BORDISMO DE AÇÕES NÃO-SINGULARES

Valter Locci

Orientador: Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área: Matemática - Geometria e Topologia.

USP - São Carlos
1998

À minha esposa Marise
e aos meus filhos
Bruna e Rafael.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente. a Deus por tudo. E, em especial, por ter proporcionado-me mais um período de desenvolvimento intelectual.

Ao meu orientador pela orientação.

À minha esposa pela compreensão e dedicação.

À CAPES-PICD pelo auxílio financeiro.

Agradeço, enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho.

RESUMO

Dada uma ação de um grupo de Lie G numa variedade M, uma construção geométrica, chamada blow-up, é utilizada para obter uma nova variedade denotada por $B(A, M)$, onde A é um certo subconjunto invariante de M.

Quando G é abeliano, através de uma seqüência finita de tais blow-ups equivariantes, uma nova variedade M' é obtida, dotada de uma ação não-singular de G.

Neste trabalho estudamos em que condições a variedade M' pertence à mesma classe de bordismo de M, e também alguns resultados sobre bordismo de ações não-singulares são obtidos.

ABSTRACT

Given an action of a Lie Group G on a manifold M, a geometric construction, called blow-up, is performed to yield a new manifold denoted by $B(A, M)$, where A is a certain invariant subset of M.

When G is abelian, by a finite sequence of such equivariant blow-ups, a new manifold M' is obtained, carriyng a nonsingular action of G.

In this work we study under which condictions the manifold M' belongs to the same cobordism class of M, and also some results on cobordism of nonsingular actions are obtained.

Índice

Introdução

Conner e Floyd em [4] mostram que se M é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade diferenciável fechada e $\nu = \nu(F, M)$ é o fibrado normal sobre o conjunto de pontos fixos F, então M e $\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)$ bordam, isto é, $[M]_2 = [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2$.

Mais geralmente, considerando G um grupo de Lie compacto e uma G-variedade M, podemos perguntar em que casos tal relação se generaliza. Mais ainda, em caso negativo, quais outros relacionamentos possíveis entre a classe de bordismo de M e outras variedades relacionadas com os pontos fixos F.

Wasserman em [14], considerando uma adequada subvariedade invariante A de uma G-variedade M, define o blow-up de A em M como sendo

$$B(A, M) = M \underset{A}{\#} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1),$$

onde $\#_A$ é a soma conexa ao longo de A, e o utiliza simplificar a estrutura de órbitas de M. No caso de G ser abeliano ele obtém certas variedades chamadas de não-singulares.

Posteriormente, ao analisar o relacionamento entre certas classes características e o conjunto de pontos fixos, Wasserman, em [15], constrói uma variedade W cujo bordo é a união disjunta de três das variedades da definição do blow-up, isto é,

$$\partial W = M \,\dot{\cup}\, B(A, M) \,\dot{\cup}\, \mathbb{R}P(\nu \oplus 1).$$

Segue imediatamente desta construção de Wasserman o seguinte relacionamento entre as classes de bordismo das variedades envolvidas:

$$[B(A,M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

Neste trabalho, considerando o blow-up de todos os pontos fixos F de uma G-variedade M obtemos um relacionamento geral envolvendo as classes de bordismo de M e de $\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)$ que depende da classe do blow-up, isto é,

$$[B(F,M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

Impondo restrições sobre G e sobre o conjunto de pontos fixos F obtemos relacionamentos mais específicos entre as classes de bordismo de M e de $B(F,M)$. Em especial, quando M é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade não-singular, obtemos pelo Teorema de Conner-Floyd que $[B(F,M)]_2 = [M]_2 = 0$. Destes resultados obtemos algumas informações já conhecidas sobre a não existência de involuções com certos tipos de pontos fixos pré-determinados.

Nos Capítulos I e II, após introduzir a notação e enunciar os resultados básicos sobre Grupos de Transformação, Fibrados, Bordismo e Números de Stiefel-Whitney, chegando ao Teorema de Conner Floyd, obtemos uma condição para que uma $\mathbb{Z}_2$-variedade M com conjunto de pontos fixos 1-codimensional tenha classse de bordismo nula.

No Capítulo III, após definir e exemplificar as noções de blow-up e de variedades não-singulares, estabelecemos o exposto acima.

Capítulo 1

Grupos de Transformação e Fibrados

Neste capítulo introduzimos a notação e alguns fatos básicos sobre grupos de transformação e fibrados. As provas destes resultados podem ser encontradas em [6] e [11].

1.1 Grupos de Transformação

Definição 1.1.1. *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico de Hausdorff. Uma* **G-ação** *é uma aplicação contínua* $\varphi : G \times X \to X$ *tal que:*

1) $\varphi(e,x) = x$ *para todo* $x \in X$, *onde* e *é a identidade de* G;

2) $\varphi(g_2, \varphi(g_1,x)) = \varphi(g_2 g_1, x)$ *para todo* $g_1, g_2 \in G$ *e* $x \in X$.

A tripla (X, G, φ) *é chamada de* **grupo de transformação topológico** *ou* **G-ação sobre X**, *e* X *é chamado de* **G-espaço**.

Quando φ é compreendida do contexto, usamos a notação

$$\varphi(g,x) = g.x = gx.$$

Daí, as condições acima são descritas como:

1)$ex = x$;

2)$g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x$.

Quando G é fixado, denotamos (X, G, φ) simplesmente por X.

Para cada $g \in G$ temos uma aplicação bijetora

$$\varphi_g : X \to X$$

definida por $x \to \varphi_g(x) = \varphi(g, x)$, que é um homeomorfismo de X.

Se G é um grupo de Lie, X é uma variedade diferenciável e φ é aplicação diferenciável, então φ_g é um difeomorfismo.

Dado um G-espaço X denotamos:

$G(x) = \{gx \in X | \, g \in G\}$ **órbita** de $x \in X$;

$G_x = \{g \in G | \, gx = x\}$ **grupo de isotropia** de x;

$X^G = \text{Fix}(G, X) = \{x \in X | \, G_x = G\}$ **conjunto dos pontos fixos.**

Note que se $g \in G$ e $x \in X$, então G_{gx} e G_x são conjugados, isto é,

$$G_{gx} = gG_xg^{-1}.$$

Definição 1.1.2. *Dados dois G-espaços X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada* **G-aplicação** *ou* **aplicação equivariante** *se para cada $g \in G$ e $x \in X$ temos*

$$f(gx) = gf(x).$$

Uma G-aplicação que é bijetora é chamada **G-equivalência.** Quando existe uma G-equivalência $f : X \to Y$ dizemos que X e Y são **G-equivalentes** e denotamos $X \cong Y$.

Considerando Y um subconjunto de um G-conjunto X denotamos

$$gY = \{gy \, | \, y \in Y\}.$$

Dizemos que o subconjunto Y é **G-invariante** se $gY \subset Y, \forall g \in G$. Claramente um subconjunto invariante Y de um G-espaço X satisfaz, $\forall g \in G, gY = Y$. Naturalmente $G(x)$ é um subconjunto G-invariante de X.

Denotamos

$\frac{X}{G} = \{G(x) \,|\, x \in G\}$ conjunto das órbitas de X.

$\pi : X \to \frac{X}{G}$ aplicação natural levando x em $G(x)$.

O conjunto $\frac{X}{G}$ dotado da topologia quociente é chamado de **espaço das órbitas** de X.

Se X é um G-espaço e $x \in X$ existe uma aplicação natural

$$\alpha_x : \frac{G}{G_x} \to G(x)$$

definida por $\alpha_x(gG_x) = gx$.

Proposição 1.1.3. *Se G é compacto então $\alpha_x : \frac{G}{G_x} \to G(x)$ é um homeomorfismo.*

Definição 1.1.4. *Um G-espaço X é chamado:*

1. **trivial** *se* $G_x = G, \forall x \in X$;
2. **livre** *se* $G_x = \{e\}, \forall x \in X$;
3. **semi-livre** *se* $G_x = \{e\}$ *ou* $G_x = G$, $\forall x \in X$;
4. **transitivo** *se existe apenas uma órbita, isto é* $G(x) = X$;
5. **efetivo** *se* $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.

A proposição abaixo caracteriza G-aplicações.

Proposição 1.1.5. *Sejam G um grupo compacto e H, K dois subgrupos fechados de G. Então*

1. *existe uma G-aplicação $f : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ $\Leftrightarrow$ H é conjugado a um subgrupo de K;*
2. *se existe $a \in G$ com $aHa^{-1} \subset K$ então a aplicação $f_a : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ definida por $gH \to f_a(gH) = ga^{-1}K$ é G-aplicação e toda G-aplicação tem esta forma.*

1.2 Tipos de Órbita e Tipos de Isotropia

Assumimos aqui que G é um grupo topológico compacto e que todos os espaços são de Hausdorff.

Denotemos por $\mathcal{F}$ a família de todos os G-espaços homogêneos (ação transitiva) de Hausdorff. Considere em $\mathcal{F}$ a relação de equivalência $\sim$ dada por:

$$X \sim Y \Leftrightarrow \text{existe um G-homeomorfismo } \; f : X \to Y.$$

Denote por (X) a classe de equivalência contendo X.

Definição 1.2.1. *A classe (X) é chamada* **tipo de órbita** *e o conjunto de tais classes $\frac{\mathcal{F}}{\sim}$ é chamado* **conjunto dos tipos de órbitas.**

Segue da Proposição 1.1.3 que para cada G-espaço homogêneo de Hausdorff X, existe um subgrupo fechado H de G tal que são G-homeomorfos

$$X \cong \frac{G}{H},$$

isto é, cada (X) é representado por um espaço de classes laterais $\frac{G}{H}$.

Um **ordenamento parcial** do conjunto $\frac{\mathcal{F}}{\sim}$ é dado por

$$(X) \geq (Y) \Leftrightarrow \text{existe uma G-aplicação } f : X \to Y.$$

Neste conjunto ordenado parcialmente temos:

$$(\tfrac{G}{e}) \text{ é um máximo}$$
$$(\tfrac{G}{G}) \text{ é um mínimo.}$$

Definição 1.2.2. *Quando um G-espaço homogêneo X é equivalente a $\frac{G}{H}$, denotamos a classe de conjugação de H em G por (H), isto é,*

$$(H) = \{K \subset G; K \sim H\} = \{K \subset G; K = gHg^{-1}, g \in G\},$$

e chamamos (H) de o **tipo de isotropia** *de X.*

Em particular, se G é abeliano temos $(H) = H$.

Genericamente, dado um G-espaço X, uma órbita que é equivalente a $\frac{G}{H}$ é chamada de:

órbita com tipo de isotropia (H)
órbita com tipo de órbita $(\frac{G}{H})$.

Um **ordenamento parcial** das classes de conjugação de subgrupos fechados de G é dado por

$$(H) \leq (K) \Leftrightarrow H \text{ é conjugado a um subgrupo de } K.$$

Resumidamente temos então os dois ordenamentos parciais:

$$\left(\frac{G}{H}\right) \geq \left(\frac{G}{K}\right) \Leftrightarrow \exists f : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K},\ G-\text{aplicação} \overset{1.1.5}{\Longleftrightarrow} \exists a \in G \,|\, aHa^{-1} \subset K$$
$$(H) \leq (K) \Leftrightarrow H \sim K', K' \subset K \Leftrightarrow \exists a \in G \,|\, aHa^{-1} \subset K.$$

Assim
$$\left(\frac{G}{H}\right) \geq \left(\frac{G}{K}\right) \Leftrightarrow (H) \leq (H),$$
isto é,

Proposição 1.2.3. *A correspondência* $(\frac{G}{H}) \to H$ *é um anti-isomorfismo do conjunto parcialmente ordenado* $\frac{\mathcal{F}}{\sim}$ *no conjunto parcialmente ordenado das classes de conjugação dos subgrupos fechados de* G.

Quando (e) e (G) são tipos de isotropia do G-espaço X, esta correspondência poder ser representada por

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\text{Tipo de G-órbitas:} & (\frac{G}{e}) & \geq & \cdots & \geq & (\frac{G}{H}) & \geq & (\frac{G}{K}) & \geq & \cdots & \geq & (\frac{G}{G}) \\
\downarrow & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\text{Tipo de isotropia:} & (e) & \leq & \cdots & \leq & (H) & \leq & (K) & \leq & \cdots & \leq & (G).
\end{array}$$

Dado X um G-espaço e H um subgrupo de G denotamos por $X(H)$ a **união das órbitas de X com tipo de isotropia (H)**, e por $X(\geq H)$ a **união das órbitas de X com tipo de isotropia maior ou igual a (H)**, isto é,

$$\begin{aligned} X(H) &= \{x \in X; (G_x) = (H)\} = \{x \in X; G_x \sim H\} \\ &= \{x \in X; \exists a \in G \,|\, G_x = aHa^{-1}\} \\ X(\geq H) &= \{x \in X; G_x \supset H' \sim H\} = \{x \in X; \exists a \in G \,|\, G_x \supset aHa^{-1}\}. \end{aligned}$$

Em particular temos:

$X(G) = X^G$	pontos fixos
$X(e) = \{x \in X; G_x = e\}$	pontos "livres".

Proposição 1.2.4. $GX^H = X(\geq H)$.

Corolário 1.2.5. *Se G é compacto e X é um G-espaço de Hausdorff então $X(\geq H)$ é fechado em X.*

Corolário 1.2.6. *Sejam G compacto e X um G-espaço de Hausdorff. Se (H) é maximal entre os tipos de isotropia que aparecem em X, então $X(H)$ é fechado em X.*

Dado um G-espaço X temos uma decomposição de X como união disjunta dos subconjuntos $X(H)$, isto é,

$$X = \bigcup_{(H)} X(H),$$

onde (H) varia sobre todas as classes de conjugação de subgrupos de G.

Em geral $X(H)$ não é fechado em X. Mas em casos especiais podemos ordenar e agrupar os $X(H)$ em subconjuntos fechados.

Proposição 1.2.7. *Dadas finitas classes de conjugação* $(H_1), \ldots, (H_n)$ *de subgrupos fechados de* G, *podemos arranjá-las tal que*

$$(H_i) \geq (H_j) \Rightarrow i \leq j.$$

Em particular, quando G é abeliano temos:

$$H_i \supset H_j \Leftrightarrow (H_i) \geq (H_j) \Rightarrow i \leq j.$$

Proposição 1.2.8. *Seja* G *um grupo compacto e* X *um* G*-espaço de Hausdorff. Suponha que* $\{(H_i)\}$, *conjunto dos tipos de isotropia aparecendo em* X, *é finito. Ordene-o como na Proposição 1.2.7. Se denotarmos*

$$X_i = X(H_1) \cup \cdots \cup X(H_i)$$

então X_i *é fechado em* X.

Dado um G-espaço X, dizemos que X tem **n tipos de órbita** quando existem exatamente n tipos de órbitas diferentes em X.

Teorema 1.2.9. *Se* G *é um grupo de Lie compacto e* M *é uma* G*-variedade compacta, então existem apenas finitos tipos de órbita em* M.

1.3 Órbita Principal e Tipo de Isotropia Principal

Como já vimos anteriormente, entre os tipos de órbita a menor é $\frac{G}{G}$ e a maior é $\frac{G}{\{e\}}$. Mas estes tipos de órbitas nem sempre ocorrem em um G-espaço X.

O teorema abaixo afirma a existência de um tipo de órbita máximo quando M/G é conexo. Relembramos que $M(H)$ denota a união das órbitas de tipo G/H.

Teorema 1.3.1. *Seja G um grupo de Lie compacto e M uma G-variedade. Se o espaço das órbitas $\frac{M}{G}$ é conexo, então existe um tipo de órbita máximo $\frac{G}{H}$ em M. Mais ainda,*

$$M(H) \text{ é aberto e denso em } M;$$
$$\frac{M(H)}{G} \text{ é conexo.}$$

Definição 1.3.2. *O tipo de órbita máximo garantido pelo teorema acima é chamado de* **tipo de órbita principal** *e as órbitas deste tipo são chamadas de* **órbitas principais**. *Os grupos de isotropias correspondentes são chamados de* **grupos de isotropia principais.**

1.4 Fibrados

Aqui vamos definir, construir e enunciar alguns resultados básicos envolvendo fibrados que serão utilizados no que segue. As provas podem ser encontradas em Milnor [11] e em Kawakubo [6].

Dado uma G-ação $\varphi : G \times X \to X$ associamos a cada $g \in G$ a aplicação $\varphi_g : X \to X$ dada por $\varphi_g(x) = \varphi(g,x)$, que é um homeomorfismo de X em X, e definimos um homomorfismo $\Phi : G \to \text{Homeo}(X)$ por $g \to \Phi_g = \varphi_g$.

Quando a ação é efetiva temos que Φ é um monomorfismo. Assim identificaremos $G \cong \Phi(G) \subset \text{Homeo}(X)$, e denotaremos simplesmente $G \subset \text{Homeo}(X)$.

Definição 1.4.1 (Fibrado Coordenadas). *Seja K um grupo topológico atuando efetivamente em um espaço topológico F. Sejam E e X espaços de Hausdorff e $\pi : E \to X$ uma aplicação contínua. Suponha que existam uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X e um homeomorfismo $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ para cada $\alpha \in \Lambda$ tendo as três propriedades seguintes:*

1. *$p_\alpha.\varphi_\alpha = \pi$, onde $p_\alpha : U_\alpha \times F \to U_\alpha$ é a projeção;*

2. *Defina, para cada $x \in U_\alpha$, $\varphi_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \to F$ por $z \to \varphi_{\alpha,x}(z) = p'_\alpha.\varphi_\alpha(z)$, onde $p'_\alpha : U_\alpha \times F \to F$ é a outra projeção. Denote $\Theta_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x}.\varphi_{\alpha,x}^{-1}$ para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Então $\Theta_{\beta\alpha}(x) \in K \subset \text{Homeo}(F)$.*

3. *A aplicação $\Theta_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to K$ assim obtida é contínua.*

Então, juntando as informações acima, o sistema $(E, \pi, X, F, K, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado de um **fibrado coordenadas.**

Definição 1.4.2 (Fibrado). *Dois fibrados coordenadas $(E, \pi, X, F, K, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(E, \pi, X, F, K, U'_\mu, \varphi'_\mu)$ que têm em comum E, π, X, F e K são chamados* **equivalentes no sentido estrito** *se*

$$\tilde{\Theta}_{\mu\alpha}(x) = \varphi'_{\mu,x}.\varphi_{\alpha,x}^{-1} \in K \quad para \quad x \in U_\alpha \cap U'_\mu$$

e

$$\bar{\Theta}_{\mu\alpha} : U_\alpha \cap U'_\mu \to K \quad \text{é} \quad \text{contínua.}$$

Uma classe de equivalência $\xi = (E, \pi, X, F, K)$ de fibrados coordenados com respeito a relação de equivalência acima é chamada de um **fibrado**, *e E é chamado de* **espaço total**, *π de* **projeção**, *X de* **espaço base**, *F de* **fibra**, *e K de* **grupo estrutural**. *Em um fibrado coordenadas $(E, \pi, X, F, K, U_\alpha, \varphi_\alpha)$ chamamos U_α de* **vizinhança coordenada**, *φ_α de* **função coordenada**, *e $\Theta_{\beta\alpha}$ de* **função de transição**. *Também, para cada $x \in X$, denotamos por $E_x = \pi^{-1}(x)$ a* **fibra sobre x**.

Um fibrado coordenadas que é um representante de um fibrado ξ é freqüentemente chamado, por simplicidade, de fibrado e abreviamos a notação de um fibrado $\xi = (E, \pi, X, F, K)$ para $\pi : E \to X$ ou E.

Um fibrado em que $E = X \times F$ e $id : E \to X \times F$ é uma função coordenada é chamado de **fibrado produto**.

Definição 1.4.3. *Sejam $\xi = (E, \pi, X, F, K)$ e $\xi' = (E', \pi', X', F, K)$ dois fibrados tendo a mesma fibra e o mesmo grupo estrutural. Uma aplicação contínua $\bar{f} : E \to E'$ é chamada de* **aplicação fibrada** *de ξ em ξ' se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. *Existe uma aplicação contínua $f : X \to X'$ tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & X', \end{array}$$

2. *Sejam $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{V'_\mu, \varphi'_\mu\}$ pares de vizinhanças coordenadas e funções coordenadas de ξ e ξ' respectivamente. Para todos α, μ com $U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$ denotamos*

$$f_{\mu\alpha}(x) = \varphi'_{\mu, f(x)} \cdot \bar{f} \cdot \varphi^{-1}_{\alpha, x} \quad \textit{para } x \in U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu).$$

Então

$$f_{\mu\alpha}(x) \in K \subset \text{Homeo}(F)$$

e

$$f_{\mu\alpha} : U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \to K \quad \textit{é} \quad \textit{contínua.}$$

Se $X = X'$ e $f = id$ no acima, então $\tilde{f}$ é chamado de um **isomorfismo de fibrados.** Quando existe um isomorfismo entre dois fibrados ξ e ξ' dizemos que ξ e ξ' são **fibrados isomorfos** (ou **equivalentes**) e denotamos $\xi \cong \xi'$ ou $E \cong E'$.

Um fibrado que é isomorfo ao fibrado produto é chamado de **fibrado trivial.**

Um fibrado (E, π, X, F, K) em que $F = K$ e K opera por translação à esquerda é chamado de **fibrado principal,** ou **K-fibrado principal**, e é denotado por (P, π, X, K)

Proposição 1.4.4. *Para um fibrado principal $\eta = (P, \pi, X, K)$ existe uma K-ação à direita canonicamente livre sobre P tal que a fibra $\pi^{-1}(x)$ é K-invariante. Mais ainda, a projeção $\pi : P \to X$ induz um homeomorfismo $\bar{\pi} : \frac{P}{K} \to X$.*

Se X é um G-espaço à direita e Y é um G-espaço à esquerda, podemos considerar a **ação diagonal** de G sobre $X \times Y$, isto é:

$$G \times (X \times Y) \to X \times Y \quad \text{dada por} \quad (g, (x, y)) \to g.(x, y) = (xg^{-1}, gy).$$

O espaço das órbitas desta ação é chamado de **produto torcido** de X e Y, e é denotado por

$$X \times_G Y = \frac{X \times Y}{G}.$$

Definição 1.4.5. *Dados um K-fibrado principal $\pi : P \to X$ e F um K-espaço efetivo podemos construir um fibrado com fibra F e grupo estrutural K que é chamado de* **fibrado associado** *ao K-fibrado principal P, isto é:*

$$p : P \times_K F \to X \quad \textit{definida por} \quad [z, y] \to p([z, y]) = \pi(z).$$

Teorema 1.4.6. *Dois fibrados E e E' tendo os mesmos espaço base, fibra e grupo estrutural são isomorfos se e só se seus fibrados principais associados são isomorfos.*

Definição 1.4.7. *Uma* **secção** *para um fibrado $\pi : E \to B$ é uma aplicação contínua $s : B \to E$ tal que $\pi . s = id_B$.*

Teorema 1.4.8. *Seja $\pi : P \to X$ um fibrado principal. Então P é trivial se e só se π tem uma secção.*

Corolário 1.4.9. *Um fibrado é trivial se e só se o fibrado principal associado admite uma secção.*

Definição 1.4.10. *Dado um fibrado $\xi = (E, \pi, X, F, K)$ e uma aplicação contínua $f : Y \to X$, obtemos um fibrado com fibra F, grupo estrutural K e espaço base Y, chamado de* **fibrado induzido** *e denotado por $f^!\xi$, considerando*

$$f^!\xi = \{(y, z) \in Y \times E \mid f(y) = \pi(z)\}$$

e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} f^!\xi & \xrightarrow{f'} & E \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

onde f' é uma aplicação fibrada e π_1 é a projeção no primeiro fator.

Definição 1.4.11. *Sejam E e X espaços topológicos e $\pi : E \to X$ uma aplicação contínua. Se as condições 1 e 2 seguintes são satisfeitas, então (E, π, X) é chamado de* **fibrado vetorial.**

1. *Para todo x, $\pi^{-1}(x)$ tem a estrutura de um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbb{R}$.*

2. *Para todo x, existe uma vizinhança aberta U de x e um homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que $p.\varphi = \pi$ e, para cada $y \in U$,*

$$\varphi_{|\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \to \{y\} \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \text{ é um isomorfismo linear,}$$

onde $p : U \times \mathbb{R}^n \to U$ denota a projeção.

Quando a fibra F de um fibrado vetorial $\pi : E \to X$ tem dimensão constante, isto é, F é um espaço vetorial n-dimensional, dizemos que $\pi : E \to X$ é um **fibrado vetorial n-dimensional**. Assim, um fibrado vetorial n-dimensional pode ser identificado com um fibrado com fibra $\mathbb{R}^n$ e grupo estrutural $GL(n, \mathbb{R})$ (às vezes chamado também de **n-plano fibrado** ou **$\mathbb{R}^n$-fibrado**).

Em particular, denotaremos o **fibrado vetorial n-dimensional trivial** por ε^n ou simplesmente por n, isto é,

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \hookrightarrow & X \times \mathbb{R}^n = \varepsilon^n = n \\ & & \quad\downarrow \\ & & \quad X. \end{array}$$

Denotaremos o **fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$**, espaço projetivo real n-dimensional, por $\gamma_n^1 = (E(\gamma_n^1), \pi_1, \mathbb{R}P^n)$, onde

$$E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v \text{ é múltiplo de } x\}$$

e

$$\pi_1 : E(\gamma_n^1) \to \mathbb{R}P^n \quad \text{é a projeção no primeiro fator.}$$

Definição 1.4.12. *Dada uma secção $s : B(\xi) \to E(\xi)$ de um fibrado vetorial ξ, dizemos que s é uma* **secção totalmente não-nula** *se $s(b)$ é um vetor não-nulo de $F_b(\xi)$ para cada $b \in B(\xi)$.*

Definição 1.4.13. *Dada uma coleção de secções $s_1, \ldots, s_n$ de um fibrado vetorial ξ, dizemos que $s_1, \ldots, s_n$ são* **secções totalmente independentes** *se para cada $b \in B(\xi)$ os vetores $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ são linearmente independentes.*

Teorema 1.4.14. *Um fibrado vetorial n-dimensional ξ é trivial se e só se ξ admite n secções $s_1, \ldots, s_n$ que são totalmente independentes.*

Definição 1.4.15. *Sejam G um grupo topológico e $\pi : E \to X$ um fibrado vetorial tal que E e X são G-espaços e π é uma G-aplicação. Se para todo $g \in G$ e $x \in X$, a aplicação*

$$g : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(gx)$$

é um isomorfismo linear, então $\pi : E \to X$ é chamado de um **G-fibrado vetorial.**

Resumiremos agora algumas construções básicas envolvendo fibrados.

Sejam $\pi : E \to X$ e $\pi' : E' \to X'$ dois G-fibrados vetoriais. O **fibrado produto** de E e E' é definido como o produto cartesiano

$$\pi \times \pi' : E \times E' \to X \times X'.$$

Quando $X = X'$ a **soma de Whitney** de E e E' é denotada por $E \oplus E'$ e é definida como o fibrado induzido por $E \times E'$ e pela aplicação diagonal $d : X \to X \times X$ (dada por $d(x) = (x, x)$), isto é,

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' = d^{!}(E \times E') & \longrightarrow & E \times E' \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi \times \pi'} \\ X & \xrightarrow{d} & X \times X. \end{array}$$

Seja ξ um fibrado vetorial $F \to E \xrightarrow{\pi} B$ e $\bar{B} \subset B$ um subconjunto. Denotamos por $\xi_{|_B}$ o **fibrado restrição** de ξ a $\bar{B}$, isto é,

$$
\begin{tikzcd}
\xi_{|_{\bar{B}}} = \bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & E = \xi \arrow[d, "\pi"] \\
\bar{B} \arrow[r, hook] & B,
\end{tikzcd}
$$

onde $\bar{\pi}$ é a restrição de π a $\bar{E}$. Observe que a fibra é a mesma nos dois fibrados.

Lema 1.4.16. *Se* $\bar{f} : E \to E'$ *é uma aplicação fibrada e* $f : B \to B'$ *é a aplicação correspondente dos espaços base, então* $E \cong f^! E'$.

Esquematicamente,

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, dashed, "\cong"] \arrow[ddr] & & E' \arrow[dd] \\
& f^! E' \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& B \arrow[r, "f"] & B'.
\end{tikzcd}
$$

Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B com $E(\xi) \subset E(\eta)$. Dizemos que ξ é um **subfibrado** de η se cada fibra $F_b(\xi)$ é um sub-espaço vetorial da fibra correspondente a $F_b(\eta)$.

Lema 1.4.17. *Se* ξ_1 *e* ξ_2 *são subfibrados vetoriais de* $\eta : E \to B$ *tais que* $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2), \forall\, b \in B,$ *então* $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

Teorema 1.4.18. *Dado um subfibrado* $\xi \subset \eta$, *onde* η *é um fibrado vetorial dotado de uma métrica Euclidiana, existe um subfibrado* $\xi^{\perp} \subset \eta$ *tal que* $\eta \cong \xi \oplus \xi^{\perp}$.

O fibrado $\xi^{\perp}$ acima é chamado de **complemento ortogonal** de ξ em η.

Quando uma variedade diferenciável N admite uma métrica Euclideana dizemos que N é uma **variedade Riemanniana**.

Considerando uma imersão $f : M \to N$ entre variedades diferenciáveis, com N Riemanniana, temos τ_M subfibrado do fibrado induzido $f^!\tau_N$, isto é,

$$\begin{tikzcd} \tau_M \arrow[r, hook] \arrow[dr] & f^!\tau_N \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \tau_N \arrow[d] \\ & M \arrow[r, "f"] & N. \end{tikzcd}$$

Daí, usando o Lema 1.4.16, temos

Corolário 1.4.19. *Se $f : M \to N$ é uma imersão entre variedades diferenciáveis, com N Riemanniana, então existe uma decomposição em soma de Whitney*

$$f^!\tau_N \cong \tau_M \oplus \nu_f.$$

O fibrado ν_f é chamado de **fibrado normal da imersão f**.

Em particular, quando $f = i$, a inclusão, temos

$$i^!\tau_N \cong \tau_{N_{|M}} = \tau_M \oplus \tau_M^{\perp}.$$

1.5 Fibrado Universal (Espaços Classificantes)

Dado um grupo de Lie compacto G, existe (Construção de Milnor) um G-fibrado principal $\pi : E(G) \to B(G)$, onde $E(G)$ é contrátil ($\pi_i(E(G)) = 0, \forall i$) e $B(G) = \frac{E(G)}{G}$ é determinado de modo único a menos de homotopia.

Se $p : P \to X$ é um G-fibrado principal com base paracompacta X, então existe uma aplicação $f : X \to B(G)$, tal que o fibrado induzido $f^!(E(G))$ é isomorfo a P.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[dr] & & & G \arrow[dr] & \\
& P \arrow[rrr, "\bar{f}"] \arrow[dr, dashed, "\cong"] \arrow[ddr, "p"'] & & & E(G) \arrow[dd, "\pi"] \\
& & f^!(E(G)) \arrow[urr, dashed] \arrow[d, dashed] & & \\
& & X \arrow[rr, "f"] & & B(G).
\end{tikzcd}
$$

Desta propriedade, o fibrado $\pi : E(G) \to B(G)$ é chamado de **G-fibrado principal universal**, o espaço $B(G)$ de **espaço classificante** de G e a aplicação f de **aplicação classificante** de P. Ver, por exemplo, [12].

Capítulo 2

Bordismo e Números de Stiefel-Whitney

Neste capítulo reescrevemos alguns resultados sobre bordismo e números de Stiefel-Whitney visando basicamente chegar ao Teorema de Conner-Floyd 2.5.2 que tem um papel fundamental no capítulo seguinte. As provas destes resultados podem ser encontradas em [11] e [4]. Na última seção obtemos uma condição para que uma $\mathbb{Z}_2$-variedade tendo conjunto de pontos fixos 1-codimensional tenha classse de bordismo nula. Consideraremos daqui em diante apenas variedades diferenciáveis compactas e diremos simplesmente variedades.

2.1 Bordismo

Definição 2.1.1. *Uma n-variedade M* **borda** *se existe uma (n+1)-variedade (diferenciável compacta) W com $\partial W = M$. Duas n-variedades M e N são* **bordantes**, *denotamos $M \sim N$, se a sua união disjunta $M \dot{\cup} N$ borda, isto é,*

$$M \sim N \Leftrightarrow \exists W^{n+1} \ \textit{com} \quad \partial W = M \dot{\cup} N.$$

A relação "ser bordante" é uma relação de equivalência e denotamos a classe de equivalência de uma variedade M por $[M]_2$.

Definição 2.1.2. *O conjunto das classes de equivalência da relação acima é chamado de* **grupo de bordismo não-orientado de dimensão n** *e é denotado por*

$$\mathcal{N}_n = \{[M]_2;\, M^n \text{ é variedade diferenciável compacta}\}.$$

O conjunto $\mathcal{N}_n$ é um grupo com a operação

$$[M]_2 + [N]_2 = [M \dot{\cup} N]_2.$$

Mais ainda, $\mathcal{N}_* = \sum \mathcal{N}_n$ é um anel com a multiplicação induzida pelo produto cartesiano.

Thom em [13] mostrou que:

Teorema 2.1.3. *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador em cada dimensão não da forma $2^j - 1$.*

Explicitamente, por [3, Teorema 13.17],

$$\mathcal{N}_* = \mathbb{Z}_2[X_2, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9, \ldots], \text{ onde } X_{2i} = [\mathbb{R}P^{2i}]_2.$$

Fixemos agora um espaço X. Consideremos o conjunto os pares (M, f), onde M é uma n-variedade e $f : M \to X$ é uma aplicação (diferenciável).

Definição 2.1.4. *Dizemos que um par (M, f)* **borda** *se existe uma (n+1)-variedade (diferenciável compacta) W e uma aplicação (diferenciável) $F : W \to X$ tal que $\partial W = M$ e $F_{|_M} = f$. Dois pares (M, f) e (N, g) são* **bordantes**, *denotamos $(M, f) \sim (N, g)$, se a sua união disjunta $(M \dot{\cup} N, f \dot{\cup} g)$ borda, isto é,*

$$(M, f) \sim (N, g) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists W^{n+1} \mid \quad \partial W = M \dot{\cup} N \\ \exists F : W \to X \mid \quad F_{|_M} = f \text{ e } F_{|_N} = g. \end{cases}$$

Esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed, leftarrow, "F"] & \\ M \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W & \\ M \dot\cup N \arrow[u, hook] \arrow[r, "f \dot\cup g"] & X \arrow[ul, dashed, leftarrow, "F"'] \end{tikzcd}$$

(M, f) borda $\qquad$ (M, f) e (N, g) bordantes

A relação acima também é uma relação de equivalência e denotamos a classe de equivalência de um par (M, f) por $[M, f]_2$.

Definição 2.1.5. *O conjunto das classes de equivalência da relação acima é chamado de* **grupo de bordismo não-orientado de dimensão n do espaço X** *e é denotado por*

$$\mathcal{N}_n(X) = \{[M, f]_2; M^n \textit{ variedade e } f : M \to X \textit{ aplicação}\}.$$

O conjunto $\mathcal{N}_n(X)$ é um grupo com a operação

$$[M, f]_2 + [N, g]_2 = [M \dot\cup N, f \dot\cup g]_2,$$

onde $(f \dot\cup g)_{|M} = f$ e $(f \dot\cup g)_{|N} = g$.

Em particular, quando X é um ponto temos $\mathcal{N}_n(X) = \mathcal{N}_n$.

Obs.: Conner & Floyd em [4] consideram mais geralmente grupos de bordismo de um par (X, A).

Existe também uma teoria de bordismo equivariante para G-variedades, onde G é um grupo finito.

Denotaremos aqui uma G-variedade M^n por (G, M^n).

Diremos que (G, M^n) é uma **G-variedade principal** quando a ação de G em M^n é livre.

Quando (G, M_1^n) e (G, M_2^n) são G-variedades equivalentes (ver após a Definição 1.1.2) denotamos simplesmente

$$(G, M_1^n) = (G, M_2^n)$$

Definição 2.1.6. *Seja (G, M^n) uma G-variedade principal fechada. Dizemos que (G, M^n)* **borda equivariantemente** *se existe uma G-variedade principal compacta (G, W^{n+1}) com $(G, \partial W^{n+1}) = (G, M^n)$. Duas G-variedades principais (G, M_1^n) e (G, M_2^n) são* **bordantes equivariantemente** *se a união disjunta $(G, M_1^n \dot{\cup} M_2^n)$ borda equivariantemente.*

A relação acima é uma relação de equivalência e denotamos à classe de equivalência de uma variedade (G, M^n) por $[G, M^n]_2$.

Definição 2.1.7. *O conjunto das classes de equivalência da relação acima é chamado de* **grupo de bordismo equivariante não-orientado de dimensão n do grupo G** *e é denotado por $\mathcal{N}_n(G)$.*

O conjunto $\mathcal{N}_n(G)$ é um grupo abeliano com a operação soma definida por

$$[G, M_1^n]_2 + [G, M_2^n]_2 = [G, M_1^n \dot{\cup} M_2^n]_2.$$

A soma direta fraca $\mathcal{N}_*(G) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(G)$ torna-se um $\mathcal{N}_*$-módulo (à direita) graduado ao considerar a operação

$$[G, M^n]_2.[V^m]_2 = [G, M^n \times V^m]_2,$$

onde $[G, M]_2 \in \mathcal{N}_*(G)$ e $[V^m]_2 \in \mathcal{N}_*$, sendo a ação em $M^n \times V^m$ dada por $g(x, y) = (gx, y)$.

Chamamos $\mathcal{N}_*(G)$ de **módulo de bordismo do grupo finito G**.

Obs.: Conner & Floyd em [4] consideram mais geralmente $\mathcal{N}_*(G, A)$ onde as ações livres são trocadas por ações A-livres.

2.2 Classes de Stiefel-Whitney

Originalmente considerava-se classes de Stiefel de uma variedade, classes de Whitney de um fibrado vetorial e classes de Stiefel-Whitney do fibrado tangente à uma variedade. Posteriormente estes conceitos foram unificados, considerando classes de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial. Nesta seção resumimos a definição explícita das classes de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial, como em Conner-Floyd [4]. Posteriormente definimos axiomaticamente as classes de Stiefel-Whitney e resumimos algumas de suas propriedades, seguindo Milnor [11].

Dado um grupo de Lie G, consideremos o G-fibrado universal

$$\pi : E(G) \to B(G).$$

Para $G = \mathbb{Z}_2$ temos $B(\mathbb{Z}_2) = I\!RP^\infty$, onde $I\!RP^\infty$ é a união ascendente $I\!RP^1 \subset I\!RP^2 \subset \cdots \subset I\!RP^n \subset \ldots$ de espaços projetivos.

Como $H^i(I\!RP^\infty;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \forall i,$ temos $H^*(I\!RP^\infty;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]$, uma álgebra polinomial com um gerador 1-dimensional $t \in H^1(I\!RP^\infty;\mathbb{Z}_2)$.

Para $G = (\mathbb{Z}_2)^n$, como $B(G_1 \times G_2) = B(G_1) \times B(G_2)$, temos

$$H^*(B((\mathbb{Z}_2)^n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t_1, \ldots, t_n],$$

com cada t_i 1-dimensional.

Para $G = O(n)$, o grupo ortogonal, denotando por D o subgrupo das matrizes ortogonais diagonais em $O(n)$, temos $D \cong (\mathbb{Z}_2)^n$ e o seguinte resultado: A inclusão $(\mathbb{Z}_2)^n \subset O(n)$ induz um monomorfismo

$$\rho : H^*(B(O(n));\mathbb{Z}_2) \to H^*(B((\mathbb{Z}_2)^n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t_1 \ldots, t_n]$$

cuja imagem são os polinômios simétricos em $t_1, \ldots, t_n$.

Em particular, denotaremos os **polinômios simétricos elementares**

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k} t_{j_1}\dots t_{j_k}$$

simplesmente por $\sum t_1 \dots t_k$.

Definição 2.2.1. *As* **classes de Stiefel-Whitney universais** *do fibrado $\pi : E(O(n)) \to B(O(n))$ são as classes de cohomologia $w_i \in H^i(B(O(n)); \mathbb{Z}_2)$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\rho(w_i) = \sum t_1 \dots t_i$, os polinômios simétricos elementares. A* **classe de Stiefel-Whitney universal total** *de $E(O(n))$ é*

$$w = 1 + w_1 + \cdots + w_n.$$

Temos então que

$$H^*(B(O(n)); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n].$$

Considere agora $\tau : E \to X$ um fibrado vetorial n-dimensional com X um CW-complexo. Tomando um produto interno sobre o fibrado, podemos considerar τ como um $O(n)$-fibrado. Assim existe uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E(O(n)) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow{f} & B(O(n)), \end{array}$$

onde $\pi : E(O(n)) \to B(O(n))$ é um $O(n)$-fibrado universal com fibra $\mathbb{R}^n$. Por universalidade, o homomorfismo

$$f^* : H^*(B(O(n)); \mathbb{Z}_2) \to H^*(X; \mathbb{Z}_2)$$

é independente da aplicação fibrada particular.

Definição 2.2.2. *As* **classes de Stiefel-Whitney** *de um $O(n)$-fibrado vetorial $\tau : E \to X$ são definidas como*

$$w_i(\tau) = f^*(w_i) \in H^i(X; \mathbb{Z}_2),$$

onde os w_i's são as classes de Stiefel-Whitney universais.

Agora vejamos a definição axiomática das classes de Stiefel-Whitney.

As **classes de cohomologia de Stiefel-Whitney** de um fibrado vetorial são definidas através de quatro axiomas:

Axioma 2.2.3. *Para cada fibrado vetorial ξ corresponde uma seqüência de classes de cohomologia*

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

chamadas de classes de Stiefel-Whitney de ξ. Se ξ é um fibrado n-dimensional então

$$\begin{aligned} w_0(\xi) &= 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}_2), && \text{elemento unidade,} \\ w_i(\xi) &= 0 \quad \text{para } i > n, && \text{a classe nula.} \end{aligned}$$

Axioma 2.2.4 (Naturalidade). *Se $f : B(\xi) \to B(\eta)$ é coberta por uma aplicação fibrada de ξ em η então*

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta),$$

onde

$$f^* : H^i(B(\eta); \mathbb{Z}_2) \to H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2).$$

Axioma 2.2.5 (Teorema do Produto de Whitney). *Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então*

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta),$$

onde $\smile$ é o produto cup.

Axioma 2.2.6. *Para o fibrado linha canônico γ_1^1 sobre a esfera S^1, a classe de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1)$ é não-nula.*

As classes de Stiefel-Whitney da primeira definição satisfazem os quatro axiomas acima.

Milnor [11] prova a existência de classes de Stiefel-Whitney dando uma construção em termos das "Operações Quadrado de Steenrod".

As classes de Stiefel-Whitney têm as seguintes propriedades.

Proposição 2.2.7. *Se ξ é isomorfo a η então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.*

Proposição 2.2.8. *Se ε é um fibrado vetorial trivial então $w_i(\varepsilon) = 0$ para $i > 0$.*

Proposição 2.2.9. *Se ε é trivial então $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$.*

Proposição 2.2.10. *Se ξ é um fibrado n-dimensional com uma métrica Euclideana que possui uma secção totalmente não-nula, então $w_n(\xi) = 0$. Se ξ possui k secções que são totalmente independentes, então*

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \cdots = w_n(\xi) = 0.$$

Denotemos por $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ o anel consistindo de todas séries formais infinitas

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \quad \text{com} \quad a_i \in H^i(B,\mathbb{Z}_2).$$

A operação produto deste anel é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} a.b &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) \\ &= (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \cdots . \end{aligned}$$

Definição 2.2.11. *A* **classe de Stiefel-Whitney total** *de um fibrado n-dimensional ξ sobre B é definida como o elemento*

$$w(\xi) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n + 0 + \cdots$$

do anel $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$.

O Teorema do Produto de Whitney torna-se então

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi).w(\eta),$$

onde o lado direito é a operação produto do anel.

Quando $\xi = \tau_M$ denotamos por

$$w(M) = w(\tau_M),$$

a classe de Stiefel-Whitney total do fibrado tangente à variedade M e diremos simplesmente **classe de Stiefel-Whitney de M**.

Como exemplo temos:

a) $w(S^n) = 1$;

b) $w(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$, onde $a \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ é o gerador.

2.3 Números de Stiefel-Whitney

Seja M^n uma variedade diferenciável fechada, possivelmente desconexa. Denotamos a única **classe de homologia fundamental de** M por

$$[M] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2).$$

Para cada classe de cohomologia $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ denotamos o **índice de Kronecker** por

$$v[M] = < v, [M] > \in \mathbb{Z}_2.$$

Seja $I = (i_1, \ldots, i_r)$ uma **partição de n**, isto é, $i_1, \ldots, i_r$ são inteiros não negativos com $i_1 + \cdots + i_r = n$. Quando $I = n$ dizemos que I é uma **partição trivial** de n. Para cada fibrado vetorial ξ podemos formar o monômio

$$w_{i_1}(\xi) \smile \cdots \smile w_{i_r}(\xi) \in H^n(B(\xi); \mathbb{Z}_2),$$

onde $\smile$ denota o produto cap, que denotaremos simplesmente por

$$w_{i_1}(\xi) \ldots w_{i_r}(\xi).$$

Em particular, considerando $\xi = \tau_M$, o fibrado tangente da variedade M, temos

$$w_{i_1}(\tau_M) \ldots w_{i_r}(\tau_M) \in H^n(M; \mathbb{Z}_2).$$

Definição 2.3.1. *O* **número de Stiefel-Whitney** *da variedade fechada M^n, associado à partição $I = (i_1, \ldots, i_r)$ de n é o inteiro mod 2*

$$W_I(M) = < w_{i_1}(\tau_M) \ldots w_{i_r}(\tau_M), [M] > .$$

A importância dos números de Stiefel-Whitney é ilustrada pelo teorema seguinte e pela sua recíproca.

Teorema 2.3.2 (Pontrjagin). *Se B^{n+1} é uma variedade diferenciável compacta com $\partial B = M^n$, então todos os números de Stiefel-Whitney de M são nulos.*

Como aplicação deste teorema temos: $\mathbb{R}P^n$ borda $\Leftrightarrow$ n é ímpar.

A recíproca do Teorema de Pontrjagin é devida a Thom.

Teorema 2.3.3 (Thom). *Se todos os números de Stiefel-Whitney de M são nulos, então existe uma variedade diferenciável compacta B^{n+1} com $\partial B = M^n$.*

Corolário 2.3.4. *Duas n-variedades diferenciáveis fechadas M_1 e M_2 pertencem à mesma classe de bordismo não-orientado se e somente se todos os números de Stiefel-Whitney correspondentes de M_1 e M_2 são iguais.*

A característica de Euler módulo 2 de uma variedade M é um invariante da classe de bordismo pois considerando a partição trivial $I = n$ temos o seguinte relacionamento (ver [11, Corolário11.12]) entre o número de Stiefel-Whitney $W_n(M)$ e $\chi(M)$.

Teorema 2.3.5. *Se M é uma variedade diferenciável compacta então*

$$W_n(M) \equiv \chi(M) \mod 2.$$

2.4 Fibrado Involução

Uma **involução** é um homeomorfismo $T : X \to X$ de período 2. Considerando $\mathbb{Z}_2 \equiv \{1, T\}$, identificaremos uma involução sobre X com uma ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre X e a denotaremos por (T, X).

Como uma involução livre (T, M^n) sobre uma variedade fechada é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade principal fechada temos uma relação de bordismo e o grupo de bordismo $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ (Ver Definição 2.1.7). Especificamente, (T, M^n) **borda**, escrito $[T, M^n]_2 = 0$, se existe uma involução livre (S, B^{n+1}) sobre uma variedade compacta com $\partial B^{n+1} = M^n$ e $S_{|_{M^n}} = T$.

Consideremos então (T, M^n) uma involução *livre* e $M \to \frac{M}{T}$ o $\mathbb{Z}_2$-fibrado principal associado. Por 1.5, existem: uma aplicação equivariante $M^n \to E(\mathbb{Z}_2)$, onde $E(\mathbb{Z}_2)$ é um $\mathbb{Z}_2$-fibrado universal, e uma aplicação induzida

$$\rho : \frac{M^n}{T} \to \frac{E(\mathbb{Z}_2)}{T} = B(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{R}P^\infty$$

única a menos de homotopia, isto é, temos um diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & E(\mathbb{Z}_2) = S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{M}{T} & \xrightarrow{\rho} & B(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{R}P^\infty. \end{array}$$

Temos então o diagrama induzido em cohomologia

$$\begin{array}{ccc} H^*(E(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^*(M; \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(B(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\rho^*} & H^*(\frac{M}{T}; \mathbb{Z}_2). \end{array}$$

Como $H^*(B(\mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t]$, uma álgebra polinomial com um gerador 1-dimensional, podemos considerar, como na Definição 2.2.2,

$$\rho^*(t) \in H^1\left(\frac{M}{T}; \mathbb{Z}_2\right).$$

Denotaremos $c = \rho^*(t)$ e a chamaremos de a **classe característica da involução** (T, M).

Sejam $\xi \to V^n$ um fibrado k-dimensional e $q : S(\xi) \to V^n$ o **fibrado esfera** associado a ξ, onde a fibra é uma $(k-1)$-esfera S^{k-1} e $S(\xi)$ é uma $(n+k-1)$-variedade fechada.

Como a aplicação antipodal $A : S^{k-1} \to S^{k-1}$ está no centro de $O(k)$, temos correspondentemente uma involução livre preservando fibra sobre $S(\xi)$, que em cada fibra reduz-se à aplicação antipodal e que denotaremos por $T : S(\xi) \to S(\xi)$.

Chamamos $(T, S(\xi))$ de o **fibrado involução** associado a ξ.

Consideremos então, como acima, o $\mathbb{Z}_2$-fibrado principal $S(\xi) \to \frac{S(\xi)}{T}$ associado ao fibrado involução $(T, S(\xi))$, o diagrama correspondente

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[dr, hook] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dr, hook] & \\
& S(\xi) \arrow[rr] \arrow[d] & & E(\mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
& \frac{S(\xi)}{T} \arrow[rr, "\rho"] & & B(\mathbb{Z}_2),
\end{tikzcd}$$

e $c = \rho^*(t)$ a classe característica da involução $(T, S(\xi))$.

Denotando $\mathbb{R}P(\xi) = \frac{S(\xi)}{T}$ temos também um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & \frac{S^{k-1}}{A} = \mathbb{R}P^{k-1} \arrow[dr, hook] & \\
& S(\xi) \arrow[rr] \arrow[dr, "q"'] & & \frac{S(\xi)}{T} = \mathbb{R}P(\xi) \arrow[dl, "p"] \\
& & V^n &
\end{tikzcd}$$

onde $p : \mathbb{R}P(\xi) \to V^n$ é um fibrado, com fibra $\mathbb{R}P^{k-1}$, chamado de **fibrado espaço projetivo associado ao fibrado vetorial** $\xi \to V^n$.

Consideremos agora a inclusão $i : \mathbb{R}P^{k-1} \to \mathbb{R}P(\xi)$.

Por um lado, considerando os $\mathbb{Z}_2$-fibrados, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[dr, hook] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dr, hook] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dr, hook] & \\
& S^{k-1} \arrow[rr, "\text{aplic. fibrada}"] \arrow[d] & & S(\xi) \arrow[rr] \arrow[d] & & E(\mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
& \mathbb{R}P^{k-1} \arrow[rr, "i"] & & \mathbb{R}P(\xi) \arrow[rr, "\rho"] & & B(\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

e correspondentemente

$$\begin{tikzcd}
H^1(E(\mathbb{Z}_2);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^1(S(\xi);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^1(S^{k-1};\mathbb{Z}_2) \\
\mathbb{Z}_2 = H^1(B(\mathbb{Z}_2);\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[u] & H^1(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "i^*"] \arrow[u] & H^1(\mathbb{R}P^{k-1};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

que associa

$$t \longrightarrow \rho^*(t) = c \longrightarrow i^*(c).$$

Assim, pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney, 2.2.4, a imagem $i^*(c)$ de $c \in H^1(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2)$ pelo homomorfismo $i^* : H^1(\mathbb{R}P(\xi);\mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^{k-1};\mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^{k-1};\mathbb{Z}_2)$.

Por outro lado, considerando $p : \mathbb{R}P(\xi) \to V^n$ e os seus fibrados tangentes, $\tau_{RP(\xi)}$ e τ_V, temos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{k-1} \arrow[dr, hook] & & \mathbb{R}^{n+k-1} \arrow[dr, hook] & & \mathbb{R}^n \arrow[dr, hook] & & \mathbb{R}^n \arrow[dr, hook] & \\
& \xi_2 \arrow[rr] \arrow[drr] & & \tau_{RP(\xi)} \arrow[rr] \arrow[d] & & \xi_1 \arrow[rr] \arrow[dll] & & \tau_V \arrow[d] \\
& & & \mathbb{R}P(\xi) \arrow[rrrr, "p"] & & & & V^n
\end{tikzcd}$$

onde

$\xi_1 = p^!(\tau_V)$ é o fibrado induzido por p;

ξ_2 é o fibrado dos vetores de $\tau_{RP(\xi)}$ paralelos às fibras $I\!\!RP^{k-1}$ de $I\!\!RP(\xi) \to V^n$.

Como $I\!\!RP(\xi)$ é localmente um produto temos, usando o Lema 1.4.17,

$$\tau_{RP(\xi)} = \xi_1 \oplus \xi_2.$$

(Observe que daí temos $\xi_{1|RP^{k-1}} \cong \nu = \nu(I\!\!RP^{k-1}, I\!\!RP(\xi))$.)

Considerando $p : I\!\!RP(\xi) \to V^n$ temos por naturalidade que a **classe de Stiefel-Whitney total de ξ_1** é dada por

$$w(\xi_1) = p^*(w(V^n)) = p^*(\sum_{r=0}^{n} w_r) = \sum_{r=0}^{n} p^*(w_r) = 1 + p^*(w_1) + \cdots + p^*(w_n),$$

onde $w_r = w_r(V^n)$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, são as classes de Stiefel-Whitney de τ_{V^n}.

A **classe de Stiefel-Whitney total de ξ_2 ao longo da fibra em $I\!\!RP(\xi)$** foi calculada por Borel-Hirzebruch [1].

Teorema 2.4.1 (Borel-Hirzebruch). *A classe de Stiefel-Whitney total de ξ_2 ao longo da fibra em $I\!\!RP(\xi)$ é dada por*

$$w(\xi_2) = \sum_{s=0}^{k} (1+c)^{k-s} p^*(v_s) = (1+c)^k + (1+c)^{k-1} p^*(v_1) + \cdots + p^*(v_k),$$

onde $v_s = w_s(\xi)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, são as classes de Stiefel-Whitney do fibrado vetorial k-dimensional $\xi \to V^n$.

Como ξ_2 é um fibrado $(k-1)$-dimensional segue também que vale a **relação**

$$c^k = c^{k-1} p^*(v_1) + \cdots + p^*(v_k).$$

Assim, a **classe de Stiefel-Whitney total de $I\!\!RP(\xi)$** é

$$\begin{aligned} w(I\!\!RP(\xi)) &= w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1).w(\xi_2) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{n} p^*(w_r)\right) . \left(\sum_{s=0}^{k} (1+c)^{k-s} p^*(v_p)\right). \end{aligned}$$

Explicitamente, cada classe de Stiefel-Whitney de $I\!RP(\xi)$ é dada por

$$w_i(I\!RP(\xi)) = \sum_{r+s+q=i} \binom{k-s}{q} p^*(w_r v_s) c^q,$$

onde $w_r = w_r(V^n) \in H^r(V^n; \mathbb{Z}_2)$, $v_s = w_s(\xi \to V^n) \in H^s(V^n; \mathbb{Z}_2)$ e $c \in H^1(I\!RP(\xi); \mathbb{Z}_2)$.

2.5 Classe de Bordismo de Variedade com Involução

Dada uma involução sobre uma variedade M^n descrevemos sua classe de bordismo $[M]_2 \in \mathcal{N}_n$ em termos de seu conjunto de pontos fixos.

Consideremos inicialmente o caso em que a involução (T, M) é livre de pontos fixos.

Proposição 2.5.1. *Se M^n é uma variedade fechada admitindo uma involução livre de pontos fixos, então M borda.*

Uma prova geométrica deste fato é considerar

$T : M \to M$ a involução livre de pontos fixos,

$\theta : M \times I \to M \times I$ involução em $M \times I$ definida por $\theta(x,t) = (Tx, 1-t)$.

Como θ é livre podemos considerar a variedade $W = \frac{M \times I}{\theta}$, para a qual temos

$$\partial W = \partial\left(\frac{M \times I}{\theta}\right) = \frac{\partial M \times I}{\theta} \cup \frac{M \times \partial I}{\theta} = \frac{M \times \{0,1\}}{\theta} \cong M.$$

Considere agora uma involução diferenciável (T, M) sobre uma variedade diferenciável possivelmente desconexa. Fixe daqui em diante uma métrica Riemmaniana sobre M^n com respeito a qual T é uma isometria.

Denote $F = \cup F^i$, onde

F é o conjunto dos pontos fixos de T.

F^i é a união das componentes i-dimensionais do conjunto dos pontos fixos $(0 \leq i \leq n)$.

O conjunto F^i é uma subvariedade i-dimensional mergulhada regularmente em M^n.

Observe que F^n consiste das componentes de M^n que são ponto a ponto fixadas por T, não tendo portanto fibrado normal. Note também que uma vizinhança tubular N de F é uma união disjunta de vizinhanças tubulares em torno de cada componente de F.

Denote

$\nu_i = \nu(F^i, M) \to F^i$ **o fibrado normal** a F^i em M^n, $i < n$.

$q : S(\nu_i) \to F^i$ o (n-i-1)-**fibrado esfera** diferenciável correspondente.

Para cada $i < n$ existe um fibrado involução $(T, S(\nu_i))$ do fibrado esfera $S(\nu_i)$.

Denotemos

$$(T, S(\nu)) = \bigcup_{i<n} (T, S(\nu_i))$$

a união disjunta, onde chamamos

$S(\nu)$ o **fibrado esfera normal ao conjunto dos pontos fixos.**

Temos então

$$[T, S(\nu)]_2 = \sum_{i=0}^{n-1} [T, S(\nu_i)]_2 \in \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2).$$

Considerando agora $F^n = \emptyset$, N uma vizinhança tubular de F e denotando $B^n = M^n - N$, temos que B^n é uma subvariedade com bordo $S(\nu)^{n-1}$ mergulhada regularmente em M, sobre a qual T não tem pontos fixos. Assim, por definição, $[T, S(\nu)]_2$ borda, isto é,

$$[T, S(\nu)]_2 = [T, \partial B^n]_2 = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2).$$

Finalmente chegamos ao Teorema de Conner-Floyd [4, Teorema 24.2].

Teorema 2.5.2. *Seja (T, M^n) uma involução diferenciável sobre uma variedade fechada. Denote por $q : \nu \to F$ o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos F, por $q' : \nu \oplus 1 \to F$ a soma de Whitney de ν com o fibrado linha trivial, e por $S(\nu \oplus 1)$ o fibrado esfera associado a q'. Então*

$$[M^n]_2 = [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

2.6 Fibrado Linha Gerado por uma Subvariedade de 1-Codimensional

Na tentativa de obter condições para que uma $\mathbb{Z}_2$-variedade M tenha classe de bordismo nula consideramos inicialmente o caso especial em que o conjunto dos pontos fixos é 1-codimensional. A técnica empregada aqui é baseada em Wasserman, [14], que utiliza o fibrado linha gerado por uma subvariedade 1-codimensional A de uma variedade M. A condição obtida para que M borde depende de uma certa classe de Stiefel-Whitney associada a A.

Em [14, def. 24] Wasserman mostra o seguinte resultado:

Proposição 2.6.1. *Se A é uma subvariedade invariante fechada de codimensão 1 de uma G-variedade M, então o fibrado normal de A em M, $p : \nu = \nu(A, M) \to A$, pode ser estendido a um fibrado linha sobre M inteiro, $\bar{p} : \bar{\nu} \to M$. Mais ainda, $\bar{\nu}$ tem uma secção equivariante $\bar{s} : M \to \bar{\nu}$ que zera exatamente sobre A e que é transversa à secção nula de ν.*

Prova. Identifiquemos uma vizinhança tubular invariante U de A com ν, observando que cada ponto $a \in A$ é associado a um vetor nulo $(a, 0)$ e que cada ponto $x \in U - A$ é associado a um vetor não-nulo.
Considerando o fibrado induzido, podemos estender $p : \nu \to A$ ao fibrado linha $p^!\nu \to \nu$, isto é,

$$\begin{array}{ccc} p^!\nu & \longrightarrow & \nu \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U \equiv \nu & \xrightarrow{p} & A. \end{array}$$

Considerando a secção canônica em $p^!\nu$, isto é, $s : \nu \to p^!\nu$, dada por $s(x) = (x, x)$, esta zera exatamente sobre A. Daí, por 1.4.14, o fibrado linha $p^!\nu$ é trivial fora de A. Assim, basta estender $p^!\nu$ a um fibrado linha $\bar{\nu} \xrightarrow{\bar{p}} M$ colocando

$$\bar{\nu}_{|(M-U)} = (M - U) \times \mathbb{R}.$$

□

Definição 2.6.2. *O G-fibrado* $\bar{\nu} \to M$ *obtido na proposição acima é chamado de* **G-fibrado linha gerado por A.**

Considerando a inclusão $i : A^{n-1} \longrightarrow M^n$ temos a aplicação induzida em homologia

$$i_* : H_{n-1}(A;\mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(M;\mathbb{Z}_2),$$

que leva $[A]$, a classe fundamental de A, em $i_*[A]$.

Por outro lado, pelo Teorema de Dualidade de Poincaré Mod 2 [9, p.213], a aplicação

$$H^1(M;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\frown [M]} H_{n-1}(M;\mathbb{Z}_2)$$

dada por $x \to x \frown [M]$ é um isomorfismo.

Assim, conforme Wasserman [14, Obs.26] ou Milnor [11, Exercício 11C, pag. 135], temos

Lema 2.6.3. *Sejam* $i : A^{n-1} \to M^n$ *um mergulho entre variedades compactas,* $\nu = \nu(A, M)$ *o fibrado linha normal a* A *e* $\bar{\nu}$ *o fibrado linha gerado por* A. *Então* $i_*[A]$ *representa* $w_1(\bar{\nu})$, *isto é,*

$$i_*[A] = w_1(\bar{\nu}) \frown [M].$$

Prova. Usando a nossa notação temos por Koschorke [7, Fato 9.7, pag.97] que para todo $c \in H^{n-1}(M;\mathbb{Z}_2)$ vale a relação

$$< i^*(c), [A] >=< c \smile w_1(\bar{\nu}), [M] > .$$

O primeiro termo da equação pode ser escrito como $< i^*(c), [A] >=< c, i_*[A] >$. Para o segundo termo temos a relação [9, pag.190]

$$< c \smile w_1(\bar{\nu}), [M] >=< c, w_1(\bar{\nu}) \frown [M] >, \forall c.$$

Daí, obtemos

$$< c, i_*[A] >=< c, w_1(\bar{\nu}) \frown [M] >, \ \forall c,$$

ou seja,

$$i_*[A] = w_1(\bar{\nu}) \frown [M].$$

□

Temos então

Proposição 2.6.4. *Sejam M uma $\mathbb{Z}_2$-variedade diferenciável conexa compacta, $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$ 1-codimensional conexo e $\bar{\nu}$ o fibrado linha gerado por F. Se $w_1(\bar{\nu}) = 0$ então $M - F$ possui duas componentes conexas.*

Prova. Como $w_1(\bar{\nu}) = 0$, pelo Lema 2.6.3, o homomorfismo i_* é nulo no nível 1, e assim o seu transposto i^* no nível $n-1$ também é nulo. Pelo Teorema de Dualidade de Lefschetz temos $H_0(M - F; \mathbb{Z}_2) \simeq H^n(M, F; \mathbb{Z}_2)$. Considerando a seqüência exata de cohomologia do par (M, F), com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$,

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & H^{n-1}(M) & \xrightarrow{i^*=0} & H^{n-1}(F) & \to & H^n(M,F) & \to & H^n(M) & \to & H^n(F) & \to \cdots, \\ & & & \| & & & & \| & & \| & \\ & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \mathbb{Z}_2 & & 0 & \end{array}$$

obtemos $H^n(M, F; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Daí $H_0(M - F; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, isto é, $M - F$ tem duas componentes conexas. □

Denotemos então as duas componentes conexas de $M - F$ por W_1 e W_2. Como $\mathbb{Z}_2$ atua livremente em $M - F = W_1 \dot{\cup} W_2$, temos uma involução livre

$$T : W_1 \dot{\cup} W_2 \to W_1 \dot{\cup} W_2.$$

Como a ação de $\mathbb{Z}_2$ no fibrado normal manda x em -x, temos que $x \in W_1$ é levado em $T(x) \in W_2$ e vice-versa. Daí, por conexidade, W_1 e W_2 são homeomorfas.

Denotemos $W = \bar{W}_1 \simeq \bar{W}_2$, onde $\bar{W}_i$ denota o fecho de W_i. Temos então:

$$\partial W = F \quad e \quad M = W \cup_\partial W = 2W,$$

onde $2W$ denota o **dobro de W**.

A variedade dobro de W tem uma propriedade muito importante

Lema 2.6.5. *Se W^n é uma variedade com bordo, então $2W$ é bordo de uma variedade $(n+1)$-dimensional V.*

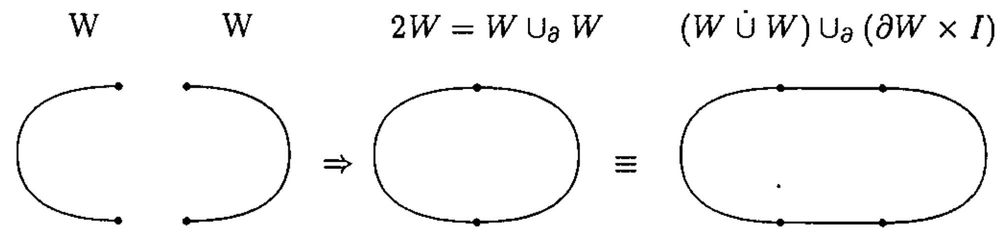
Prova. Consideremos a variedade com cantos $V = W \times I$, onde $I = [-1, +1]$. Temos

$$\partial V = \partial(W \times I) = \partial W \times I \bigcup_{Id_{\partial W \times \partial I}} W \times \partial I = \partial W \times I \bigcup_{Id_{\partial W \times \partial I}} W \times S^0 \equiv 2W,$$

onde a segunda igualdade é o bordo do produto cartesiano de duas variedades com bordo [3, 13.13]. $\square$

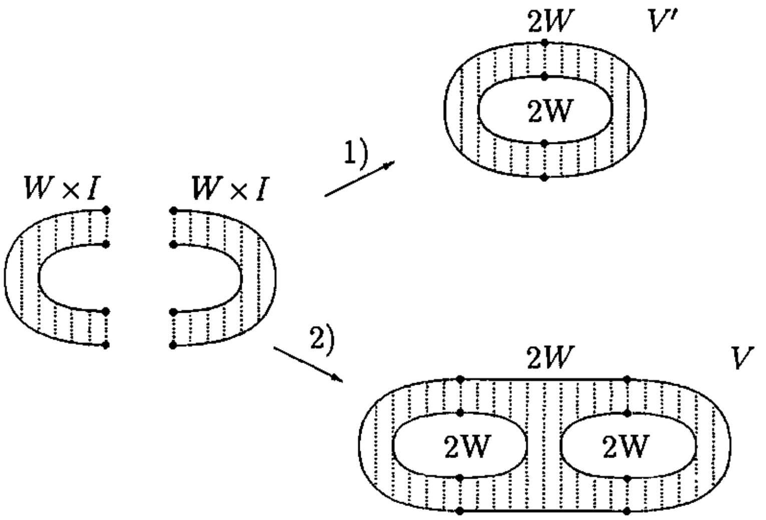
Uma visão geométrica deste lema é esboçada abaixo.

Observe inicialmente que colar duas W^n pelo bordo é equivalente a colar duas W em $\partial W \times I$.



(Para a diferenciabilidade a colagem deve ser feita sobrepondo duas vizinhanças tubulares de ∂W.)

Considerando dois dobros de W, podemos repetir o processo acima e "preencher" os espaços delimitados obtendo uma $(n+1)$-variedade V.



Aqui $V' = (W \times I) \cup_{\partial W \times I} (W \times I)$.

Temos então dois casos:

1) $\partial V' = 2W \dot\cup 2W \implies [\partial V']_2 = [2W \dot\cup 2W]_2 = [2W]_2 + [2W]_2 = 0 \mod 2$;

2) $\partial V = 2W \dot\cup 2W \dot\cup 2W \implies [\partial V]_2 = [2W \dot\cup 2W]_2 + [2W]_2 \overset{1)}{=} [2W]_2$.

Obtivemos assim a variedade V com bordo $2W$.

Vejamos então uma condição na qual uma $\mathbb{Z}_2$-variedade com conjunto de pontos fixos 1-codimensional borda.

Teorema 2.6.6. *Sejam M uma $\mathbb{Z}_2$-variedade diferenciável conexa compacta, $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$ conexo 1-codimensional e $\bar\nu$ o fibrado linha gerado por F. Se $w_1(\bar\nu) = 0$ então existe uma variedade V com $\partial V = M$.*

Prova. Pela Proposição 2.6.4 $M - F$ tem duas componentes. Considerando $M - F = W_1 \dot\cup W_2$ vimos acima que a involução livre atuando em $W_1 \dot\cup W_2$ faz $\bar W_1 \equiv \bar W_2 = W$, $\partial W = F$ e $M = 2W$. Daí, pelo Lema 2.6.5, existe uma variedade V com $\partial V = 2W$, isto é, $\partial V = M$. □

Segue imediatamente do Teorema de Pontrjagin, 2.3.2, que nas condições acima $W_I(M) = 0$ para toda partição I de n.

O mais importante é que o teorema absoluto acima pode ser estendido ao caso em que a variedade bordante V também é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade tendo conjunto de pontos fixos 1-codimensional.

Teorema 2.6.7. *Sejam M uma $\mathbb{Z}_2$-variedade diferenciável conexa compacta, $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$ conexo 1-codimensional e $\bar{\nu}$ o fibrado linha gerado por F. Se $w_1(\bar{\nu}) = 0$ então existe uma $\mathbb{Z}_2$-variedade tendo conjunto de pontos fixos 1-codimensional V com $\partial V = M$.*

Prova. Vimos acima que $V = W \times I$, onde $W = \bar{W}_1 \equiv \bar{W}_2$ e $M - F = W_1 \dot{\cup} W_2$. Para dar uma estrutura de $\mathbb{Z}_2$-variedade a V basta considerar uma ação ϕ em V dada por

$$\phi(w,t) = (w,-t), \quad \text{onde} \quad (w,t) \in W \times I.$$

Daí, V é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade tendo conjunto de pontos fixos 1-codimensional pois

$$V(\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, V) = \{(w,0) \in W \times I\} \equiv W.$$

□

No capítulo seguinte, usando a técnica do blow-up, verificamos que a condição $w_1(\bar{\nu}) = 0$ do teorema acima pode ser eliminada.

Capítulo 3

Blow-up e Ações Não-Singulares

Inicialmente, baseados em Wasserman [14] e [15], definimos blow-up e ações não-singulares. Em seguida determinamos relações entre a classe de bordismo de uma variedade M e seu blow-up $B(A, M)$. Concluímos analisando bordismo no caso de ações não-singulares.

3.1 Blow-up

Consideraremos aqui G um grupo de Lie compacto. Se $\pi : E \to X$ é um G-fibrado vetorial, com uma métrica Riemanniana invariante, denotamos:

$D(E)$ o **fibrado disco** de E;

$S(E)$ o **fibrado esfera unitária** de E;

$\mathbb{R}P(E) = \frac{S(E)}{\mathbb{Z}_2}$ o **fibrado projetivo real** de E;

$L(E) = \frac{S(E) \times R}{\mathbb{Z}_2}$ o **fibrado linha associado ao recobrimento** $S(E) \to \mathbb{R}P(E)$.

$\mathbb{R}P(E)$ é obtido de $S(E)$ identificando $v \in S(E)$ com $-v$.

Se A é uma subvariedade de uma G-variedade M denotamos

$\nu = \nu(A, M)$ o **fibrado normal** de A em M.

Quando A é fechada, invariante, $\partial A \subset \partial M$ e A é transversa a ∂M identificaremos ν com V_A, uma vizinhança tubular equivariante de A em M.

Considerando $A^m \hookrightarrow M^n$ e $n - m = k$ podemos obter a partir do fibrado ν o fibrado $I\!RP(\nu \oplus 1)$, isto é,

$$
\begin{tikzcd}
I\!R^k \arrow[r, hook] & \nu \arrow[d] & \Longrightarrow & I\!R^k \oplus I\!R^1 \arrow[r, hook] & \nu \oplus 1 \arrow[d] & \Longrightarrow & S^k \arrow[r, hook] & S(\nu \oplus 1) \arrow[d] \\
 & A & & & A & & & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\Longrightarrow & I\!RP^k \arrow[r, hook] & I\!RP(\nu \oplus 1) \arrow[d] \\
 & & A
\end{tikzcd}
$$

Considerando a ação sobre ν como sendo a ação obtida pela identificação de ν com a vizinhança tubular equivariante de A, e considerando sobre o espaço total do fibrado linha trivial 1 a ação trivial, obtemos uma ação sobre $\nu \oplus 1$ que induz uma ação sobre o espaço $I\!RP(\nu \oplus 1)$, tornando-o uma G-variedade.

Agora podemos definir o blow-up.

Definição 3.1.1. *Se A é uma subvariedade invariante fechada da G-variedade M com $\partial A \subset \partial M$ e A transversa a ∂M, definimos o* **blow-up equivariante de A em M** *por*

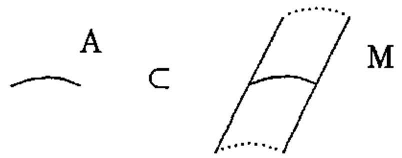
$$
B(A, M) = \begin{cases} M \#_A I\!RP(\nu \oplus 1), & se \quad \dim A < \dim M \\ M & se \quad \dim A = \dim M, \end{cases}
$$

onde $\#_A$ é a soma conexa ao longo de A.

O blow-up $B(A, M)$ é uma G-variedade diferenciável pois a soma conexa ao longo de A na definição acima é obtida pela colagem, ao longo dos bordos, de $(M - V_A)$ com $(I\!RP(\nu \oplus 1) - V_A)$ usando o Teorema do Colarinho Equivariante. ([2, Teorema V.1.5] ou [4, Teorema 21.2].)

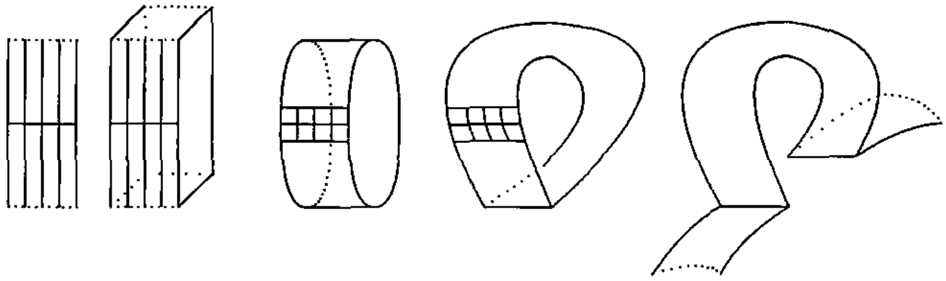
A construção blow-up pode ser esboçada geometricamente como descrito abaixo.

Denotando



temos

$\nu \qquad \nu \oplus 1 \qquad S(\nu \oplus 1) \qquad I\!\!RP(\nu \oplus 1) \qquad M \#_A I\!\!RP(\nu \oplus 1) = B(A, M)$



Podemos também obter $L(\nu)$ a partir de ν como segue:

Primeiro obtemos os fibrados $S(\nu)$ e $I\!\!RP(\nu)$:

$$\begin{tikzcd} I\!\!R^k \arrow[r, hook] & \nu \arrow[d] & \Longrightarrow & D^k \arrow[r, hook] & D(\nu) \arrow[d] & \Longrightarrow & S^{k-1} \arrow[r, hook] & S(\nu) \arrow[d] \\ & A & & & A & & & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Longrightarrow & I\!\!RP^{k-1} \arrow[r, hook] & I\!\!RP(\nu) \arrow[d] \\ & & A \end{tikzcd}$$

Daí, obtemos $L(\nu)$ como o fibrado linha associado ao $\mathbb{Z}_2$-fibrado principal $S(\nu) \to I\!\!RP(\nu)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R} \arrow[dr, hook] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, hook] \\
\mathbb{R} \arrow[dr, hook] & S(\nu) \times \mathbb{R} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & S(\nu) \arrow[d] \\
& L(\nu) = \frac{S(\nu)\times R}{\mathbb{Z}_2} \arrow[r] & \mathbb{R}P(\nu)
\end{tikzcd}$$

Ou seja,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, hook] & L(\nu) \arrow[d] \\
\mathbb{R}P^{k-1} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}P(\nu) \arrow[d] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Agora, restringindo a fibra $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\} \subset \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook] & D(L(\nu)) \arrow[d] \\
& A
\end{tikzcd}$$

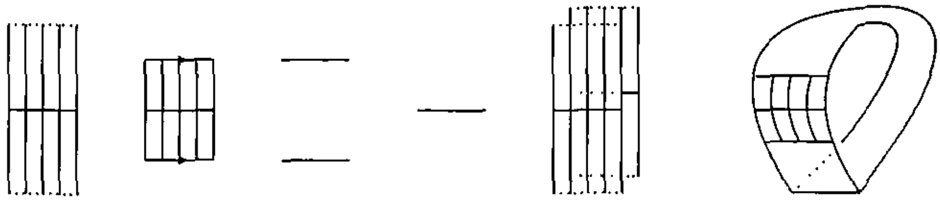
podemos dar uma **definição alternativa do blow-up**:

$$B(A, M) = [M - \overset{\circ}{D}(\nu)] \cup_f D(L(\nu)),$$

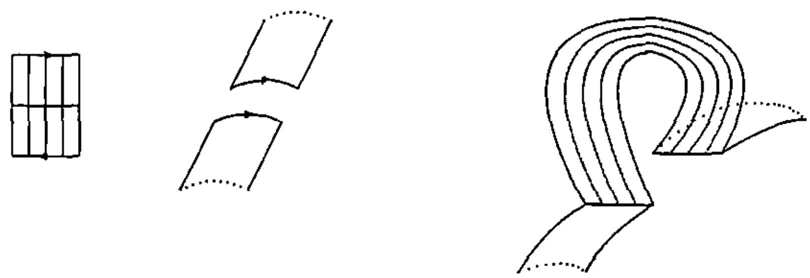
onde a aplicação colagem $f : S(L(\nu)) \to S(\nu)$ é a aplicação identidade.

Geometricamente, considerando A e M como antes, temos:

ν $\quad D(\nu)$ $\quad S(\nu)$ $\quad \mathbb{R}P(\nu)$ $\quad S(\nu) \times \mathbb{R}$ $\quad L(\nu) = \frac{S(\nu)\times R}{\mathbb{Z}_2}$



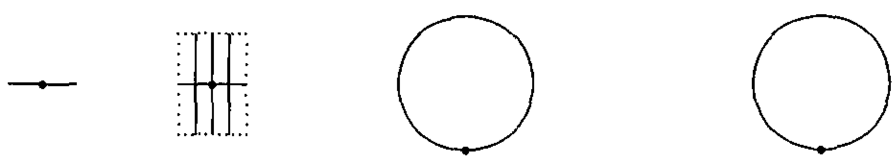
$D(L(\nu))$ $\qquad M - \overset{\circ}{D}(\nu)$ $\qquad [M - \overset{\circ}{D}(\nu)] \cup_f D(L(\nu)) = B(A, M)$



Informalmente, $B(A, M)$ é obtido de M deletando os pontos de A e adicionando retas normais a A em M (Se $\dim A < \dim M$).

Exemplo 3.1.2. *Seja* $M = S^1$ *e* $A = \{*\}$.
Temos

ν $\qquad \nu \oplus 1 \cong \overset{\circ}{D}{}^2$ $\qquad S(\nu \oplus 1) = S^1$ $\qquad \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = \frac{S^1}{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{R}P^1 = S^1$



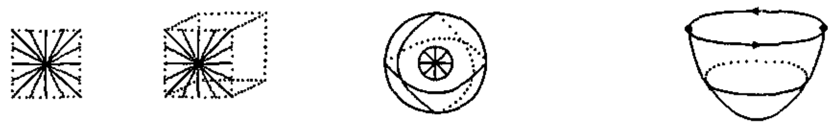
Assim

$$B(A, M) = M \underset{A}{\#} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = S^1 \underset{\{*\}}{\#} S^1 = S^1.$$

Observamos que a soma conexa ao longo de $A = \{*\}$ é a soma conexa usual.

Exemplo 3.1.3. *Seja* $M = S^2$ *e* $A = \{*\}$.
Temos

$$\nu \qquad \nu \oplus 1 \cong \mathring{D}^3 \qquad S(\nu \oplus 1) = S^2 \qquad \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = \tfrac{S^2}{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{R}P^2$$



Assim

$$B(A, M) = S^2 \underset{\{*\}}{\#} \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2.$$

Mais geralmente, para $M = S^n$ *e* $A = \{*\}$ *temos* $\mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = \mathbb{R}P^n$, *e assim*

$$B(A, M) = S^n \underset{\{*\}}{\#} \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^n.$$

Exemplo 3.1.4. *Seja* $M = S^2$ *e* $A = S^0$.
Considerando $A_1 = \{*\}$ *e* $\nu_1 = \nu(A_1, M)$, *vimos no Exemplo* 3.1.3 *que*

$$\mathbb{R}P(\nu_1 \oplus 1) = \mathbb{R}P^2.$$

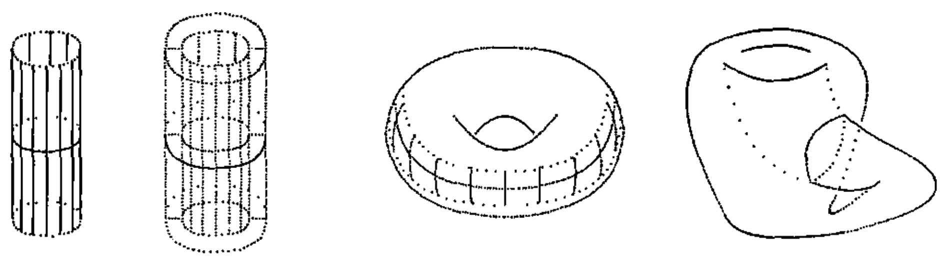
Assim

$$\begin{aligned} B(A, M) &= S^2 \#_A \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = S^2 \#_A (\mathbb{R}P^2 \dot{\cup} \mathbb{R}P^2) = \mathbb{R}P^2 \# S^2 \# \mathbb{R}P^2 \\ &= \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = Kb, \end{aligned}$$

onde Kb *denota a garrafa de Klein.*

Exemplo 3.1.5. *Seja* $M = S^2$ *e* $A = S^1$.
Temos

$$\nu \qquad \nu \oplus 1 \qquad S(\nu \oplus 1) = T^2 \qquad \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = \tfrac{T^2}{\mathbb{Z}_2} = Kb$$



onde T^2 denota o toro. Assim

$$B(A,M) = S^2 \underset{S^1}{\#} Kb = [S^2 - V_{S^1}] \cup_\partial [Kb - V'_{S^1}] = S^2,$$

onde V_{S^1} e V'_{S^1} são vizinhanças de S^1 em S^2 e em Kb.
Observamos aqui que a soma conexa ao longo de S^1 de uma variedade orientável com uma não-orientável resultou em uma orientável, fato que não ocorre na soma conexa usual.

Apesar de estarmos interessados apenas em variedades fechadas, vejamos um exemplo onde a variedade M tem bordo.

Exemplo 3.1.6. *Seja $M = D^2$ o disco e $A = \{*\}$ um ponto de seu interior. Como $\mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = \mathbb{R}P^2$ temos*

$$B(A,M) = D^2 \underset{\{*\}}{\#} \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D^2} = FM,$$

onde FM denota a faixa de Möbius.

O blow-up de A em M é apenas uma parte de uma construção mais geral que é o blow-up do conjunto de todos os pontos fixos de uma G-variedade M, como descrevemos abaixo.

Seja M uma G-variedade e denotemos

$$F = \mathrm{Fix}(G,M) = \dot\bigcup F_i = F_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, F_r,$$

$$\nu = \nu(F,M) = \sum_{i=1}^{r} \nu(F_i,M) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i.$$

O blow-up do conjunto dos pontos fixos F de M é dado por

$$B(F,M) = B(F_r, B(F_{r-1}, \ldots B(F_2, B(F_1,M))\ldots)),$$

ou seja,

$$B(F,M) = (\ldots((M \underset{F_1}{\#} \mathbb{R}P(\nu_1 \oplus 1)) \underset{F_2}{\#} \mathbb{R}P(\nu_2 \oplus 1)) \underset{F_3}{\#} \ldots) \underset{F_r}{\#} \mathbb{R}P(\nu_r \oplus 1).$$

Em particular, quando $F = S^0 = \{P_1, P_2\} \subset M$ temos a decomposição

$$B(S^0, M) = B(P_2, B(P_1, M)).$$

Observamos que apesar de podermos calcular $B(A, M)$, para uma dada subvariedade invariante A de M, isto não implica que M tenha A como o seu conjunto de pontos fixos.

Completemos agora os casos possíveis de blow-up em dimensão 2.

Recordemos que, pelo Teorema de Classificação de Superfícies Compactas, ver por exemplo [8], toda variedade compacta conexa 2-dimensional, M^2, é homeomorfa a uma esfera S^2, ou a uma soma conexa de toros T^2, ou a uma soma conexa de planos projetivos $\mathbb{R}P^2$.

Mais ainda, em termos de orientação temos:

M^2 orientada $\Rightarrow$ $M^2 = S^2$ ou $M^2 = T^2 \# \ldots \# T^2 = (T^2)^r$, $r \geq 1$;
M^2 não orientada $\Rightarrow$ $M^2 = \mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}P^2)^r$, $r \geq 1$.

Em termos de bordismo temos:

$[M^2]_2 = 0 \Rightarrow M^2 = S^2$, ou $M^2 = (T^2)^r$ ou $M^2 = (Kb)^r = (\mathbb{R}P^2)^{2r}$, $r \geq 1$;
$[M^2]_2 \neq 0 \Rightarrow M^2 = \mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$, $r \geq 1$.

Prosseguindo no cálculo dos blow-ups, como em exemplos anteriores, obtemos todos os blow-ups parciais possíveis em dimensão 2 a partir dos três casos abaixo:

1) $B(*, M^2) = M \#_{\{*\}} \mathbb{R}P^2 = M \# \mathbb{R}P^2$.

2) $B(S^0, M^2) = M \# \{\mathbb{R}P^2 \dot{\cup} \mathbb{R}P^2\} = M \# Kb$:

2.1) $[M]_2 = 0 \Rightarrow B(S^0, M^2) = M \# Kb = M \# (\mathbb{R}P^2)^2$;
2.2) $[M]_2 \neq 0 \Rightarrow B(S^0, M^2) = M \# Kb = (\mathbb{R}P^2)^{2r-1} \# (\mathbb{R}P^2)^2 = (\mathbb{R}P^2)^{2r+1}$.

3) $B(S^1, M^2) = M \#_{S^1} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) = M \#_{S^1} Kb = (M - V_{S^1}) \cup_\partial (Kb - V_{S^1})$:

3.1) $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} M^2$ mergulho homotopicamente nulo: $\quad B(S^1, M^2) = M^2$.

3.2) $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} M^2$ mergulho homotopicamente não-nulo:

3.2.1) $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} FM \subset M^2$ (mergulho).

$B(S^1, M^2) = (M - V_{S^1}) \cup_{\partial FM} FM = M^2$. Assim:

$B(S^1, (\mathbb{R}P^2)^r) = (\mathbb{R}P^2)^r$.

3.2.2) $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} S^1 \times I \subset M^2$ (mergulho direto).

$B(S^1, M^2) = (M - V_{S^1}) \cup_{\partial \mathrm{Cil}} \mathrm{Cil}$ (desorientado). Assim:

a) $B(S^1, (T^2)^r) = (Kb)^r$;

b) $B(S^1, (Kb)^r) = (T^2)^r$ ou $B(S^1, (Kb)^r) = (Kb)^r$ para $r > 1$;

c) $B(S^1, (\mathbb{R}P^2)^{2r-1})) = (\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$ para $r > 1$.

Aqui V_{S^1} denota uma vizinhança de S^1 em M^2 ou em $\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)$ e $\mathrm{Cil} = S^1 \times I$.

Podemos interpretar geometricamente os resultados acima como:

1) O blow-up de um ponto em M^2 cola um espaço projetivo na variedade M, tornando-a uma variedade não-orientável, caso ainda não o seja. Especificamente temos:

$B(*, S^2) = S^2 \# \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2$;
$B(*, (T^2)^r) = (T^2)^r \# \mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}P^2)^{2r+1}$;
$B(*, (\mathbb{R}P^2)^r) = (\mathbb{R}P^2)^r \# \mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}P^2)^{r+1}$.

2) O blow-up de uma esfera S^0 em M^2 cola uma garrafa de Klein na variedade M, tornando-a uma variedade não-orientável, caso ainda não o seja. Especificamente temos:

$B(S^0, S^2) = S^2 \# Kb = Kb = (\mathbb{R}P^2)^2$;
$B(S^0, (T^2)^r) = (T^2)^r \# Kb = (Kb)^{r+1} = (\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2)^{r+1} = (\mathbb{R}P^2)^{2r+2}$;
$B(S^0, (\mathbb{R}P^2)^r) = (\mathbb{R}P^2)^r \# Kb = (\mathbb{R}P^2)^{r+2}$.

3) O blow-up de S^1 em M^2 apenas modifica a variedade M^2 quando S^1 é um mergulho direto, $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} S^1 \times I \subset M^2$, homotopicamente não-nulo. Nestes casos o blow-up de S^1 em M^2 transforma uma soma conexa de r toros em uma soma conexa de r garrafas de Klein e vice-versa. Para $r > 1$ podemos ter também $B(S^1, (Kb)^r) = (Kb)^r$.

Esquematicamente, denotando $B_0 = B(*,\quad)$ e $B_1 = B(S^1,\quad)$, temos

$$
\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, "B_0"] & & T^2 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, "B_0"] \arrow[dd, shift left, "B_1"] & & (T^2)^2 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, "B_0"] \arrow[dd, shift left, "B_1"] & & \\
& \mathbb{R}P^2 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, "B_0"] & & (\mathbb{R}P^2)^3 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, "B_0"] & & (\mathbb{R}P^2)^5 \arrow[loop above, "B_1"] \arrow[dr, dashed, "B_0"] & \\
& & (\mathbb{R}P^2)^2 \arrow[loop below, "B_1"] \arrow[ur, "B_0"] \arrow[uu, shift left, "B_1"] & & (\mathbb{R}P^2)^4 \arrow[loop below, "B_1"] \arrow[ur, "B_0"] \arrow[uu, shift left, "B_1"] & & {}
\end{tikzcd}
$$

Em termos da característica de Euler correspondente a cada variedade temos

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & -2 \arrow[dr] & \\
& 1 \arrow[dr] & & -1 \arrow[dr] & & -3 \arrow[dr, dashed] \\
& & 0 \arrow[ur] & & -2 \arrow[ur] & & -4
\end{tikzcd}
$$

3.2 Ações Não-Singulares

Consideramos aqui G um grupo de Lie compacto atuando sobre um espaço X e H um subgrupo fechado de G.

Denotamos por X_H o **conjunto dos pontos de X com grupo de isotropia H**, isto é,

$$X_H = \{x \in X \mid G_x = H\}.$$

Denotamos também

$$X_{(H)} = GX_H.$$

Observamos que

$$X_{(H)} \equiv X(H) = \{x \in X \mid (G_x) = (H)\},$$

o **conjunto dos pontos de X com tipo de isotropia H**, definido na seção 1.2, pois:

$$\begin{aligned} y \in X_{(H)} &\Leftrightarrow y = gx \quad e \quad G_x = H \Leftrightarrow G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1} \quad e \quad G_x = H \\ &\Leftrightarrow G_y = gHg^{-1} \Leftrightarrow (G_y) = (H) \Leftrightarrow y \in X(H). \end{aligned}$$

Consideremos agora um tipo especial de ação muito importante.

Definição 3.2.1. *Uma ação de G em uma variedade M com grupo de isotropia principal igual a $\{e\}$ é dita* **ação não-singular** *(e M é dita* **G-variedade não-singular***) se $\forall x \in M$ temos:*

i) G_x é um $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial;

ii) $\dim_{\mathbb{Z}_2} G_x = \operatorname{codim} M(G_x)$.

Em particular, toda ação livre é não-singular.

O exemplo seguinte de variedade não-singular ilustra bem os conceitos e propriedades das seções 1.2 e 1.3 do capítulo 1.

Exemplo 3.2.2. *Seja $M = S^2$ e $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =< a, b >$, onde a e b são geradores de $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$. Considere uma G-ação em M dada por*

$$(a, (x, y, z)) \to a(x, y, z) = (-x, y, z);$$

$$(b, (x, y, z)) \to b(x, y, z) = (x, -y, z).$$

Como G é abeliano denotamos $(G_x) = G_x$. Os tipos de isotropia que ocorrem em M são os $\mathbb{Z}_2$-espaços vetoriais:

$$H_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad H_2 = \mathbb{Z}_2 \times \{0\}, \quad H_3 = \{0\} \times \mathbb{Z}_2, \quad e \quad H_4 = \{0\} \times \{0\} = e.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} M(H_1) &= \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \equiv \{N, S\}, \text{ pólos}, \\ M(H_2) &= \{(0, y, z) \in S^2;\ y^2 + z^2 = 1;\ z \neq \pm 1\} \equiv S^1 - \{N, S\}, \\ M(H_3) &= \{(x, 0, z) \in S^2;\ x^2 + z^2 = 1;\ z \neq \pm 1\} \equiv S^1 - \{N, S\}, \\ M(H_4) &= S^2 - M(H_1) - M(H_2) - M(H_3), \end{aligned}$$

e daí temos

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H_i = \operatorname{codim} M(H_i), \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4,$$

mostrando que S^2 com esta ação é uma G-variedade não-singular.

Em [14] Wasserman mostra que:

1. Ações com grupo de isotropia principal diferente de $\{e\}$ podem ser reduzidas a ações com grupo de isotropia igual a $\{e\}$;

2. Se o grupo de isotropia principal da ação é igual a $\{e\}$ então, através de um número finito de blow-ups equivariantes, a variedade M pode ser reduzida a uma variedade M' que tem apenas finitos 2-grupos como grupos de isotropia;

3. Quando o grupo G é abeliano a ação pode ser simplificada a uma ação não-singular;

4. Se M é uma G-variedade não-singular então o espaço quociente $\frac{M}{G}$ tem uma estrutura diferenciável. (Neste caso, geralmente $\frac{M}{G}$ é uma variedade com cantos.)

3.3 Classes de Bordismo de M e B(A,M)

Quando fazemos uma cirurgia em uma variedade fechada, a variedade resultante pertence à mesma classe de bordismo da variedade inicial [10, Teorema 1, pag.40]. Em geral, isto não acontece quando fazemos um blow-up. Vimos no Exemplo 3.1.3 que $M = S^2$, com $A = \{*\}$, transformou-se após o blow-up no espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$. Neste caso S^2 e $\mathbb{R}P^2$ não estão na mesma classe de bordismo. Vamos então determinar relações entre as classes de bordismo de M e $B(A, M)$.

Como $B(A, M) = M \#_A \mathbb{R}P(\nu \oplus 1)$ temos

$$[B(A, M)]_2 = [M \underset{A}{\#} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

Em particular, quando $A = \{*\}$ temos a soma conexa usual. Neste caso vale

$$[B(*, M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2,$$

pois a soma conexa $X\#Y$ pode ser vista como um tipo especial de cirurgia da variedade $X \dot{\cup} Y$ e daí, pela invariança da classe de bordismo por cirurgia, obtemos $[X\#Y]_2 = [X \dot{\cup} Y]_2 = [X]_2 + [Y]_2$.

Para o caso geral construiremos, como em [15], uma variedade W cujo bordo é a união de três das variedades da definição do blow-up.

Lema 3.3.1. *Seja A uma subvariedade invariante fechada de uma G-variedade fechada M^n e ν o fibrado normal de A em M. Então existe uma variedade W tal que*

$$\partial W = M \dot{\cup} B(A, M) \dot{\cup} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1).$$

Prova. Construamos uma tal $(n+1)$-variedade como

$$W = [M \times I \dot{\cup} \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) \times I] \cup_j D(\nu) \times I,$$

onde $I = [0, 1]$ e j é a inclusão de

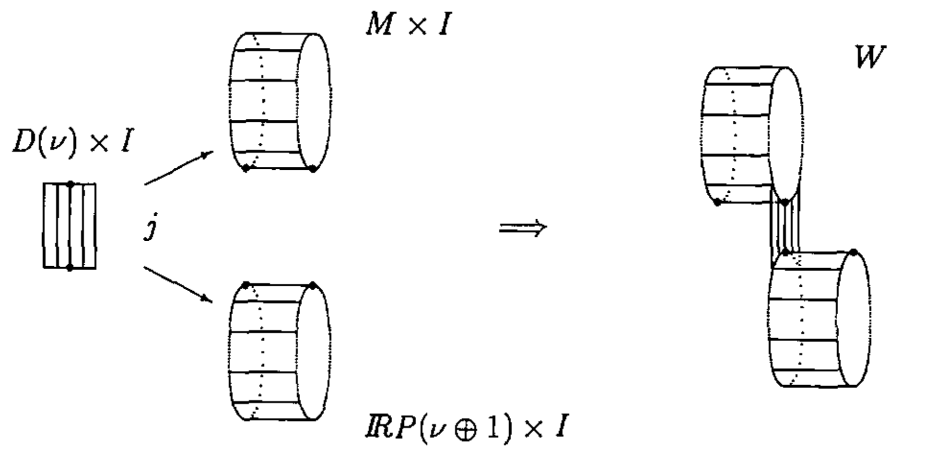
$$D(\nu) \times \{0\} \text{ em } M \times \{0\}, \quad \text{e de} \quad D(\nu) \times \{1\} \text{ em } \mathbb{R}P(\nu \oplus 1) \times \{1\}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\partial W &= [\partial(M\times I) \mathbin{\dot\cup} \partial(\mathbb{R}P(\nu\oplus 1)\times I)] \cup_j \partial(D(\nu)\times I)\\
&= [M\times\{0\} \mathbin{\dot\cup} M\times\{1\} \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}P(\nu\oplus 1)\times\{0\} \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}P(\nu\oplus 1)\times\{1\}]\\
&\qquad \cup_j \partial(D(\nu)\times I)\\
&= M\times\{1\} \mathbin{\dot\cup} \Big\{[M\times\{0\} \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}P(\nu\oplus 1)\times\{1\}] \cup_j \partial(D(\nu)\times I)\Big\}\\
&\qquad \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}P(\nu\oplus 1)\times\{0\}\\
&\equiv M \mathbin{\dot\cup} B(A,M) \mathbin{\dot\cup} \mathbb{R}P(\nu\oplus 1),
\end{aligned}$$

onde $\partial(D(\nu)\times I) = S(\nu)\times I \cup_{S(\nu)\times\{0,1\}} D(\nu)\times\{0,1\}$ por [3, 13.13]. □

Geometricamente, considerando como no Exemplo 3.1.5 $M = S^1$ e $A = \{*\}$, temos



Em termos das classes de bordismo segue imediatamente do lema acima que

$$[M]_2 + [B(A,M)]_2 + [\mathbb{R}P(\nu\oplus 1)]_2 = 0.$$

Ou seja,

Proposição 3.3.2. *Seja A uma subvariedade invariante fechada de uma G-variedade fechada M^n e ν o fibrado normal de A em M. Então*

$$[B(A,M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu\oplus 1)]_2.$$

Casos especiais importantes da proposição acima aparecem quando consideramos o blow-up do conjunto dos pontos fixos F de M.

Teorema 3.3.3. *Seja* M^n *uma G-variedade fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \text{Fix}(G, M) = \dot{\cup}\, F_i = F_1 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, F_r$ *e com fibrado normal denotado por* $\nu = \nu(F, M) = \sum_{i=1}^{r} \nu(F_i, M) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i$. *Então*

$$[B(F, M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

Prova. Temos

$$\begin{aligned} B(F, M) &= B(F_r, B(F_{r-1}, \ldots B(F_2, B(F_1, M)) \ldots)) \\ &= (\ldots((M \underset{F_1}{\#} \mathbb{R}P(\nu_1 \oplus 1)) \underset{F_2}{\#} \mathbb{R}P(\nu_2 \oplus 1)) \underset{F_3}{\#} \ldots) \underset{F_r}{\#} \mathbb{R}P(\nu_r \oplus 1). \end{aligned}$$

Por indução em r, usando o Lema 3.3.1, obtemos

$$[B(F, M)]_2 = [M]_2 + \sum_{i=1}^{r} [\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

□

Podemos então relacionar a classe de bordismo do blow-up do conjunto dos pontos fixos F em M com as classes de bordismo dos blow-ups dos F_i's em M.

Corolário 3.3.4. *Seja* M^n *uma G-variedade fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \text{Fix}(G, M) = \dot{\cup}\, F_i = F_1 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, F_r$, *com cada* F_i *conexo, e fibrado normal* $\nu = \nu(F, M) = \sum_{i=1}^{r} \nu(F_i, M) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i$. *Então:*

a) se r *é ímpar temos*

$$[B(F, M)]_2 = \sum_{i=1}^{r} [B(F_i, M)]_2;$$

b) se r *é par temos*

$$[B(F, M)]_2 = [M]_2 + \sum_{i=1}^{r} [B(F_i, M)]_2.$$

Prova. Pelo Teorema 3.3.3 temos

$$[B(F,M)]_2 = [M]_2 + \sum_{i=1}^{r}[I\!RP(\nu_i \oplus 1)]_2.$$

Da Proposição 3.3.2 obtemos

$$[I\!RP(\nu_i \oplus 1)]_2 = [M]_2 + [B(F_i, M)]_2,$$

que substituído na equação anterior fornece o resultado. $\square$

Quando consideramos $G = \mathbb{Z}_2$ a classe de bordismo do blow-up dos pontos fixos é nula, ou seja,

Teorema 3.3.5. *Se M^n é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade fechada com conjunto dos pontos fixos $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$, então $[B(F,M)]_2 = 0$.*

Prova. Pelo Teorema de Conner-Floyd, 2.5.2, temos $[M]_2 = [I\!RP(\nu \oplus 1)]_2$. Daí, usando o Teorema 3.3.3 obtemos o resultado. $\square$

Como aplicações do teorema 3.3.5 temos

Corolário 3.3.6. *Se M^n é uma variedade fechada de dimensão par, com $[M]_2 = 0$, então não existe involução sobre M com conjunto de pontos fixos F igual a um número ímpar de pontos isolados.*

Prova. Suponha que exista uma tal involução com $2k+1$ pontos fixos isolados, x_i, em M^n. Como $I\!RP(\nu_i \oplus 1) = I\!RP^n$, para cada $\nu_i = \nu_i(x_i, M^n)$, temos pelo Teorema 3.3.3

$$[B(F,M)]_2 = [M]_2 + \sum_{i=1}^{2k+1}[I\!RP^n]_2.$$

Daí, como $[M]_2 = 0$ e n é par, obtemos $[B(F,M)]_2 \neq 0$, que é um absurdo pelo Teorema 3.3.5. $\square$

Corolário 3.3.7. *Se M é uma variedade fechada, com $[M]_2 \neq 0$, então não existe involução sobre M com conjunto de pontos fixos F igual a um número par de pontos isolados.*

Prova. Como na prova anterior, supondo que F tenha $2k$ pontos, temos

$$[B(F, M^n)]_2 = [M]_2 + \sum_{i=1}^{2k} [\mathbb{R}P^n]_2 = [M]_2 \neq 0,$$

que é um absurdo pelo Teorema 3.3.5. $\square$

Em particular, para $r \geq 1$, temos:

1) Não existe involução sobre S^2, $(T^2)^r$ ou $(Kb)^r$ com conjunto de pontos fixos igual a um ponto.

2) Não existe involução sobre $(\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$ com conjunto de pontos fixos igual a dois pontos.

Outro caso especial importante a considerar é quando o conjunto de pontos fixos da G-variedade M tem dimensão 1. Vejamos inicialmente a classe de bordismo de $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)$.

Dado um fibrado vetorial $\mathbb{R}^k \to \xi \to B^m$, podemos ter $[\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)]_2 = 0$ com $[B]_2 \neq 0$. Considerando, por exemplo, um fibrado de dimensão ímpar sobre um ponto, $\mathbb{R}^{2k+1} \to \xi \to \{*\}$, temos $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1) = \mathbb{R}P^{2k+1}$, isto é, $[B]_2 \neq 0$ com $[\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)]_2 = 0$.

No entanto, se $\mathbb{R}^k \to \xi \to B^m$ é um fibrado trivial em que o espaço base borda, então $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)$ borda. De fato, como $[B]_2 = 0$ existe W^{m+1} tal que $\partial W = B$. Mais ainda, como $\xi \cong B \times \mathbb{R}^k$ temos $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1) \cong B \times \mathbb{R}P^k$. Assim

$$\partial(W \times \mathbb{R}P^k) = \partial W \times \mathbb{R}P^k = B \times \mathbb{R}P^k \cong \mathbb{R}P(\xi \oplus 1),$$

mostrando que $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)$ borda.

Para o caso particular de fibrado não trivial com espaço base igual a $\mathbb{R}P^1$ utilizamos o lema seguinte cuja referência é Conner-Floyd [5, Lema 2.2].

Lema 3.3.8. *Se* $\mathbb{R} \to \gamma_1^1 \to \mathbb{R}P^1$ *é o fibrado linha canônico não-trivial e* $\mathbb{R}^n \to \varepsilon^n \to \mathbb{R}P^1$ *é o fibrado trivial n-dimensional, então para cada* $n \geq 0$ *temos* $[\mathbb{R}P(\gamma_1^1 \oplus \varepsilon^n)]_2 = 0 \in \mathcal{N}_{n+1}$.

Temos então

Proposição 3.3.9. *Se* $\mathbb{R}^k \to \xi \to \mathbb{R}P^1$ *é um fibrado vetorial k-dimensional não orientável, então* $[\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)]_2 = 0$.

Prova. Se $\xi \oplus 1$ é trivial vimos acima que $\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)$ borda. Se $\xi \oplus 1$ é não-trivial então $\xi \oplus 1 \cong \gamma_1^1 \oplus \varepsilon^{k-1}$ e o resultado segue do Lema 3.3.8. □

Segue então que

Teorema 3.3.10. *Seja* M^n *uma G-variedade fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \dot{\cup}\, F_i = F_1 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, F_r$ *de dimensão 1. Então*

$$[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = [B(F, M)]_2.$$

Prova. Como $\dim F_i = 1$ temos, para todo i, $F_i = \mathbb{R}P^1 = S^1$. Considerando o fibrado $(n-1)$-dimensional $\mathbb{R}^{n-1} \to \nu_i \to F_i$ e o fibrado projetivo associado $\mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1) \to F_i$ temos pela Proposição 3.3.9 que $[\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = 0$. Mas pela Proposição 3.3.2 e pelo Teorema 3.3.3 temos

$$[M]_2 + [B(F_i, M)]_2 + [\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = 0$$

e

$$[M]_2 + [B(F, M)]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2 = 0.$$

Daí,

$$[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = [B(F, M)]_2.$$

□

Corolário 3.3.11. *Seja* M^n *é uma variedade fechada com* $[M]_2 \neq 0$. *Então não existe involução sobre* M *com conjunto de pontos fixos* F *tendo dimensão* 1.

Prova. Se existisse uma tal involução, pelo Teorema 3.3.10 com $G = \mathbb{Z}_2$ e pelo Teorema 3.3.5, teríamos $[M]_2 = [B(F, M)]_2 = 0$, que é um absurdo. □

Em particular, não existe involução sobre $(\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$ com conjunto de pontos fixos igual a S^1.

Outro caso especial importante de blow-up a analisar é quando o conjunto de pontos fixos de uma $\mathbb{Z}_2$-variedade tem codimensão 1. Este caso é considerado na seção seguinte.

3.4 Bordismo de Variedades Não-Singulares

Para tratar de variedades não-singulares usaremos o lema seguinte cuja referência é Conner-Floyd [5, Lema 2.1].

Lema 3.4.1. *Se $\xi \to V^m$ é um fibrado vetorial diferenciável 2-dimensional sobre uma variedade fechada, então $[\mathbb{R}P(\xi)]_2 = 0 \in \mathcal{N}_{m+1}$.*

Prova. Pelo Teorema de Borel-Hirzebruch, 2.4.1, como $k = 2$, temos

$$c^2 = c\,p^*(v_1) + p^*(v_2), \quad \text{onde} \quad v_i = w_i(\xi \to V^n),$$

que aplicado a

$$w(\xi_2) = (1+c)^2 + (1+c)\,p^*(v_1) + p^*(v_2) \mod 2$$

fornece

$$w(\xi_2) = 1 + p^*(v_1) \mod 2.$$

Daí, denotando $w_i = w_i(V^m)$, temos

$$\begin{aligned} w(\mathbb{R}P(\xi)) &= [1 + p^*(w_1) + \cdots + p^*(w_m)].[1 + p^*(v_1)], \\ &= [1 + p^*(w_1) + \cdots + p^*(w_m)] + [p^*(v_1) + p^*(w_1v_1) + \cdots + p^*(w_mv_1)] \\ &= 1+p^*(w_1+v_1)+p^*(w_2+w_1v_1)+\ldots+p^*(w_m+w_{m-1}v_1)+p^*(w_mv_1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$w_i(\mathbb{R}P(\xi)) = p^*(w_i + w_{i-1}v_1).$$

Considerando $I = (i_1, \ldots, i_r)$ uma partição de $m+1 = \dim \mathbb{R}P(\xi)$ temos então que o monômio $w_{i_1}(\mathbb{R}P(\xi)) \ldots w_{i_r}(\mathbb{R}P(\xi))$ é a imagem por p^* de uma soma de termos $(m+1)$-dimensionais, envolvendo apenas os w_i's e v_1, provenientes de $H^{m+1}(V^m, \mathbb{Z}_2) = 0$. Assim todo número de Stiefel-Whitney $W_I(\mathbb{R}P(\xi))$ é nulo e portanto $\mathbb{R}P(\xi)$ borda. □

Em particular, se ξ é um fibrado linha temos $[\mathbb{R}P(\xi \oplus 1)]_2 = 0$.

Temos então que $\mathbb{Z}_2$-variedades não-singulares bordam, isto é,

Teorema 3.4.2. *Seja M uma $\mathbb{Z}_2$-variedade não-singular com conjunto de pontos fixos $F = \dot{\cup}\, F_i = F_1 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, F_r$. Então, para todo i,*

$$[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = [\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = 0.$$

Prova. Como M é não-singular temos $\operatorname{codim} F_i = 1$, e assim os fibrados normais $\nu_i = \nu_i(F_i, M)$ são fibrados linha. Pelo Lema 3.4.1 temos que $[\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = 0$ e pelo Teorema 3.3.5 temos $[B(F, M)]_2 = 0$. Daí, pelo Teorema 3.3.3 e pela Proposição 3.3.2, obtemos $[M]_2 = [B(F, M)]_2 = 0$ e $[B(F_i, M)]_2 = 0$. □

Corolário 3.4.3. *Seja M^n é uma variedade fechada com $[M]_2 \neq 0$. Então não existe involução sobre M com conjunto de pontos fixos F tendo codimensão* 1.

Prova. Se existisse uma tal involução, denotando $F = \dot{\cup}\, F_i$, teríamos pelo Teorema 3.4.2 $[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = 0$, que é um absurdo. □

Em particular, obtemos novamente que não existe involução sobre $(\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$ com conjunto de pontos fixos igual a S^1. Observamos contudo que S^1 pode estar no conjunto de pontos fixos de $\mathbb{R}P^2$.

Exemplo 3.4.4. *Considere o espaço projetivo real* 2*-dimensional*

$$\mathbb{R}P^2 = \{[x_0, x_1, x_2]; (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}\},$$

onde $[x_0, x_1, x_2] = \{\lambda(x_0, x_1, x_2);\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ *são as coordenadas homogêneas de um ponto. Defina uma involução T sobre $\mathbb{R}P^2$ por*

$$[x_0, x_1, x_2] \to T([x_0, x_1, x_2]) = [-x_0, -x_1, x_2].$$

Temos então

$$F = \operatorname{Fix}(T, \mathbb{R}P^2) = \{[0, 0, x_2]\} \,\dot{\cup}\, \{[x_0, x_1, 0]\} \simeq P \,\dot{\cup}\, S^1,$$

onde P denota o ponto $[0,0,x_2]$. (Observe que $[x_0,x_1,0] = -[x_0,x_1,0]$.)
Observemos que $I\!RP^2$ pode se transformar numa variedade não-singular através de um blow-up no ponto P, isto é,

$$B(P, I\!RP^2) = I\!RP^2 \underset{\{P\}}{\#} I\!RP(\nu \oplus 1) = I\!RP^2 \# I\!RP^2 = Kb.$$

Em [4, Capítulo V], Conner e Floyd obtêm poucos resultados sobre ações de $(\mathbb{Z}_2)^k = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$, k-termos, em uma variedade diferenciável M^n. Resumidamente eles provam:

1) Se $(\mathbb{Z}_2)^k$ atua diferenciavelmente numa variedade fechada M^n sem pontos fixos, então $[M^n]_2 = 0$.

2) Se $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ atua diferenciavelmente numa variedade fechada M^n com pontos fixos isolados, então $[M^n]_2 = 0$ ou $n = 2m$ com $[M^n]_2 = [(I\!RP^2)^m]_2$ (aqui, denotamos $(I\!RP^2)^m = I\!RP^2 \times \cdots \times I\!RP^2$, m termos).

3) Não existe ação diferenciável de $(\mathbb{Z}_2)^k$ sobre uma variedade fechada M^n, $n > 0$, tendo conjunto de pontos fixos igual a um único ponto.

Estes resultados não se generalizam, conforme vemos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.4.5. *Consideremos uma aplicação diferenciável $T : D^{2k} \to D^{2k}$ definida por $T(z_1, \ldots, z_k) = (iz_1, \ldots, iz_k)$, onde $i = \sqrt{-1}$. Identificando os pontos antipodais do bordo do disco D^{2k}, obtemos $T : I\!RP^{2k} \to I\!RP^{2k}$ de período 4 (e portanto uma ação de $\mathbb{Z}_4$ sobre $I\!RP^{2k}$) com exatamente 1 ponto fixo.*
Em particular obtemos ações de $\mathbb{Z}_4$ sobre $I\!RP^4$ e sobre $I\!RP^2 \times I\!RP^2$ tendo cada uma exatamente 1 ponto fixo. Daí, fazendo um blow-up sobre cada ponto fixo, obtemos variedades

$$B(*, I\!RP^4) = I\!RP^4 \# I\!RP^4 \quad e \quad B(*, I\!RP^2 \times I\!RP^2) = (I\!RP^2 \times I\!RP^2) \# I\!RP^4,$$

sobre as quais $\mathbb{Z}_4$ atua sem pontos fixos. Mais ainda,

$$[B(*, I\!RP^4)]_2 = [I\!RP^4]_2 + [I\!RP^4]_2 = 0$$

e

$$[B(*, \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2)]_2 = [(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2)]_2 + [\mathbb{R}P^4]_2 \neq 0.$$

Em termos de $(\mathbb{Z}_2)^k$-ação temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.6. *Se $(\mathbb{Z}_2)^k \times M^{k+1} \to M^{k+1}$ é uma ação não-singular semi-livre, com conjunto de pontos fixos F e $\nu = \nu(F, M)$, então*

$$[F]_2 = 0, \quad [B(F, M)]_2 = [M]_2 \quad e \quad [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2 = 0.$$

Prova. Como a ação é semi-livre, denotando $G = (\mathbb{Z}_2)^k$, temos $G_x = G$ ou $G_x = \{e\}$. Assim $M(G) = \mathrm{Fix}(G, M) = F$ e $M(e) = M - M(G)$. Como a ação é não-singular devemos ter

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} G = k = \operatorname{codim} M(G) = \operatorname{codim} F$$

e

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} \{e\} = 0 = \operatorname{codim} M(e),$$

ou seja, $\dim F = 1$. Como o conjunto de pontos fixos é uma variedade fechada, devemos ter $F = \dot{\cup}\, S^1$, de modo que $[F]_2 = 0$. Daí, pelo Teorema 3.3.10, obtemos $[B(F, M)]_2 = [M]_2$. Pelo Teorema 3.3.3 obtemos $[\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2 = 0$. □

Referências Bibliográficas

[1] BOREL, A. and HIRZEBRUCH, F. *On characteristic classes of homogeneous spaces;* I. American Journal of Mathematics, 80 (1958), 458-538; II. American Journal of Mathematics, 81 (1959), 315-382.

[2] BREDON, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups.* Princeton University Press, 1972.

[3] BROCKER, T. and JANICH, K. *Introduction to Differential Topology.* Cambridge University Press, 1982.

[4] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E. *Differentiable Periodic Maps.* Ergebnisse der Mathematic, vol. 33, Springer-Verlag, 1964.

[5] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E. *Fibring whithin a cobordism class.* Michigan Mathematical Journal, 12 (1965), 33-47.

[6] KAWAKUBO, K. *The Theory of Transformation Groups.* Oxford University Press, 1991.

[7] KOSCHORKE, U. *Vector Fields an Other Vector Bundle Morphisms - A Singularity approach.* Lecture Notes in Mathematics, 847, Springer-Verlag, 1981.

[8] MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction.* Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.

[9] MASSEY, W. S. *Singular Homology Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 70, Springer-Verlag, 1980.

[10] MILNOR, J. *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Differential Geometry), American Mathematical Society, volume 3, (1961), 39-55.

[11] MILNOR, J; W. and STASHEFF, J. D. *Characteristic Classes.* Princeton University Press, 1974.

[12] STEENROD, N. E. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[13] THOM, R. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Commentarii Mathematici Helvetici, 28 (1954), 17-86.

[14] WASSERMAN, A. G. *Symplifying group actions.* Topology and its Applications, 75 (1997), 13-31.

[15] WASSERMAN, A. G. *Relations among characteristic classes and fixed points I - The recognition principle.* (preprint).

ERRATA

Página	Local	Erro	Correção
(Resumo)	linha 1	de Lie G	de Lie compacto G
(Resumo)	linha 1	variedade M,	variedade diferenciável compacta M,
(Abstract)	linha 1	a Lie Group G	a compact Lie group G
(Abstract)	linha 1	a manifold M,	a compact differentiable manifold M,
i	linha 6	G-variedade M,	G-variedade diferenciável M,
i	linha 10	G-variedade M,	G-variedade M e $\nu = \nu(A, M)$,
i	linha 12	utiliza simplificar	utiliza para simplificar
ii	linha 5	M obtemos	M, obtemos
ii	linha 16	Conner Floyd	Conner-Floyd
ii	linha 16	condição para	condição necessária para
3	linha 2	$x \in G$	$x \in X$
5	linha 13	$(H) \leq (H)$,	$(H) \leq (K)$,
5	linha 15	$(\frac{G}{H}) \to H$	$(\frac{G}{H}) \to (H)$
8	linha 3	$\frac{G}{G}$	$(\frac{G}{G})$
8	linha 4	$\frac{G}{\{e\}}$	$(\frac{G}{e})$
8	linha 6	G/H	$(\frac{G}{H})$
8	linha 8	$\frac{G}{H}$	$(\frac{G}{H})$
9	linha 7	Φ_g	$\Phi(g)$
9	linha 25	para x	para todo x
11	linha 5	no acima	no diagrama acima
15	linha 7	correspondente a $F_b(\eta)$	correspondente $F_b(\eta)$
18	linha 5	Conner-Floyd 2.5.2 que	Conner-Floyd, 2.5.2, que
18	linha 9	classse	classe
19	linha 14	conjunto os	conjunto dos
21	linha 18	$[G, M]_2$	$[G, M^n]_2$
28	linha 11	$\chi(M)$.	$\chi(M)$:
31	linha 10	e τ_V, temos	e τ_{V^n}, temos
31	(diagr.)	τ_V	τ_{V^n}

Página	Local	Erro	Correção
32	linha 16	$s = 1, 2, \ldots, k,$	$s = 0, 1, 2, \ldots, k,$
32	linha 22	$p^*(v_p)$	$p^*(v_s)$
35	linha 18	$[T, S(\nu)]_2$ borda,	$(T, S(\nu))$ borda,
38	linha 8	$F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$	com $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$
38	linha 10	Lema 2.6.3, o	Lema 2.6.3 o
38	linha 11	1, e assim	$n-1$, e assim
40	linha 10	variedade V	variedade diferenciável compacta V
40	linha 11	componentes.	componentes conexas.
41	linha 6	$\mathbb{Z}_2$-variedade tendo	$\mathbb{Z}_2$-variedade V tendo
41	linha 7	codimensional V com	codimensional com
42	linha 6	não-singulares.	não-singulares.(Conforme estabelecido no início do Capítulo II, aqui também variedade significa variedade diferenciável compacta.)
44	linha 2	temos	temos as variedades (diferenciáveis)
48	linha 3	em Kb.	em Kb respectivamente.
48	linha 18	$\sum_{i=1}^{r}$	$\dot{\bigcup}_{i=1}^{r}$
53	linha 7	$(G_x) = G_x$	$(G_{(x,y,z)}) = G_{(x,y,z)}$
56	linha 9	Exemplo 3.1.5	Exemplo 3.1.2
57	linha 5	$\sum_{i=1}^{r}$	$\dot{\bigcup}_{i=1}^{r}$
57	linha 16	$\sum_{i=1}^{r}$	$\dot{\bigcup}_{i=1}^{r}$
58	linha 17	$\nu_i = \nu_i(x_i, M^n)$	$\nu_i = \nu(x_i, M^n)$
60	linha 8	ε^{k+1}	ε^k
60	linha 22	M^n é uma	M^n uma
61	linha 3	$(\mathbb{R}P^2)^{2r-1}$	$(\mathbb{R}P^2)^{2r-1} = \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2$
62	linha 7	V^n	V^m
63	linha 3	não-singular	não-singular fechada
63	linha 11	M^n é uma	M^n uma
66	linha 11	whithin	within
66	linha 16	approach	Approach

ADENDO

Conforme sugestão da Comissão Julgadora listamos abaixo, como um adendo à Introdução, os principais resultados obtidos neste trabalho:

Teorema 3.3.3 *Seja* M^n *uma G-variedade fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \mathrm{Fix}(G, M) = \dot\cup\, F_i = F_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, F_r$ *e com fibrado normal denotado por* $\nu = \nu(F, M) = \dot\cup_{i=1}^{r} \nu(F_i, M) = \dot\cup_{i=1}^{r} \nu_i$. *Então*

$$[B(F, M)]_2 = [M]_2 + [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2.$$

Teorema 3.3.5 *Se* M^n *é uma* $\mathbb{Z}_2$*-variedade fechada com conjunto dos pontos fixos* $F = \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2, M)$, *então* $[B(F, M)]_2 = 0$.

Teorema 3.3.10 *Seja* M^n *uma G-variedade fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \dot\cup\, F_i = F_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, F_r$ *de dimensão 1. Então*

$$[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = [B(F, M)]_2.$$

Teorema 3.4.2 *Seja* M *uma* $\mathbb{Z}_2$*-variedade não-singular fechada com conjunto de pontos fixos* $F = \dot\cup\, F_i = F_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, F_r$. *Então, para todo* i,

$$[B(F_i, M)]_2 = [M]_2 = [\mathbb{R}P(\nu_i \oplus 1)]_2 = 0.$$

Teorema 3.4.6 *Se* $(\mathbb{Z}_2)^k \times M^{k+1} \to M^{k+1}$ *é uma ação não-singular semi-livre, com conjunto de pontos fixos* F *e* $\nu = \nu(F, M)$, *então*

$$[F]_2 = 0, \quad [B(F, M)]_2 = [M]_2 \quad e \quad [\mathbb{R}P(\nu \oplus 1)]_2 = 0.$$

Esclarecemos ainda que, neste trabalho, os resultados obtidos estão em termos de bordismo módulo 2. Ainda não obtivemos resultados significativos na classe equivariante.