Existência de Atratores Globais para Equações Hiperbólicas O caso do Crescimento Subcrítico em Domínios Tridimensionais-

CLÁUDIA BUTTARELLO GENTILE

Orientador: PROF. DR. ALEXANDRE NOLASCO DE CARVALHO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".

USP - São Carlos
Dezembro de 1994

"O entendimento dos símbolos e dos rituais (simbólicos) exige do intérprete que possua cinco qualidades ou condições , sem as quais os símbolos serão para ele mortos e ele um morto para eles.

A primeira é a simpatia; não direi a primeira em tempo, mas conforme vou citando, e cito por graus de simplicidade. Tem o intérprete que sentir simpatia pelo símbolo que se propõe interpretar. A atitude cauta, a irônica, a deslocada - todas elas privam o intérprete da primeira condição para poder interpretar.

A segunda é a intuição . A simpatia pode auxiliá-la, se ela já existe, porém não criá-la. Por intuição se entende aquela espécie de entendimento com que se sente o que está além do símbolo, sem que se veja.

A terceira é a inteligência. A inteligência analisa, decompõe, reconstrói noutro nível o símbolo; tem, porém que fazê-lo depois que , no fundo, é tudo o mesmo. Não direi erudição, como poderia no exame dos símbolos, é o de relacionar no alto o que está de acordo com a relação que está embaixo. Não poderá fazer isso se a simpatia não tiver lembrado essa relação, se a intuição a não tiver estabelecido. Então a inteligência, de discursiva que naturalmente é, se tornará analógica, e o símbolo poderá ser interpretado.

A quarta é a compreensão, entendendo por esta palavra o conhecimento de outras matérias, que permitam o símbolo seja iluminado por várias luzes, relacionado com vários outros símbolos, pois que, no fundo, é tudo o mesmo. Não direi erudição, como poderia ter dito, pois a erudição é uma soma; nem direi cultura, pois a cultura é uma síntese; e a compreensão é uma vida. Assim certos símbolos não podem ser bem entendidos se não houver antes, ou no mesmo tempo, o entendimento de símbolos diferentes.

A quinta é a menos definível. Direi talvez, falando a uns, que é a graça, falando a outros, que é a mão do Superior Incógnito, falando a terceiros, que é o Conhecimento e Conversação do Santo Anjo da Guarda, entendendo cada uma destas coisas, que são a mesma da maneira como as entendem aqueles que delas usam, falando ou escrevendo."

Fernando Pessoa

Aos meus pais
Geraldo e Janair

Agradecimentos [1]

Agradeço ao Alexandre pela firmeza, pela disponibilidade e sobretudo pela paciência, ao Marcão principalmente pela força que me deu na ocasião do meu exame de qualificação, aos professores do ICMSC dos quais tive o prazer de ser aluna, aos professores da graduação que me apoiaram e incentivaram apesar das minhas hesitações, e em especial ao professor Henrique Lazari, pois foi sob a sua orientação que eu aprendi a aprender matemática.

Agradeço ainda aos meus pais por terem, muitas vezes em detrimento de si, possibilitado os meus estudos, aos meus irmãos Carla, Érika, Marco, Chico e Carol pelo apoio incondicional e pela forte amizade que nos une, a todos os bons amigos de dentro e de fora do departamento, particularmente à Sandra, pelo companheirismo nestes dois anos de São Carlos, e ao Valente, pela cumplicidade que às vezes me permite esquecer que a solidão é inerente ao homem.

[1] Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

Abstract

In this work we prove the existence of global attractors for the scalar linearly damped hyperbolic equation in a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$w_{tt} + \beta w_t = \triangle w + f(w) \quad \text{in } \Omega,$$

$$\omega = 0 \quad \text{in } \partial\Omega,$$

when the nonlinear term grows subcritically .

Resumo

Neste trabalho nós provamos a existência de atratores globais para equações escalares hiperbólicas com atrito linear em domínios suaves $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$w_{tt} + \beta w_t = \Delta w + f(w) \quad \text{em } \Omega,$$

$$\omega = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

com o termo não linear satisfazendo uma condição de crescimento subcrítico.

Conteúdo

1 Preliminares **3**

1.1 Semigrupos e Potências Fracionárias 3

1.2 Existência, Unicidade e Regularidade 9

1.3 Espaços de Sobolev 14

2 Atratores para semigrupos e equações de evolução **28**

3 Atratores Globais **39**

3.1 Introdução 39

3.2 Existência Local de Soluções 39

3.3 Existência Global e Limitação 45

3.4 Compacidade Assintótica e Existência de Atratores Globais . . . 49

Introdução

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado de $\mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave e considere o seguinte problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \beta u_t = \Delta u + f(u) \text{ em } \Omega, \\ &u = 0, \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Neste trabalho procuramos obter condições ótimas de crescimento para o termo não linear f sob as quais o problema (0.1) tenha um atrator global minimal, e de forma a não utilizar na prova da existência do mesmo a fórmula da variação das constantes não linear de Alekseev que requer que o semigrupo associado a (0.1) seja um C^1-semigrupo (veja Arrieta, Carvalho e Hale [1992]).

Como é usual assumimos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte condição de dissipação

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq -\delta < 0, \tag{0.2}$$

mas poderíamos assumir

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0, \tag{0.3}$$

sem prejuízo de qualquer resultado.

A condição de crescimento adotada é a condição chamada de subcrítica que é

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{f'(u)}{u^2} = 0. \tag{0.4}$$

A técnica utilizada na prova da existência de um atrator global para o problema (0.1) com termo não linear f satisfazendo (0.2) e (0.4) coincide com a técnica utilizada para o caso não crítico

$$|f'(u)| \leq c(1 + |u|^\gamma), \ \gamma < 2$$

em todos os pontos, com exceção da prova de que o termo não linear é compacto, onde utilizamos uma técnica parecida com a adotada em Arrieta, Carvalho e Hale [1992], decompondo a não linearidade em uma parte compacta e uma não compacta. No caso de crescimento subcrítico, contudo, esta decomposição pode ser feita com a parte não compacta tão pequena quanto se queira, possibilitando provar que esta não linearidade é ainda compacta.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 introduzimos os conceitos básicos indispensáveis ao desenvolvimento do trabalho, muitos dos quais sem prova. No Capítulo 2 apresentamos uma completa descrição de como obter existência de atratores globais para semigrupos, com todas as provas incluídas. Finalmente, no Capítulo 3 utilizamos os resultados dos capítulos precedentes para mostrar a existência de atratores globais para o problema (0.1) com as condições de crescimento e dissipação acima.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Semigrupos e Potências Fracionárias

Seja X um espaço de Banach real ou complexo e $L(X)$ o espaço das transformações lineares e contínuas de X em X com a norma usual

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X}} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}.$$

Definição 1.1 *Um semigrupo de operadores lineares limitados em X é uma família $\{T(t), 0 \leq t < \infty\} \subset L(X)$, satisfazendo:*

- $T(0) = I$;
- $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall\, t, s \geq 0.$

$T(t)$ é fortemente contínuo ou um C_0 semigrupo se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall\, x \in X.$$

Definição 1.2 *O gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$ é o operador $A : \mathbf{D}(A) \subset X \to X$, definido por*

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in \mathbf{D}(A),$$

e o domínio de A, $\mathbf{D}(A)$, é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais este limite existe.

O gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo é único, e se $T(t)$ e $S(t)$ são C_0 semigrupos com gerador infinitesimal A e B respectivamente, $A = B$ implica $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} &= AT(t), \\ T(0) &= I \end{cases} \tag{1.1}$$

onde A é um operador linear limitado. A solução de (1.1) é $T(t) = e^{At}$ que satisfaz as condições da Definição 1.1. Então a família de operadores $T(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, é um semigrupo fortemente contínuo e A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

Como o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo o determina unicamente, a partir daqui usaremos a notação e^{At} para indicar um C_0 semigrupo de operadores lineares limitados cujo gerador infinitesimal é A, mesmo que A não seja limitado.

Teorema 1.1 *Seja e^{At} um C_0 semigrupo em X. Então:*

(i) *Existem constantes $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0;$$

(ii) *Para $x \in \mathbf{D}(A)$, $e^{At}x \in \mathbf{D}(A)$, $t \to e^{At}x$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}e^{At}x = Ae^{At}x = e^{At}Ax, \quad t > 0;$$

(iii) *Para $x \in D(A)$, $t, s \in \mathbb{R}^+$,*

$$e^{At}x - e^{As}x = \int_s^t e^{A\tau}Axd\tau = \int_s^t Ae^{A\tau}xd\tau;$$

(iv) $\overline{\bigcap_{n\geq 1} \mathbf{D}(A^n)} = X.$

Se em (i) tivermos $\omega = 0$, dizemos que e^{At} é uniformemente limitado. Se ainda $M = 1$, então e^{At} é chamado um C_0 semigrupo de contrações .

Definição 1.3 *Se $A : \mathbf{D}(A) \to X$, $\mathbf{D}(A) \subset X$, é um operador linear fechado, o conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é invertível, i.e., $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X. O espectro de A, $\sigma(A)$, é o complementar de $\rho(A)$, ou seja, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. O operador $R(\lambda : A)$ é chamado operador resolvente de A.*

Seja X^* o espaço dual de X. Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x, x^* \rangle$. Se A é um operador linear em X, sua imagem numérica $S(A)$ é o conjunto

$$S(A) = \{\langle Ax, x^* \rangle : x \in D(A), \ \|x\| = 1, \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| = 1, \ \langle x, x^* \rangle = 1\}.$$

Teorema 1.2 *Seja A um operador linear fechado densamente definido em X. Seja $S(A)$ a imagem numérica de A e Σ o complementar de $\overline{S(A)}$ em $\mathbb{C}$. Se Σ_0 é uma componente conexa de Σ satisfazendo $\rho(A) \cap \Sigma_0 \neq \emptyset$, então o espectro de A está contido no complementar S_0 de Σ_0 e*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Para todo $x \in X$ definimos o conjunto $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \text{ e } \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Segue do Teorema de Hanh-Banach que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Observamos que se X é uniformemente convexo, então $F(x)$ é unitário.

Definição 1.4 *Um operador linear A é dissipativo se para todo $x \in \mathbf{D}(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Teorema 1.3 *(Lummer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio denso $\mathbf{D}(A)$ em X.*

(i) *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $\mathbf{R}(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é X, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.*

(ii) *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X então $\mathbf{R}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathbf{D}(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Definição 1.5 *Seja A um operador linear em X satisfazendo:*

- *para algum δ, $0 < \delta \leq \pi/2$,*

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\};$$

- *existe M tal que*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma_\delta, \quad \lambda \neq 0.$$

Então dizemos que $-A$ é um operador setorial.

Definição 1.6 *Seja A um operador linear fechado, densamente definido, satisfazendo*

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda : 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi\} \cup V, \tag{1.2}$$

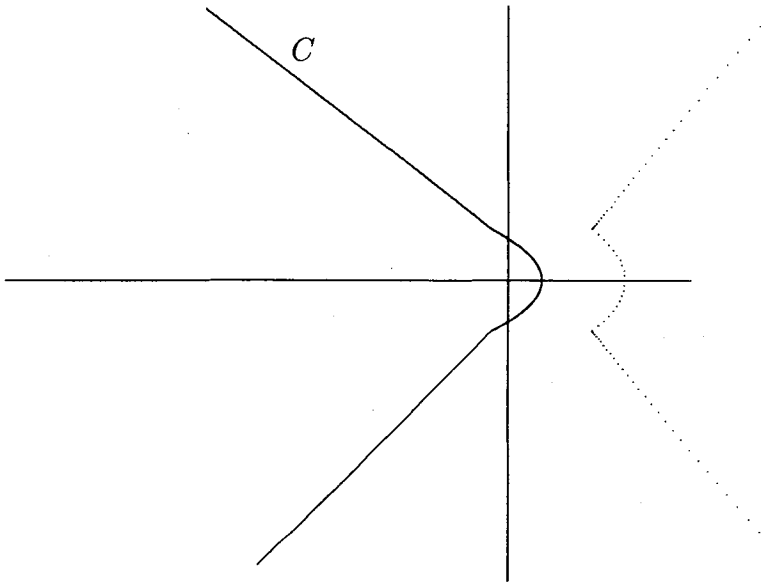
onde V é uma vizinhança do zero, e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^+. \tag{1.3}$$

Para A satisfazendo (1.2) e (1.3) e $\alpha > 0$, definimos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{-\alpha}(A - zI)^{-1} dz$$

onde C é um caminho no resolvente de A, de $\infty e^{-i\nu}$ à $\infty e^{i\nu}$, $\omega < \nu < \pi$, como abaixo:



Estamos supondo que $0 \in \rho(A)$, e portanto uma vizinhança V do zero pertence ao resolvente de A, principalmente por conveniência. A maioria dos resultados de potências fracionárias ainda valeriam mesmo que $0 \notin \rho(A)$.

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, a Definição 1.6 coincide com a definição clássica de $A^{-\alpha} = A^{-n} = (A^n)^{-1}$. Para $0 < \alpha < 1$ nós podemos deformar o caminho de integração no semi eixo real negativo percorrido nos dois sentidos e obter

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}(tI + A)^{-1} dt.$$

Definição 1.7 *Se $\omega < \pi/2$, i.e., se A é setorial, então $A^{-\alpha}$ é injetora $\forall\, \alpha > 0$, e definimos*

$$A^{\alpha} := (A^{-\alpha})^{-1}.$$

Teorema 1.4 *As potências fracionárias do operador A satisfazem:*

(i) *Se $\alpha > 0$, então A^{α} é um operador fechado;*

(ii) *$\alpha \geq \beta > 0$ implica $\mathbf{D}(A^{\alpha}) \subset \mathbf{D}(A^{\beta})$;*

(iii) *$\overline{\mathbf{D}(A^{\alpha})} = X$ para todo $\alpha \geq 0$;*

(iv) *Se α, β são reais, então*

$$A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}x,$$

para todo $x \in \mathbf{D}(A^{\gamma})$, onde $\gamma = max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

Proposição 1 *Seja H um espaço de Hilbert real com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Seja A um operador auto-adjunto, $A : D(A) \subset H \to H$, satisfazendo:*

(i) *$\overline{D(A)} = H$;*

(ii) *$\langle Au, u\rangle \geq \delta\|u\|^2$, $\delta > 0$.*

Então A é um operador setorial e A^{α} está bem definido, $\alpha > 0$.

Prova: Como H é um espaço de Hilbert, H é uniformemente convexo e o conjunto

$$F(x) = \{x^*,\ \ x^* \in H^* \text{ e } \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

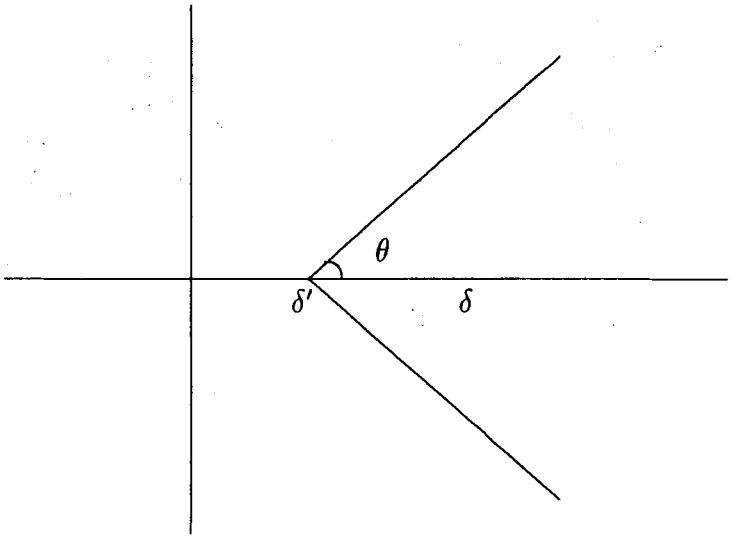
é unitário. Além disso, o único elemento de $F(x)$ é o funcional linear $x^* := \langle\, .\, , x\rangle$. Logo, a imagem numérica da A é

$$S(A) = \{\langle Ax, x^*\rangle = \langle Ax, x\rangle,\ \ \|x\| = 1\}.$$

Como por hipótese $\langle Ax, x\rangle \geq \delta\|x\|^2$, então $S(A) \subset [\delta, \infty)$.

Agora, A é sobrejetor, e pela hipótese (iii) A é injetor. Com isso, $0 \in \rho(A)$, e pelo Teorema 1.2, $\sigma(A) \subset [\delta, \infty)$ e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{d(\lambda : \overline{S(A)})},\ \ \lambda \in \rho(A). \tag{1.4}$$



Consideremos o setor $\Sigma_{\delta'} := \{\lambda + \delta', \lambda \in \mathbb{C}, \theta < |\arg \lambda| \leq \pi\}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

É claro que $\rho(A) \supset \Sigma_{\delta'}$ e, se $\lambda \in \Sigma_{\delta'}$, (1.4) está satisfeita.

Se $\lambda \in \Sigma_{\delta'}$ e $\mathrm{Re}\lambda \leq \delta$, então

$$d(\lambda : \overline{S(A)}) \geq |\lambda - \delta| > |\lambda - \delta| \sin\theta,$$

e se $\mathrm{Re}\lambda > \delta$,

$$d(\lambda : \overline{S(A)}) \geq |\lambda - \delta| \sin\beta \geq |\lambda - \delta| \sin\theta,$$

onde β é tal que $\theta < \beta < \pi/2$. Portanto, $\forall \lambda \in \Sigma_{\delta'}$, $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{C_0}{|\lambda - \delta|}$, onde $C_0 = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Como $\dfrac{|\lambda| + 1}{|\lambda - \delta|} \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 1$, dado $\varepsilon > 0$, existe M tal que $|\lambda| > M$ implica

$$|\lambda| + 1 \leq (\varepsilon + 1)|\lambda - \delta|,$$

e então existe C_1 tal que $|\lambda| > M$ implica

$$\frac{1}{|\lambda - \delta|} \leq \frac{C_1}{|\lambda| + 1} \quad \text{e} \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C_2}{|\lambda| + 1} \qquad C_2 = C_0 C_1.$$

Pela escolha de δ', existe $K \neq 0$ tal que $|\lambda - \delta| \geq K$, $\forall\, \lambda \in \Sigma_{\delta'}$. Se $|\lambda| \leq M$, então

$$|\lambda| + 1 \leq M + 1 \leq C_3 K \leq C_3 |\lambda - \delta|,$$

para alguma constante C_3. Logo

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C_0}{|\lambda - \delta|} \leq \frac{C_4}{|\lambda| + 1}, \quad C_4 = C_0 C_3.$$

Se $C = \max\{C_2, C_4\}$, então $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{C}{|\lambda| + 1}$. Portanto A satisfaz as condições (1.2) e (1.3) da Definição 1.6, com $\omega < \pi/2$, e A^α está bem definido. ■

1.2 Existência, Unicidade e Regularidade

Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo e^{At} em um espaço de Banach X, e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz uma condição de Lipschitz em u.

Definição 1.8 *Uma solução contínua da equação integral*

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds, \qquad t_0 \leq t \leq T$$

é chamada uma solução fraca do p.v.i. (1.5). Uma função u que é quase sempre diferenciável em $[t_0, T]$ tal que $u' \in L^1(t_0, T : X)$ é chamada solução forte do p.v.i. (1.5) se $u(t_0) = u_0$ e $u'(t) = Au(t) + f(t, u(t))$ quase sempre em $[t_0, T]$.

Suponhamos que f satisfaça uma condição de Lipschitz em u em subconjuntos limitados de X, uniformemente em t em intervalos limitados, isto é, $\forall \tau \geq t_0$ e $c \geq 0$, existe $L(c, \tau)$ tal que

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L(c, \tau)\|u - v\| \tag{1.6}$$

quaisquer que sejam $u, v \in X$ com $\|u\| \leq c$, $\|v\| \leq c$ e $t \in [t_0, \tau]$. Então temos existência e unicidade de solução fraca do p.v.i. (1.5) conforme o seguinte teorema:

Teorema 1.5 *Seja $f : [0, \infty) \times X \to X$ contínua em t para $t \geq 0$ e satisfazendo uma condição de Lipschitz em u em subconjuntos limitados de X, uniformemente*

em t em intervalos limitados como em (1.6). Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo e^{At} em X, então para todo $u_0 \in X$ existe um $t_{max} \leq \infty$ tal que o p.v.i.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

tem uma única solução fraca u em $[0, t_{max})$. Além disso, se $t_{max} < \infty$ então

$$\lim_{t \uparrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Prova: Começamos mostrando que para todo $t_0 \geq 0$, $u_0 \in X$, o p.v.i.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

tem, sob as hipóteses do nosso teorema, uma única solução fraca u no intervalo $[t_0, t_1]$, cujo comprimento é limitado por:

$$\delta = \delta(t_0, \|u_0\|) = \min\left\{1, \frac{\|u_0\|}{K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1) + N(t_0)}\right\},$$

onde $L(c, \tau)$ é a constante de Lipschitz de f, como em (1.6), e

$$\begin{aligned} M(t_o) &= \max\{\|e^{A(t)}\|,\ 0 \leq t \leq t_0 + 1\}, \\ K(t_0) &= 2\|u_0\| M(t_0), \\ N(t_0) &= \max\{\|f(t, 0)\|,\ 0 \leq t \leq t_0 + 1\}. \end{aligned}$$

Seja $t_1 = t_0 + \delta$. A aplicação

$$F : \mathbf{C}([t_0, t_1] : X) \to \mathbf{C}([t_0, t_1] : X)$$

definida por

$$(Fu)(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds, \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

leva a bola de raio $K(t_0)$ centrada em 0 de $\mathbf{C}([t_0, t_1] : X)$ em si mesma. Isto segue da seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|(Fu)(t)\| &= \|e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s,u(s))ds\| \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}\|(\|f(s,u(s)) - f(s,0)\| + \|f(s,0)\|)ds \\
&\leq M(t_0)\|u_0)\| + M(t_0)K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)(t-t_0) \\
&+ M(t_0)N(t_0)(t-t_0) \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| + M(t_0)[K(t_0)L(K(t_0),t_0+1) + N(t_0)](t-t_0) \\
&\leq M(t_0)\|u_0\| \\
&+ M(t_0)[K(t_0)L(K(t_0),t_0+1) + N(t_0)]\frac{\|u_0\|}{K(t_0)L(K(t_0),t_0+1) + N(t_0)} \\
&= 2M(t_0)\|u_0\| = K(t_0).
\end{aligned}
$$

Nesta bola, f satisfaz a condição uniforme de Lipschitz com constante $L = L(K(t_0), t_0 + 1)$, e

$$\|F(u)(t) - F(v)(t)\| \leq M(T_0)L\|u - v\|(t - t_0).$$

Com uma indução em n obtemos:

$$\|F^n(u)(t) - F^n(v)(t)\| \leq \frac{M(t_0)L(t-t_0)^n\|u-v\|}{n!} \leq \frac{(MLt_1)^n}{n!}\|u-v\|,$$

onde $M = M(t_0)$. Para n suficientemente grande, $\frac{(MLt_1)^n}{n!} < 1$, e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, F possui um único ponto fixo no intervalo $[t_0, t_1]$.

Do que acabamos de provar segue que se u é uma solução fraca de (1.7) no intervalo $[0, \tau]$, u pode ser estendida ao intervalo $[0, \tau + \delta]$ com $\delta > 0$, definindo $u(t) = w(t)$ em $[\tau, \tau + \delta]$, onde $w(t)$ é a solução da equação integral:

$$w(t) = e^{A(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{A(t-s)} f(s, w(s))ds, \qquad \tau \leq t \leq \tau + \delta.$$

Além disso, δ depende apenas de $\|u(\tau)\|$, $K(\tau)$ e $N(\tau)$.

Seja $[0, t_{\max})$ o intervalo maximal à direita do zero de existência da solução fraca u de (1.7). Se $t_{\max} < \infty$ então

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|u(t)\| = \infty,$$

pois caso contrário existiria uma sequência $t_n \uparrow t_{\max}$ tal que $\|u(t_n)\| \leq C \ \forall n$. Isto implicaria, pelo que acabamos de provar, que para cada t_n perto o suficiente de $t_{\max}$,

u definida em $[0, t_n]$ poderia ser estendida à $[0, t_n + \delta]$, onde $\delta > 0$ é independente de t_n. Então u poderia ser estendida além de t_{max}, contrariando sua maximalidade.

Para provar a unicidade da solução fraca local u de (1.7) notamos que se v é uma solução fraca de (1.7) com valor inicial v_0 então

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|e^{A(t-t_0)}u_0 - e^{A(t-t_0)}v_0\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\| ds \\ &\leq M\|u_0 - v_0\| + ML\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\| ds. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall

$$\|u(t) - v(t)\| \leq Me^{ML(t-t_0)}\|u_0 - v_0\| \leq Me^{ML\delta}\|u_0 - v_0\|.$$

Portanto se $u_0 = v_0$, então $u = v$. ■

Teorema 1.6 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja A o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo e^{At} em X. Se $f : [t_0, T] \to X$ é Lipschitz contínua em $[t_0, T]$, então para todo $u_0 \in \mathbf{D}(A)$ o p.v.i.*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

tem uma única solução forte em $[t_0, T]$ dada por

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds. \tag{1.9}$$

Prova: Se X é reflexivo e f é Lipschitz contínua em $[t_0, T]$, então f é diferenciável quase sempre, e $f' \in L^1(t_0, T, X)$. Seja

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds, \qquad t_0 \leq t \leq T.$$

$v(t)$ é diferenciável e $v(t) \in \mathbf{D}(A)$ quase sempre em $[t_0, T]$. Além disso

$$v'(t) \overset{q.s.}{=} Av(t) + f(t) \quad \in L^1(t_0, T, X).$$

Seja

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + v(t).$$

u(t) é diferenciável quase sempre em $[t_0, T]$ e

$$u'(t) \overset{q.s.}{=} Ae^{A(t-t_0)}u_0 + Av(t) + f(t) = Au(t) + f(t) \quad \in L^1(t_0, T, X).$$

Como $u(t_0) = u_0$, $u(t)$ é solução forte de (1.8), e é claro que u(t) satisfaz a equação integral (1.9). ■

Teorema 1.7 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo e^{At} em um espaço de Banach reflexivo X. Se $f : [t_0, T] \times X \to X$ é Lipschitz contínua em ambas as variáveis, $u_0 \in \mathbf{D}(A)$ e u é a solução fraca do problema do valor inicial (1.7), então u é a solução forte deste p.v.i..*

Prova: Suponhamos que f satisfaça

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq C(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|), \quad t_1, t_2 \in [t_0, T], \; x_1, x_2 \in X.$$

Seja $\|e^{At}\| \leq M$ e $\|f(t, u(t))\| \leq N$ para $t_0 \leq t \leq T$. Para $0 < h < T - t_0$ temos

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= e^{A(t+h-t_0)}u_0 - e^{A(t-t_0)}u_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t+h-s)} f(s, u(s))ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}[f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))]ds, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leq hM\|Au_0\| + hMN \\ &+ MC\int_{t_0}^{t}(h + \|u(s+h) - u(s)\|)ds \\ &\leq C_1 h + MC\int_{t_0}^{t}\|u(s+h) - u(s)\|ds, \end{aligned}$$

que pela Desigualdade de Gronwall implica

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq C_1 e^{TMC} h.$$

Logo, u é Lipschitz contínua. A continuidade Lipschitz de u combinada com a continuidade Lipschitz de f implica que $t \to f(t, u(t))$ é Lipschitz contínua em $[t_0, T]$. Do Teorema 1.6 segue que o p.v.i.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

tem uma única solução forte no intervalo $[t_0, T]$ satisfazendo

$$v(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds = u(t),$$

e então u é a solução forte de (1.10). ■

1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.9 *Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tem α-derivada de Sobolev se existe $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \phi v_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \phi, \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega),$$

onde $\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ denota as funções com suporte compacto contido em Ω e derivadas contínuas de todas as ordens, e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é tal que $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $|\alpha| = \sum \alpha_i$. Denotamos $D^\alpha u = v_\alpha$.

Proposição 2 *A derivada de Sobolev é única e satisfaz:*

(i) *Se $v = D^\alpha u$ em Ω, então $v = D^\alpha u$ em qualquer $\Omega' \subset \Omega$;*

(ii) *Se u_1 e u_2 têm α-derivada de Sobolev $D^\alpha u_1$, $D^\alpha u_2$ e c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, então $c_1 u_1 + c_2 u_2$ tem α-derivada de Sobolev e $D^\alpha(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 D^\alpha u_1 + c_2 D^\alpha u_2$;*

(iii) *Se u_m é uma sequência em $L^1_{loc}(\Omega)$ tal que existe $D^\alpha u_m \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\forall m$, e ainda*

$$u_m \xrightarrow{L^1_{loc}} u$$

$$D^\alpha u_m \xrightarrow{L^1_{loc}} v_\alpha,$$

então u tem α-derivada de Sobolev $D^\alpha u = v_\alpha$.

Definição 1.10 *Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e seja p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Definimos os Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ da seguinte forma:*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \exists\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma $\| \ \|_{m,p}$ dada por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

onde

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \text{ e}$$

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{k \geq 0 : |u(x)| \leq k \text{ quase sempre }\}.$$

Equivalentemente, $W^{m,p}(\Omega)$ é o completamento de $\{u \in \mathbf{C}^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ com relação à norma $\| \ \|_{m,p}$. $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{m,p}(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$, reflexivo e uniformemente convexo se $1 < p < \infty$.

$W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$. Usamos a notação $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Teorema 1.8 *(partições da unidade) - Seja Γ um compacto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $U_1, U_2, \ldots, U_k$ abertos satisfazendo $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Existem funções $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de tal forma que*

(i) $0 \leq \theta_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$ *e* $\sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1$;

(ii) *θ_i tem suporte compacto, supp $\theta_i \subset U_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, e supp $\theta_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.*

Se Ω é um aberto limitado e $\Gamma = \partial\Omega$, então $\theta_0|_\Omega \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.9 *Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;

(ii) *Existe uma constante C tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

onde p' é tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(iii) *Existe uma constante C tal que para todo aberto $\omega \subset\subset \Omega$ e todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ tem-se*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|,$$

onde $\tau_h u(x) = u(x+h)$. Além disso a constante C pode ser tomada como $C = \|\nabla u\|_{L^p}$ em (ii) e (iii).

Definição 1.11 *Dizemos que um aberto Ω é de classe $\mathbf{C}^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetora $H : Q \to U$ tal que*

- $H \in \mathbf{C}^m(\overline{Q})$;
- $H^{-1} \in \mathbf{C}^m(\overline{U})$;
- $H(Q_+) = U \cap \Omega$;
- $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$,

onde

$$\begin{aligned} Q &= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ |x'| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}; \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}^n_+; \\ Q_0 &= \{x \in Q; x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω aberto de classe $\mathbf{C}^1$ com fronteira limitada. Então*

$$H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq 6,$$

e a imersão é contínua. Se $1 \leq p < 6$, a imersão é compacta.

Teorema 1.11 *Seja Ω um aberto de classe $\mathbf{C}^2$ com $\partial\Omega$ limitada ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H^1_0(\Omega)$ satisfazendo:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega). \tag{1.11}$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, onde C é uma constante que só depende de Ω.

Prova:
Caso a: $\Omega = \mathbb{R}^n$.
Dado $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ seja

$$D_h u = \frac{1}{|h|}(\tau_h u - u), \quad \text{i.e.,} \quad D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|},$$

e seja $\varphi = D_{-h}(D_h u)$. $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$ e por (1.11)

$$\int_\Omega |\nabla D_h u|^2 = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi = \int_\Omega f D_{-h}(D_h u),$$

portanto,

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}.$$

Pelo Teorema 1.9 temos

$$\|D_{-h} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|\nabla D_h u\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \|D_h u\|_{H^1}$$

e então

$$\|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Em particular,

$$\left\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pelo Teorema 1.9 $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, e então $u \in H^2(\Omega)$. É claro que $\exists\, C$ tal que $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$.

Caso b: $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Seja $h \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Dizemos que h é paralelo à fronteira de Ω e denotamos $h \parallel \partial\Omega$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $h \parallel \partial\Omega$, então $\tau_h u \in H_0^1(\Omega)$. Seja $\varphi = D_{-h}(D_h u)$. Como no **caso a:**

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}.$$

Se $h \parallel \partial\Omega$ ainda temos

$$\|D_h v\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Portanto

$$\|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall\, h \parallel \partial\Omega. \tag{1.12}$$

Sejam $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n-1$, $h = (0, 0, \ldots, \overbrace{|h|}^{k^{\underline{a}}}, 0, \ldots, 0)$ e $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$. Temos

$$\int D_h \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \varphi = -\int u D_{-h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

e por (1.12)

$$\left| \int u D_{-h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}.$$

Passando o limite quando $|h| \to 0$ obtemos

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Falta mostrarmos que

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}\right| \leq C\|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega).$$

Notemos que a equação (1.11) implica em

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right| + |\int f\varphi| \leq C\|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}, \ \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega).$$

Logo temos

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq C\|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega), \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Então pelo Teorema 1.9, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, e portanto $u \in H^2(\Omega)$.

Caso geral: Ω limitado.

Seja $U_1, U_2, \ldots, U_k$ uma cobertura finita de $\partial\Omega$ e consideremos uma partição da unidade $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, subordinada a esta cobertura conforme o Teorema 1.8. É claro que $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$, e assim basta mostrarmos que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Primeiro demonstramos que $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$. Como $\theta_0 u|_\Omega \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$, a função $\theta_0 u$ estendida por 0 fora de Ω pertence a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Segue da equação (1.11) que $\theta_0 u$ satisfaz

$$\int_{\mathbf{R}^n} \nabla(\theta_0 u) \nabla\varphi = \int_{\mathbf{R}^n} \theta_0 f \varphi - \int_{\mathbf{R}^n} 2\nabla\theta_0 \nabla u \varphi - \int_{\mathbf{R}^n} (\Delta\theta_0) u \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Se $g = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \nabla u - (\Delta\theta_0) u$, então $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e segue portanto do **caso a** que $\theta_0 u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|\theta_0 u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}) \leq C'\|f\|_{L^2},$$

já que $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$., pela equação (1.11).

Por fim demonstramos que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ para $1 \leq i \leq k$. Seja $v = \theta_i u \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$. Como acima, v satisfaz

$$\int \nabla v \nabla\varphi = \int g\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i),$$

onde

$$g = \theta_i f - 2(\nabla\theta_i)(\nabla u) - (\triangle\theta_i)u,$$

e $g \in L^2(\Omega \cap U_i)$ com $\|g\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$. Se H é como na Definição 1.11 e $J = H^{-1}$, seja $\omega(y) = v(H(y))$, $y \in Q_+$ e $\omega(Jx) = v(x)$, $x \in \Omega \cap U_i$. Seja $\psi \in H_0^1(Q_+)$ e seja $\varphi(x) = \psi(Jx)$, $x \in \Omega \cap U_i$. Então $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ e

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial \omega}{\partial y_k}\frac{\partial J_k}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_\ell \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell}\frac{\partial J_\ell}{\partial x_j}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega\cap U_i} \sum_{j,k,\ell} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial y_k}\frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} dx \\ &= \int_{Q_+} \sum_{j,k,\ell} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial y_k}\frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} |JacH| dy.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \nabla \varphi = \int_{Q_+} \sum_{k,\ell} a_{k\ell}\frac{\partial \omega}{\partial y_k}\frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} dy,$$

onde

$$a_{k\ell} = \sum_j \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_\ell}{\partial x_j}|JacH|.$$

Notemos que $a_{k\ell} \in \mathbf{C}^1(\overline{Q_+})$ e que qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\sum_{k,\ell} a_{k\ell}\xi_k\xi_\ell = |JacH| \sum_j \left|\sum_k \frac{\partial J_k}{\partial x_j}\xi_k\right|^2 \geq \alpha|\xi|^2,$$

com $\alpha > 0$, uma vez que os jacobianos Jac H e Jac J são não singulares.

Por outro lado, temos

$$\int_{\Omega\cap U_i} g\varphi dx = \int_{Q_+} (g \circ H)\psi |JacH| dy$$

Portanto temos

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \int_{Q_+} a_{k,\ell}\frac{\partial \omega}{\partial y_k}\frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi dy \quad \forall\, \psi \in H_0^1(Q_+), \tag{1.13}$$

onde $\tilde{g} = (g \circ H)|JacH| \in L^2(Q_+)$.

Mostraremos que $\omega \in H^2(Q_+)$ e que $\|\omega\|_{H^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}$. Seja $\psi = D_{-h}(D_h\omega)$ com $h \parallel Q_0$ e $|h|$ pequeno o suficiente para que $\psi \in H_0^1(Q_+)$. Assim,

$$\sum_{k,\ell} \int_{Q_+} D_h\left(a_{k\ell}\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial y_\ell}(D_h\omega) = \int_{Q_+} \tilde{g}D_{-h}(D_h\omega).$$

Mas

$$\int_{Q_+} \tilde{g}D_{-h}(D_h\omega) \leq \|\tilde{g}\|_{L^2}\|D_{-h}(D_h\omega)\|_{L^2} \leq \|\tilde{g}\|_{L^2}\|\nabla D_h\omega\|_{L^2}.$$

Por outro lado

$$D_h\left(a_{k\ell}\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right)(y) = a_{k\ell}(y+h)\frac{\partial}{\partial y_k}D_h\omega(y) + (D_h a_{k\ell}(y))\frac{\partial\omega}{\partial y_k}(y),$$

e portanto temos

$$\sum_{k,\ell} \int_{Q_+} D_h\left(a_{k\ell}\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\right)\frac{\partial}{\partial y_\ell}(D_h\omega) \geq \alpha\|\nabla D_h\omega\|_{L^2}^2 - \|\omega\|_{H^1}\|\nabla D_h\omega\|_{L^2}.$$

Assim obtemos

$$\|\nabla D_h\omega\|_{L^2} \leq C_1(\|\omega\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2}) \leq C_2\|\tilde{g}\|_{L^2}.$$

Pela equação 1.13 e pela desiguadade de Poincaré temos $\|\omega\|_{L^1} \leq C_3\|\tilde{g}\|_{L^2}$. Concluímos como no **caso b** que

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_k}\frac{\partial\psi}{\partial y_\ell}\right| \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \quad \forall\,\psi \in \mathbf{C}_c^1(Q_+), \quad \forall\,(k,\ell) \neq (n,n) \tag{1.14}$$

Para concluirmos que $\omega \in H^2(Q_+)$ e $\|\omega\|_{H^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}$, falta demonstrarmos que

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial\omega}{\partial y_n}\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\right| \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \quad \forall\,\psi \in \mathbf{C}_c^1(Q_+).$$

Se substituirmos, na equação (1.13), ϕ por $\dfrac{1}{a_{nn}}\phi$, $\phi \in \mathbf{C}_c^1(Q_+)$, teremos

$$\int a_{nn}\frac{\partial\omega}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{1}{a_{nn}}\psi\right) = \int \frac{\tilde{g}}{a_{nn}}\psi - \sum_{(k,\ell)\neq(n,n)} \int a_{k\ell}\frac{\partial\omega}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(\frac{1}{a_{nn}}\psi\right),$$

quer dizer:

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial\omega}{\partial y_n}\frac{\partial\psi}{\partial y_n} &= \int \frac{1}{a_{nn}}\left(\frac{\partial a_{nn}}{\partial y_n}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y_n}\psi + \int \frac{\tilde{g}}{a_{nn}}\psi \\ &+ \sum_{(k,\ell)\neq(n,n)} \int \frac{\partial\omega}{\partial y_k}\left(\frac{\partial a_{k\ell}}{\partial y_\ell}\right)\frac{\psi}{a_{nn}} - \sum_{(k,\ell)\neq(n,n)} \int \frac{\partial\omega}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(\frac{a_{k\ell}}{a_{nn}}\psi\right).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Combinando (1.14) e (1.15) obtemos

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial \omega}{\partial y_n}\frac{\partial \psi}{\partial y_n}\right| \leq C(\|\omega\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2})\|\psi\|_{L^2} \quad \forall\, \psi \in \mathbf{C}_c^1(Q_+).$$

Portanto $\omega \in H^2(Q_+)$ e $\|\psi\|_{H^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}$. Voltando a $\Omega \cap U_i$, temos que $v = \theta_i u \in H^2(\Omega \cap U_i)$ e então $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ com $\|\theta_i u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$. ■

Teorema 1.12 *(Lax-Milgran) Seja H um espaço de Hilbert, e seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo $\varphi \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle v, \varphi\rangle \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u se caracteriza por:

$$u \in H \ \text{ e } \ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle = min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle\right\}.$$

Teorema 1.13 $\overline{\{u \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}}^{H^2} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$

Teorema 1.14 *Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e com fronteira suave do $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{A}$ o operador*

$$\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$$

$$(\mathcal{A}u)x = -(\triangle u)x = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2}\right)x, \quad x \in \Omega,$$

onde $X = L^2(\Omega)$ e $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Então:

(i) *$\mathcal{A}$ é fechado;*

(ii) *$\mathcal{A}$ é simétrico;*

(iii) *$\mathcal{A}$ é sobrejetor;*

(iv) *$\mathcal{A}$ é positivo;*

(v) *$\mathcal{A}$ tem inversa compacta.*

Prova:

(i) $\mathcal{A}u = -\triangle u = -(D^{\alpha_1}u + D^{\alpha_2}u + D^{\alpha_3}u)$, onde

$\alpha_1 = (2,0,0)$
$\alpha_2 = (0,2,0)$
$\alpha_3 = (0,0,2)$
Se $\{u_m\} \in \mathbf{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$u_m \xrightarrow{L^2} u \Rightarrow u_m \xrightarrow{L^1_{loc}} u$$

e $\exists\ \{D^{\alpha_i}u_m\},\ i = 1,2,3,$

$$D^{\alpha_i}u_m \xrightarrow{L^2} v_i \Rightarrow D^{\alpha_i}u_m \xrightarrow{L^1_{loc}} v_i,$$

então $v_i = D^{\alpha_i}u_i,\ i = 1,2,3$. Ou seja, se $u_m \xrightarrow{L^2} u$ e $\mathcal{A}u_m \xrightarrow{L^2} u$ então $v = \mathcal{A}u$.

(ii) Se $u,\ v \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$, então pelo Teorema 1.13 existe uma sequência $\{v_n\} \subset \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$, $v_n = 0$ em $\partial\Omega$ tal que $v_n \xrightarrow{H^2} v$, logo

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, v\rangle &= \langle \mathcal{A}u, \lim v_n\rangle = \lim\langle \mathcal{A}u, v_n\rangle \\
&= \lim\left(-\int_\Omega \triangle u v_n\right) = \lim\int_\Omega \nabla u \nabla v_n \\
&= \lim\left(-\int_\Omega u \triangle v_n\right) = \lim\langle u, \mathcal{A}v_n\rangle \\
&= \langle u, \lim \mathcal{A}v_n\rangle = \langle u, \mathcal{A}v\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

(iii) $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,2}(\Omega)}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{1,2} = \sum_{0\le|\alpha|\le 1} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle.$$

Seja $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx, u, v \in H_{01}(\Omega)$.

(a) $a(u,v)$ é bilinear:

$$\begin{aligned}
a(u_1 + u_2, v) &= \int_\Omega \nabla(u_1 + u_2)(x)\nabla v(x)dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_1(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega \nabla u_2(x)\nabla v(x)dx \\
&= a(u_1, v) + a(u_2, v).
\end{aligned}$$

Analogamente $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2)$.

(b) $a(u,v)$ é contínua:

$$\|a(u,v)\| = \left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx\right| \leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

(c) $a(u,v)$ é coerciva:

$a(v,v) = \int_\Omega \nabla v(x)\nabla v(x)dx = \|\nabla v\|_2^2 \geq C\|v\|_2^2$, pela desigualdade de Poincaré.

Assim, dada $h \in L^2(\Omega)$, seja $L_h : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$L_h(v) = \int_\Omega h(x)v(x)dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo teorema de Lax-Milgran existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = L_h(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega h(x)v(x)dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, como demonstramos no Teorema 1.11, $u \in H^2(\Omega)$, logo $u \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$, então:

$$\int_\Omega h(x)v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = -\int_\Omega \triangle u(x)v(x)dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto $h = -\triangle u = \mathcal{A}u$. Logo $\mathcal{A}$ é sobrejetora.

(iv) $\langle \mathcal{A}u, u\rangle = -\int_\Omega \triangle uu = \int_\Omega \nabla u\nabla u = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C\|u\|_{L^2}^2$,

pela desigualdade de Poincaré.

(v) Se $\|\ \|_G$ denota a norma do gráfico em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, então

$$\mathcal{A} : (\mathbf{D}(\mathcal{A}), \|\ \|_G) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é uma isometria. Logo, se B é um subconjunto limitado de $L^2(\Omega)$, $\mathcal{A}^{-1}(B)$ é um subconjunto limitado de $(\mathbf{D}(\mathcal{A}), \|\ \|_G)$. Como $(\mathbf{D}(\mathcal{A}), \|\ \|_G)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, então $\mathcal{A}^{-1}$ é compacta. ■

Corolário 1 *O operador* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$$

$$(\mathcal{A}u)x = -(\triangle u)x = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2}\right)x, \quad x \in \Omega,$$

onde $X = L^2(\Omega)$ *e* $\mathbf{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *é auto-adjunto.*

Combinando a Proposição 1 e o Teorema 1.14 temos que $\mathcal{A}^\alpha$ está bem definida $\forall\, \alpha > 0$.

Mostremos que $\mathbf{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = X^{1/2} = H_0^1(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto e auto-adjunto, então $L^2(\Omega)$ admite uma base Hilbertiana formada por auto vetores de $\mathcal{A}$. Ou seja $\forall\, u \in L^2(\Omega)$,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n,$$

onde ϕ_n é auto vetor de $\mathcal{A}$ qualquer que seja n. Se $u \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, \phi_n \rangle \phi_n,$$

onde λ_n é auto valor de $\mathcal{A}$ qualquer que seja n.

Cada $\phi_n \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ e então

$$\int_\Omega \nabla\phi_n \nabla\phi_m = -\int_\Omega \Delta\phi_n \phi_m = \int_\Omega \mathcal{A}\phi_n \phi_m = \lambda_n \int_\Omega \phi_n \phi_m = 0, \quad m \neq n,$$

e $\{\phi_n\}$ é uma sequência ortogonal em $H^1(\Omega)$. De forma análoga mostra-se que $\|\nabla\phi_n\|_{L^2} = \lambda_n^{1/2}$. Disto segue que, se $\|\ \|_{1/2}$ denota a norma do gráfico em $X^{1/2}$, então

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \nabla\phi_n\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2 \lambda_n = \|u\|_{1/2}^2.$$

Portanto

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \subset \overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}^{X^{1/2}} = X^{1/2}.$$

Por outro lado, se $u \in X^{1/2}$, e ϕ_n, λ_n são auto vetores e auto valores de $\mathcal{A}$ respectivamente, $n \geq 1$,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \quad \text{implica} \quad \mathcal{A}^{1/2} u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n.$$

De fato,

$$(\mathcal{A} - \lambda I)u = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u, \phi_1 \rangle \\ \langle u, \phi_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

então

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}u = \begin{pmatrix} (\lambda_1-\lambda)^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (\lambda_2-\lambda)^{-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u,\phi_1\rangle \\ \langle u,\phi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Logo,

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}\phi_n = (\lambda_n-\lambda)^{-1}\phi_n.$$

Agora, o caminho C na definição de $A^{-\alpha}$, se $\alpha < 1$, pode ser tomado como a reunião de círculos C_n em torno dos auto valores λ_n, $n \geq 1$.

Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-\alpha}\phi_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-\alpha}(\mathcal{A}-zI)^{-1}dz\phi_n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_m \oint_{C_m} z^{-\alpha}(\mathcal{A}-zI)^{-1}dz\phi_n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_m \oint_{C_m} z^{-\alpha}(\lambda_n-zI)^{-1}\phi_n dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} z^{-\alpha}(\lambda_n-zI)^{-1}\phi_n dz \\
&= \lambda_n^{-\alpha}\phi_n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{A}^{-\alpha}u = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-\alpha} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2^{-\alpha} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u,\phi_1\rangle \\ \langle u,\phi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Seja $u_k = \sum_{n=1}^{k}\langle u,\phi_n\rangle\phi_n$, $u_k \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned}\|u-u_k\|_{1/2} &= \|\mathcal{A}^{1/2}(u-u_k)\|_{L^2} = \|\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1/2}\langle u-u_k,\phi_n\rangle\phi_n\|_{L^2}\\ &= \|\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1/2}\langle u,\phi_n\rangle\phi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1/2}\langle\sum_{j=1}^{k}\langle u,\phi_j\rangle\phi_j,\phi_n\rangle\phi_n\|_{L^2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto

$$\|u-u_k\|_{H^1} = \|u-u_k\|_{X^{1/2}} \longrightarrow 0.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é fechado, $u \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, $X^{1/2} \subset H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 2

Atratores para semigrupos e equações de evolução

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento assintótico de semigrupos (em geral não lineares). Mais especificamente, o objetivo principal é dar condições suficientes sob as quais um semigrupo possui um atrator global minimal. Os resultados apresentados neste capítulo seguem Ladyzhenskaya [1991] e serão utilizados no capítulo seguinte para mostrar a existência de atratores globais para o semigrupo gerado pela equação das ondas com atrito linear e termo forçante com crescimento subcrítico.

Por todo este capítulo, X denota um espaço métrico completo.

Definição 2.1 *Um semigrupo $T(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, é uma família de operadores contínuos $T(t) : X \to X$ satisfazendo a seguinte propriedade:*

$$T(t_1)T(t_2)x = T(t_1 + t_2)x, \qquad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \in X.$$

Dizemos que o semigrupo $T(t)$ é pontualmente contínuo se para cada $x \in X$ a aplicação $t \to T(t)x$ de $\mathbb{R}^+ \to X$ é contínua. Se a aplicação $(t, x) \to T(t)x$ de $\mathbb{R}^+ \times X \to X$ é contínua, dizemos que o semigrupo $T(t)$ é contínuo.

Dado um semigrupo $T(t)$ e $A \subset X$ usaremos a seguinte notação :

$$\gamma^+(A) = \bigcup_{x \in A} \{T(t)x, t \in R^+\};$$

$$\gamma^+_{[t_1,t_2]}(A) = \bigcup_{x \in A} \{T(t)x, t \in [t_1, t_2]\};$$

$$\gamma^+_t(A) = \bigcup_{x \in A} \{T(\tau)x, \tau \in [t, \infty)\}.$$

Dizemos que $\gamma^+(A)$ é a semi-órbita positiva de A. Em particular se $A = \{x\}$, dizemos que $\gamma^+(x) = \gamma^+(\{x\})$ é a semi-órbita positiva de x.

O semigrupo $T(t)$ é limitado se para cada subconjunto limitado $B \subset X$, $\gamma^+(B)$ é limitado.

Definição 2.2 *Sejam A e M subconjuntos de X. Dizemos que A atrai M se dado $\varepsilon > 0$ existe $t_1 > 0$, t_1 dependendo de ε e M, tal que $T(t)(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)\ \forall\, t > t_1$, onde $\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \cup_{x\in A} B_\varepsilon(x)$, e $B_\varepsilon(x)$ é a bola de centro x e raio ε. $A \subset X$ atrai o ponto x se A atrai $\{x\}$.*

Definição 2.3 *Se $A \subset X$, o conjunto ω-limite $\omega(A)$ é definido por*

$$\omega(A) = \{y \in X \,:\, y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k,\ x_k \in A,\ t_k \to \infty\}.$$

Se $x \in X$, definimos o conjunto ω-limite $\omega(x) := \omega(\{x\})$.

Os conjuntos ω-limites podem ser descritos em termos de $\gamma_t^+(x) = \gamma_t^+(\{x\})$ e $\gamma_t^+(A)$ como mostra o lema a seguir:

Lema 2.1 *Se para cada $B \subset X$, $\overline{B}$ denota o fecho de B em X, temos:*

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(x)};$$

$$\omega(A) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)},$$

Prova: Se $y \in \omega(A)$ então

$$y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k, \quad x_k \in A \text{ e } t_k \to \infty.$$

Assim, para todo $t \geq 0$ existe k_0 tal que se $k \geq k_0$, $t_k \geq t$ e $\{T(t_k)x_k\}_{k\geq k_0}$ é uma sequência em $\gamma_t^+(A)$ convergindo para y. Portanto $y \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}$.

Por outro lado, se $y \in \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}$, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $y_k \in \gamma_k^+(A)$ tal que $d(y, y_k) < k^{-1}$. Como $y_k \in \gamma_k^+(A)$, $y_k = T(t_k)x_k$, com $t_k \geq k$ e $x_k \in A$. Logo $T(t_k)x_k \to y$ quando $k \to \infty$ e $y \in \omega(A)$. ■

Definição 2.4 *Um semigrupo $T(t)$ pertence à classe $\mathcal{K}$ se para cada $t > 0$ o operador $T(t)$ é compacto, i.e., dado um conjunto limitado $B \subset X$, $T(t)(B)$ é pré-compacto.*

Teorema 2.1 *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe K. Seja $A \subset X$ e suponhamos que exista $\tau \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma_\tau^+(A)$ é limitado. Então:*

(i) *$\omega(A)$ é não vazio e compacto;*

(ii) *$\omega(A)$ atrai A;*

(iii) *$\omega(A)$ é invariante, i. e., $T(t)(\omega(A)) = \omega(A)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$;*

(iv) *$\omega(A)$ é o menor conjunto fechado que atrai A;*

(v) *Se $T(t)$ é contínuo e A é conexo então $\omega(A)$ é conexo.*

Prova:

(i) $T(t)(\gamma_\tau^+(A)) = \gamma_{t+\tau}^+(A)$ é pré-compacto se $t > 0$, e $\gamma_{t_2+\tau}^+(A) \subset \gamma_{t_1+\tau}^+(A)$ para todo $t_2 > t_1$. Logo

$$\omega(A) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_t^+(A)} = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma_{t+\tau}^+(A)}$$

é a intersecção de uma família decrescente de conjuntos compactos. Portanto $\omega(A)$ é não vazio e compacto.

(ii) Suponhamos que $\omega(A)$ não atraia A. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $t_k \to \infty$, $t_k \geq \tau + 1$ tal que $T(t_k)(A) \not\subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(A))$, i.e., existe $x_k \in A$ tal que $T(t_k)x_k \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(A))$. Logo $\{T(t_k)x_k\} \subset T(\tau+1)(A) = T(1)(\gamma_\tau^+(A))$ e

$$d(T(t_k)x_k, \omega(A)) \geq \varepsilon \ \ \forall k. \tag{2.1}$$

Como $T(1)(\gamma_\tau^+(A))$ é pré-compacto , é possível extrair da sequência acima uma subsequência convergente $\{T(t_{k_j})x_{k_j}\}$, $k_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty$. Seja $y = \lim_{j\to\infty} T(t_{k_j})x_{k_j}$. Então $y \in \omega(A)$, contradizendo (2.1).

(iii) Se $x \in \omega(A)$, $x = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$, $x_k \in A$ e $t_k \to \infty$, então dado $t \in \mathbb{R}^+$,

$$T(t)x = T(t)(\lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k) = \lim_{k\to\infty} T(t+t_k)x_k.$$

Logo, $T(t)x \in \omega(A)$. Além disso, podemos assumir $1 + \tau + t \leq t_1 < t_2 < \dots$. Os pontos $y_k = T(t_k - t)x_k$, $k = 1, 2, \dots$, pertencem ao conjunto pré-compacto $\gamma_{\tau+1}^+(A)$. Então a sequência $\{y_k\}$ admite uma subsequência convergente $\{y_{k_j}\}$ e $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = y \in \omega(A)$. Portanto

$$x = \lim_{j\to\infty} T(t_{k_j})x_{k_j} = \lim_{j\to\infty} T(t)y_{k_j} = T(t)y \ \in \ T(t)(\omega(A)).$$

(iv) Suponhamos que exista F fechado, propriamente contido em $\omega(A)$ e atraindo A. F é compacto desde que $\omega(A)$ é. Seja $y \in \omega(A) \setminus F$ e seja $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que

$$\mathcal{O}_\varepsilon(y) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(F) = \emptyset. \tag{2.2}$$

Existe $t_\varepsilon > 0$ tal que $T(t)(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F)$, $t \geq t_\varepsilon$. Mas $y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$, $x_k \in A$ e $t_k \to \infty$. Então $T(t_k)(A) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ se t_k for suficientemente grande, o que contradiz (2.2).

(v) Sejam F_1 e F_2 fechados satisfazendo $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ e $\omega(A) = F_1 \cup F_2$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(F_1)} \cap \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(F_2)} = \emptyset$, e é claro que $\mathcal{O}_\varepsilon(\omega(A)) = \mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(F_2)$. Como $\omega(A)$ atrai A, existe $t_1 = t_1(\varepsilon, A)$ tal que $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(A))$, $t \geq t_1$. Agora, como supomos $T(t)$ contínuo e A conexo, então $\gamma_t^+(A)$ é conexo. Logo, para todo $t \geq t_1$, ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_1)$ ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_2)$. Portanto ou $\omega(A) = \bigcap_{t\geq t_1} \overline{\gamma_t^+(A)} \subset F_1$, ou $\omega(A) \subset F_2$, e assim, $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$. ■

Definição 2.5 *Uma órbita completa $\gamma(x)$ de um ponto $x \in X$ é uma curva $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, satisfazendo:*

- $x(t) \in X \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $x(0) = x$;
- $T(\tau)x(t) = x(t+\tau) \ \forall t \in \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que $\gamma^-(x) = \{x(t), -\infty < t \leq 0\}$ é uma semi-órbita negativa de x. Assim, $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Em geral, para $x \in X$ arbitrário, a órbita completa $\gamma(x)$ pode não existir, ou mesmo quando existe, pode não ser única. Porém, se A é um subconjunto invariante de X e os operadores $T(t)$ são invertíveis em A, então temos unicidade da órbita $\gamma(x)$ para cada $x \in A$ conforme o lema abaixo.

Lema 2.2 *Seja A um subconjunto invariante de X. Então para todo $x \in A$ existe uma órbita completa $\gamma(x)$. Se o semigrupo $T(t)$ é pontualmente contínuo, a órbita $\gamma(x)$ é uma curva contínua em A. Se os operadores $T(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, são invertíveis em A, então:*

(i) *por cada $x \in A$ passa uma única órbita $\gamma(x)$;*

(ii) *a família de operadores $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$, onde $T(t) := (T(-t))^{-1}$ se $t < 0$, satisfaz a propriedade de grupo $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Se A for compacto, então $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo de operadores contínuos. Este grupo é pontualmente contínuo se $\{T(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ for pontualmente contínuo, e é contínuo se $\{T(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ for contínuo.*

Desde que $T(1)(A) = A$, dado $x \in A$ existe uma sequência $\{x_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ de pontos de A satisfazendo $T(1)x_{-1} = x$ e $T(1)x_{-k-1} = x_{-k}$, $k > 0$. Unimos os pontos x_{-k-1} e x_{-k} pela curva $\{T(t)x_{-k-1}, t \in [0,1]\}$. A coleção de todas estas curvas forma $\gamma^-(x)$ e $x(t) := T(t+k+1)x_{-k-1}$, $t \in [-k-1,-k]$, $k = 0, 1, \ldots$.

Segue da construção de $\gamma^-(x)$ que, se o semigrupo T(t) for pontualmente contínuo então $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$ é contínua.

As afirmações do lema seguem então da construção da órbita $\gamma(x)$ e da definição de $T(t)$, $t < 0$.

Definição 2.6 *Dizemos que um subconjunto A de X é um atrator de pontos global (para o semigrupo $T(t)$) se A atrai cada ponto x de X. Se A atrai cada conjunto limitado $B \subset X$, então A é um atrator global.*

Definição 2.7 *Se existir um atrator de pontos global limitado para o semigrupo $T(t)$, então dizemos que $T(t)$ é pontualmente dissipativo. Se existir um atrator global limitado, dizemos que $T(t)$ é B-dissipativo.*

Definição 2.8 *Um conjunto $A \subset X$ é chamado absorvente se para todo $x \in X$ existe $t_1(x) \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t)x \in A$ para todo $t \geq t_1$. A é B-absorvente se para todo conjunto limitado $B \subset X$ existe $t_1(B) \in \mathbb{R}^+$, tal que $T(t)(B) \subset A$ para todo $t \geq t_1(B)$.*

Teorema 2.2 *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$. Suponhamos que $T(t)$ ou é B-dissipativo ou é pontualmente dissipativo e limitado. Então $T(t)$ tem um atrator global minimal $\mathcal{M}$, que é compacto e invariante. Além disso $\mathcal{M}$ é conexo se X for conexo.*

Prova: Se $T(t)$ é B-dissipativo e B_0 é seu atrator global limitado, então dado $\varepsilon_0 > 0$, $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_0)$ é um conjunto B-absorvente global limitado. Neste caso

$$\mathcal{M} = \omega(B_1) = \omega(\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_0)).$$

De fato, para todo conjunto limitado $B \subset X$ existe $t_B \geq 0$ tal que $T(t)(B) \subset B_1$ se $t \geq t_B$. Em particular, $T(t)(B_1) \subset B_1$ se $t \geq t_{B_1}$. Logo, $\gamma^+_{t_{B_1}}(B_1) \subset B_1$ é limitado. Pelo Teorema 2.1, $\omega(B_1)$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante, e $\omega(B_1)$ atrai B_1. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_1(\varepsilon) \geq 0$ tal que $T(t)(B_1) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B_1))$, $t \geq t_1(\varepsilon)$, e então, dado qualquer conjunto limitado $B \subset X$,

$$T(t)(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B_1)), \ \forall t \geq t_1(\varepsilon) + t_B.$$

Portanto $\omega(B_1)$ é um atrator global fechado. A minimalidade segue do fato que $\omega(B_1)$ é o menor conjunto fechado que atrai B_1.

Suponhamos agora que $T(t)$ é um semigrupo limitado e pontualmente dissipativo. Seja B_2 um atrator de pontos global limitado. Escolhemos $\varepsilon_2 > 0$ e definimos B_3

$:= \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2)$ e $B_4 := \gamma^+(B_3)$. Então $\mathcal{M} = \omega(B_3)$. De fato, desde que B_2 é um atrator de pontos global, para todo ponto $x \in X$ existe $t_x \geq 0$ tal que $T(t_x)x \in B_3$. Como B_3 é um conjunto aberto e o operador $T(t_x)$ é contínuo, segue que $T(t_x)(\mathcal{O}_{\varepsilon_x}x) \subset B_3$ para algum $\varepsilon_x > 0$. Então

$$T(t_x + t)(\mathcal{O}_{\varepsilon_x}x) \subset T(t)(B_3) \subset B_4 \quad \forall t \geq 0.$$

Agora, dado K compacto, seja $\{\mathcal{O}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)\}_{i=1,2,\ldots,r}$, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in K$ uma cobertura finita de K. Seja ε_K tal que $\mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K) \subset \cup_{i=1}^r \mathcal{O}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ e $t_K = \max_{1\leq i\leq r}\{t_{x_i}\} \geq 0$. Então

$$T(t)(\mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K)) \subset B_4 \quad \forall\, t \geq t_K. \tag{2.3}$$

Como $T(t)$ é limitado, segue do teorema 1 que todo conjunto limitado B é atraído por $\omega(B)$. Então $T(t)(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(\omega(B))$, $t \geq t_1(\varepsilon_1, B)$, $\forall \varepsilon_1 > 0$. Desde que $\omega(B)$ é compacto, podemos escolher $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\omega(B)}$ e segue de (2.3) que

$$T(t + t_1)(B) \subset B_4, \;\; t \geq t_{\omega(B)} \text{ e } t_1 = t_1(\varepsilon_1, B).$$

Portanto B_4 é um B-absorvente limitado global, e como demonstramos acima, $\omega(B_4) = \mathcal{M}$. Mas pelas definições de B_3 e B_4, $T(t)(B_4) = \gamma_t^+(B_3)$. Também

$$\gamma_t^+(B_4) = \gamma_t^+(\gamma^+(B_3)) = \bigcup_{s\geq t} T(s)(\gamma^+(B_3)) = \gamma_t^+(B_3).$$

Logo $\omega(B_4) = \omega(B_3)$. A minimalidade de $\omega(B_3)$ segue do Teorema 2.1. Finalmente, se existe um conexo $B \supset \mathcal{M}$, então $\mathcal{M}$ é conexo, desde que $T(t)(B)$ é conexo qualquer que seja $t \in \mathbb{R}^+$e, para $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{M} = T(t)(\mathcal{M}) \subset T(t)(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{M}), \;\; t \geq t_1(\varepsilon, B).$$

■

Como um corolário da prova do teorema anterior obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3 *Se o semigrupo $T(t)$ é limitado e pontualmente dissipativo então existe um conjunto limitado B_0 tal que para todo compacto K*

$$T(t)(\mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K)) \subset B_0 \;\; \forall\, t \geq t_K$$

com algum $\varepsilon_K > 0$ e $t_K \geq 0$. Além disso $T(t)(B_0) \subset B_0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 4 *Se $T(t)$ é um semigrupo de classe $\mathcal{K}$ limitado e pontualmente dissipativo ou B-dissipativo , então o atrator minimal $\mathcal{M}$ pode ser caracterizado como segue:*

(i) $\mathcal{M} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)$, *onde $\mathcal{B}$ é a coleção de todos os subconjuntos limitados de X;*

(ii) $\mathcal{M} = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \omega(K)$, *onde $\mathcal{K}$ é a coleção de todos os subconjuntos compactos em X;*

(iii) *$\mathcal{M}$ é a união de todas as órbitas completas limitadas em X;*

(iv) *$\mathcal{M}$ é a união de todas as órbitas completas pré-compactas em X;*

(v) *$\mathcal{M}$ é o conjunto invariante maximal em X;*

(vi) *$\widehat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$, onde $\widehat{\mathcal{M}}$ denota o atrator de pontos global fechado minimal.*

Prova:

(i) Todo conjunto limitado B é atraído para seu conjunto ω-limite $\omega(B)$. Isso é claro se $T(t)$ é limitado e, se $T(t)$ é B-dissipativo com atrator global limitado A, então

$$\gamma_\tau^+(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \in \mathcal{B},$$

se τ for grande o suficiente. Agora, $\omega(B)$ é invariante e $\mathcal{M}$ atrai $\omega(B)$, então $\omega(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{M})$, $\forall\,\varepsilon > 0$. Como $\omega(B)$ é fechado, $\omega(B) \subset \mathcal{M}$, e desde que $\mathcal{M}$ é invariante e compacto, $\omega(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Então $\mathcal{M} = \omega(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}}\omega(B) \subset \mathcal{M}$.

(ii) $\bigcup_{K\in\mathcal{K}}\omega(K) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}}\omega(B) = \mathcal{M} = \omega(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{K\in\mathcal{K}}\omega(K)$.

(iii) e (iv) Pelo lema 2.2, por cada ponto $x \in \mathcal{M}$ passa uma órbita completa $\gamma(x)$. Qualquer tal órbita está em $\mathcal{M}$ e então é limitada e pré-compacta. Portanto $\mathcal{M}$ está contido na reunião de todas as órbitas completas limitadas em X, e $\mathcal{M}$ está contido na reunão de todas as órbitas completas pré-compactas em X. Por outro lado, Seja $\gamma(x) = \{x(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ uma órbita completa limitada passando por algum $x = x_0 \in X$. Desde que $\gamma(x)$ é invariante e limitada e o semigrupo $T(t)$ é de classe $\mathcal{K}$, $\gamma(x)$ é pré-compacta. Logo, $B := \overline{\gamma(x)}$ é um conjunto compacto invariante. Portanto $\omega(B) = B$ e então $B = \omega(B) \subset \mathcal{M} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}}\omega(B)$.

(v) Se B é um conjunto invariante limitado, então $T(t)(B) = B$ e portanto $\omega(B) = B$ e $B \subset \mathcal{M}$. Uma vez que $\mathcal{M}$ é um conjunto invariante limitado $\mathcal{M}$ é o maior conjunto invariante limitado.

(vi) $\forall x \in X$, $\omega(x) \subset \widehat{\mathcal{M}}$, pois $\omega(x)$ é o menor fechado que atrai x. Por outro lado, $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$ é um atrator global fechado que contém $\widehat{\mathcal{M}}$ pelo caráter minimal de $\widehat{\mathcal{M}}$. ■

Definição 2.9 *Uma função de Liapunov é uma função contínua $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ estritamente decrescente ao longo de cada $\gamma^+(x)$, exceto em pontos estacionários z, $T(t)z = z$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$.*

Teorema 2.3 *Suponhamos que o semigrupo $T(t)$ pertence à classe $\mathcal{K}$ e $\gamma^+(x)$ é limitado para todo $x \in X$. Se para este semigrupo existe uma função de Liapunov $\mathcal{L}$, então seu atrator de pontos minimal global coincide com o conjunto $\mathcal{Z} = \{z : T(t)z = z, \ \forall\, t \geq 0\}$. Se $\mathcal{Z}$ for um conjunto limitado e $T(t)$ for limitado, então o semigrupo possui um atrator global minimal $\mathcal{M}$ compacto e invariante. Se X for conexo, então $\mathcal{M}$ é. Ambos os extremos de qualquer órbita completa $\gamma(x) \subset \mathcal{M}$ tendem para $\mathcal{Z}$ quando $t \to \pm\infty$ correspondentemente. Se X é conexo e $\mathcal{Z}$ não, então $\mathcal{Z}$ está propriamente contido em $\mathcal{M}$ e o atrator $\mathcal{M}$ consiste das órbitas completas que conectam pontos de $\mathcal{Z}$.*

Prova: Se $T(t)$ é de classe $\mathcal{K}$ e $\gamma^+(x)$ é limitado para todo $x \in X$, então qualquer que seja $x \in X$ o limite $\lim_{t\to\infty} \mathcal{L}(T(t)x) \equiv \ell_+(x)$ existe e $\mathcal{L}$ restrita à $\omega(x)$ é constante e igual à $\ell_+(x)$, pois se $y \in \omega(x), y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x$ e então $\mathcal{L}(y) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}(T(t_k)x) = \ell_+(x)$. Assim, $\omega(x) \subset \mathcal{Z}$ e $\mathcal{Z}$ atrai x. Como $\mathcal{Z}$ é fechado, $\widehat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{Z}$. Mas da definição de $\mathcal{Z}$ é claro que $\mathcal{Z} \subset \widehat{\mathcal{M}}$. Portanto $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{M}}$. Se $\mathcal{Z}$ é um conjunto limitado, então o semigrupo $T(t)$ é pontualmente dissipativo e, se $T(t)$ é limitado, existe um atrator global $\mathcal{M}$, de acordo com o Teorema 2.2. Para cada $x \in \mathcal{M}$, podemos tomar uma órbita completa $\gamma(x) = \{x(t), \ t \in \mathbb{R}, \ x(0) = x\} \subset \mathcal{M}$ e definir o conjunto α-limite:

$$\alpha(\gamma(x)) := \bigcap_{\tau\geq 0} \overline{\gamma_\tau^-(x)}, \text{ onde } \gamma_\tau^-(x) := \{x(t), t \leq \tau\}.$$

Este conjunto α-limite é não vazio, invariante e $x(t) \to \alpha(\gamma(x))$ quando $t \to -\infty$. Além disso $\alpha(\gamma(x)) \subset \mathcal{Z}$ desde que

$$\lim_{t\to-\infty} \mathcal{L}(x(t)) = \text{ constante } = \mathcal{L}|_{\alpha(\gamma(x))}.$$

Agora, se X é conexo e $\mathcal{Z}$ não, então $\mathcal{M}$, que é conexo, contém não somente pontos de $\mathcal{Z}$, mas órbitas completas conectando pontos de $\mathcal{Z}$. ■

Definição 2.10 *Dizemos que um semigrupo $T(t)$ pertence à classe $\mathcal{AK}$ se para todo conjunto limitado $B \subset X$ tal que $\gamma^+(B)$ é limitado, cada sequência da forma*

$$\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty},$$

onde $x_k \in B$ e $t_k \to +\infty$ é pré-compacta.

No que segue estaremos supondo que $T(t)$ é um semigrupo contínuo de classe $\mathcal{AK}$.

Proposição 5 *Para todo conjunto compacto K e $t \in \mathbb{R}^+$ o conjunto $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é pré-compacto.*

Prova: $[0,t] \times K$ é compacto, $(t,x) \to T(t)x$ é contínua. Portanto $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é imagem contínua de compacto. ■

Proposição 6 *Se K é compacto e $\gamma^+(K)$ é pré-compacto, então $\omega(K)$ é um conjunto invariante compacto não vazio atraindo K.*

Prova: Seja $K_1 := \overline{\gamma^+(K)}$.

$$T(t)(K_1) = T(t)(\overline{\gamma^+(K)}) \subset \overline{T(t)(\gamma^+(K))} = \overline{\gamma_t^+(K)} \subset \overline{\gamma^+(K)} = K_1.$$

Então temos um semigrupo $\{T(t),\, t \in \mathbb{R}^+,\, K_1\}$ de operadores contínuos $T(t)$ em K_1. Este semigrupo é de classe $\mathcal{K}$ uma vez que K_1 é compacto. Como $\gamma^+(K)$ é limitado, pelo Teorema 2.1, $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante, e atrai K. ■

Proposição 7 *Seja $T(t)$ um semigrupo contínuo de classe $\mathcal{AK}$. Suponhamos que K é um conjunto compacto tal que $\gamma^+(K)$ é limitado. Então $\gamma^+(K)$ é pré-compacto e portanto $\omega(K)$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante que atrai K.*

Prova: Seja $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, uma sequência arbitrária de pontos de $\gamma^+(K)$, i. e., $y_n = T(t_n)x_n$, com $x_n \in K$ e $t_n \in \mathbb{R}^+$. Se o conjunto $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado, então o conjunto $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ é pré-compacto pela Proposição 5. Se o conjunto $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ não é limitado, então nós podemos escolher uma subsequência $t_{n_j} \to \infty$ e o conjunto $\{T(t_{nj})x_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ é pré-compacto pois o semigrupo $T(t)$ é de classe $\mathcal{AK}$. ■

Proposição 8 *Seja $T(t)$ um semigrupo contínuo de classe $\mathcal{AK}$. Suponhamos que para algum conjunto limitado $B \subset X$, $\gamma^+(B)$ é limitado. Então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Além disso, $\omega(B)$ é conexo se B é conexo.*

Prova: Se $x \in B$, $\gamma^+(x)$ é limitado, pois $\gamma^+(x) \subset \gamma^+(B)$. Então $\omega(x) \neq \emptyset$, e portanto $\omega(B) \neq \emptyset$. Desde que

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}$$

é claro que $\omega(B)$ é fechado e limitado. Agora, como os operadores $T(t)$ são contínuos, $T(t)(\omega(B)) \subset \omega(B)$, pois se $x \in \omega(B)$, então

$$x = \lim_{k \to \infty} T(t_k)x_k, \text{ com } x_k \in B \text{ e } t_k \to \infty.$$

Portanto

$$T(t)x = \lim_{k \to \infty} T(t + t_k)x_k \in \omega(B).$$

Além disso

$$T(t_k)x_k = T(t)(T(t_k - t))x_k \text{ se } t_k \geq t,$$

e o conjunto $\{T(t_k - t)x_k\}_{t_k \geq t}$ é pré-compacto já que $T(t)$ é de classe $\mathcal{AK}$. Assim podemos escolher uma subsequência convergente $\{T(t_{k_j} - t)x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e, se $y = \lim_{j \to \infty} T(t_{k_j} - t)x_{k_j}$, $y \in \omega(B)$ e $T(t)y = \lim_{j \to \infty} T(t_{k_j})x_{k_j} = x$. Portanto $x \in$

$T(t)(\omega(B))$, logo $\omega(B) = T(t)(\omega(B))$, ou seja, $\omega(B)$ é invariante. Disto segue que cada sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $x_k \in \omega(B)$ pode ser representada como $\{x_k = T(k)\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $\tilde{x}_k \in \omega(B)$. Logo $\{x_k\}$ é pré-compacto e $\omega(B)$ é compacto.

Resta provar que $\omega(B)$ atrai B. Suponhamos que isto não ocorra. Então podemos escolher uma sequência $\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $x_k \in B$ e $t_k \to +\infty$ tal que

$$d(\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}, \omega(B)) \geq \varepsilon \tag{2.4}$$

para algum $\varepsilon > 0$. Como $T(t)$ é de classe $\mathcal{AK}$, $\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$ é pré-compacto. Desde que todos os pontos limites do conjunto $\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$ devem estar em $\omega(B)$, a distância entre $\omega(B)$ e $\{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty}$ é zero, o que contradiz (2.4). De forma análoga à demonstração do Teorema 2.1 mostra-se que B conexo implica $\omega(B)$ conexo. ■

Teorema 2.4 *Seja $T(t)$ um semigrupo contínuo limitado e pontualmente dissipativo de classe $\mathcal{AK}$. Então existe um atrator global minimal não vazio $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ é compacto e invariante e se X é conexo $\mathcal{M}$ também é conexo.*

Prova: Pela Proposição 3 existe um conjunto limitado B_0 tal que $\forall K$ compacto, $\exists\ \varepsilon_K > 0$ e $\exists\ t_K \geq 0$ satisfazendo

$$T(t)(\mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K)) \subset B_0 \quad \forall\, t \geq t_K$$

$$\text{e} \quad T(t)(B_0) \subset B_0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Desde que o semigrupo $T(t)$ é limitado, $\omega(B_0)$ é não vazio, compacto, invariante, e atrai B_0. Provemos que $\omega(B_0) = \mathcal{M}$. Se B é limitado então B é atraído pelo conjunto compacto $K := \omega(B)$. Então existe $t_{B_1} \geq 0$ talque

$$T(t)(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K) \ \forall t \geq t_1(B)$$

$$\text{e} \quad T(t + t_1(B)) \subset T(t)(\mathcal{O}_{\varepsilon_K}(K)) \subset B_0 \quad \forall t \geq t_K.$$

Sabemos que B_0 é atraído para $\omega(B_0)$. Então B é atraído para $\omega(B_0)$ também. De forma análoga à demonstração do Teorema 2.1, mostra-se que $\omega(B_0)$ é o menor fechado que atrai B_0, e portanto, $\omega(B_0) = \mathcal{M}$. Se X é conexo, podemos escolher um conjunto conexo limitado $B_1 \supset B_0$. Então $\omega(B_1)$ é conexo, e além disso $\omega(B_1) = \omega(B_0)$. De fato, $\omega(B_0) \subset \omega(B_1)$ pois $\omega(B_0)$ é o menor fechado que atrai B_0. Da mesma forma, $\omega(B_1) \subset \omega(B_0)$ já que $\omega(B_0)$ atrai B_1. ■

Teorema 2.5 *Se $T(t)$ é um semigrupo contínuo limitado de classe $\mathcal{AK}$ e possui uma função de Liapunov $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$, então todas as afirmações do Teorema 2.3 valem.*

A prova deste teorema é essencialmente a mesma do Teorema 2.3, uma vez que temos os resultados do Teorema 2.4.

Teorema 2.6 *Suponhamos que o semigrupo $T(t)$ está definido em um subconjunto $\mathcal{M}$ de um espaço de Banach X com norma $\| \|_X$. Suponhamos também que $T(t)$ pode ser decomposto na soma $W_t + U_t$, onde $\{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{M}\}$ é uma família de operadores tal que para todo conjunto limitado $B \in \mathcal{M}$*

$$\|W_t(B)\|_X \leq m_1(t)m_2(\|B\|_X) \tag{4}$$

onde $m_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua, $i = 1, 2$, $m_1(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e

$$\|B\|_X := sup_{x \in B}\|x\|_X.$$

Se ainda U_t é tal que $U_t(B)$ é pré-compacto para cada conjunto limitado $B \subset \mathcal{M}$, então $T(t)$ pertence à classe $\mathcal{AK}$.

Prova: Seja B tal que $\gamma^+(B)$ é limitado. Mostraremos que cada conjunto

$$B_1 := \{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{\infty},\ \ t_k \to \infty \text{ e } x_k \in B$$

pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε, qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Vamos escolher ℓ grande o suficiente para que

$$m_1(\ell) \leq \varepsilon[2m_2(\|B\|_X)]^{-1}$$

e decompor B_1 na soma $B_1' \cup B_1''$, onde

$$B_1' = \{T(t_k)x_k\}_{k=1}^{k_1},\ \ t_k < \ell \text{ e}$$

$$B_1'' = \{T(t_k)x_k\}_{k=k_1+1}^{\infty}\ \ t_{k_1+1} \geq \ell.$$

B_1'' é um subconjunto do conjunto $T(\ell)(\gamma^+(B))$ e qualquer elemento de $T(\ell)(\gamma^+(B))$ tem a forma $W_\ell(x) + U_\ell(x)$, $x \in \gamma^+(B)$. O conjunto $U_\ell(\gamma^+(B))$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\varepsilon/2$ desde que é pré-compacto, e as normas dos elementos de $W_\ell(\gamma^+(B))$ são menores que $\varepsilon/2$ pela escolha de ℓ. Portanto $T(\ell)(\gamma^+(B))$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε, e como $B_1 \subset T(\ell)(\gamma^+(B))$ a menos de um número finito de pontos, o mesmo acontece com B_1. ■

Capítulo 3

Atratores Globais

3.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos que a equação das ondas com atrito linear, sob certas condições, dá origem a um semigrupo não linear em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que possui um atrator global minimal. As condições são as seguintes: condição de fronteira de Dirichlet homogênea; termo não linear satisfazendo uma condição de dissipação para garantir a existência global de soluções, limitação e ponto-dissipação, e finalmente o termo não linear deve ainda satisfazer uma condição de crescimento para garantir a existência local de soluções e compacidade assintótica.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 provamos a existência local de soluções, na Seção 3 mostramos que o semigrupo associado à equação das ondas está globalmente definido e é limitado; por fim, na Seção 4, mostramos que o semigrupo é de classe $\mathcal{AK}$ e concluímos que este possui um atrator global.

3.2 Existência Local de Soluções

Seja $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f'(s)|}{|s|^2} = 0; \tag{3.1}$$

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^3} = 0. \tag{3.2}$$

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e com fronteira suave em $\mathbb{R}^3$. Defina $f^e(u) = f \circ u$, para $u \in H_0^1(\Omega)$. Dado $\beta > 0$, consideremos o seguinte problema:

$$u_{tt} + \beta u_t = \Delta u + f(u) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \tag{3.3}$$

com condição de fronteira

$$u(x) = 0 \text{ se } x \in \partial\Omega.$$

A equação (3.3) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -\beta u_t + \Delta u + f(u) \end{cases}$$

e este, por sua vez, escrevemos na seguinte forma abstrata:

$$w_t = \mathcal{C}w + \mathcal{F}(w) \tag{3.4}$$

onde $w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega) = X$, $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\beta \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ f^e \end{bmatrix}$, e

$$\mathcal{A} : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

$$\mathcal{A}\phi = -\Delta\phi, \quad \forall\, \phi \in \mathbf{D}(\mathcal{A}).$$

Nesta seção vamos mostrar que para cada dado inicial $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe uma solução de (3.4) $(u(t), v(t))$ definida em $\mathbb{R}^+$ e satisfazendo $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) = x$, e que esta solução é uma função contínua de (t, x).

Definição 3.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é limitada se a imagem de qualquer subconjunto limitado de X por f é um subconjunto limitado de Y. Dizemos que f é compacta se a imagem de um subconjunto limitado de X por f é um subconjunto pré-compacto de Y.*

Lema 3.1 *Seja $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e f satisfaz (3.2), então $f \circ u \in L^2(\Omega)$ e a aplicação*

$$f^e : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$f^e(u) = f \circ u,$$

é limitada. Adicionalmente, se (3.1) está satisfeita, f^e é Lipschitz em conjuntos limitados.

Observamos que é suficiente supor que f satisfaça a condição (3.1), uma vez que esta implica (3.2).

Prova: Seja $M > 0$ tal que $|f(u)| \leq |u|^3$ se $|u| > M$, e seja K_M tal que $|f(u)| \leq K_M$ se $|u| \leq M$. Se

$$A := \{x \in \Omega \ : \ |u(x)| \leq M\},$$

então

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |f \circ u(x)|^2 dx\right)^{1/2} &= \left(\int_A |f \circ u(x)|^2 dx + \int_{\Omega \setminus A} |f \circ u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_A K_M^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^6 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(K_M^2 \mu(A) + \|u\|_{L^6}^6\right)^{1/2} \\
&\leq K_1 + K_2 \|u\|_{H^1}^3 < \infty,
\end{aligned}$$

onde μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^3$, e K_1 e K_2 são constantes dependendo de Ω. Com isso, se $B \subset H_0^1(\Omega)$ é limitado, e K_B é tal que qualquer que seja $u \in B$, $\|u\|_{H^1} \leq K_B$, então

$$\|f \circ u\|_{L^2} \leq K_1 + K_2 \|u\|_{H^1}^3 \leq K_1 + K_2 K_B.$$

Portanto f^e é limitada, i.e., a imagem de um subconjunto limitado de $H_0^1(\Omega)$ por f^e é um subconjunto limitado de $L^2(\Omega)$. Além disso, Se $\widehat{M}$ é tal que $|f'(u)| \leq |u|^2$ para $|u| > \widehat{M}$ e $f'(u) \leq K_{\widehat{M}}$ se $u \in [-\widehat{M}, \widehat{M}]$, então

$$|f'(u)| \leq K_{\widehat{M}} + |u|^2 \leq K(1 + |u|^2), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

onde $K = \max\{1, K_{\widehat{M}}\}$. Então dados $u, v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f(u) - f(v)| &= \left|\int_u^v f'(s) ds\right| \\
&\leq K \left|\int_u^v (1 + s^2) ds\right| \\
&= K \left|v\left(1 + \frac{v^2}{3}\right) - u\left(1 + \frac{u^2}{3}\right)\right| \\
&= K |h(u,v)| |u - v|,
\end{aligned}$$

onde

$$h(u,v) = \frac{v\left(1 + \frac{v^2}{3}\right) - u\left(1 + \frac{u^2}{3}\right)}{u - v} = -\frac{1}{3}(v^2 + u^2 + uv + 3).$$

Notemos que $\|h(u,v)^2\|_{L^{3/2}} < \infty$. De fato,

$\|h(u,v)^2\|_{L^{3/2}}^{3/2} = \int_\Omega |\frac{1}{3}(v^2(x) + u^2(x) + u(x)v(x) + 3)|^3 dx$, e

$$
\begin{aligned}
(v^2+u^2+uv+3)^3 &= v^6 + u^6 + 6v^4u^2 + 6v^2u^4 \\
&+ 3uv^5 + 3u^5v + 7u^3v^3 + 9v^4 \\
&+ 9u^4 + 18uv^3 + 18u^3v + 27v^2 \\
&+ 27u^2 + 27u^2v^2 + 27uv + 27.
\end{aligned}
$$

Agora, todos os termos acima têm $\| \ \|_{L^1}$ finita pela desigualdade de Hölder e pelo fato de $H_0^1(\Omega)$ estar continuamente imerso em $L^p(\Omega)$, $p \leq 6$. Além disso, cada um destes termos é majorado por uma constante dependendo de B e de Ω, ou seja, existe C_B tal que $\|h(u,v)^2\|_{L^{3/2}} \leq C_B$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|f^e(u) - f^e(v)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega |h(u(x),v(x))|^2 |u(x)-v(x)|^2 dx \\
&\leq \|h(u,v)^2\|_{L^{3/2}} \|(u-v)^2\|_{L^3} \\
&\leq C_B \|u-v\|_{L^3}^2 \\
&\leq L_B \|u-v\|_{H^1}^2,
\end{aligned}
$$

onde L_B é igual à C_B vezes a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^3(\Omega)$. Como B é um subconjunto limitado arbitrário de $H_0^1(\Omega)$, concluímos que f^e é Lipschitz em conjuntos limitados. ■

Lema 3.2 *Seja X um espaço de Hilbert e $\mathcal{A}$ um operador auto-adjunto densamente definido em X, sobrejetor, e satisfazendo*

$$\langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq \delta \|x\|^2 \quad \forall\, x \in X,$$

para algum $\delta > 0$. Se $\mathcal{C}$ é o operador definido por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\beta \end{bmatrix},$$

$\mathbf{D}(\mathcal{C}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}) \times X^{1/2} \subset X^{1/2} \times X = Y$, *então $\mathcal{C}$ gera um C_0 semigrupo em Y.*

Prova: Como $\overline{\mathbf{D}(\mathcal{A})}^{X^{1/2}} = \mathbf{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = X^{1/2}$ e $\overline{X^{1/2}}^{X} = X$, é claro que $\overline{\mathbf{D}(\mathcal{C})} = Y$.

Pelo teorema de Lumer-Phillips, basta mostrarmos que $\mathcal{C}$ é dissipativo e existe λ_0 tal que $\mathbf{R}(\lambda_0 I + \mathcal{C}) = Y$, onde $\mathbf{R}(\lambda_0 I + \mathcal{C})$ denota a imagem de $(\lambda_0 I + \mathcal{C})$.

Notemos que $\mathcal{A}$ auto-adjunto implica $\mathcal{A}^{1/2}$ auto adjunto. De fato, $R(\lambda : -\mathcal{A}) = (\lambda I + \mathcal{A})^{-1}$ é trivialmente auto-adjunto se $\lambda \in \rho(-\mathcal{A}) \cap \mathbb{R}$. Agora,

$$\mathcal{A}^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{-1/2}(tI + \mathcal{A})^{-1}dt.$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^{-1/2}x, y\rangle &= \frac{1}{\pi}\langle \int_0^\infty t^{-1/2}(tI + \mathcal{A})^{-1}x dt, y\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{-1/2}\langle (tI + \mathcal{A})^{-1}x, y\rangle dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{-1/2}\langle x, (tI + \mathcal{A})^{-1}y\rangle dt \\
&= \langle x, \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^{-1/2}(tI + \mathcal{A})^{-1}y dt\rangle \\
&= \langle x, \mathcal{A}^{-1/2}y\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{A}^{-1/2}$ é auto-adjunto, e consequentemente $\mathcal{A}^{1/2}$ é auto-adjunto.

Y é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle_{X^{1/2}} + \langle x_2, y_2\rangle_{L^2}, \quad \forall\, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in Y = X^{1/2} \times X$$

e se

$$x, y \in X^{1/2},\ \langle x, y\rangle_{X^{1/2}} = \langle \mathcal{A}^{1/2}x, \mathcal{A}^{1/2}y\rangle_{L^2}.$$

A norma em Y proveniente do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ é denotada por $\|\ \|$. Se $y \in Y$, $\|y\| = 1$, desde que Y é Hilbert e então uniformemente convexo, o conjunto

$$F(y) := \{y^*;\ y^* \in Y^* \text{ e } \langle y, y^*\rangle = \|y\|^2 = \|y^*\|^2\}$$

é unitário, ou seja,

$$F(y) = \{\langle \cdot, y\rangle\}.$$

Então se $x \in \mathbf{D}(\mathcal{C}) = \mathbf{D}(\mathcal{A}) \times X^{1/2}, x = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}x, x\rangle &= \langle x_1, x_2\rangle_{X^{1/2}} - \langle \mathcal{A}x_1, x_2\rangle_{L^2} - \beta\langle x_2, x_2\rangle_{L^2} \\
&= \langle \mathcal{A}^{1/2}x_1, \mathcal{A}^{1/2}x_2\rangle_{L^2} - \langle \mathcal{A}x_1, x_2\rangle_{L^2} - \beta\langle x_2, x_2\rangle_{L^2} \\
&= \langle \mathcal{A}x_1, x_2\rangle_{L^2} - \langle \mathcal{A}x_1, x_2\rangle_{L^2} - \beta\langle x_2, x_2\rangle_{L^2} \\
&= -\beta\|x_2\|^2_{L^2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{C}$ é dissipativo. Além disso, seja $(y_1, y_2) \in Y = X^{1/2} \times X$ e seja λ_0 tal

que $\lambda = \lambda_0^2 + \lambda_0\beta \in \rho(-\mathcal{A})$. Então $(\lambda I + \mathcal{A})^{-1} \in L(X)$. Logo existe $x_1 \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$(\lambda I + \mathcal{A})x_1 = (\lambda_0 + \beta)y_1 + y_2.$$

Então

$$\lambda_0^2 x_1 + \lambda_0\beta x_1 + \mathcal{A}x_1 - \lambda_0 y_1 - \beta y_1 = y_2.$$

Se $x_2 = \lambda_0 x_1 - y_1$,

$$(\lambda_0 I - \mathcal{C})(x_1, x_2) = (\lambda_0 x_1 - x_2, (\lambda_0 + \beta)x_2 + \mathcal{A}x_1) = (y_1, y_2).$$

Portanto $(\lambda_0 I + \mathcal{C})$ é sobrejetor e o resultado segue. ■

Com isso, pelo Teorema 1.14 e o Corolário 1.3 temos que o operador

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\beta \end{bmatrix},$$

$\mathbf{D}(\mathcal{C}) = H^2 \cap H_0^1 \times H_0^1 \subset H_0^1 \times L^2 = Y$, onde $\mathcal{A}$ é o operador

$$\mathcal{A} : H^2 \cap H_0^1 \to L^2$$

$$(\mathcal{A}u)x = -(\triangle u)x$$

gera um C_0 semigrupo em Y. Agora, como f^e é Lipschitz em conjuntos limitados, é claro que o mesmo ocorre com $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ f^e \end{bmatrix}$.

Assim, pelo Teorema 1.5, para cada valor inicial $w_0 = (u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ o p.v.i.

$$\begin{cases} w_t &= \mathcal{C}w + \mathcal{F}(w) \\ w(0) &= w_0 \end{cases}$$

tem uma única solução fraca $w(t)$ cujo intervalo maximal $[0, t_{\max})$ de definição é finito somente se

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|w(t)\| = \infty.$$

Se ainda $(u_0, v_0) \in \mathbf{D}(\mathcal{C})$, pelo Teorema 1.7 $w(t)$ é solução forte deste p.v.i.. Além disso, as soluções dependem continuamente dos dados iniciais.

Suponhamos que

$$t_{\max} = \infty, \ \forall\, (u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Então a família de operadores $T(t) : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$T(t)\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{\mathcal{C}t}\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\mathcal{C}(t-s)}\mathcal{F}\begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} ds \tag{3.5}$$

define semigrupo em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Mostraremos a seguir que existe uma função de Liapunov associada a $T(t)$.

3.3 Existência Global e Limitação

Nesta seção mostramos que (3.4) define um semigrupo limitado de operadores. Isto é obtido utilizando-se uma função de Liapunov apropriada.

Lema 3.3 *Seja* $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\mathcal{L}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\phi(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \psi^2(x)dx - \int_\Omega F(u(x))dx$$

onde

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds$$

e f *satisfaz (3.2) e a condição de dissipação :*

$$\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq -\delta < 0.$$

Então $\mathcal{L}$ *é uma função de Liapunov para o semigrupo* $T(t)$ *definido acima.*

Prova: Seja B um subconjunto limitado de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e sejam (ϕ_1, ψ_1), $(\phi_2, \psi_2) \in B$. Existem constantes C_1 e C_2 satisfazendo:

$$|\mathcal{L}(\phi_1, \psi_1) - \mathcal{L}(\phi_2, \psi_2)| \leq C_1\|\phi_1 - \phi_2\|_{H_0^1} + C_2\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2}.$$

Para mostrarmos isto basta observarmos que se ϕ_1 e ϕ_2 pertencem a um subconjunto B_1 de $H_0^1(\Omega)$, B_1 limitado, então existe uma constante L_{B_1} satisfazendo:

$$|\int_\Omega F(\phi_1(x))dx - \int_\Omega F(\phi_2(x))dx| \leq L_{B_1}\|\phi_1 - \phi_2\|_{H_0^1}. \tag{3.6}$$

Isso realmente ocorre, pois

$$\begin{aligned} |F(\phi_1) - F(\phi_2)| &= |\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(s)ds| \leq K|\int_{\phi_1}^{\phi_2} (|s|^4 + 1)ds| \\ &\leq K\left|\phi_2 - \phi_1 + \frac{\phi_2^5}{5} - \frac{\phi_1^5}{5}\right| = K\, h(\phi_1, \phi_2)|\phi_1 - \phi_2|, \end{aligned}$$

onde $h(\phi_1, \phi_2)$ é um polinômio de grau 4 em ϕ_1, ϕ_2.

Com isso,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega F(\phi_1) - F(\phi_2)\right| &\leq \int_\Omega |h(\phi_1, \phi_2)||\phi_1 - \phi_2| \\ &\leq \|h(\phi_1, \phi_2)\|_{L^{6/5}}\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^6} \\ &\leq \|h(\phi_1, \phi_2)\|_{L^{6/5}}\|\phi_1 - \phi_2\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Agora se $\phi_1, \phi_2 \in B_1 \subset H_0^1(\Omega)$, B_1 limitado, então existe uma constante L_{B_1} satisfazendo (3.6) pois

$$\|h(\phi_1, \phi_2)\|_{L^{6/5}} \leq \sum_{i=0}^{4} c_i \|\phi_1^i \phi_2^{4-i}\|_{L^{6/5}} + C$$

e cada um dos termos acima tem norma $\| \ \|_{L^1}$ finita e majorada por uma constante dependendo de B_1 e de Ω, pela desigualdade de Hölder e pelo fato de $H^1(\Omega)$ estar continuamente imerso em $L^p(\Omega)$, $p \leq 6$.

Logo temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\phi_1, \psi_1) - \mathcal{L}(\phi_2, \psi_2)| &\leq \left|\frac{1}{2}\left[\|\phi_1\|_{H_0^1}^2 - \|\phi_2\|_{H_0^1}^2\right]\right| \\
&+ \left|\frac{1}{2}\left[\|\psi_1\|_{H_0^1}^2 - \|\psi_2\|_{H_0^1}^2\right]\right| \\
&+ \left|\int_\Omega |F(\phi_1) - F(\phi_2)|\right| \\
&\leq C_1\|\phi_1 - \phi_2\|_{H_0^1} + C_2\|\psi_1 - \psi_2\|_{H_0^1},
\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{L}$ é Lipschitz em conjuntos limitados, logo $\mathcal{L}$ é contínua.

$\mathcal{L}$ é diferenciável quase sempre ao longo de soluções .De fato, se $(u_0, v_0) \in D(\mathcal{C})$ temos que

$$u_{tt} + \beta u_t = \Delta u + f(u) \text{ quase sempre em } (0, t_{\max}) \times \Omega,$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u, u_t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2(x)dx - \int_\Omega F(u)(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\langle -\Delta u, u\rangle + \frac{1}{2}\langle u_t, u_t\rangle - \langle F(u), 1\rangle,
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(u, u_t) &= \langle -\Delta u, u_t\rangle + \langle u_{tt}, u_t\rangle - \langle f(u), u_t\rangle \\
&= \langle -\Delta u + u_{tt} - f(u), u_t\rangle \\
&= \langle -\beta u_t, u_t\rangle = -\beta \|u_t\|^2.
\end{aligned}$$

Então se $(u_0, v_0) \in \mathbf{D}(\mathcal{C}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{L}(T(t_1)(u_0, v_0)) \leq \mathcal{L}(T(t_2)(u_0, v_0)), \quad t_1 \geq t_2.$$

Como $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ é denso em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é claro que $\mathcal{L}$ decresce ao longo de cada órbita e portanto $\mathcal{L}$ é uma função de Liapunov para o semigrupo $T(t)$. ■

Notemos que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|F(s)|}{|s|^4} = 0.$$

De fato dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante c_ε tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{|s|\to\infty} \frac{|F(s)|}{|s|^4} &\leq \lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{s^4}\int_0^s |f(t)|dt \\
&\leq \lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{s^4}\int_0^s (\varepsilon t^3 + c_\varepsilon)dt \\
&= \lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{s^4}\left(\frac{\varepsilon s^4}{4} + c_\varepsilon s\right) \\
&= \lim_{|s|\to\infty} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{c_\varepsilon}{s^3} = \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

se $s > 0$, e analogamente se $s < 0$. Portanto, como Ω é limitado, existe uma constante c satisfazendo:

$$|F(u)| \leq c(|u|^4 + 1) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |F(u)| \leq c\int_\Omega |u|^4 + c|\Omega| < \infty,$$

onde $|\Omega|$ denota o volume de Ω. Então

$$\left|\int_\Omega F(\phi)(x)dx\right| \leq c\|\phi\|_{L^4}^4 + c|\Omega| \leq \tilde{c}\|\phi\|_{H_0^1}^4 + c|\Omega|.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\phi,\psi)| &\leq \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 + \left|\int_\Omega F(\phi)(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\phi\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 + \tilde{c}\ \|\phi\|_{H_0^1}^4 + c|\Omega|.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{f(u)}{u} < -\delta \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{f(u) + \delta\, u}{u} \leq 0.$$

Então existe $M_\varepsilon = M$ tal que $\dfrac{f(u) + \delta u}{u} \leq \varepsilon$ se $|u| \geq M$, e

$$\frac{f(u) + \delta u}{u} \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left[\frac{f(u) + \delta u}{u} - 2\varepsilon\right] \leq -\varepsilon.$$

Logo,

$$\int_0^u f(s)ds + \frac{\delta u^2}{2} - \varepsilon u^2 = \int_0^u \left[\frac{f(s)+\delta s}{s} - 2\varepsilon\right] sds \leq \int_0^M \left[\frac{f(s)+\delta s}{s} - 2\varepsilon\right] sds \leq K_\varepsilon,$$

onde K_ε é uma constante dependendo de ε.

Analogamente, se $u > 0$, $u \leq -M$,

$$\left[\frac{f(u)+\delta u}{u} - 2\varepsilon\right] \leq -\varepsilon \quad \text{e}$$

$$\int_0^u \left[\frac{f(s)+\delta s}{s} - 2\varepsilon\right] sds \leq \int_0^{-M} \left[\frac{f(s)+\delta s}{s} - 2\varepsilon\right] sds \leq \widehat{K_\varepsilon}.$$

Se $C_\varepsilon = \max\{K_\varepsilon, \widehat{K_\varepsilon}\}$ temos

$$\int_0^u f(s)ds + \frac{\delta u^2}{2} - \varepsilon u^2 \leq C_\varepsilon, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$F(u) \leq C_\varepsilon + \varepsilon u^2 - \frac{\delta u^2}{2} \leq C_\varepsilon + \varepsilon u^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\phi,\psi) &\geq \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2} - \int_\Omega |F(\phi)(x)|dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2} - \varepsilon\|\phi\|^2_{L^2} - C_\varepsilon|\Omega| \\
&\geq C_1(\|\phi\|^2_{H_0^1} + \|\psi\|^2_{L^2}) - C_2,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 dependem de ε e de Ω. Portanto

$$C_1\|(\phi,\psi)\| - C_2 \leq \mathcal{L}(\phi,\psi) \leq \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2} + \tilde{c}\|\phi\|^4_{H_0^1} + c|\Omega|.$$

Desde que $\mathcal{L}$ decresce ao longo de soluções ,

$$\mathcal{L}(T(t)(\phi,\psi)) \leq \mathcal{L}(\phi,\psi), \quad \forall\,(\phi,\psi) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Concluímos que $T(t)$ é um semigrupo limitado, pois se B é um subconjunto limitado de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, e K_B é um limitante superior de $\|\phi\|_{H_0^1}$, $\|\psi\|_{L^2}$, $(\phi,\psi) \in B$, então:

$$C_1\|T(t)(\phi,\psi)\| - C_2 \leq \mathcal{L}(T(t)(\phi,\psi)) \leq \mathcal{L}(\phi,\psi) \leq C_B,$$

onde $C_B = \frac{1}{2}K_B^2 + \frac{1}{2}K_B^2 + \tilde{c}K_B^4 + c|\Omega|$.

Com isso, é claro que, para cada $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução fraca de

$$\begin{cases} w_t &= \mathcal{C}w + \mathcal{F}(w) \\ w(0) &= (u_0, v_0) \end{cases}$$

está globalmente definida, pois como já observamos, o intervalo maximal $[0, t_{\max})$ de definição da solução $w(t)$ do p.v.i. acima é finito somente se

$$\lim_{t \to t_{\max}} \|w(t)\| = \infty.$$

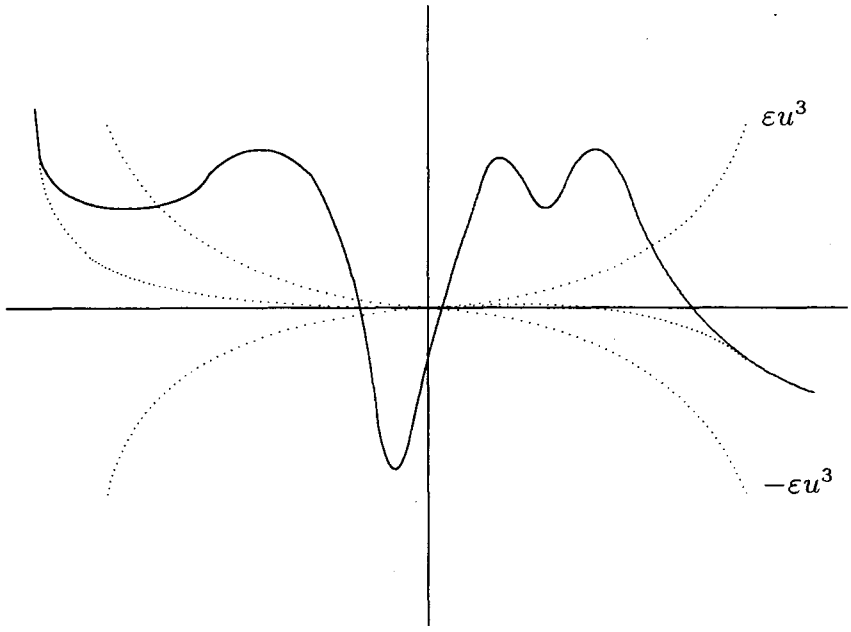
o que não é possível uma vez que $T(t)$ é limitado. Portanto o semigrupo $T(t)$ está bem definido.

3.4 Compacidade Assintótica e Existência de Atratores Globais

Nesta seção mostramos que o semigrupo associado a (3.4) é de classe $\mathcal{AK}$ o que juntamente com os resultados da Seção 3 implicam a existência de um atrator global para o semigrupo associado a (3.4).

Lema 3.4 *Se f satisfaz as condições (3.2) e (3.1) e $f^e : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é dada por $f^e(u) = f \circ u$, então f^e é compacta.*

Prova: Para mostrarmos que f^e é compacta, notamos que por (3.1), dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ M_ε tal que se $|u| \geq M_\varepsilon$ então $|f(u)| \leq \varepsilon |u|^3$. Então



$$f(u) = \varepsilon g_\varepsilon(u) + h_\varepsilon(u),$$

onde

$$|g_\varepsilon(u)| \leq |u|^3,$$

e $h_\varepsilon(u)$ tem suporte compacto. Se $B \subset H_0^1(\Omega)$ e $v \in f^e(B)$, então $v(x) = f^e(u)(x) = f \circ u(x)$, $u \in B$ e

$$v(x) = f \circ u(x) = (\varepsilon g_\varepsilon + h_\varepsilon) \circ u(x) = \varepsilon g_\varepsilon \circ u(x) + h_\varepsilon \circ u(x) = \varepsilon g_\varepsilon^e(u)(x) + h_\varepsilon^e(u)(x).$$

Logo $f^e(B) \subset \varepsilon g_\varepsilon^e(B) + h_\varepsilon^e(B)$. Se ainda supomos que as normas dos elementos de B são limitadas por K_B, então $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon^e(u)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |g_\varepsilon^e(u)(x)|^2 dx = \int_\Omega |g_\varepsilon \circ u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |u(x)|^6 dx = \|u\|_{L^6}^6 \leq C_\Omega \|u\|_{H_0^1}^6 \leq C_\Omega K_B^6 = C_B, \end{aligned} \tag{3.7}$$

e C_B é uma constante que só depende de Ω e de B. É importante notar que C_B não depende de ε. Agora, se $u \in H^1(\Omega)$, $h'_\varepsilon(u) \in L^\infty(\Omega)$ pela definição de h_ε, e $\nabla u \in L^2(\Omega)$, logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla h_\varepsilon^e(u)(x)|^2 dx &= \int_\Omega |h'_\varepsilon(u)(x) \nabla u(x)|^2 dx \\ &\leq \|h'_\varepsilon(u)\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|\nabla h_\varepsilon^e(u)\|_{L^2}$ é finita, e ainda mais, a imagem de um conjunto limitado $B \subset H^1(\Omega)$ por h_ε^e é ainda um subconjunto limitado de $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, então $h_\varepsilon^e(B)$ é pré-compacto em $L^2(\Omega)$.

Assim, dado $\delta > 0$, seja ε tal que $\varepsilon.C_B = \delta/3$, C_B como em (3.7). Podemos cobrir $h_\varepsilon^e(B)$ por um número finito de bolas de raio $\delta/3$ e centro $x_i = h_\varepsilon^e u_i$, $u_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Seja $y_i = \varepsilon g_\varepsilon^e u_i$ e $w_i = x_i + y_i \in f^e(B), i = 1, 2, \ldots, r$.

$$\begin{aligned} \|f^e(u) - w_i\|_{L^2} &= \|\varepsilon g_\varepsilon^e(u) + h_\varepsilon^e(u) - x_i - y_i\|_{L^2} \\ &\leq \|\varepsilon g_\varepsilon^e(u)\|_{L^2} + \|h_\varepsilon^e(u) - x_i\|_{L^2} + \|y_i\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

para algum i, $1 \leq i \leq r$. Portanto, f^e é compacta. ■

Teorema 3.1 *O semigrupo $T(t)$ definido em (3.5) é de classe $\mathcal{AK}$.*

Prova: Seja $U_t = e^{\mathcal{C}t}$ e $W_t = \int_0^t e^{\mathcal{C}(t-s)}\mathcal{F}$.

W_t é compacta desde que $\mathcal{F}$ é compacta.

Agora, consideremos a equação (3.3) com $f^e = 0$,

$$\phi_{tt} = \Delta\phi - \beta\phi_t,$$

que é equivalente à

$$\begin{cases} \phi_t &= \psi \\ \psi_t &= \Delta\phi - \beta\phi_t \end{cases}$$

e na forma abstrata

$$w_t = \mathcal{C}w,$$

onde $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\beta \end{pmatrix}$.

Pelos Teoremas 1.5 e 1.7 para cada dado inicial $w_0 = (u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o p.v.i.

$$\begin{cases} w_t &= \mathcal{C}w \quad t \geq 0 \\ w(0) &= (u_0, v_0) \end{cases} \tag{3.8}$$

tem uma única solução fraca $w(t)$, e se $w_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{C})$, a solução $w(t)$ é forte.

Seja

$$\mathbf{L}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\int |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\int \psi^2 + \frac{\delta}{2}\int \phi\psi.$$

Então se ϕ satisfaz $\phi_{tt} = \Delta\phi - \beta\phi_t$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt}(\phi, \phi_t) &= \int_\Omega \mathcal{A}\phi\phi_t + \frac{\delta}{2}\int_\Omega(\phi_t\phi_t + \phi\phi_{tt}) + \int_\Omega \phi_t\phi_{tt} \\
&= -\beta\int_\Omega \phi_t^2 + \frac{\delta}{2}\int_\Omega \phi_t^2 + \frac{\delta}{2}\int_\Omega \phi\phi_{tt} \\
&= \left(-\beta + \frac{\delta}{2}\right)\int_\Omega \phi_t^2 + \frac{\delta}{2}\int_\Omega \phi(-\beta\phi_t + \Delta\phi) \\
&= \left(-\beta + \frac{\delta}{2}\right)\int_\Omega \phi_t^2 - \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 - \frac{\beta\delta}{2}\int_\Omega \phi\phi_t \\
&= (-2\beta + \delta)\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_t^2 - \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 - \frac{\beta\delta}{2}\int_\Omega \phi\phi_t \\
&\leq -K\mathbf{L}(\phi, \phi_t)
\end{aligned}$$

onde $K = \min\{(2\beta - \delta), \delta, \beta\}$. Com isso

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}(\phi, \phi_t) \leq -K\mathbf{L}(\phi, \phi_t)$$

e

$$\mathbf{L}(e^{\mathcal{C}t}(u_0, v_0)) \leq e^{-Kt},$$

sempre que $(u_0, v_0) \in \mathbf{D}(\mathcal{C})$. Segue por densidade que a desigualdade acima também vale em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Para concluir que o semigrupo gerado por $\mathcal{C}$ decai exponencialmente basta mos trarmos que $\mathbf{L}$ é uma norma equivalente à norma de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o que segue trivialmente da desigualdade de Hölder para δ suficientemente pequeno. ■

Para concluir que existe um atrator global para o problema (3.4) falta apenas mostrar que o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$ limitado. De fato, se (u_0, v_0) é ponto de equilíbrio de $T(t)$, temos que $v_0 = 0$ e

$$-\mathcal{A}u + f^e(u) = 0$$

$$u\,(\Delta u + f(u)) = 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f(u)\,u.$$

Como $\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \dfrac{f(u)}{u} \leq -\delta$, $\dfrac{f(u)}{u} \leq -\dfrac{\delta}{2}$, se $|u| \geq M$ para algum M.
Então

$$\begin{aligned} \frac{u^2 f(u)}{u} &\leq -\frac{\delta}{2}|u|^2 \quad |u| \geq M \\ \Rightarrow u\,f(u) &\leq -\frac{\delta}{2}|u|^2 \quad |u| \geq M \\ \Rightarrow u\,f(u) &\leq -\frac{\delta}{2}|u|^2 + \widehat{C}_\delta \leq \widehat{C}_\delta \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\widehat{C}_\delta$ é tal que $u\,f(u) \leq \widehat{C}_\delta$ se $|u| \leq M$. Segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &= \int_\Omega f(u)\,u \leq \tilde{C}_\delta |\Omega| := C_\delta^2 \quad \text{e} \\ \|u\|_{X^{1/2}} &\leq C_\delta, \end{aligned} \tag{3.10}$$

ou seja, o conjunto dos pontos de equilíbrio é limitado.

Portanto, o problema (3.4) define um semigrupo $T(t)$ contínuo, limitado, de classe $\mathcal{AK}$ que possui uma função de Liapunov $\mathcal{L}$, e além disso, o conjunto $\mathcal{Z} = \{z \;:\; T(t)z = z \;\forall\, t \geq 0\}$ é limitado. Logo, pelo Teorema 2.5, $T(t)$ possui um atrator global compacto, e todas as afirmações do Teorema 2.3 valem.

Bibliografia

[1] J. ARRIETA, A. N. CARVALHO, J. K. HALE *A Damped Hyperbolic Equation whit Critical Exponent,* Commun. in Partial Differential Equations, 17(5& 6), 841-866, [1992].

[2] H. BRÉZIS *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones,* Alianza Editorial, S. A., Madrid, [1984].

[3] J. K. HALE *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems,* Math. Surveys and Monographs 25, Am. Math. Soc., [1988], Providence, RI.

[4] D. HENRY *Evolution Equations in Banach Spaces,* Notas não publicadas, IME, USP, [1981], São Paulo, SP.

[5] O. LADYZHENSKAYA *Attractors for Semigroups and Evolution Equations,* Cambridge University Press, [1991].

[6] A. PAZY *Semigroups of Linear Operators and Aplications to Partial Differential Equations,* Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, [1983].