Aproximação na esfera unitária de $\mathbb{C}^q$, $q \geq 2$

Claudemir Pinheiro de Oliveira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de depósito: 10.09.2003

Assinatura:_____

Aproximação na esfera unitária de $\mathbb{C}^q$, $q \geq 2$

Claudemir Pinheiro de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos

Outubro 2003

Email: oliveira@unifei.edu.br

*À esposa Luciane,
aos filhos Michael e Beatriz*

Atitudes de Paz

“O homem procurando seu bem-estar, desenvolve concepções filosóficas que se aprimoram no decorrer do tempo. O conceito da não violência, ou da não agressividade tem crescido lentamente.

Jesus em sua missão terrenal, trouxe-nos a mensagem de retribuir a agressão com amor, oferecermos a outra face após sermos ofendidos por nossos semelhantes. Terá sido vã sua causa, já que após dois mil anos de sua existência ainda nos agredimos mutuamente, sem eira, nem beira?

Aos nossos olhos desfilam no noticiário os movimentos de libertação e de opressão; jogos de interesse político e econômico; as divergências raciais e religiosas; as ambições; vaidades e prepotência.

O homem agride o homem por qualquer razão; mas sempre dentro de sua própria razão. Sua ótica permite-lhe odiar, maltratar, matar ou vingar-se de outros seres humanos, justificando-se perante sua consciência interior.

As experiências individuais da civilização cristã, terão ainda que se repetir muitas e muitas vezes, para que tenhamos adquirido o domínio do conceito da não agressividade.

Desde a idade primitiva que o ser humano agride o seu semelhante e se condiciona, para se proteger das agressões permitir-se ao que foi agredido, vingar-se e fazer portanto justiça com punições mais drásticas que a própria injúria outrora causada.

Jesus aprofunda-se na tese que a ofensa causada ao homem não o atinge, mas sim a Deus. A ofensa atinge globalmente o cósmico, e portanto, toda prática agressiva do homem estabelece uma condição cármica pessoal que necessita ser compensada, e sua lei de não agressão, é profundamente apresentada através do Sermão da Montanha.

O amor que devemos ao nosso próximo deve pelo menos coibir que façamos ao nosso semelhante tudo aquilo que não gostaríamos que fosse feito a nós próprios.

Podemos dirigir nossa conduta pessoal para não violência, de forma a criar condições de um mundo melhor.

Desejo solicitar-lhe que durante os próximos dias pratiquemos a não agressividade intencionalmente, cultivando palavras criativas de compreensão e tolerância para com todos que entrarem em contato conosco. Vamos irradiar luz e amor em cada palavra proferida.”

Agradecimentos

A Deus, por Ele ter me conduzido pelos caminhos mais seguros, a fim de que meus objetivos fossem atingidos. Sem Ele tudo estaria por fazer.

Ao Professor Valdir pela orientação, dedicação, paciência e amizade. Especialmente por não ter medido esforços para concretizar aiosamente mais este trabalho.

*À amada esposa **Luciane**, por ter sido amante e companheira no decorrer deste percurso tão cheio de surpresas.*

*Ao querido filho **Michael**, pelo amor incondicional e por ter me ensinado tanto.*

*À pequenina **Beatriz**, por ter sido uma das surpresas maravilhosas da minha vida.*

Aos meus pais Alcides e Sinézia, pela vida e carinho dispensados. Aos meus irmãos que de uma forma carinhosa procuraram me incentivar.

Aos amigos que proporcionaram momentos alegres, que me deram a certeza que nunca estive só na caminhada, e por terem me apoiado nos momentos mais difíceis desta etapa.

Às secretárias Beth, Laura e Ana Paula pela simpatia, atenção e eficiência com que sempre me atenderam.

À UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade proporcionada, dando-me condições financeiras para mais este importante empreendimento da minha carreira profissional. Principalmente por investir na capacitação docente na busca por ensino e pesquisa de qualidade.

A todos que de alguma forma contribuíram.

Obrigado!

Claudemir Oliveira

Resumo

Este trabalho compõe-se de três partes distintas. A primeira contém uma extensão da fórmula de Funk-Hecke à esfera unitária de $\mathbb{C}^q$, e aplicações dela no estudo das propriedades anuladoras de operadores gerados por convolução esférica. A segunda introduz um método indutivo para construir bases para os espaços dos harmônicos esféricos complexos. A terceira apresenta um estudo de aproximações para soluções de equações definidas por transformações multiplicativas sobre a esfera. O estudo engloba a construção das funções aproximadoras e estimativas do erro na aproximação, incluindo estimativas em casos específicos.

Abstract

This work is divided in three independent parts. The first one contains an extension of the so-called Funk-Hecke formula to the complex setting. Some applications in the study of annihilating properties of operators generated by complex spherical convolution completes it. The second one presents an inductive method to generate bases for the space of complex spherical harmonics. The last one, contains a consistent study of approximations to the solutions of equations defined by multiplier transformations over the unit sphere of $\mathbb{C}^q$. The study covers the interpolatory construction of the approximations along with error estimates, including estimates in specific examples.

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos Preliminares	6
2.1	Elementos de superfície	6
2.2	Espaços de funções integráveis	14
2.3	Polinômios sobre a esfera	16
2.4	Polinômios no disco	22
2.5	Norma da malha	23
3	O Núcleo do Operador de Convolução	27
3.1	A Fórmula de Funk-Hecke	27
3.2	Convolução entre núcleos zonais e medidas	29
3.3	Convolução e a função característica de $\Omega_w^{\gamma,q}$	32
3.4	Convolução e a função característica de calotas	36
4	Gerador de Bases para os Espaços dos Harmônicos Esféricos	39
4.1	O produto interno $[\cdot, \cdot]$	39
4.2	Bi-ortogonalidade em $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$	44
4.3	Função geradora de bases	48
5	Aproximação de Soluções de Equações dadas por Transformações Multiplicativas	55
5.1	Equações multiplicativas	55
5.2	Espaços nativos	57
5.3	Espaços nativos e transformações multiplicativas	59

5.4	Espaços nativos e espaços de Sobolev	64
5.5	Soluções aproximadas	66
5.6	Estimativas da aproximação	69
5.7	Estimativa do erro em casos específicos	73
Referências Bibliográficas		77
Índice de Notações		81
Índice Remissivo		83

Capítulo 1

Introdução

A Análise Esférica é uma sub-área da Análise Matemática que atraiu, e ainda atrai, a atenção de vários pesquisadores. O interesse recente deve-se, principalmente, ao aparecimento de várias questões ligadas a problemas de aproximação em esferas. A Teoria da Aproximação em esferas engloba problemas de áreas variadas, tais como: Teoria do Potencial, Geofísica, Meteorologia, Oceanografia, Tomografia, etc ([9], [12], [16], [33]). Os problemas mais comuns dentro da teoria são aqueles nos quais a superfície terrestre é o modelo básico ou o ambiente onde o problema está formulado. Provavelmente, os problemas situados dentro da Astrofísica e da Geomatemática sejam os mais relevantes nos dias de hoje. A razão para tal é o aumento significativo do número de satélites orbitando a superfície terrestre (veja por exemplo, vários artigos recentes de W. Freedman).

Os tópicos da Teoria da Aproximação que estão usualmente atrelados à resolução de questões da Análise Esférica incluem: interpolação e aproximação polinomial ([37], [41]), interpolação lagrangiana, interpolação hermitiana ([32]), métodos de elementos finitos ([9]), wavelets esféricos ([12]), quadratura esférica ([37]), harmônicos esféricos ([16], [33]), convolução esférica ([12], [27]), aproximação de soluções de equações diferenciais ([25], [26]), etc.

O método de interpolação mais interessante no contexto esférico é aquele adaptado do método das bases de funções radiais, já amplamente difundido no meio científico, e que usa funções positivas definidas ou afins na construção de funções interpoladoras ([6]). Em síntese, o método em sua formulação mais elementar funciona as-

sim: se $x_1, x_2, \dots, x_N$ são os pontos de interpolação pertencentes a alguma esfera S e $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ são os valores a serem interpolados nestes pontos, tenta-se encontrar uma função da forma

$$x \in S \longmapsto \sum_{j=1}^N c_j \psi(x * x_j)$$

que interpole os dados. Aqui, ψ é uma função previamente escolhida, $*$ é o produto escalar do espaço onde S reside, e $c_1, c_2, \dots, c_N$ são escalares a determinar. Uma função positiva definida é uma boa escolha para ψ , uma vez que a matriz de interpolação $\psi(x_i * x_j)$ já é não negativa definida. Problemas de aproximação em esferas usam como plataforma processos interpolatórios similares a este.

Este trabalho considera três questões que consideramos relevantes dentro da Análise Esférica. Elas são quase que totalmente independentes, mas igualmente úteis em problemas relacionados com a Teoria da Aproximação. Todas as três são colocadas no âmbito da esfera unitária Ω_{2q} do espaço $\mathbb{C}^q$ usual. Este é um dos diferenciais do nosso trabalho, já que neste contexto, as funções utilizadas podem assumir valores complexos, e portanto, o grau de generalidade dos resultados é maior. Os resultados básicos sobre a análise em Ω_{2q} utilizados neste trabalho podem ser encontrados em [2], [21], [22] e [34], além de outras referências.

1. O Teorema de Funk-Hecke

O Teorema de Funk-Hecke tradicional é antigo, e refere-se à esfera unitária S^{m-1} do espaço $\mathbb{R}^m$ usual e ao grupo das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^m$. Sua importância na Teoria da Aproximação e em outras áreas da Análise Esférica, bem como sua íntima relação com operadores de convolução esférica, podem ser ratificadas em [16], [27], [31] e referências lá incluídas. Mais recentemente, Yuan Xu ([40]) provou uma nova versão de tal teorema, ainda sobre a esfera S^{m-1} , mas atrelada a grupos de transformações reflexivas, utilizando-a a seguir, em uma série de artigos. Neste trabalho, generalizamos a seguinte versão provada simultaneamente por Funk ([15]) e Hecke ([17]) no início do século passado. Sejam $f : [-1, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e Y um harmônico esférico usual de grau k em m variáveis. Então,

$$\int_{S^{m-1}} f(x \star y) Y(x) d\tau_m(x) = \lambda_k^m(f) Y(y), \quad y \in S^{m-1},$$

onde

$$\lambda_k^m(f) := \frac{2(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma((m-1)/2)} \int_{-1}^1 f(t) P_k^{(m-2)/2}(t) (1-t^2)^{(m-3)/2} dt.$$

Aqui, $d\tau_m$ é o elemento de superfície da esfera unitária S^{m-1} , $P_k^{(m-2)/2}$ é um polinômio de Gegenbauer normalizado ([39], p.81), $\star$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^m$ e Γ é a função gama usual. A generalização que apresentamos tem estrutura muito parecida com a descrita acima. Ela ocorre em pares conjugados e aparenta ser mais rica em propriedades. Os polinômios de Gegenbauer têm que ser substituídos por polinômios ortogonais em duas variáveis reais, aqui chamados de polinômios no disco, enquanto que a integral que define $\lambda_k^m(f)$ corresponde a uma integral sobre o disco unitário do plano complexo.

Utilizamos esta generalização no estudo de propriedades anuladoras do operador de convolução esférica sobre Ω_{2q} . Em particular, respondemos a seguinte questão: dado um número complexo γ , $|\gamma| \leq 1$, uma função de $L^2(\Omega_{2q})$ com média zero sobre as sub-esferas

$$\Omega_w^{\gamma,q} := \{z \in \Omega_{2q} : \langle z, w \rangle = \gamma\}, \quad w \in \Omega_{2q},$$

é identicamente nula? O conjunto dos valores γ para os quais a resposta desta questão é negativa, forma uma coleção de circunferências no disco unitário de $\mathbb{C}$. Tal conjunto é denso no disco e o subconjunto de $[0, 1]$ formado pela coleção dos raios destas circunferências é enumerável e denso neste intervalo.

2. Bases para os espaços dos harmônicos esféricos complexos

Vários problemas dentro da Análise Esférica não podem ser resolvidos sem a utilização dos harmônicos esféricos. Por exemplo, relações diretas entre harmônicos esféricos associados à esferas de dimensões diferentes foram usadas de maneira decisiva na descrição completa das funções zonais que são estritamente positivas definidas sobre S^{m-1} , $m \geq 3$ ([5]). A conexão foi feita pela conhecida fórmula da adição para polinômios de Gegenbauer, a qual é fortemente baseada na representação de pontos em coordenadas esféricas.

Harmônicos esféricos em Ω_{2q} são ligeiramente mais complicados do que harmônicos esféricos em S^{m-1} , já que dependem da variável complexa $z \in \mathbb{C}^q$ e de sua conjugada

$\bar{z}$. Uma fórmula de adição para este caso já existe. Uma prova detalhada para ela foi apresentada por Koornwinder ([22]).

Nossa contribuição nesta linha é a obtenção de um método indutivo para construir explicitamente bases de harmônicos esféricos sobre Ω_{2q} , a partir de harmônicos esféricos sobre Ω_{2q-2} . O processo de construção permite que as bases resultantes sejam ortogonais em relação ao produto interno de $L^2(\Omega_{2q})$. Este resultado passa pelo estudo do produto interno $[f, g] = f(\overline{D})(\overline{g(z)})(0)$ no espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ dos polinômios nas variáveis $z, \bar{z} \in \mathbb{C}^q$, onde $f(\overline{D})$ é o operador diferencial com símbolo $f(\bar{z})$. Mostramos que, quando restrito a espaços de harmônicos esféricos sobre Ω_{2q} , este produto interno é um múltiplo do produto interno usual de $L^2(\Omega_{2q})$. Investigamos ainda questões de bi-ortogonalidade no espaço $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$.

3. Soluções aproximadas de equações definidas por transformações multiplicativas

Esta parte do trabalho mergulha definitivamente em questões da Teoria da Aproximação. Fazemos um estudo parcial, porém consistente, de soluções aproximadas de equações definidas por certas transformações multiplicativas complexas. Esta classe de transformações inclui, por exemplo, alguns operadores pseudo-diferenciais elementares.

As aproximações são feitas em espaços de tipo-Sobolev e os aproximantes são construídos via interpolação usando funções positivas definidas, através de método similar aquele introduzido acima para o caso da esfera real S^{m-1} . O estudo inclui estimativas gerais para o erro cometido nas aproximações, e também, estimativas em alguns casos específicos.

O trabalho está organizado segundo o seguinte roteiro:

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos e resultados preliminares, abordando desde alguns lemas da teoria da medida em Ω_{2q} , até outros conceitos mais específicos como norma da malha de subconjuntos de Ω_{2q} .

O Capítulo 3, contém a formulação e prova da Fórmula de Funk-Hecke para harmônicos esféricos complexos. Na segunda metade do capítulo, a fórmula é utilizada no estudo de propriedades anuladoras de operadores gerados por convolução esférica.

No Capítulo 4, exibimos um processo indutivo para gerar bases para os espaços de harmônicos esféricos complexos. Para mostrar a ortogonalidade de tais bases, es-

tudamos o produto interno $[\cdot, \cdot]$ no espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$. As boas propriedades deste produto interno permitem um estudo completo de bi-ortogonalidade neste espaço.

No Capítulo 5, estudamos um tipo especial de aproximação para soluções de equações definidas por transformações multiplicativas. Algumas equações diferenciais e pseudo-diferenciais elementares fazem parte deste grupo de equações. A ordem da aproximação é obtida em várias situações específicas usando a teoria de espaços nativos e espaços de tipo-Sobolev.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, introduzimos algumas notações e resultados elementares da Análise Esférica. Incluímos, também, uma seção com resultados técnicos sobre distribuição de pontos na esfera Ω_{2q} . Algumas provas são apresentadas integralmente, enquanto que outras mais longas são substituídas por uma indicação bibliográfica apropriada.

2.1 Elementos de superfície

Nesta seção, estudamos algumas fórmulas para elementos de superfície de Ω_{2q} e de alguns de seus subconjuntos. O objetivo é facilitar o entendimento do leitor em vários argumentos de integração presentes nas próximas seções. Os cálculos são feitos usando a identificação usual entre esferas reais e esferas complexas.

O símbolo $\mathbb{C}^q$, $q \in \{2, 3, \dots\}$, denota o espaço unitário usual. As q -uplas deste espaço são usualmente escritas na forma $(z_1, z_2, \dots, z_q)$. A expressão

$$\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_q \bar{w}_q, \quad z, w \in \mathbb{C}^q,$$

define o produto interno usual de $\mathbb{C}^q$. Este produto interno gera uma norma em $\mathbb{C}^q$, transformando-o em um espaço de Hilbert de dimensão complexa q e dimensão real $2q$. A base canônica de $\mathbb{C}^q$ é denotada por $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q\}$, onde

$$\varepsilon_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2.1)$$

com o inteiro 1 ocupando a i -ésima coordenada de ε_i . Nas notações acima, a *esfera*

unitária de $\mathbb{C}^q$ é simplesmente

$$\Omega_{2q} := \{z \in \mathbb{C}^q : \langle z, z \rangle = 1\}.$$

O grupo dos operadores lineares sobre $\mathbb{C}^q$, que são transformações unitárias, é representado por $\mathcal{O}(2q)$. Deste modo, se $\rho \in \mathcal{O}(2q)$, então ρ é linear e $\rho\rho^* = \rho^*\rho = I$, onde ρ^* representa o operador adjunto de ρ .

Seja $B(0, 1)$ o disco unitário aberto de $\mathbb{C}$. Se $w \in \Omega_{2q}$ e $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \in B(0, 1)$, a subesfera $\Omega_w^{\gamma,q}$ de Ω_{2q} de raio $(1 - \gamma\bar{\gamma})^{1/2}$ e pólo w é a interseção da esfera Ω_{2q} com o hiperplano $\langle z, w \rangle = \gamma$, $z \in \mathbb{C}^q$. Em outras palavras,

$$\Omega_w^{\gamma,q} := \{z \in \Omega_{2q} : \langle z, w \rangle = \gamma\}. \quad (2.2)$$

O hiperplano é ortogonal a w e contém γw . Além disso, quando $c \in \mathbb{C}$ e $c\bar{c} = 1$, a subesfera $\Omega_{cw}^{\bar{c}\gamma,q}$ coincide com $\Omega_w^{\gamma,q}$. Se $\gamma = 0$, a subesfera (2.2) é uma cópia de Ω_{2q-2} mergulhada em Ω_{2q} . De fato, isto é facilmente comprovado se $w = \varepsilon_q$. Caso contrário, $\rho(\Omega_w^{0,q}) = \Omega_{\varepsilon_q}^{0,q}$, onde $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ satisfaz $\rho(w) = \varepsilon_q$.

O teorema abaixo é puramente técnico. Ele descreve como decompor pontos de Ω_{2q} em função de um pólo w e de pontos de $\Omega_w^{\gamma,q}$.

Teorema 2.1.1. *Se $\gamma \in B(0, 1)$ e $z, w \in \Omega_{2q}$, então*

$$z = \left(\cos \theta e^{i\varphi} - \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma\bar{\gamma}}} \right) w + \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \gamma\bar{\gamma}}} z',$$

onde $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $z' \in \Omega_w^{\gamma,q}$.

Prova. A “projeção esférica” de z a partir de w produz a decomposição

$$z = t e^{i\varphi} w + \sqrt{1 - t^2} z'', \quad \langle z'', w \rangle = 0, \quad (2.3)$$

onde $t \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Uma vez que $t = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, a equação (2.3) equivale à forma polar

$$z = \cos \theta e^{i\varphi} w + \sin \theta z'', \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (2.4)$$

É fácil ver que

$$z' := \gamma w + \sqrt{1 - \gamma\bar{\gamma}} z'' \quad (2.5)$$

é um elemento de $\Omega_w^{\gamma,q}$. A eliminação de z'' nas equações (2.4) e (2.5) dá a fórmula do teorema. ■

No que segue o símbolo S^{2q-1} denota a esfera unitária de $\mathbb{R}^{2q}$, isto é,

$$S^{2q-1} = \{x \in \mathbb{R}^{2q} : x \star x = 1\},$$

onde mais uma vez $\star$ representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^{2q}$. Os lemas abaixo apresentam propriedades elementares de invariância e fórmulas relacionadas com a medida usual $d\tau_{2q}$ sobre S^{2q-1} . O primeiro lema está provado em [10], p.73 e o segundo em [31], p.30.

Lema 2.1.2. *Seja $A : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$ uma transformação ortogonal. Valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se f é τ_{2q} -mensurável, então $f \circ A$ é τ_{2q} -mensurável;*
- (ii) *Se f é não negativa ou τ_{2q} -integrável, então*

$$\int_{S^{2q-1}} f(x) d\tau_{2q}(x) = \int_{S^{2q-1}} (f \circ A)(x) d\tau_{2q}(x);$$

- (iii) *Se E é um subconjunto τ_{2q} -mensurável de $\mathbb{R}^{2q}$, então $A(E)$ é τ_{2q} -mensurável e*

$$\tau_{2q}(A(E)) = \tau_{2q}(E).$$

Lema 2.1.3. *Se d é um inteiro positivo menor do que $2q - 1$, então a medida usual sobre qualquer subesfera d -dimensional de S^{2q-1} e raio $(1 - r^2)^{1/2}$ é dada pela expressão $(1 - r^2)^{d/2} d\tau_{2q-1}$.*

Pretendemos reproduzir alguns dos resultados acima para subesferas de Ω_{2q} . A obtenção dos mesmos, passa obrigatoriamente pela aplicação $\Upsilon_q : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$ dada por

$$\Upsilon_q(z_1, z_2, \dots, z_q) = (x_1, y_1, \dots, x_q, y_q), \quad z_k = x_k + iy_k, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (2.6)$$

que estabelece uma bijeção contínua entre $\mathbb{C}^q$ e $\mathbb{R}^{2q}$. Como $S^{2q-1} = \Upsilon_q(\Omega_{2q})$, podemos definir o *elemento de superfície* $d\sigma_q$ sobre Ω_{2q} pela fórmula

$$d\sigma_q(z) := d\tau_{2q}(\Upsilon_q(z)), \quad z \in \Omega_{2q}. \quad (2.7)$$

O Lema 2.1.2 mostra que a medida $d\tau_{2q}$ é invariante por transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{2q}$. A invariância de $d\sigma_q$ por transformações unitárias é explicada no resultado abaixo.

Teorema 2.1.4. *Se E é um subconjunto σ_q -mensurável de Ω_{2q} e $\rho \in \mathcal{O}(2q)$, então $\sigma_q(\rho(E)) = \sigma_q(E)$.*

Prova. Fixada $\rho \in \mathcal{O}(2q)$, considere a transformação linear $A_\rho : \mathbb{R}^{2q} \mapsto \mathbb{R}^{2q}$ dada por

$$A_\rho(x) = \Upsilon_q(\rho(\Upsilon_q^{-1}(x))), \quad x \in \mathbb{R}^{2q}.$$

Ela é ortogonal, uma vez que

$$\begin{aligned} A_\rho(x) \star A_\rho(x) &= \Upsilon_q(\rho(\Upsilon_q^{-1}(x))) \star \Upsilon_q(\rho(\Upsilon_q^{-1}(x))) \\ &= \langle \rho(\Upsilon_q^{-1}(x)), \rho(\Upsilon_q^{-1}(x)) \rangle \\ &= \langle \Upsilon_q^{-1}(x), \Upsilon_q^{-1}(x) \rangle = x \star x, \quad x \in \mathbb{R}^{2q}. \end{aligned}$$

Se E é σ_q -mensurável, a continuidade de Υ_q e de ρ mostram que $\rho(E)$ e $\Upsilon_q(\rho(E))$ são σ_q -mensuráveis. Segue do Lema 2.1.2 e (2.7) que

$$\sigma_q(\rho(E)) = \tau_{2q}(\Upsilon_q(\rho(E))) = \tau_{2q}(A_\rho(\Upsilon_q(E))) = \tau_{2q}(\Upsilon_q(E)) = \sigma_q(E).$$

A prova está concluída. ■

O teorema seguinte descreve o elemento de superfície da subesfera $\Omega_w^{\gamma,q}$. A medida usual sobre esta subesfera é denotada por σ_w^γ .

Teorema 2.1.5. *Se $\gamma \in B(0, 1)$ e $w \in \Omega_{2q}$, então*

$$d\sigma_w^\gamma = (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} d\sigma_{q-1}.$$

Prova. Inicialmente vamos provar o teorema no caso em que $w = \varepsilon_q$. Seja E um subconjunto σ_q -mensurável de $\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q}$. Então,

$$\sigma_{\varepsilon_q}^\gamma(E) = \sigma_q(E \cap \Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q}) = \tau_{2q}(\Upsilon_q(E \cap \Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})) = \tau_{2q}(\Upsilon_q(E) \cap \Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})).$$

Vamos mostrar que o conjunto $\Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})$ que aparece na fórmula acima é uma subesfera de S^{2q-1} de dimensão real $2q - 3$. De fato, $x \in \Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})$ se e somente se, $x = \Upsilon_q(z)$, $z \in \Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q}$, isto é, $x = (x_1, y_1, \dots, x_{q-1}, y_{q-1}, \gamma_1, \gamma_2)$ e

$$x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{q-1}^2 + y_{q-1}^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Equivalentemente, x é um elemento do conjunto

$$S^{2q-1} \cap \{x \in S^{2q-1} : x \star e_{2q-1} = \gamma_1\} \cap \{x \in S^{2q-1} : x \star e_{2q} = \gamma_2\},$$

onde e_{2q-1} e e_{2q} são, respectivamente, o penúltimo e o último elementos da base canônica de $\mathbb{R}^{2q}$. Assim,

$$\Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q}) = S^{2q-1} \cap \{x \in S^{2q-1} : x \star e_{2q-1} = \gamma_1\} \cap \{x \in S^{2q-1} : x \star e_{2q} = \gamma_2\}.$$

Esta intersecção é uma subesfera de S^{2q-1} de dimensão real $2q - 3$ e raio $(1 - \gamma\bar{\gamma})^{1/2}$.

Pelo Lema 2.1.3, segue que

$$\tau_{2q}(\Upsilon_q(E) \cap \Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})) = (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} \tau_{2q-2}(\Upsilon_q(E)) = (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} \sigma_{q-1}(E).$$

No caso geral, tomamos um elemento $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ tal que $\rho(w) = \varepsilon_q$. Uma vez que $(\Upsilon_q \circ \rho)(\Omega_w^{\gamma,q}) = \Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma,q})$, a prova segue do caso anterior. ■

A última fórmula que precisamos requer um pouco mais de preparação. Dada uma parametrização

$$f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_{2q}(u)), \quad u := (u_1, u_2, \dots, u_{2q-1}) \in \mathbb{R}^{2q-1},$$

de S^{2q-1} , o elemento de superfície $d\tau_{2q}$ de S^{2q-1} pode ser definido pela $(2q - 1)$ -forma diferencial ([31], p.4)

$$d\tau_{2q}(u) := \sum_{i=1}^{2q} (-1)^{i+1} f_i(u) df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge \widetilde{df}_i \wedge \dots \wedge df_{2q},$$

onde

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_{2q-1}} du_{2q-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2q.$$

O símbolo $\widetilde{df}_i$ significa que a 1-forma diferencial df_i não aparece na expressão da i -ésima parcela de $d\tau_{2q}$.

Usando propriedades de determinantes, a medida $d\tau_{2q}$ em função do parâmetro u escreve-se na forma

$$\begin{aligned} d\tau_{2q}(u) &= \sum_{i=1}^{2q} (-1)^{i+1} f_i(u) J(f_1, f_2, \dots, \widetilde{f}_i, \dots, f_{2q}) du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_{2q-1} \\ &= D_{2q}(f(u)) du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_{2q-1}, \end{aligned}$$

onde

$$J(f_1, f_2, \dots, \tilde{f}_i, \dots, f_{2q}) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2q-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_{2q-1}} \end{vmatrix}$$

e

$$D_{2q}(f(u)) := \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2q-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2q} & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_{2q-1}} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.1.6. *A decomposição (2.4) produz a seguinte relação entre elementos de superfície: $d\sigma_q = (\sin \theta)^{2q-3} \cos \theta d\theta d\varphi d\sigma_{q-1}$.*

Prova. Vamos provar o teorema apenas no caso em que $w = \varepsilon_q$. Os demais seguem pela invariância de $d\sigma_q$ em relação a $\mathcal{O}(2q)$. Para tanto, seja $g(u) = (g_1(u), g_2(u), \dots, g_{2q-2}(u), \gamma_1, \gamma_2)$, $u \in \mathbb{R}^{2q-3}$, uma parametrização de $\Upsilon_q(\Omega_{\varepsilon_q}^{\gamma, q})$. Usando (2.4), vemos que as funções

$$f_i(u, \varphi, \theta) = \sin \theta g_i(u), \quad i = 1, 2, \dots, 2q-2$$

$$f_{2q-1}(u, \varphi, \theta) = \cos \theta \cos \varphi \quad \text{e} \quad f_{2q}(u, \varphi, \theta) = \cos \theta \sin \varphi$$

são as componentes reais de uma parametrização de $\Upsilon_q(\Omega_{2q}) = S^{2q-1}$. Logo, as derivadas necessárias para o cálculo de $D_{2q}(f(u))$ são

$$\frac{\partial f_{2q-1}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial f_{2q}}{\partial \theta} = -\sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial \varphi} = -\cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial f_{2q}}{\partial \varphi} = \cos \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \sin \theta \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \quad \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial g_i}{\partial \theta},$$

$$i = 1, 2, \dots, 2q-2, \quad j = 1, 2, \dots, 2q-3.$$

Sem nenhum prejuízo para efeitos de integração, suponhamos que $\theta \neq 0$. O cálculo do determinante $D_{2q}(f(u))$ é, então, como segue.

$$D_{2q}(f(u)) = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2q-3}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_{2q-3}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{2q-1} & \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial u_{2q-3}} & \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_{2q-1}}{\partial \theta} \\ f_{2q} & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2q}}{\partial u_{2q-3}} & \frac{\partial f_{2q}}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_{2q}}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta \begin{vmatrix} \text{sen } \theta g_1 & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_1 \\ \text{sen } \theta g_2 & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{sen } \theta g_{2q-2} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_{2q-2} \\ \cos \theta \cos \varphi & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen } \varphi & -\text{sen } \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \text{sen } \varphi & 0 & \cdots & 0 & \cos \varphi & -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta \begin{vmatrix} \frac{g_1}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_1 \\ \frac{g_2}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{2q-2}}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} & 0 & \cos \theta g_{2q-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen } \varphi & -\text{sen } \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos \varphi & -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi \end{vmatrix}$$

$$= -\cos \theta \text{sen } \varphi \begin{vmatrix} \frac{g_1}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_1 \\ \frac{g_2}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{2q-2}}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \text{sen } \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_{2q-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi \end{vmatrix}$$

$$- \cos \theta \cos \varphi \begin{vmatrix} \frac{g_1}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_1 \\ \frac{g_2}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_2}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{2q-2}}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} & \cos \theta g_{2q-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \begin{vmatrix} \frac{g_1}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{2q-2}}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$+ \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi \begin{vmatrix} \frac{g_1}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{2q-2}}{\sin \theta} & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \sin \theta \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} \end{vmatrix}$$

$$= (\sin \theta)^{2q-3} \cos \theta \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{2q-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{2q-2} & \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_{2q-2}}{\partial u_{2q-3}} \end{vmatrix}$$

Logo,

$$D_{2q}(f(u)) = (\sin \theta)^{2q-3} \cos \theta D_{2q-2}(g(u)).$$

Portanto,

$$d\sigma_q(z) = (\sin \theta)^{2q-3} \cos \theta d\theta d\varphi d\sigma_{q-1}(z''),$$

o que conclui a prova. ■

A fórmula acima permite a decomposição de integrais sobre Ω_{2q} em integrais iteradas, uma delas sobre Ω_{2q-2} . Em particular, temos o valor para a área da superfície de Ω_{2q} .

Corolário 2.1.7. *A área ω_q de Ω_{2q} é $2\pi^q/(q-1)!$.*

Daqui por diante, o leitor não deve confundir o símbolo ω_q do corolário acima com o número complexo w_q que denota a q -ésima coordenada de um ponto w de $\mathbb{C}^q$, conforme o início desta seção.

2.2 Espaços de funções integráveis

Apresentamos aqui os espaços de funções presentes nas várias etapas do trabalho. Inicialmente, vamos estabelecer algumas notações básicas e reforçar outras, já utilizadas na introdução. **A menos de especificação em contrário, todas as funções consideradas neste trabalho são complexas.**

Seja $p \in \{1, 2, \dots\}$. Uma função σ_q -mensurável f é p -integrável em Ω_{2q} quando

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega_{2q}} |f(z)|^p d\sigma_q(z) \right)^{1/p} < \infty.$$

O conjunto das funções p -integráveis em Ω_{2q} é denotado por $L^p(\Omega_{2q})$. Neste espaço não distinguimos funções que são iguais quase sempre. O espaço $L^2(\Omega_{2q})$ é de Hilbert, via o produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(z), \quad f, g \in L^2(\Omega_{2q}). \quad (2.8)$$

Quando nada for dito, ortogonalidade sempre referir-se-á ao produto interno acima.

A seguir introduzimos funções integráveis sobre o *disco unitário fechado* $B[0, 1]$ de $\mathbb{C}$. A integrabilidade refere-se à medida de massa total unitária dada por

$$d\nu_q(z) := \frac{q-1}{\pi} (1 - x^2 - y^2)^{q-2} dx dy, \quad z = x + iy \in B[0, 1].$$

O conjunto das funções p -integráveis em $B[0, 1]$ em relação à medida ν_q é denotado por $L^{p,q}(B[0, 1])$. Em particular, este conjunto é um espaço vetorial normado, cuja norma é

$$\|f\|_{p,q} := \left(\int_{B[0,1]} |f(z)|^p d\nu_q(z) \right)^{1/p}.$$

Lembramos que uma expressão análoga àquela em (2.8) faz de $L^{2,q}(B[0, 1])$ um espaço com produto interno.

Neste trabalho, o termo função integrável está associado a elementos dos espaços $L^1(\Omega_{2q})$ ou $L^{1,q}(B[0, 1])$.

Embora tenhamos usado $p \in \{1, 2, \dots\}$ nas definições acima, apenas os espaços $L^1(\Omega_{2q})$, $L^2(\Omega_{2q})$, $L^{1,q}(B[0, 1])$ e $L^{2,q}(B[0, 1])$ são efetivamente considerados na formalização dos nossos resultados. Como os domínios envolvidos possuem medidas finitas, os demais espaços são subespaços destes, e portanto, não há prejuízo aparente neste procedimento.

Terminamos esta seção apresentando quatro lemas técnicos sobre integração. Os dois primeiros são sobre integração de seqüências convergentes de funções, enquanto que o terceiro decompõe integrais de funções zonais sobre Ω_{2q} como uma integral no disco $B[0, 1]$. O último deles é uma adaptação do *Teorema de Lusin*.

Lembramos que uma função $f : \Omega_{2q} \mapsto \mathbb{C}$ é w -zonal, $w \in \Omega_{2q}$, quando $f(z) = g(\langle z, w \rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$ para alguma função g .

Lema 2.2.1. *Seja $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência em $L^1(\Omega_{2q})$ que converge uniformemente para uma função f . Então, f pertence a $L^1(\Omega_{2q})$ e*

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z) d\sigma_q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{2q}} f_n(z) d\sigma_q(z).$$

Prova. Sendo um limite de funções σ_q -mensuráveis, a função f é σ_q -mensurável. Por outro lado, pela convergência uniforme, fixado $\varepsilon > 0$ existe um inteiro não negativo N tal que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \Omega_{2q}, \quad n \geq N. \quad (2.9)$$

Como f_n pertence a $L^1(\Omega_{2q})$ para todo n , a desigualdade (2.9) implica que f está em $L^1(\Omega_{2q})$. Finalmente,

$$\left| \int_{\Omega_{2q}} f_n(z) d\sigma_q(z) - \int_{\Omega_{2q}} f(z) d\sigma_q(z) \right| \leq \int_{\Omega_{2q}} |f_n(z) - f(z)| d\sigma_q(z) \leq \omega_q \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Isto conclui a prova do lema. ■

Lema 2.2.2. *Seja $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência em $L^{1,q}(B[0, 1])$ que converge uniformemente para uma função f . Então, f pertence a $L^{1,q}(B[0, 1])$ e*

$$\int_{B[0,1]} f(z) d\nu_q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B[0,1]} f_n(z) d\nu_q(z).$$

O terceiro lema foi originalmente provado por Forelli ([11]). A versão simplificada que necessitamos coincide com aquela de Rudin em [34], p.15.

Lema 2.2.3. *Se K é uma função de $L^{1,q}(B[0,1])$ e $w \in \Omega_{2q}$, então $K(\langle \cdot, w \rangle) \in L^1(\Omega_{2q})$ e*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) d\sigma_q(z) &= \omega_q \int_{B[0,1]} K(z) d\nu_q(z) \\ &= \omega_{q-1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 K(re^{i\theta}) (1-r^2)^{q-2} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Lema 2.2.4. *Se f é uma função ν_q -integrável em $B[0,1]$, então existe uma seqüência $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ de funções contínuas em $B[0,1]$ tal que*

$$|f_n| \leq \sup_{z \in B[0,1]} |f(z)|, \quad n = 0, 1, \dots \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad q.s..$$

2.3 Polinômios sobre a esfera

Nesta seção, descrevemos as propriedades básicas dos espaços dos polinômios nas variáveis $z, \bar{z} \in \mathbb{C}^q$ restritos à Ω_{2q} , já que estes são utilizados com muita freqüência.

A notação com multi-índices facilita consideravelmente a descrição de algumas fórmulas. Se $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{N}^q$, escrevemos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q \quad e \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_q!.$$

Por outro lado, definimos

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_q^{\alpha_q}, \quad z \in \mathbb{C}^q.$$

O teorema abaixo é uma versão complexa do *Teorema Binomial*.

Teorema 2.3.1. *Se $z, w \in \mathbb{C}^q$, então*

$$\langle z, w \rangle^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha \bar{w}^\alpha, \quad (\alpha, m) \in \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}.$$

Prova. A primeira etapa da prova consiste em mostrar por indução sobre a dimensão complexa de $\mathbb{C}^q$ que

$$\left(\sum_{j=1}^q z_j \right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Obviamente (2.10) vale quando $q = 2$. Suponhamos que para algum $q > 2$,

$$\left(\sum_{j=1}^{q-1} z_j \right)^l = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \tilde{z}^\alpha, \quad l = 0, 1, \dots,$$

onde $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{q-1})$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1})$. Fixado $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^q z_j \right)^m &= \left(\sum_{j=1}^{q-1} z_j + z_q \right)^m = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left(\sum_{j=1}^{q-1} z_j \right)^l z_q^{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \tilde{z}^\alpha z_q^{m-l} \\ &= \sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=l} \frac{m!}{l! (m-l)!} \frac{l!}{\alpha!} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_{q-1}^{\alpha_{q-1}} z_q^{m-l} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha, \end{aligned}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}, m-l)$. Usando a fórmula acima obtemos

$$\langle z, w \rangle^m = \left(\sum_{j=1}^q z_j \bar{w}_j \right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (z_1 \bar{w}_1)^{\alpha_1} \dots (z_q \bar{w}_q)^{\alpha_q} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha \bar{w}^\alpha,$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Tomando $w = z$, o polinômio em z e em $\bar{z}$ dado pela fórmula no teorema anterior pertence ao espaço vetorial unitário $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$, o *espaço dos polinômios* nas variáveis independentes z e $\bar{z}$ de $\mathbb{C}^q$. Qualquer elemento deste espaço pode ser representado na forma

$$f(z) := f(z, \bar{z}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{|\beta| \leq l} f_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad z \in \mathbb{C}^q, \quad f_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^q, \quad (2.11)$$

onde k e l são inteiros não negativos.

A seguir destacamos uma versão do *Teorema da Aproximação de Weierstrass*.

Lema 2.3.2. *Toda função contínua em $B[0, 1]$ é o limite uniforme de uma sequência de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, restrita a $B[0, 1]$.*

Prova. Primeiro note que o espaço obtido a partir de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ quando restringimos seus elementos a $B[0, 1]$ é uma subálgebra do espaço das funções contínuas sobre $B[0, 1]$. Ela é auto-adjunta, separa pontos e contém as funções constantes. Em seguida, basta usar a versão complexa do Teorema de Stone-Weierstrass dada em [10], p.135. ■

Denotamos por $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ o subconjunto de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ formado pelos *polinômios homogêneos* de grau m em z e de grau n em $\bar{z}$. Então, um elemento f de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ satisfaz a relação

$$f(\lambda z) = \lambda^m \bar{\lambda}^n f(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

A dimensão de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ é ([21])

$$\delta(q, m, n) := \binom{m+q-1}{q-1} \binom{n+q-1}{q-1}.$$

Registramos a seguinte propriedade elementar do espaço $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ em relação à conjugação complexa: um polinômio f pertence a $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ se e somente se, seu conjugado $\bar{f}$ pertence a $\mathbb{P}_{n,m}(\mathbb{C}^q)$.

Os elementos de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ que são também harmônicos, têm grande importância no nosso trabalho. Uma função $f : \mathbb{C}^q \mapsto \mathbb{C}$ é *harmônica* quando pertence ao núcleo do *laplaciano complexo*

$$\Delta_{(2q)} := 4 \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}.$$

O subconjunto de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ formado por elementos harmônicos é denotado por $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$.

O operador laplaciano possui a seguinte propriedade de invariância.

Proposição 2.3.3. *Se f é um elemento de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, então*

$$\Delta_{(2q)}(\langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} f) = \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \Delta_{(2q)}(f) - (m+n)(m+n+2q-2) \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} f.$$

Prova. Da fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} f(z) &= \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) + f(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \\ &= \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) - \frac{m+n}{2} z_j \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} f(z), \end{aligned}$$

deduzimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} f(z) &= \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial z_j} f(z) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \\
&- \frac{m+n}{2} \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} \left(f(z) + z_j \frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \right) \\
&- \frac{m+n}{2} z_j f(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \langle z, z \rangle^{-(m+n+k)/2} = -\frac{m+n+k}{2} \langle z, z \rangle^{-(m+n+k+2)/2} \bar{z}_j, \quad k = 0, 2,$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{(2q)}(\langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} f) &= \langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} \Delta_{(2q)}(f) - 2(m+n)q \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} f \\
&- 2(m+n) \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} \sum_{j=1}^q \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} f + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f \right) \\
&+ (m+n)(m+n+2) \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} f.
\end{aligned}$$

Agora a Identidade de Euler

$$\sum_{j=1}^q \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} f(z) + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) \right) = (m+n)f(z)$$

finaliza a prova. ■

Corolário 2.3.4. *Se f é um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, então*

$$\Delta_{(2q)}(\langle z, z \rangle^{-(m+n)/2} f) = -(m+n)(m+n+2q-2) \langle z, z \rangle^{-(m+n+2)/2} f.$$

O símbolo $\mathcal{P}_{m,n}(\Omega_{2q})$ representa o espaço vetorial de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, quando restringimos seus elementos a Ω_{2q} . Por outro lado, o símbolo $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ denota o espaço obtido de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ pelo mesmo processo. Os elementos de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ são chamados de *harmônicos esféricos complexos*, ou simplesmente, harmônicos esféricos. A definição acima conduz ao seguinte isomorfismo entre espaços vetoriais:

$$F \in \mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q) \longmapsto F|_{\Omega_{2q}} := f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \quad (2.12)$$

O espaço das funções contínuas definidas em Ω_{2q} é denotado por $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$. O Corolário 2.3.4 implica que $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ é um autoespaço do operador $\Delta_{(2q)} : \mathcal{C}(\Omega_{2q}) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega_{2q})$ associado ao autovalor $-\lambda_{m,n} := -(m+n)(m+n+2q-2)$.

O espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ tem dimensão finita $d(q, m, n)$ dada explicitamente pelas seguintes fórmulas ([21]):

$$d(q, m, n) := \delta(q, m, n) - \delta(q, m-1, n-1), \quad m, n \neq 0,$$

$$d(q, m, 0) := \delta(q, m, 0) \quad \text{e} \quad d(q, 0, n) := \delta(q, 0, n).$$

Em alguns pontos do trabalho usamos simplesmente $\delta(m, n)$ e $d(m, n)$ para indicar as duas dimensões introduzidas nesta seção. Aproveitamos o momento para registrar a fórmula

$$d(q, m, n) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n d(q-1, k, l), \quad q \geq 2.$$

Ela, junto com a fórmula

$$\mathcal{P}_{m,n}(\Omega_{2q}) = \bigoplus_{j=0}^{m \wedge n} \mathcal{H}_{m-j, n-j}(\Omega_{2q}). \quad (2.13)$$

são dois dos fatores que motivaram toda a Seção 4.3 à frente.

A ortogonalidade dos harmônicos esféricos em relação ao produto interno (2.8) é o assunto do teorema abaixo.

Teorema 2.3.5. *Sejam m, n, k e l inteiros não negativos tais que $(m, n) \neq (k, l)$. Então,*

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(z) = 0, \quad f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}), \quad g \in \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}).$$

Prova. Sejam $f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e $g \in \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$. Então, $f \circ \Upsilon_q^{-1}$ e $g \circ \Upsilon_q^{-1}$ são, respectivamente, harmônicos esféricos usuais de graus $m+n$ e $k+l$ sobre S^{2q-1} . Usando mudança de variáveis e a conhecida ortogonalidade destes harmônicos esféricos quando $m+n \neq k+l$, concluímos que

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(z) = \int_{S^{2q-1}} f(\Upsilon_q^{-1}(x)) \overline{g(\Upsilon_q^{-1}(x))} d\tau_{2q}(x) = 0.$$

No restante da prova, vamos assumir que $m+n = k+l$. Segue que $m-n \neq k-l$. Logo, podemos escolher um número $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta(m-n+l-k)/2\pi$ não seja um inteiro. Daí, se f e g são como na primeira parte da prova, então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(z) &= \int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(e^{-i\theta} z) \\ &= \int_{\Omega_{2q}} f(e^{i\theta} z) \overline{g(e^{i\theta} z)} d\sigma_q(z) \\ &= e^{i(m-n+l-k)\theta} \int_{\Omega_{2q}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma_q(z). \end{aligned}$$

Portanto, como a exponencial não é igual a 1, a ortogonalidade segue. ■

Uma prova alternativa para o teorema acima pode ser encontrada em [18].

Não é difícil perceber agora que $L^2(\Omega_{2q})$ se decompõe como soma direta ortogonal dos espaços $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ ([21]):

$$L^2(\Omega_{2q}) = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \quad (2.14)$$

Em particular, o conjunto $\cup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ é fundamental em $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$, isto é, o espaço vetorial gerado por este conjunto é denso em $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$.

Várias etapas do nosso trabalho dependem de uma base ortonormal fixa de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ em relação ao produto interno (2.8). Vamos usar o conjunto

$$\{Y_{m,n}^j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$$

para denotar tal base. A *expansão* de uma função f de $L^2(\Omega_{2q})$ é, então, a série de Fourier de f em relação à base ortonormal $\cup_{m,n \in \mathbb{N}} \{Y_{m,n}^j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$, isto é,

$$f \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \widehat{f}_{m,n}(j) Y_{m,n}^j, \quad (2.15)$$

onde $\widehat{f}_{m,n}(j) = \langle f, Y_{m,n}^j \rangle_2$, $j = 1, 2, \dots, d(m, n)$, $m, n \in \mathbb{N}$.

A *invariância dos harmônicos esféricos* por transformações unitárias é o assunto do próximo resultado.

Teorema 2.3.6. *Se $f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e $\rho \in \mathcal{O}(2q)$, então $f \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.*

Prova. Assuma que a transformação unitária $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ tenha representação matricial (ρ_{ij}) , $i, j = 1, 2, \dots, q$, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^q$. Então,

$$u := \rho(z) = \left(\sum_{j=1}^q \rho_{1j} z_j, \sum_{j=1}^q \rho_{2j} z_j, \dots, \sum_{j=1}^q \rho_{qj} z_j \right), \quad z \in \mathbb{C}^q. \quad (2.16)$$

Se $f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, é fácil ver que $F \circ \rho \in \mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, onde F é a extensão de f dada pelo isomorfismo (2.12). Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} (F \circ \rho)(z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} F \left(\sum_{j=1}^q \rho_{1j} z_j, \dots, \sum_{j=1}^q \rho_{qj} z_j, \sum_{j=1}^q \overline{\rho_{1j}} \bar{z}_j, \dots, \sum_{j=1}^q \overline{\rho_{qj}} \bar{z}_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{1i}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{2i}} + \dots + \frac{\partial}{\partial \bar{u}_q} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{qi}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} (F \circ \rho)(z) &= \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_1} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{1i}} \rho_{ji} + \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_2} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{2i}} \rho_{ji} + \cdots \\ &\quad + \sum_{j=1}^q \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial \bar{u}_q} (F \circ \rho)(z) \overline{\rho_{qi}} \rho_{ji}, \quad z \in \mathbb{C}^q. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \overline{\rho_{jk}} \rho_{ik} &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} (F \circ \rho)(z) &= \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial \bar{u}_i} F(u) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f \circ \rho \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. ■

2.4 Polinômios no disco

Na análise esférica real, polinômios ultra-esféricos ou de Gegenbauer aparecem naturalmente como um caso particular dos polinômios de Jacobi ([16], [39]). Polinômios no disco são os correspondentes destes na análise esférica em Ω_{2q} . Em particular, os polinômios no disco são construídos a partir dos polinômios de Jacobi. Na literatura, não existe uma referência básica para polinômios no disco, no entanto, alguns dos resultados que utilizamos podem ser encontrados em J. N. Boyd [2] e nos artigos de T. Koornwinder.

Sejam m, n, ν inteiros não negativos. O *polinômio no disco* de grau m na variável $z \in B[0, 1]$ e de grau n na variável $\bar{z}$, associado ao parâmetro ν , é o polinômio $P_{m,n}^\nu$ dado por

$$P_{m,n}^\nu(z) = \begin{cases} P_n^{(\nu, m-n)}(2z\bar{z} - 1)z^{m-n} & \text{se } m \geq n \\ P_m^{(\nu, n-m)}(2z\bar{z} - 1)\bar{z}^{n-m} & \text{se } m \leq n. \end{cases}$$

Aqui, $P_n^{(\nu, m-n)}$ denota o *polinômio de Jacobi* associado ao par $(\nu, m-n)$ normalizado pela condição $P_n^{(\nu, m-n)}(1) = 1$.

Algumas propriedades operacionais dos polinômios no disco que são utilizadas no trabalho estão registradas abaixo. Todas elas seguem diretamente da definição anterior.

Teorema 2.4.1. *As seguintes propriedades valem:*

- (i) $P_{m,n}^{q-2}(e^{i\theta}z) = e^{i(m-n)\theta}P_{m,n}^{q-2}(z)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in B[0, 1]$;
- (ii) $P_{m,n}^{q-2}(1) = 1$;
- (iii) $|P_{m,n}^{q-2}(z)| \leq 1$, $z \in B[0, 1]$;
- (iv) $P_{m,n}^{q-2}(\bar{z}) = \overline{P_{m,n}^{q-2}(z)} = P_{n,m}^{q-2}(z)$, $z \in B[0, 1]$.

O resultado abaixo, conhecido como Fórmula da Adição, faz a conexão entre os polinômios no disco associados a parâmetros inteiros e os harmônicos esféricos complexos. Uma prova pode ser encontrada em [21].

Teorema 2.4.2. *Vale a fórmula*

$$P_{m,n}^{q-2}(\langle z, w \rangle) = \frac{\omega_q}{d(m, n)} \sum_{j=1}^{d(m,n)} Y_{m,n}^j(z) \overline{Y_{m,n}^j(w)}, \quad z, w \in \Omega_{2q}.$$

Observamos que o Teorema 2.3.6 implica que esta fórmula é invariante independente da base ortonormal tomada para $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.

Concluimos a seção com propriedades adicionais dos polinômios no disco ([2]).

Teorema 2.4.3. *O espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C})|_{B[0,1]}$ é gerado pelo conjunto $\{P_{m,n}^{q-2} : m, n = 0, 1, \dots\}$. Tal conjunto é ortogonal e completo em $L^{2,q}(B[0, 1])$.*

2.5 Norma da malha

Nesta seção, introduzimos uma maneira de aferir como um subconjunto de Ω_{2q} está distribuído sobre Ω_{2q} . A idéia original para o conceito que apresentamos se encontra em [19] e [20]. Os resultados aqui contidos são utilizados no último capítulo da tese. Sua leitura pode, a critério do leitor, ser adiada até a chegada daquele capítulo.

A *norma da malha* de um subconjunto W de Ω_{2q} é o número não negativo

$$\eta(W) := \sup_{z \in \Omega_{2q}} \left\{ \inf_{w \in W} d_{2q}(\Upsilon_q(z), \Upsilon_q(w)) \right\}.$$

Quando não houver possibilidade de confusão, vamos escrever simplesmente η para denotar este número.

Na prática, apenas subconjuntos para os quais a norma da malha é pequena são interessantes. Subconjuntos com esta característica são de alguma forma densos em

Ω_{2q} . Dentre estes, nota-se que os de menor cardinalidade são aqueles que possuem pontos igualmente distribuídos sobre Ω_{2q} .

No restante da seção, consideramos funções de $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$. Em particular, utilizamos elementos de $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$ restritos a certos subconjuntos W de Ω_{2q} . A norma uniforme de $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$ é denotada por $\|\cdot\|_\infty$, enquanto que a norma uniforme de $\mathcal{C}(W)$ é representada por $\|\cdot\|_W$.

Proposição 2.5.1. *Seja W um subconjunto de Ω_{2q} tal que η é positivo. Se κ é um inteiro positivo menor ou igual a $(2\eta)^{-1}$, então*

$$\|g\|_W \leq \|g\|_\infty \leq 2 \|g\|_W, \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}). \quad (2.17)$$

Prova. A primeira desigualdade é óbvia. Para a outra, seja $g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$. Podemos assumir que $\|g\|_\infty \neq 0$, pois caso contrário, a desigualdade segue trivialmente. Tome $\xi \in \Omega_{2q}$ tal que $\|g\|_\infty = |g(\xi)|$. Podemos selecionar um $w_0 \in W$ de modo que $d_{2q}(\Upsilon_q(\xi), \Upsilon_q(w_0)) \leq \eta \leq 1/2\kappa$. Pela desigualdade de Markov ([19]), deduzimos que

$$\left| \frac{g(\xi)}{\|g\|_\infty} - \frac{g(w_0)}{\|g\|_\infty} \right| \leq \kappa d_{2q}(\Upsilon_q(\xi), \Upsilon_q(w_0)) \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{|g(w_0)|}{\|g\|_\infty} \geq \frac{|g(\xi)|}{\|g\|_\infty} - \left| \frac{g(\xi)}{\|g\|_\infty} - \frac{g(w_0)}{\|g\|_\infty} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{\|g\|_\infty} \sup_{w \in W} |g(w)| \geq \frac{|g(w_0)|}{\|g\|_\infty} \geq \frac{1}{2}.$$

Assim, $\|g\|_\infty \leq 2 \|g\|_W$, completando a prova da proposição. ■

Corolário 2.5.2. *Seja W um subconjunto de Ω_{2q} . Se κ é um inteiro positivo menor ou igual a $(2\eta)^{-1}$, então a transformação linear*

$$g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}) \xrightarrow{\psi} g|_W \in \mathcal{C}(W)$$

é um monomorfismo.

Prova. As desigualdades em (2.17) implicam que $\text{Ker } \psi$ é trivial. ■

No Lema 2.5.3, vamos usar o símbolo $\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_N^*\}$ para representar a base dual da base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}$ de $\mathbb{C}^N$. A notação δ_j representa o funcional pontual correspon-

dente a $w_j \in \Omega_{2q}$, isto é, $\delta_j(h) = h(w_j)$, $h \in \mathcal{C}(\Omega_{2q})$. Mais geralmente, a notação δ_z representa o funcional pontual correspondente a $z \in \Omega_{2q}$.

Lema 2.5.3. *Se $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ é um subconjunto de Ω_{2q} , então o dual contínuo $\mathcal{C}(W)^*$ de $\mathcal{C}(W)$ coincide com $[\{\delta_j|_{\mathcal{C}(W)} : j = 1, 2, \dots, N\}]$.*

Prova. O espaço $\mathbb{C}^N$ munido da norma do máximo é isomorfo a $(\mathcal{C}(W), \|\cdot\|_W)$ e o isomorfismo é dado por

$$S(g) = (g(w_1), \dots, g(w_N)), \quad g \in \mathcal{C}(W).$$

Em particular o adjunto S^* de S , define um isomorfismo entre $(\mathbb{C}^N)^*$ e $\mathcal{C}(W)^*$. Se $\Lambda \in \mathcal{C}(W)^*$, então $S^*(\Gamma) = \Lambda$ para algum $\Gamma \in (\mathbb{C}^N)^*$. Este Γ pode ser escrito na forma

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N a_j \varepsilon_j^*, \quad a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{C}.$$

Agora, a definição de S^* e cálculo direto nos conduz a

$$\Lambda(g) = \left(\sum_{j=1}^N a_j \delta_j \right) (g), \quad g \in \mathcal{C}(W).$$

Logo, Λ é um elemento do espaço $[\{\delta_j|_{\mathcal{C}(W)} : j = 1, 2, \dots, N\}]$.

Por outro lado, se $\Gamma = \sum_{j=1}^N b_j \delta_j$, $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{C}$, então o funcional Λ de $(\mathbb{C}^N)^*$ dado por $\Lambda = \sum_{j=1}^N b_j \varepsilon_j^*$ satisfaz $\Gamma = S^*(\Lambda)$. Portanto, $\Gamma \in \mathcal{C}(W)^*$. ■

Teorema 2.5.4. *Seja W um subconjunto de cardinalidade N de Ω_{2q} . Se κ é um inteiro positivo menor que $(2\eta)^{-1}$ e $z \in \Omega_{2q}$, então*

$$\delta_z(g) = \sum_{\mu=1}^N c_\mu \delta_\mu(g), \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}),$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ e $\sum_{\mu=1}^N |c_\mu| \leq 2$.

Prova. A aplicação ψ do corolário anterior é um isomorfismo entre $\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$ e $\psi(\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}))$. Devido à Proposição 2.5.1,

$$\|\psi^{-1}\| = \sup_{\|\psi(g)\|_W \leq 1} \|\psi^{-1}(\psi(g))\|_\infty = \sup_{\|g\|_W \leq 1} \|g\|_\infty \leq 2, \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}).$$

Então,

$$\psi^* : \psi \left(\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}) \right)^* \mapsto \left(\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}) \right)^*$$

é um isomorfismo e $\|\psi^{*-1}\| = \|\psi^{-1}\| \leq 2$. Agora está claro que existe um elemento Λ em $\psi(\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}))^*$ tal que $\psi^*(\Lambda)$ coincide com a restrição de δ_z a $\bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$. Também,

$$\|\Lambda\| = \|\psi^{*-1}(\delta_z)\| \leq \|\psi^{*-1}\| \leq 2. \quad (2.18)$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\vartheta \in \mathcal{C}(W)^*$ tal que $\|\vartheta\| = \|\Lambda\|$ e

$$\vartheta(\psi(g)) = \Lambda(\psi(g)), \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}). \quad (2.19)$$

A seguir usamos o Lema 2.5.3 para selecionar números complexos $c_1, c_2, \dots, c_N$ tais que

$$\vartheta(\psi(g)) = \sum_{\mu=1}^N c_{\mu} \delta_{\mu}(\psi(g)), \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}), \quad (2.20)$$

e observamos que $\sum_{\mu=1}^N |c_{\mu}| = \|\vartheta\| = \|\Lambda\| \leq 2$. Finalmente, notando que

$$\delta_{\mu}(\psi(g)) = \delta_{\mu}(g), \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q})$$

e usando (2.18), (2.19) e (2.20)

$$\delta_z(g) = \psi^*(\Lambda)(g) = \Lambda(\psi(g)) = \sum_{\mu=1}^N c_{\mu} \delta_{\mu}(\psi(g)) = \left(\sum_{\mu=1}^N c_{\mu} \delta_{\mu} \right) (g), \quad g \in \bigoplus_{k+l=0}^{\kappa} \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q}).$$

Isto completa a prova. ■

Capítulo 3

O Núcleo do Operador de Convolução

Neste capítulo, provamos uma complexificação da Fórmula de Funk-Hecke usual. Em seguida, investigamos algumas propriedades de operadores definidos por convolução esférica, enfatizando aqueles dados pela convolução de funções zonais com medidas de Radon. O que temos em mente neste estudo é a possibilidade de construir subconjuntos fundamentais de funções zonais dentro dos espaços considerados no trabalho. A construção de subconjuntos fundamentais em espaços associados à esferas reais foram discutidos detalhadamente em [27]. As técnicas lá empregadas são de fácil extensão para o caso complexo, razão pela qual este assunto não será tratado aqui.

3.1 A Fórmula de Funk-Hecke

Ressaltamos a utilidade da Fórmula de Funk-Hecke usual na introdução do trabalho, onde incluímos várias referências que comprovam sua importância na Análise Esférica. A versão que apresentamos abaixo pode ser entendida como uma complexificação desta versão original. Observamos que é possível encontrar casos particulares desta fórmula na literatura, porém, em contextos diferentes dos aqui considerados. Veja, por exemplo, os capítulos iniciais de [23].

Teorema 3.1.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, Y um harmônico esférico de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ e K uma função de $L^{1,q}(B[0,1])$. Se $w \in \Omega_{2q}$, então a aplicação $z \in \Omega_{2q} \mapsto K(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)}$*

pertence a $L^1(\Omega_{2q})$ e

$$\int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) = \lambda_{m,n}^{q-2}(K) \overline{Y(w)}, \quad (3.1)$$

onde

$$\lambda_{m,n}^{q-2}(K) := \omega_q \int_{B[0,1]} K(z) \overline{P_{m,n}^{q-2}(z)} d\nu_q(z).$$

Prova. Primeiro analisamos o caso em que K é o polinômio no disco $P_{k,l}^{q-2}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Fixado $w \in \Omega_{2q}$, a aplicação $z \in \Omega_{2q} \mapsto P_{k,l}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)}$ é σ_q -integrável. Decompondo Y na forma

$$Y = \sum_{j=1}^{d(m,n)} a_j Y_{m,n}^j, \quad a_j \in \mathbb{C}$$

e usando a Fórmula da Adição, vemos que

$$\int_{\Omega_{2q}} P_{k,l}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) = \frac{\omega_q}{d(k,l)} \delta_{km} \delta_{ln} \sum_{i=1}^{d(k,l)} \left(\sum_{j=1}^{d(m,n)} \bar{a}_j \delta_{ij} \right) \overline{Y_{k,l}^i(w)}.$$

Por outro lado, o uso do Lema 2.2.3 e da Fórmula da Adição novamente, leva-nos a

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n}^{q-2}(P_{k,l}^{q-2}) &= \omega_q \int_{B[0,1]} P_{k,l}^{q-2}(z) \overline{P_{m,n}^{q-2}(z)} d\nu_q(z) \\ &= \int_{\Omega_{2q}} P_{k,l}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \overline{P_{m,n}^{q-2}(\langle z, w \rangle)} d\sigma_q(z) \\ &= \frac{\omega_q \delta_{km}}{d(k,l)} \frac{\omega_q \delta_{ln}}{d(m,n)} \sum_{i=1}^{d(k,l)} \overline{Y_{k,l}^i(w)} \left(\sum_{j=1}^{d(m,n)} \delta_{ij} Y_{m,n}^j(w) \right). \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados acima, é agora evidente que (3.1) vale quando $(k, l) \neq (m, n)$. Se $(k, l) = (m, n)$, usamos a Fórmula da Adição uma vez mais para simplificar as expressões e obter

$$\int_{\Omega_{2q}} P_{k,l}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) = \frac{\omega_q}{d(m,n)} \overline{Y(w)} = \lambda_{m,n}^{q-2}(P_{k,l}^{q-2}) \overline{Y(w)}.$$

A prova do caso geral começa com o uso da propriedade de densidade descrita no Teorema 2.4.3. Como o funcional

$$K \in L^{1,q}(B[0,1]) \mapsto \lambda_{m,n}^{q-2}(K) \in \mathbb{C}$$

é linear, por aquele teorema, concluímos que a fórmula também vale quando K é um elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Se K é uma função contínua em $B[0,1]$, usamos o Lema 2.3.2 para

selecionar uma seqüência $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ em $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ tal que $K = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$, uniformemente em $B[0, 1]$. Pela continuidade de $\lambda_{m,n}^{q-2}$ e pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.2, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{2q}} p_k(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{m,n}^{q-2}(p_k) \overline{Y(w)} \\ &= \lambda_{m,n}^{q-2}(K) \overline{Y(w)}. \end{aligned}$$

Finalmente, se K é ν_q -integrável, selecionamos uma seqüência $\{K_j\}_{j=0}^\infty$ de funções contínuas como descritas no Lema 2.2.4. Como $\lim_{j \rightarrow \infty} K_j(\langle \cdot, w \rangle) = K(\langle \cdot, w \rangle)$ q.s. e a desigualdade $|K_j| \leq \sup_{z \in B[0,1]} |K(z)|$, $j = 0, 1, \dots$ vale, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([10], p.53) implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{2q}} K_j(\langle z, w \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{m,n}^{q-2}(K_j) \overline{Y(w)} \\ &= \lambda_{m,n}^{q-2}(K) \overline{Y(w)}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

No corolário abaixo coletamos algumas variantes desse resultado.

Corolário 3.1.2. *Assuma as hipóteses do teorema anterior. Então, valem as fórmulas:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) Y(z) d\sigma_q(z) &= \lambda_{n,m}^{q-2}(K) Y(w), \\ \int_{\Omega_{2q}} K(\langle w, z \rangle) Y(z) d\sigma_q(z) &= \lambda_{m,n}^{q-2}(K) Y(w), \\ \int_{\Omega_{2q}} K(\langle w, z \rangle) \overline{Y(z)} d\sigma_q(z) &= \lambda_{n,m}^{q-2}(K) \overline{Y(w)}. \end{aligned}$$

Prova. Basta aplicar o teorema anterior usando uma ou ambas as informações: o elemento Y é o conjugado de um harmônico esférico de $\mathcal{H}_{n,m}(\Omega_{2q})$ e $\lambda_{n,m}^{q-2}(K) = \lambda_{m,n}^{q-2}(\tilde{K})$, onde $\tilde{K}(z) := K(\bar{z})$, $z \in B[0, 1]$. ■

3.2 Convolução entre núcleos zonais e medidas

A integral sobre Ω_{2q} que aparece na fórmula (3.1) é a convolução esférica de um núcleo zonal com uma função polinomial. Nesta seção, formalizamos o conceito de convolução esférica e apresentamos algumas de suas propriedades básicas.

O Teorema 2.4.3 possibilita expandir uma função K de $L^{2,q}(B[0,1])$ em uma série da forma

$$K(z) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{d(m,n)}{\omega_q} \lambda_{m,n}^{q-2}(K) P_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B[0,1], \quad (3.2)$$

onde $\lambda_{m,n}^{q-2}(K)$ é o coeficiente de Funk-Hecke descrito no Teorema 3.1.1.

No que segue, o símbolo $\mathcal{M}$ denota o conjunto das medidas de Radon sobre Ω_{2q} ([10], p.204-225). Seja D_Ψ o conjunto das medidas μ de $\mathcal{M}$ tais que o núcleo $K(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ associado a expansão (3.2) é $\sigma_q \times \mu$ - integrável. A *convolução* de K por μ é a função $\Psi : D_\Psi \subset \mathcal{M} \rightarrow L^1(\Omega_{2q})$ dada por

$$\Psi(\mu) = \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, \cdot \rangle) d\mu(z). \quad (3.3)$$

A convolução que aparece no enunciado do Teorema 3.1.1 é, então, a convolução de K pela medida $d\mu = f d\sigma_q$, onde f é uma função de $L^1(\Omega_{2q})$. Vamos diferenciar este tipo especial de convolução introduzindo a notação

$$\Psi_K(f) := \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, \cdot \rangle) f(z) d\sigma_q(z), \quad f \in L^1(\Omega_{2q}).$$

O Teorema 3.1.1 implica que

$$\Psi_K(Y) = \lambda_{n,m}^{q-2}(K) Y, \quad Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \quad (3.4)$$

Registramos no próximo lema o fato que Ψ_K é uma função bem definida em $L^1(\Omega_{2q})$. A prova é omitida por ser uma adaptação de um resultado clássico de teoria da medida ([10]).

Lema 3.2.1. *Se K é um elemento de $L^{2,q}(B[0,1])$, então*

$$\|\Psi_K(f)\|_p \leq \lambda_{0,0}^{q-2}(|K|) \|f\|_p, \quad f \in L^p(\Omega_{2q}), \quad p = 1, 2.$$

Abaixo exploramos de forma abstrata, o tipo de propriedade que estamos buscando.

Teorema 3.2.2. *Sejam μ um elemento de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ e K uma função de $L^{2,q}(B[0,1])$ tal que o núcleo $K(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ é $\sigma_q \times \mu$ -integrável. Se $\Psi(\mu)$ é a função nula, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ e $Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ tais que $\lambda_{m,n}^{q-2}(K) = 0 \neq \int_{\Omega_{2q}} Y(z) d\mu(z)$.*

Prova. Devido às hipóteses, cada função

$$z \in \Omega_{2q} \longmapsto \int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) d\mu(w)$$

é σ_q -integrável. Então, o Teorema de Fubini-Tonelli ([10], p.223) e o Teorema 3.1.1 revelam que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} \Psi(\mu)(w) Y(w) d\sigma_q(w) &= \int_{\Omega_{2q}} \left(\int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) d\mu(z) \right) Y(w) d\sigma_q(w) \\ &= \int_{\Omega_{2q}} \left(\int_{\Omega_{2q}} K(\langle z, w \rangle) Y(w) d\sigma_q(w) \right) d\mu(z) \\ &= \lambda_{m,n}^{q-2}(K) \int_{\Omega_{2q}} Y(z) d\mu(z), \quad Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}), \quad m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Se $\int_{\Omega_{2q}} Y(z) d\mu(z) = 0$, $Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ sempre que $\lambda_{m,n}^{q-2}(K) = 0$, então pelos cálculos acima o funcional linear

$$f \longmapsto \int_{\Omega_{2q}} f(w) d\mu(w), \quad f \in L^1(\Omega_{2q})$$

anularia $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, $m, n \in \mathbb{N}$. Sendo este conjunto fundamental em $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$ ([21]), teríamos que $\mu = 0$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, a conclusão do enunciado do teorema vale. ■

A seguinte propriedade de comutatividade segue do Teorema de Fubini-Tonelli.

Teorema 3.2.3. *Seja K um elemento de $L^{2,q}(B[0,1])$. Se f e g são elementos de $L^1(\Omega_{2q})$ tais que o produto $\Psi_K(f)g$ é σ_q -integrável, então*

$$\int_{\Omega_{2q}} \Psi_K(f)(z) g(z) d\sigma_q(z) = \int_{\Omega_{2q}} f(z) \Psi_{\tilde{K}}(g)(z) d\sigma_q(z),$$

onde $\tilde{K}$ é a função definida na prova do Corolário 3.1.2.

Corolário 3.2.4. *Sejam K um elemento de $L^{2,q}(B[0,1])$ e f um elemento de $L^2(\Omega_{2q})$. Então,*

$$\Psi_K(f) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \lambda_{n,m}^{q-2}(K) \hat{f}_{m,n}(j) Y_{m,n}^j.$$

Prova. Usando o Teorema 3.1.1, vemos que

$$\Psi_{\tilde{K}}(\overline{Y_{m,n}^j}) = \lambda_{n,m}^{q-2}(K) \overline{Y_{m,n}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 3.2.3 concluimos que

$$\widehat{\Psi_K(f)}_{m,n}(j) = \lambda_{n,m}^{q-2}(K) \widehat{f}_{m,n}(j), \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Isto encerra a prova do corolário. ■

No resultado seguinte enumeramos algumas propriedades relacionadas ao núcleo do operador Ψ_K .

Teorema 3.2.5. *Seja K um elemento de $L^{2,q}(B[0, 1])$. As seguintes propriedades valem:*

- (i) *Se $\lambda_{n,m}^{q-2}(K) = 0$ para algum par (m, n) , então $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \subset \text{Ker} \Psi_K$;*
- (ii) *Se $f \in L^2(\Omega_{2q}) \cap \text{Ker} \Psi_K$ e $\lambda_{n,m}^{q-2}(K) \neq 0$ para algum par (m, n) , então $\widehat{f}_{m,n}(j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, d(m, n)$;*
- (iii) *Se $\lambda_{n,m}^{q-2}(K) \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, então $L^2(\Omega_{2q}) \cap \text{Ker} \Psi_K = \{0\}$.*

Prova. A parte (i) segue da Fórmula 3.4. As demais partes seguem diretamente do Corolário 3.2.4. ■

3.3 Convolução e a função característica de $\Omega_w^{\gamma,q}$

Nesta seção, consideramos o operador de convolução Ψ_K para algumas escolhas da função K . Em particular, analisamos o caso em que K é a função característica de uma subesfera de Ω_{2q} . O Teorema 3.1.1 é o ingrediente principal em nossas provas. Contudo, algumas delas podem ser re-elaboradas sem a utilização deste teorema. Mais detalhes sobre isso podem ser encontrados em [28].

Teorema 3.3.1. *Se $\gamma \in B[0, 1]$ e $w \in \Omega_{2q}$, então*

$$\int_{\Omega_w^{\gamma,q}} Y(z) d\sigma_w^\gamma(z) = \omega_{q-1} (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} P_{m,n}^{q-2}(\gamma) Y(w), \quad Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Prova. Usando a decomposição (2.3) e o Teorema 2.1.6, podemos escrever

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z) d\sigma_q(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{\Omega_{2q-2}} Y(te^{i\varphi}w + \sqrt{1-t^2} z'') d\sigma_{q-1}(z'') \right) t(1-t^2)^{q-2} dt d\varphi.$$

Por outro lado, usando a primeira fórmula no Corolário 3.1.2 com K igual à aplicação identidade, integrando e aplicando o Lema 2.2.3, segue que

$$\int_{\Omega_{2q}} Y(z) d\sigma_q(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega_{q-1} P_{m,n}^{q-2}(te^{i\varphi}) Y(w) t(1-t^2)^{q-2} dt d\varphi.$$

Comparando estas duas igualdades concluimos que

$$\int_{\Omega_{2q-2}} Y(te^{i\varphi}w + \sqrt{1-t^2}z'') d\sigma_{q-1}(z'') = \omega_{q-1} P_{m,n}^{q-2}(te^{i\varphi}) Y(w). \quad (3.5)$$

Por fim, de (2.5), do Teorema 2.1.5 e de (3.5) vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_w^{\gamma,q}} Y(z) d\sigma_w^\gamma(z) &= (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} \int_{\Omega_{2q-2}} Y(\gamma w + \sqrt{1-\gamma\bar{\gamma}}z'') d\sigma_{q-1}(z'') \\ &= \omega_{q-1} (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2} P_{m,n}^{q-2}(\gamma) Y(w), \end{aligned}$$

concluindo a prova do teorema. ■

Entre outras coisas, o teorema acima revela que

$$\sigma_w^\gamma(\Omega_w^{\gamma,q}) = \omega_{q-1} (1 - \gamma\bar{\gamma})^{(2q-3)/2}, \quad \gamma \in B[0, 1], \quad w \in \Omega_{2q}.$$

Usando este valor, definimos a *média de* $f \in L^1(\Omega_{2q})$ sobre $\Omega_w^{\gamma,q}$ como sendo o número complexo

$$M^\gamma(f, w) := \frac{1}{\sigma_w^\gamma(\Omega_w^{\gamma,q})} \int_{\Omega_w^{\gamma,q}} f(z) d\sigma_w^\gamma(z), \quad \gamma \in B(0, 1), \quad w \in \Omega_{2q}.$$

Teorema 3.3.2. *Sejam $\gamma \in B(0, 1)$. Então,*

$$\int_{\Omega_{2q}} M^\gamma(f, z) g(z) d\sigma_q(z) = \int_{\Omega_{2q}} f(z) M^{\bar{\gamma}}(g, z) d\sigma_q(z), \quad f, g \in L^2(\Omega_{2q}).$$

Prova. Primeiro observamos que $\sigma_w^\gamma(\Omega_w^{\gamma,q}) M^\gamma(f, w) = \Psi_{K_\gamma}(f)(w)$, $w \in \Omega_{2q}$, onde

$$K_\gamma(\langle z, w \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{se } \langle z, w \rangle = \gamma \\ 0 & \text{se } \langle z, w \rangle \neq \gamma. \end{cases}$$

O Teorema 3.2.3 mostra que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2q}} \sigma_z^\gamma(\Omega_z^{\gamma,q}) M^\gamma(f, z) g(z) d\sigma_q(z) &= \int_{\Omega_{2q}} f(z) \Psi_{\tilde{K}_\gamma}(g)(z) d\sigma_q(z) \\ &= \int_{\Omega_{2q}} f(z) \sigma_z^{\bar{\gamma}}(\Omega_z^{\bar{\gamma},q}) M^{\bar{\gamma}}(g, z) d\sigma_q(z). \end{aligned}$$

Como $\sigma_z^\gamma(\Omega_z^{\gamma,q})$ independe de z e é invariante por conjugação complexa em γ , a prova está completa. ■

Teorema 3.3.3. *Sejam $\gamma \in B(0, 1)$ e $f \in L^2(\Omega_{2q})$. Se $M^\gamma(f, z) = 0$, $z \in \Omega_{2q}$, então $f \in \text{Ker } \Psi_1$.*

Prova. A prova segue diretamente das igualdades

$$\int_{\Omega_{2q}} M^\gamma(f, z) d\sigma_q(z) = \int_{\Omega_{2q}} f(z) M^{\bar{\gamma}}(1, z) d\sigma_q(z) = \Psi_1(f), \quad f \in L^2(\Omega_{2q}),$$

obtidas do Teorema 3.3.2. ■

Outras propriedades adicionais do operador $f \in L^1(\Omega_{2q}) \mapsto M^\gamma(f, \cdot) \in L^1(\Omega_{2q})$ são listadas abaixo. A seguinte notação é necessária:

$$\mathcal{A} := \{z \in B[0, 1] : P_{m,n}^{q-2}(z) = 0 \text{ para algum } (m, n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Teorema 3.3.4. *Seja $\gamma \in B(0, 1)$. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $\gamma \in \mathcal{A}$, então $\cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } M^\gamma(\cdot, z) \neq \{0\}$;*
- (ii) *Se $\gamma \notin \mathcal{A}$, então $L^2(\Omega_{2q}) \cap (\cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } M^\gamma(\cdot, z)) = \{0\}$.*

Prova. (i) Usando o Teorema 3.3.1 escrevemos

$$M^\gamma(Y, \cdot) = P_{m,n}^{q-2}(\gamma)Y, \quad Y \in \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \quad (3.6)$$

Se $\gamma \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \subset \text{Ker } M^\gamma(\cdot, z)$, $z \in \Omega_{2q}$ e algum $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

(ii) Seja $f \in \cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } M^\gamma(\cdot, z)$. Devido ao Teorema 3.3.1 e ao Teorema 3.3.2,

$$0 = \int_{\Omega_{2q}} f(z) M^{\bar{\gamma}}(Y, z) d\sigma_q(z) = P_{m,n}^{q-2}(\bar{\gamma}) \int_{\Omega_{2q}} f(z) Y(z) d\sigma_q(z), \quad Y \in \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Se $\gamma \notin \mathcal{A}$,

$$\int_{\Omega_{2q}} f(z) Y(z) d\sigma_q(z) = 0, \quad Y \in \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Portanto, se $f \in L^2(\Omega_{2q})$, segue de (2.15) que $f = 0$. ■

O Teorema 3.3.4 implica que fixados $z_0 \in \Omega_{2q}$ e $\gamma \in \mathcal{A}$, o núcleo do funcional

$$f \in L^1(\Omega_{2q}) \mapsto M^\gamma(f, z_0) \in \mathbb{C}$$

é não trivial. Por outro lado, temos a seguinte consequência geométrica dele.

Corolário 3.3.5. *Seja $\gamma \notin \mathcal{A}$. Se a média de $f \in L^2(\Omega_{2q})$ sobre cada $\Omega_w^{\gamma,q}$ é zero, então f é a função nula.*

Terminamos a discussão sobre a média de funções analisando como o conjunto $\mathcal{A}$ está distribuído em $B[0, 1]$. O seguinte resultado técnico, um teorema de comparação de Sturm ([39], p.19), é utilizado na análise.

Teorema 3.3.6. *Sejam f e F funções contínuas no intervalo aberto (x_0, x_1) satisfazendo $f(x) \leq F(x)$, $x_0 < x < x_1$. Sejam y e Y funções não nulas tais que $y''(x) + f(x)y(x) = 0$ e $Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$. Se a e b são raízes consecutivas de y em (x_0, x_1) e $f(x) \neq F(x)$ para algum x no intervalo aberto (a, b) , então Y tem pelo menos uma raiz em (a, b) .*

Teorema 3.3.7. *O conjunto $\mathcal{A}$ é denso em $B[0, 1]$.*

Prova. Se $r \in [0, 1)$, podemos usar o Teorema 2.4.1 para concluir que $r \in \mathcal{A} \cap (0, 1)$ se e somente se, $re^{i\theta} \in \mathcal{A}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Como

$$P_{m,n}^{q-2}(r) = r^{|m-n|} P_{m \wedge n}^{(q-2, |m-n|)}(2r^2 - 1), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad r \in [0, 1),$$

é suficiente mostrar, então, que

$$\mathcal{A}' = \left\{ r \in (0, 1) : P_{m \wedge n}^{(q-2, |m-n|)}(2r^2 - 1) = 0 \text{ para algum } (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

é denso em $(0, 1)$. Para tanto, basta mostrar que o subconjunto

$$\{r \in (0, 1) : P_m^{(q-2, 0)}(2r^2 - 1) = 0 \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$$

de $\mathcal{A}'$ é denso em $[0, 1)$, ou seja, que

$$\mathcal{A}'' := \{\theta \in (0, \pi) : P_m^{(q-2, 0)}(\cos \theta) = 0 \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$$

é denso em $(0, \pi)$. Agora, fixe $a, b \in (0, \pi)$, $a < b$, e defina as funções contínuas

$$f(\theta) = \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2$$

e

$$F_m(\theta) = \left(\frac{2m+q-1}{2} \right)^2 + \frac{1-4(q-2)^2}{16 \sin^2 \theta/2} + \frac{1}{16 \cos^2 \theta/2}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Não é difícil verificar que existe um número real m_0 tal que

$$f(\theta) < F_m(\theta), \quad \theta \in (0, \pi), \quad m \geq m_0.$$

Por outro lado,

$$Y_m(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{(2q-3)/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} P_m^{(q-2,0)}(\cos \theta)$$

é uma solução da equação diferencial $Y''(\theta) + F_m(\theta)Y(\theta) = 0$ ([39], p.67]), enquanto que $y(\theta) = \sin \pi(\theta-a)/(b-a)$ é uma solução de $y''(\theta) + f(\theta)y(\theta) = 0$. Como $y(a) = y(b) = 0$, o Teorema 3.3.6 implica que Y_m tem pelo menos uma raiz em (a, b) quando $m \geq m_0$. Portanto, $P_m^{(q-2,0)}(\cos \theta)$ tem uma raiz em (a, b) quando $m \geq m_0$. Assim, $\mathcal{A}''$ é denso em $(0, \pi)$. ■

3.4 Convolução e a função característica de calotas

Nesta seção, repetimos o procedimento da seção anterior no caso em que os operadores correspondem a integração sobre calotas de Ω_{2q} .

Sejam $\gamma \in B[0, 1]$ e $w \in \Omega_{2q}$. A *calota de base* $\Omega_w^{\gamma,q}$ é o conjunto

$$C_w^{\gamma,q} := \{z \in \Omega_w^{te^{i\theta}q} : t \in [|\gamma|, 1], \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

A *média* de $f \in L^1(\Omega_{2q})$ sobre $C_w^{\gamma,q}$ é o número complexo

$$N^\gamma(f, w) := \frac{q-1}{\pi(1-\gamma\bar{\gamma})^{q-1}} \int_0^{2\pi} \int_{|\gamma|}^1 M^{re^{i\theta}}(f, w)(1-r^2)^{q-2}r \, dr \, d\theta.$$

Ao contrário do que vimos nas duas seções anteriores, a média N^γ satisfaz a seguinte propriedade.

Teorema 3.4.1. *Seja $\gamma \in B(0, 1)$. Então,*

$$\int_{\Omega_{2q}} N^\gamma(f, z) g(z) d\sigma_q(z) = \int_{\Omega_{2q}} f(z) N^\gamma(g, z) d\sigma_q(z), \quad f, g \in L^1(\Omega_{2q}).$$

Prova. O Teorema 3.3.2 e a fórmula

$$\int_0^{2\pi} \int_{|\gamma|}^1 M^{re^{-i\theta}}(f, z)(1-r^2)^{q-2}r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{|\gamma|}^1 M^{re^{i\theta}}(f, z)(1-r^2)^{q-2}r \, dr \, d\theta$$

implicam na igualdade desejada. ■

O Teorema 2.4.1 e a igualdade em (3.6) implicam que

$$N^\gamma(Y, \cdot) = \frac{(q-1)}{\pi(1-\gamma\bar{\gamma})^{q-1}} Y \int_0^{2\pi} \int_{|\gamma|}^1 e^{i(m-n)\theta} P_{m,n}^{q-2}(r)(1-r^2)^{q-2} r dr d\theta, \quad Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Denotemos por $I_{m,n}$ a última integral dupla acima. Como pretendemos calcular $I_{m,n}$ e $I_{m,n} = 0$, $m \neq n$, vamos assumir daqui para frente que $m = n$. Neste caso, a integral reduz-se a

$$\begin{aligned} I_{m,m} &= 2\pi \int_{|\gamma|}^1 P_m^{(q-2,0)}(2r^2-1)(1-r^2)^{q-2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2^{q-1}} \int_{2\gamma\bar{\gamma}-1}^1 P_m^{(q-2,0)}(r)(1-r)^{q-2} dr. \end{aligned}$$

É fácil ver que $I_{0,0} = \pi(1-\gamma\bar{\gamma})^{q-1}(q-1)^{-1}$. Nos demais casos, usamos a seguinte Fórmula de Rodrigues ([7], p.212)

$$2m \int_0^x P_m^{(q-2,0)}(t)(1-t)^{q-2} dt = P_{m-1}^{(q-1,1)}(0) - (1-x)^{q-1}(1+x)P_{m-1}^{(q-1,1)}(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Em ambos os casos $2\gamma\bar{\gamma} - 1 \geq 0$ e $2\gamma\bar{\gamma} - 1 < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{m,m} &= \frac{\pi}{m2^q} \left(\int_0^1 P_m^{(q-2,0)}(r)(1-r)^{q-2} dr - \int_0^{2\gamma\bar{\gamma}-1} P_m^{(q-2,0)}(r)(1-r)^{q-2} dr \right) \\ &= \frac{\pi}{m} (1-\gamma\bar{\gamma})^{q-1} \gamma\bar{\gamma} P_{m-1}^{(q-1,1)}(2\gamma\bar{\gamma}-1) \\ &= \frac{\pi}{m} (1-\gamma\bar{\gamma})^{q-1} \bar{\gamma} P_{m,m-1}^{q-1}(\gamma). \end{aligned}$$

Portanto,

$$N^\gamma(Y, \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ Y & \text{se } m = n = 0 \\ m^{-1}(q-1)\bar{\gamma} P_{m,m-1}^{q-1}(\gamma)Y & \text{se } m = n > 0. \end{cases}$$

No que segue,

$$\mathcal{B} := \{z \in B(0, 1) : zP_{m,m-1}^{q-1}(z) = 0 \text{ para algum } m > 0\}.$$

A prova do Teorema 3.3.7 pode ser convenientemente adaptada, para concluirmos que $\mathcal{B}$ também é denso em $B[0, 1]$.

O teorema abaixo é o análogo do Teorema 3.3.4.

Teorema 3.4.2. *Seja $\gamma \in B(0, 1)$. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $m \neq n$, então $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \subset \cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } N^\gamma(\cdot, z)$;*
- (ii) *Se $m > 0$ e $\gamma \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{H}_{m,m}(\Omega_{2q}) \subset \cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } N^\gamma(\cdot, z)$;*
- (iii) *$L^2(\Omega_{2q}) \cap (\cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } N^\gamma(\cdot, z)) \subset \{f \in L^2(\Omega_{2q}) : \langle f, Y \rangle_2 = 0, Y \in \cup_{m=1}^\infty \mathcal{H}_{m,m}(\Omega_{2q})\}$, sempre que $\gamma \notin \mathcal{B}$.*

Por fim, consideramos o operador diferença $\Delta^{\gamma,\delta} := N^\gamma - N^\delta$, $\gamma, \delta \in B(0, 1)$. Para $Y \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, notamos que

$$\Delta^{\gamma,\delta}(Y, \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, m = n = 0 \\ m^{-1}(q-1) [\bar{\gamma} P_{m,m-1}^{q-1}(\gamma) - \bar{\delta} P_{m,m-1}^{q-1}(\delta)] Y & \text{se } m = n > 0. \end{cases}$$

Assim, as seguintes propriedades são imediatas.

Teorema 3.4.3. *Sejam $\gamma, \delta \in B(0, 1)$ e $z \in \Omega_{2q}$. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *$\mathcal{H}_{0,0}(\Omega_{2q}) \cup (\cup_{m \neq n} \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})) \subset \cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } \Delta^{\gamma,\delta}(\cdot, z)$;*
- (ii) *Se (γ, δ) não pertence ao conjunto $\{(\gamma, \delta) : \bar{\gamma} P_{m,m-1}^{q-1}(\gamma) - \bar{\delta} P_{m,m-1}^{q-1}(\delta) = 0\}$, então $\cap_{z \in \Omega_{2q}} \text{Ker } \Delta^{\gamma,\delta}(\cdot, z) \subset (\oplus_{m=1}^\infty \mathcal{H}_{m,m})^\perp$.*

Capítulo 4

Gerador de Bases para os Espaços dos Harmônicos Esféricos

Neste capítulo, apresentamos um método indutivo para a construção de bases ortogonais para os espaços dos harmônicos esféricos sobre Ω_{2q} . A utilização de bases explícitas dos harmônicos esféricos, bem como relações entre harmônicos esféricos de dimensões diferentes, são úteis na resolução de vários problemas.

4.1 O produto interno $[\cdot, \cdot]$

Nesta seção, estudamos a forma bilinear

$$[f, g] = f(\overline{D}) \left(\overline{g(z)} \right) (0), \quad f, g \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^q), \quad (4.1)$$

onde

$$D := \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_q} \right) \quad \text{e} \quad \overline{D} := \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_q} \right).$$

Não sabemos da existência desta forma na literatura, no entanto, formas semelhantes sobre conjuntos ou espaços reais podem ser encontrados em [1], p.76 e [38], p.139.

Lema 4.1.1. *A forma $[\cdot, \cdot]$ é um produto interno em $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$.*

Prova. Pela definição (4.1), é fácil ver que se $(i, j) \neq (k, l)$, então $\mathbb{P}_{i,j}(\mathbb{C}^q)$ e $\mathbb{P}_{k,l}(\mathbb{C}^q)$ são ortogonais com respeito a $[\cdot, \cdot]$. Em particular, lembrando a notação para multi-índices,

$$[z^\alpha \bar{z}^\beta, z^\gamma \bar{z}^\delta] = \begin{cases} \alpha! \beta! & \text{se } (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \\ 0 & \text{se } (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta). \end{cases} \quad (4.2)$$

Agora sejam $f, g \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$. Existem pares de índices (k, l) e (m, n) em $\mathbb{N}^2$ tais que

$$f(z) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l f_{i,j}(z), \quad g(z) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n g_{\mu,\nu}(z), \quad f_{i,j} \in \mathbb{P}_{i,j}(\mathbb{C}^q), \quad g_{\mu,\nu} \in \mathbb{P}_{\mu,\nu}(\mathbb{C}^q).$$

Logo,

$$[f, g] = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n [f_{i,j}, g_{\mu,\nu}] = \sum_{\mu=0}^{k \wedge m} \sum_{\nu=0}^{l \wedge n} [f_{\mu,\nu}, g_{\mu,\nu}].$$

Expandindo $f_{\mu,\nu}$ e $g_{\mu,\nu}$ na forma

$$f_{\mu,\nu}(z) = \sum_{|\alpha|=\mu} \sum_{|\beta|=\nu} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad g_{\mu,\nu}(z) = \sum_{|\gamma|=\mu} \sum_{|\delta|=\nu} b_{\gamma,\delta} z^\gamma \bar{z}^\delta, \quad a_{\alpha,\beta}, b_{\gamma,\delta} \in \mathbb{C},$$

deduzimos que

$$[f, g] = \sum_{\mu=0}^{k \wedge m} \sum_{\nu=0}^{l \wedge n} \sum_{|\alpha|=\mu} \sum_{|\beta|=\nu} a_{\alpha,\beta} \overline{b_{\alpha,\beta}} \alpha! \beta!.$$

Usando essa representação, as demais propriedades da definição de produto interno seguem. ■

Observamos que a fórmula (4.1) se reduz a

$$[f, g] = f(\overline{D}) \left(\overline{g(z)} \right)$$

quando o espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ é trocado pelo seu subespaço $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Exemplo 4.1.2. *O conjunto*

$$\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}} \frac{\bar{z}^\beta}{\sqrt{\beta!}} : |\alpha| = m, |\beta| = n \right\}$$

é uma base ortonormal para $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$.

Lema 4.1.3. *O produto interno $[\cdot, \cdot]$ é invariante por elementos de $\mathcal{O}(2q)$, isto é,*

$$[f \circ \rho, g \circ \rho] = [f, g], \quad f, g \in \mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q), \quad \rho \in \mathcal{O}(2q). \quad (4.3)$$

Prova. Como cada elemento de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ é uma combinação linear de elementos da forma $z^\alpha \bar{z}^\beta$, basta verificar a fórmula do teorema para estes elementos. Por outro lado, como

$$[z^\alpha \bar{z}^\beta \circ \rho, z^\gamma \bar{z}^\delta \circ \rho] = [z^\alpha \circ \rho, z^\gamma \circ \rho] [\bar{z}^\beta \circ \rho, \bar{z}^\delta \circ \rho], \quad \rho \in \mathcal{O}(2q),$$

basta provar a fórmula no caso em que $f(z) = z^\alpha$ e $g(z) = z^\gamma$, $|\alpha| = |\gamma|$, e no caso conjugado deste. Seja $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ representada como em (2.16). Se f e g são como acima, então a fórmula do teorema é

$$[f \circ \rho, g \circ \rho] = \prod_{i=1}^q \overline{D_i^{\alpha_i} \rho(z)}^\gamma,$$

onde

$$\overline{D_i} := \rho_{i1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \rho_{i2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + \cdots + \rho_{iq} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_q}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Primeiro consideramos $\alpha = \gamma$. Usando a relação

$$\sum_{k=1}^q \overline{\rho_{jk}} \rho_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

vemos que

$$\overline{D_i^{\alpha_i} \rho(z)}^\alpha = \alpha_i! \overline{\rho(z)}^{\alpha - \alpha_i \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Segue que $[f \circ \rho, g \circ \rho] = \alpha! = [z^\alpha, z^\alpha]$. Se $\alpha \neq \gamma$, podemos supor, sem perda de generalidade que $\alpha_j > \gamma_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots\}$. Neste caso, $\overline{D_j^{\alpha_j} \rho(z)}^\gamma = 0$, isto é, $[f \circ \rho, g \circ \rho] = 0 = [z^\alpha, z^\gamma]$. O caso conjugado é tratado de maneira análoga. ■

A seguir, vamos transferir o produto interno (4.1) para o espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Isto é feito através da fórmula

$$[f, g] := [F, G], \quad f, g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}),$$

onde F e G são as extensões de f e g via o isomorfismo (2.12).

Os lemas técnicos abaixo são empregados na prova do Teorema 4.1.7, o qual evidencia um isomorfismo entre os espaços $(\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}), [\cdot, \cdot])$ e $(\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$. As provas destes lemas podem ser encontradas em [21].

Lema 4.1.4. *Seja V um subespaço não trivial de $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$. Se V tem dimensão finita e é $\mathcal{O}(2q)$ -invariante, então existe uma única f em $V \setminus \{0\}$ tal que $f \circ \rho = f$, quando $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ e $\rho(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$.*

Lema 4.1.5. *Seja f em $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $f \circ \rho = f$, quando $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ e $\rho(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$;
- (ii) Existe uma constante complexa C tal que

$$f(z) = Ce^{i(m-n)\theta} |\langle z, \varepsilon_1 \rangle|^{m-n} P_{m \wedge n}^{(q-2, |m-n|)}(2|\langle z, \varepsilon_1 \rangle|^2 - 1), \quad z \in \Omega_{2q},$$

onde θ é um argumento de $\langle z, \varepsilon_1 \rangle$ em $[0, 2\pi)$.

Proposição 4.1.6. *Seja $\mathcal{N}$ um subespaço de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Se $\mathcal{N}$ é $\mathcal{O}(2q)$ -invariante, então $\mathcal{N} = \{0\}$ ou $\mathcal{N} = \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$.*

Prova. Se $\mathcal{N} \neq \{0\}$, então $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$, onde $\mathcal{N}^\perp$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Obviamente $\mathcal{N}^\perp$ é $\mathcal{O}(2q)$ -invariante. No resto da prova, vamos mostrar que $\mathcal{N}^\perp = \{0\}$. De fato, se esta igualdade não for válida, podemos usar o Lema 4.1.4 para escolher $f \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ e $g \in \mathcal{N}^\perp \setminus \{0\}$ tais que $f \circ \rho = f$ e $g \circ \rho = g$, quando $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ e $\rho(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$. Pelo Lema 4.1.5, $f = cg$ para alguma constante c . Logo, $f = g = 0$, contradizendo a escolha de f e g . ■

Teorema 4.1.7. *Existe uma constante positiva $C_{m,n}^q$ tal que*

$$[f, g] = C_{m,n}^q \langle f, g \rangle_2, \quad f, g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Prova. Como

$$f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \longmapsto [f, f] \in \mathbb{R}$$

é uma função contínua, ela assume seu valor máximo em algum ponto f_0 do subconjunto compacto $\{f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) : \langle f, f \rangle_2 = 1\}$ de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Daí,

$$[f, f] \leq [f_0, f_0] \langle f, f \rangle_2, \quad f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}). \quad (4.4)$$

Vamos usar essa informação para mostrar que a forma bilinear

$$\varphi : \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \times \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\varphi(f, g) = [f_0, f_0] \langle f, g \rangle_2 - [f, g], \quad f, g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$$

é nula. Equivalentemente, vamos mostrar que

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) : \varphi(f, g) = 0, g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})\}$$

coincide com $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Como $\mathcal{N}$ é um subespaço de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, a Proposição 4.1.6 nos diz que é suficiente mostrar que $\mathcal{N}$ é $\mathcal{O}(2q)$ -invariante e não trivial. Sejam, então, $\rho \in \mathcal{O}(2q)$ e $f \in \mathcal{N}$. Devido à propriedade (4.4), φ é uma forma positiva definida. Logo, podemos aplicar a desigualdade de Schwarz ([24], p.375) e obter

$$|\varphi(f \circ \rho, g)|^2 \leq \varphi(f \circ \rho, f \circ \rho) \varphi(g, g), \quad g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}).$$

Contudo, o Lema 4.1.3 e o Teorema 2.3.6 implicam que $\varphi(f \circ \rho, f \circ \rho) = \varphi(f, f) = 0$. Segue que $f \circ \rho \in \mathcal{N}$. Um argumento similar, também mostra que $\varphi(f_0, g) = 0$, $g \in \mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Portanto $\mathcal{N}$ é não trivial. ■

Para calcular a constante $C_{m,n}^q$ do Teorema 4.1.7 recorreremos ao seguinte lema:

Lema 4.1.8. *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^q$*

$$\int_{\Omega_{2q}} z^\alpha \bar{z}^\alpha d\sigma_q(z) = \frac{2\pi^q \alpha!}{(|\alpha| + q - 1)!}.$$

Prova. É fácil ver que

$$\int_{\mathbb{C}^q} z^\alpha \bar{z}^\alpha e^{-\langle z, z \rangle} dz = \prod_{j=1}^q \int_{\mathbb{C}} |z|^{2\alpha_j} e^{-|z|^2} dz_j.$$

Cada integral do produtório acima vale $\pi \alpha_j!$. Logo,

$$\int_{\mathbb{C}^q} z^\alpha \bar{z}^\alpha e^{-\langle z, z \rangle} dz = \pi^q \alpha!.$$

Por outro lado, usando coordenadas polares

$$\begin{aligned} \pi^q \alpha! &= \int_0^\infty \int_{\Omega_{2q}} r^{2q+2|\alpha|-1} e^{-r^2} \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha d\sigma_q(\xi) dr \\ &= \frac{(|\alpha| + q - 1)!}{2} \int_{\Omega_{2q}} \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha d\sigma_q(\xi). \end{aligned}$$

Portanto o resultado segue. ■

Teorema 4.1.9. *A constante $C_{m,n}^q$ do Teorema 4.1.7 é igual a $(m+n+q-1)!(2\pi^q)^{-1}$.*

Prova. Considere $f(z) = g(z) = z_1^m \bar{z}_2^n$ no espaço $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$. A fórmula (4.2) implica que $[f, g] = m!n!$, enquanto que o Lema 4.1.8 produz a igualdade

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{2\pi^q m!n!}{(m+n+q-1)!}.$$

Assim, o resultado é imediato. ■

Fechamos esta seção mostrando que o Teorema 4.1.7 não pode ser validado no espaço maior $\mathcal{P}_{m,n}(\Omega_{2q})$. De fato, seja $h(z) = z_1^m \bar{z}_1^n$. Então, $[h, h] = m! n!$, enquanto que pelo Lema 4.1.8, $\langle h, h \rangle_2 = (m+n)! 2\pi^q / (m+n+q-1)!$. Agora é fácil ver que a igualdade $[h, h] = C_{m,n}^q \langle h, h \rangle_2$ vale se e somente se, $C_{m,n}^q = m! n! (m+n+q-1)! (2\pi^q (m+n)!)^{-1}$. Porém, este não é o valor de $C_{m,n}^q$ que encontramos no Teorema 4.1.9.

4.2 Bi-ortogonalidade em $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$

Nesta seção, investigamos um pouco mais a fundo o produto interno da seção anterior, principalmente as propriedades de ortogonalidade no espaço $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$.

Cada polinômio homogêneo

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=l} c_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad z \in \mathbb{C}^q, \quad c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^q$$

determina um polinômio F nas variáveis $z, w \in \mathbb{C}^q$ dado por

$$F(z, \bar{w}) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=l} c_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{w}^\beta, \quad z, w \in \mathbb{C}^q, \quad c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^q.$$

Esta associação é usada na prova dos próximos teoremas.

Teorema 4.2.1. *Sejam $\{f_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ e $\{g_\nu : \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ bases de $(\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$. Se $[f_\mu, g_\nu] = 0$, $\mu \neq \nu$, então*

$$\langle z, \eta \rangle^m \langle \vartheta, z \rangle^n = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{G_\mu(\eta, \bar{\vartheta})}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad z, \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q.$$

Prova. Como $\{f_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ é uma base de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, existem polinômios p_μ , $\mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)$ tais que

$$\langle z, \eta \rangle^m \langle \vartheta, z \rangle^n = \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} p_\mu(\eta, \vartheta) f_\mu(z), \quad z, \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q.$$

Devido às hipóteses,

$$\begin{aligned} [\langle \cdot, \eta \rangle^m \langle \vartheta, \cdot \rangle^n, g_\nu] &= \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} p_\mu(\eta, \vartheta) [f_\mu, g_\nu] \\ &= p_\nu(\eta, \vartheta) [f_\nu, g_\nu], \quad \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n), \quad \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q. \end{aligned}$$

Por outro lado, o Teorema Binomial gera a expansão

$$\langle z, \eta \rangle^m \langle \vartheta, z \rangle^n = m! n! \sum_{|\gamma|=m} \sum_{|\delta|=n} \frac{\bar{\eta}^\gamma}{\gamma!} \frac{\vartheta^\delta}{\delta!} z^\gamma \bar{z}^\delta.$$

Agora escrevendo g_ν na forma

$$g_\nu(z) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=n} c_{\alpha,\beta}(\nu) z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad c_{\alpha,\beta}(\nu) \in \mathbb{C}$$

e usando (4.2), o produto interno anterior pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [\langle \cdot, \eta \rangle^m \langle \vartheta, \cdot \rangle^n, g_\nu] &= m! n! \sum_{|\gamma|=m} \sum_{|\delta|=n} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=n} \frac{\bar{\eta}^\gamma}{\gamma!} \frac{\vartheta^\delta}{\delta!} \overline{c_{\alpha,\beta}(\nu)} [z^\gamma \bar{z}^\delta, z^\alpha \bar{z}^\beta] \\ &= m! n! \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=n} c_{\alpha,\beta}(\eta) \bar{\eta}^\alpha \vartheta^\beta \\ &= m! n! \overline{G_\nu(\eta, \bar{\vartheta})}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n). \end{aligned}$$

Assim,

$$m! n! \overline{G_\nu(\eta, \bar{\vartheta})} = p_\nu(\eta, \vartheta) [f_\nu, g_\nu], \quad \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n), \quad \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q.$$

Em particular, uma vez que cada g_μ não é nulo, $[f_\mu, g_\mu] \neq 0$, $\mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)$.

Portanto,

$$p_\mu(\eta, \vartheta) = m! n! \frac{\overline{G_\mu(\eta, \bar{\vartheta})}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)$$

e o resultado segue. ■

Corolário 4.2.2. *Sejam $\{f_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ e $\{g_\nu : \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ bases de $(\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$. Se $[f_\mu, g_\nu] = 0$, $\mu \neq \nu$, então*

$$\langle z, w \rangle^m \langle w, z \rangle^n = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(w)}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q.$$

Colocando $z = w$ no corolário anterior, temos a identidade

$$\frac{\langle z, z \rangle^{m+n}}{m! n!} = \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(z)}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad z \in \mathbb{C}^q,$$

muito similar à *Identidade de Pitágoras* da Álgebra Linear. Quando $z \in \Omega_{2q}$, ela toma a forma

$$\frac{1}{m! n!} = \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(z)}}{[f_\mu, g_\mu]}.$$

Se ambas as bases citadas no corolário anterior são iguais e ortonormais em relação a $[\cdot, \cdot]$, então a fórmula possui estrutura semelhante àquela do Teorema da Adição:

$$\langle z, w \rangle^m \langle w, z \rangle^n = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} f_{\mu}(z) \overline{f_{\mu}(w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q.$$

Teorema 4.2.3. *Sejam f um elemento de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ e g um elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Então, para cada par $\eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q$, a aplicação $z \in \mathbb{C}^q \mapsto G(\langle z, \eta \rangle, \overline{\langle z, \vartheta \rangle})$ pertence a $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$. Além disso, existe uma constante não negativa $k_{m,n}$, dependendo de m e n tais que*

$$\left[G(\langle \cdot, \eta \rangle, \overline{\langle \cdot, \vartheta \rangle}), f \right] = k_{m,n} \overline{F(\eta, \vartheta)}.$$

Prova. Para cada par (k, l) , escreva $\{g_{k,l}^{\mu} : \mu = 1, 2, \dots, \delta(k, l)\}$ para denotar uma base ortonormal para $(\mathbb{P}_{k,l}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$. Assuma que g tem grau α em z e grau β em $\bar{z}$, isto é,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \quad c_{k,l} \in \mathbb{C}.$$

Considere

$$G(\langle z, \eta \rangle, \overline{\langle z, \vartheta \rangle}) := \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} c_{k,l} \langle z, \eta \rangle^k \overline{\langle z, \vartheta \rangle}^l, \quad z, \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q$$

e escreva f na forma

$$f = \sum_{\nu=1}^{\delta(m,n)} a_{\nu} g_{m,n}^{\nu}, \quad a_{\nu} \in \mathbb{C}.$$

Utilizando estas fórmulas e o Teorema 4.2.1 vem que

$$\begin{aligned} [G(\langle \cdot, \eta \rangle, \overline{\langle \cdot, \vartheta \rangle}), f] &= \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} \sum_{\nu=1}^{\delta(m,n)} c_{k,l} \overline{a_{\nu}} [\langle \cdot, \eta \rangle^k \langle \vartheta, \cdot \rangle^l, g_{m,n}^{\nu}] \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} \sum_{\nu=1}^{\delta(m,n)} \sum_{\mu=1}^{\delta(k,l)} c_{k,l} k! l! \overline{a_{\nu}} \overline{G_{k,l}^{\mu}(\eta, \vartheta)} [g_{k,l}^{\mu}, g_{m,n}^{\nu}] \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\beta} \sum_{\nu=1}^{\delta(m,n)} \sum_{\mu=1}^{\delta(k,l)} c_{k,l} k! l! \overline{a_{\nu}} \overline{G_{k,l}^{\mu}(\eta, \vartheta)} \delta_{km} \delta_{ln} \delta_{\mu\nu}, \quad \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q. \end{aligned}$$

Assim,

$$[G(\langle \cdot, \eta \rangle, \overline{\langle \cdot, \vartheta \rangle}), f] = \begin{cases} m! n! c_{m,n} \overline{f(\eta, \vartheta)} & \text{se } \alpha \geq m \text{ e } \beta \geq n \\ 0 & \text{se } \alpha < m \text{ ou } \beta < n, \end{cases}$$

completando a prova do teorema. ■

Corolário 4.2.4. *Se m e n são inteiros não negativos, então*

$$[\langle \cdot, \eta \rangle^m \langle \vartheta, \cdot \rangle^n, \langle \cdot, u \rangle^m \langle v, \cdot \rangle^n] = m! n! \langle u, \eta \rangle^m \langle \vartheta, v \rangle^n, \quad u, v, \eta, \vartheta \in \mathbb{C}^q.$$

Prova. Basta aplicar o teorema anterior com $f(z) = \langle z, u \rangle^m \langle v, z \rangle^n$ e $g(z) = z^m \bar{z}^n$. ■

A seguir, estabelecemos um tipo de Teorema de Funk-Hecke para elementos do espaço $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$, semelhante aquele que provamos no Teorema 3.1.1. A prova provém do teorema precedente considerando $\eta = \vartheta$.

Teorema 4.2.5. *Sejam f e g como no Teorema 4.2.3. Então, para cada $w \in \mathbb{C}^q$, a aplicação $z \in \mathbb{C}^q \mapsto g(\langle z, w \rangle)$ pertence a $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$. Em adição, existe uma constante não negativa $k_{m,n}$, dependendo de m e n tal que*

$$[g(\langle \cdot, w \rangle), f] = k_{m,n} \overline{f(w)}, \quad w \in \mathbb{C}^q.$$

O seguinte teorema é uma espécie de recíproca do Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.6. *Seja $\{f_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$. Assuma que existe um subconjunto $\{g_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$ tal que $[f_\mu, g_\mu] \neq 0$, $\mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)$ e*

$$\langle z, w \rangle^m \langle w, z \rangle^n = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(w)}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q. \quad (4.5)$$

Então, $\{f_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ e $\{g_\mu : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ são bases ortogonais para $(\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$.

Prova. O uso de (4.5) implica que

$$\begin{aligned} m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(\lambda w)}}{[f_\mu, g_\mu]} &= \langle z, \lambda w \rangle^m \langle \lambda w, z \rangle^n \\ &= \langle \bar{\lambda} z, w \rangle^m \langle w, \bar{\lambda} z \rangle^n \\ &= m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_\mu(\bar{\lambda} z) \overline{g_\mu(w)}}{[f_\mu, g_\mu]} \\ &= m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \bar{\lambda}^m \lambda^n \frac{f_\mu(z) \overline{g_\mu(w)}}{[f_\mu, g_\mu]}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \left(\overline{g_{\mu}(\lambda w)} - \overline{\lambda^m \lambda^n g_{\mu}(w)} \right) \frac{f_{\mu}(z)}{[f_{\mu}, g_{\mu}]} = 0, \quad z, w \in \mathbb{C}^q, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Como o conjunto $\{f_{\mu} : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ é linearmente independente,

$$g_{\mu}(\lambda w) - \lambda^m \overline{\lambda^n} g_{\mu}(w) = 0, \quad w \in \mathbb{C}^q, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n).$$

Logo $g_{\mu} \in \mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, $\mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)$. Para concluir a prova, aplicamos o Teorema 4.2.5 e a Fórmula (4.5), apropriadamente, para obter

$$m! n! f_{\nu}(z) = [\langle \cdot, z \rangle^m \langle z, \cdot \rangle^n, \overline{f_{\nu}}] = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} \frac{f_{\mu}(z) [f_{\nu}, g_{\mu}]}{[f_{\mu}, g_{\mu}]}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \delta(m, n).$$

A hipótese de independência linear leva-nos a concluir que $[f_{\nu}, g_{\mu}] = 0$, $\mu \neq \nu$. ■

Corolário 4.2.7. *Se um subconjunto linearmente independente $\{f_{\mu} : \mu = 1, 2, \dots, \delta(m, n)\}$ de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ satisfaz*

$$\langle z, w \rangle^m \langle w, z \rangle^n = m! n! \sum_{\mu=1}^{\delta(m,n)} f_{\mu}(z) \overline{f_{\mu}(w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^q,$$

então ele é ortonormal em relação a $[\cdot, \cdot]$.

Prova. É suficiente observar que, sob as hipóteses dadas, o denominador na soma da última equação na prova do Teorema 4.2.6 desaparece. ■

4.3 Função geradora de bases

Esta seção apresenta um método de construção de bases para o espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Tal método é indutivo e depende do conhecimento prévio de uma base do espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q-2})$. O terceiro fator motivador para os resultados desta seção, em adição aos dois outros já mencionados na Seção 2.3, aparece na prova do Teorema 5.1 em [22]: alguns elementos de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$ podem ser construídos via multiplicação de elementos de $\mathcal{H}_{m-j,n-k}(\Omega_{2q-2})$, $j < m$, $k < n$ por elementos especiais de $\mathbb{H}_{k,j}(\mathbb{C}^q)$. Alguns argumentos utilizados nesta seção, também aparecem em [3].

O lema técnico abaixo utiliza a seguinte soma direta associada a um inteiro $q_1 \in \{1, 2, \dots, q\}$: $\mathbb{C}^q = W^{q_1} \oplus V^{q-q_1}$, onde $W^{q_1} = \{z \in \mathbb{C}^q : z_j = 0, j = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots, q\}$ e $V^{q-q_1} = \{z \in \mathbb{C}^q : z_j = 0, j = 1, 2, \dots, q_1\}$.

Lema 4.3.1. *Sejam $w \in W^{q_1} \cap \Omega_{2q}$ e $v \in V^{q-q_1} \cap \Omega_{2q}$. Então,*

$$G_{m,n}^{w,v}(z) := \langle z, v + w \rangle^m \langle v - w, z \rangle^n, \quad z \in \mathbb{C}^q$$

é um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$.

Prova. A homogeneidade de $G_{m,n}^{w,v}$ em relação a z e $\bar{z}$ é clara. Quanto ao resto, primeiro observe que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} G_{m,n}^{w,v} = \begin{cases} -n \langle z, v + w \rangle^m \langle v - w, z \rangle^{n-1} w_j & \text{se } j = 1, 2, \dots, q_1 \\ n \langle z, v + w \rangle^m \langle v - w, z \rangle^{n-1} v_j & \text{se } j = q_1 + 1, q_1 + 2, \dots, q. \end{cases}$$

Em seguida, note que

$$\sum_{j=q_1+1}^q \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} G_{m,n}^{w,v} = - \sum_{j=1}^{q_1} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} G_{m,n}^{w,v}.$$

Assim, $\Delta_{(2q)}(G_{m,n}^{w,v}) = 0$. ■

Se no teorema acima fazemos $q_1 = q - 1$, então $W^{q-1} \cap \Omega_{2q}$ é um cópia de Ω_{2q-2} . Em outras palavras, os elementos de $W^{q-1} \cap \Omega_{2q}$ são da forma $\hat{w} = (w, 0)$, $w \in \Omega_{2q-2}$. Denotando os elementos de $\mathbb{C}^q$ por $\hat{z} = (z, z_q)$, $z \in \mathbb{C}^{q-1}$ e tomando $v = \varepsilon_q$, a função do lema anterior toma a forma

$$G_{m,n}^{\hat{w},v}(\hat{z}) = (z_q + \langle z, w \rangle)^m (\bar{z}_q - \langle w, z \rangle)^n.$$

De agora em diante, vamos adotar a seguinte notação simplificada para esta função: $G_{m,n}^w := G_{m,n}^{\hat{w},v}$. Um dos resultados principais desta seção é como segue.

Teorema 4.3.2. *Seja $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ um subconjunto linearmente independente de $\bigcup_{k=0}^m \bigcup_{l=0}^n \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q-2})$. Então, existe um subconjunto $\{f_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ tal que*

$$G_{m,n}^w(\hat{z}) = \sum_{j=1}^{d(m,n)} f_j(\hat{z}) g_j(w), \quad \hat{z} = (z, z_q) \in \mathbb{C}^q, \quad w \in \Omega_{2q-2}. \quad (4.6)$$

Prova. Inicialmente usamos o Teorema Binomial para expandir $G_{m,n}^w$ como

$$G_{m,n}^w(\widehat{z}) = \sum_{|\alpha|+\mu=m} \frac{m!}{\mu! \alpha!} z^\alpha z_q^\mu \bar{w}^\alpha \sum_{|\beta|+\nu=n} \frac{n!}{\nu! \beta!} (-w)^\beta \bar{z}^\beta \bar{z}_q^\nu, \quad \widehat{z} \in \mathbb{C}^q.$$

Como $|\alpha| \leq m$ e $|\beta| \leq n$, o uso de (2.13) nos leva a escrever

$$\bar{w}^\alpha (-w)^\beta = \sum_{j=1}^{d(m,n)} a_j(\alpha, \beta) g_j(w), \quad w \in \Omega_{2q-2}, \quad (4.7)$$

onde os $a_j(\alpha, \beta)$ são constantes complexas. Daí,

$$G_{m,n}^w(\widehat{z}) = \sum_{j=1}^{d(m,n)} \left(\sum_{|\alpha|+\mu=m} \sum_{|\beta|+\nu=n} a_j(\alpha, \beta) \frac{m!}{\mu! \alpha!} z^\alpha z_q^\mu \frac{n!}{\nu! \beta!} \bar{z}^\beta \bar{z}_q^\nu \right) g_j(w). \quad (4.8)$$

Vamos mostrar que a expressão

$$f_j(\widehat{z}) := \sum_{|\alpha|+\mu=m} \sum_{|\beta|+\nu=n} a_j(\alpha, \beta) \frac{m!}{\mu! \alpha!} z^\alpha z_q^\mu \frac{n!}{\nu! \beta!} \bar{z}^\beta \bar{z}_q^\nu, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n) \quad (4.9)$$

define um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$. A homogeneidade de f_j de grau m em relação $\widehat{z}$ e de grau n em relação a $\bar{\widehat{z}}$ é óbvia. Aplicando o laplaciano em (4.8) deduzimos que

$$0 = \Delta_{(2q)}(G_{m,n}^w(\widehat{z})) = \sum_{j=1}^{d(m,n)} \Delta_{(2q)}(f_j(\widehat{z})) g_j(w), \quad \widehat{z} \in \mathbb{C}^q, \quad w \in \Omega_{2q-2}.$$

A independência linear dos g_j implica que $\Delta_{(2q)}(f_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, d(m, n)$. ■

Teorema 4.3.3. *Sejam $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ um subconjunto linearmente independente de $\bigcup_{k=0}^m \bigcup_{l=0}^n \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q-2})$ e $\{f_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ como no Teorema 4.3.2. Se o conjunto $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, então $\{f_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é uma base ortogonal para $(\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$.*

Prova. No primeiro passo da prova usamos o Corolário 4.2.4 para concluir que

$$[G_{m,n}^w, G_{m,n}^\xi] = m! n! (1 + \langle \xi, w \rangle)^m (1 + \langle w, \xi \rangle)^n := K(\langle \xi, w \rangle), \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2},$$

onde $K(z) = (1 + z)^m (1 + \bar{z})^n$, $z \in \mathbb{C}$. A seguir, usando o teorema anterior deduzimos que

$$[G_{m,n}^w, G_{m,n}^\xi] = \sum_{j=1}^{d(m,n)} p_j(w) \overline{g_j(\xi)}, \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2}, \quad (4.10)$$

onde

$$p_j(w) = \sum_{\mu=1}^{d(m,n)} [f_\mu, f_j] g_\mu(w), \quad w \in \Omega_{2q-2}.$$

Se os g_j formam um conjunto ortonormal, então aplicando o Corolário 3.1.2, obtemos

$$\lambda_j^{q-3}(K) g_j(w) = \int_{\Omega_{2q-2}} K(\langle \xi, w \rangle) g_j(\xi) d\sigma_{q-1}(\xi) = p_j(w), \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n).$$

Assim,

$$\lambda_j^{q-3}(K) g_j(w) = \sum_{\mu=1}^{d(m,n)} [f_\mu, f_j] g_\mu(w), \quad w \in \Omega_{2q-2}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n).$$

Usando a independência linear dos g_j é agora evidente que $[f_\mu, f_j] = 0$, $\mu \neq j$ e que $[f_j, f_j] = \lambda_j^{q-3}(K)$, $j = 1, 2, \dots, d(m, n)$. ■

Exemplo 4.3.4. Considere $m = n = 1$ e $q = 3$. Pelo Lema 4.1.8 e pelo Teorema 4.1.7, os polinômios

$$g_1(w) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \quad g_2(w) = \frac{1}{\pi} w_1, \quad g_3(w) = \frac{1}{\pi} w_2, \quad g_4(w) = \frac{1}{\pi} \bar{w}_1, \quad g_5(w) = \frac{1}{\pi} \bar{w}_2,$$

$$g_6(w) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} w_1 \bar{w}_2, \quad g_7(w) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \bar{w}_1 w_2 \quad e \quad g_8(w) = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} (w_1 \bar{w}_1 - w_2 \bar{w}_2)$$

definem um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}_{0,0}(\Omega_4) \cup \mathcal{H}_{0,1}(\Omega_4) \cup \mathcal{H}_{1,0}(\Omega_4) \cup \mathcal{H}_{1,1}(\Omega_4)$. A função $G_{1,1}^w(\hat{z})$ é a soma

$$z_3 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3 w_1 - \bar{z}_2 z_3 w_2 + z_1 \bar{z}_3 \bar{w}_1 + z_2 \bar{z}_3 \bar{w}_2 - \bar{z}_1 z_2 w_1 \bar{w}_2 - z_1 \bar{z}_2 w_2 \bar{w}_1 - z_1 \bar{z}_1 w_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{z}_2 w_2 \bar{w}_2.$$

Calculando os coeficientes $a_j(\alpha, \beta)$ em (4.7), aqui escritos como $a_j(\alpha; \beta)$, obtemos

$$a_1(0, 0; 0, 0) = \sqrt{2} \pi, \quad a_1(1, 0; 1, 0) = -\frac{\sqrt{2} \pi}{2}, \quad a_1(0, 1; 0, 1) = -\frac{\sqrt{2} \pi}{2}$$

$$a_6(0, 1; 1, 0) = -\frac{\sqrt{3} \pi}{3}, \quad a_7(1, 0; 0, 1) = -\frac{\sqrt{3} \pi}{3}, \quad a_2(0, 0; 1, 0) = -\pi,$$

$$a_3(0, 0; 0, 1) = -\pi, \quad a_4(1, 0; 0, 0) = \pi, \quad a_5(0, 1; 0, 0) = \pi,$$

$$a_8(0, 1; 0, 1) = \frac{\sqrt{6} \pi}{6}, \quad a_8(1, 0; 1, 0) = -\frac{\sqrt{6} \pi}{6},$$

enquanto que os demais são nulos. Olhando para (4.9), encontramos

$$f_1(\hat{z}) = \frac{\sqrt{2} \pi}{2} (-z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 + 2z_3 \bar{z}_3), \quad f_2(\hat{z}) = -\pi z_3 \bar{z}_1, \quad f_3(\hat{z}) = -\pi z_3 \bar{z}_2,$$

$$f_4(\widehat{z}) = \pi z_1 \bar{z}_3, \quad f_5(\widehat{z}) = \pi z_2 \bar{z}_3, \quad f_6(\widehat{z}) = -\frac{\sqrt{3}\pi}{3} z_2 \bar{z}_1,$$

$$f_7(\widehat{z}) = -\frac{\sqrt{3}\pi}{3} z_1 \bar{z}_2, \quad f_8(\widehat{z}) = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} (-z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2).$$

O Teorema 4.3.3 implica que $\{f_j : j = 1, 2, \dots, 8\}$ é uma base ortogonal para o espaço $(\mathbb{H}_{1,1}(\mathbb{C}^3), [\cdot, \cdot])$. O isomorfismo (2.12) fornece uma base ortogonal para $\mathcal{H}_{1,1}(\Omega_6)$.

Corolário 4.3.5. *Assuma as hipóteses do Teorema 4.3.3. Se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, então*

$$f_j(\widehat{z}) = p_j(z_q) \overline{g_j(z)}, \quad z \in \Omega_{2q-2}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n),$$

onde $\{p_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é um subconjunto de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Prova. Se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, podemos usar (4.6) para deduzir que

$$f_j(\widehat{z}) = \int_{\Omega_{2q-2}} G_{m,n}^w(\widehat{z}) \overline{g_j(w)} d\sigma_{q-1}(w), \quad \widehat{z} \in \Omega_{2q-2} \times \mathbb{C}.$$

Expandindo $G_{m,n}^w$ na forma

$$G_{m,n}^w(\widehat{z}) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu m! n!}{\mu! \nu! (m-\mu)! (n-\nu)!} z_q^{m-\mu} \bar{z}_q^{n-\nu} K_{\mu,\nu}(\langle z, w \rangle),$$

onde $K_{\mu,\nu}(\langle z, w \rangle) = \langle z, w \rangle^\mu \langle w, z \rangle^\nu$ e usando o Teorema 3.1.1 obtemos

$$f_j(\widehat{z}) = \left(\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu m! n!}{\mu! \nu! (m-\mu)! (n-\nu)!} \lambda_j^{q-3}(K_{\mu,\nu}) z_q^{m-\mu} \bar{z}_q^{n-\nu} \right) \overline{g_j(z)}, \quad z \in \Omega_{2q-2}.$$

Definindo

$$p_j(z) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu m! n!}{\mu! \nu! (m-\mu)! (n-\nu)!} \lambda_j^{q-3}(K_{\mu,\nu}) z_q^{m-\mu} \bar{z}_q^{n-\nu}, \quad z \in \mathbb{C}$$

concluimos a prova. ■

Corolário 4.3.6. *Assuma as hipóteses do Teorema 4.3.3. Se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, então*

$$m! n! (1 + \langle \xi, w \rangle)^m (1 + \langle w, \xi \rangle)^n = C_{m,n}^q \sum_{j=1}^{d(m,n)} \langle f_j, f_j \rangle_2 g_j(w) \overline{g_j(\xi)}, \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2},$$

onde $C_{m,n}^q$ é a constante do Teorema 4.1.7.

Prova. Primeiro manipulamos o lado direito do somatório no enunciado para obter

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \langle f_\mu, f_\mu \rangle_2 g_\mu(w) \overline{g_\mu(\xi)} &= \sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \sum_{\nu=1}^{d(m,n)} \left(\int_{\Omega_{2q}} f_\mu(\widehat{z}) \overline{f_\nu(\widehat{z})} d\sigma_q(\widehat{z}) \right) g_\mu(w) \overline{g_\nu(\xi)} \\
&= \int_{\Omega_{2q}} \sum_{\mu=1}^{d(m,n)} f_\mu(\widehat{z}) g_\mu(w) \overline{\sum_{\nu=1}^{d(m,n)} f_\nu(\widehat{z}) g_\nu(\xi)} d\sigma_q(\widehat{z}) \\
&= \int_{\Omega_{2q}} G_{m,n}^w(\widehat{z}) \overline{G_{m,n}^\xi(\widehat{z})} d\sigma_q(\widehat{z}), \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2}.
\end{aligned}$$

Relembrando o Lema 4.3.1 e o Teorema 4.1.7, concluimos que

$$\sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \langle f_\mu, f_\mu \rangle_2 g_\mu(w) \overline{g_\mu(\xi)} = (C_{m,n}^q)^{-1} [G_{m,n}^w, G_{m,n}^\xi], \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2}. \quad (4.11)$$

Finalmente, o Corolário 4.2.4 reduz (4.11) à igualdade

$$\sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \langle f_\mu, f_\mu \rangle_2 g_\mu(w) \overline{g_\mu(\xi)} = (C_{m,n}^q)^{-1} m! n! (1 + \langle \xi, w \rangle)^m (1 + \langle w, \xi \rangle)^n, \quad w, \xi \in \Omega_{2q-2},$$

o que conclui a prova do corolário. ■

Fazendo $w = \xi$ no Corolário 4.3.6 deduzimos a seguinte identidade:

$$\sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \langle f_\mu, f_\mu \rangle_2 |g_\mu(w)|^2 = \frac{2^{m+n+1} \pi^q m! n!}{(m+n+q-1)!}, \quad w \in \Omega_{2q-2}.$$

Para fechar esta seção, apresentamos dois resultados independentes: um dá uma estimativa para a soma $\sum_{\mu=1}^{d(m,n)} \langle f_\mu, f_\mu \rangle_2$ e o outro explica porque a construção do Teorema 4.3.2 preserva bi-ortogonalidade.

Corolário 4.3.7. *Assuma as hipóteses do Teorema 4.3.2. Se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, então*

$$\sum_{j=1}^{d(m,n)} \langle f_j, f_j \rangle_2 \leq \frac{2^{m+n+2} \pi^{2q-1}}{(q-1)!(q-2)!}.$$

Prova. Primeiro aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned}
G_{m,n}^w(\widehat{z}) \overline{G_{m,n}^w(\widehat{z})} &\leq \langle \widehat{z}, \widehat{z} \rangle^m \langle (w, 1), (w, 1) \rangle^m \langle \widehat{z}, \widehat{z} \rangle^n \langle (-w, 1), (-w, 1) \rangle^n \\
&= 2^{m+n} \langle \widehat{z}, \widehat{z} \rangle^{m+n}, \quad \widehat{z} \in \mathbb{C}^q, \quad w \in \Omega_{2q-2}.
\end{aligned}$$

Integração implica que

$$\int_{\Omega_{2q}} G_{m,n}^w(\widehat{z}) \overline{G_{m,n}^w(\widehat{z})} d\sigma_q(\widehat{z}) \leq 2^{m+n} \int_{\Omega_{2q}} d\sigma_q(\widehat{z}) = \frac{2^{m+n+1}\pi^q}{(q-1)!}, \quad w \in \Omega_{2q-2}.$$

Por outro lado, se $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ é ortonormal, os argumentos do início da prova do Corolário 4.3.6 mostram que

$$\sum_{j=1}^{d(m,n)} |g_j(w)|^2 \langle f_j, f_j \rangle_2 \leq \frac{2^{m+n+1}\pi^q}{(q-1)!}, \quad w \in \Omega_{2q-2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \langle f_j, f_j \rangle_2 &= \sum_{j=1}^{d(m,n)} \langle f_j, f_j \rangle_2 \int_{\Omega_{2q-2}} |g_j(w)|^2 d\sigma_{q-1}(w) \\ &\leq \frac{2^{m+n+1}\pi^q}{(q-1)!} \int_{\Omega_{2q-2}} d\sigma_{q-1}(w) \\ &= \frac{2^{m+n+2}\pi^{2q-1}}{(q-1)!(q-2)!}, \end{aligned}$$

completando a prova. ■

Corolário 4.3.8. *Sejam $\{g_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ e $\{g'_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ subconjuntos ortonormais de $\bigcup_{k=0}^m \bigcup_{l=0}^n \mathcal{H}_{k,l}(\Omega_{2q-2})$. Sejam $\{f_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ e $\{f'_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$, respectivamente, os conjuntos resultantes da aplicação do Teorema 4.3.2 com os conjuntos ortonormais acima. Então, $[f_j, f'_k] = 0$, $j \neq k$.*

Prova. Usamos o Corolário 4.3.5 para escrever

$$f_j(\widehat{z}) = p_j(z_q) \overline{g_j(z)}, \quad z \in \Omega_{2q-2}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n),$$

e

$$f'_j(\widehat{z}) = p'_j(z_q) \overline{g'_j(z)}, \quad z \in \Omega_{2q-2}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n),$$

onde $\{p_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ e $\{p'_j : j = 1, 2, \dots, d(m, n)\}$ são subconjuntos de $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Com ajuda do Teorema 4.1.7 obtemos

$$\begin{aligned} [f_\mu, f'_\nu] &= p_j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_q} \right) \left(\overline{p'_k(z_q)} \right) (0) [g'_\nu, g_\mu] \\ &= C_{k,l}^{q-1} p_j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_q} \right) \left(\overline{p'_k(z_q)} \right) (0) \langle g'_\nu, g_\mu \rangle_2. \end{aligned}$$

A conclusão do corolário segue. ■

Capítulo 5

Aproximação de Soluções de Equações dadas por Transformações Multiplicativas

Neste capítulo, estudamos de maneira parcial, porém consistente, soluções aproximadas de equações definidas por certas transformações multiplicativas sobre Ω_{2q} . As aproximações são feitas em espaços de tipo -Sobolev, usando aproximantes gerados por meio de interpolação com núcleos positivos definidos em Ω_{2q} . O estudo apresentado tem sua motivação no artigo [30], onde problemas similares foram analisados no caso da esfera real S^{m-1} . Nossa contribuição aqui possui a virtude de generalizar vários dos resultados apresentados em [30]. Por outro lado, alguns resultados provados aqui, geram versões mais refinadas daqueles provados em [30]. Acreditamos que algumas das estimativas aqui apresentadas não são finas, isto é, são passíveis de melhora.

5.1 Equações multiplicativas

As equações de que trata este capítulo são da forma

$$T(f) = g, \tag{5.1}$$

onde $T : L^2(\Omega_{2q}) \rightarrow L^2(\Omega_{2q})$ é uma transformação multiplicativa. Para explicar o significado do termo multiplicativo, precisamos introduzir a expansão condensada de

uma função f de $L^2(\Omega_{2q})$ representada como em (2.15). Ela é a série

$$f \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} s_{m,n}(f), \quad (5.2)$$

onde

$$s_{m,n}(f) := \sum_{j=1}^{d(m,n)} \widehat{f}_{m,n}(j) Y_{m,n}^j, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Uma *transformação multiplicativa* é uma transformação linear $T : L^2(\Omega_{2q}) \longrightarrow L^2(\Omega_{2q})$ possuindo as seguintes propriedades: existe uma sequência dupla $\{c_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ de números complexos tal que $c_{m,n} = \overline{c_{n,m}}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e

$$\widehat{T(f)}_{m,n}(j) = c_{m,n} \widehat{f}_{m,n}(j), \quad f \in L^2(\Omega_{2q}), \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Quando houver necessidade, diremos que T está associada à sequência $\{c_{m,n}\}$.

Pretendemos aproximar soluções da equação (5.1) por funções construídas a partir de um processo interpolatório. Este processo depende de uma função contínua K de $L^{2,q}(B[0, 1])$, tendo uma expansão uniformemente convergente da forma descrita em (3.2). Em outras palavras,

$$K(z) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) P_{m,n}^{q-2}(z), \quad a_{m,n}^q(K) \geq 0, \quad K(1) < \infty, \quad (5.3)$$

onde

$$a_{m,n}^q(K) = \frac{d(m, n)}{\omega_q} \lambda_{m,n}^{q-2}(K). \quad (5.4)$$

A seguinte condição adicional sobre K ,

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 < \infty, \quad (5.5)$$

aqui chamada de *condição de amortecimento*, faz-se necessária para garantir que as funções envolvidas pertençam aos espaços apropriados, isto é, os espaços nos quais a equação (5.1) faz sentido e tem soluções. Esta condição assegura a definição da seguinte função adicional associada a K e T :

$$K_T(z) := \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 P_{m,n}^{q-2}(z). \quad (5.6)$$

Dada uma solução f de (5.1), vamos construir aproximações da forma

$$s_f = \sum_{j=1}^N c_j (\delta_j \circ T^w) K(\langle \cdot, w \rangle), \quad w \in \Omega_{2q}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Nesta equação,

$$\delta_j(h) := h(w_j), \quad h \in L^2(\Omega_{2q}), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

onde os pontos distintos $w_1, w_2, \dots, w_N$ são escolhidos aleatoriamente sobre Ω_{2q} . A notação $(\delta_j \circ T^w) K(\langle \cdot, w \rangle)$ significa que $\delta_j \circ T$ está atuando na função

$$w \in \Omega_{2q} \longmapsto K(\langle \cdot, w \rangle).$$

Quando o conjunto $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$ é linearmente independente e a função f está em um espaço apropriado, mostramos que existe uma única função da forma s_f no espaço

$$[\{(\delta_j \circ T^w) K(\langle \cdot, w \rangle) : j = 1, 2, \dots, N\}]$$

que satisfaz as seguintes condições de interpolação

$$(\delta_j \circ T)(s) = (\delta_j \circ T)(f), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Assumindo condições adicionais sobre T e sobre os pontos $w_1, w_2, \dots, w_N$, apresentamos estimativas para o erro cometido na aproximação das soluções de (5.1) por soluções do tipo s_f . O erro será estimado na norma de espaços de tipo-Sobolev associados a K e K_T , nos quais espaços nativos estão continuamente mergulhados. Espaços nativos é o assunto da próxima seção.

5.2 Espaços nativos

Nesta seção, discutimos brevemente espaços nativos associados a seqüências e funções. Eles são espaços de Hilbert, onde seqüências ou funções agem como núcleos de reprodução.

Definição 5.2.1. *O espaço nativo associado à seqüência complexa $\beta := \{b_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ é*

$$\mathcal{N}_\beta := \{f \in L^2(\Omega_{2q}) : \|f\|_\beta < \infty \quad e \quad s_{m,n}(f) = 0, \quad (m,n) \notin A_\beta\},$$

onde

$$\|f\|_\beta^2 := \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_\beta} \frac{d(m,n)}{|b_{m,n}|} \|s_{m,n}(f)\|_2^2 \quad e \quad A_\beta := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : b_{m,n} \neq 0\}.$$

É fácil ver $\mathcal{N}_\beta$ é um subespaço vetorial de $L^2(\Omega_{2q})$, que a expressão $\|\cdot\|_\beta$ define uma norma em $\mathcal{N}_\beta$ e que a mesma provém do produto interno

$$\langle f, g \rangle_\beta := \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_\beta} \frac{d(m,n)}{|b_{m,n}|} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \widehat{f}_{m,n}(j) \overline{\widehat{g}_{m,n}(j)}, \quad f, g \in \mathcal{N}_\beta. \quad (5.7)$$

Em adição, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.2.2. *Valem as propriedades:*

- (i) $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q}) \subset \mathcal{N}_\beta$ se e somente se $(m,n) \in A_\beta$;
- (ii) O espaço $[\{Y_{m,n}^j : j = 1, 2, \dots, d(m,n), (m,n) \in A_\beta\}]$ é denso em $\mathcal{N}_\beta$.

Prova. Fixe $(m,n) \in A_\beta$. Sejam $j = 1, 2, \dots, d(m,n)$ e $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Então,

$$s_{k,l}(Y_{m,n}^j) = \begin{cases} Y_{m,n}^j & \text{se } (k,l) = (m,n) \\ 0 & \text{se } (k,l) \neq (m,n), \end{cases}$$

ou seja,

$$\|Y_{m,n}^j\|_\beta^2 = \frac{d(m,n)}{\omega_q |b_{m,n}|} \quad e \quad s_{k,l}(Y_{m,n}^j) = 0, \quad (k,l) \notin A_\beta.$$

Como a recíproca é trivial, a prova do item (i) está concluída. Para provar (ii), assumamos que exista $f \in \mathcal{N}_\beta$ tal que $\langle f, Y_{m,n}^j \rangle_2 = 0$, $j = 1, 2, \dots, d(m,n)$, $(m,n) \in A_\beta$. Esta condição implica que $s_{m,n}(f) = 0$, $(m,n) \in A_\beta$, enquanto que a primeira implica que $s_{m,n}(f) = 0$, $(m,n) \notin A_\beta$. Portanto, $f = 0$. ■

Teorema 5.2.3. *O espaço vetorial $(\mathcal{N}_\beta, \langle \cdot, \cdot \rangle_\beta)$ é de Hilbert.*

Prova. Se $\langle f, f \rangle_\beta = 0$ para alguma $f \in \mathcal{N}_\beta$, então $s_{m,n}(f) = 0$, $(m,n) \in A_\beta$. Como na prova anterior, $f = 0$. As demais propriedades necessárias seguem dos seguintes fatos: $(L^2(\Omega_{2q}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ é um espaço de Hilbert e a aplicação $f \in L^2(\Omega_{2q}) \mapsto s_{m,n}(f) \in L^2(\Omega_{2q})$ é linear. ■

Espaços nativos podem ser continuamente mergulhados em $(\mathcal{C}(\Omega_{2q}), \|\cdot\|_\infty)$.

Teorema 5.2.4. *Se $\beta = \{b_{m,n}\}$ é uma sequência tal que $|\beta| := \{|b_{m,n}|\}$ é somável, então $\mathcal{N}_\beta$ é um subespaço de $\mathcal{C}(\Omega_{2q})$ e vale a desigualdade*

$$\|f\|_\infty \leq C_0 \|f\|_\beta, \quad f \in \mathcal{N}_\beta,$$

para alguma constante C_0 independente de f .

Prova. É suficiente mostrar que a expansão condensada (5.2) de $f \in \mathcal{N}_\beta$ converge absolutamente. Para tanto, basta usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Fórmula da Adição para obter

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m,n \in \mathbb{N}} |s_{m,n}(f)(z)| \right)^2 &= \left(\sum_{(m,n) \in A_\beta} |s_{m,n}(f)(z)| \right)^2 \\ &= \sum_{(m,n) \in A_\beta} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \frac{(|b_{m,n}| \omega_q)^{1/2}}{d(m,n)^{1/2}} |Y_{m,n}^j(z)| \frac{d(m,n)^{1/2}}{(|b_{m,n}| \omega_q)^{1/2}} |\hat{f}_{m,n}(j)| \\ &\leq \sum_{(m,n) \in A_\beta} \frac{|b_{m,n}| \omega_q}{d(m,n)} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |Y_{m,n}^j(z)|^2 \times \sum_{(m,n) \in A_\beta} \frac{d(m,n)}{\omega_q |b_{m,n}|} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |\hat{f}_{m,n}(j)|^2 \\ &\leq \left(\sum_{m,n \in \mathbb{N}} |b_{m,n}| \right) \left(\frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_\beta} \frac{d(m,n)}{|b_{m,n}|} \|s_{m,n}(f)\|_2^2 \right) \\ &= C_0^2 \|f\|_\beta^2, \quad z \in \Omega_{2q}, \end{aligned}$$

onde $C_0^2 := \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |b_{m,n}| < \infty$. ■

Corolário 5.2.5. *Sejam β uma sequência e $z \in \Omega_{2q}$. Se $|\beta|$ é somável, então o funcional pontual δ_z dado por $\delta_z(f) = f(z)$, $f \in \mathcal{N}_\beta$ é contínuo.*

5.3 Espaços nativos e transformações multiplicativas

Esta seção contém alguns resultados técnicos sobre transformações multiplicativas que envolvem os espaços nativos introduzidos na seção anterior. O primeiro resultado apresenta um exemplo importante de transformação multiplicativa.

Teorema 5.3.1. *Seja K como em (5.3). Se $a_{m,n}^q(K) = a_{n,m}^q(K)$, $m, n \in \mathbb{N}$, então o operador de convolução Ψ_K introduzido no Capítulo 3 é uma transformação multiplicativa associada à sequência*

$$\left\{ \frac{a_{n,m}^q(K) \omega_q}{d(m, n)} \right\}_{m,n \in \mathbb{N}}.$$

Prova. Segue diretamente do Corolário 3.2.4 e da igualdade (5.4). ■

A seguir introduzimos algumas notações. Quando a sequência β da definição de espaço nativo for a sequência $\{a_{m,n}^q(K)\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ de coeficientes da expansão de uma função K , vamos escrever $\mathcal{N}_K := \mathcal{N}_\beta$, $\|\cdot\|_K := \|\cdot\|_\beta$ e $A_K := A_\beta$. Também vamos utilizar uma notação análoga no caso em que a sequência é $\{a_{m,n}^q(K) | c_{m,n}|^2\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ e a função é K_T .

Teorema 5.3.2. *Seja T uma transformação multiplicativa. Se K é como em (5.3), então $\mathcal{N}_{K_T} \subset T(\mathcal{N}_K)$.*

Prova. Seja $g \in \mathcal{N}_{K_T}$. A função f de $L^2(\Omega_{2q})$ com coeficientes de Fourier dados por

$$\widehat{f}_{m,n}(j) = \begin{cases} \widehat{g}_{m,n}(j)/c_{m,n} & \text{se } (m, n) \in A_{K_T} \\ 0 & \text{se } (m, n) \notin A_{K_T} \end{cases}$$

satisfaz

$$s_{m,n}(f) = \begin{cases} s_{m,n}(g)/c_{m,n} & \text{se } (m, n) \in A_{K_T} \\ 0 & \text{se } (m, n) \notin A_{K_T}. \end{cases}$$

Conseqüentemente,

$$\sum_{(m,n) \in A_K} \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K)} \|s_{m,n}(f)\|_2^2 = \sum_{(m,n) \in A_{K_T}} \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2} \|s_{m,n}(g)\|_2^2 = \omega_q \|g\|_{K_T}^2 < \infty,$$

isto é, $\|f\|_K < \infty$. A definição de f mostra que $s_{m,n}(f) = 0$, $(m, n) \notin A_K$. Agora está claro que $f \in \mathcal{N}_K$. Por outro lado, as séries de Fourier de g e $T(f)$ coincidem. Portanto, $g = T(f)$ em $L^2(\Omega_{2q})$. ■

Teorema 5.3.3. *Sejam T , K como no teorema acima. Então,*

$$\text{Ker } T \subset \{f \in L^2(\Omega_{2q}) : \widehat{f}_{m,n}(j) = 0, j = 1, 2, \dots, d(m, n), (m, n) \in A_{K_T}\}.$$

Em adição, se $f \in \mathcal{N}_K$, a outra inclusão também vale.

Prova. Seja $f \in L^2(\Omega_{2q})$ tal que $T(f) = 0$. Então,

$$c_{m,n} \widehat{f}_{m,n}(j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, d(m, n), \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

A primeira parte da prova segue, uma vez que $c_{m,n} \neq 0$ para $(m, n) \in A_{K_T}$. Por outro lado, assuma que $f \in \mathcal{N}_K$ tal que $\widehat{f}_{m,n}(j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, d(m, n)$, $(m, n) \in A_{K_T}$. Em particular, $\widehat{f}_{m,n}(j) = 0$, $(m, n) \notin A_K$. Como $c_{m,n} = 0$, $(m, n) \in A_K - A_{K_T}$ e

$$\mathbb{N}^2 = A_{K_T} \cup (\mathbb{N}^2 - A_K) \cup (A_K - A_{K_T}),$$

a igualdade em (5.8) vale. Portanto a prova está concluída. $\blacksquare$

O teorema a seguir descreve uma situação em que os dois espaços nativos presentes no Teorema 5.3.2 são isomorfos.

Teorema 5.3.4. *Sejam T e K como no teorema acima. Assuma que $c_{m,n} \neq 0$, $(m, n) \in A_K$. Então, $T : \mathcal{N}_K \rightarrow \mathcal{N}_{K_T}$ é um isomorfismo.*

Prova. Seja $f \in \mathcal{N}_K$. Então,

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{K_T}^2 &= \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_{K_T}} \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2} \|s_{m,n}(T(f))\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_{K_T}} \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K)} \|s_{m,n}(f)\|_2^2. \end{aligned}$$

A inclusão $A_{K_T} \subset A_K$ vale sempre, enquanto que a hipótese sobre $c_{m,n}$ implica que $A_K \subset A_{K_T}$. Logo, $\|T(f)\|_{K_T}^2 = \|f\|_K^2 < \infty$. Isto mostra que $T(\mathcal{N}_K) \subset \mathcal{N}_{K_T}$ e que T é injetiva. A inclusão do Teorema 5.3.2 revela que T é sobrejetiva. $\blacksquare$

Um método eficiente para construir funções em $\mathcal{N}_K$, a partir de uma transformação multiplicativa e de uma função como em (5.3), é dado a seguir.

Teorema 5.3.5. *Sejam T uma transformação multiplicativa e K uma função como em (5.3) e satisfazendo a condição de amortecimento (5.5). Se $w \in \Omega_{2q}$, então as funções*

$$z \in \Omega_{2q} \mapsto K(\langle z, w \rangle),$$

$$z \in \Omega_{2q} \mapsto T^w(K\langle z, w \rangle) \quad e \quad z \in \Omega_{2q} \mapsto T^z(K\langle z, w \rangle)$$

são elementos de $\mathcal{N}_K$.

Prova. Seja $w \in \Omega_{2q}$ e escreva $g(z) = K(\langle z, w \rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$. O Teorema 3.1.1 e (5.4) mostram que

$$\widehat{g}_{m,n}(j) = \frac{a_{m,n}^q(K)\omega_q}{d(m,n)} \overline{Y_{m,n}^j(w)}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m,n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pela Fórmula da Adição,

$$\|s_{m,n}(g)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d(m,n)} |\widehat{g}_{m,n}(j)|^2 = \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q^2}{d(m,n)^2} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |Y_{m,n}^j(w)|^2 = \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\|g\|_K^2 = \sum_{(m,n) \in A_K} \frac{d(m,n)}{a_{m,n}^q(K)\omega_q} \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)} = \sum_{(m,n) \in A_K} a_{m,n}^q(K) < \infty.$$

As provas para as duas aplicações restantes são idênticas. Faremos apenas a prova para o caso $h(z) = T^z K(\langle z, w \rangle)$, $z \in \Omega_{2q}$. Como na prova anterior,

$$\widehat{h}_{m,n}(j) = \frac{a_{m,n}^q(K)\omega_q}{d(m,n)} c_{m,n} \overline{Y_{m,n}^j(w)}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m,n), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\|s_{m,n}(h)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{d(m,n)} |\widehat{h}_{m,n}(j)|^2 = \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)} |c_{m,n}|^2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\|h\|_K^2 = \sum_{(m,n) \in A_K} \frac{d(m,n)}{a_{m,n}^q(K)\omega_q} \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)} |c_{m,n}|^2 = \sum_{(m,n) \in A_K} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 < \infty.$$

Por fim, os cálculos acima mostram, também, que se $(m,n) \notin A_K$, então $s_{m,n}(g) = 0$ e $s_{m,n}(h) = 0$. ■

Teorema 5.3.6. *Sejam T e K como no teorema anterior. Então, $T^z T^w(K(\langle z, w \rangle)) = K_T(\langle z, w \rangle)$, $z, w \in \Omega_{2q}$.*

Prova. Usando a Fórmula da Adição e aplicando a definição de transformação multiplicativa temos que

$$T^z T^w K(\langle z, w \rangle) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 P_{m,n}^{q-2}(\langle z, w \rangle), \quad z, w \in \Omega_{2q}.$$

Assim, a condição de amortecimento completa a prova. ■

O próximo teorema trata de composições da forma $\Psi_K \circ K(\langle \cdot, w \rangle)$ para algum $w \in \Omega_{2q}$.

Teorema 5.3.7. *Seja K uma função como em (5.3). Se $w \in \Omega_{2q}$, então a função*

$$z \in \Omega_{2q} \longmapsto \Psi_K \circ K(\langle \cdot, w \rangle)(z)$$

escreve-se na forma $K_1(\langle z, w \rangle)$, onde K_1 tem uma representação como em (5.3). Adicionalmente, se K satisfaz a condição de amortecimento (5.5), então K_1 também satisfaz.

Prova. Aplicando a Fórmula da Adição, o Teorema 3.1.1 e (5.4), encontramos

$$\begin{aligned} \Psi_K(K(\langle \cdot, w \rangle))(z) &= \int_{\Omega_{2q}} K(\langle \zeta, z \rangle) K(\langle \zeta, w \rangle) d\sigma_q(\zeta) \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) \int_{\Omega_{2q}} K(\langle \zeta, z \rangle) P_{m,n}^{q-2}(\langle \zeta, w \rangle) d\sigma_q(\zeta) \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{a_{m,n}^q(K) \omega_q}{d(m,n)} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \Psi_K(Y_{m,n}^j(z)) \overline{Y_{m,n}^j(w)} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \left(\frac{a_{m,n}^q(K) \omega_q}{d(m,n)} \right)^2 \sum_{j=1}^{d(m,n)} Y_{m,n}^j(z) \overline{Y_{m,n}^j(w)} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)} P_{m,n}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \\ &:= K_1(\langle z, w \rangle), \quad z \in \Omega_{2q}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{a_{m,n}^q(K) \omega_q}{d(m,n)} < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m,n}^q(K) = 0,$$

a série numérica da expansão de K_1 é convergente. Um argumento similar mostra que se K satisfaz (5.5), o mesmo ocorre com K_1 . ■

A função K_1 no enunciado do teorema anterior é costumeiramente denominada convolução esférica de K por si própria. Vamos usar a notação $K * K$ para indicar K_1 . Observamos que, embora $A_{K*K} = A_K$, os espaços $\mathcal{N}_{K*K}$ e $\mathcal{N}_K$ são geralmente diferentes.

Corolário 5.3.8. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 5.3.7, temos a expansão*

$$(K_T * K_T)(z) \sim \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{a_{m,n}^q(K)^2 \omega_q}{d(m,n)} |c_{m,n}|^4 P_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B[0, 1]. \quad (5.9)$$

5.4 Espaços nativos e espaços de Sobolev

Algumas estimativas que obtemos à frente, tem que ser feitas na norma de espaços de tipo-Sobolev. Espaços nativos residem naturalmente dentro de tais espaços, podendo até coincidir com eles em alguns casos. O objetivo desta seção é introduzir estes espaços e estabelecer algumas de suas propriedades básicas. Lembramos aqui que a notação $-\lambda_{m,n}$ refere-se ao único autovalor do operador $\Delta_{(2q)}$ associado ao auto-espaço $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$. Escrevemos λ para denotar a seqüência dupla formada por esses autovalores.

Seja μ um número real e $\alpha := \{\alpha_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência dupla de número reais satisfazendo

$$1 + \alpha_{m,n} \leq C_\alpha (1 + \lambda_{m,n}), \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (5.10)$$

para alguma constante $C_\alpha > 0$. O *espaço de tipo-Sobolev* associado a α e ao parâmetro μ é

$$\mathcal{H}^\mu(\alpha) := \{f \in L^2(\Omega_{2q}) : \|f\|_{\alpha,\mu} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{\alpha,\mu}^2 := \sum_{m,n \in \mathbb{N}} (1 + \alpha_{m,n})^\mu \|s_{m,n}(f)\|_2^2.$$

Teorema 5.4.1. *Se $\delta := \{m + n\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, então $\mathcal{H}^{2\mu}(\delta) = \mathcal{H}^\mu(\lambda)$, $\mu \in \mathbb{R}$.*

Prova. Analisando o gráfico das funções $f_q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_q(x) = \frac{1 + x^2 + (2q - 2)x}{(1 + x)^2}, \quad q = 2, 3, \dots,$$

obtemos as desigualdades

$$1 \leq f_q(x) \leq \frac{q}{2}, \quad x \in [0, \infty).$$

Como $f_q(m + n) = (1 + \lambda_{m,n})(1 + m + n)^{-2}$, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + m + n)^2 \leq (1 + \lambda_{m,n}) \leq \frac{q}{2}(1 + m + n)^2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, existe uma constante positiva $k_1 := k_1(\mu, q)$ tais que

$$(1 + m + n)^{2\mu} \leq (1 + \lambda_{m,n})^\mu \leq k_1(1 + m + n)^{2\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

A afirmação do teorema segue. ■

Uma transformação multiplicativa T é *pseudo-diferencial de ordem* $\nu \in \mathbb{R}$, quando existem constantes positivas c e C , dependentes de ν tais que

$$c(1 + \lambda_{m,n})^\nu \leq |c_{m,n}|^2 \leq C(1 + \lambda_{m,n})^\nu, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Teorema 5.4.2. *Se T é uma transformação pseudo-diferencial de ordem ν e K é uma função como em (5.3) e satisfazendo (5.5), então $\mathcal{N}_K \subset \mathcal{H}^\nu(\lambda)$.*

Prova. Usando a desigualdade (5.12) e a condição de amortecimento (5.5), encontramos uma constante positiva $C(\nu, q)$ tal que

$$(1 + \lambda_{m,n})^\nu \leq C(\nu, q) \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K) \omega_q}, \quad (m, n) \in A_K.$$

Então,

$$\|f\|_{\lambda, \nu}^2 \leq C(\nu, q) \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_K} \frac{d(m, n)}{a_{m,n}^q(K)} \|s_{m,n}(f)\|_2^2 = C(\nu, q) \|f\|_K^2, \quad f \in \mathcal{N}_K.$$

A prova está completa. ■

Teorema 5.4.3. *Sejam T uma transformação pseudo-diferencial de ordem ν , $\mu \in \mathbb{R}$ e α uma seqüência satisfazendo (5.10). Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se $\mu \geq \nu$, então existe uma constante $C(\alpha, \mu, T)$ tal que*

$$\|T(f)\|_{\alpha, \mu - \nu} \leq C(\alpha, \mu, T) \|f\|_{\lambda, \mu}, \quad f \in \mathcal{H}^\mu(\lambda).$$

Em particular, $T(\mathcal{H}^\mu(\lambda)) \subset \mathcal{H}^{\mu - \nu}(\alpha)$;

(ii) *Se $\mu \geq 0$, então existe uma constante $c(\alpha, \mu, T)$ tal que*

$$\|f\|_{\alpha, \mu} \leq c(\alpha, \mu, T) \|T(f)\|_{\lambda, \mu - \nu}, \quad f \in \mathcal{H}^\mu(\alpha).$$

Prova. Seja $f \in \mathcal{H}^\mu(\lambda)$. Pelas desigualdades (5.10) e (5.12) vemos que

$$|c_{m,n}|^2 (1 + \alpha_{m,n})^{\mu - \nu} \leq |c_{m,n}|^2 C_\alpha^{\mu - \nu} (1 + \lambda_{m,n})^{\mu - \nu} \leq C C_\alpha^{\mu - \nu} (1 + \lambda_{m,n})^\mu, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\|T(f)\|_{\alpha, \mu - \nu}^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} (1 + \alpha_{m,n})^{\mu - \nu} |c_{m,n}|^2 \|s_{m,n}(f)\|_2^2 \leq C C_\alpha^{\mu - \nu} \sum_{m,n \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_{m,n})^\mu \|s_{m,n}(f)\|_2^2.$$

A constante $C(\alpha, \mu, T)$ da afirmação satisfaz, então, $C(\alpha, \mu, T)^2 = CC_\alpha^{\mu-\nu}$.

Para provar o item (ii), é suficiente adaptar a prova de (i), agora usando as desigualdades

$$(1 + \alpha_{m,n})^\mu \leq C_\alpha^\mu (1 + \lambda_{m,n})^\mu \leq \frac{C_\alpha^\mu}{c} (1 + \lambda_{m,n})^{\mu-\nu} |c_{m,n}|^2.$$

A constante $c(\alpha, \mu, T)$ satisfaz $c(\alpha, \mu, T)^2 = C_\alpha^\mu$. ■

No caso de esferas reais, uma versão mais fraca do item (ii) do teorema acima pode ser encontrada em [30]. Além de mais geral, a prova que apresentamos é mais simples.

No teorema abaixo, apresentamos duas variações do Teorema 5.4.3. Na primeira, temos uma versão onde a condição $\mu \geq \nu$ é suprimida. No segundo, temos uma versão que é aplicável quando $\mu = \nu$, mesmo que ν seja negativo.

Teorema 5.4.4. *Sejam T uma transformação pseudo-diferencial de ordem ν e $\mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes desigualdades:*

(i) *Existe uma constante $C(T)$ tal que*

$$\|T(f)\|_{\lambda, \mu-\nu} \leq C(T) \|f\|_{\lambda, \mu}, \quad f \in \mathcal{H}^\mu(\lambda).$$

Em particular, $T(\mathcal{H}^\mu(\lambda)) \subset \mathcal{H}^{\mu-\nu}(\lambda)$;

(ii) *Existe uma constante $c(T)$ tal que*

$$\|f\|_{\lambda, \mu} \leq c(T) \|T(f)\|_{\lambda, \mu-\nu}, \quad f \in \mathcal{H}^\mu(\lambda).$$

Prova. Basta seguir os passos da prova do teorema anterior. ■

5.5 Soluções aproximadas

Nesta seção, descrevemos a construção das funções aproximadoras para as soluções da equação $T(f) = g$. Aqui, T é uma transformação multiplicativa, K é uma função como em (5.3) e satisfazendo a condição de amortecimento (5.5).

Dado um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$, um subespaço fechado V de $\mathcal{H}$ e $u \in \mathcal{H}$, vamos denotar por $p(u, V)$ o único elemento de V satisfazendo $\llbracket u - p(u, V), v \rrbracket = 0$, $v \in V$. Tal elemento satisfaz ([4], p.78-80)

$$\llbracket u - v \rrbracket^2 = \llbracket u - p(u, V) \rrbracket^2 + \llbracket v - p(u, V) \rrbracket^2, \quad v \in V, \quad (5.13)$$

onde $\llbracket \cdot \rrbracket$ é a norma induzida pelo produto interno $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$. O elemento $p(u, V) \in V$ é chamado de *solução ótima* da projeção de $u \in \mathcal{H}$ sobre o subespaço V .

Fixado um inteiro positivo N , w em Ω_{2q} e um subconjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ de Ω_{2q} , definimos

$$V_W := [\{(\delta_j \circ T^w)K(\langle \cdot, w \rangle) : 1 \leq j \leq N\}]$$

e

$$V_{W_T} := [\{\delta_j(K_T(\langle \cdot, w \rangle)) : 1 \leq j \leq N\}].$$

O Teorema 5.3.5 garante que V_W e V_{W_T} são, respectivamente, subespaços de $\mathcal{N}_K$ e $\mathcal{N}_{K_T}$. Eles são obviamente fechados.

A transformação multiplicativa T é sobrejetiva quando seu domínio e contra-domínio são espaços nativos convenientes. Isto foi essencialmente visto no Teorema 5.3.2, mas fazemos o registro desse fato no teorema abaixo.

Teorema 5.5.1. *Se $g \in \mathcal{N}_{K_T}$, então existe $f \in \mathcal{N}_K$ tal que $T(f) = g$.*

Teorema 5.5.2. *Seja $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ um subconjunto de Ω_{2q} para o qual o conjunto $\{\delta_\mu \circ T : \mu = 1, 2, \dots, N\}$ é linearmente independente. Valem as seguintes afirmações:*

(i) *Se $f \in \mathcal{N}_K$, então $s = p(f, V_W)$ é o único elemento de V_W que resolve o problema de interpolação*

$$(\delta_j \circ T)(s) = (\delta_j \circ T)(f), \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad (5.14)$$

(ii) *Se $g \in \mathcal{N}_{K_T}$, então $s = p(g, V_{W_T})$ é o único elemento de V_{W_T} que resolve o problema de interpolação*

$$\delta_j(s) = g(w_j), \quad j = 1, 2, \dots, N;$$

(iii) *Se $f \in \mathcal{N}_K$, $g \in \mathcal{N}_{K_T}$ e $T(f) = g$, então $T(p(f, V_W)) = p(g, V_{W_T})$.*

Prova. Seja $f \in \mathcal{N}_K$. Pelo Corolário 5.2.5, temos que $\delta_j \in \mathcal{N}_K^*$, $j = 1, 2, \dots, N$. O Teorema 5.3.5 mostra que a matriz interpoladora de (5.14), ou seja,

$$((\delta_i \circ T^z)(\delta_j \circ T^w)K(\langle z, w \rangle))_{i,j=1,2,\dots,N}$$

está bem definida. A seguir, vamos mostrar que ela é invertível. Usando a Fórmula da Adição e o Teorema 5.3.6, vemos que a forma quadrática Q associada à matriz acima escreve-se na forma

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N c_{\mu} \overline{c_{\nu}} (\delta_{\mu} \circ T^z) (\delta_{\nu} \circ T^w) K(\langle z, w \rangle) \\
&= \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N c_{\mu} \overline{c_{\nu}} (\delta_{\mu} \circ T^z) (\delta_{\nu} \circ T^w) \sum_{m,n \in \mathbb{N}} a_{m,n}^q(K) P_{m,n}^{q-2}(\langle z, w \rangle) \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \frac{a_{m,n}^q(K) \omega_q}{d(m,n)} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \left| \sum_{\mu=1}^N c_{\mu} (\delta_{\mu} \circ T) (Y_{m,n}^j) \right|^2.
\end{aligned}$$

Como os coeficientes desta série são não negativos, $Q = 0$ se e somente se,

$$\sum_{\mu=1}^N c_{\mu} (\delta_{\mu} \circ T) (Y_{m,n}^j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, d(m,n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $[\{Y_{m,n}^j : j = 1, 2, \dots, d(m,n), m, n \in A_K\}]$ denso em $\mathcal{N}_K$ (Teorema 5.2.2), a última conclusão é equivalente a

$$\sum_{\mu=1}^N c_{\mu} (\delta_{\mu} \circ T) = 0.$$

Como $\{\delta_{\mu} \circ T : \mu = 1, 2, \dots, N\}$ é linearmente independente, $c_{\mu} = 0$, $\mu = 1, 2, \dots, N$. Logo, o sistema (5.14) possui uma única solução em V_W , digamos s_0 . Por outro lado, pelo Teorema 3.1.1 e a definição (5.4),

$$\langle K(\langle \cdot, w \rangle), Y_{m,n}^j \rangle_2 = \frac{a_{m,n}^q(K) \omega_q}{d(m,n)} \overline{Y_{m,n}^j(w)}, \quad w \in \Omega_{2q}, \quad j = 1, 2, \dots, d(m,n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Então, usando isto e a definição de produto interno em $\mathcal{N}_K$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= (\delta_j \circ T^w)(f - s_0)(w) \\
&= (\delta_j \circ T^w) \left(\sum_{(m,n) \in A_K} \sum_{i=1}^{d(m,n)} \langle f - s_0, Y_{m,n}^i \rangle_2 Y_{m,n}^i(w) \right) \\
&= (\delta_j \circ T^w) \left(\sum_{(m,n) \in A_K} \frac{d(m,n)}{a_{m,n}^q(K) \omega_q} \sum_{i=1}^{d(m,n)} \langle f - s_0, Y_{m,n}^i \rangle_2 \langle Y_{m,n}^i, K(\langle \cdot, w \rangle) \rangle_2 \right) \\
&= (\delta_j \circ T^w) \langle f - s_0, K(\langle \cdot, w \rangle) \rangle_K \\
&= \langle f - s_0, (\delta_j \circ T^w) K(\langle \cdot, w \rangle) \rangle_K, \quad j = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, $\langle f - s_0, h \rangle_K = 0$, $h \in V_W$. Então, por (5.13), $s_0 = p(f, V_W)$. Isto conclui a prova de (i).

A prova de (ii) é similar a prova de (i).

Para provar (iii), começamos usando (i) e a hipótese para concluir que

$$\delta_j(T(p(f, V_W))) = \delta_j(T(f)) = \delta_j(g) = g(w_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Escrevendo $p(f, V_W) = \sum_{k=1}^N d_k(\delta_k \circ T^w)K(\langle \cdot, w \rangle)$, $d_1, d_2, \dots, d_N \in \mathbb{C}$, o Teorema 5.3.6 implica que,

$$T(p(f, V_W)) = T\left(\sum_{k=1}^N d_k(\delta_k \circ T^w)K(\langle \cdot, w \rangle)\right) = \sum_{k=1}^N d_k\delta_k(K_T(\langle \cdot, w \rangle)) \in V_{W_T}.$$

Por (ii), $p(g, V_{W_T})$ é a única função de V_{W_T} com a propriedade $\delta_j(s) = g(w_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Conseqüentemente, $T(p(f, V_W)) = p(g, V_{W_T})$. ■

A independência linear do conjunto $\{\delta_\mu \circ T : \mu = 1, 2, \dots, N\}$ no Teorema 5.5.2 pode ser substituída pelo seguinte par de hipóteses: $A_K \subset A_{K_T}$ e o conjunto $\{\delta_\mu : \mu = 1, 2, \dots, N\}$ é linearmente independente. Entretanto, sendo válida a primeira destas hipóteses, a transformação T determina um isomorfismo entre $\mathcal{N}_K$ e $\mathcal{N}_{K_T}$, conforme o Teorema 5.3.4.

5.6 Estimativas da aproximação

Nesta seção, T , K e K_T são como descritos no início da Seção 5.5 e $g \in \mathcal{N}_{K_T}$ é uma função dada. Vamos obter estimativas para o erro cometido na aproximação de uma solução da equação (5.1) por uma função da forma $p(f, V_W)$ para algum conjunto W de Ω_{2q} , mas apenas no caso em que T é pseudo-diferencial. Uma vez que o Teorema 5.4.2 garante que $\mathcal{N}_K$ pode ser continuamente mergulhado em espaços de tipo-Sobolev, as estimativas são obtidas na norma deste último espaço.

No que segue, o dual contínuo de $\mathcal{N}_\beta$ é denotado por $\mathcal{N}_\beta^*$. O Corolário 5.2.5 mostra que dado $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \subset \Omega_{2q}$, o espaço

$$\mathcal{F}_W := [\{\delta_j : 1 \leq j \leq N\}]$$

é um subespaço de $\mathcal{N}_\beta^*$. Deste modo, podemos considerar a distância de $\delta \in \mathcal{N}_\beta^*$ a $\mathcal{F}_W$ dada por

$$d^*(\delta, \mathcal{F}_W) := \inf_{\tau \in \mathcal{F}_W} \|\delta - \tau\|_{\mathcal{N}_\beta^*}.$$

A estimativa preliminar é dada a seguir.

Teorema 5.6.1. *Sejam $f \in \mathcal{N}_K$ uma solução de (5.1) e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ um subconjunto de Ω_{2q} . Assuma que $\{\delta_\mu \circ T : \mu = 1, 2, \dots, N\}$ é linearmente independente. Se T é pseudo-diferencial de ordem ν , então*

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq c(T) \sqrt{\omega_q} \|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \sup_{z \in \Omega_{2q}} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W),$$

onde $c(T)$ é a constante do Teorema 5.4.4.

Prova. Pelo Teorema 5.5.2

$$\begin{aligned} T(f - p(f, V_W))(z) &= \delta_z(T(f) - T(p(f, V_W))) \\ &= \delta_z(g - p(g, V_{W_T})) \\ &= (\delta_z - \delta_j)(g - p(g, V_{W_T})), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T(f - p(f, V_W))(z)| \leq d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W) \|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T}, \quad z \in \Omega_{2q}.$$

Usando a última desigualdade e o Teorema 5.4.4, deduzimos que

$$\begin{aligned} \|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} &\leq c(T) \|T(f - p(f, V_W))\|_{\lambda, 0} \\ &= c(T) \|T(f - p(f, V_W))\|_2 \\ &\leq c(T) \sqrt{\omega_q} \|T(f - p(f, V_W))\|_\infty \\ &\leq c(T) \sqrt{\omega_q} \|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \sup_{z \in \Omega_{2q}} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W), \end{aligned}$$

concluindo a prova do teorema. ■

O teorema anterior revela que a obtenção de uma estimativa para a aproximação da expressão à esquerda da desigualdade no enunciado do teorema, depende de estimativas adequadas para $\|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T}$ e $\sup_{z \in \Omega_{2q}} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W)$. No restante desta seção, buscamos tais estimativas.

Teorema 5.6.2. *Sejam K_T uma função como em (5.6) e W como no Teorema 5.6.1. Então as seguintes estimativas ocorrem:*

- (i) $\|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \leq \|g\|_{K_T}, \quad g \in \mathcal{N}_{K_T};$
- (ii) $\|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \leq \sqrt{\omega_q} \|g\|_{K_T * K_T} \sup_{z \in \Omega_{2q}} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W), \quad g \in \mathcal{N}_{K_T * K_T}.$

Prova. (i) é consequência imediata de (5.13).

Para provar (ii), usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned}
\|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T}^2 &= \langle g, g - p(g, V_{W_T}) \rangle_{K_T} \\
&= \frac{1}{\omega_q} \sum_{(m,n) \in A_{K_T}} \frac{d(m,n)}{a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2} \sum_{j=1}^{d(m,n)} \langle g, Y_{m,n}^j \rangle_2 \langle Y_{m,n}^j, g - p(g, V_{W_T}) \rangle_2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\omega_q^2} \sum_{(m,n) \in A_{K_T}} \frac{d(m,n)^2}{a_{m,n}^q(K)^2 |c_{m,n}|^4} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |\langle g, Y_{m,n}^j \rangle_2|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\sum_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |\langle Y_{m,n}^j, g - p(g, V_{W_T}) \rangle_2|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|g\|_{K_T * K_T} \|g - p(g, V_{W_T})\|_2, \quad g \in \mathcal{N}_{K_T * K_T}.
\end{aligned}$$

Agora, como na prova do Teorema 5.6.1,

$$\|g - p(g, V_{W_T})\|_2 \leq \sqrt{\omega_q} \|g - p(g, V_{W_T})\|_\infty \leq \sqrt{\omega_q} \|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \sup_{z \in \Omega_{2q}} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W).$$

Assim, a desigualdade segue no caso em que $\|g - p(g, V_{W_T})\|_{K_T} \neq 0$. Caso contrário, ela é trivial. ■

A partir de agora, os resultados da Seção 2.5 são utilizados.

Teorema 5.6.3. *Sejam $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ um subconjunto de Ω_{2q} e $z \in \Omega_{2q}$. Se κ é um inteiro positivo menor ou igual a $(2\eta)^{-1}$, então*

$$d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W) \leq 3 \left(\sum_{m+n > \kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \right)^{1/2}.$$

Prova. Usamos o Teorema 2.5.4 para definir o funcional linear

$$\varsigma := -\delta_z + \sum_{\mu=1}^N c_\mu \delta_\mu = \sum_{\mu=0}^N c_\mu \delta_\mu, \quad c_0 = -1, \quad w_0 = z.$$

Pelo Corolário 5.2.5, $\varsigma \in \mathcal{N}_{K_T}^*$. Usando a expansão condensada de h , obtemos

$$\varsigma(h) = \sum_{m+n>\kappa} \varsigma(s_{m,n}(h)), \quad h \in \mathcal{N}_{K_T}.$$

Definindo

$$\sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_M)| := \max \left\{ \sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_k)| : k = 0, 1, \dots, N \right\}, \quad h \in \mathcal{N}_{K_T}$$

e usando a desigualdade $\sum_{k=1}^N |c_k| \leq 2$, vemos que

$$\begin{aligned} |\varsigma(h)| &\leq \sum_{m+n>\kappa} \sum_{k=0}^N |c_k| |s_{m,n}(h)(w_k)| \\ &= \sum_{k=0}^N |c_k| \left(\sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_k)| \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^N |c_k| \left(\sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_M)| \right) \\ &\leq 3 \sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_M)|, \quad h \in \mathcal{N}_{K_T}. \end{aligned}$$

Finalmente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Fórmula da Adição e (5.7) implicam que

$$\begin{aligned} d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W) &\leq \|\delta_z - \sum_{k=1}^N c_k \delta_k\|_{\mathcal{N}_{K_T}^*} \\ &= \sup_{\|h\|_{K_T} \leq 1} |\varsigma(h)| \\ &\leq 3 \sup_{\|h\|_{K_T} \leq 1} \left\{ \sum_{m+n>\kappa} |s_{m,n}(h)(w_M)| \right\} \\ &= 3 \sup_{\|h\|_{K_T} \leq 1} \left\{ \sum_{\substack{m+n>\kappa \\ (m,n) \in A_{K_T}}} |s_{m,n}(h)(w_M)| \right\} \\ &\leq 3 \sup_{\|h\|_{K_T} \leq 1} \|h\|_{K_T} \left(\sum_{\substack{m+n>\kappa \\ (m,n) \in A_{K_T}}} \frac{a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \omega_q}{d(m,n)} \sum_{j=1}^{d(m,n)} |Y_{m,n}^j(w_M)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \left(\sum_{m+n>\kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

5.7 Estimativa do erro em casos específicos

Os resultados anteriores evidenciam o fato de que não é possível obter uma estimativa para $d^*(\delta_z, \mathcal{F}_W)$, a menos que alguma hipótese adicional sobre T ou K , ou sobre ambos, seja assumida. Apresentamos aqui estimativas no caso em que a sequência $\{a_{m,n}^q(K)\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ possui alguma condição de decaimento.

Em toda a seção, T e K são como no início da Seção 5.6 e W é um subconjunto finito de Ω_{2q} com norma da malha η .

Teorema 5.7.1. *Assuma que T é uma transformação pseudo-diferencial de ordem ν . Seja κ um inteiro positivo tal que $(2\eta)^{-1} \in (\kappa, \kappa + 1]$. Se $a_{m,n}^q(K) \leq D(1 + \lambda_{m,n})^{-s-1}$, $m + n > \kappa$ para algum $s > \nu$ e algum $D > 0$, então existe uma constante positiva $C_1 = C_1(s - \nu)$ tal que*

$$\sum_{m+n > \kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq C_1 \eta^{2(s-\nu)}.$$

Prova. Pelas desigualdades (5.11), (5.12) vemos que

$$a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq C D (1 + \lambda_{m,n})^{(\nu-s-1)} \leq C D k_1 (1 + m + n)^{2\nu-2s-2}, \quad m + n > \kappa.$$

Como $2\nu - 2s < 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{m+n > \kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 &\leq \sum_{m+n > \kappa} C D k_1 (1 + m + n)^{2\nu-2s-2} \\ &= C D k_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m+n=\kappa+j} (1 + m + n)^{2\nu-2s-2} \\ &= C D k_1 \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \kappa + j)^{2\nu-2s-1} \\ &\leq C D k_1 \int_1^{\infty} (1 + \kappa + t)^{2\nu-2s-1} dt \\ &= \frac{C D k_1}{2s - 2\nu} (2 + \kappa)^{2\nu-2s} \\ &\leq \frac{C D k_1 2^{2s-2\nu}}{2s - 2\nu} \eta^{2s-2\nu}, \end{aligned}$$

a desigualdade desejada. ■

Teorema 5.7.2. *Assuma que T é uma transformação pseudo-diferencial de ordem ν . Seja κ um inteiro tal que $(2\eta)^{-1} \in (\kappa, \kappa + 1]$. Se $a_{m,n}^q(K) \leq D \exp(-a(1+m+n)^s)$, $m+n > \kappa$ para algum $s > 0$ e constantes positivas a e D , então existe uma constante positiva $C_2 = C_2(s, a)$ tal que*

$$\sum_{m+n>\kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq \begin{cases} C_2 e^{-a(2\eta)^{-s}} & \text{se } 2\nu + 2 \leq s \\ C_2 \left(\frac{4\eta+1}{2\eta} \right)^{2\nu-s+1} e^{-a(2\eta)^{-s}} & \text{se } s < 2\nu + 2 \leq s(a+1). \end{cases}$$

Prova. O mesmo procedimento usado na prova do teorema anterior produz a desigualdade

$$a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq C D k_1 e^{-a(1+m+n)^s} (1+m+n)^{2\nu}, \quad m+n > \kappa.$$

Se $2\nu - s + 2 \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \sum_{m+n>\kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 &\leq C D k_1 \sum_{m+n>\kappa} e^{-a(1+m+n)^s} (1+m+n)^{s-2} \\ &\leq C D k_1 \int_1^\infty e^{-a(1+\kappa+t)^s} (1+\kappa+t)^{s-1} dt \\ &= \frac{C D k_1}{as} e^{-a(2+\kappa)^s} \leq \frac{C D k_1}{as} e^{-a(2\eta)^{-s}}. \end{aligned}$$

Agora vamos assumir que $2\nu - s + 2 > 0$. Certamente,

$$\sum_{m+n>\kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq C D k_1 \int_1^\infty (1+\kappa+t)^{2\nu+1} e^{-a(1+\kappa+t)^s} dt$$

e temos que estimar a integral I do lado direito da desigualdade. Integrando por partes usando o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+\kappa+t)^{2\nu-s+2} e^{-a(1+\kappa+t)^s} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty (1+\kappa+t)^{2\nu-s+2} (1+\kappa+t)^{s-1} e^{-a(1+\kappa+t)^s} dt \\ &= \frac{(2+\kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}} + \frac{2\nu-s+2}{as} \int_1^\infty (1+\kappa+t)^{2\nu-s+1} e^{-a(1+\kappa+t)^s} dt \\ &\leq \frac{(2+\kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}} + \frac{2\nu-s+2}{as(2+\kappa)^s} \int_1^\infty (1+\kappa+t)^{2\nu+1} e^{-a(1+t+\kappa)^s} dt \\ &= \frac{(2+\kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}} + \frac{2\nu-s+2}{as(2+\kappa)^s} I. \end{aligned}$$

Em particular,

$$I \leq \frac{(2 + \kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}} + \frac{2\nu - s + 2}{as} I.$$

Se $s(a + 1) > 2\nu + 2$, nossa estimativa completa é dada por

$$I \leq D' \frac{(2 + \kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}} \leq \frac{D'}{as} (2 + (2\eta)^{-1})^{2\nu-s+1} e^{-a(2\eta)^{-s}}, \quad (5.15)$$

onde $D' = as/(s(a + 1) - 2\nu - 2) > 0$. Se $s(a + 1) = 2\nu + 2$, (5.15) vale com constante $D' = 2^s/(2^s - 1)$. Isto completa a prova do teorema. ■

Na prática, as estimativas devem ser obtidas quando a norma da malha está próxima de 0, isto é, quando o conjunto W é denso em Ω_{2q} . A seguinte versão do teorema anterior incorpora esta hipótese.

Teorema 5.7.3. *Assuma que T é pseudo-diferencial de ordem ν . Seja κ um inteiro positivo tal que $(2\eta)^{-1} \in (\kappa, \kappa + 1]$. Se $a_{m,n}^q(K) \leq D \exp(-a(1 + m + n)^s)$, $m + n > \kappa$ para algum $s \in (0, 2\nu + 2)$ e constantes positivas a e D e*

$$\kappa > -2 + \left(\frac{2\nu - s + 2}{as} \right)^{1/s},$$

então existe uma constante positiva C_2 tal que

$$\sum_{m+n>\kappa} a_{m,n}^q(K) |c_{m,n}|^2 \leq C_2 \left(\frac{4\eta + 1}{2\eta} \right)^{2\nu-s+2} e^{-a/(2\eta)^s}.$$

Prova. Não é difícil ver que

$$\frac{2\nu - s + 2}{as(2 + \kappa)^s} < 1, \quad \kappa \geq -2 + \left(\frac{2\nu - s + 2}{as} \right)^{1/s}.$$

A segunda metade da prova do Teorema 5.7.2 agora implica que

$$I \leq C_2 \frac{(2 + \kappa)^{2\nu-s+2}}{as e^{a(2+\kappa)^s}},$$

onde C_2 é independente de s , a e κ . O resto segue. ■

Os resultados desta seção combinados com aqueles das Seções 5.6 e 5.7 dão as estimativas seguintes.

Teorema 5.7.4. *Assuma as notações e hipóteses do Teorema 5.6.2. Seja κ um inteiro positivo tal que $(2\eta)^{-1} \in (\kappa, \kappa + 1]$. Valem as afirmações:*

(i) *Se $a_{m,n}^q(K) \leq D(1 + \lambda_{m,n})^{-s-1}$, $m + n > \kappa$ para algum $s > \nu$ e algum $D > 0$, então*

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq 3c(T) \sqrt{C_1 \omega_q} \eta^{s-\nu} \|g\|_{K_T}.$$

Se $g \in \mathcal{N}_{K_T * K_T}$, então a desigualdade torna-se

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq 9c(T) C_1 \omega_q \eta^{2(s-\nu)} \|g\|_{K_T * K_T}.$$

(ii) *Se $a_{m,n}^q(K) \leq D \exp(-a(1 + m + n)^s)$, $m + n > \kappa$ para algum $s \in (0, 2\nu + 1)$ e algumas constantes positivas a e D e*

$$\kappa \geq -2 + \left(\frac{2\nu - s + 2}{as} \right)^{1/s},$$

então

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq 3c(T) \sqrt{C_2 \omega_q} \left(\frac{4\eta + 1}{2\eta} \right)^{\nu+1-s/2} e^{-a/2(2\eta)^s} \|g\|_{K_T}.$$

Quando $g \in \mathcal{N}_{K_T * K_T}$, a desigualdade anterior assume a forma:

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq 9c(T) C_2 \omega_q \left(\frac{4\eta + 1}{2\eta} \right)^{2\nu-s+2} e^{-a/(2\eta)^s} \|g\|_{K_T * K_T}.$$

(iii) *Se $a_{m,n}^q(K) \leq D \exp(-a(1 + m + n)^s)$, $m + n > \kappa$ para algum $s > 0$ e constantes positivas a e D , então*

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq \begin{cases} 3c(T) \sqrt{C_2 \omega_q} e^{-a/2(2\eta)^s} \|g\|_{K_T} & 2\nu + 2 \leq s \\ 3c(T) \sqrt{C_2 \omega_q} \left(\frac{4\eta+1}{2\eta} \right)^{\nu-(s-1)/2} e^{-a/2(2\eta)^s} \|g\|_{K_T} & 2\nu + 2 \in (s, as + s]. \end{cases}$$

Se $g \in \mathcal{N}_{K_T * K_T}$, a desigualdade acima pode ser escrita na forma

$$\|f - p(f, V_W)\|_{\lambda, \nu} \leq \begin{cases} 9c(T) C_2 \omega_q e^{-a/(2\eta)^s} \|g\|_{K_T * K_T} & 2\nu + 2 \leq s \\ 9c(T) C_2 \omega_q \left(\frac{4\eta+1}{2\eta} \right)^{2\nu-s+1} e^{-a/(2\eta)^s} \|g\|_{K_T * K_T} & 2\nu + 2 \in (s, as + s]. \end{cases}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Axler, S.; Bourdon, P.; Ramey, W., *Harmonic function theory*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 137. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [2] Boyd, J. N.; Raychowdhury, P. N., *Zonal harmonic functions from two-dimensional analogs of Jacobi polynomials*. *Applicable Anal.* **16** (1983), n° 3, 243-259.
- [3] Braaksma, B. P. L.; Meulenbeld, *Jacobi polynomials as spherical harmonics*, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A71= Indag. Math.* **30** (1968), 384-389.
- [4] Brézis, H., *Análisis funcional - Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.
- [5] Chen, D.; Menegatto, V. A.; Sun, X., *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), n° 9, 2733–2740.
- [6] Cheney, E. W., *Approximation using positive definite functions*. *Approximation theory VIII*, Vol. 1 (College Station, TX, 1995), 145–168, Ser. Approx. Decompos., 6, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.
- [7] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G., *Higher transcendental functions*. Vol. II. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [8] Falconer, K. J., *Applications of a result on spherical integration to the theory of convex sets*. *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 690-693.

- [9] Fasshauer, Gregory E.; Schumaker, Larry L., *Scattered data fitting on the sphere. Mathematical methods for curves and surfaces, II*(Lillehammer, 1997), 117–166, Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998.
- [10] Folland, G. B., *Real analysis*. John Wiley and Sons, 1984.
- [11] Forelli, F., *Measures whose Poisson integrals are pluriharmonic*. Ill. J. Math. **18** (1974), 373-388.
- [12] Freedden, W.; Gervens, T.; Schreiner, M., *Constructive approximation on the sphere. With applications to geomathematics*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [13] Freedden, W.; Michel, V., *Basic aspects of geopotential field approximation from satellite-to-satellite tracking data*. Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), n° 11, 827-846.
- [14] Freedden, W.; Michel, V.; Nutz, H., *Satellite-to-satellite tracking and satellite gravity gradiometry (advanced techniques for high-resolution geopotential field determination)*. J. Engrg. Math. **43** (2002), n° 1, 19-56.
- [15] Funk, P., *Beitäge zur theorie der kugelfunktionen*. Math. Ann. **77** (1915), 136-152.
- [16] Groemer, H., *Geometric aplications of Fourier series and spherical harmonics*. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1996.
- [17] Hecke, E., *Über orthogonal-invariante integralgleichungen*. Math. Ann. **78** (1918), 398-404.
- [18] Ikeda, M., Kayama, T., *On spherical functions for the unitary group (IV)*, Mem. Fac. Engrg. Hiroshima Univ. **3** (1967), 77-100.
- [19] Jetter, K.; Stöckler, J.; Ward, J. D., *Error estimates for scattered data interpolation on spheres*. Math. Comp. **68** (1999), n° 226, 733-747.

- [20] Jetter, K.; Stöckler, J.; Ward, J. D., *Norming sets and spherical cubature formulas*. Advances in Computational Mathematics (Guangzhou, 1997), 237–244, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 202, Dekker, New York, 1999.
- [21] Koornwinder, T. H., *The addition formula for Jacobi Polynomials II*. The Laplace type integral representation and the product formula, Math. Centrum Amsterdam, Report TW133, 1972.
- [22] Koornwinder, T. H., *The addition formula for Jacobi polynomials III*. Completion of the proof, Math. Centrum Amsterdam, Report TW135, 1972.
- [23] Krantz, S. G., *Function theory of several complex variables*. Reprint of the 1992 edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.
- [24] Lang, S., *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Co.. Inc., Reading, Mass. 1965.
- [25] Le Gia, Q. T., *Galerkin approximation for elliptic PDEs on sphere*, submetido para publicação, disponível para cópia em www.math.tamu.edu/~qlegia.
- [26] Le Gia, Q. T., *Solving parabolic PDEs on the unit spheres by collocation*, preprint, disponível para cópia em www.math.tamu.edu/~qlegia.
- [27] Menegatto, V. A., *Fundamental sets of functions on spheres*, Meth. Appl. Anal. **5**, n° 4 (1998), 387-398.
- [28] Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P., *Annihilating properties of complex spherical convolution operators*, submetido para publicação. Notas do ICMC-USP, Série Matemática, n° 169.
- [29] Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P., *Orthogonal basis for spaces of complex spherical harmonics*, submetido para publicação. Notas do ICMC-USP, Série Matemática, n° 170.
- [30] Morton, T. M.; Neamtu, M., *Error bounds for solving pseudodifferential equations on spheres by collocation with zonal kernels*. J. Approx. Theory **114**, n° 2 (2002), 242-268.

- [31] Müller, C., *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*. Applied Mathematical Sciences, 129. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [32] Narcowich, F. J., *Recent developments in approximation via positive definite functions*. *Approximation theory IX*, Vol. 2 (Nashville, TN, 1998), 221–242, Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998.
- [33] Reimer, M., *Constructive theory of multivariate functions. With an application to tomography*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1990.
- [34] Rudin, W., *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 241. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [35] Schneider, R.; Weil, W., *Über die Bestimmung eines konvexen Körpers durch die Inhalte seiner Projektionen*. Math. Z. 116 (1970), 338–248.
- [36] Schneider, R.; Weil, W., *Zonoids and related topics*. In: *Convexity and Its Applications*, p. 296–317. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.
- [37] Sloan, I. H.; Womersley, R. S., *Good approximation on the sphere, with application to geodesy and the scattering of sound*. Scientific and engineering computations for the 21st century—methodologies and applications (Shizuoka, 2001). J. Comput. Appl. Math. **149**, n° 1 (2002), 227–237.
- [38] Stein, E. M.; Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*. Princeton Mathematical Series, n° 32, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [39] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*. Fourth edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [40] Xu, Y., *Funk-Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls*. Bull. London Math. Soc. **32**, n° 4 (2000), 447–457.
- [41] Womersley, Robert S.; Sloan, I. H. *How good can polynomial interpolation on the sphere be?* Adv. Comput. Math. **14** (2001), n°. 3, 195–226.

Índice de Notações

$B[0, 1]$	disco unitário fechado em $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^q$	espaço vetorial complexo q -dimensional
Ω_{2q}	esfera unitária de $\mathbb{C}^q$
S^{2q-1}	esfera unitária em $\mathbb{R}^{2q}$
$\Omega_w^{\gamma,q}$	subesfera de Ω_{2q} de pólo w e raio $\sqrt{1 - \gamma\bar{\gamma}}$
d_{2q}	distância geodésica em S^{2q-1}
$d\sigma_q$	elemento de superfície sobre Ω_{2q}
$d\nu_q$	elemento de superfície sobre $B[0, 1]$
$d\tau_{2q}$	elemento de superfície sobre S^{2q-1}
D_{2q}	determinante na definição de $d\tau_{2q}$
$\Delta_{(2q)}$	laplaciano complexo
$\tilde{z}$	elemento de $\mathbb{C}^{q-1}$
$\hat{z}$	elemento de $\mathbb{C}^q$ da forma (z, z_q)
$\mathcal{C}(\Omega_{2q})$	espaço das funções contínuas sobre Ω_{2q}
$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$	espaço dos polinômios em z e em $\bar{z}$
$\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$	espaço dos polinômios homogêneos de grau m em z e de grau n em $\bar{z}$
$\mathcal{P}_{m,n}(\Omega_{2q})$	espaço dos polinômios de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ restritos a Ω_{2q}
$[A]$	espaço vetorial gerado por A
$\mathcal{N}_\beta$	espaço nativo associado à seqüência β
$\mathcal{H}^\mu(\alpha)$	espaço de tipo-Sobolev associado à seqüência α e ao parâmetro μ
$L^{p,q}(B[0, 1])$	espaço das funções p -integráveis em relação $d\nu_q$ sobre $B[0, 1]$
$L^p(\Omega_{2q})$	espaço das funções p -integráveis em relação a $d\sigma_q$ sobre Ω_{2q}
$\ \cdot\ _p$	norma de $L^p(\Omega_{2q})$
$\ \cdot\ _{p,q}$	norma de $L^p(B[0, 1])$
$\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$	conjunto dos polinômios de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ que são harmônicos
$G_{m,n}^{w,v}$	exemplo de um elemento de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ para $\langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle = 1$
$G_{m,n}^w$	função definida por $G_{m,n}^w = G_{m,n}^{w,\varepsilon_q}$
$\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$	conjunto dos polinômios de $\mathbb{H}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$ restritos à Ω_{2q}
$\delta(m, n)$	dimensão de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$

$d(m, n)$	dimensão de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$
$m \wedge n$	menor elemento do conjunto $\{m, n\}$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^q$	conjunto das q -uplas de números naturais
$\mathcal{M}$	conjunto das medidas de Radon sobre Ω_{2q}
$\mathbb{R}^q$	espaço euclidiano q -dimensional
$P_k^{(m-2)/2}$	polinômio de Gegenbauer de grau k associado a $(m-2)/2$
$P_k^{(\mu,\nu)}$	polinômio de Jacobi de grau k associado a μ, ν
$P_{m,n}^\mu$	polinômio no disco
$\mathcal{O}(2q)$	grupo dos operadores unitários sobre $\mathbb{C}^q$
ρ^*	adjunto do operador $\rho \in \mathcal{O}(2q)$
$\partial/\partial z$	derivada parcial em relação a z
$[\cdot, \cdot]$	produto interno em $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$
$\star$	produto interno usual em $\mathbb{R}^q$
$\mathcal{N}^*$	espaço dual contínuo do espaço vetorial $\mathcal{N}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno usual em $\mathbb{C}^q$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$	produto interno em $L^2(\Omega_{2q})$
$\widehat{f}_{m,n}(j)$	produto interno entre f e $Y_{m,n}^j$ de $L^2(\Omega_{2q})$
$[\![\cdot, \cdot]\!]$	produto interno em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$
$C_{m,n}^q$	constante de proporcionalidade entre $[\cdot, \cdot]$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$
$\lambda_{m,n}^{q-2}$	coeficiente da forma complexificada da Fórmula de Funk-Hecke
Γ	função gama
K	função de $L^{2,q}(B[0, 1])$ com expansão usando polinômios no disco
$\widetilde{K}$	função definida por $\widetilde{K}(z) = K(\bar{z})$, $z \in B[0, 1]$
Ψ_μ	operador de convolução entre medida e função σ_q -integrável
Ψ_K	operador de convolução entre o núcleo associado a K e função
δ_{ij}	função delta de Kronecker
δ_j	funcional pontual associado ao ponto w_j de Ω_{2q}
ε_j	j -ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{C}^q$
e_j	j -ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^{2q}$
Υ_q	aplicação bijetiva que identifica $\mathbb{C}^q$ e $\mathbb{R}^{2q}$
ω_q	área da superfície de Ω_{2q}

Índice Remissivo

- auto-funções do laplaciano, 19
- auto-valores do laplaciano, 19
- base ortogonal para $\mathcal{H}_{1,1}(\Omega_6)$, 51
 - ortonormal de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, 21
 - ortonormal para $(\mathbb{P}(\mathbb{C}^q), [\cdot, \cdot])$, 40
- calota de base $\Omega_w^{\gamma,q}$, 36
- comutatividade do operador Ψ_K , 31
- condição de amortecimento, 56
- convolução entre funções, 30
 - entre medida e função, 30
- dimensão de $\mathcal{H}_{m,n}(\Omega_{2q})$, 20
 - de $\mathbb{P}_{m,n}(\mathbb{C}^q)$, 18
- disco fechado em $\mathbb{C}$, 14
- elemento de superfície sobre S^{2q-1} , 8, 10
 - sobre $B[0, 1]$, 14
 - sobre Ω_{2q} , 8
 - sobre $\Omega_w^{\gamma,q}$, 9
- esfera unitária de $\mathbb{C}^q$, 7
 - de $\mathbb{R}^{2q}$, 8
- espaço nativo, 57
 - de polinômio harmônico em $\mathbb{C}^q$, 18
 - de polinômio homogêneo, 18
 - de tipo-Sobolev, 64
 - polinomial $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, 17
- exemplo de elementos em $\mathcal{N}_K$, 61
 - de polinômio harmônico, 49
- expansão condensada, 56
 - de Fourier em Ω_{2q} , 21
 - de Fourier no disco, 30, 56
- função p -integrável segundo σ_q , 14
 - p -integrável segundo ν_q , 14
 - w -zonal, 15
 - geradora, 49
- Fórmula da Adição, 23
 - complexa de Funk-Hecke, 27
 - de Rodrigues, 37
- identidade de Euler, 19
 - de Pitágoras, 45
- identificação de $\mathbb{C}^q$ com $\mathbb{R}^{2q}$, 8
- invariância de $d\sigma_q$, 8
 - de $d\tau_{2q}$, 8
 - dos harmônicos esféricos, 21
- laplaciano complexo, 18
- média de função sobre calota, 36
 - sobre faixa equatorial, 38
 - sobre subesferas, 33
- norma da malha, 23

- operador unitário, 7
- ortogonalidade dos harmônicos, 20
- polinômio de Jacobi, 22
 - harmônico, 18
 - harmônicos esférico, 19
 - homogêneo, 18
 - no disco, 22
- produto interno diferencial, 39
 - de $\mathbb{R}^{2q}$, 8
 - de $L^2(\Omega_{2q})$ e $L^{2,q}(B[0, 1])$, 14
 - de $\mathbb{C}^q$, 6
- projeção de vetor sobre subespaço, 67
- propriedades dos polinômios no disco,
 - 23
- representação polar de pontos de Ω_{2q} , 7
- subesfera de polo w , 7
- Teorema Binomial, 16
 - da Aproximação de Weierstrass, 17
 - de Comparação de Sturm, 35
- transformação multiplicativa, 56
 - pseudo-diferencial, 65