'^a$ se, e somente se, $d \equiv a^n r_1 \dots r_n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$, onde $r_j q_j \equiv 1 \pmod{p}$.*
- (C) *$f : L \longrightarrow L'$ então f é uma equivalência de homotopia se e só se $\text{grau } f = \pm 1$.*

Demonstração: (A) Suponha que $\text{grau } f_0 = \text{grau } f_1$ e $f_{0\#}(g) = f_{1\#}(g) = h$. Escolha levantamentos $\tilde{f}_i : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$, $i = 0, 1$. Os dois são (g, h) -equivariante pelo teorema 5.4.3. Esses levantamentos possuem o mesmo grau pois se $z = \sum_{i=0}^{p-1} g^i (\tilde{e}_{2n-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} g'^i (\tilde{e}_{2n-1})$ é um ciclo básico para $C_{2n-1}(\Sigma^{2n-1})$ então $\pi_*(z) = \pi'_*(z) = p e_{2n-1}$, e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \Sigma^{2n-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ L & \xrightarrow{f_i} & L' \end{array}$$

mostra que $\text{grau } \tilde{f}_0 = \text{grau } f_0 = \text{grau } f_1 = \text{grau } \tilde{f}_1$. Assim pela proposição 5.4.4 $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ são equivariantemente homotópicas. E pelo teorema 5.4.2, $f_0 \simeq f_1$. A volta é trivial pelo teorema 5.4.3.

(B) Dado f tal que $\text{grau } f = d$ e $f_{\#}(g) = g'$, seja $\tilde{f} : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ um levantamento de f . Então $\tilde{f}$ é uma aplicação (g, g'^a) -equivariante que pelo argumento usado em (A), tem grau d . Assim, do teorema 5.4.5, $d \equiv a^n r_1 \dots r_n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$.

Por outro lado se d satisfaz essa congruência, existe, do teorema 5.4.5, uma aplicação (g, g'^a) -equivariante $F : \Sigma^{2n-1} \longrightarrow \Sigma^{2n-1}$ de grau d . Pelos teoremas 5.4.2 e 5.4.3, F cobre um aplicação $f : L \longrightarrow L'$ tal que $f_{\#}(g) = g'^a$. Como antes $\text{grau } f = \text{grau } F = d$.

(C) Suponha que $f : L \longrightarrow L'$ tem grau ± 1 . Assuma $f_{\#}(g) = g'^a$. Então

$$\text{grau } f = \pm 1 \equiv a^n r_1 \dots r_n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$$

isto é

$$a^n \equiv \pm q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}$$

onde $r'_1 q'_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Assim $\text{mdc}(a, p) = 1$ (já que p não divide a^n) e podemos escolher b tal que $ab \equiv 1 \pmod{p}$. Então

$$1 \equiv b^n a^n \equiv \pm b^n q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}.$$

Dessa maneira por **(B)**, existe $\tilde{f} : L' \longrightarrow L$ com $\text{grau } \tilde{f} = \text{grau } f = \pm 1$ e $\tilde{f}_\#(g') = (g')^b$. Então $\text{grau } (\tilde{f}f) = 1$ e $(\tilde{f}f)_\#(g) = g^{ab} = g$. Assim por **(A)** $\tilde{f}f \simeq 1_L$. Similarmente $f\tilde{f} \simeq 1_{L'}$ e f é uma equivalência de homotopia. A ida é clara. ■

Note que quando $p = 2$, $L = L' = L(2; 1, 1, \dots, 1) = \mathbb{R}P^{2n-1}$ (Projetivo Real). A proposição anterior nos diz que existem exatamente duas classes de equivalências de homotopia própria de $\mathbb{R}P^{2n-1}$, uma de grau 1 e outra de grau -1 . Todos os outros casos são dados a seguir pela classificação das equivalências de homotopia.

Teorema 5.4.7. *Suponha que $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$ e $L' = L(p; q'_1, \dots, q'_n)$ onde $p > 2$ e que $r'_j q'_j \equiv 1 \pmod{p}$ para todo j . Seja $\mathcal{E}[L, L']$ o conjunto das classes de equivalência, por homotopia, de equivalências de homotopia $f : L \longrightarrow L'$. Então existe uma bijeção*

$$\varphi : \mathcal{E}[L, L'] \longrightarrow \{a \mid 0 < a < p \text{ e } a^n \equiv \pm q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}\}$$

dada por $\varphi([f]) = a$ se $f_\#(g) = g^a$. Mais ainda se $\varphi[f] = a$ então $\text{grau } f = \pm 1$, onde o sinal é igual ao sinal de $a^n \equiv \pm q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}$.

Demonstração: Chamaremos $B = \{a \mid 0 < a < p \text{ e } a^n \equiv \pm q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}\}$.

φ está bem definida, já que, $f \simeq h \Leftrightarrow \text{grau } f = \text{grau } h$ e $f_\# = h_\#$ logo $f_\#(g) = h_\#(g) = g^a$ e então $\varphi([f]) = a = \varphi([h])$.

φ é sobrejetora, pois, dado $a \in B$, usando o teorema 5.4.6, existe $f : L \longrightarrow L'$ tal que $\text{grau } f = \pm 1$ e $f_\#(g) = g^a$. Logo f é uma equivalência de homotopia e $\varphi([f]) = a$.

Se $\varphi([f]) = \varphi([h])$ então $f_\#(g) = g^a = h_\#(g)$. Como g é gerador de G e $f_\#, h_\#$ são homomorfismo de grupos, $f_\# = h_\#$; e ainda, $\text{grau } f = \pm 1$ e $\text{grau } h = \pm 1$, mas como $a^n \equiv \pm q_1 \dots q_n r'_1 \dots r'_n \pmod{p}$, onde esse sinal é igual ao sinal do grau de f e de h , pois se $p \nmid a$, $p \nmid b$ e $a \equiv b \pmod{p}$ então $a \not\equiv -b \pmod{p}$. Logo $\text{grau } f = \text{grau } h$, portanto, $h \simeq f$ e assim $[h] = [f]$. ■

Como aplicações do teorema anterior temos:

- (I)** $\mathcal{E}(L, L)$ é isomorfo ao grupo consistindo das unidades a em $\mathbb{Z}_p$ tal que $a^n \equiv \pm 1 \pmod{p}$;
- (II)** Qualquer equivalência de $L_{7,q}$ sobre si mesmo é de grau 1. Então $L_{7,q}$ não admite orientação reversa de homeomorfismo próprio. Tais variedades são chamadas assimétricas;
- (III)** $L_{p,q}$ e $L_{p,q'}$ possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $qq' \equiv \pm b^2 \pmod{p}$. Então temos os exemplos $L_{5,1} \not\simeq L_{5,2}$ e $L_{7,1} \simeq L_{7,2}$ onde $\simeq$ denota

equivalência de homotopia. Mostraremos na próxima seção que $L_{7,1}$ e $L_{7,2}$ não possuem o mesmo tipo de homotopia simples.

Justificativas:

(I) Direto do teorema 5.4.7.

(II) $L_{7,q} = L(7; q, 1)$. Seja $f : L_{7,q} \longrightarrow L_{7,q}$ uma equivalência de homotopia. Assim $a^2 \equiv \pm 1 \pmod{7}$. Vamos supor que $\text{grau } f = -1$, então $a^2 \equiv -1 \pmod{7}$, mas não existe $0 < a < p$ que satisfaz essa equação. Portanto, qualquer equivalência de homotopia própria possui grau $+1$.

(III) Se $L_{p,q}$ e $L_{p,q'}$ possuem o mesmo tipo de homotopia então existe a tal que $a^2 \equiv \pm q r' \pmod{p}$ o que implica que $a^2 q'^2 \equiv \pm q q' \pmod{p}$ e a para $b = a q'$, temos que existe b tal que $b^2 \equiv \pm q q' \pmod{p}$. A volta é clara. Agora, $L_{5,1} \not\simeq L_{5,2}$ pois se $L_{5,1} \simeq L_{5,2}$, por (II), existe $b^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, que é absurdo pois não existe b com essa propriedade. Para $L_{7,1}$ e $L_{7,2}$, temos que, para $b = 5$, $5^2 \equiv 2 \pmod{7}$. Logo por (II) $L_{7,1} \simeq L_{7,2}$.

5.5 A equivalência de homotopia simples dos espaços lenticulares

Para essa seção usaremos um resultado da teoria dos números, que a prova pode ser encontrada em [14], p. 1-12.

Teorema 5.5.1 (Teorema de Franz). *Seja $S = \{j \in \mathbb{Z} \mid 0 < j < p, \text{mdc}(j, p) = 1\}$. Suponha que $\{a_j\}_{j \in S}$ é uma seqüência de inteiros indexados em S , satisfazendo:*

- (1) $\sum_{j \in S} a_j = 0$
- (2) $a_j = a_{p-j}$
- (3) $\prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{a_j} = 1$ para toda p -ésima raiz da unidade $\xi \neq 1$.

Então $a_j = 0, \forall j \in S$.

Teorema 5.5.2. *Seja $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$ e $L' = L(p; q'_1, \dots, q'_n)$ e suponha que $f : L \longrightarrow L'$ é uma equivalência de homotopia simples. Se $f_{\#}(g) = g'^a$ (como no teorema 5.4.3) então existem números $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$ tal que $(q_1, \dots, q_n)$ é igual $\pmod{p}$ a alguma permutação de $(\epsilon_1 a q'_1, \dots, \epsilon_n a q'_n)$.*

Demonstração: Daremos a $\Sigma^{2n-1} = \tilde{L} = \tilde{L}'$ a estrutura celular da seção 5.3. Então $C(\tilde{L}')$ e $C(\tilde{L})_{f_{\#}}$ são $\mathbb{Z}(G')$ -complexos com bases $\{\tilde{e}_k\}$ na dimensão k e operador bordo dado pelas equações da seção 5.3 também. Denote $\sum(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}$, $C_j(\tilde{L}') = C'_j$, e

$[C_j(\tilde{L})]_{f\#} = C_j$, dessa maneira estes complexos ficam:

$$\begin{aligned} C(\tilde{L}') : 0 \longrightarrow C'_{2n-1} &\xrightarrow{(g')^{r'_{n-1}-1}} C'_{2n-2} \xrightarrow{\Sigma(g')} C'_{2n-3} \xrightarrow{(g')^{r'_{n-1}-1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\Sigma(g')} C'_1 \xrightarrow{(g')^{r'_1-1}} C'_0 \longrightarrow 0 \\ C(\tilde{L})_{f\#} : 0 \longrightarrow C_{2n-1} &\xrightarrow{(g')^{ar'_{n-1}-1}} C_{2n-2} \xrightarrow{\Sigma(g'^a)} C_{2n-3} \xrightarrow{(g')^{ar'_{n-1}-1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\Sigma(g'^a)} C_1 \xrightarrow{(g')^{ar'_1-1}} C_0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Agora usando o teorema 4.4.9, $0 = \tau(f) = \tau(\mathcal{C})$ onde $\mathcal{C}$ é um $Wh(G')$ -complexo acíclico que é baseado na seqüência exata curta de $Wh(G')$ -complexos,

$$0 \longrightarrow C(\tilde{L}') \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \overline{C}(\tilde{L}) \longrightarrow 0$$

onde $\overline{C}(\tilde{L})$ é o complexo $C(\tilde{L})_{f\#}$ transladado em uma dimensão e o operador bordo multiplicado por (-1) .

Seria muito útil se os complexos da última seqüência fossem acíclicos. Para isso faremos a mudança de anéis. Suponha que ξ é uma p -ésima raiz da unidade qualquer diferente de 1. Seja $\mathbb{C}$ os números complexos e seja $h : \mathbb{Z}(G') \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(\sum_j n_j (g')^j) = \sum_j n_j \xi^j$. Então a discussão no final do parágrafo 3.8 nos dá a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow C(\tilde{L}')_h \longrightarrow \mathcal{C}_h \longrightarrow \overline{C}(\tilde{L})_h \longrightarrow 0$$

Mas agora $C(\tilde{L}')_h$ e $\overline{C}(\tilde{L})_h$ são $(\mathbb{C}, \overline{G})$ -complexos acíclico, pela proposição 3.8.1, onde $\overline{G} = \{\pm \xi^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$. Observamos que para aplicar tal proposição, temos que notar que $mdc(a, p) = 1$ implica que $\Sigma(g') = \Sigma(g')^a$ e $mdc(ar'_j, p) = 1$ para todo j . Usando ainda a proposição 3.8.1 nos dá

$$\begin{aligned} \tau(C(\tilde{L}')_h) &= \tau\left(\prod_{k=1}^n (\xi^{r'_k} - 1)\right) \in K_{\overline{G}}(\mathbb{C}) \\ \tau(\overline{C}(\tilde{L})_h) &= -\tau\left(\prod_{k=1}^n (\xi^{ar_k} - 1)\right) \in K_{\overline{G}}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

O menos da última equação vem da translação da dimensão (só observar a prova da proposição 3.8.1). A mudança de sinal no operador bordo não possui efeito como $\tau(d + \delta) = \tau(-d - \delta)$. Dessa maneira as proposições 3.7.2 e 3.8.2 nos dão

$$\begin{aligned} 0 &= h_*(\tau(\mathcal{C})) = \tau(\mathcal{C}_h) \\ &= \tau(C(\tilde{L}')_h) + \tau(\overline{C}(\tilde{L})_h) \\ &= \tau\left(\prod_{k=1}^n (\xi^{r'_k} - 1)\right) - \tau\left(\prod_{k=1}^n (\xi^{ar_k} - 1)\right). \end{aligned}$$

Assim pelo teorema 3.2.8 o determinante dessas 1×1 matrizes diferem apenas por um elemento de $\overline{G}$. Então

$$\prod_{k=1}^n (\xi^{r'_k} - 1) = \pm \xi^s \prod_{k=1}^n (\xi^{ar_k} - 1). \quad (5.1)$$

Faremos algumas manipulações para mostrar que nosso teorema segue da equação anterior e o Teorema de Franz.

Agora simplificaremos a notação escrevendo $s_k = r'_k$, $t_k = ar_k$. A equação (5.1) nos dá para toda p -ésima raiz não trivial da unidade que

$$\left| \prod_{k=1}^n (\xi^{s_k} - 1) \right|^2 = \left| \prod_{k=1}^n (\xi^{t_k} - 1) \right|^2$$

ou

$$\prod_{k=1}^n (\xi^{s_k} - 1)(\xi^{-s_k} - 1) = \prod_{k=1}^n (\xi^{t_k} - 1)(\xi^{-t_k} - 1) \quad (5.2)$$

como $(\xi^{-d} - 1)$ é o conjugado de $(\xi^d - 1)$.

Se $j \in S$, seja S_j a subsequência de $(s_1, -s_1, s_2, -s_2, \dots, s_n, -s_n)$ consistindo dos termos x tal que $x \equiv j \pmod{p}$. Seja m_j o comprimento de S_j . Similarmente defina a sequência T_j com comprimento m'_j a partir da sequência $(t_1, -t_1, \dots, t_n, -t_n)$. Como $\text{mdc}(s_k, p) = 1$ temos que $\pm s_k \equiv j \pmod{p}$ para algum $j \in S$, e $i \neq j$ implica que $S_i \cap S_j = \emptyset$, então a sequência $(s_1, -s_1, s_2, -s_2, \dots, s_n, -s_n)$ é a união disjunta do S_j . Assim $\sum_{j \in S} m_j = 2n$. Ainda a correspondência $x \mapsto -x$ nos dá uma bijeção de S_j em S_{p-j} , assim $m_j = m_{p-j}$. Claramente, equações similares valem para m'_j . Seja $a_j = m_j - m'_j$. Então

$$(1) \sum_j a_j = 2n - 2n = 0$$

$$(2) a_j = m_j - m'_j = m_{p-j} - m'_{p-j} = a_{p-j}$$

$$(3) \text{ Se } \xi \neq 1 \text{ é uma raiz da unidade qualquer e se } S_j = (\epsilon_{j1}s_{j1}, \dots, \epsilon_{jm_j}s_{jm_j}), T_j = (\delta_{j1}t_{j1}, \dots, \delta_{jm'_j}t_{jm'_j}) \text{ com } \epsilon_{j\alpha}, \delta_{j\beta} = \pm 1 \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{a_j} &= \prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{m_j} (\xi^j - 1)^{-m_j} \\ &= \prod_{j \in S} \left[\left(\prod_{i=1}^{m_j} (\xi^{\epsilon_{ji}s_{ji}}) \right) \left(\prod_{i=1}^{m'_j} (\xi^{\delta_{ji}t_{ji}}) \right)^{-1} \right] \\ &= \prod_{k=1}^n (\xi^{s_k} - 1)(\xi^{-s_k} - 1)(\xi^{t_k} - 1)^{-1}(\xi^{-t_k} - 1) \\ &= 1 \text{ da equação (5.2)} \end{aligned}$$

Assim do Teorema de Franz, cada $a_j = 0$ e $m_j = m'_j$. Mas se $p \neq 2$, m_j é apenas o número de termos de $(r'_1, \dots, r'_n)$ que são congruentes a $\pm j$ módulo p ; e similarmente para m'_j e $(ar_1, \dots, ar_n)$. Assim por uma reordenação $r'_{i_1}, \dots, r'_{i_n}$ temos

$$\epsilon_{i_k} r'_{i_k} \equiv ar_k \pmod{p}, \quad \epsilon_{i_k} \in \{\pm 1\}, \quad k = 1, \dots, n$$

então $\epsilon_{i_k} r'_{i_k} q'_{i_k} q_k \equiv ar_k q_{i_k} q_k \pmod{p}$ o que implica

$$\epsilon_{i_k} q_k \equiv a q'_{i_k} \pmod{p}$$

e assim

$$\epsilon_{i_k} a q'_{i_k} \equiv q_k \pmod{p}.$$

Se $p = 2$ então $a = 1$ e $(q_1, \dots, q_n) = (q'_1, \dots, q'_n) = (1, \dots, 1)$ módulo p . E o resultado segue. ■

Observamos agora se $f : L_{7,2} \longrightarrow L_{7,1}$ é uma equivalência de homotopia, de acordo com o teorema 5.4.7, $f_{\#}(g) = g'^a$ onde $a^2 \equiv 2$ ou $a^2 \equiv 5 \pmod{7}$ e se $\xi = e^{2\pi i/7}$, então

$$|(\xi - 1)^2| \neq |(\xi^a - 1)(\xi^{4a} - 1)|. \quad (5.3)$$

Assim pela prova do teorema anterior f não é uma equivalência de homotopia simples, já que, se fosse teria que valer a igualdade na equação (5.3), que é absurdo.

5.6 A classificação completa

Teorema 5.6.1. *Se $L = L(p; q_1, \dots, q_n)$ e $L' = L(p; q'_1, \dots, q'_n)$ as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (A) *Existe um número a e números $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ tais que $(q_1, \dots, q_n)$ é uma permutação de $(\epsilon_1 a q'_1, \dots, \epsilon_n a q'_n)$ módulo p .*
- (B) *L é equivalente por homotopia simples a L' .*
- (C) *L é p.l. homeomorfo a L' .*
- (D) *L é homeomorfo a L' .*

Mais ainda toda equivalência de homotopia simples (e então por [15], todo homeomorfismo) entre espaços lenticulares é homotópico a um homeomorfismo p.l.

Demonstração: (C) $\Rightarrow$ (D) Claro.

(D) $\Rightarrow$ (B) segue do teorema 4.7.6. Então a equivalência (A)-(D) segue da equivalência (A)-(C).

Provamos pelos teoremas 4.7.6 e 5.5.2 que (C) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (A). Para provar que (A) $\Rightarrow$ (C), suponha que $q_i = \epsilon_{j_i} a q'_{j_i}$ onde $(j_1, \dots, j_n)$ é uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$. Considere Σ^{2n-1} . Seja $T_i : \Sigma_i \longrightarrow \Sigma_{j_i}$ o isomorfismo simplicial dado por $T_i(\underbrace{0, \dots, 0}_i, z, 0, \dots, 0) =$

$(\underbrace{0, \dots, z}_{j_i}, 0, \dots)$, se $\epsilon_{j_i} = 1$ e $T_i(\underbrace{0, \dots, 0}_i, z, \dots, 0) = (\underbrace{0, \dots, \bar{z}}_{j_i}, 0, \dots)$, se $\epsilon_{j_i} = -1$ onde $\bar{z}$ é o conjugado complexo de z . Com R e R' como na seção 5.1 $(R'_{j_i})^a(w) = e^{2\pi i a q'_{j_i}/p} \cdot w$ e $R_i(w) = e^{2\pi i q_i/p} \cdot w$; segue $(R'_i)^a T_i = T_i R_i$. Então o isomorfismo simplicial $T(\sum_i \lambda_i z_i) = \sum_i \lambda_i T_i(z_i)$ é um p.l. homeomorfismo (g, g'^a) -equivariante de Σ^{2n-1} . Que induz uma aplicação $h : L \longrightarrow L'$ pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2n-1} & \xrightarrow{T} & \Sigma^{2n-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ L & \xrightarrow{h} & L' \end{array}$$

h é p.l. como π , π' e T são p.l., e h é um homeomorfismo já que T , sendo equivariante e homeomorfismo, não leva pontos de diferentes fibras em uma mesma, ou seja, vamos supor que $x \neq y$ então $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$ e assim $T(\pi^{-1}(x)) \cap T(\pi^{-1}(y)) = \emptyset$ e então $\pi'[T(\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y))] = \emptyset$ logo $h(x) \neq h(y)$. Então **(A)** $\Rightarrow$ **(C)**.

Finalmente suponha que $f : L \longrightarrow L'$ é uma equivalência de homotopia simples com $f_{\#}(g) = (g')^a$. Pelo teorema 5.5.2, a satisfaz a hipótese de **(A)**. Seja $h : L \longrightarrow L'$ o homeomorfismo p.l. (g, g'^a) -equivariante construído no último parágrafo. Então, pelo teorema 5.4.3, $h_{\#}(g) = g'^a$. Assim se $p > 2$, f é homotópica ao homeomorfismo p.l. h pelo teorema 5.4.7. Quando $p = 2$ existe, por homotopia, exatamente uma equivalência de homotopia em cada grau (direto do teorema 5.4.6). A aplicação $s(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i) = \lambda_1 \bar{z}_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i$ induz um homeomorfismo de grau -1 em $\mathbb{R}P^{2n-1}$, de fato, $s(E_j^{2n-1}) = \Sigma^{2n-2} * \bar{I}_j$, onde $\bar{I}_j = [v_1, B] \cup [B, v_0]$ se $j = 1$ e $\bar{I}_j = [v_0, A] \cup [A, v_1]$ se $j = 0$. Assim $s_*(\pi_*(\tilde{e}_{2n-1})) = \pi'_*(s_*(\tilde{e}_{2n-1})) \Rightarrow s_*(e_{2n-1}) = -e'_{2n-1}$ e portanto, grau $s = -1$. Claramente a identidade em Σ^{2n-1} induz uma aplicação de grau 1 de L em L' . ■

—Tabela de Símbolos e Abreviações

■	a discussão da prova está terminada
I	$= [0, 1]$
I^r	$= I \times \dots \times I$ (r - cópias); $I^r \equiv I^r \times 0 \subset I^{r+1}$
J^r	$= \overline{\partial I^{r+1} - I^r}$
∂	= bordo
$\searrow$	colapsa em (na categoria CW)
$\nearrow$	expande em (na categoria CW)
$\frown$	expande e colapsa em
M_f	Cilindro da Aplicação f
K^r	o r - esqueleto de K
$A < B$	A é subcomplexo de B
$f_{\#}$	aplicação entre os grupos fundamentais induzido por f , ou a aplicação entre os grupos dos homeomorfismos de recobrimento de um espaço de recobrimento universal induzido por f
$\theta(x, \tilde{x})$	o isomorfismo do grupo fundamental no grupo de homeomorfismo de recobrimento do recobrimento universal
$\mathbb{Z}$	os inteiros
$\mathbb{Z}_p$	os inteiros módulo p

$Cov(\tilde{K})$	grupo de homeomorfismos de recobrimento de $\tilde{K}$
$\mathbb{Z}(G)$	o grupo anel de G
$Wh(L)$	o grupo de Whitehead do complexo L
$K_G(R)$	um grupo abeliano dependendo do anel R e do subgrupo G das unidades
$Wh(G)$	o grupo de Whitehead do grupo G (igual a $K_T(\mathbb{Z}(G))$ onde T é o grupo das unidades triviais de R)
$Wh(\pi_1(L))$	um grupo construído canonicamente identificando todos os grupos $Wh(\pi_1(L, x))$, L sendo complexo CW conexo
(R, G) - complexo	um complexo de cadeia baseado sobre R com uma classe de bases
$Wh(G)$ - complexo	um (R, T) - complexo, onde $R = \mathbb{Z}(G)$ e T é o grupo das unidades triviais de R
$\langle f \rangle_{x,y}$	matriz do homomorfismo f com respeito as bases x, y
$\langle x/y \rangle$	matriz expressando os elementos da base x em termos dos elementos da base y
$f \oplus g : A \oplus B \rightarrow A' \oplus B'$	$(f \oplus g)(a, b) = (f(a), g(b))$
$f + g : A \oplus B \rightarrow C$	$(f + g)(a, b) = f(a) + g(b)$
$f + g : A \rightarrow B \oplus C$	$(f + g)(a) = (f(a), g(a))$
$\simeq$	aplicações homotópicas ou espaços homotopicamente equivalentes
$\approx$	homeomorfismo de espaços
$\cong$	isomorfismo na categoria em discussão
$\stackrel{s}{\sim}$	equivalência estável de complexos de cadeia
C_h	complexo sobre R' induzido por $h : R \rightarrow R'$
w_n	gerador padrão de $H_n(I^n, \partial I^n)$
$\langle \varphi_\alpha \rangle$	igual a $(\varphi_\alpha)_*(w_n)$

Referências Bibliográficas

- [1] Bass, H. - *K - theory and stable algebra*, Publ. de l'Inst. des Hautes Etudes Sci, 22, (1964).
- [2] Bass, H.; Heller, A.; Swan, R. - *The Whitehead Group of a polynomial extension*, Publ. de l'Inst. des Hautes Etudes Sci, 22, (1964).
- [3] Bass, H.; Milnor, J.; Serre J.P. - *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and SP_{2n} ($n \geq 2$)*, Publ. de l'Inst. des Hautes Etudes Sci, 33, (1967).
- [4] Brown, E.M. - *The Hauptvermutung for 3 - complexes*, Trans. AMS, 144, (1969), 173-196.
- [5] Chapman, T.A. - *Topological invariance of Whitehead torsion*, Amer. J. Math., 96, (1974), 488-497.
- [6] Cohen, M.M. - *A course in Simple-Homotopy Theory*, Graduate Text in Mathematics, v.10, (1973).
- [7] Davis, J.F.; Kirk, P. - *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics, (2001).
- [8] Dyer, M.N.; Sieradski, A.J. - *Trees of homotopy types of two-dimensional CW-complexes*, Comment. Math. Helv., 48, (1973), 31-44.
- [9] Hatcher, A. - *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).
- [10] Higman, G. - *The Units of group rings*, Proc. London Math Soc., 46, (1940), 231-248.
- [11] Hilton, P.J.; Wylie, S. - *Homotopy Theory*, Cambridge U. Press, (1962).
- [12] Hu, S.T. - *Homotopy Theory*, Academuc Press, (1959).

- [13] Hudson, J.F.P. - *Piecewise linear topology*, W.A. Benjamin, Inc. (1968).
- [14] Kervaire, M.A.; Maumary, S.; DeRham, G. - *Torsion et type simple d'homotopie*, Lecture Notes in Mathematics, 48, (1967).
- [15] Kirby, R.C.; Siebenmann, L.C. - *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. AMS 75, (1969), 742-749.
- [16] Lima, E.L. - *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, IMPA, CNPq, (1998).
- [17] Jacobson, N. - *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, (1985).
- [18] Massey, W.S. - *A basic course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag New York Inc., (1991).
- [19] Milnor, J. - *Whitehead Torsion*, Bull. AMS 72, (1966), 358-422.
- [20] Munkres, J.R. - *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, (1984).
- [21] Olum, P. - *Self-equivalences of pseudo-projective planes*, Topology, 4, (1965), 109-127.
- [22] Olum, P. - *Self-equivalences of pseudo-projective planes*, II Topology, 10, (1970), 257-260.
- [23] Schubert, H. - *Topology*, Allan and Bacon Inc., (1968).
- [24] Spanier, E.H. - *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Co., (1966).
- [25] Stallings, J. - *Whitehead Torsion of free products*, Annals of Math., 82, (1965), 354-363.
- [26] Whitehead, G.W. - *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in mathematics, v. 61, (1978).
- [27] Whitehead, G.W. - *Homotopy Theory*, M.I.T. Press, (1966).
- [28] Whitehead, J.H.C. - *Simplicial Spaces, nuclei and m-groups*, Proc. London Math. Soc., 45, (1939), 243-327.
- [29] Whitehead, J.H.C. - *On incidence matrices nuclei and homotopy types*, Ann. of Math., 42, (1941), 1197-1239.
- [30] Whitehead, J.H.C. - *Combinatorial homotopy*, I, Bull AMS, 55, (1949), 213-245.
- [31] Whitehead, J.H.C. - *Simple Homotopy Types*, Amer. J. Math., 72, (1952), 1-57.

Índice Remissivo

- aplicação
 - (g, h) - equivariante, 104
 - característica, 5
 - celular, 7
 - de recobrimento, 10
 - p.l., 94
 - entre variedades p.l., 97
- aproximação celular, 7
- C_{par}, C_{impar} , 61
- chapéu de bobo (Dunce Hat), 33
- cilindro da aplicação, 4
- colapso, 22
- colapso elementar, 21
- complexo
 - CW, 5
 - elementarmente trivial, 58
 - trivial, 58
- contração de cadeia, 55
- deformação, 22
- deformação formal, 22
- $\mathcal{E}(L)$, 92
- equivalência de homotopia simples, 22
- espaço lenticular, 99
- estavelmente
 - equivalentes, 58
 - livre, 55
- expansão, 22
- expansão elementar, 21
- família distinguida de bases, 53
- forma simplificada de um par CW, 36
- $GL(n, R)$, 47
- grupo de whitehead
 - de um complexo CW, 30
 - de um grupo, 49
- homologia celular, 7
- isomorfismo simples
 - de (R, G) - complexos, 54
 - de (R, G) - módulos, 53
- $L_{p,q}$, 101
- lema da excisão, 76
- matrizes elementares, 47
- plano projetivo real, 110
- princípio da relatividade, 25
- propriedade da extensão homotópica, 6
- (R, G) - complexo, 53
- (R, G) - módulo, 53
- recobrimento
 - na categoria CW, 11
 - universal, 10

retração por deformação forte, 3

subcomplexo, 5

subdivisão de um complexo CW, 94

subgrupo comutador, 47

teorema

da soma, 86

do produto, 88

extensão de homotopia simples, 28

torção

de um (R, G) - complexo acíclico, 61

de um isomorfismo de módulos, 53

de um par de complexos CW, 69

caso conexo, 74

caso não conexo, 74

de uma equivalência de homotopia, 32,
80

de uma matriz, 49

unidades triviais, 41

variedade p.l. sem bordo, 97

$Wh(G)$ - complexo, 53