SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 15/04/99
Assinatura:

# Sobre Alguns Problemas de Periodicidade em Equações Diferenciais Impulsivas com Retardamento

MARIA ELISA QUIROGA

Orientador:

Prof. Dr. PLÁCIDO ZOEGA TÁBOAS

*Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Doutor em Ciências - Área: Matemática".*

**USP - São Carlos**

**Abril de 1999**

# ERRATA

| Página | Local | Erro | Correção |
|---|---|---|---|
| 18 | linha 6 | $G = \{\psi \in K_\xi \mid \lvert\psi - \varphi\rvert_{L_1} < \bar{\delta}\}.$ | $G = \bigcup_{\xi<a}\{\psi \in K_\xi \mid \lvert\psi - \varphi\rvert_{L_1} < \bar{\delta}\}.$ |
| 25 | linha 8 | $(C2)$ | $(C_2)$ |
| 27 | linha 9 | auto-sutentação | auto-sustentação |
| 47 | linha 9 | $\varphi_1(\theta_2) - \varphi_1(\theta_2) \geq \eta(\theta_2 - \theta_1).$ | $\varphi_1(\theta_2) - \varphi_1(\theta_1) \geq \eta(\theta_2 - \theta_1).$ |

A Deus, sem o qual nada seria possível.

Aos meus pais Joaquim e Luzia

Ao meu filho Rafael

## Agradecimentos [1]

Ao Prof. Dr. Plácido Z. Táboas pela orientação, dedicação, paciência e amizade no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática do ICMC-USP pelo ótimo ambiente de estudo, pelo apoio, pelo incentivo e principalmente pelas conversas.

Às funcionárias da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca pela simpatia, atenção e eficiência.

Ao Departamento de Matemática da UNESP-Campus de Bauru pelos afastamentos concedidos.

A todos que direta, ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

[1]Este trabalho teve suporte financeiro parcial do PICD-CAPES.

# Abstract

Our main concern is the existence of periodic solutions of impulsive retarded differential equations. As a consequence of our study, some peculiarities of this kind of equation are pointed out.

We solve some problems proposed in the literature where the difficulty is the construction of a framework for the application of some fixed point principle.

In a planar equation we show that self-supporting conditions can play the role of dissipativeness in problems related to existence of periodic solutions.

# Resumo

Nosso principal interesse é a existência de soluções periódicas de equações diferenciais retardadas impulsivas. Como conseqüência de nosso estudo, algumas peculiaridades deste tipo de equação são destacadas.

Resolvemos alguns problemas propostos na literatura, onde a dificuldade é a construção de um contexto para a aplicação de algum princípio de ponto fixo.

Em uma equação planar, mostramos que condições de auto-sustentação podem desempenhar o papel de dissipatividade em problemas relativos a existência de soluções periódicas.

# Índice

Introdução 1

Introdução 1

1 Uma Equação Diferencial Diferença Impulsiva 4

2 Um Caso com Retardamento Distribuído 13

3 Uma Equação Diferencial Diferença Impulsiva no Plano 26

Referências Bibliográficas 55

# Introdução

As equações diferenciais impulsivas descrevem a evolução de um sistema onde o desenvolvimento contínuo de um processo se alterna com mudanças bruscas do estado. Estas equações se valem das equações diferenciais para descrever os estágios de variação contínua do estado, acrescidas de uma condição para descrever as descontinuidades de primeira espécie da solução ou de suas derivadas nos instantes de impulso.

Muitos fenômenos biológicos, modelos em medicina, em economia, em farmacocinética e sistemas de freqüência modulada podem apresentar efeitos impulsivos. Assim, as equações diferenciais impulsivas aparecem como uma descrição natural de fenômenos evolutivos de problemas do mundo real.

A seguinte descrição do modelo de Kruger-Thiemer [9] de dois ambientes para distribuição de drogas no corpo humano, pode ser encontrada em [10]. Suponhamos que a droga, administrada oralmente, é primeiro dissolvida no ambiente gastrointestinal. A droga é então absorvida no assim chamado volume aparente de distribuição (um ambiente amorfo constituído de sangue, músculos, tecidos etc ... ) e finalmente é eliminada do sistema pelos rins. Suponhamos que $x(t)$ e $y(t)$ denotam as quantidades de drogas no instante $t$ no ambiente gastrointentinal e no volume aparente de distribuição, respectivamente, e sejam $k_1$ e $k_2$ taxas constantes. As equações que governam este processo são:

$$\begin{aligned} x' &= -k_1 x, \\ y' &= -k_2 y + k_1 x. \end{aligned} \tag{1}$$

Agora definimos um tratamento tal que nos instantes

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < T,$$

a droga é prescrita em quantidades

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N,$$

de modo que passamos a ter as seguintes condições acrescidas a (1):

$$\begin{cases} x(t_i+) = x(t_i-) + \delta_i, \\ y(t_i+) = y(t_i-), \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \\ x(0) = \delta_0, \ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Para realizar o efeito terapêutico desejado, é preciso que a quantidade de droga no volume aparente de distribuição nunca fique abaixo de um nível mínimo durante o tempo de tratamento.

No exemplo de Kruger-Thiemer, como ocorre em geral, os instantes de impulso são pré-fixados, o que implica que o sistema impulsivo é não autônomo, mesmo sendo autônoma a equação diferencial associada.

As equações diferenciais impulsivas autônomas são aquelas em que os instantes de impulso são determinados por causas intrínsecas, por exemplo, quando o estado atinge certos valores críticos previamente estabelecidos. A teoria destas equações impulsivas não está tão desenvolvida como a das não autônomas, embora elas sejam de grande interesse. No caso das equações diferenciais impulsivas autônomas, as condições de impulso são chamadas "condições de auto-sustentação".

As equações diferenciais impulsivas com retardamento estão ainda num estágio incipiente. Pretendemos contribuir para a clarificação de certos aspectos da teoria das equações diferenciais impulsivas autônomas com retardamento, investigando alguns exemplos que consideramos relevantes. Mais precisamente, analisamos o efeito de impulsos em sistemas com retardamento, no que concerne à existência de soluções periódicas.

Usamos as notações $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $SC = SC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, para indicar, respectivamente, o espaço das funções contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ e o

espaço das funções seccionalmente contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$, ambos com a norma do supremo $\|\cdot\|$. Neste trabalho consideramos sempre $n = 1$ ou $n = 2$.

Dados $t_0 \geq 0$, $A \geq 0$ e uma função $x : [t_0 - r, t_0 + A] \to \mathbb{R}^n$, pelo menos seccionalmente contínua, para cada $t \in [t_0, t_0 + A]$, denotamos por $x_t$ a função definida em $[-r, 0]$ por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

O assunto do Capítulo 1 foi inspirado em investigação de A. Myshkis contida em [11] e [12]. Neste capítulo, consideramos um exemplo de equação diferencial escalar com retardamento e impulsos e estabelecemos a existência de soluções periódicas. Nosso resultado melhora o de Myshkis no aspecto de não impor limitação ao tamanho do retardamento.

No Capítulo 2, consideramos uma equação diferencial impulsiva com retardamento distribuído. Aplicando o Princípio da Contração Uniforme, obtemos a existência, unicidade e dependência contínua da solução de um problema de valor inicial relativo à equação em questão. Obtemos também um teorema de existência de soluções periódicas para a mesma equação.

No Capítulo 3, consideramos uma família a um parâmetro de equações diferenciais impulsivas com retardamento, no plano. Para todo valor positivo do parâmetro, obtemos a existência de soluções periódicas pela aplicação de um teorema de ponto fixo devido a Nussbaum [13]. Definimos situações, através de exemplos ou estabelecendo condições suficientes, em que as soluções periódicas efetivamente sofrem impulsos.

Em vários momentos, fazemos referência aos seguintes quadrantes:

$$\begin{aligned}
Q_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\},\\
Q_2 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0\},\\
Q_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0\},\\
Q_4 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0\},
\end{aligned}$$

que são sempre denotados desta forma.

# Capítulo 1

# Uma Equação Diferencial Diferença Impulsiva

Neste capítulo, vamos tratar de um exemplo de equação diferencial com retardamento e impulsos. Em nosso entender, apesar de sua simplicidade, este exemplo carrega os aspectos e dificuldades essenciais do problema de estudar o efeito de impulsos em equações funcionais com retardamento.

Este assunto foi inspirado em investigação de A. Myshkis, contida em [11] e [12], onde o problema de estabelecer a existência de soluções periódicas sem restringir o tamanho do retardamento não é, a nosso ver, resolvido satisfatoriamente. Destacamos que esta opinião é compartilhada com o próprio Professor Myshkis.

Nossa solução para o problema consiste em criar um contexto apropriado para aplicar o Teorema de Schauder.

Consideremos a equação diferencial diferença escalar não linear

$$\dot{x}(t) = f(x(t-r)), \ \ r > 0, \tag{1.1}$$

com a condição de auto-sustentação

$$x(t) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ x(t+) = a, \tag{1.2}$$

onde $a > 0$ é uma constante dada.

A este problema chamaremos Equação Diferencial Diferença Impulsiva. Diremos, simplesmente, "problema (1.1), (1.2)" em vez de "equação (1.1) com a condição (1.2)".

Suponhamos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua e satisfaça a seguinte condição:

**(C1)** $$-\delta := \sup\{f(u) \mid u \in [0, a]\} < 0.$$

Seja $0 < \delta \leq M$ tal que $|f(u)| \leq M$, $u \in [0, a]$.

**Definição 1.1** *Denotemos por $K$ o conjunto das funções $\varphi \in SC$ tais que $\varphi([-r, 0]) \subset [0, a)$ e satisfazem as seguintes condições:*

**(1)** $\varphi(0) = 0$;

**(2)** *$\varphi$ é contínua à esquerda;*

**(3)** *o conjunto de zeros de $\varphi$ em $[-r, 0)$ coincide com o conjunto de seus pontos de descontinuidade e*

$$(\varphi(t) = 0, \ \ -r \leq t < 0) \Rightarrow \varphi(t+) = a;$$

**(4)** *se $[t_1, t_2] \subset [-r, 0]$ é qualquer intervalo de continuidade de $\varphi$, então*

$$-M(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq -\delta(t_2 - t_1).$$

Notemos que a condição

$$-M(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq -\delta(t_2 - t_1) \tag{1.3}$$

para os intervalos $[t_1, t_2]$ onde $\varphi$ é contínua, implica que as funções $\varphi \in K$ têm um número finito de descontinuidades e são estritamente decrescentes nos intervalos de continuidade. Ainda mais, se $-r \leq \tau_p^\varphi < \tau_{p-1}^\varphi < \cdots < \tau_2^\varphi < \tau_1^\varphi$ são os pontos de descontinuidade de $\varphi$ e $\tau_0^\varphi = 0$, então

$$a/M \leq \tau_{s-1}^\varphi - \tau_s^\varphi \leq a/\delta,$$

onde $s = 1, 2, \ldots, p$ e $\tau_p^\varphi + r \leq a/\delta$.

Assumamos agora que a condição inicial

$$x_0 = \varphi \in K \tag{1.4}$$

seja dada adicionalmente a (1.1), (1.2). Fixar o instante inicial $t_0 = 0$ não constitui perda de generalidade, uma vez que o problema (1.1), (1.2) é autônomo.

O problema de valor inicial (1.1), (1.2), (1.4), é equivalente ao problema de encontrar uma função $x : [-r, \omega) \to \mathbb{R}$, $\omega > 0$, satisfazendo as seguintes condições:

**(1)** $x|_{[-r,0]} = \varphi$;

**(2)** se $x$ não tem zeros no intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, \omega)$, então

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t-r))dt; \tag{1.5}$$

**(3)** a relação (1.2) vale para qualquer $t \in [0, \omega)$ tal que $x(t) = 0$.

A função $x : [-r, \omega) \to \mathbb{R}$, $\omega > 0$, é chamada solução de (1.1), (1.2), (1.4).

Dado $\varphi \in K$, o problema de valor inicial (1.1), (1.2), (1.4) tem uma única solução $x(t) = x(t; \varphi)$ definida no intervalo $[-r, \infty)$. De fato, para todo $t \in [0, T]$, $T = a/M$, definimos

$$x(t) = a + \int_0^t f(\varphi(s-r))ds. \tag{1.6}$$

Se $x(T) > 0$, a fórmula (1.5) pode ser usada para estender $x(t)$ ao intervalo $[0, \tau]$, $\tau \geq a/M$, onde $x(\tau) = 0$. Se $x(T) = 0$, tomamos $\tau = T$.

Notemos que $x_\tau(\,\cdot\,; \varphi)$ satisfaz a condição (1.3) e, mais ainda, $x_\tau(\,\cdot\,; \varphi) \in K$.

O procedimento acima pode, então, ser repetido tomando $\tau$ em vez de 0 como instante inicial e $x_\tau(\,\cdot\,; \varphi)$ em vez de $\varphi$ como condição inicial. A solução fica assim prolongada a um intervalo $[-r, \tau_1]$, com $\tau_1 - \tau \geq a/M$ e $x_{\tau_1} \in K$. Repetindo sucessivamente esse argumento, estabelecemos um processo recursivo que leva a uma única solução $x(t; \varphi)$ em $[-r, \infty)$.

Definamos a aplicação $T : K \to K$ por

$$T\varphi = x_\tau(\,\cdot\,;\varphi),$$

onde $x(\,\cdot\,;\varphi)$ é a solução do problema de valor inicial (1.1), (1.2), (1.4) e $\tau = \tau(\varphi)$ é o primeiro zero positivo desta solução.

O nosso objetivo agora é provar o seguinte Teorema:

**Teorema 1.1** *Se a função $f$ é contínua e satisfaz a condição* (C1), *então o problema* (1.1), (1.2) *tem uma solução periódica $x(\,\cdot\,;\varphi)$, $\varphi \in K$.*

Uma tentativa natural para provar o Teorema 1.1 é mostrar que a aplicação $T : K \to K$ tem um ponto fixo pela aplicação direta de algum princípio de ponto fixo. Esse procedimento esbarra em duas dificuldades essenciais.
Primeira: o conjunto $K$ obviamente não é convexo.
Segunda: a aplicação $T : K \to K$ não é contínua, se $r$ for suficientemente grande. De fato, para $\varphi$ suficientemente próximo de $\varphi_0$ em $K$, temos que os pontos de descontinuidade de $\varphi$ e $\varphi_0$ coincidem. Mas, $\tau(\varphi)$ não coincide necessariamente com $\tau(\varphi_0)$, o que implica que $T\varphi = x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi)$ e $T\varphi_0 = x_{\tau(\varphi_0)}(\,\cdot\,;\varphi_0)$ não possuem os mesmos pontos de descontinuidade. Como a norma em $SC$ é a norma do sup, segue a descontinuidade da aplicação $T$.

Com o objetivo de contornar essas dificuldades, consideremos o conjunto

$$\begin{aligned}\tilde{K} = \{\varphi \in C \;\mid\; & \varphi(0) = 0 \text{ e } -M(t_2 - t_1) \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le -\delta(t_2 - t_1),\\ & t_1, t_2 \in [-r, 0],\;\; t_1 < t_2\}; \end{aligned} \tag{1.7}$$

portanto, toda função $\varphi \in \tilde{K}$ satisfaz a condição (1.3) para $t_1, t_2 \in [-r, 0]$, $t_1 < t_2$.

Vamos definir uma aplicação $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ e mostrar que ela tem um ponto fixo, usando o Teorema de Schauder. Cada ponto fixo de $\tilde{T}$ corresponderá a uma solução periódica do problema (1.1), (1.2).

Definamos a bijeção

$$\begin{aligned} h \;:\; & K \to \tilde{K} \\ & h(\varphi) = \bar{\varphi}, \end{aligned}$$

como segue. Se $-r \leq \tau_p^\varphi < \tau_{p-1}^\varphi < \cdots < \tau_1^\varphi$ são os pontos de descontinuidade de $\varphi \in K$ em $[-r, 0)$ e $\tau_0^\varphi = 0$, então

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + ja, \quad t \in (\tau_{j+1}^\varphi, \tau_j^\varphi], \quad j = 0, 1, \ldots, p-1,$$
$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + pa, \quad t \in [-r, \tau_p^\varphi].$$

A função $h$ é claramente uma bijeção de $K$ em $\tilde{K}$. Veja Figura 1.1.

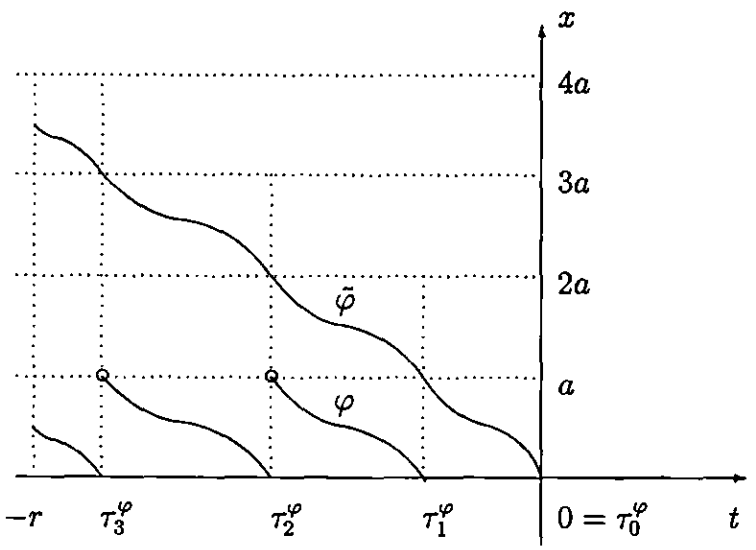


Figura 1.1: A bijeção $\varphi \to \tilde{\varphi} = h(\varphi)$

Como os pontos de descontinuidade de duas funções $\varphi, \varphi_0 \in K$ necessariamente coincidem se $\varphi$ e $\varphi_0$ estão suficientemente próximas, vemos que a aplicação $h$ é contínua enquanto a aplicação $h^{-1}$ não é.

Obviamente, $\tilde{K}$ é um conjunto convexo e, por uma aplicação rotineira do Teorema de Ascoli-Arzela verifica-se que $\tilde{K}$ é também compacto.

Definamos agora a aplicação $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ por $\tilde{T} = h \circ T \circ h^{-1}$.

**Teorema 1.2** *A aplicação $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ é contínua.*

**Prova:** Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $\tilde{\varphi}_0 \in \tilde{K}$. Consideremos dois casos:

[Caso A] $\quad pa < \tilde{\varphi}_0(-r) < (p+1)a$, para algum $p \in \mathbb{Z}_+$.

Sejam $\varphi_0 = h^{-1}(\tilde{\varphi}_0)$; $\tau_p^{\varphi_0} < \tau_{p-1}^{\varphi_0} < \cdots < \tau_1^{\varphi_0}$ os pontos de descontinuidade de $\varphi_0$ e, como antes, $\tau_0^{\varphi_0} = 0$.

Se $\overline{\delta} > 0$ for tomado suficientemente pequeno e $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$ for tal que $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\| < \overline{\delta}$, então existe um mesmo número de pontos de descontinuidade $\tau_j^{\varphi_0}$ e $\tau_j^{\varphi}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, de $\varphi_0 = h^{-1}(\tilde{\varphi}_0)$ e $\varphi = h^{-1}(\tilde{\varphi})$, respectivamente. Além disso, em virtude da condição (1.3) em $\tilde{K}$, o número $\max\{|\tau_j^{\varphi_0} - \tau_j^{\varphi}|,\ j = 1, 2, \ldots, p\}$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, diminuindo o valor de $\overline{\delta} > 0$.

Para os valores de $t$ tais que $0 < t \leq r + \min\{\tau_p^{\varphi_0}, \tau_p^{\varphi}\} =: T_1$ e $t \leq \tau(\varphi)$, segue da equação integral (1.6) e da continuidade de $f$ que $|x(t;\varphi) - x(t;\varphi_0)| < \varepsilon/2$, sempre que $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\| < \overline{\delta}$; tomando $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon) > 0$ menor, se necessário.

Diminuindo $\overline{\delta}$, ainda mais, podemos supor

$$\max\{|\tau_j^{\varphi_0} - \tau_j^{\varphi}|,\ j = 1, 2, \ldots, p\} \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Para os valores de $t$ tais que $T_1 \leq t \leq r + \max\{\tau_p^{\varphi_0}, \tau_p^{\varphi}\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} |x(t;\varphi) - x(t;\varphi_0)| &\leq |x(T_1;\varphi) - x(T_1;\varphi_0)| \\ &\quad + \int_{T_1}^{t} |f(\varphi(s-r)) - f(\varphi_0(s-r))| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(t - T_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\| < \overline{\delta}$.

Negligenciando a condição de auto-sustentação (1.2), depois de repetir um número finito de vezes os argumentos acima, concluímos que as soluções de (1.1) $x(t;\varphi_0)$ e $x(t;\varphi)$ satisfazem

$$|x(t;\varphi) - x(t;\varphi_0)| < \varepsilon, \quad t \in [0, a/\delta], \tag{1.8}$$

restringindo ainda mais o número $\overline{\delta} > 0$, se necessário. Assim, a condição (1.3) garante que $x(a/\delta;\varphi_0), x(a/\delta;\varphi) \leq 0$ e também que $|\tau(\varphi) - \tau(\varphi_0)|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, tomando $\overline{\delta} > 0$ conveniente. Veja Figura 1.2.

Se $\tau_j^{T\varphi}$, $\tau_j^{T\varphi_0}$, $j = 1, 2, \ldots, p'$, são os pontos de descontinuidade de $T\varphi$ e $T\varphi_0$, respectivamente ( para $\overline{\delta}$ suficientemente pequeno eles são em igual número), notemos que $|\tau_j^{T\varphi} - \tau_j^{T\varphi_0}|$, $j = 1, \ldots, p'$, podem ser feitos arbitrariamente pequenos, já

que $|\tau_1^{T\varphi} - \tau_1^{T\varphi_0}| = |-\tau(\varphi) + \tau(\varphi_0)|$ e $|\tau_j^{T\varphi} - \tau_j^{T\varphi_0}| \leq |\tau_{j-1}^{\varphi} - \tau_{j-1}^{\varphi_0}| + |\tau(\varphi) - \tau(\varphi_0)|$, $j = 2, \ldots, p'$.

Para simplificar a notação , definamos $\underline{\tau}_j = \underline{\tau}_j(\varphi) = \min\{\tau_j^{T\varphi}, \tau_j^{T\varphi_0}\}$ e $\overline{\tau}_j = \overline{\tau}_j(\varphi) = \max\{\tau_j^{T\varphi}, \tau_j^{T\varphi_0}\}$, $j = 1, 2, \ldots, p'$ e $\underline{\tau}_0 = 0$.

Consideremos, agora, os intervalos $[-r, \underline{\tau}_{p'}]$ e $(\overline{\tau}_j, \underline{\tau}_{j-1}]$, $j = 1, 2, \ldots, p'$.

Para fixar um caso, suponhamos $\overline{\tau}_1 = -\tau(\varphi_0) = \tau_1^{T\varphi_0}$. Se $\theta \in (\overline{\tau}_1, 0]$ temos

$$\begin{aligned} |T\varphi(\theta) - T\varphi_0(\theta)| &= |x_{\tau(\varphi)}(\theta; \varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi_0)| \\ &\leq |x_{\tau(\varphi)}(\theta; \varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi)| + |x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi_0)|. \end{aligned}$$

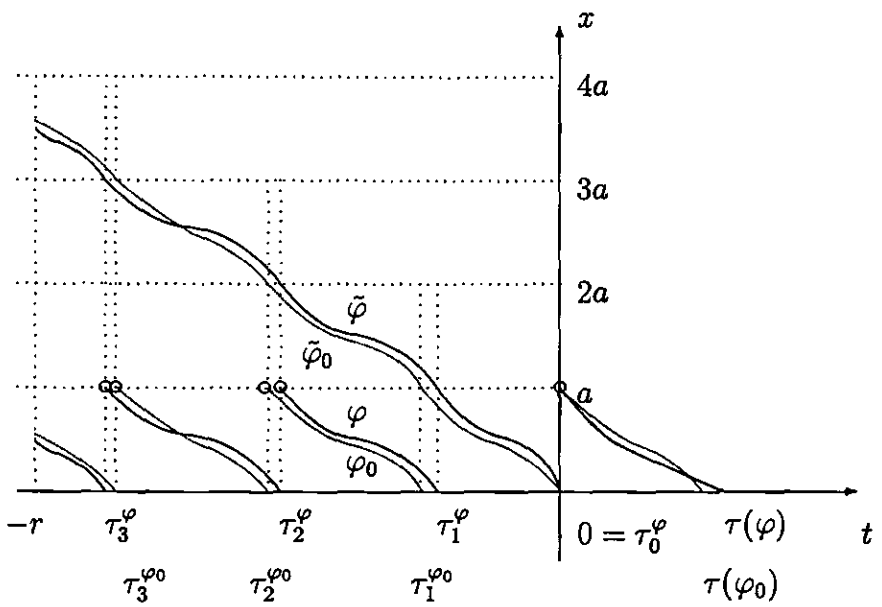


Figura 1.2: Continuidade de $x(t; \cdot)$,$t \in [0, \tau]$, para algum $\tau$, $a/M \leq \tau \leq a/\delta$

Observando que $x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi) = x_{\tau(\varphi)}(\theta + \tau(\varphi_0) - \tau(\varphi); \varphi)$, $\theta \in (\tau_1^{T\varphi_0}, 0]$, obtemos que $|x_{\tau(\varphi)}(\theta; \varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi)| < \varepsilon/2$, $\theta \in (\tau_1^{T\varphi_0}, 0]$, como conseqüência da condição (1.3). De (1.8), segue que $|x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta; \varphi_0)| < \varepsilon/2$, $\theta \in (\tau_1^{T\varphi_0}, 0]$.

Portanto, $|T\varphi(\theta) - T\varphi_0(\theta)| < \varepsilon$, $\theta \in (\tau_1^{T\varphi_0}, 0]$.

Nos intervalos $(\overline{\tau}_j, \underline{\tau}_{j-1}]$, $j = 2, \ldots, p'$ e $[-r, \underline{\tau}_{p'}]$ procede-se de maneira análoga.

O raciocínio a seguir pode ser melhor entendido observando a Figura 1.3.

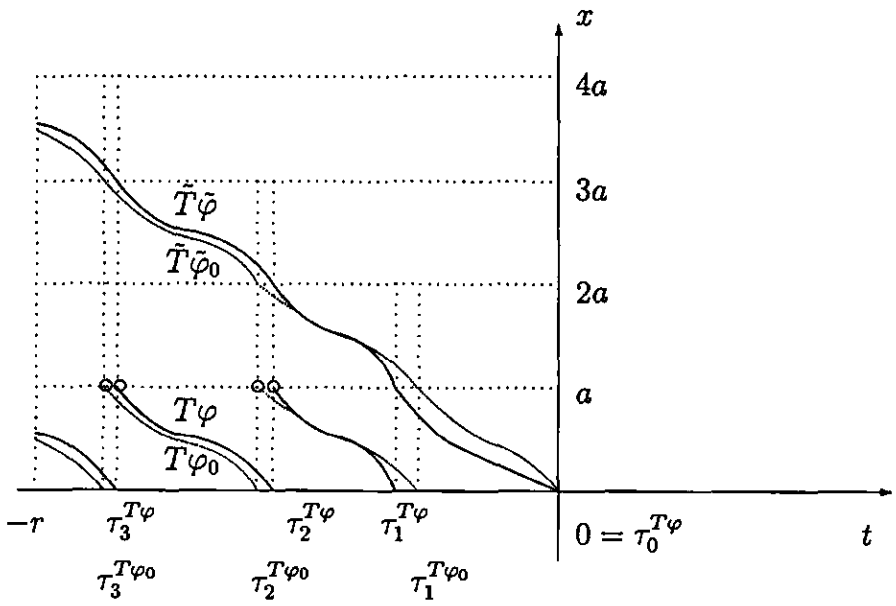


Figura 1.3: Continuidade de $\tilde{T}$

Como os intervalos $[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j]$, $j = 1, 2, \ldots, p'$, podem ser feitos arbitrariamente pequenos, a condição (1.3) implica que $|h(T\varphi)(\theta) - h(T\varphi_0)(\theta)| < \varepsilon$ para todo $\theta \in \cup_{j=1}^{p'}[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j]$, escolhendo $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$ tal que $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0\| < \overline{\delta}$. Conforme acabamos de demonstrar, $T\varphi$ e $T\varphi_0$ ficam uniformemente próximos nos intervalos $[-r, \underline{\tau}_{p'}]$ e $(\overline{\tau}_j, \underline{\tau}_{j-1}]$, $j = 1, 2, \ldots, p'$. Ou seja, $|h(T\varphi) - h(T\varphi_0)|$ fica arbitrariamente pequeno, desde que $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}_0$ estejam suficientemente próximos. Portanto, $\tilde{T}$ é contínua no Caso A.

**[Caso B]** $\tilde{\varphi}_0(-r) = pa$, para algum inteiro positivo $p$.

Neste caso, a prova é essencialmente a mesma do Caso A, sendo necessárias algumas adaptações óbvias apenas quando $\tilde{\varphi}(-\tau) > pa$. ■

**Prova do Teorema 1.1:**

Como $\tilde{K} \subset C$ é convexo e compacto e $\tilde{T} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ é uma aplicação contínua, segue do Teorema do ponto fixo de Schauder que $\tilde{T}$ tem um ponto fixo $\tilde{\varphi}$ em $\tilde{K}$.

Lembrando que $\tilde{T} = h \circ T \circ h^{-1}$, $h^{-1}(\tilde{\varphi})$ é um ponto fixo de $T$. ■

**Observação 1.1** Se $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$ é um ponto fixo de $\tilde{T}$ e $\varphi := h^{-1}(\tilde{\varphi})$, o período da solução $x(\,\cdot\,;\varphi)$, é precisamente $-\tau_1^{\varphi}$.

# Capítulo 2

# Um Caso com Retardamento Distribuído

Vamos considerar agora um problema impulsivo, onde a equação diferencial tem retardamento distribuído. Isto é, um problema análogo ao do capítulo anterior, considerando a equação da forma $\dot{x}(t) = f(x_t)$. Uma dificuldade peculiar deste caso é que não está disponível uma teoria geral ( existência, prolongamento, dependência contínua etc...) para tratar dessas equações sujeitas a impulsos. A teoria clássica, segundo Hale [7], por exemplo, toma $C$ como espaço de fase. Entretanto, esse espaço não nos serve, uma vez que a condição de impulso impõe descontinuidades ao termo $x_t$, para $t \geq 0$ arbitrário.

Não é nosso objetivo desenvolver aqui uma teoria geral. O que vamos fazer é, ao menos implicitamente, resolver os problemas fundamentais mencionados acima restritos à nossa particular equação.

Consideremos a equação diferencial funcional escalar

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \quad (x_t(\theta) := x(t+\theta), \ -r \leq \theta \leq 0, \ r > 0), \tag{2.1}$$

com a condição de auto-sustentação

$$x(t) = 0 \Rightarrow x(t+) = a, \tag{2.2}$$

onde $a > 0$ é uma constante.

Suponhamos que a função $\varphi \to f(\varphi) \in \mathbb{R}$ esteja definida sobre o conjunto $K$ de todas as funções $\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$, limitadas, contínuas à esquerda e com um número finito de pontos de descontinuidade.

**Definição 2.1** *Dado $\sigma \in \mathbb{R}$, chamamos a função $x : [\sigma - r, \omega) \to \mathbb{R}$, $\omega > \sigma$, de uma solução do problema* (2.1), (2.2) *se:*

(1) $x_t \in K$, $\forall t \geq \sigma$;

(2) *a função $t \in [\sigma, \omega) \to f(x_t)$ é localmente integrável e satisfaz a equação*

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_t)dt \tag{2.3}$$

*sobre qualquer intervalo $[t_1, t_2] \subset [\sigma, \omega)$ onde $x$ não tem zeros;*

(3) *a relação* (2.2) *vale para qualquer $t \in [\sigma, \omega)$ tal que $x(t) = 0$.*

Dessa definição, segue imediatamente que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma solução $x$ coincide com o conjunto de seus zeros e, sobre qualquer intervalo $[t_1, t_2] \subset [\sigma, \omega)$ onde $x$ não tem zeros, ela é absolutamente contínua e satisfaz a equação (2.1), exceto em um número finito de pontos.

**Definição 2.2** *Uma solução global do problema* (2.1), (2.2) *é uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x|_{[\sigma - r, \infty)}$ é uma solução para todo $\sigma \in \mathbb{R}$.*

As soluções periódicas formam uma importante classe de soluções globais do problema (2.1), (2.2).

Vamos assumir agora que seja dada adicionalmente a (2.1), (2.2) a seguinte condição inicial:

$$x_\sigma = \varphi \in K. \tag{2.4}$$

Diremos que uma função $x : [\sigma - r, \omega) \to \mathbb{R}$ é solução do problema de valor inicial (2.1), (2.2), (2.4) se $x$ for solução de (2.1), (2.2) e satisfizer (2.4).

De agora em diante, fixamos sempre o instante inicial em $\sigma = 0$, o que se justifica pelo fato do problema (2.1), (2.2) ser autônomo. Supomos também que $f$ satisfaz as seguintes condições :

$(C_1)$ se $x : [-r, \omega) \to \mathbb{R}$, $\omega > 0$, é tal que $x_t \in K$ para todo $t \in [0, \omega)$, então a aplicação $t \to f(x_t)$ é mensurável;

$(C_2)$ existe $M > 0$ tal que

$$\varphi_1, \varphi_2 \in K \;\Rightarrow\; |f(\varphi_2) - f(\varphi_1)| \leq M|\varphi_2 - \varphi_1|_{L_1}.$$

Tomemos agora dois números reais, $\delta$ e $\Delta$, tais que $\Delta > \delta > 0$.

**Definição 2.3** *Denotemos por $K_\xi = K_\xi(\delta, \Delta)$, $\xi < a$, o conjunto das funções $\varphi \in K$ tais que $\varphi([-r, 0]) \subset [\overline{\xi}, a)$, onde $\overline{\xi} = \min\{\xi, 0\}$, e satisfazem as seguintes condições:*

**(1)** $\varphi(0) = \xi$;

**(2)** *se $\varphi(t+) = a$, então $\varphi(t) = 0$, $-r \leq t < 0$, e estes valores de $t$ são os únicos pontos de descontinuidade de $\varphi$ em $[-r, 0]$;*

**(3)** *se $[t_1, t_2] \subset [-r, 0]$ é qualquer intervalo de continuidade de $\varphi$, então*

$$-\Delta(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq -\delta(t_2 - t_1). \tag{2.5}$$

A Figura 2.1 mostra o gráfico de uma função $\varphi$ pertencente a $K_\xi$.

O lema seguinte é imediato.

**Lema 2.1** *Se $\varphi \in K_0$, então $0 \leq \varphi(t) < a$, $-r \leq t \leq 0$, e existe um conjunto $0 = \tau_0^\varphi > \tau_1^\varphi > \cdots > \tau_p^\varphi \geq -r$ tal que*

$$a/\Delta \leq \tau_{s-1}^\varphi - \tau_s^\varphi \leq a/\delta,$$

$\varphi(\tau_s^\varphi) = 0$, $\varphi(t) \neq 0$ $\forall t \in (\tau_s^\varphi, \tau_{s-1}^\varphi)$, $s = 1, 2, \ldots, p$.

Suponhamos que a função $\varphi \to f(\varphi)$ satisfaça também a condição

$(C_3)$ $-\Delta \leq f(\varphi) \leq -\delta$, para todo $\varphi \in K_\xi$, $\xi < a$.

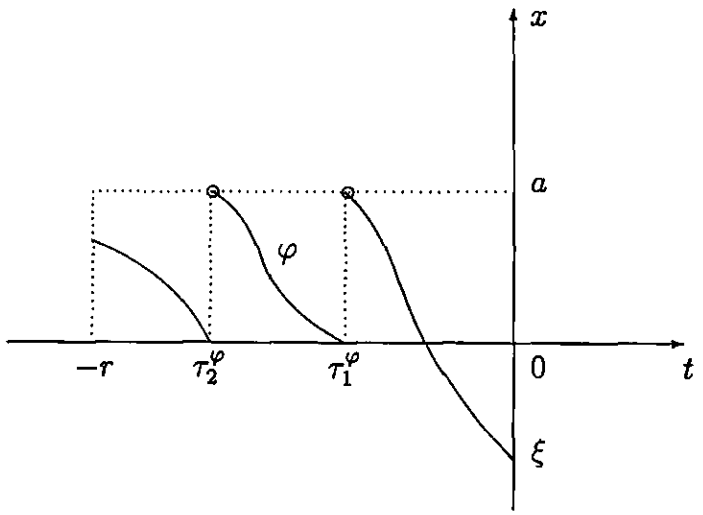


Figura 2.1: $\varphi \in K_\xi$

**Observação 2.1** *Se tomarmos* $\Delta \geq Mr \max\{|\xi|,\ a\} + |f(0)|$, *podemos substituir a condição* $(C_3)$ *pela condição mais fraca*

$(C_3')$ $f(\varphi) \leq -\delta$, *para todo* $\varphi \in K_\xi$, $\xi < a$,

*pois a condição* $(C_2)$ *implica* $-\Delta \leq f(\varphi)$, *para todo* $\varphi \in K_\xi$, $\xi < a$.

Daqui em diante, as funções $\varphi \in K_\xi$, $\xi < a$, serão entendidas como elementos de $L_1$. Isto é, $K_\xi$ será identificado ao subconjunto de $L_1$ constituído dos elementos $\overset{\circ}{\varphi}$ que contêm uma função $\varphi$ satisfazendo a Definição 2.3. Embora não existam valores pontuais de elementos de $K_\xi \subset L_1$, a cada $\overset{\circ}{\varphi} \in K_\xi$ fica associada a única função nele contida satisfazendo a Definição 2.3 e, portanto, um único conjunto de pontos de descontinuidade $\{\tau_1^\varphi, \ldots, \tau_p^\varphi\}$.

Diremos que a solução $x(t) = x(t;\varphi)$ do problema de valor inicial (2.1), (2.2), (2.4), com $\sigma = 0$, depende continuamente de $\varphi \in K_\xi$ se, para qualquer número $T > 0$, a seguinte condição estiver satisfeita:
Dado $\overline{\varphi} \in K_\xi$, seja $x(t;\overline{\varphi})$ a única solução do problema de valor inicial (2.1), (2.2), (2.4) e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ seus instantes de impulso em $[0, T]$. Se $\varphi_n \in K_\xi$, $n = 1, 2, \ldots$,

e $\varphi_n \to \overline{\varphi}$ com $n \to \infty$, no sentido de $L_1$ em $[-r, 0]$, então $x(t;\varphi_n) \to x(t;\overline{\varphi})$ uniformemente nas partes compactas de $[0,T] \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

O teorema seguinte atende nossas necessidades decorrentes da ausência de uma teoria geral para nossos problemas de valor inicial.

**Teorema 2.1** *Se as condições* $(C_1)$, $(C_2)$ *e* $(C_3)$ *estão satisfeitas, então a solução* $x(t;\varphi)$ *do problema* (2.1), (2.2), (2.4), *com* $x_0 = \varphi \in K_0$, *existe e é única em* $[-r, \infty)$. *Além disso,* $x(t;\varphi)$ *depende continuamente de* $\varphi \in K_0$.

No interesse da independência deste trabalho, vamos introduzir algumas definições e notações e enunciar o Princípio da Contração Uniforme, de acordo com a apresentação do livro de Equações Diferenciais Ordinárias de J. Hale [8], com vistas à prova do Teorema 2.1.

**Definição 2.4** *Sejam* $F$ *um subconjunto de um espaço de Banach* $X$, $G$ *um subconjunto de um espaço de Banach* $Y$ *e* $\{T_y,\ y \in G\}$ *uma família de operadores de* $F$ *em* $X$. *Diz-se que* $T_y$, $y \in G$, *é uma contração uniforme em* $F$ *se* $T_y(F) \subset F$ *e existe um* $\lambda$, $0 \leq \lambda < 1$, *tal que*

$$|T_y x - T_y \tilde{x}| \leq \lambda |x - \tilde{x}|, \quad \textit{para todo} \quad y \in G; \ \ x, \tilde{x} \in F.$$

**Lema 2.2 (Princípio da Contração Uniforme)** *Se* $F$ *é um subconjunto fechado de um espaço de Banach* $X$, $G$ *é um subconjunto de um espaço de Banach* $Y$, $T_y : F \to F$, $y \in G$, *é uma contração uniforme em* $F$ *e* $T_y x$ *é contínua em* $y$ *para cada* $x$ *fixado em* $F$, *então o único ponto fixo* $g(y)$ *de* $T_y$, $y \in G$, *é contínuo em* $y$.

Sejam $0 < T < 1/\sqrt{M}$, onde $M$ é a constante de Lipschitz dada em $(C_2)$; $X = C([0,T], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$, com a norma de um elemento $y \in X$ dada por

$$\|y\| := \sup_{t \in [0,T]} |y(t)|$$

e

$$F = \{y \in X \ \mid \ y(0) = a \ e \ -\Delta(t_2 - t_1) \leq y(t_2) - y(t_1) \leq -\delta(t_2 - t_1),$$
$$\text{quaisquer que sejam} \ \ t_1, t_2 \in [0,T], \ \ t_1 < t_2\}.$$

Consideremos o conjunto $K_0$, fazendo $\xi = 0$ na Definição 2.3, com a topologia do espaço $L_1$; fixemos $\varphi \in K_0$ e, para $\overline{\delta} > 0$ suficientemente pequeno, tomemos $G = \{\psi \in K_\xi \mid |\psi - \varphi|_{L_1} < \overline{\delta}\}$.

Para cada $y \in F$ e cada $\varphi \in G$, definamos a função

$$\begin{aligned} &y^\varphi : [-r,T] \to \mathbb{R} \\ &y^\varphi|_{[-r,0]} \in \overset{\circ}{\varphi}, \\ &y^\varphi(t) = y(t), \ \ t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Note que a última igualdade se verifica para todo $t \in [0,T]$ e, portanto, $y^\varphi|_{[0,T]}$ é contínua.

**Teorema 2.2** *Seja $\mathcal{T}_\varphi$, $\varphi \in G$, uma família de operadores dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi : F &\to X \\ y &\mapsto \mathcal{T}_\varphi y, \end{aligned}$$

*tal que*

$$(\mathcal{T}_\varphi y)(t) = a + \int_0^t f(y_s^\varphi)ds, \ \ t \in [0,T].$$

*Então, existe um único ponto fixo $y(\varphi)$ de $\mathcal{T}_\varphi$ que depende continuamente de $\varphi$.*

**Prova:** Notemos que $F$ é claramente um subconjunto fechado de $X$ e, devido à condição $(C_3)$, temos que $\mathcal{T}_\varphi(F) \subset F$.

Mostremos que $\mathcal{T}_\varphi : F \to F$, $\varphi$ em $G$, é uma contração uniforme. De fato, quaisquer que sejam $y_1, y_2 \in F$ e $t \in [0,T]$, temos

$$|\mathcal{T}_\varphi y_1(t) - \mathcal{T}_\varphi y_2(t)| \leq \int_0^t |f((y_1^\varphi)_s) - f((y_2^\varphi)_s)|ds.$$

Devido à condição $(C_2)$, segue que

$$|\mathcal{T}_\varphi y_1(t) - \mathcal{T}_\varphi y_2(t)| \leq M \int_0^t [\int_{-r}^0 |y_1^\varphi(s+\theta) - y_2^\varphi(s+\theta)|d\theta]ds.$$

Mas, para cada $s \in [0,t]$, temos que:

$$\int_{-r}^{-s} |y_1^{\varphi}(s+\theta) - y_2^{\varphi}(s+\theta)| d\theta = 0$$

e

$$\int_{-s}^{0} |y_1^{\varphi}(s+\theta) - y_2^{\varphi}(s+\theta)| d\theta = \int_{-s}^{0} |y_1(s+\theta) - y_2(s+\theta)| d\theta,$$

já que, em $[-r,-s]$, $y_j^{\varphi}(s+\cdot) = \varphi(s+\cdot)$ q.t.p., $j=1,2$, e em $[-s,0]$, $y_j^{\varphi}(s+\cdot) = y_j(s+\cdot)$, $j=1,2$. Segue então que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{\varphi} y_1(t) - \mathcal{T}_{\varphi} y_2(t)| &\leq M \int_0^t [\int_0^s |y_1(u) - y_2(u)| du] ds \\ &\leq MT^2 \|y_1 - y_2\|, \end{aligned}$$

onde $0 < MT^2 < 1$.

Concluímos que $\mathcal{T}_{\varphi}$, $\varphi \in G$, é uma contração uniforme em $F$.

Mostremos agora que, para cada $y \in F$ fixado, a função $\varphi \to \mathcal{T}_{\varphi} y$ de $G$ em $F$ é contínua em $\varphi$.

Seja $\varphi_n \in G$, $n = 1,2,\ldots$, uma seqüência tal que $\varphi_n \to \varphi \in G$ quando $n \to \infty$, no sentido de $L_1$.

Sabemos que $\mathcal{T}_{\varphi_n} y \in F$, $n = 1,2,\ldots$, e $F$ é um subconjunto compacto de $X$ (como conseqüência direta do Teorema de Ascoli-Arzela). Portanto, existe uma subseqüência de $\mathcal{T}_{\varphi_n} y$ que denotamos da mesma forma e uma função $\gamma \in F$ tal que $\mathcal{T}_{\varphi_n} y \to \gamma$, quando $n \to \infty$. Assim,

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_{\varphi_n} y(t) = a + \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(y_s^{\varphi_n}) ds.$$

Mas, para cada $s \in [0,t]$ temos

$$\begin{aligned} |f(y_s^{\varphi_n}) - f(y_s^{\varphi})| &\leq M \int_{-r}^{0} |y_s^{\varphi_n}(\theta) - y_s^{\varphi}(\theta)| d\theta \\ &= M[\int_{-r}^{-s} |y_s^{\varphi_n}(\theta) - y_s^{\varphi}(\theta)| d\theta \\ &\quad + \int_{-s}^{0} |y_s^{\varphi_n}(\theta) - y_s^{\varphi}(\theta)| d\theta] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M[\int_{-r}^{-s} |y^{\varphi_n}(s+\theta) - y^{\varphi}(s+\theta)|d\theta \\
&\quad + \int_{-s}^{0} |y^{\varphi_n}(s+\theta) - y^{\varphi}(s+\theta)|d\theta] \\
&= M\int_{s-r}^{0} |\varphi_n(u) - \varphi(u)|du \leq M|\varphi_n - \varphi|_{L_1},
\end{aligned}
$$

já que, em $[-r,-s]$, $y^{\varphi}(s+\cdot) = \varphi(s+\cdot)$ q.t.p. e $y^{\varphi_n}(s+\cdot) = \varphi_n(s+\cdot)$ q.t.p. e, em $[-s,0]$, $y^{\varphi}(s+\cdot) = y^{\varphi_n}(s+\cdot) = y(s+\cdot)$, $n = 1,2,\ldots$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\varphi_n \to \varphi$, quando $n \to \infty$, no sentido de $L_1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_n - \varphi|_{L_1} < \varepsilon/M$$

e, portanto,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(y_s^{\varphi_n}) - f(y_s^{\varphi})| < \varepsilon,$$

para cada $s \in [0,t]$.

Assim, a nossa seqüência $f(y_\cdot^{\varphi_n})$ satisfaz $f(y_s^{\varphi_n}) \to f(y_s^{\varphi})$ quando $n \to \infty$, pontualmente em $s \in [0,T]$. Além disso, devido à condição $(C_3)$, temos que a função constante $g(s) = \Delta$, $s \in [0,T]$, é tal que

$$|f(y_s^{\varphi_n})| \leq g(s), \quad \text{para todo} \quad n = 1,2,\ldots.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_0^t f(y_s^{\varphi})ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(y_s^{\varphi_n})ds.$$

Portanto,

$$\gamma(t) = a + \int_0^t f(y_s^{\varphi})ds = \mathcal{T}_{\varphi}y(t).$$

Isso implica que o limite de qualquer subseqüência de $\mathcal{T}_{\varphi_n}y$ é independente da subseqüência, de onde segue que a própria seqüência converge, isto é, $\mathcal{T}_{\varphi_n}y \to \mathcal{T}_{\varphi}y$, quando $n \to \infty$. Portanto, a aplicação $\varphi \to \mathcal{T}_{\varphi}y$ é contínua.

O Teorema 2.2 segue então do Princípio da Contração Uniforme. ■

Observemos que o ponto fixo $y(\varphi)$ do operador $\mathcal{T}_\varphi$ dado no Teorema 2.2 fornece a única solução $x(t;\varphi)$ do problema (2.1), (2.4) em $[-r,T]$ tal que

$$x(t;\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{q.t.p. em } [-r,0] \\ y(\varphi)(t), & \text{se } 0 < t \leq T. \end{cases}$$

**Prova do Teorema 2.1:**

Temos duas alternativas: ou existe $\tau \in (0,T]$ com $x(\tau;\varphi) = 0$ ou $x(T;\varphi) > 0$. Valendo a segunda, com adaptações óbvias, os argumentos usados na prova do Teorema 2.2 podem ser refeitos para o caso em que o instante inicial 0 é trocado por $T$ e a condição inicial $\varphi$ é substituída por $x_T(\,\cdot\,;\varphi)$. Desta forma, fica provado que a solução $x(\,\cdot\,;\varphi)$ se estende a $[-r,2T]$ ou $[-r,\tau]$, onde o número $\tau$ satisfaz $x(\tau;\varphi) = 0$, $a/\Delta \leq \tau \leq 2T$.

Assim argumentando sucessivamente um número finito de vezes, podemos garantir a existência de uma única solução $x(\,\cdot\,;\varphi)$ de (2.1), (2.2), (2.4) num intervalo $[-r,\tau]$, com $\tau \geq a/\Delta$; $x(t;\varphi) > 0$, $0 < t < \tau$ e $x(\tau;\varphi) = 0$.

Dada a estimativa $0 < a/\Delta \leq \tau$ e a autonomia do problema (2.1), (2.2), segue que a solução $x(\,\cdot\,;\varphi)$ se estende univocamente ao intervalo $[-r,\infty)$.

A dependência contínua com respeito a $\varphi$, decorre do Princípio da Contração Uniforme. ■

Definamos agora a aplicação de primeiro retorno

$$\begin{aligned} &U : K_0 \to K_0 \\ &U\varphi = x_\tau(\,\cdot\,;\varphi), \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $x(\,\cdot\,;\varphi)$ é a solução do problema de valor inicial (2.1), (2.2), (2.4) com $\sigma = 0$ e $\tau = \tau(\varphi)$ é o primeiro zero positivo desta solução .

Notemos que as expressões em (2.6) são coerentes, isto é, $UK_0 \subset K_0$, uma vez que $x_\tau(0;\varphi) = 0$ e $x_\tau(\,\cdot\,;\varphi)$ satisfaz a condição (2.5).

O objetivo central deste capítulo é provar o seguinte Teorema:

**Teorema 2.3** *Se a função $f$ satisfaz as condições $(C_1)$, $(C_2)$ e $(C_3)$, então o problema* (2.1), (2.2) *tem uma solução periódica $x(\cdot;\varphi)$, $\varphi \in K_0$.*

Para a prova do Teorema 2.3, alguns lemas são necessários.

**Lema 2.3** *A aplicação $U : K_0 \to K_0$ é contínua.*

**Prova:** Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $\varphi_0 \in K_0$. Ignorando a condição de auto-sustentação (2.2), segue de forma análoga à prova do Teorema 2.1 que existe $\overline{\delta} > 0$ tal que se $\varphi \in K_0$,

$$|\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta} \Rightarrow |x(t;\varphi) - x(t;\varphi_0)| < \varepsilon, \quad t \in [0, a/\delta].$$

A condição (2.5) garante que $x(a/\delta;\varphi_0), x(a/\delta;\varphi) \leq 0$ e que $|\tau(\varphi) - \tau(\varphi_0)|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, tomando $\overline{\delta} > 0$ conveniente.

Se $\overline{\delta}$ for suficientemente pequeno, então os pontos de descontinuidade de $U\varphi$ e $U\varphi_0$, $\tau_j^{U\varphi}, \tau_j^{U\varphi_0}$, $j = 1, 2, \ldots, p'$, respectivamente, são em igual número, exceto no caso em que $\tau_{p'}^{U\varphi_0} = -r$, quando as descontinuidades de $U\varphi$ podem ser $\tau_1^{U\varphi}, \ldots, \tau_{p'-1}^{U\varphi}$. Neste caso, definimos $\tau_{p'}^{U\varphi} = -r$. Assim, os números $|\tau_j^{U\varphi} - \tau_j^{U\varphi_0}|$, $j = 1, \ldots, p'$, podem ser feitos arbitrariamente pequenos, tomando $\overline{\delta}$ suficientemente pequeno.

Para simplificar a notação, definamos $\underline{\tau}_j = \underline{\tau}_j(\varphi) = \min\{\tau_j^{U\varphi}, \tau_j^{U\varphi_0}\}$, $\overline{\tau}_j = \overline{\tau}_j(\varphi) = \max\{\tau_j^{U\varphi}, \tau_j^{U\varphi_0}\}$, $j = 1, 2, \ldots, p'$ e $\Sigma = \cup_{j=1}^{p'} [\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j]$.

Temos que

$$\begin{aligned} |U\varphi - U\varphi_0|_{L_1} &= \int_{-r}^{0} |x_{\tau(\varphi)}(\theta;\varphi) - x_{\tau(\varphi_0)}(\theta;\varphi_0)| d\theta \\ &= \int_{\Sigma} |x(\tau(\varphi) + \theta;\varphi) - x(\tau(\varphi_0) + \theta;\varphi_0)| d\theta \\ &\quad + \int_{[-r,0]\setminus\Sigma} |x(\tau(\varphi) + \theta;\varphi) - x(\tau(\varphi_0) + \theta;\varphi_0)| d\theta. \end{aligned}$$

Em vista das observações anteriores, podemos tomar $\overline{\delta}$ tal que $m\Sigma < \varepsilon/2a$, onde $m\Sigma$ denota a medida de $\Sigma$. Assim, temos

$$\int_{\Sigma} |x(\tau(\varphi) + \theta;\varphi) - x(\tau(\varphi_0) + \theta;\varphi_0)| d\theta < \varepsilon/2, \quad \text{sempre que} \quad |\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}.$$

Além disso, tomando $\overline{\delta} > 0$ menor, se necessário, segue do Teorema 2.1 que $\varphi, \varphi_0 \in K_0$, $|\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}$ implica $|U\varphi(\theta) - U\varphi_0(\theta)| < \varepsilon/2r$, para $\theta$ nos intervalos comuns de continuidade de $U\varphi$ e $U\varphi_0$. Desta forma,

$$\int_{[-r,0]\setminus\Sigma} |x(\tau(\varphi)+\theta;\varphi) - x(\tau(\varphi_0)+\theta;\varphi_0)|d\theta < \varepsilon/2, \quad \text{sempre que} \quad |\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}.$$

Ou seja,

$$|U\varphi - U\varphi_0|_{L_1} < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad |\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}. \qquad \blacksquare$$

Como o conjunto $K_0$ não é convexo, uma dificuldade na investigação de soluções periódicas de (2.1), (2.2) é que não temos disponibilidade de teoremas de ponto fixo para a aplicação de retorno. A seguir, esse problema será superado, com um procedimento semelhante ao do capítulo anterior.

Definamos $\tilde{K}_0$ análogo ao conjunto $\tilde{K}$ em (1.7), isto é,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_0 = \{\varphi \in C \mid\ & \varphi(0) = 0 \ \text{ e } \ -\Delta(t_2 - t_1) \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq -\delta(t_2 - t_1), \\ & t_1, t_2 \in [-r, 0],\ t_1 < t_2\}.\end{aligned}$$

Observemos que toda função $\varphi \in \tilde{K}_0$ satisfaz a condição (2.5), para qualquer intervalo $[t_1, t_2] \subset [-r, 0]$. O conjunto $\tilde{K}_0$ é convexo e, novamente por aplicação do Teorema de Ascoli-Arzela, $\tilde{K}_0$ é também compacto.

Em vista das identificações feitas anteriormente, notemos que $K_0 \subset L_1$ é o conjunto $K$ do Capítulo 1, com $\Delta = M$.

Podemos assim definir a bijeção

$$\begin{aligned} h &: K_0 \to \tilde{K}_0 \\ h(\varphi) &= \tilde{\varphi}, \end{aligned}$$

de forma idêntica à definição da função $h : K \to \tilde{K}$ do Capítulo 1, isto é, se $-r \leq \tau_p^\varphi < \tau_{p-1}^\varphi < \cdots < \tau_1^\varphi$ são os pontos de descontinuidade de $\varphi \in K_0$ em $[-r, 0)$ e $\tau_0^\varphi = 0$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) + ja,\ t \in (\tau_{j+1}^\varphi, \tau_j^\varphi],\ j = 0, 1, \ldots, p-1, \\ \tilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) + pa,\ t \in [-r, \tau_p^\varphi]. \end{aligned}$$

É importante observar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que, se $\varphi, \varphi_0 \in K_0$, $|\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}$, então $\max\{|\tau_j^{\varphi} - \tau_j^{\varphi_0}|, j = 1, 2, \ldots, p\} < \varepsilon$. Isto é conseqüência de (2.5) através de argumentos elementares, usando o fato de que $\varphi$ e $\varphi_0$ contêm funções satisfazendo a Definição 2.3.

Os Lemas 2.4 e 2.5, a seguir, mostram que $h$ é um homeomorfismo de $K_0$ em $\tilde{K}_0$.

**Lema 2.4** *A aplicação $h : K_0 \to \tilde{K}_0$ é contínua.*

**Prova:** Fixemos $\varphi_0 \in K_0$ e seja dado $\varepsilon > 0$. Tomemos $\overline{\delta} > 0$ e $\varphi \in K_0$ tais que $|\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}$.

Se $\overline{\delta}$ for suficientemente pequeno, então os pontos de descontinuidade de $\varphi$ e $\varphi_0$, $\tau_j^{\varphi}, \tau_j^{\varphi_0}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, respectivamente, são em igual número, exceto no caso em que $\tau_p^{\varphi_0} = -r$, quando as descontinuidades de $\varphi$ podem ser $\tau_1^{\varphi}, \ldots, \tau_{p-1}^{\varphi}$. Neste caso, definimos $\tau_p^{\varphi} = -r$.

Denotemos por $\underline{\tau}_j = \min\{\tau_j^{\varphi}, \tau_j^{\varphi_0}\}$, $\overline{\tau}_j = \max\{\tau_j^{\varphi}, \tau_j^{\varphi_0}\}$, $j = 1, \ldots, p$, e $\Sigma = \cup_{j=1}^{p}[\underline{\tau}_j, \overline{\tau}_j]$.

De acordo com a observação que antecede o Lema 2.4, podemos tomar $\overline{\delta} > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\overline{\tau}_j - \underline{\tau}_j < \varepsilon/\Delta$, $j = 1, \ldots, p$. Da condição (2.5) segue que:

$$\theta \in \Sigma \Rightarrow |h\varphi(\theta) - h\varphi_0(\theta)| < \varepsilon.$$

Da continuidade de $\varphi$ e $\varphi_0$ em $[-r, 0] \setminus \Sigma$, e novamente da condição (2.5), temos:

$$\theta \in [-r, 0] \setminus \Sigma \Rightarrow |h\varphi(\theta) - h\varphi_0(\theta)| < \varepsilon,$$

desde que $|\varphi - \varphi_0|_{L_1} < \overline{\delta}$, diminuindo $\overline{\delta}$, se necessário. ■

**Lema 2.5** *A aplicação $h^{-1} : \tilde{K}_0 \to K_0$ é contínua.*

**Prova:** O lema é conseqüência imediata do fato das funções $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}_0$ serem transversais aos segmentos $(t, x) = (t, ja)$, $j \in \{1, 2, \ldots\}$, $-r \leq t \leq 0$. Essa transversalidade decorre da condição (2.5). ■

Em virtude dos Lemas 2.3, 2.4 e 2.5, podemos definir a aplicação contínua $\tilde{U} : \tilde{K}_0 \to \tilde{K}_0$ por $\tilde{U} := h \circ U \circ h^{-1}$.

**Prova do Teorema 2.3**

Como $\tilde{K}_0 \subset C$ é convexo e compacto e $\tilde{U} : \tilde{K}_0 \to \tilde{K}_0$ é uma aplicação contínua, então, pelo Teorema do ponto fixo de Schauder, $\tilde{U}$ tem um ponto fixo $\tilde{\varphi}$ em $\tilde{K}_0$. Portanto, $\varphi = h^{-1}(\tilde{\varphi})$ é um ponto fixo de $U$ em $K_0$, que corresponde a uma solução periódica $x(\cdot\,;\varphi)$, $\varphi \in K_0$, do problema (2.1), (2.2). ■

Um exemplo de uma função $f$ satisfazendo $(C_1)$, $(C2)$ e $(C_3)$ é

$$f(\varphi) = -\delta - M \int_{-r}^{0} \varphi(\theta) d\theta,$$

onde $\delta > 0$ e $M > 0$ são arbitrários e $\Delta := \delta + Mar$.

A equação (2.1) correspondente é a equação integro-diferencial

$$\dot{x}(t) = -\delta - M \int_{-r}^{0} x_t(\theta) d\theta.$$

# Capítulo 3

# Uma Equação Diferencial Diferença Impulsiva no Plano

Vamos considerar agora a família a um parâmetro de equações diferenciais autônomas não lineares da forma

$$\dot{x}(t) = \alpha F(x(t-1)), \tag{3.1}$$

onde $\alpha$ é um número real positivo, $x = \mathrm{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{col}(F_1, F_2)$ é contínua e de classe $C^2$ na origem. Equações como $\dot{x}(t) = \alpha F(x(t-r))$, $r > 0$, se reduzem a (3.1) por uma mudança de escala no tempo.

Assumindo hipóteses gerais sobre $F$, entre elas uma versão bidimensional da chamada condição de retro-alimentação negativa (*negative feedback*), e acrescentando um termo dissipativo "$-\alpha x(t)$" em (3.1), é estabelecida em [1] e [14] a existência de soluções periódicas não triviais para todo $\alpha$ maior que um certo $\alpha_0$. Em [14] há uma irrelevante variação quanto à colocação do parâmetro $\alpha$.

O termo dissipativo desempenha um papel fundamental nos métodos usados em [1] e [14], garantindo a existência de um conjunto limitado positivamente invariante no espaço de fase $C$.

O objetivo aqui é mostrar que a existência de soluções periódicas de (3.1) pode ser garantida mesmo sem considerar o mencionado termo dissipativo, desde que tratemos de um sistema impulsivo, isto é, imponhamos a (3.1) uma conveniente

condição de auto-sustentação. Neste caso, não será possível garantir a existência de um conjunto limitado positivamente invariante, porém essa dificuldade é superada construindo-se um conjunto gozando destas propriedades, desde que nos atenhamos a convenientes condições iniciais.

Consideremos (3.1) sujeita a uma condição de auto-sustentação definida como segue.

Sejam uma constante $c > 0$ e a semi-reta dada por

$$l_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = c \text{ e } x_2 > 0\}.$$

A condição de auto-sutentação é:

$$x(t-) \in l_c \Rightarrow x(t+) = (c, 0). \tag{3.2}$$

Consideramos neste capítulo que as soluções são contínuas à direita, isto é, $x(t+) = x(t)$, $\forall t \geq 0$. Portanto, a condição (3.2) pode ser formulada:

$$x(t-) \in l_c \Rightarrow x(t) = (c, 0).$$

Adotando o mesmo estilo que vimos usando nos capítulos anteriores, à equação (3.1) com a condição (3.2), chamaremos " problema (3.1), (3.2)".

**Definição 3.1** *Denotemos por $K$ o conjunto das funções $\varphi \in SC$ que satisfazem as seguintes condições :*

(1) *$\varphi$ é contínua à direita em $[-1, 0)$;*

(2) *$\varphi$ tem no máximo um ponto de descontinuidade $t_0 \in (-1, 0]$. Esse ponto é da forma*

$$\varphi(t_0-) \in l_c \Rightarrow \varphi(t_0) = (c, 0).$$

Suponhamos agora que a condição inicial

$$x_0 = \varphi \in K \tag{3.3}$$

seja agregada a (3.1), (3.2). Como já observamos no Capítulo 1, em se tratando de um problema autônomo, o fato de fixarmos $t_0 = 0$ não constitui perda de generalidade.

**Definição 3.2** *Uma solução do problema de valor inicial* (3.1), (3.2), (3.3) *é uma função* $x : [-1, \omega) \to \mathbb{R}^2$, $\omega > 0$, *satisfazendo as seguintes condições :*

**(1)** $x|_{[-1,0]} = \varphi$;

**(2)** $x(t) = \varphi(0) + \alpha \int_0^t F(x(s-1))ds$, $t > 0$, *enquanto* $x(t-) \notin l_c$;

**(3)** *se* $t' > 0$ *é tal que* $x(t'-) \in l_c$, *então* $x(t') = (c, 0)$ *e*
$x(t) = (c, 0) + \alpha \int_{t'}^t F(x(s-1))ds$, *se* $t \in (t', T]$, *para todo* $T$ *tal que* $x(s-) \notin l_c$ *para* $s \in (t', T]$.

Dado $\varphi \in K$, segue imediatamente da definição acima que o problema de valor inicial (3.1), (3.2), (3.3) tem uma única solução $x(t) = x(t; \varphi)$ definida em $[-1, \infty)$.

Muitas vezes faremos referência à equação (3.1) na forma

$$\dot{x_1}(t) = \alpha F_1(x(t-1)) \tag{3.1a}$$

$$\dot{x_2}(t) = \alpha F_2(x(t-1)) \tag{3.1b}$$

Enunciamos a seguir algumas hipóteses que desempenham um papel importante neste Capítulo.

**(H1)** $x_2 F_1(x) > 0$, se $x_2 \neq 0$ e $x_1 F_2(x) < 0$, se $x_1 \neq 0$.

**(H2)** Existe $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

Finalmente, estabelecemos a seguinte hipótese de transversalidade com relação aos eixos coordenados:

**(H3)** Para cada $L > 0$, existem $K = K(L) > 0$ e $\xi > 0$ tais que:

$$[(0 \leq x_1 \leq L, x_2 \leq -K) \quad \text{ou} \quad (-L \leq x_1 \leq 0, x_2 \geq K)] \Rightarrow \frac{F_1(x)}{F_2(x)} > \xi$$

e

$$(-L \leq x_2 \leq 0, x_1 \leq -K) \Rightarrow \frac{F_2(x)}{F_1(x)} < -\xi.$$

A hipótese (H1) foi pela primeira vez formulada em [14] e corresponde a uma contrapartida planar da condição de retro-alimentação negativa para versões escalares da Equação (3.1).

O subconjunto fechado, convexo e limitado de $C$,

$$K_c = \{\varphi \in C \ \mid \ 0 \leq \varphi_1(-1) \leq c, \varphi_2(-1) = 0; \varphi_1(\theta), -\varphi_2(\theta) \text{ crescentes em } [-1, 0]; \text{ e } \varphi_j \ \alpha M - \text{Lipschitzianas}, j = 1, 2\} \tag{3.4}$$

será útil no que se segue.

**Teorema 3.1** *Se as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3) *estão satisfeitas, então para todo* $0 < \alpha \leq c/M$, *o problema* (3.1), (3.2) *tem uma solução periódica não trivial* $x(\cdot\,;\varphi)$, $\varphi \in K_c$, *com período* $T > 4$.

A prova deste teorema é baseada num princípio de ponto fixo, Lema 3.1, devido a R. Nussbaum [13], aplicado a um operador

$$\begin{aligned} &T : K_c \to K_c \\ &\quad T\varphi = x_\tau(\cdot\,;\varphi), \ \varphi \neq 0, \quad \text{para algum } \ \tau = \tau(\varphi) > 0 \\ &\quad T0 = 0. \end{aligned}$$

O conceito de ejetividade segundo Browder [3] desempenha um papel crucial nessa prova.

**Definição 3.3** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $U$ *um subconjunto de* $X$ *e* $x$ *um ponto de* $U$. *Dada uma aplicação* $A : U \setminus \{x\} \to X$, *o ponto* $x \in U$ *é dito um ponto ejetivo de* $A$ *se existe uma vizinhança aberta* $G \subseteq X$ *de* $x$ *tal que para cada* $y \in G \cap U$, $y \neq x$, *existe um inteiro* $m = m(y)$ *tal que* $A^m y \notin G \cap U$.

**Lema 3.1** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $K \subset X$ *um conjunto fechado, limitado, convexo, de dimensão infinita,* $A : K \setminus \{0\} \to K$ *uma aplicação completamente contínua e* $0 \in K$ *um ponto ejetivo de* $A$. *Então* $A$ *tem um ponto fixo* $x_0 \in K \setminus \{0\}$.

Consideremos as equações:

$$\dot{x}(t) = \alpha L x_t + \alpha f(x_t) \tag{3.5}$$

e

$$\dot{y}(t) = \alpha L y_t, \tag{3.6}$$

onde $L : C \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear contínua, $f$ é completamente contínua, continuamente diferenciável, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $\alpha > 0$. Usemos as notações $x_t(\cdot\,;\varphi)$ e $y_t(\cdot\,;\varphi)$ para as soluções de (3.5) e (3.6), respectivamente, com condição inicial $\varphi \in C$.

Se $T(t)$, $t \geq 0$, é a aplicação solução de (3.6), $T(t)\varphi = y_t(\cdot\,;\varphi)$, $\varphi \in C$, é sabido que, para qualquer autovalor $\lambda = \lambda(\alpha)$ de (3.6), o espaço $C$ é decomposto como $C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$, com $P_\lambda$ e $Q_\lambda$ invariantes sob $T(t)$ sendo o autoespaço $P_\lambda$ de dimensão finita, veja Capítulo 7 de [7].

Seja $\Pi_\lambda$ a projeção com imagem $P_\lambda$ dada por esta decomposição,

$$\Pi_\lambda \varphi = \Phi_\lambda b, \tag{3.7}$$

onde $\Phi_\lambda = (\varphi_1^\lambda, \varphi_2^\lambda, \ldots, \varphi_d^\lambda)$ é uma base de $P_\lambda$ e $b$ é um $d$-vetor.

O Lema a seguir dá uma condição suficiente para a ejetividade da origem de um certo operador de retorno.

**Lema 3.2** *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

(i) *Existe um autovalor $\lambda$ da equação linearizada* (3.6) *com* $\Re(\lambda) > 0$.

(ii) *Existe um subconjunto $K$ convexo e fechado de $C$, $0 \in K$, e uma função contínua*

$$\tau : K \setminus \{0\} \to [\rho, \infty), \ \rho > 0,$$

*tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} A : K &\to C \\ A\varphi &= x_{\tau(\varphi)}(\cdot\,;\varphi), \ \varphi \neq 0 \\ A0 &= 0 \end{aligned}$$

*é completamente contínua e* $AK \subset K$.

**(iii)** *Se* $0 < a < M$, *para algum* $M \in \mathbb{R}$,

$$\inf\{\|\Pi_\lambda(x_t)\| \mid x_t = x_t(\cdot\,;\varphi),\ \varphi \in K,\ \|\varphi\| \geq a,\ 0 \leq t \leq \tau(\varphi)\} > 0.$$

**(iv)** *Dado* $G \subset C$ *aberto,* $0 \in G$, *existe vizinhança* $V$ *de* $0$ *tal que* $x_t(\cdot\,;\varphi) \in G$, *se* $\varphi \in V \cap K$, $\varphi \neq 0$, $0 \leq t \leq \tau(\varphi)$.

*Então,* $0$ *é um ponto ejetivo de* $A$.

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em [14].

Retomemos o conjunto $K_c$ dado em (3.4). Nosso primeiro passo é construir em $K_c$ uma aplicação de retorno, que denotaremos por $T_\alpha$, associada ao problema (3.1), (3.2) satisfazendo as hipóteses do Lema 3.1.

**Lema 3.3** *Consideremos o problema* (3.1), (3.2) *com as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3). *Então, existe uma função contínua* $t_1 : K_c \setminus \{0\} \to [0, \infty)$ *tal que* $x_2(t_1(\varphi);\varphi) < 0$; $x(t;\varphi) \in Q_2$, *se* $0 \leq t \leq t_1(\varphi)$, *e* $x(t;\varphi) \in \mathrm{int}(Q_3)$, *se* $t_1(\varphi) < t < t_1(\varphi) + \delta$, *para* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno.*

**Prova:** Para $t > 0$, e enquanto a solução permanecer em $Q_2$, a hipótese (H1) implica que a semi-órbita positiva $\{x(t;\varphi),\ t > 0\}$ não converge para a origem e, além disso, não pode ocorrer $x(t;\varphi) \to x_0 \in Q_2$, com $t \to \infty$, pois $0$ é o único ponto de equilíbrio de (3.1).

A hipótese (H1) ainda implica que a semi-órbita positiva $\{x(t;\varphi),\ t > 0\}$ em $Q_2$ descreve o gráfico de uma função crescente $x_1 = G(x_2)$.

Assim, ou $x(t;\varphi)$ cruza o semi-eixo $\{(0, x_2) \mid x_2 < 0\}$ tranversalmente num instante $t_1(\varphi)$ ou para qualquer cone do tipo $C_k = \{(x_1, x_2) \in Q_2 \mid -x_2/x_1 \geq k\}$, $k > 0$, existe $\tau(k) > 0$ tal que $x(t;\varphi) \in C_k$ para $t \geq \tau(k)$. No segundo caso, se $k$ for suficientemente grande, a hipótese (H3) garante que

$$t \geq \tau(k) \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{F_1(x(t-1))}{F_2(x(t-1))} > \xi.$$

Isto significa que a órbita cruza o semi-eixo $\{(0, x_2) \mid x_2 < 0\}$ num instante $t_1 = t_1(\varphi)$ com uma inclinação maior que $\xi$.

A continuidade de $t_1$ segue do Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais [7]. ■

**Lema 3.4** *Se as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3) *estão satisfeitas e* $\varphi \in K_c$, *então a solução* $x(\cdot\,;\varphi)$ *do problema* (3.1), (3.2) *é uniformemente limitada, isto é, existe uma constante* $\Lambda > 0$ *independente de* $\varphi \in K_c$ *de modo que* $|x(t;\varphi)| \leq \Lambda$, $t \geq -1$.

**Prova:** Da hipótese (H3) segue que existem $\overline{K} > 0$ e $\xi > 0$ tais que se $(x_1, x_2) \in Q_2$, $x_2 \leq -\overline{K}$, $x_1 \leq c + \alpha M$, então

$$\frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)} > \xi. \tag{3.8}$$

Afirmamos que existe $c_1 > 0$ tal que $x_2(t_1(\varphi);\varphi) \geq -c_1$, $\forall \varphi \in K_c$.

Suponhamos, por absurdo, que não exista $c_1$. Então, para todo $n = 1, 2 \ldots$, existe $\varphi_n \in K_c$ tal que $x_2(t_1(\varphi_n);\varphi_n) < -n$. Para cada $n$, a curva $x(t;\varphi_n) \in Q_2$, $t \geq 0$, define $x_1$ como uma função de $x_2$, $x_1 = f_n(x_2)$. Dado $0 < \epsilon < \xi$, existem $\tilde{x}_2 \leq -\overline{K}$ e $n$ suficientemente grande tais que $f_n'(\tilde{x}_2) < \epsilon$. Seja $\tilde{t}$ tal que $\tilde{x}_2 = x_2(\tilde{t};\varphi_n)$. Então, como $F_2$ é limitada, segue que para $n$ suficientemente grande, $x_2(\tilde{t} - 1;\varphi_n) \leq -\overline{K}$. Logo,

$$f_n'(\tilde{x}_2) = \frac{F_1(x(\tilde{t} - 1;\varphi_n))}{F_2(x(\tilde{t} - 1;\varphi_n))} < \epsilon < \xi,$$

o que contraria (3.8).

Podemos então garantir que existe $c_1 > 0$ tal que $x_2(t_1(\varphi);\varphi) \geq -c_1$, $\forall \varphi \in K_c$. Isso implica a existência de $\Lambda_1 > 0$ tal que

$$|x(t;\varphi)| \leq \Lambda_1, \quad \forall \varphi \in K_c, \quad t \in [-1, t_1(\varphi) + 1].$$

Considerando a simetria rotacional das hipóteses assumidas até agora, sucessivas adaptações do raciocínio acima garantem a existência de funções contínuas $\varphi \to t_j(\varphi)$ de $K_c \setminus \{0\}$ em $[j - 1, \infty)$, tais que $x(t;\varphi) \in Q_{j+1}$, $t \in [t_{j-1}(\varphi), t_j(\varphi)]$,

$j = 2, 3$, e de constantes positivas $c_2$ e $c_3$ tais que para todo $\varphi \in K_c \setminus \{0\}$, $x_1(t_2(\varphi); \varphi) \geq -c_2$ e $x_2(t_3(\varphi); \varphi) \leq c_3$. Segue imediatamente a existência de uma constante $\Lambda_2 > 0$ tal que $|x(t; \varphi)| \leq \Lambda_2$, $\forall \varphi \in K_c$, $t \in [-1, t_3(\varphi) + 1]$, já que estamos supondo $0 < \alpha \leq c/M$.

A prova é agora facilmente finalizada usando a condição (3.2). ■

Embora não tenhamos definido um conjunto limitado positivamente invariante, o Lema 3.4 nos fornece a seguinte situação para contornar essa deficiência.

Existe um conjunto limitado, $D_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ (que pode ser descrito como a reunião de quatro retângulos como mostra a Figura 3.1) de modo que, se nos restringirmos às condições iniciais $\varphi \in K_c$, toda a dinâmica dada por $x_t(\cdot\,; \varphi)$, $t \geq 0$, se passa no conjunto $\{\psi \in K \mid \psi(\theta) \in D_\alpha,\ -1 \leq \theta \leq 0\}$.

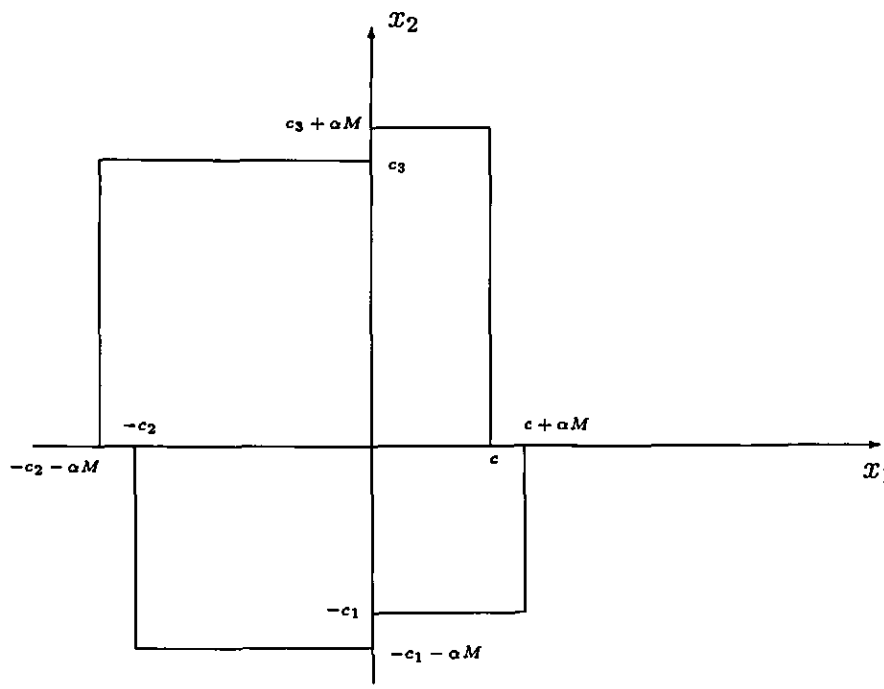


Figura 3.1: O conjunto $D_\alpha$

Como, para cada $\varphi \in K_c$, $x_t(\cdot\,; \varphi)$ retorna à $K_c$ num tempo $\tau(\varphi)$, podemos

definir a aplicação

$$\begin{aligned} T_\alpha : K_c &\to K_c \\ T_\alpha\varphi &= x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi), \quad \varphi \neq 0 \\ T_\alpha 0 &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\tau(\varphi)$ é o primeiro instante positivo tal que $x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi) \in K_c$.

O lema a seguir foi inspirado em [1].

**Lema 3.5** *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V \subset C$ de $0$ tal que $\forall\varphi \in V \cap K_c$, $\varphi \neq 0$, tem-se $x_t(\,\cdot\,;\varphi) \in G$ para $0 \leq t \leq t_1(\varphi) + 1$.*

**Prova:** É suficiente provar que dado $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $0 \in \tilde{G}$, existe uma vizinhança $V$ de $0$ em $C$ tal que se $\varphi \in V \cap K_c$, $\varphi \neq 0$, então $x(t;\varphi) \in \tilde{G}$ para $-1 \leq t \leq t_1(\varphi) + 1$.

Admitamos que vale a afirmação acima para $t \in [-1, t_1(\varphi)]$ e mostremos que então vale para $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi) + 1]$. Se $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi) + 1]$, levando em conta a hipótese (H1), como $F$ é contínua e $F(0) = 0$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x(t-1;\varphi)| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} -\varepsilon \leq F_1(x(t-1)) \leq 0, \\ -\varepsilon \leq F_2(x(t-1)) \leq 0. \end{aligned}$$

Segue das equações (3.1a) e (3.1b) que

$$\begin{aligned} -\alpha\varepsilon \leq \dot{x}_1(t) \leq 0 \\ -\alpha\varepsilon \leq \dot{x}_2(t) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Destas desigualdades segue que $-\alpha\varepsilon \leq x_1(t;\varphi) \leq 0$ e $-\alpha\varepsilon - \delta \leq x_2(t;\varphi) \leq 0$ para $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi) + 1]$. Fica desta forma verificada nossa afirmação para $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi) + 1]$.

Suponhamos agora, por absurdo, que a afirmação não seja verdadeira para $t \in [-1, t_1(\varphi)]$. Portanto, existe um retângulo aberto

$$R = \{(x_1, x_2) | -\delta_1 < x_1 < l \ \text{ e } \ -m < x_2 < \delta_2\},$$

$\delta_1, \delta_2, l, m > 0$, tal que para alguma seqüência $(\varphi_n)$, $\varphi_n \in K_c \setminus \{0\}$, $\varphi_n \to 0$, quando $n \to \infty$, existe uma seqüência $(t_n)$, $-1 \leq t_n \leq t_1(\varphi_n)$ com $x(t_n; \varphi_n) \in \partial R$, $x(t; \varphi_n) \in R$, $-1 \leq t < t_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Sejam $x_n(t) := x(t; \varphi_n)$, $x_{1n}(t) := x_1(t; \varphi_n)$ e $x_{2n}(t) := x_2(t; \varphi_n)$. Logo, $x_n(t) \in [0, q_n] \times [-m, 0]$, $-1 \leq t \leq t_n$, onde $q_n = \|\varphi_n\| \to 0$, quando $n \to \infty$.

Conseqüentemente, $x_2(t_n; \varphi_n) = -m$ para $n = 1, 2, \ldots$.

A continuidade de $F_2$ e a condição $F_2(0, x_2) = 0$ implicam que

$$\lim_{x_1 \to 0} F_2(x_1, x_2) = 0, \tag{3.11}$$

uniformemente em $x_2$, $-m \leq x_2 \leq 0$.

Tomando uma subseqüência de $(t_n)$, se necessário, seja $(\tau_n)$, $0 < \tau_n < t_n$, uma seqüência tal que $x_n(t) \in [0, q_n] \times [-m/2, 0]$, se $-1 \leq t \leq \tau_n$, com $x_2(\tau_n; \varphi_n) = -m/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Como $q_n \to 0$, quando $n \to \infty$, temos que $x_2(\tau_n - 1; \varphi_n) < -m/3$, já que, de acordo com (3.11), $|\dot{x}_{2n}(t)| = |\alpha F_2(x_n(t-1))|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, se $x_n(t) \in Q_2$, tomando $n$ suficientemente grande. Portanto, para todo $t \in [\tau_n - 1, t_n]$ temos $x_2(t; \varphi_n) < -m/3$.

Sejam $\sigma > 0$ e $n_0$ tais que

$$|\alpha F_1(x)| > \sigma, \quad \text{se} \quad x \in R \setminus \{(x_1, x_2) | \ |x_2| < m/3\}$$

e

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha F_2(x_n(t))| < \sigma \quad \text{e} \quad q_n < m/2.$$

As coordenadas $x_1(t; \varphi_n)$ e $x_2(t; \varphi_n)$ são estritamente decrescentes, $t \in [\tau_n, t_n]$ e, portanto, $x_n(t) = x(t; \varphi_n)$ é o gráfico de uma função $x_1 = x_1^n(x_2)$.

Em qualquer ponto $x_2(t)$, $\tau_n \leq t \leq t_n$, portanto, $-m \leq x_2(t) \leq -m/2$, obtemos:

$$\left|\frac{dx_1}{dx_2}\right| = \left|\frac{\alpha F_1(x_n(t-1))}{\alpha F_2(x_n(t-1))}\right| > 1,$$

o que é uma contradição. ∎

Dada $\varphi \in K_c \setminus \{0\}$, seja $\psi = x_{t_1(\varphi)+1}(\,\cdot\,;\varphi)$. Segue das equações (3.1a), (3.1b) e da hipótese (H1) que $\psi_1(\theta)$ e $\psi_2(\theta)$ são decrescentes em $[-1, 0]$.

Portanto, se $R$ é a rotação

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

essas propriedades de $\psi(\theta)$ implicam que $\psi \in RK_{c_1}$, onde $c_1 > 0$ é a constante encontrada no Lema 3.4.

Podemos então, definir uma função contínua

$$\begin{aligned} &(T_1)_\alpha : K_c \to RK_{c_1} \\ &\quad (T_1)_\alpha(\varphi) = x_{t_1(\varphi)+1}(\,\cdot\,;\varphi), \quad \varphi \neq 0 \\ &\quad (T_1)_\alpha(0) = 0. \end{aligned}$$

A continuidade de $(T_1)_\alpha$ em $K_c \setminus \{0\}$ é conseqüência imediata da continuidade de $t_1$ e da solução de (3.1) em relação às condições iniciais. Em $\varphi = 0$, a continuidade segue do Lema 3.5.

Consideremos o conjunto $\Gamma = l_c \cup \{(x, 0) | 0 \leq x \leq c\} \subset \mathbb{R}^2$. Assim como no caso das funções $t_1(\varphi)$, $t_2(\varphi)$ e $t_3(\varphi)$, também a função $t_4 : K_c \setminus \{0\} \to [3, \infty)$, onde $x(t_4(\varphi)-) \in \Gamma$, é contínua como conseqüência de argumentos ligados à continuidade em relação às condições iniciais.

Assim, para cada $\varphi \in K_c \setminus \{0\}$, segue que

$$\tau(\varphi) = t_4(\varphi) + 1$$

e, portanto, a função

$$\tau : K_c \setminus \{0\} \to [4, \infty)$$

é contínua.

O Lema seguinte é conseqüência imediata do Lema 3.5 e das simetrias das nossas hipóteses.

**Lema 3.6** *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V$ de $0$ em $C$ tal que se $\varphi \in V \cap K_c$, $\varphi \neq 0$ então $x_t(\,\cdot\,;\varphi) \in G$ para $0 \leq t \leq \tau(\varphi)$.*

**Lema 3.7** *A função $T_\alpha : K_c \to C$ definida por*

$$\begin{aligned} T_\alpha\varphi &= x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi), \quad \varphi \in K_c \setminus \{0\} \\ T_\alpha 0 &= 0, \end{aligned}$$

*é completamente contínua e $T_\alpha K_c \subset K_c$.*

**Prova:** Se $\varphi_0 \in K_c \setminus \{0\}$ e $x(t_4(\varphi_0);\varphi_0) \in \{(x,0) \mid x \in [0,c)\}$, então a continuidade de $T_\alpha$ em $\varphi_0$ é conseqüência imediata da continuidade de $t_4$ e das soluções de (3.1) em relação às condições iniciais.

Se $t_4(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in K_c \setminus \{0\}$, é um momento de impulso, ignoremos a condição de auto-sustentação (3.2) e consideremos em primeiro lugar a aplicação $T'_\alpha : K_c \setminus \{0\} \to C$ tal que $T'_\alpha\varphi = x_{t_4(\varphi)+1}(\,\cdot\,;\varphi)$. Esta aplicação é contínua por conseqüência do Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais. A seguir, definamos $\pi : C \to C$ a projeção dada por $\pi\varphi = (\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_2(-1))$ que é claramente uma aplicação contínua .

Como $T_\alpha = \pi \circ T'_\alpha : K_c \to K_c$, então $T_\alpha$ é contínua em $K_c \setminus \{0\}$.

A continuidade de $T_\alpha$ em $\varphi_0 = 0$ segue do Lema 3.6.

Seja $\overline{B}_\eta$ uma bola fechada em $C$ e $V = K_c \cap \overline{B}_\eta$. Então

$$T_\alpha(V) = \{x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi) \mid \varphi \in V \setminus \{0\}\} \cup \{0\} \subset K_c$$

e, portanto, $T_\alpha(V)$ é limitado.

Como os elementos do conjunto $K_c$ são funções cujas componentes são $\alpha M$-Lipschitzianas, segue imediatamente a equicontinuidade de $T_\alpha(V)$.

Portanto, $T_\alpha(V)$ é relativamente compacto e, por conseqüência, $T_\alpha$ é completamente contínua . ■

A equação linearizada de (3.1) em torno da origem é dada por

$$\dot{y}(t) = \alpha B y(t-1), \tag{3.12}$$

onde

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\delta_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) \geq 0$ e $\delta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) \leq 0$. Assumiremos $\delta = \sqrt{-\delta_1\delta_2} > 0$.

A equação característica de (3.12) é

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) := \lambda I - \alpha B e^{-\lambda}, \tag{3.13}$$

onde $I$ representa a matriz identidade de ordem 2 ou, equivalentemente,

$$\lambda^2 e^{2\lambda} = -\delta^2\alpha^2. \tag{3.14}$$

Uma análise completa da Equação (3.14) pode ser encontrada em [14]. Um fato relevante para os nossos propósitos é que, para todo $\alpha > 0$, existe um par de raízes conjugadas $\lambda = a \pm bi$ com $a > 0$ e $0 < |b| < \pi/2$.

Com o objetivo de provar que $0 \in K_c$ é um ponto ejetivo de $T_\alpha$, definamos a função

$$\begin{aligned} \tilde{F} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \tilde{F}(x) &= (\tilde{F}_1(x), F_2(x)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_1(x) = F_1(x) \ \text{ se } \ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq c \ \text{ e } \ x_2 \geq 0\}, \\ &\tilde{F}_1(x) = 0 \ \text{ se } \ x \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq c+1 \ \text{ e } \ x_2 \geq 0\}, \\ &\tilde{F}_1(c + (1-\lambda), x_2) = \lambda F_1(c + (1-\lambda), x_2) \ \text{ se } \ 0 \leq \lambda \leq 1 \ \text{ e } \ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A função $\tilde{F}$ é claramente contínua.

Consideremos a família de equações diferenciais da forma

$$\dot{x}(t) = \alpha \tilde{F}(x(t-1)) \tag{3.15}$$

e denotemos por $\tilde{x}(t; \varphi)$ a única solução de (3.15) em $[-1, \infty)$ tal que $\tilde{x}_0(\,\cdot\,; \varphi) = \varphi$.

Observemos, que embora a função $\tilde{F}$ não satisfaça a hipótese (H1), as soluções de (3.15) espiralam em torno da origem.

Consideremos agora o conjunto convexo, fechado e limitado $K_{c+1+\alpha M}$, de acordo com (3.4).

Usando raciocínios análogos aos dos Lemas 3.3 e 3.4, obtemos a existência de funções contínuas $\varphi \to \tilde{t}_j(\varphi)$ de $K_{c+1+\alpha M} \setminus \{0\}$ em $[j-1, \infty)$, $j = 1, 2, 3, 4$,

tais que $\tilde{x}(t;\varphi) \in Q_{j+1}$, $t \in [t_{j-1}(\varphi), t_j(\varphi)]$, onde $Q_5 = Q_1$, $t_0(\varphi) = -1$, e de constantes positivas $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ e $\tilde{c}_4 = c + 1 + \alpha M$ tais que $\tilde{x}_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi) \geq -\tilde{c}_1$; $\tilde{x}_1(\tilde{t}_2(\varphi);\varphi) \geq -\tilde{c}_2$; $\tilde{x}_2(\tilde{t}_3(\varphi);\varphi) \leq \tilde{c}_3$ e $\tilde{x}_1(\tilde{t}_4(\varphi);\varphi) \leq \tilde{c}_4$.

Podemos assim definir a aplicação

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_\alpha : K_{c+1+\alpha M} \to K_{c+1+\alpha M} \\ &\tilde{T}_\alpha \varphi = \tilde{x}_{\tilde{\tau}(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi), \ \varphi \neq 0 \\ &\tilde{T}_\alpha 0 = 0, \end{aligned}$$

onde, para todo $\varphi \in K_{c+1+\alpha M} \setminus \{0\}$, $\tilde{\tau}(\varphi) = \tilde{t}_4(\varphi) + 1$ é o primeiro instante positivo tal que $\tilde{x}_{\tilde{\tau}(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi) \in K_{c+1+\alpha M}$.

Primeiramente vamos provar que 0 é um ponto ejetivo da aplicação $\tilde{T}_\alpha$. Alguns lemas são necessários.

**Lema 3.8** *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V$ de 0 em $C$ tal que se $\varphi \in V \cap K_{c+1+\alpha M}$, $\varphi \neq 0$, então $\tilde{x}_t(\,\cdot\,;\varphi) \in G$ para $0 \leq t \leq \tilde{\tau}(\varphi)$.*

**Prova:** Veja o Lema 3.6. ■

**Lema 3.9** *A função $\tilde{T}_\alpha : K_{c+1+\alpha M} \to C$ definida por*

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_\alpha \varphi = \tilde{x}_{\tilde{\tau}(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi), \ \varphi \in K_{c+1+\alpha M} \setminus \{0\} \\ &\tilde{T}_\alpha 0 = 0, \end{aligned}$$

*é completamente contínua e $\tilde{T}_\alpha K_{c+1+\alpha M} \subset K_{c+1+\alpha M}$.*

**Prova:** Pode ser obtida por simples adaptações dos argumentos usados na prova do Lema 3.7. ■

Retornando às hipóteses do Lema 3.2, vemos que (ii) e (iv) seguem, respectivamente, dos Lemas 3.9 e 3.8, com $K = K_{c+1+\alpha M}$ e $\rho = 4$. Se tomarmos $\lambda = a + bi$ autovalor de (3.12) com $0 < b < \pi/2$, então (i) está satisfeita, de acordo com a análise da equação característica em [14]. Resta provar que neste contexto a hipótese (iii) do Lema 3.2 está satisfeita. Isto será feito através dos Lemas 3.10 e 3.11 e do Corolário 3.1.

Dado $d > 0$, o Lema 3.10 diz que o primeiro cruzamento de $\tilde{x}(t;\varphi)$ com o eixo $x_2$ (isto é, $\tilde{x}_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi)$) tem um limitante superior negativo para todo $\varphi \in K_{c+1+\alpha M}$ com $\|\varphi\| \geq d$.

**Lema 3.10** *Seja $d > 0$. Existe $d_1 > 0$ tal que se $\varphi \in K_{c+1+\alpha M}$ e $\|\varphi\| \geq d$, então $\tilde{x}_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi) \leq -d_1$.*

**Prova:** Definindo $B_d^c = C \setminus B_d$, basta observar que $K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$ é um conjunto compacto em $C$ e que

$$\varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c \to \tilde{x}_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi) \in \mathbb{R}$$

é uma função contínua com $\tilde{x}_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi) < 0$. ∎

Observemos que a equação (3.12) é um caso particular da equação (3.6) com $L(\varphi) = B\varphi(-1)$.

Seja $\eta(\theta)$, $\theta \in [-1,0]$, a matriz de ordem 2 definida por

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = -1; \\ B, & -1 < \theta \leq 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Então, para qualquer $\varphi \in C$,

$$L(\varphi) = \int_{-1}^{0} [d\eta(\theta)]\varphi(\theta).$$

Seja $G$ o gerador infinitesimal do semigrupo $\{\tilde{T}_\alpha(t), t \geq 0\}$ definido por

$$\tilde{T}_\alpha(t)\varphi = y_t(\,\cdot\,;\varphi), \quad \varphi \in C,\ t \geq 0.$$

Para todo $\alpha > 0$, existe um único autovalor $\lambda = \lambda(\alpha)$ tal que $\Re\lambda > 0$ e $0 < \Im\lambda < \pi/2$, veja [14]. O autovalor $\lambda$ é simples, portanto, o autoespaço generalizado $P_\lambda = \mathcal{N}(\lambda I - G)$ associado à $\lambda$ é 1-dimensional.

Se $G^*$ é o operador adjunto formal de $G$, $\lambda$ também é autovalor de $G^*$ e seu autoespaço generalizado $\mathcal{N}(\lambda I - G^*)$ também é 1-dimensional.

Seja $C^* = C([0,1], \mathbb{R}^{2*})$, onde $\mathbb{R}^{2*}$ é o plano dos vetores linhas. Aparece de maneira natural na decomposição de $C$, a forma bilinear de $C^* \times C$ dada por

$$\langle \psi, \varphi \rangle := \psi(0) \cdot \varphi(0) - \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\varphi(\xi) d\xi, \tag{3.17}$$

$\psi \in C^*$, $\varphi \in C$, onde "$\cdot$" significa o produto escalar do $\mathbb{R}^2$.

Se $u$ é uma solução não trivial de $\Delta(\lambda)u = 0$, com $\Delta(\lambda)$ dado em (3.13), e o vetor linha $v$ é uma solução não trivial de $v\Delta(\lambda) = 0$, então as funções $\rho(t) := e^{\lambda t}u$, $t \in [-1, 0]$ e $\sigma(s) := ve^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$, geram $\mathcal{N}(\lambda I - G)$ e $\mathcal{N}(\lambda I - G^*)$, respectivamente.

Além disso, relembramos que se $\varphi \in C = P_\lambda \oplus Q_\lambda$ é decomposto como $\varphi = \varphi^{P_\lambda} + \varphi^{Q_\lambda}$, então sua componente $\varphi^{P_\lambda}$ em $P_\lambda$ é dada por

$$\varphi^{P_\lambda} = \langle \sigma, \varphi \rangle \rho. \tag{3.18}$$

**Lema 3.11** *Seja* $L_{\tilde{c}_4} = \sqrt{(c + 1 + 2\alpha M)^2 + \alpha^2 M^2}$. *Para qualquer constante real* $d$, $0 < d < L_{\tilde{c}_4}$,

$$m = \inf\{|\langle \sigma, \tilde{x}_t \rangle| \mid \tilde{x}_t = \tilde{x}_t(\cdot\,; \varphi),\ \varphi \in K_{c+1+\alpha M},\ \|\varphi\| \geq d,\ 0 \leq t \leq \tilde{t}_1(\varphi) + 1\} > 0.$$

**Prova:** Considerando a solução $v = (1, -i\mu)$, com $\mu = \sqrt{-\delta_1/\delta_2}$, da equação $v\Delta(\lambda) = 0$, $\sigma(s) = (1, -i\mu)e^{-\lambda s}$, $s \in [0, 1]$ e $\eta(\theta) = (\eta_{ij}(\theta))$ satisfazendo (3.16), segue de (3.17) que:

$$\langle \sigma, \tilde{x}_t \rangle = \tilde{x}_1(t) - i\mu\tilde{x}_2(t) + \int_{-1}^{0} e^{-\lambda(\xi+1)}[\delta_1 \tilde{x}_2(t + \xi) - i\delta_2 \mu \tilde{x}_1(t + \xi)] d\xi. \tag{3.19}$$

Tomando $\lambda = a + bi$ com $a > 0$, $0 < b < \pi/2$, (3.19) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tilde{x}_t \rangle = \tilde{x}_1(t) &+ \textstyle\int_{-1}^{0} e^{-a(\xi+1)}[\delta_1 \tilde{x}_2(t + \xi) \cos b(\xi + 1) \\ &-\delta_2 \mu \tilde{x}_1(t + \xi) \operatorname{sen} b(\xi + 1)] d\xi + i\{-\mu\tilde{x}_2(t) \\ &+ \textstyle\int_{-1}^{0} e^{-a(\xi+1)}[-\delta_2 \mu \tilde{x}_1(t + \xi) \cos b(\xi + 1) \\ &-\delta_1 \tilde{x}_2(t + \xi) \operatorname{sen} b(\xi + 1)] d\xi\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A aplicação $\varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c \to \tilde{t}_1(\varphi)$ é contínua. Como $K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$ é compacto, existe $T > 0$ constante, tal que $\tilde{t}_1(\varphi) \leq T \ \forall \varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$. Isso implica que

$$\begin{aligned}&\inf\{|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| \mid \tilde{x}_t = \tilde{x}_t(\,\cdot\,;\varphi),\ \varphi \in K_{c+1+\alpha M},\ \|\varphi\| \geq d,\ 0 \leq t \leq T+1\}\\ &\leq \inf\{|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| \mid \tilde{x}_t = \tilde{x}_t(\,\cdot\,;\varphi),\ \varphi \in K_{c+1+\alpha M},\ \|\varphi\| \geq d,\ 0 \leq t \leq \tilde{t}_1\langle\varphi\rangle + 1\}.\end{aligned}$$

O nosso objetivo será, então, provar que

$$\inf\{|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| \mid \tilde{x}_t = \tilde{x}_t(\,\cdot\,;\varphi),\ \varphi \in K_{c+1+\alpha M},\ \|\varphi\| \geq d,\ 0 \leq t \leq T+1\} > 0.$$

Para cada $\varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$, se $t \in [0, \tilde{t}_1(\varphi)]$, notemos, de acordo com a expressão (3.19), que $\Im\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle > 0$. Para todo $t \in [\tilde{t}_1(\varphi), \tilde{t}_1(\varphi) + 1]$ temos que $p(\xi) = \delta_1 \tilde{x}_2(t+\xi) - i\delta_2\mu\tilde{x}_1(t+\xi)$, $\xi \in [-1, 0]$ é uma curva do plano complexo, localizada no setor $\{re^{i\theta} \mid \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, r \geq 0\}$. A curva $e^{-\lambda(\xi+1)}$, $\xi \in [-1, 0]$, está no setor $z = re^{i\theta}$, onde $e^{-a} \leq r \leq 1$ e $-B \leq \theta \leq 0$, para algum $B \in (0, \pi/2)$.

O integrando $e^{-\lambda(\xi+1)}p(\xi)$ tem argumento $\theta(\xi)$, $0 < -B + \pi/2 \leq \theta(\xi) \leq 3\pi/2$.

Tomando $\tilde{\theta} = \max\{\arg e^{-\lambda(\xi+1)}p(\xi) \mid \xi \in [-1, 0]\}$, prova-se que a curva $e^{-\lambda(\xi+1)}p(\xi)$, $\xi \in [-1, 0]$, está situada inteiramente no semiplano determinado pela reta $z = te^{\tilde{\theta}i}$, $t \in \mathbb{R}$, contendo o semi-eixo imaginário positivo.

Se $-B + \pi/2 \leq \tilde{\theta} \leq \pi$, então $e^{-\lambda(\xi+1)}p(\xi)$ tem parte imaginária não negativa. Sendo $\tilde{x}_2(t) < 0$, $t \in [\tilde{t}_1(\varphi), \tilde{t}_1(\varphi) + 1]$ segue de (3.19) que $\Im\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle > 0$.

Se $\pi < \tilde{\theta} \leq 3\pi/2$, então $e^{-\lambda(\xi+1)}p(\xi)$ tem parte real não positiva. Sendo $\tilde{x}_1(t) < 0$, $t \in (\tilde{t}_1(\varphi), \tilde{t}_1(\varphi) + 1]$, segue de (3.19) que $\Re\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle < 0$.

Portanto, $\forall \varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$ e $\forall t \in [0, \tilde{t}_1(\varphi) + 1]$ temos que $|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| > 0$.

O argumento acima pode ser aplicado para mostrar que $|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| > 0$ nos intervalos $[\tilde{t}_1(\varphi) + 1, \tilde{t}_2(\varphi) + 1]$, $[\tilde{t}_2(\varphi) + 1, \tilde{t}_3(\varphi) + 1]$ e $[\tilde{t}_3(\varphi) + 1, \tilde{\tau}(\varphi)]$. Enfim, obtemos $|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| > 0$, $t \in [0, \tilde{\tau}]$, para todo $\tilde{\tau} \geq 0$.

Assim, $\forall \varphi \in K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c$, $\forall t \in [0, T]$, segue que $|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| > 0$.

Como a função $g : (K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c) \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que $g(\varphi, t) = |\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle|$ é contínua no compacto $(K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c) \times [0, T]$ de $C \times \mathbb{R}$ e $|\langle \sigma, \tilde{x}_t\rangle| > 0$ para

cada $(\varphi, t) \in (K_{c+1+\alpha M} \cap B_d^c) \times [0, T]$, então a função $g$ tem um mínimo positivo. Conseqüentemente, temos $m > 0$. ∎

As observações finais da prova do Lema 3.11 levam imediatamente ao seguinte

**Corolário 3.1** *Para qualquer constante $a$, $0 < a < L_{\tilde{c}_4}$,*

$$\inf\{\|\pi_\lambda \tilde{x}_t(\,\cdot\,;\varphi)\| \,|\, \varphi \in K_{c+1+\alpha M},\ \|\varphi\| \geq a,\ 0 \leq t \leq \tilde{\tau}(\varphi)\} > 0.$$

Como as hipóteses (i), (ii) e (iv) do Lema 3.2 estão satisfeitas para $A = \tilde{T}_\alpha$, o Corolário 3.1 implica que 0 é um ponto ejetivo da aplicação $\tilde{T}_\alpha$.

Estamos agora em posição de estabelecer a seguinte

**Proposição 3.1** *O ponto 0 é ejetivo para a aplicação $T_\alpha : K_c \to K_c$.*

**Prova:** Seja $G \subseteq C$ uma vizinhança aberta de 0 tal que para todo $\varphi \in G \cap K_c$, $\varphi \neq 0$, a solução de (3.1), (3.2) não tem impulso em $[0, \tau(\varphi)]$, e para todo $\varphi \in G \cap K_{c+1+\alpha M} = G \cap K_c$, $\varphi \neq 0$, existe um número inteiro $m = m(\varphi)$ tal que $\tilde{T}_\alpha^m(\varphi) \notin G \cap K_c$. Consideremos $\overline{m} = \overline{m}(\varphi)$ o menor número inteiro com essa propriedade.

Como $(\tilde{T}_\alpha)\big|_{G\cap K_c} = (T_\alpha)\big|_{G\cap K_c}$, necessariamente temos que $\tilde{T}_\alpha^{\overline{m}}(\varphi) = T_\alpha^{\overline{m}}(\varphi)$, para todo $\varphi \in G \cap K_c$. De fato, se $\tilde{T}_\alpha^{\overline{m}}(\varphi) \neq T_\alpha^{\overline{m}}(\varphi)$ para algum $\varphi \in G \cap K_c$, então $x(\,\cdot\,; T_\alpha^{\overline{m}-1}(\varphi))$ tem um impulso entre 0 e $\tau(T_\alpha^{\overline{m}-1}(\varphi))$. Logo, $\tilde{T}_\alpha^{\overline{m}-1}(\varphi) = T_\alpha^{\overline{m}-1}(\varphi) \notin G$, o que contraria a minimalidade de $\overline{m}$.

Assim, $T_\alpha^{\overline{m}}(\varphi) \notin G \cap K_c$, ou seja, 0 é ejetivo para $T_\alpha$. ∎

**Prova do Teorema 3.1**

O Lema 3.7 e a Proposição 3.1 mostram que todas as hipóteses do Lema 3.1 estão satisfeitas para a aplicação $T_\alpha : K_c \setminus \{0\} \to K_c$. Portanto, o Teorema 3.1 segue imediatamente. ∎

É natural, agora, perguntar se existem soluções periódicas impulsivas do problema (3.1), (3.2).

Vejamos através de um exemplo que essa questão pode ter uma resposta positiva.

**Exemplo 3.1** Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x) = \begin{cases} (x_2, -x_1), & \text{se } |x| \leq M, \\ \\ \dfrac{M(x_2, -x_1)}{|x|}, & \text{se } |x| \geq M. \end{cases} \tag{3.21}$$

Evidentemente, $F$ satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3) e, além disso, coincide com uma rotação na bola $B_M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < M\}$.

Tomando esta função $F$ e $0 < \alpha \leq c/2M$, mostremos que o problema (3.1), (3.2) tem uma solução periódica impulsiva.

Consideremos $\Omega$ o conjunto das funções $\varphi \in K_c$, tais que o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $\{(\lambda\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)) \in Q_2 \mid 0 \leq -\theta, \lambda \leq 1\}$ é convexo.

Definamos os conjuntos $K_c^0 = \{\varphi \in K_c | \ \varphi(-1) = (c, 0)\}$ e $\tilde{K}_c = K_c^0 \cap \Omega$.

Notemos que qualquer que seja $\varphi \in \tilde{K}_c$, se $t > 0$ e $x(t;\varphi) \in Q_2$, então $F(x(t-1;\varphi)) \in Q_3$ e forma um ângulo agudo com $x(t)$. Portanto, $x(t) \cdot \dot{x}(t) > 0$, donde concluímos que $|x(t)|$ é crescente para $t \in [0, t_1(\varphi)]$.

Dada $\varphi \in \tilde{K}_c$, se $\psi = x_{t_1(\varphi)+1}(\,\cdot\,;\varphi)$, então

$$\psi'(\theta) = \alpha F(x(t_1(\varphi) + \theta; \varphi)), \ \theta \in [-1, 0].$$

Como $x(t_1(\varphi) + \theta; \varphi) \in Q_2$ para $\theta \in [-1, 0]$, segue que $\psi_1(\theta)$ e $\psi_2(\theta)$ são decrescentes e, portanto, $|x(t)|$ é crescente para $t \in [0, t_1(\varphi) + 1]$.

Para $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi) + 1]$ temos que a solução $x(t;\varphi)$ descreve o gráfico de uma função $x_2 = G(x_1)$. Como $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1(t-1;\varphi)}{x_2(t-1;\varphi)}$ é decrescente com respeito a $t \in [t_1(\varphi), t_1(\varphi)+1]$, segue que $\frac{dx_2}{dx_1}$ é crescente com respeito a $x_1$. Logo, de acordo com a Proposição 5, 1-5, [6], a função $x_2 = G(x_1)$ é convexa. Segue imediatamente que $\{(\psi_1(\theta), \lambda\psi_2(\theta)) \in Q_3 \mid 0 \leq -\theta, \lambda \leq 1\}$ é convexo.

Usando raciocínio análogo nos demais quadrantes, obtemos que a solução espirala em torno da origem com norma crescente, até ocorrer um momento de impulso $\tau(\varphi) - 1$ e, além disso, $x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi) \in \tilde{K}_c$.

Como o conjunto $\tilde{K}_c$ é convexo e compacto e a aplicação $(T_\alpha)|_{\tilde{K}_c}$ é contínua, segue do Teorema do ponto fixo de Schauder que $(T_\alpha)|_{\tilde{K}_c}$ tem um ponto fixo. Isto significa que a função $F$ dada em (3.21), fornece um exemplo do problema (3.1), (3.2), com solução periódica impulsiva.

O nosso objetivo agora é analisar o caso em que $\alpha > c/M$.

Definamos o retângulo $W \subset \mathbb{R}^2$ e o conjunto $S \subset C$ por:

$$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq x_1 \leq c + \alpha M \ \text{ e } \ 0 \leq x_2 \leq \alpha M\}$$

e

$$S = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C \mid \ \varphi(-1) = (c, 0);\ \varphi_1(\theta) \ \text{ crescente, } \ \varphi_2(\theta) \geq 0, \\ -1 \leq \theta \leq 0; \varphi_j,\ j = 1, 2,\ \alpha M - \text{Lipschitzianas}\}.$$

Consideremos a hipótese

**(H3')** Para cada $L > 0$, existem $K = K(L) > 0$ e $\xi > 0$ tais que:

$$[(0 \leq x_1 \leq L, x_2 \leq -K) \ \text{ ou } \ (-L \leq x_1 \leq 0, x_2 \geq K)] \Rightarrow \frac{F_1(x)}{F_2(x)} > \xi$$

e

$$[(-L \leq x_2 \leq 0, x_1 \leq -K) \ \text{ ou } \ (0 \leq x_2 \leq L,\ x_1 \geq K)] \Rightarrow \frac{F_2(x)}{F_1(x)} < -\xi.$$

**Lema 3.12** *Consideremos o problema* (3.1), (3.2) *com as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3'). *Então, existe uma função contínua* $t_1 : S \to [0, \infty)$ *tal que* $x_1(t_1(\varphi); \varphi) \geq c$; $x(t; \varphi) \in Q_1$, *se* $0 \leq t \leq t_1(\varphi)$, *e* $x(t; \varphi) \in \operatorname{int} Q_2$, *se* $t_1(\varphi) < t < t_1(\varphi) + \delta$ *para* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno.*

**Prova:** Basta usar raciocínio análogo ao da prova do Lema 3.3, levando em conta a hipótese (H3'). ■

**Lema 3.13** *Se as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3') *estão satisfeitas, então existe uma constante* $c_1 > 0$ *tal que, se* $\varphi \in S$, *a solução* $x(\cdot; \varphi)$ *do problema* (3.1), (3.2) *satisfaz* $x_1(t_1(\varphi); \varphi) \leq c_1$.

**Prova:** Basta usar a hipótese (H3') e raciocínio análogo ao da prova do Lema 3.4. ■

Considerando a simetria rotacional das hipóteses assumidas, sucessivas adaptações dos lemas acima garantem a existência de funções contínuas, $\varphi \mapsto t_j(\varphi)$ de $S$ em $[j-1,\infty)$, $j = 2,3,4$, tais que $x(t;\varphi) \in Q_j$ se $t \in [t_{j-1}(\varphi), t_j(\varphi)]$ e de constantes positivas $c_2$, $c_3$ e $c_4$ tais que $x_2(t_2(\varphi);\varphi) \geq -c_2$, $x_1(t_3(\varphi);\varphi) \geq -c_3$ e $x_2(t_4(\varphi);\varphi) \leq c_4$, para todo $\varphi \in S$.

Dado $k > 0$, definamos

$$H_k = \{\varphi \in C \mid \varphi_1(-1) = 0,\ -k \leq \varphi_2(-1) \leq 0;\ \varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta) \text{ decrescentes em } [-1,0] \text{ e } \varphi_j, j = 1,2,\ \alpha M - \text{Lipschitzianas}\}.$$

Se as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estão satisfeitas, usando raciocínio análogo ao da prova do Lema 3.3, obtemos a existência de funções contínuas $\varphi \to \tilde{t}_j(\varphi)$ de $H_{c_2} \setminus \{0\} \to [j-1,\infty)$, $j = 1,2$, tais que se $x(\cdot\,;\varphi)$ denota a solução da equação (3.1) com $x_0(\cdot\,;\varphi) = \varphi \in H_{c_2}$, então $x_2(\tilde{t}_1(\varphi);\varphi) = x_1(\tilde{t}_2(\varphi);\varphi) = 0$ e $x_{\tilde{\tau}(\varphi)}(\cdot\,;\varphi) \in -H_{c_4}$, onde $\tilde{\tau}(\varphi) = \tilde{t}_2(\varphi) + 1$.

**Lema 3.14** *Existem constantes $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ independentes de $\varphi \in H_{c_2} \setminus \{0\}$ tais que se $x_1(\tilde{\tau}(\varphi);\varphi) \geq c$ e $t_0 = t_0(\varphi) \in (\tilde{\tau}(\varphi) - 1, \tilde{\tau}(\varphi)]$ satisfaz $x_1(t_0;\varphi) = c$, então $\dot{x}_1(t;\varphi) \geq \eta$ para todo $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.*

**Prova:** Suponhamos que não existam constantes $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ nas condições do enunciado. Então existem seqüências $\varphi_n \in H_{c_2}$ e $t_n \in [t_0(\varphi_n) - 1/n, t_0(\varphi_n) + 1/n]$, $n = 1, 2, \cdots$, tais que $x_1(t_0(\varphi_n);\varphi_n) = c$, $x_1(\tilde{\tau}(\varphi_n);\varphi_n) \geq c$ e $\dot{x}_1(t_n;\varphi_n) < 1/n$.

Como $H_{c_2} \subset C$ é um conjunto compacto, existe uma subseqüência para a qual usamos a mesma notação $\varphi_n$, tal que $\varphi_n \to \varphi \in H_{c_2}$ quando $n \to \infty$. Além disso, como $t_0 : H_{c_2} \setminus \{0\} \to [1,\infty)$ é uma função contínua, obtemos que $t_n \to t_0(\varphi)$ quando $n \to \infty$, $x_1(t_0(\varphi);\varphi) = c$ e $\dot{x}_1(t_0(\varphi);\varphi) \leq 0$. Isto é uma contradição, uma vez que temos $\dot{x}_1(t_0(\varphi);\varphi) = \alpha F_1(x(t_0(\varphi) - 1;\varphi)) > 0$, de acordo com (H1). ■

Definamos agora o conjunto $K \subset SC$ tal que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in K$ se, e somente

se, as seguintes condições estão satisfeitas:

1) $\varphi_1(-1) = 0$, $0 \leq \varphi_2(-1) \leq c_4$;

2) $\varphi_1$ é contínua e $\theta_0 \in (-1, 0]$ é uma descontinuidade de $\varphi$ se, e somente se, $\varphi_1(\theta_0) = c$, $\varphi_2(\theta_0-) > 0$ e $\varphi_2(\theta_0) = 0$;

3) nos intervalos de continuidade, as coordenadas $\varphi_j$, $j = 1, 2$, são crescentes e $\alpha M$-Lipschitzianas;

4) se $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ são constantes de acordo com o Lema 3.14, $\varphi(\theta_0-) \in l_c$ e $[\theta_1, \theta_2] \subset (\theta_0 - \sigma, \theta_0)$ ou $[\theta_1, \theta_2] \subset [\theta_0, \theta_0 + \sigma)$, então

$$\varphi_1(\theta_2) - \varphi_1(\theta_2) \geq \eta(\theta_2 - \theta_1).$$

Notemos que se $\varphi \in K$, então $\|\varphi\| \leq \Lambda := \sqrt{(c_4 + \alpha M)^2 + \alpha^2 M^2}$.

**Teorema 3.2** *Suponhamos que as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3') *estejam satisfeitas. Então, para todo $\alpha > c/M$, o problema* (3.1), (3.2) *tem uma solução periódica não trivial $x(\cdot\,;\varphi)$, $\varphi \in K$, com período $T > 4$.*

Os Lemas a seguir são essenciais para a prova do Teorema 3.2.

**Lema 3.15** *Consideremos o problema* (3.1), (3.2) *com as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3'). *Então, existe uma função contínua $t_1 : K \setminus \{0\} \to [0, \infty)$ tal que $x_1(t_1(\varphi); \varphi) > 0$; $x(t; \varphi) \in Q_1$, se $0 \leq t \leq t_1(\varphi)$, e $x(t; \varphi) \in \operatorname{int} Q_2$, se $t_1(\varphi) < t < t_1(\varphi) + \delta$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

**Prova:** Mostremos que $t_1(\varphi)$ existe para todo $\varphi \in K \setminus \{0\}$. De fato, se $\varphi_1(0) \leq c$ ou se $\varphi_1(\theta_0) = c$, para algum $\theta_0 \in (-1, 0)$ e $x_2(t_1; \varphi) = 0$, para algum $t_1 \in [\theta_0, \theta_0 + 1]$, não há o que provar. Se nenhuma das condições acima estiver satisfeita, então existe $\theta_0 \in (-1, 0)$ tal que $x_{\theta_0+1}(\cdot\,;\varphi) \in S$. Neste caso, a existência de $t_1(\varphi)$ segue do Lema 3.12.

A continuidade de $t_1$ segue de argumentos ligados ao Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais. ∎

Usando as simetrias de nossas hipóteses, uma simples adaptação dos argumentos usados na prova do Lema 3.3 nos levam diretamente ao seguinte Corolário.

**Corolário 3.2** *Consideremos o problema* (3.1), (3.2) *com as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3'). *Então, existem funções contínuas* $t_j : K \setminus \{0\} \to [j-1, \infty)$, $j = 2, 3, 4$, *tais que* $x(t;\varphi) \in Q_j$, $t \in [t_{j-1}(\varphi), t_j(\varphi)]$, $j = 2, 3, 4$, *e* $x(t;\varphi) \in \operatorname{int} Q_{j+1}$, *se* $t_j(\varphi) < t < t_j(\varphi) + \delta$ *para* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno, onde* $Q_5 = Q_1$.

**Lema 3.16** *Se as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3') *estão satisfeitas, então existem constantes positivas* $c_1$, $c_2$, $c_3$ *e* $c_4$ *tais que se* $\varphi \in K \setminus \{0\}$, *a solução* $x(t;\varphi)$ *do problema* (3.1), (3.2) *satisfaz* $x_1(t_1(\varphi);\varphi) \leq c_1$, $x_2(t_2(\varphi);\varphi) \geq -c_2$, $x_1(t_3(\varphi);\varphi) \geq -c_3$ *e* $x_2(t_4(\varphi);\varphi) \leq c_4$. *Além disso, existe uma constante* $L > 0$ *independente de* $\varphi \in K$, *tal que* $|x(t;\varphi)| \leq L$, *para todo* $t \geq -1$.

**Prova:** Segue do Lema 3.15, do Corolário 3.2, do Lema 3.13 e do comentário após o Lema 3.13. ■

**Lema 3.17** *Seja* $G \subset C$ *aberto,* $0 \in G$. *Existe uma vizinhança* $V \subset C$ *de* 0 *tal que* $\forall \varphi \in V \cap K$, $\varphi \neq 0$, *tem-se* $x_t(\,\cdot\,;\varphi) \in G$ *para* $0 \leq t \leq t_1(\varphi) + 1$.

**Prova:** A prova é análoga a do Lema 3.5, considerando apenas algumas adaptações de notação . ■

Segue da continuidade da aplicação $t_4 : K \setminus \{0\} \to [3, \infty)$ definida anteriormente, que a aplicação

$$\begin{aligned} \tau : K \setminus \{0\} &\to [4, \infty) \\ \tau(\varphi) &= t_4(\varphi) + 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

é contínua.

Como $x_t(\,\cdot\,;\varphi)$ retorna a $K$ passado um tempo igual a $\tau(\varphi)$, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} &U_\alpha : K \to K \\ &U_\alpha \varphi = x_{\tau(\varphi)}(\,\cdot\,;\varphi), \quad \varphi \neq 0 \\ &U_\alpha 0 = 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

O Lema seguinte implica diretamente a continuidade da aplicação $U_\alpha$ em $0 \in K$. É conseqüência imediata do Lema 3.17 e das simetrias de nossas hipóteses.

**Lema 3.18** *Seja $G \subset C$ aberto, $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V$ de $0$ em $C$ tal que se $\varphi \in V \cap K$, $\varphi \neq 0$, então $x_t(\cdot\,;\varphi) \in G$ para $0 \leq t \leq \tau(\varphi)$.*

Seria natural tentarmos demonstrar o Teorema 3.2, provando que a aplicação $U_\alpha : K \to K$ tem um ponto fixo não trivial pela aplicação direta de algum princípio de ponto fixo. Esse procedimento esbarra em algumas dificuldades essenciais, como os fatos do conjunto $K$ não ser convexo e da aplicação $U_\alpha : K \to K$ não ser contínua, uma vez que estamos tomando a métrica uniforme em $K$.

Daqui em diante nossos passos estão basicamente na direção de contornar essas dificuldades.

Definamos uma função $h : K \to C$ como segue. Se $\varphi \in K$ é contínua, então $h\varphi = \varphi$. Se $\varphi \in K$ é descontínua em $\theta_0 \in (-1, 0]$, então

$$h\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta), & -1 \leq \theta < \theta_0 \\ \varphi(\theta) + (0, \varphi_2(\theta_0-)), & \theta_0 \leq \theta \leq 0. \end{cases}$$

Definindo $\tilde{K} = hK \subset C$, $h$ é claramente uma bijeção de $K$ em $\tilde{K}$. Além disso, $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \in \tilde{K}$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:

**1)** $\tilde{\varphi}_1(-1) = 0$, $0 \leq \tilde{\varphi}_2(-1) \leq c_4$;

**2)** as coordenadas $\tilde{\varphi}_j$, $j = 1, 2$, são crescentes e $\alpha M$-Lipschitzianas em $[-1, 0]$;

**3)** se existe $\theta_0 \in (-1, 0]$ tal que $\tilde{\varphi}_1(\theta_0) = c$ e $\theta_1, \theta_2 \in (\theta_0 - \sigma, \theta_0 + \sigma) \cap [-1, 0]$, $\theta_1 < \theta_2$, então

$$\tilde{\varphi}_1(\theta_2) - \tilde{\varphi}_1(\theta_1) \geq \eta(\theta_2 - \theta_1),$$

onde $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ são constantes escolhidas de acordo o Lema 3.14.

Notemos que se $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$, então $\|\tilde{\varphi}\| \leq \Lambda$.

Como estamos considerando a topologia da convergência uniforme, vê-se que a condição de convergência $\varphi_n \to \varphi$ em $K$ com $n \to \infty$, implica que para $n$

suficientemente grande, ou $\varphi_n$ e $\varphi$ são contínuas ou $\varphi_n$ e $\varphi$ têm um mesmo ponto de descontinuidade $\theta_0 \in (-1, 0]$. Por conseguinte, $h$ é contínua enquanto $h^{-1}$ é descontínua.

Obviamente $\tilde{K}$ é um conjunto convexo e, por uma aplicação rotineira do Teorema de Ascoli-Arzela temos que $\tilde{K}$ é também compacto.

Definamos, agora, a aplicação $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \to \tilde{K}$ por $\tilde{U}_\alpha = h \circ U_\alpha \circ h^{-1}$.

**Teorema 3.3** *A aplicação $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \to \tilde{K}$ é completamente contínua.*

**Prova:** Dado $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$, $\tilde{\varphi} \neq 0$, usaremos a notação $\tilde{x}(\cdot\,;\varphi)$, $\varphi = h^{-1}(\tilde{\varphi})$, para indicar a solução da equação (3.1) com $\tilde{x}_0(\cdot\,;\varphi) = \varphi \in K$ (negligenciando a condição de auto-sustentação (3.2)). Notemos que $\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi} = \tilde{x}_{\tau(\varphi)}(\cdot\,;\varphi)$.

Mostremos que $\tilde{U}_\alpha\tilde{K} \subset \tilde{K}$. Se $(\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(0) < c$, é claro que $\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$.

Suponhamos então que exista $t_0 = t_0(\varphi) \in (\tau(\varphi) - 1, \tau(\varphi)]$ tal que $\tilde{x}_1(t_0;\varphi) = c$. Assim, para um certo $\tilde{\theta}^\varphi \in (-1, 0]$ tem-se que $\tau(\varphi) + \tilde{\theta}^\varphi = t_0(\varphi)$ e, portanto, $(\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(\tilde{\theta}^\varphi) = \tilde{x}_1(t_0(\varphi);\varphi) = c$.

Verifiquemos apenas a condição 3) da definição do conjunto $\tilde{K}$, já que as outras condições são imediatas.

Sejam $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ constantes escolhidas de acordo com o Lema 3.14 e $\theta_1, \theta_2 \in (\tilde{\theta}^\varphi - \sigma, \tilde{\theta}^\varphi + \sigma) \cap [-1, 0]$, $\theta_1 < \theta_2$. Temos:

$$\begin{aligned}(\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(\theta_2) - (\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(\theta_1) &= \tilde{x}_1(\tau(\varphi) + \theta_2;\varphi) - \tilde{x}_1(\tau(\varphi) + \theta_1;\varphi) \\ &= \dot{\tilde{x}}_1(\tau(\varphi) + \overline{\theta};\varphi)(\theta_2 - \theta_1),\end{aligned}$$

$\overline{\theta} \in (\theta_1, \theta_2)$. Segue que

$$(\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(\theta_2) - (\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi})_1(\theta_1) \geq \eta(\theta_2 - \theta_1).$$

Conseqüentemente, $\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$.

Mostremos agora que a aplicação $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \to \tilde{K}$ é completamente contínua. Como $\tilde{K}$ é compacto, é suficiente mostrar que $\tilde{U}_\alpha$ é contínua.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$. Como a continuidade de $\tilde{U}_\alpha$ em $\tilde{\varphi} = 0$ está contida no Lema 3.18, vamos supor $\tilde{\varphi} \neq 0$.

Consideremos apenas o caso em que $\tilde{\varphi}_1(0) > c$, por ser mais laborioso. Assim, existe $\theta^\varphi \in (-1, 0)$ tal que $\tilde{\varphi}_1(\theta^\varphi) = c$.

Sejam $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $\tilde{\psi} \in \tilde{K}$ tal que $\|\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}\| < \delta$. Então, existe $\theta^\psi \in (-1, 0)$ tal que $\tilde{\psi}_1(\theta^\psi) = c$.

Diminuindo $\delta$, segue da condição 3) da definição do conjunto $\tilde{K}$ que o número $|\theta^\psi - \theta^\varphi|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno.

Notemos agora que a primeira coordenada da solução do problema (3.1), (3.2) é contínua em qualquer intervalo compacto $[-1, \overline{T}]$, $\overline{T} > \tau(\varphi)$, e mostremos que se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno e $\|\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}\| < \delta$, então $|\tilde{x}_2(t; \psi) - \tilde{x}_2(t; \varphi)| < \varepsilon$ para $t \in [0, \overline{T}]$.

Para fixarmo-nos em um caso, suponhamos $\theta^\psi < \theta^\varphi$. Para os valores de $t$ tais que $0 \leq t < \theta^\psi + 1$, segue da equação integral que, para $\delta$ escolhido convenientemente, se $\|\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}\| < \delta$, então $|\tilde{x}_2(t; \psi) - \tilde{x}_2(t; \varphi)| < \varepsilon/2$.

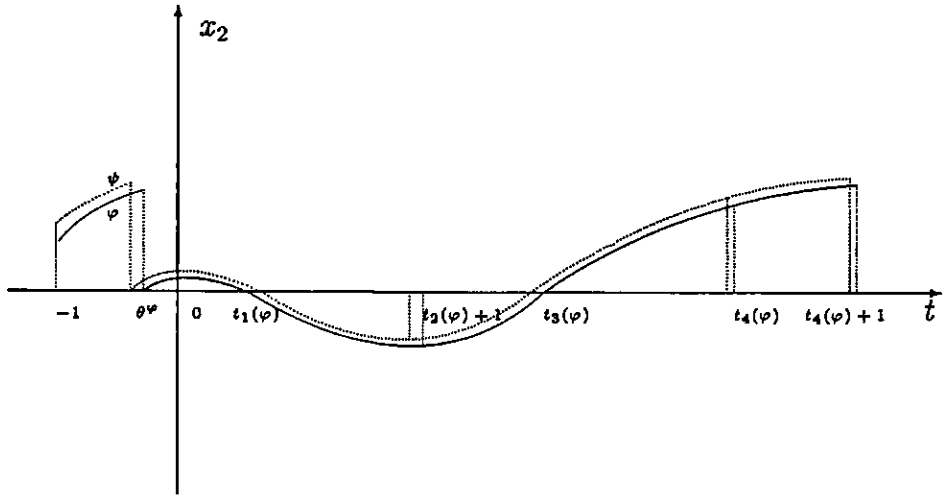


Figura 3.2: Continuidade de $\tilde{x}_2(t; \varphi)$ com relação a $\tilde{\varphi}$

Para os valores de $t \in [\theta^\psi + 1, \theta^\varphi + 1]$ obtemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_2(t; \psi) - \tilde{x}_2(t; \varphi)| \leq\ & |\tilde{x}_2(\theta^\psi + 1; \psi) - \tilde{x}_2(\theta^\psi + 1; \varphi)| \\ & + \alpha \int_{\theta^\psi + 1}^{t} |F_2(\tilde{x}(s-1; \psi)) - F_2(\tilde{x}(s-1; \varphi))| ds. \end{aligned}$$

Mas, $|\tilde{x}_2(\theta^\psi+1;\psi)-\tilde{x}_2(\theta^\psi+1;\varphi)|<\varepsilon/2$, já que temos $|\tilde{x}_2(t;\psi)-\tilde{x}_2(t;\varphi)|<\varepsilon/2$ para todo $t\in[0,\theta^\psi+1)$ e $\theta^\psi+1$ não é um instante de impulso. Além disso,

$$\int_{\theta^\psi+1}^{t}|F_2(\tilde{x}(s-1;\psi))-F_2(\tilde{x}(s-1;\varphi))|ds\leq 2M(\theta^\varphi-\theta^\psi)<2M\frac{\varepsilon}{4\alpha M}=\frac{\varepsilon}{2\alpha},$$

diminuindo $\delta$, se necessário.

Segue, portanto, que

$$|\tilde{x}_2(t;\psi)-\tilde{x}_2(t;\varphi)|<\varepsilon,$$

para $t\in[0,\theta^\varphi+1]$, sempre que $\|\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\|<\delta$.

Segue agora do Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais que, se $\delta$ for suficientemente pequeno, $\tilde{x}_2(\,\cdot\,;\psi)$ existe em $[-1,\overline{T}]$ e

$$|\tilde{x}_2(t;\psi)-\tilde{x}_2(t;\varphi)|<\varepsilon,$$

para $t\in[0,\overline{T}]$ e $\|\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\|<\delta$.

Para cada $\theta\in[-1,0]$ temos:

$$\begin{aligned}|\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi}(\theta)-\tilde{U}_\alpha\tilde{\psi}(\theta)| &= |\tilde{x}(\tau(\varphi)+\theta;\varphi)-\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\psi)|\\ &\leq |\tilde{x}(\tau(\varphi)+\theta;\varphi)-\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\varphi)|\\ &\quad +|\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\varphi)-\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\psi)|.\end{aligned}$$

Diminuindo $\delta$, já temos que $|\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\varphi)-\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\psi)|<\varepsilon/2, \forall\theta\in[-1,0]$, sempre que $\|\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\|<\delta$.

Como conseqüência de termos $\dot{\tilde{x}}_1(t_4(\varphi);\varphi)>0$, para todo $\varphi\in K\setminus\{0\}$ e de argumentos ligados ao Teorema da Continuidade em relação às Condições Iniciais, o número $|t_4(\psi)-t_4(\varphi)|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno. Por conseguinte, obtemos:

$$|\tilde{x}(\tau(\varphi)+\theta;\varphi)-\tilde{x}(\tau(\psi)+\theta;\varphi)|<\varepsilon/2,\quad\text{sempre que}\quad\|\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\|<\delta.$$

Segue que $|\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi}(\theta)-\tilde{U}_\alpha\tilde{\psi}(\theta)|<\varepsilon$, $\forall\theta\in[-1,0]$.

Portanto, $\|\tilde{U}_\alpha\tilde{\varphi}-\tilde{U}_\alpha\tilde{\psi}\|<\varepsilon$, sempre que $\|\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\|<\delta$ e concluímos, assim, a continuidade de $\tilde{U}_\alpha$. ■

Usando argumentos análogos aos que foram utilizados no caso em que $0 < \alpha \leq c/M$, obtemos a seguinte

**Proposição 3.2** *O ponto* 0 *é ejetivo para a aplicação* $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \to \tilde{K}$.

**Prova do Teorema 3.2**

O Teorema 3.3 e a Proposição 3.2 mostram que todas as hipóteses do Lema 3.1 estão satisfeitas para a aplicação $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \setminus \{0\} \to \tilde{K}$ tal que $\tilde{U}_\alpha \tilde{\varphi} = h \circ U_\alpha \circ h^{-1}(\tilde{\varphi})$. Portanto, $\tilde{U}_\alpha$ tem um ponto fixo $\tilde{\varphi}$ em $\tilde{K} \setminus \{0\}$. Então, $h^{-1}(\tilde{\varphi})$ é um ponto fixo não trivial da aplicação $U_\alpha$, o qual corresponde a solução periódica $x(\cdot\,; h^{-1}(\tilde{\varphi}))$ do problema (3.1), (3.2). ■

No Exemplo 3.1, a condição $0 < \alpha \leq c/M$ está necessariamente satisfeita e, na verdade, a condição mais forte $0 < \alpha \leq c/2M$ é explorada na construção do exemplo. É preciso, portanto, responder agora à questão da existência de soluções periódicas impulsivas no presente contexto, isto é, $\alpha > c/M$.

**Teorema 3.4** *Suponhamos válidas as hipóteses* (H1), (H2) *e* (H3'). *Então, para todo* $\alpha > c/M$, *existem problemas do tipo* (3.1), (3.2) *que possuem soluções periódicas impulsivas.*

**Prova:** Pelo Teorema 3.2 temos que, para todo $\alpha > c/M$, o problema (3.1), (3.2) tem uma solução periódica não trivial $x(\cdot\,; h^{-1}(\tilde{\varphi}))$, onde $\tilde{\varphi} \in \tilde{K}$ é ponto fixo do operador de retorno $\tilde{U}_\alpha : \tilde{K} \to \tilde{K}$.

Denotemos por $\xi = x_1(t_1(\varphi); \varphi)$ a abscissa do ponto onde cada solução periódica não trivial cruza o semi-eixo positivo horizontal.

Suponhamos que, para algum $\alpha > c/M$, o problema (3.1), (3.2) tenha solução periódica não impulsiva. Mostremos que é possível uma escolha de $\bar{c}$, $0 < \bar{c} < c$, de modo que, substituindo (3.2) por

$$x(t-) \in l_{\bar{c}} \Rightarrow x(t) = (\bar{c}, 0), \tag{3.2'}$$

toda solução periódica do problema (3.1), (3.2') é impulsiva. De fato, seja

$$\bar{\xi} := \inf\{\xi \leq c \mid x(\cdot\,; \varphi),\ \varphi \in K \setminus \{0\},\ \text{ é solução periódica de (3.1), (3.2)}\}.$$

Como 0 é ponto ejetivo da aplicação $\tilde{U}_\alpha$, segue que $\overline{\xi} > 0$. Tomando $0 < \overline{c} < \overline{\xi}$, concluímos a prova do teorema. ■

# Referências Bibliográficas


[1] BAPTISTINI, M. T. Z. *Soluções periódicas de uma equação diferencial no plano com retardamento e continuação global.* São Carlos, 1990. ( Tese - Doutorado - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo).

[2] BORISOVIC, J. G. e TURBABIN, A. S. On the Cauchy problem for Linear Nonhomogeneous Differential Equations with retarded argument. *Soviet Math. Dokl.,* Vol. 10, N° 2, 401-405, 1969.

[3] BROWDER, F. A further generalization of the Schauder fixed point theorem. *Duke Math.,* 32: 575-578, 1965.

[4] CHOW, S. N. e HALE,J. K. Periodic solutions of autonomous equations. *J. Math. Anal. Appl.,* 66: 495-506, 1978.

[5] GOPALSAMY, K. e ZHANG, B. G. On delay differential equations with impulses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 139: 110-122, 1989.

[6] FLEMING, W. H. *Functions of Several Variables.* Reading, Mass, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1965. 337p.

[7] HALE, J. K. *Theory of functional differential equations.* 1ª edição. New York, Springer-Verlag, 1977. 365p.

[8] HALE, J. K. *Ordinary differential equations.* 2ª edição. New York, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1980. 361p.

[9] KRUGER-THIEMER, E. Formal theory of drug dosage regiments. *I. Jour. Theo. Biology,* 13, 1966.

[10] LAKSHMIKANTHAM, V., BAINOV, D. D., SIMEONOV, P. S. *Theory of impulsive differential equations.* Singapore, World Scientific, 1989. 273p.

[11] MYSHKIS, A. D. Auto-Oscillations in Continuous Systems with Impulsive Self-Support. *Resenhas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo,* Vol. 3, N° 1, 93-106, 1997.

[12] MYSHKIS, A. D. Autonomous differential equations with impulsive self-support and infinite delay. *Funct. Differ. Equats.* 3: 1-2, 145-154, 1995.

[13] NUSSBAUM, R. Periodic solutions of nonautonomous functional differential equations. In: FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS and APPROXIMATIONS of FIXED POINTS, eds H. O. Peitgen and H. O. Walther, *Lecture Notes in Mathematics 730* (Berlin: Springer, 1979).

[14] TÁBOAS, P. Z. Periodic solutions of a planar delay equation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* 116A: 85-101, 1990.