O Número de Milnor

João Nivaldo Tomazella

Orientação.
Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP. como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".

**USP - São Carlos
dezembro de 1992**

À minha família

Agradecimentos

À Cidinha, pela orientação, dedicação e pelo incentivo à nossa iniciação a pesquisa.

Ao professor Janey pelas várias discussões esclarecedoras e pela fundamental ajuda na demonstração do Teorema 1.7.

Aos professores Biasi e Ires pelos comentários e discussões esclarecedoras.

À Beth e Laura, pela dedicação e amizade.

Aos amigos de pós-graduação e de república.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Abstract

J. Milnor [1] studied the topology of complex hypersurfaces by introducing a local fibration which is associated with each isolated singular point. He showed that the fiber of the fibration has the homotopy type of a wedge of spheres. The number of spheres of this wedge is the Milnor number, which is an invariant of the topological type of the singularity.

In this dissertation we study the geometric and the algebraic characterization of the Milnor number and we obtain the equivalence between them.

Resumo

J. Milnor [1] estudou a topologia de hipersuperfícies complexas introduzindo uma fibração local a qual está associada a singularidade isolada. Ele mostrou que a fibra da fibração tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de esferas. O número de esferas deste bouquet é o número de Milnor, o qual é um invariante do tipo topológico da singularidade.

Nesta dissertação nós estudamos a caracterização geométrica e algébrica do número de Milnor e obtivemos a equivalência entre elas.

Conteúdo

1	O NÚMERO DE MILNOR	3
1.1	O Teorema da Fibrção e a Topologia da Fibra	3
1.2	Definição do Número de Milnor	7
1.3	O Número de Milnor como Invariante Topológico	10
2	Caracterização Geométrica do Número de Milnor	16
2.1	O Grau de uma Aplicação	16
2.2	A Multiplicidade Gradiente	18
3	Caracterização Algébrica do Número de Milnor	23
4	Equivalência das Definições	30
4.1	Equivalência entre a Multiplicidade Geométrica e o Número de Milnor	30
4.2	Equivalência entre a Multiplicidade Algébrica e a Multiplicidade Gradiente	36
5	Cálculo do Número de Milnor	42
	Bibliografia	45

Introdução

Os estudos deste trabalho se baseiam nos textos: Singular Points of Complex Hypersurfaces [1] e Introdução à Topologia de Singularidades Complexas [5], que descrevem os resultados de Milnor sobre a topologia de uma hipersuperfície complexa na vizinhança de um ponto singular isolado.

Uma hipersuperfície complexa V em $\mathbb{C}^n$ é o conjunto $V = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\} = f^{-1}(0)$ onde f é uma função holomorfa.

Indiquemos por K a intersecção de V com uma esfera S_ϵ , de raio ϵ , centrada na origem. Os resultados básicos da teoria de Milnor são o Teorema da Fibração que estabelece que $S_\epsilon - K$ é um fibrado localmente trivial sobre S^1 , com fibra típica F_θ e os Teoremas que descrevem a topologia da fibra F_θ .

Quando f tem singularidade isolada, Milnor mostrou que cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de esferas. Este resultado permite definir um invariante topológico local de V . Esse invariante é o número de Milnor, μ , que é o número de esferas do bouquet.

Os seguintes resultados de Lê Dũng Tráng mostram que μ é um invariante completo do tipo topológico da singularidade. Se dois germes de hipersuperfícies complexas $V = f^{-1}(0)$ e $W = g^{-1}(0)$ com singularidades isoladas são homeomorfos, então possuem o mesmo número de Milnor. Além disso, se uma deformação f_t de um germe f tem número de Milnor $\mu(f_t)$ constante, então as variedades $V_t = f_t^{-1}(0)$ são topologicamente equivalentes.

O número de Milnor admite caracterizações geométricas e algébricas surpreendentes. Geometricamente, $\mu(f)$ é caracterizado como grau da aplicação $\frac{\partial f}{|\partial f|} : S_\epsilon \rightarrow S^1$. Algebricamente, o número de Milnor é dado pela fórmula: $\mu(f) = \dim \mathcal{O}_n / Jf$, onde $\mathcal{O}_n$ é o conjunto dos germes em 0 de funções holomorfas e Jf , o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, para $i = 1, \dots, n$.

Esta dissertação tem como objetivo o estudo das diversas caracterizações do número de Milnor e a obtenção da equivalência entre elas.

No capítulo 1 enunciamos os resultados básicos do trabalho de Milnor, que são o Teorema da Fibração e os teoremas sobre a topologia da fibra. Além disso, demonstramos o teorema de Lê Dũng Tráng que estabelece que o número de

Milnor é um invariante da singularidade.

No capítulo 2 introduzimos a multiplicidade gradiente, $\mu_g(f)$, de um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada, definida como o grau da aplicação $\frac{\partial f}{|\partial f|} : S_\epsilon \rightarrow S_1$. O resultado principal do capítulo é o Teorema 2.5, o qual diz que $\mu_g(f)$ é o número de pontos críticos não degenerados de uma perturbação estável de f .

No capítulo 3 introduzimos o conceito de multiplicidade algébrica, $\mu_a(f) = \dim \mathcal{O}_n/Jf$, de um germe holomorfo em 0. Os resultados principais do capítulo são os Teoremas 3.1 e 3.2 que garantem respectivamente:

- $\mu_a(f) < \infty$ se, e somente se, 0 é singularidade isolada ou valor regular de f .
- $\mu_a(f) < \infty$ então existe um difeomorfismo biholomorfo h tal que $f \circ h$ é um polinômio.

O capítulo 4 é o capítulo central do trabalho. Neste capítulo, mostramos a equivalência entre a multiplicidade gradiente e o número de Milnor (Teorema 4.1) e a equivalência entre multiplicidade gradiente e a multiplicidade algébrica (Teorema 4.2).

Finalmente, o objetivo do capítulo 5 é apresentar uma fórmula devido à Milnor e Orlik [4], para o cálculo do número de Milnor para polinômios quase homogêneos com singularidade isolada.

Capítulo 1

O NÚMERO DE MILNOR

Seja $f(z_1, \dots, z_n)$ um polinômio não constante em n variáveis complexas, e seja V o conjunto algébrico constituído de todas n -uplas $z = (z_1, \dots, z_n)$ de números complexos com $f(z) = 0$.

Em [1], Milnor estudou a topologia de V numa vizinhança de um ponto z^0 , utilizando o método de *Brauner*, que consiste em estudar a intersecção da hipersuperfície V com uma esfera S_ϵ de raio ϵ suficientemente pequeno.

Para descrever a topologia de $K = V \cap S_\epsilon$, Milnor considerou a fibração $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$, onde $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

No parágrafo 1.1, enunciamos os resultados básicos do trabalho de Milnor, que são o Teorema da Fibração e os teoremas sobre a topologia da fibra. No parágrafo 1.2, demonstramos que cada fibra tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de esferas. O número de Milnor é definido como o número de esferas do bouquet. No parágrafo 1.3 temos como resultado principal o Teorema de Lê Dũng Tráng que mostra que o número de Milnor é um invariante do tipo topológico de $V = f^{-1}(0)$.

1.1 O Teorema da Fibração e a Topologia da Fibra

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um polinômio não constante em n variáveis, e $V = f^{-1}(0)$ a hipersuperfície complexa definida por f .

Definição 1.1 $w \in \mathbb{C}^n$ é ponto crítico de f se $df(w) = 0$ e é ponto crítico isolado se existe vizinhança U de w em $\mathbb{C}^n$ tal que $df(z) = 0, z \in U$ implica $z = w$.

Definição 1.2 Seja $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Definimos o gradiente de h , $\text{grad } h(z)$, por

$$\text{grad } h = \left(\frac{\partial h}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial z_n} \right)$$

Tal definição é motivada, para que a derivada de h ao longo de um caminho $z = p(t)$ seja dada por:

$$\frac{dh}{dt}(p(t)) = \left\langle \frac{dp}{dt}, \text{grad } h \right\rangle$$

onde $\langle u, v \rangle = \sum u_j \bar{v}_j$ é o produto hermitiano usual.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^0| \leq \varepsilon\}$$

$$S_\varepsilon = \partial D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - z^0| = \varepsilon\}$$

$$K = V \cap S_\varepsilon$$

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a topologia de K e a de V . A demonstração pode ser encontrada em [1] e [5].

Teorema 1.1 Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $V \cap D_\varepsilon$ é homeomorfo ao cone $C(K) = \{tz : 0 \leq t \leq 1, z \in K\}$. De fato, o par $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ é homeomorfo ao par $(C(S_\varepsilon), C(K))$.

Seja $\phi : S_\varepsilon - K \rightarrow S^1$ dada por

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}, \text{ com } \phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$$

O resultado básico da teoria de Milnor é o teorema da fibração, que mostra que ϕ define uma fibração de $S_\varepsilon - K$ sobre S^1 com fibra F_θ .

Antes de enunciar este teorema, enunciaremos resultados sobre o conjunto dos pontos críticos de ϕ que serão utilizados no decorrer desta dissertação. As demonstrações podem ser encontradas em [1] e [5].

Lema 1.1 *O conjunto dos pontos críticos de ϕ é dado por*

$$\{z \in S_\epsilon : i \operatorname{grad} \operatorname{Log}(f(z)) = cz, c \in \mathbf{R}\}$$

Lema 1.2 *Existe ϵ_0 (raio de Milnor) tal que para todo $z \in \mathbf{C}^n - V$, com $|z| \leq \epsilon_0$ temos:*

- 1) $z \in \operatorname{grad} \operatorname{Log}(f(z))$ são linearmente independentes sobre $\mathbf{C}$ ou
- 2) $\operatorname{grad} \operatorname{Log}(f(z)) = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ e $\arg(\lambda) < \pi/4$.

Teorema 1.2 *(Fibração de Milnor) Se z^0 é um ponto qualquer de V e se S_ϵ é uma esfera suficientemente pequena centrada em z^0 , então $S_\epsilon - K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 , com projeção $\phi(z) = f(z)/|f(z)|$ e fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$*

Como o estudo deste trabalho se restringe a germes de hipersuperfícies com singularidades isoladas, ao invés de demonstrarmos o Teorema 1.2, demonstraremos diretamente que $f : D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{f(z_0)\}) \rightarrow B_\eta - \{f(z_0)\}$ é a projeção de uma fibração localmente trivial, onde $B_\eta = \{w \in \mathbf{C} : |f(z_0) - w| \leq \eta\}$.

Teorema 1.3 *Suponhamos $z_0 = 0$ singularidade isolada de f . então*

$$f : D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\}) \rightarrow B_\eta - \{0\}$$

é a projeção de uma fibração localmente trivial.

Demonstração:

O resultado seguirá do *Teorema de Ehresmann* [5] se as seguintes hipóteses forem verificadas:

- (i) f é própria;
- (ii) as variedades $D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\})$ e $B_\eta - \{0\}$ são conexas;
- (iii) f e $f|_{\partial(D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\}))}$ são submersões;

De fato, temos:

(i) Seja z_n sequência em $D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\})$ sem subsequência convergente. Como $z_n \in D_\epsilon$ temos que existe subsequência z_{n_k} em D_ϵ tal que $z_{n_k} \rightarrow v \in V$, logo $f(z_{n_k}) \rightarrow f(v) = 0$, por continuidade da f . Portanto $f(z_n)$ não tem subsequência convergente. Logo, f é própria.

(ii) Para mostrar que $D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\})$ é variedade diferenciável conexa, basta observar que qualquer caminho ligando pontos P e Q de $D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\})$ pode ser aproximado por um caminho transversal à V e que, portanto, não encontra V .

(iii) Temos que f é uma submersão em $D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\})$ já que 0 é singularidade isolada. Mais ainda, $f|_{\partial(D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta - \{0\}))}$ é submersão. De fato, se existisse $z \in S_\epsilon$ tal que $\langle v, \text{grad } f(z) \rangle = 0 \ \forall v \in T_z S_\epsilon$ teríamos também $\langle iv, \text{grad } f(z) \rangle = 0, \forall v \in T_z S_\epsilon$. Assim, teríamos que z seria singularidade de f , o que é um absurdo.

□

Observação: Os resultados do Teorema 1.2 e do Teorema 1.3 se correspondem, pois se $c \in \mathbb{C}$ possui módulo suficientemente pequeno então $f^{-1}(c) \cap D_\epsilon$ é difeomorfo à F_θ [1].

Os resultados sobre a topologia da fibra F_θ são descritos a seguir. Os mesmos podem ser encontrados em [1] e [5].

Lema 1.3 *Existe uma aplicação diferenciável*

$$s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$$

tais que seus pontos críticos são não degenerados, com índice de Morse $\geq n - 1$.

Teorema 1.4 *Cada fibra $F_\theta \in S_\epsilon - K$ têm o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW finito, de dimensões $n - 1$ e n respectivamente.*

Para o caso particular em que f tem singularidade isolada em $z^0 = 0$ temos:

Lema 1.4 *Para ϵ suficientemente pequeno, o fecho em S_ϵ de cada fibra F_θ é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n - 2$, com bordo. O interior dessa variedade é F_θ e o bordo é precisamente K .*

Teorema 1.5 *A homologia de F_θ está concentrada nas dimensões 0 e $n - 1$. Além disto, $H_0(F_\theta) \simeq \mathbb{Z}$.*

1.2 Definição do Número de Milnor

Quando f tem singularidade isolada em 0, o teorema abaixo caracteriza o tipo de homotopia da fibra F_θ

Teorema 1.6 *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ de esferas.*

Os lemas 1.5 e 1.6 abaixo serão necessários para a demonstração do Teorema 1.6.

Lema 1.5 *A variedade compacta com bordo, $\bar{F}_\theta$, está mergulhada em S_ϵ de modo que tem o mesmo tipo de homotopia que seu complementar $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$.*

Demonstração:

Como $\bar{F}_\theta$ é uma subvariedade de S_ϵ , a inclusão fornece um mergulho. Agora, o Teorema da Fibrção fornece a fibrção localmente trivial $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$. Segue-se que a restrição

$$\phi : S_\epsilon - (K \cup \sigma^{-1}(e^{i\theta})) \rightarrow S^1 - \{e^{i\theta}\}.$$

é uma fibrção localmente trivial. Mas, $S^1 - \{e^{i\theta}\}$ é contrátil e, portanto, a fibrção é globalmente trivial, ou seja, $S_\epsilon - \bar{F}_\theta = S_\epsilon - (K \cup F_\theta)$ (Lema 1.4) é difeomorfa à $(S^1 - \{e^{i\theta}\}) \times F_\theta$ onde F_θ é qualquer fibra diferente de F_θ . Usando novamente a contratibilidade de $S^1 - \{e^{i\theta}\}$, temos que $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$ tem F_θ como um retrato por deformação. Como as fibras são difeomorfas, temos que $S_\epsilon - \bar{F}_\theta$ tem o mesmo tipo de homotopia que F_θ . Além disso, $\bar{F}_\theta$ e F_θ tem o mesmo tipo de homotopia, e, portanto segue o resultado.

□

Lema 1.6 *A fibra F_θ é simplesmente conexa para $n \geq 3$.*

Demonstração:

Consideremos a função $-s_\theta : \bar{F}_\theta \rightarrow \mathbf{R}_+$, onde s_θ é a função de Morse obtida pelo Lema 1.3. Então, $-s_\theta$ é uma função de Morse em $\bar{F}_\theta$ cujos pontos críticos

têm índice $i \leq n - 1$. Observando que o índice de $-s_\theta$ associado ao menor valor crítico é zero, concluímos que $\bar{F}_\theta$ é obtido de um disco D^{2n-2} pela colagem de células de dimensão menor ou igual a $n - 1$. Temos que $S_\epsilon - D^{2n-2}$ é contrátil e, portanto, simplesmente conexo. Se colarmos uma célula ϵ_λ de dimensão $\lambda \leq n - 1$ a D^{2n-2} , o grupo fundamental de $S_\epsilon - (D^{2n-2} \cup \epsilon_\lambda)$ não se altera desde que $\lambda \leq \dim S_\epsilon - 3 = 2n - 4$. De fato, dados dois caminhos em S_ϵ , podemos tomar uma homotopia F entre eles, tal que F seja transversal à ϵ_λ , o que, nestas dimensões implica em F não encontrar ϵ_λ .

Portanto para $n \geq 3$ e $\lambda \leq n - 1 \leq 2n - 4$, temos

$$\pi_1(S_\epsilon - (D^{2n-2} \cup \epsilon_\lambda)) \simeq \pi_1(S_\epsilon - D^{2n-2}) = 0$$

Mas, $\bar{F}_\theta$ é obtido de D^{2n-2} após a colagem de um número finito de células. Portanto,

$$0 = \pi_1(S_\epsilon - D^{2n-2}) \simeq \pi_1(S_\epsilon - \bar{F}_\theta).$$

Usando o Lema 1.5 obtemos:

$$0 = \pi_1(\bar{F}_\theta) \simeq \pi_1(S_\epsilon - \bar{F}_\theta) \simeq \pi_1(F_\theta).$$

Portanto, F_θ é simplesmente conexa.

□

Observação: Usando o Teorema 1.4 e o *Teorema de Hurewicz* [8, 7.5.5]:

"Se X é simplesmente conexo e existe $q \geq 2$ tal que $H_i(X) = 0$ para $i < q$, então $\pi_i(X) = 0$ para $i < q$ e existe um isomorfismo $\pi_q(X) \simeq H_q(X)$," concluímos que F_θ é $(n - 2)$ -conexa.

Passemos a demonstração do Teorema 1.6.

Afirmamos que $H_{n-1}(F_\theta)$ é abeliano livre. De fato, se $H_{n-1}(F_\theta)$ possuísse parte de torção, teríamos cohomologia não trivial em dimensão n (sendo $H_*(F_\theta)$ finitamente gerado, $H^n(F_\theta) = F(H_n(F_\theta)) + T(H_{n-1}(F_\theta))$ onde F é a parte livre e T é a parte de torção de $H_*(F_\theta)$), o que é impossível pelo Teorema 1.4.

Se $n \geq 3$, usando o Teorema de Hurewicz, temos que

$$\pi_{n-1}(F_\theta) \simeq H_{n-1}(F_\theta).$$

Seja $(S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}, p_o) \rightarrow (F_\theta, p_1)$ uma aplicação contínua que leva o ponto base p_o no ponto base p_1 e que leva as esferas (S^{n-1}, p_o) do bouquet nos geradores de $\pi_{n-1}(F_\theta, p_1)$. Uma tal aplicação induz um isomorfismo entre as homologias

$$H_{n-1}(S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}) \simeq H_{n-1}(F_\theta)$$

Como F_θ e $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ são espaços CW simplesmente conexos, a aplicação acima entre estes espaços, é de fato, uma equivalência de homotopia (*Teorema de Whitehead*, [8, 7.6.25]).

Se $n = 2$ temos o caso clássico. Neste caso, $\bar{F}_\theta$ é uma superfície conexa compacta orientável e com bordo. Logo, pela classificação dessas variedades de dimensão 2, segue-se que $\bar{F}_\theta$ tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de esferas S^1 .

Definição 1.3 O número de esferas S^{n-1} do bouquet, ou o número de geradores da homologia média da fibra F_θ é chamado número de Milnor de f em 0 e é denotado por μ .

Observação: Para c suficientemente pequeno temos que $F_c = f^{-1}(c)$ é difeomorfo a F_θ . Portanto cada uma dessas esferas representa um gerador de $H_{n-1}(F_c)$. Estas esferas foram chamadas por Lefschetz de "ciclos evanescentes". Uma explicação para essa terminologia é que quando $c \rightarrow 0$, $F_c \rightarrow V = f^{-1}(0)$, que é contrátil, por ser homeomorfo a um cone (Teorema 1.1).

Exemplo 1.1 Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por $f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$.

Escreva $z_j = x_j + iy_j$. Sejam

$$B_\eta = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \eta\}, \quad B_\eta^* = B_\eta - \{0\}$$

$$D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \epsilon\}$$

$$Y = D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta), \quad \hat{Y} = D_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta^*)$$

Pelo Teorema 1.3, sabemos que $f : \hat{Y} \rightarrow B_\eta^*$ é uma fibração C^∞ localmente trivial, cuja fibra típica Y_w ($w \in B_\eta^*$) é difeomorfa à fibra de Milnor F_θ associada a f .

Vemos que $\hat{Y}$ e Y_η são descritos por:

$$\hat{Y} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq \epsilon^2 \text{ e } |z_1^2 + \dots + z_n^2| \leq \eta\}$$

$$Y_\eta = \{z \in Y : z_1^2 + \dots + z_n^2 = \eta\} = f^{-1}(\eta) \cap Y$$

Em coordenadas reais, Y_η é dado por:

$$\sum x_j^2 + \sum y_j^2 \leq \varepsilon^2, \quad \sum x_j^2 - \sum y_j^2 = \eta \text{ e } \sum x_j y_j = 0$$

Segue que $\sum y_j^2 \leq \frac{\varepsilon^2 - \eta}{2}$. Como $\sum x_k^2 \neq 0$, sejam

$$u_j = \frac{x_j}{\sqrt{\sum x_k^2}} \text{ e } v_j = \frac{y_j}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \eta}{2}}}$$

Obtemos então um difeomorfismo entre Y_η e o conjunto definido por:

$$\sum u_j^2 = 1, \quad \sum v_j^2 \leq 1 \text{ e } \sum u_j v_j = 0$$

Geometricamente isto significa considerar a esfera $S^{n-1} = \{\sum u_j^2 = 1\}$ em $\mathbf{R}^n$ e tomar os vetores $(v_1, \dots, v_n)$ tangentes a S^{n-1} no ponto $(u_1, \dots, u_n)$ que tem comprimento menor ou igual a 1. Em outras palavras, Y_η é difeomorfa ao fibrado por bolas unitárias a S^{n-1} e o bordo $\partial Y_\eta \simeq K$ é difeomorfo ao fibrado esférico unitário tangente a S^{n-1} . Estes são denotados por $TS_{|| \leq 1}^{n-1}$ e $TS_{|| = 1}^{n-1}$ respectivamente.

Como $TS_{|| \leq 1}^{n-1}$ se retrai a S^{n-1} temos $H_o(Y_\eta) \simeq \mathbf{Z}$. $H_{n-1}(Y_\eta) \simeq \mathbf{Z}$ e um gerador de $H_{n-1}(Y_\eta)$ é representado pela esfera S^{n-1} .

Portanto, o número de Milnor de f é 1.

1.3 O Número de Milnor como Invariante Topológico

Definição 1.4 Duas funções holomorfas $f, g : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ com 0 ponto crítico isolado de f e g possuem o mesmo tipo topológico local em 0 se existem vizinhanças U e V de 0 em $\mathbf{C}^n$ e um homeomorfismo $\psi : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$ tais que $\psi(f^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$.

O seguinte teorema devido a Lê Dũng Tráng, mostra que o número de Milnor é um invariante completo do tipo topológico de V .

Teorema 1.7 (Lê Dũng Tráng [17]) *Se dois germes f e g possuem o mesmo tipo topológico então $\mu(f) = \mu(g)$.*

A demonstração deste teorema depende do seguinte lema:

Lema 1.7 *Existe $\varepsilon_o > 0$ tal que para todos ε e ε' com $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ e $0 < \varepsilon' < \varepsilon_o$, $D_\varepsilon - f^{-1}(0)$ e $D_{\varepsilon'} - g^{-1}(0)$ são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração:

Por hipótese existe um homeomorfismo $\psi : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$ tais que $\psi(f^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$.

Seja ε_o tal que as propriedades do Teorema 1.1 se verificam tanto para f como para g , ou seja, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$

$$(D_\varepsilon, f^{-1}(0) \cap D_\varepsilon) \simeq (C(S_\varepsilon), C(K_f))$$

$$(D_\varepsilon, g^{-1}(0) \cap D_\varepsilon) \simeq (C(S_\varepsilon), C(K_g))$$

Portanto, temos:

$$D_\varepsilon - f^{-1}(0) \sim S_\varepsilon - K_f$$

$$D_\varepsilon - g^{-1}(0) \sim S_\varepsilon - K_g$$

onde " $\sim$ " indica mesmo tipo de homotopia.

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ tais que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_o$, $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_o$ e $\psi(D_{\varepsilon_1}) \subset D_{\varepsilon_3} \subset \psi(D_{\varepsilon_2}) \subset D_{\varepsilon_4}$.

Tomando a sequência de homotopia

$$\begin{aligned} \pi_i(\psi(D_{\varepsilon_1}) - g^{-1}(0), x) &\rightarrow \pi_i(D_{\varepsilon_3} - g^{-1}(0), x) \rightarrow \pi_i(\psi(D_{\varepsilon_2}) - g^{-1}(0), x) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_i(D_{\varepsilon_4} - g^{-1}(0), x) \end{aligned}$$

com $x \in \psi(D_{\varepsilon_1}) - g^{-1}(0)$ e observando ainda que,

$$\pi_i(D_\varepsilon - f^{-1}(0), y) \simeq \pi_i(\psi(D_\varepsilon) - g^{-1}(0), \psi(y))$$

$$\pi_i(D_{\varepsilon_1} - f^{-1}(0), y) \simeq \pi_i(D_{\varepsilon_2} - f^{-1}(0), y)$$

$$\pi_i(D_{\varepsilon_3} - g^{-1}(0), x) \simeq \pi_i(D_{\varepsilon_4} - g^{-1}(0), x)$$

concluimos que $\pi_i(D_\varepsilon - f^{-1}(0), y) \simeq \pi_i(D_{\varepsilon'} - g^{-1}(0), x)$ para todos ε e ε' com $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ e $0 < \varepsilon' < \varepsilon_o$.

Como $D_\varepsilon - f^{-1}(0)$ e $D_{\varepsilon'} - g^{-1}(0)$ possuem tipo topológico de um complexo CW finito obtemos uma equivalência homotópica entre $D_\varepsilon - f^{-1}(0)$ e $D_{\varepsilon'} - g^{-1}(0)$ ([8, p. 406]).

□

Demonstração do Teorema 1.7

Sejam:

$$\begin{aligned} \phi_f : S_\varepsilon - K_f &\rightarrow S^1 \text{ e} \\ \phi_g : S_{\varepsilon'} - K_g &\rightarrow S^1 \end{aligned}$$

as fibrações de Milnor de f e g , com fibras F_θ e F'_θ respectivamente.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_f & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ p \downarrow & & \downarrow \exp \\ S_\varepsilon - K_f & \xrightarrow{\phi_f} & S^1 \end{array}$$

onde X_f é o pull-back de $\mathbf{R}$ pela ϕ_f , ou seja,

$$X_f = \{(x, y) : \phi_f(x) = \exp(y)\} \subset (S_\varepsilon - K_f) \times \mathbf{R}$$

e, portanto um recobrimento de $S_\varepsilon - K_f$ associado a $(\phi_f)_*^{-1}(0) = \ker(\phi_f)_*$. com

$$(\phi_f)_* : \pi_1(S_\varepsilon - K_f, x) \longrightarrow \pi_1(S^1, \phi_f(x))$$

Além disso, como $\ker(\phi_f)_*$ é um subgrupo normal temos

$$Aut(X_f) \simeq \frac{\pi_1(S_\varepsilon - K_f, x)}{\ker(\phi_f)_*} \simeq \mathbf{Z}$$

onde $Aut(X_f)$ é o grupo dos automorfismos de X_f , ou seja, X_f é um recobrimento cíclico infinito de $S_\epsilon - K_f$ [10, p. 159].

Por outro lado também podemos obter X_f como o pull-back de $S_\epsilon - K_f$ pela exp :

$$\begin{array}{ccc} & & F_\theta \\ & & \downarrow \\ X_f & \longrightarrow & S_\epsilon - K_f \\ \downarrow & & \downarrow \phi_f \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{exp} & S^1 \end{array}$$

Então $X_f \rightarrow \mathbf{R}$ é uma fibração com fibra F_θ . Como a base é contrátil, então $X_f \simeq F_\theta \times \mathbf{R}$.

Assim, o recobrimento de $S_\epsilon - K_f$, associado a $\ker(\phi_f)_*$ é $X_f \simeq F_\theta \times \mathbf{R}$

Consideremos agora o recobrimento cíclico infinito:

$$p_f : Y_f \longrightarrow D_\epsilon - f^{-1}(0)$$

de $D_\epsilon - f^{-1}(0)$, associado a imagem isomorfa de $\ker(o_f)_*$, já que

$$\pi_1(D_\epsilon - f^{-1}(0), x) \simeq \pi_1(S_\epsilon - K_f, x) \xrightarrow{(\phi_f)_*} \pi_1(S^1, \phi_f(x))$$

onde $x \in S_\epsilon - K_f$

Assim temos

$$\begin{array}{ccc} X_f & \hookrightarrow & Y_f \\ p \downarrow & & \downarrow p_f \\ S_\epsilon - K_f & \hookrightarrow & D_\epsilon - f^{-1}(0) \end{array}$$

Como a inclusão de $S_\epsilon - K_f$ é uma equivalência de homotopia, segue-se que a aplicação entre os recobrimentos X_f e Y_f define também uma equivalência de homotopia entre estes espaços.

Seja $p_g : Y_g \rightarrow D_\epsilon - g^{-1}(0)$ o recobrimento cíclico infinito de $D_\epsilon - g^{-1}(0)$, definido analogamente.

Consideremos $\epsilon' > 0$ tal que $\psi(D_{\epsilon'}) \subset D_\epsilon$. Então temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F_\theta \times \mathbf{R} \sim Y_f & \longrightarrow & Z_g & \hookrightarrow & Y_g \sim F'_\theta \times \mathbf{R} \\ p_f \downarrow & & \bar{p}_g \downarrow & & \downarrow p_g \\ D_{\epsilon'} - f^{-1}(0) & \xrightarrow{\cong} & \psi(D_{\epsilon'}) - g^{-1}(0) & \hookrightarrow & D_\epsilon - g^{-1}(0) \end{array}$$

onde a inclusão $i : \psi(D_{\epsilon'}) - g^{-1}(0) \hookrightarrow D_\epsilon - g^{-1}(0)$ é equivalência de homotopia (pelo lema anterior) e $Z_g = \bar{p}_g^{-1}(\psi(D_{\epsilon'}) - g^{-1}(0))$ é o recobrimento cíclico infinito de $\psi(D_{\epsilon'}) - g^{-1}(0)$, pull-back de Y_g .

Portanto $Z_g \hookrightarrow Y_g$ é uma equivalência de homotopia.

Pela unicidade do recobrimento cíclico infinito de $D_{\epsilon'} - f^{-1}(0)$, concluímos que os recobrimentos Y_f e Z_g são isomorfos.

Portanto, $Y_f \sim Y_g$ e como consequência, $F_\theta \sim F'_\theta$. Logo $\mu(f) = \mu(g)$.

□

Observação 1: Para $n > 2$ é possível simplificar o argumento acima usando a sequência de homotopia da fibração.

De fato, temos que F_θ e F'_θ são $(n - 2)$ -conexas (ver Obsevação da p. 8). Portanto, tomando a sequência exata dada pela fibração, ver [15, p. 90], vemos:

$$0 \rightarrow \pi_{n-1}(F_\theta) \rightarrow \pi_{n-1}(S_\epsilon - f^{-1}(0)) \rightarrow 0$$

Logo, $\pi_{n-1}(F_\theta) \simeq \pi_{n-1}(S_\epsilon - f^{-1}(0)) \simeq \pi_{n-1}(D_\epsilon - f^{-1}(0))$.

Analogamente $\pi_{n-1}(F'_\theta) \simeq \pi_{n-1}(S_{\epsilon'} - g^{-1}(0)) \simeq \pi_{n-1}(D_{\epsilon'} - g^{-1}(0))$.

Portanto, $\pi_{n-1}(F_\theta) \simeq \pi_{n-1}(F'_\theta)$, pelo Teorema de Hurewicz (ver Observação da p. 8)

$$H_{n-1}(F_\theta) \simeq \pi_{n-1}(F_\theta) \simeq \pi_{n-1}(F'_\theta) \simeq H_{n-1}(F'_\theta)$$

Portanto $\mu(f) = \mu(g)$.

Observação 2: $\mu(f) = \mu(g)$ não implica que f e g possuem o mesmo tipo topológico.

Por exemplo, sejam

$$f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0),$$

tais que

$$f(z, w) = z^3 + w^3 \text{ e } g(z, w) = z^2 + w^5$$

Com o resultado a ser visto no capítulo 5, pode-se verificar facilmente que $\mu(f) = \mu(g) = 4$.

Mas $g^{-1}(0)$ é um cone sobre o nó K do tipo $(2, 5)$ ([1]) e $f^{-1}(0)$ é formado por três retas complexas que interceptam na origem.

No entanto, se uma deformação f_t de um germe f tem número de Milnor $\mu(f_t)$ constante, as variedades $V_t = f_t^{-1}(0)$ são topologicamente equivalentes.

Este resultado foi provado por Lê Dũng Tráng e Ramanujam para famílias a um parâmetro ([18]) e estendida para famílias a vários parâmetros por Timourian em ([19]).

Capítulo 2

Caracterização Geométrica do Número de Milnor

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de multiplicidade gradiente, $\mu_g(f)$, associada a um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, com singularidade isolada.

Este invariante da singularidade será caracterizado (Teorema 2.4) como número de soluções da equação $\partial f(z) - a = 0$, para um valor regular a suficientemente próximo de 0.

Como consequência deste resultado será possível mostrar que $\mu_g(f)$ é o número de pontos críticos não degenerados de uma perturbação estável de f .

2.1 O Grau de uma Aplicação

Sejam X, Y e Z variedades diferenciáveis, orientadas e sem bordo, com X compacta, Z subvariedade fechada de Y , e $\dim X + \dim Z = \dim Y$.

Seja $h : X \rightarrow Y$. Pelo *Teorema de Transversalidade* [7], podemos supor h transversal a Z . Assim, $h^{-1}(Z)$ tem um número finito de pontos.

Para cada $x \in h^{-1}(Z)$, definimos o sinal de dh_x , $\text{ sinal}(dh_x)$, por +1 ou -1 conforme dh_x preserve ou inverta orientação.

Definição 2.1 O número de intersecção $I(h, Z)$ é a soma dos sinais de dh_x , para $x \in h^{-1}(Z)$, isto é,

$$I(h, Z) = \sum_{x \in h^{-1}(Z)} \text{sign}(dh_x)$$

Quando X também é uma subvariedade de Y , o número de intersecção de X com Z , $I(X, Z)$, é definido como sendo o número de intersecção da aplicação inclusão de X em Z .

Suponha que X seja a fronteira de uma variedade compacta W e que h se estenda a uma aplicação $H : W \rightarrow Y$. Podemos supor H transversal à Z (Teorema da Extensão, [9]). Então $H^{-1}(Z)$ é uma variedade compacta orientada unidimensional com fronteira $\partial H^{-1}(Z) = h^{-1}(Z)$. Pelo Teorema de classificação de variedade compacta unidimensional, temos que $\partial H^{-1}(Z)$ tem um número par de pontos. Consequentemente, a soma dos sinais de dh_x , $x \in h^{-1}(Z)$ deve ser 0. Assim, provamos o seguinte:

Lema 2.1 *Seja X o bordo de uma variedade compacta W , X orientada como bordo de W . Se $h : X \rightarrow Y$ se estende a uma aplicação $H : W \rightarrow Y$ então $I(h, Z) = 0$.*

Em particular, suponhamos que f_0 e f_1 sejam homotópicas e ambas transversais à Z . Então se $H : J \times X \rightarrow Y$ é uma homotopia entre elas, segue-se que $I(\partial H, Z) = 0$, onde $J = [0, 1]$. $\partial H = H|_{\partial(J \times X)}$, $\partial(J \times X) = \{0\} \times X \cup \{1\} \times X$ e

$$H|_{\{0\} \times X} = f_0$$

$$H|_{\{1\} \times X} = f_1$$

$$\text{Portanto, } 0 = I(\partial H, Z) = I(f_0, Z) - I(f_1, Z)$$

Isto prova um dos teoremas centrais na teoria de intersecção.

Teorema 2.1 *Aplicações homotópicas têm o mesmo número de intersecção.*

Quando Y é conexo e tem a mesma dimensão de X , definimos o *grau* de uma aplicação $h : X \rightarrow Y$, como sendo o número de intersecção de h com um valor regular y , isto é,

$$\text{grau}(h) = I(h, \{y\})$$

Teorema 2.2 *O inteiro $\text{grau}(h)$, não depende da escolha do valor regular.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [2]

2.2 A Multiplicidade Gradiente

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um polinômio com ponto crítico isolado em 0. Tomemos S_ϵ de modo que 0 seja o único ponto crítico no disco D_ϵ . Podemos definir a aplicação

$$\frac{\partial f}{|\partial f|} : S_\epsilon \rightarrow S_1$$

por $\frac{\partial f}{|\partial f|}(z) = \frac{\partial f(z)}{|\partial f(z)|}$ onde

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$$

e $(z_1, \dots, z_n)$ são coordenadas usuais de $\mathbb{C}^n$ que deste modo possui uma orientação natural. Se S_ϵ está orientada como bordo de D_ϵ , podemos definir o grau de $\frac{\partial f}{|\partial f|}$ que denotaremos por $\mu_g(f)$

Pelo Lema 2.1, $\mu_g(f)$ independe de S_ϵ , isto é, se S_δ é uma esfera nas mesmas condições então

$$\mu_g(f)|_{S_\epsilon} = \mu_g(f)|_{S_\delta}$$

Definição 2.2 $\mu_g(f) = \text{grau}(\frac{\partial f}{|\partial f|})$ é a multiplicidade gradiente de f .

Lema 2.2 (*Princípio de Rouché*): Sejam $r, L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ duas aplicações holomorfas em uma vizinhança de z^0 tais que $|r(z)| < |L(z)|$ para todo $z \in S_\epsilon$. esfera de centro em z^0 e raio ϵ . Então

$$\text{grau}\left(\frac{L+r}{|L+r|}\right) = \text{grau}\left(\frac{L}{|L|}\right)$$

ambos restritos a S_ϵ .

Demonstração :

Pelo Teorema 2.1 basta obter uma homotopia entre estas aplicações. Para isto, é suficiente notar que $|r(z)| < |L(z)|$ implica em $\lambda r(z) + L(z) \neq 0$ para todo $z \in S_\epsilon$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Pois do contrário teríamos

$$0 = |\lambda r(z) + L(z)| \geq -\lambda|r(z)| + |L(z)| \geq -|r(z)| + |L(z)| \Rightarrow |r(z)| \geq |L(z)|,$$

o que é absurdo. Portanto,

$$H_\lambda(z) = \frac{L(z) + \lambda r(z)}{|L(z) + \lambda r(z)|}$$

é uma homotopia entre $\frac{L}{|L|}$ e $\frac{L+r}{|L+r|}$, como queríamos.

□

Como consequência desse lema temos

Teorema 2.3 *Se $z^o = 0$ é um ponto crítico não degenerado de f , isto é, a matriz $(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j})(0)$ é não singular, então $\mu_g(f) = 1$.*

Demonstração :

Temos $\partial f = Lz + r(z)$ onde $L = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)$ é não singular e $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{r(z)}{|z|} = 0$.

De $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{r(z)}{|z|} = 0$, temos que dado $\delta > 0$ e $\lambda = \min_{z \in S_\delta} |L(z)|$, então para $\eta = \frac{\lambda}{\delta} \exists \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \delta$ tal que se $|z| \leq \varepsilon \Rightarrow |r(z)| < \eta|z| \leq \eta\varepsilon \leq \lambda \leq |L(z)|$.

Portanto, $|r(z)| < |L(z)|, \forall z \in S_\varepsilon$. Pelo Lema 2.2 obtemos

$$\mu_g(f) = \text{grau}\left(\frac{\partial f}{|\partial f|}\right)|_{S_\varepsilon} = \text{grau}\left(\frac{L+r}{|L+r|}\right)|_{S_\varepsilon} = \text{grau}\left(\frac{L}{|L|}\right)|_{S_\varepsilon}$$

Como $GL(\mathbb{C}, n)$, conjunto das matrizes inversíveis em $\mathbb{C}$, é conexo por caminhos, fazemos uma homotopia H_t entre $\frac{L}{|L|}$ e a identidade de modo que

$$\text{grau}\left(\frac{L}{|L|}\right) = \text{grau}(id) = 1$$

□

O objetivo agora, é estabelecer uma relação entre μ_g e os zeros de $\partial f(z) - a$, onde a é valor regular próximo de 0.

Lema 2.3 *Seja D um disco compacto em $\mathbb{C}^n$. Se $\partial f^{-1}(0) \cap D \neq \emptyset$ e $\partial f^{-1}(0) \cap \partial D = \emptyset$ então o número de zeros de ∂f em D (contados com multiplicidade) é igual a $\mu_g(f)|_{\partial D}$. Isto é, se $\partial f^{-1}(0) \cap D = \{p_1, \dots, p_r\}$ e $\mu_g^i(f)$ é o grau de $\frac{\partial f}{|\partial f|}$ restrita a uma pequena esfera em torno de p_i então*

$$\mu_g(f)|_{\partial D} = \sum_{i=1}^r \mu_g^i(f)$$

Demonstração :

Para cada $i = 1, \dots, r$ seja D_i um disco fechado centrado em p_i contido em D de modo que $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Seja $B = D - \bigcup_{i=1}^r \text{int}(D_i)$ então $\partial B = \partial D \cup (\bigcup_{i=1}^r \partial D_i)$.

Temos que $\frac{\partial f}{|\partial f|}$ é contínua em B , portanto, pelo Lema 2.1, $\text{grau} \frac{\partial f}{|\partial f|}|_{\partial B} = 0$.

Como ∂D_i tem orientação oposta a ∂D tomemos $-\partial D_i$. Portanto,

$$0 = \text{grau} \left(\frac{\partial f}{|\partial f|} \right) |_{\partial B} = \text{grau} \left(\frac{\partial f}{|\partial f|} \right) |_{\partial D} - \sum_{i=1}^r \text{grau} \left(\frac{\partial f}{|\partial f|} \right) |_{\partial D_i},$$

e segue o resultado.

□

Teorema 2.4 *Seja $D_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ tal que 0 é zero isolado de ∂f . Então para quase todo ponto $a \in \mathbb{C}^n$, suficientemente próximo de 0 , a equação $\partial f(z) - a = 0$ possui exatamente $\mu_g(f)$ soluções dentro de D_ϵ .*

Demonstração:

Pelo Teorema de Sard, o conjunto

$$R = \{a \in \mathbb{C}^n : a \text{ é valor regular de } \partial f\}$$

é denso em $\mathbb{C}^n$.

Do fato de a ser valor regular de ∂f , segue que ∂f é localmente injetora numa vizinhança de $p \in \partial f^{-1}(a)$. Assim as soluções de $\partial f(z) - a = 0$ são pontos isolados e portanto formam um subconjunto finito de D_ϵ .

Seja $\{p_1, \dots, p_r\} = \text{int}(D_\epsilon) \cap \partial f^{-1}(a)$. Tomemos $g(z) = f(z) - az$, então p_l é ponto crítico de g e

$$\left(\frac{\partial^2 g(p_l)}{\partial z_i \partial z_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 f(p_l)}{\partial z_i \partial z_j} \right)$$

é não singular para cada $l = 1, \dots, r$.

Portanto, pelo Teorema 2.3 cada solução tem multiplicidade 1. Tomando-se os valores regulares a de ∂f que satisfazem $|a| < |\partial f(z)|$ para todo $z \in S_\epsilon$ (existem pois $|\partial f(z)|$ é limitado em S_ϵ e R é denso).

Pelo Lema 2.3 o número de soluções em D_ϵ é igual ao $\text{grau}(\frac{\partial f(z)-a}{|\partial f(z)-a|})|_{S_\epsilon=\partial D_\epsilon}$ e

$$\text{grau}(\frac{\partial f(z)-a}{|\partial f(z)-a|})|_{S_\epsilon} = \text{grau}(\frac{\partial f(z)}{|\partial f(z)|})|_{S_\epsilon} = \mu_g(f)$$

Portanto,

$$\mu_g(f) = \text{card} \{ \partial f^{-1}(a) \cap D_\epsilon : a \text{ é valor regular de } \partial f \text{ próximo de } 0 \}$$

□

Segue da demonstração que para uma pequena perturbação linear $f(z) + az$ de $f(z)$ obtemos $\mu_g(f)$ pontos críticos não degenerados em uma vizinhança de 0.

Definição 2.3 Uma aplicação $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dita de Morse se h tem um número finito de pontos críticos $\{x_1, \dots, x_k\}$ em U , e x_i é ponto crítico não degenerado de h , $i = 1, \dots, k$. Quando as imagens dos pontos críticos são todas distintas, h é estável ([7]).

Teorema 2.5 Toda deformação de Morse $f_\epsilon : U \rightarrow \mathbb{C}$ suficientemente próxima de f tem exatamente $\mu_g(f)$ pontos críticos não degenerados.

Demonstração :

Seja $D \subset U$, um disco tal que 0 é o único ponto crítico de $f|_D$.

Como f e f_ϵ são suficientemente próximas, podemos supor que existe homotopia

$$H_t(z) = t \frac{\partial f(z)}{|\partial f(z)|} + (1-t) \frac{\partial f_\epsilon(z)}{|\partial f_\epsilon(z)|}$$

Pelo Teorema 2.1, temos que $\mu_g(f_\epsilon) = \mu_g(f)$ ambas restritas à ∂D .

Sejam $\{x_1, \dots, x_r\}$ pontos críticos não degenerados de f_ϵ no $\text{int}(D)$.

Basta portanto mostrar que $\mu_g(f) = r$.

Para cada $i = 1, \dots, r$ seja D_i um disco fechado centrado em x_i contido em D de modo que $D_i \cap D_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Seja $\mu_g^i(f_\epsilon)$ o grau de $\frac{f_\epsilon}{|f_\epsilon|}|_{\partial D_i}$. Como x_i é não degenerado segue pelo Teorema 2.3 que $\mu_g^i(f_\epsilon) = 1$, mas pelo Lema 2.3 temos

$$\mu_g(f) = \mu_g(f_\epsilon) = \sum_{i=1}^r \mu_g^i(f_\epsilon) = r$$

□

Observação : A idéia central do teorema acima, de relacionar invariantes associados a uma singularidade com a geometria de uma perturbação estável, tem sido estudada recentemente por diversos autores [20] e [21].

Capítulo 3

Caracterização Algébrica do Número de Milnor

Neste capítulo será introduzido o conceito de multiplicidade algébrica, $\mu_a(f)$, de um germe holomorfo f em 0. Os resultados principais são os seguintes:

Teorema 3.1: $\mu_a(f) < \infty$ se, e somente se, 0 é singularidade isolada ou valor regular de f .

Teorema 3.2: $\mu_a(f) < \infty$ então existe difeomorfismo biholomorfo h tal que $f \circ h$ é um polinômio.

Denotaremos por $\mathcal{O}_n$ o conjunto dos germes em 0 de funções holomorfas.

Temos que $\mathcal{O}_n$ é um anel local, cujo único ideal maximal, $\mathcal{M}_n$, é formado pelos germes de funções que se anulam em 0.

Seja Jf o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ para $i = 1, \dots, n$.

Definição 3.1 Dizemos que $f \in \mathcal{O}_n$ tem codimensão finita se o espaço vetorial $\mathcal{O}_n/Jf$ é de dimensão finita (sobre $\mathbb{C}$), e $\mu_a(f) = \dim \mathcal{O}_n/Jf$ é a multiplicidade algébrica de f em 0.

Lema 3.1 Jf tem codimensão finita se, e somente se, existe $k \geq 1$ tal que

$$\mathcal{M}_n^k \subseteq Jf$$

Demonstração :

Suponhamos Jf de codimensão finita. Consideremos a seguinte sequência de ideais de $\mathcal{O}_n$.

$$Jf + \mathcal{M}^0 \mathcal{O}_n \supseteq Jf + \mathcal{M}_n^1 \mathcal{O}_n \supseteq Jf + \mathcal{M}_n^2 \mathcal{O}_n \supseteq \dots \supseteq Jf$$

Logo,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n} \leq \dim \frac{\mathcal{O}_n}{Jf + \mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{O}_n}$$

Do fato de $\dim \mathcal{O}_n/Jf < \infty$, segue $\exists k \geq 1$ tal que

$$Jf + \mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n = Jf + \mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{O}_n$$

ainda,

$$\mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n \subseteq Jf + \mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n = Jf + \mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{O}_n = Jf + \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n)$$

Portanto, pelo *Lema de Nakayama* [6], $\mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n \subseteq Jf$.

Reciprocamente se $\exists k \geq 1, \mathcal{M}_n^k \mathcal{O}_n \subseteq Jf$, então $\dim \mathcal{O}_n/Jf \leq \dim \mathcal{O}_n/\mathcal{M}_n^k$.

Mostremos que $\mathcal{O}_n/\mathcal{M}_n^k$ é de dimensão finita. Para tanto seja

$$J^{k+1} : \mathcal{O}_n \rightarrow T_o^{k+1}$$

onde T_o^{k+1} é o conjunto dos polinômios de Taylor em 0 até ordem $k+1$ e $J^{k+1}(f) = j^{k+1}f = (k+1)$ -jato de f .

Temos J^{k+1} é um homomorfismo de anéis e $\ker(J^{k+1}) = \mathcal{M}_n^k$, logo

$$\frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_n^k} \simeq J^{k+1}(\mathcal{O}_n) = T_o^{k+1}$$

Portanto, $\dim \mathcal{O}_n/\mathcal{M}_n^k$ é finito e segue o resultado.

□

Teorema 3.1 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$, então 0 é ponto crítico isolado ou ponto regular de f se, e somente se, $\mu_a < \infty$.*

Demonstração :

Suponhamos que 0 é ponto crítico isolado.

Consideremos a subvariedade analítica

$$V(Jf) = \{z \in U : \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) = 0 ; i = 1, \dots, n\}$$

Por hipótese, existe vizinhança (que podemos supor a própria U) tal que

$$V(Jf) = \{0\}$$

Portanto, $I(V(Jf)) = \{h \in \mathcal{O}_n : h \text{ se anula em } V(Jf) = 0\} = \mathcal{M}_n$. Mas pelo *Teorema de Zeros de Hilbert*,

$$\mathcal{M}_n = I(V(Jf)) = \text{rad}(Jf) = \{h \in \mathcal{O}_n : h^k \in Jf \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

então $Jf \supseteq \mathcal{M}_n^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 3.1 segue que $\mu_a < \infty$.

Reciprocamente se $\mu_a < \infty$ então pelo Lema 3.1 $\exists k \geq 1$ tal que $\mathcal{M}_n^k \subseteq Jf$. Logo, em particular, os monômios $z_1^k, \dots, z_n^k$ são combinações lineares de $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ com coeficientes em $\mathcal{O}_n$, ou seja,

$$z_i^k = g_{i1} \frac{\partial f}{\partial z_1} + g_{i2} \frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + g_{in} \frac{\partial f}{\partial z_n} ; i = 1, \dots, n$$

Portanto, se $w = (w_1, \dots, w_n)$ é ponto crítico de f , então

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(w) = 0 \Rightarrow w_1^k = \dots = w_n^k = 0 \Rightarrow w_1 = \dots = w_n = 0$$

ou seja, $w = 0$ é ponto crítico isolado de f .

Quando 0 é ponto regular, vemos facilmente que $\mathcal{O}_n = Jf$ e, portanto, $\mu_a = 0$.

Reciprocamente, se $\mu_a = 0$ Jf tem elemento inversível $\frac{\partial f}{\partial z_i}(0) \neq 0$ e portanto 0 é valor regular.

□

Observação: No caso real, 0 pode ser ponto crítico isolado de f mas $\dim \mathcal{E}_n/Jf = \infty$, onde $\mathcal{E}_n$ é o conjunto dos germes em 0 de funções diferenciáveis de classe C^∞ .

Por exemplo, tomemos $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$.

Então, 0 é singularidade isolada de f , mas não é singularidade isolada de sua complexificação $f_c : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$. Logo, f_c é de codimensão infinita sobre $\mathbf{C}$, e portanto, também f tem codimensão infinita sobre $\mathbf{R}$.

O teorema a seguir nos diz que em se tratando de funções holomorfas com pontos críticos isolados não há perda de generalidade em considerar localmente a função dada como um polinômio.

Teorema 3.2 *Se $f : U \rightarrow \mathbf{C}$, U vizinhança de 0 em $\mathbf{C}^n$, é holomorfa e $\mu_a < \infty$, então existe um inteiro k tal que para todo germe g com $j^k f = j^k g$, existe difeomorfismo biholomorfo h tal que $g = f \circ h$.*

Demonstração :

De $\mu_a < \infty \Rightarrow \exists k \geq 1$ tal que $\mathcal{M}_n^k \subseteq Jf$.

Seja $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $j^k g = j^k f$.

Observemos que $f - g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ e f, g são pontos no espaço vetorial complexo $\mathcal{O}_n$. Assim, podemos definir

$$F(z, t) = f_t(z) = (1 - t)f(z) + tg(z) \quad ; \quad t \in [0, 1]$$

que é uma família de germes a um parâmetro, f_t , com $f_0 = f$ e $f_1 = g$. Para cada s , iremos construir uma família h_t , de germes de difeomorfismos biholomorfos, com t próximo de s , tal que

$$f_t \circ h_t = f_s$$

Isto é equivalente a mostrar a existência de um germe em $(0, s)$ de uma aplicação holomorfa

$$H : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^n ,$$

satisfazendo:

a) $H(z, s) = z$

b) $H(0, t) = 0$

$$c) F(H(z, t), t) = F(z, s)$$

De fato, colocando $h_t(z) = H(z, t)$, a condição a) diz que $h_s = \text{identidade}$. Logo, para t próximo de s , h_t é inversível.

b) diz que h_t leva a origem nela mesma.

Finalmente, c) pode ser escrito como $f_t \circ h_t = f_s$

Notemos que por a) , c) é verdadeiro para $t = s$. Assim, a condição c) pode ser trocada pela afirmação que $F(H(z, t), t)$ não depende de t , isto é, a derivada com relação a t é nula:

$$c') \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_i}(H(z, t), t) \frac{\partial H_i}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(z, t), t) = 0.$$

Logo, nosso problema é encontrar H tal que a), b) e c') se verificam. Afir-
mamos que é suficiente construir um germe em $(0, s)$ de uma aplicação holomorfa

$$\xi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ tal que}$$

$$d) \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial F}{\partial z_i} = - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$e) \xi_i(0, t) = 0$$

Se existir tal ξ , este pode ser pensado como um campo vetorial em $\mathbb{C}^n$ depen-
dendo do tempo. Assim, ξ tem um fluxo, isto é, existe

$$H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ tal que}$$

$$f) \frac{\partial H}{\partial t} = \xi(H(z, t), t)$$

e satisfazendo a condição inicial $H(z, s) = z$.

De fato, c') pode ser trocado por d) e f), pois

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_i}(H, t) \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}(H, t) \stackrel{f)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_i}(H, t) \xi_i(H, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H, t) \stackrel{d)}{=} 0$$

b) pode ser trocado por a), e) e f)

Para $z = 0$, temos a linha de fluxo (curva integral) $H(0, t)$ de ξ , isto é,
 $\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \xi(H(0, t), t)$. Isto devido a f) que garante a existência de fluxo local
 ξ em $z = 0$ satisfazendo a condição inicial $H(0, s) = 0$. Notemos que e) diz

que $\xi(0, t) = 0 = \frac{\partial \mathbf{0}}{\partial t}(0, t)$, com $\mathbf{0}(0, s) = 0$. Pela unicidade da linha de fluxo, $H(0, t) = 0$.

Resta, portanto, estabelecer a existência de uma aplicação ξ satisfazendo **d)** e **e)**. O argumento é algébrico e não depende da escolha de s . Logo, podemos supor $s = 0$. Além disso, como trabalhamos simultaneamente com funções em $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_{n+1}$, podemos tomar os elementos de $\mathcal{O}_n$ como sendo elementos de $\mathcal{O}_{n+1}$ independentes de t . Assim, a condição **e)** é o mesmo que $\xi_i \in \mathcal{M}_n$.

Ainda :

$$g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z_i}(g - f) \in \mathcal{M}_n^k$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = (1 - t) \frac{\partial f}{\partial z_i} + t \frac{\partial g}{\partial z_i} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} = t \frac{\partial}{\partial z_i}(g - f)$$

Como $(z_1, \dots, z_n, t) \mapsto t \in \mathcal{M}_{n+1}$, segue que

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \in \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^k$$

Portanto, $\langle \frac{\partial f}{\partial z_i} \rangle \subseteq \langle \frac{\partial F}{\partial z_i} \rangle + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^k$ donde,

$$\mathcal{M}_n \langle \frac{\partial f}{\partial z_i} \rangle \subseteq \mathcal{M}_n \langle \frac{\partial F}{\partial z_i} \rangle + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

Então,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} = \mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^k \subseteq \mathcal{M}_n Jf = \mathcal{M}_n \langle \frac{\partial f}{\partial z_i} \rangle \subseteq \mathcal{M}_n \langle \frac{\partial F}{\partial z_i} \rangle + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

Pelo *Lema de Nakayama* obtemos;

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \mathcal{M}_n \langle \frac{\partial F}{\partial z_i} \rangle$$

Do fato de $-\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{k+1}$, segue que

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial F}{\partial z_i}$$

o que mostra a validade de **d)** completando a demonstração.

□

Observemos que se g é o polinômio de Taylor de f em 0 até ordem k então $f \circ h = g$ é um polinômio.

Definição 3.2 *Um germe f que satisfaz $\mu_a < \infty$ é dito finitamente determinado.*

Exemplo 3.1 Calcular μ_a de $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por:

$$f(z, w) = z^2w + w^4$$

Temos que $Jf = \langle 2zw, z^2 + 4w^3 \rangle$. Logo $z^i w^j \in Jf$ para $i \neq 0$ e $j \neq 0$.
 $z^3 \in Jf$, pois $z^3 + 4w^3 z \in Jf$ e $4w^3 z \in Jf$
 $w^4 \in Jf$, pois $z^2 w + 4w^4 \in Jf$ e $z^2 w \in Jf$

Assim, $z^j \in Jf$ para $j \geq 3$ e $w^j \in Jf$ para $j \geq 4$.

Observamos que $1, z, w, z^2, w^2, w^3 \notin Jf$. Portanto.

$$\frac{\mathcal{O}_2}{Jf} = \langle 1, z, w, z^2, w^2 \rangle$$

ou seja, $\mu_a = 5$.

Capítulo 4

Equivalência das Definições

O objetivo deste capítulo é demonstrar a equivalência entre os conceitos definidos anteriormente. Isto será feito em duas etapas: No Teorema 4.1, será obtida a equivalência entre a multiplicidade geométrica e o número de Milnor, no Teorema 4.2, mostraremos que a multiplicidade geométrica e a multiplicidade algébrica coincidem.

4.1 Equivalência entre a Multiplicidade Geométrica e o Número de Milnor

Teorema 4.1 $\mu_g = \text{posto } H_{n-1}(F_\theta, \mathbb{Z})$.

Antes de demonstrarmos este teorema precisamos de uma fórmula que relacione o grau de uma aplicação $v : S^k \rightarrow S^k$ com a topologia de uma subvariedade de S^k .

Seja M uma variedade fechada e $h : M \rightarrow M$ uma aplicação. Então para cada k existe um homomorfismo induzido a nível de homologia com coeficientes racionais

$$h_k : H_k(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(M; \mathbb{Q})$$

Para cada k , nós podemos escolher uma base finita para o espaço vetorial racional $H_k(M; \mathbb{Q})$ e escrever h_k como uma matriz com relação a esta base. Denotamos por $Tr(h_k)$ o traço desta matriz.

Definição 4.1 O número de Lefschetz de h é definido por

$$L(h) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{Tr}(h_k)$$

Observemos que $L(h)$ é independente da escolha envolvida e, portanto, está bem definido. Claro que $L(h)$ depende somente da classe de homotopia de h , pois se g e h são homotópicos então $g_* = h_*$, isto é, as induzidas são iguais. No caso em que M é uma variedade C^∞ orientada então, pode-se mostrar [12, pag. 420] que

$$L(h) = I(\Delta(M), \text{graf}(h))$$

onde

$$\text{graf}(h) = \{(x, y) \in M \times M : y = h(x)\} \text{ e}$$

$$\Delta(M) = \{(x, y) \in M \times M : y = x\}$$

Observemos que

$$\text{graf}(h) \cap \Delta(M) = \text{Fix}(h) = \{x \in M : h(x) = x\}$$

e que podemos supor (fazendo uma homotopia) que $\text{graf}(h)$ é transversal à $\Delta(M)$.

Portanto temos

$$\sum_{x \in \text{Fix}(h)} \text{sign}(dh_x - Id) = I(\Delta(M), \text{graf}(h)) = L(h)$$

onde Id é a aplicação identidade.

Definição 4.2 A característica de Euler de M , $\chi(M)$, é definida por

$$\chi(M) = \sum_j (-1)^j \text{posto} H_j(M) .$$

Por outro lado temos:

$$\chi(M) = L(id_M) = I(\Delta(M), \text{graf}(id_M)) = I(\Delta(M), \Delta(M))$$

Lema 4.1 *Sejam $v : S^k \rightarrow S^k$ uma aplicação C^∞ e $M \subset S^k$ uma região de S^k com bordo suave. Suponhamos que:*

- 1) $Fix(v) \subset M$
- 2) $v(x) \neq -x, \forall x \in M$
- 3) $\langle v(x), n(x) \rangle > 0$ para todo $x \in \partial M$ onde $n(x) \in T_x S^k$ é um vetor normal à ∂M que aponta para o interior de M ($\langle, \rangle$ produto interno euclidiano).

Então

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k \text{grau}(v)$$

Demonstração:

Perturbando v , se necessário, podemos supor que v tem pontos fixos isolados.

Para $v : S^k \rightarrow S^k$ temos:

$$L(v) = \sum_j (-1)^j \text{Tr}(v_j : H_j(S^k) \rightarrow H_j(S^k)) = 1 + (-1)^k \text{grau}(v)$$

De fato,

$$\sum_j (-1)^j \text{Tr}(v_j : H_j(S^k) \rightarrow H_j(S^k)) = 1 + (-1)^k \text{Tr}(v_k : H_k(S^k) \rightarrow H_k(S^k)).$$

Agora, seja $[z]$ o gerador de $H_k(S^k)$. Então $v_k[z] = \text{Tr}(v_k)[z] = \text{grau}(v)[z]$.

Da hipótese 2), podemos definir $v_t : M \rightarrow S^k$ por

$$v_t(x) = \frac{(1-t)x + tv(x)}{|(1-t)x + tv(x)|}$$

De fato, se $\exists y$ tal que $(1-t)y + tv(y) = 0 \Rightarrow (1-t)y = -tv(y)$
 $\Rightarrow |1-t| = |t| \Rightarrow t = 1/2 \Rightarrow v(y) = -y$, o que é uma contradição.

Afirmamos que para t suficientemente pequeno $v_t(M) \subset M$.

De fato, podemos construir uma cobertura de M por abertos $B_\epsilon(x)$ e U_x , $x \in M$ como segue:

- 1) se $x \in \text{int}(M)$:

Dado $\epsilon > 0$, seja $B_\epsilon(x) = \{y : |x - y| < \epsilon\} \cap M$

Pela continuidade de $v_t(x)$ com relação a t , $\exists \delta_x > 0$ tal que $0 \leq t \leq \delta_x \Rightarrow v_t(x) \subset B_\epsilon(x)$.

2) se $x \in \partial M$.

Consideremos a curva $\alpha(t) = v_t(x)$ com $\alpha(0) = x$. Pela hipótese 3) segue que

$$\langle \alpha'(0), n(x) \rangle > 0$$

Da continuidade do produto interno, $\exists \lambda_x > 0$ tal que $\langle \alpha'(t), n(x) \rangle > 0$ para $0 \leq t \leq \lambda_x$, ou seja, $\alpha(t) = v_t(x) \subset M$.

Para cada $x \in \partial M$, seja U_x vizinhança aberta de M , tal que

$$\alpha(t) \subset U_x \subset M, \quad 0 \leq t \leq \lambda_x$$

Como M é compacta, podemos extrair uma subcobertura finita, isto é,

$$M = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r} \cup B_\epsilon(y_1) \cup \dots \cup B_\epsilon(y_k)$$

Portanto, para $\delta = \min \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_r}, \lambda_{y_1}, \dots, \lambda_{y_k}\}$ e $0 \leq t \leq \delta$, temos

$$v_t(M) \subset M$$

Logo, pela invariância por homotopia do *número de Lefschetz* temos para $0 \leq t \leq \delta$

$$L(v_t) = L(v_0) = L(id_M) = \chi(M)$$

Afirmamos que $Fix(v_t) = Fix(v)$ para todo $t > 0$.

De fato, claro que $Fix(v) \subseteq Fix(v_t)$. Por outro lado, se $y \in Fix(v_t)$, então

$$\frac{(1-t)y + tv(y)}{|(1-t)y + tv(y)|} = y$$

$$\Rightarrow tv(y) = y[|(1-t)y + tv(y)| - (1-t)] \Rightarrow ||(1-t)y + tv(y)| - (1-t)| = |t| \Rightarrow c = |(1-t)y + tv(y)| = \pm t + 1 - t \Rightarrow c = 1 \text{ ou } c = 1 - 2t.$$

$$\text{Se } c = 1 \Rightarrow tv(y) = ty \Rightarrow y \in Fix(v)$$

Se $c = 1 - 2t \Rightarrow tv(y) = -ty \Rightarrow v(y) = -y$, o que é uma contradição pela hipótese 2).

Assim, $Fix(v_t) \subseteq Fix(v)$. Portanto,

$$Fix(v_t) = Fix(v)$$

Além disso, o $sin al(dv_t(x) - Id)$ para $x \in Fix(v_t)$ é um inteiro que varia continuamente com t , isto implica que $sin al(dv_t(x) - Id) = sin al(dv(x) - Id)$. Portanto,

$$L(v) = \sum_{x \in Fix(v)} sin al(dv(x) - Id) = \sum_{x \in Fix(v_t)} sin al(dv_t(x) - Id) = L(v_t) = \chi(M). \text{ Logo,}$$

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k grau(v)$$

□

Lema 4.2 *As hipóteses do Lema 4.1 se verificam para $v : S_\epsilon \rightarrow S_\epsilon$ definida por*

$$v(z) = \epsilon \frac{grad f(z)}{|grad f(z)|} e$$

$$M = \{z \in S_\epsilon : Re(f(z)) \geq 0\},$$

onde $Re(f(z))$ é a parte real de $f(z)$.

A demonstração do lema 4.2 depende ainda do seguinte resultado:

Lema 4.3 *O conjunto dos pontos críticos de $f|_{S_\epsilon}$ é dado por*

$$\{z \in S_\epsilon : grad f(z) = cz, c \in \mathbb{C}\}$$

e para ϵ suficientemente pequeno K não contém pontos críticos de $f|_{S_\epsilon}$.

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [1, pag. 55].

Demonstração do lema 4.2:

Podemos escrever $M = \cup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} F_\theta \cup K_\epsilon$ de maneira que $\partial M = F_{-\pi/2} \cup K_\epsilon \cup F_{\pi/2}$ é C^∞ , pelo Lema 1.4.

Hipótese 1): $z \in Fix(v) \Leftrightarrow v(z) = z \Leftrightarrow grad f(z) = \lambda z$ com $\lambda > 0$, então pelo Lema 4.3 segue que $f(z) \neq 0$. Logo, $grad Log(f(z)) = \frac{\lambda z}{f(z)}$ e pelo Lema 1.2 segue que $Re(\frac{\lambda}{f(z)}) > 0$. Como $\lambda > 0$ temos $Re(f(z)) > 0$, ou seja $z \in int(M)$.

Hipótese 2): É verificada analogamente. Se $v(z) = -z$ então $\text{grad } f(z) = cz$ com $c < 0$. Isto significa que $\text{grad } \text{Log}(f(z)) = \frac{cz}{f(z)}$ com $\text{Re}(\frac{c}{f(z)}) > 0$, ou seja $\text{Re}(f(z)) < 0$ e $z \notin M$.

Hipótese 3): Seja $p(t)$ uma curva em S_ϵ passando pelo ponto $z \in \partial M$ e transversal a ∂M tal que $p(0) = z$, $p'(0) = n(z)$ e $\text{Re}(f(p(t)))$ seja crescente. Então $\frac{d}{dt} \text{Re}(f(p(t)))|_{t=0} > 0$.

Derivando obtemos

$$\frac{d}{dt} f \circ p(t)|_{t=0} = \langle p'(t), \text{grad } f(p(t)) \rangle |_{t=0} = \langle n(z), \text{grad } f(z) \rangle$$

portanto, $\text{Re}(\langle n(z), \text{grad } f(z) \rangle) > 0$.

□

Demonstração do Teorema 4.1:

Por definição $\mu_g = \text{grau}(\frac{\partial f}{|\partial f|})$ onde $\frac{\partial f}{|\partial f|} : S_\epsilon \rightarrow S_1$ e

$$\frac{\partial f}{|\partial f|}(z) = \frac{\partial f}{|\partial f|}(z) = \frac{\partial f(z)}{|\text{grad } f(z)|}$$

Se $\varphi(z_1, \dots, z_n) = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ então

$$\frac{\partial f}{|\partial f|} = \varphi \circ \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

Como o grau da composta é igual ao produto dos graus, segue que

$$\mu_g = (\text{grau } \varphi)(\text{grau } \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}) = (-1)^n \text{grau}(\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|})$$

Sejam $v : S_\epsilon \rightarrow S_\epsilon$ e $M = \{z \in S_\epsilon : \text{Re}(f(z)) \geq 0\}$ onde

$$v(z) = \epsilon \frac{\text{grad } f(z)}{|\text{grad } f(z)|}$$

Pelo lema 4.2, temos que M satisfaz as hipóteses do Lema 4.1 portanto,

$$\chi(M) = 1 + (-1)^{2n-1} \text{grau}(v) \quad (4.1)$$

Além disso, $\phi_\varepsilon : \text{int}(M) \rightarrow C$ é uma fibração cuja fibra típica é F_θ onde C é o semi-círculo dado por $C = \{e^{i\theta} : -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$, portanto é possível exprimir a característica de Euler de M em termos das características de Euler da fibra e da base [11, pag. 322]

$$\chi(M) = \chi(F_\theta)\chi(C) = \chi(F_\theta) = \sum_j (-1)^j \text{posto} H_j(F_\theta)$$

Pelo Teorema 1.5 temos:

$$\chi(M) = 1 + (-1)^{n-1} \text{posto} H_{n-1}(F_\theta) \quad (4.2)$$

Por (4.1) e (4.2) temos:

$$1 + (-1)^{2n-1} \text{grau}(v) = 1 + (-1)^{n-1} \text{posto} H_{n-1}(F_\theta)$$

Como $\text{grau}(v) = (-1)^{-n} \mu_g$, segue que

$$(-1)^{2n-1} (-1)^{-n} \mu_g = (-1)^{n-1} \text{posto} H_{n-1}(F_\theta)$$

Logo, $\mu_g = \text{posto} H_{n-1}(F_\theta)$.

□

4.2 Equivalência entre a Multiplicidade Algébrica e a Multiplicidade Gradiente

Teorema 4.2 $\mu_a = \mu_g$.

Denotamos por $\mathcal{O}_{n,z} = \mathcal{O}_z$ o anel dos germes em 0 das funções holomorfas, onde $z = (z_1, \dots, z_n)$, indicam as coordenadas em $\mathbb{C}^n$, e $\mathcal{O}_y$ o mesmo anel com coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ no contradomínio. Seja,

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

observemos que o homomorfismo $(\partial f)^* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_z$ definido por:

$$(\partial f)^*(\varphi) = \varphi \circ \partial f$$

torna $\mathcal{O}_z$ um $\mathcal{O}_y$ -módulo.

Lema 4.4 $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$ -módulo gerado por μ_a elementos.

Observação: Poderíamos obter este resultado diretamente do *Teorema de Preparação de Malgrange* [7]. No entanto, a demonstração apresentada usa o *Teorema de Preparação de Weierstrass* [7] e é mais adequada para relacionar μ_a com o número de solução de $\partial f(z) = a$, para a valor regular suficientemente próximo de 0.

Demonstração do Lema 4.4:

Consideremos

$$V = \{(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : y_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n)\} = \text{graf}(\partial f)$$

Seja $\mathcal{A} = \text{Id}(V)$ o ideal de $\mathcal{O}_{y,z}$ gerado por $\{y_j - \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n)\}$, $j = 1, \dots, n$.

Afirmamos que $\mathcal{A}$ é um ideal primo.

De fato, seja

$$H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$

onde $H(y, z) = (Y, z)$ e $Y_j = y_j - \frac{\partial f}{\partial z_j}$. Temos que H é um difeomorfismo e, portanto

$$H^* : \mathcal{O}_{Y,z} \rightarrow \mathcal{O}_{y,z}$$

definido por $H^*(h) = h \circ H$. é um isomorfismo de anéis.

Seja $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dada por $\phi(z) = (\partial f(z), z)$ e

$$\phi^* : \mathcal{O}_{y,z} \rightarrow \mathcal{O}_z$$

sua induzida. Então, $(H \circ \phi)^*(g) = g(H \circ \phi) = g(0, z)$

Observemos que:

$$1) \text{Ker}(H \circ \phi)^* = \langle Y_1, \dots, Y_n \rangle = (H^*)^{-1}(\mathcal{A}).$$

De fato, $\supseteq$ é imediata. Para $\subseteq$, basta usar o *Lema de Hadamard*.

$$2) (H \circ \phi)^* = \phi^* \circ H^*.$$

$$3) (H \circ \phi)^* \text{ é um isomorfismo de } \mathcal{O}_{Y,z}/(\text{Ker}(H \circ \phi)^* = (H^*)^{-1}(\mathcal{A})) \text{ e } \mathcal{O}_z.$$

Como $(H \circ \phi)^* \circ (H^*)^{-1} = \phi^*$, segue que $\phi^*(\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A})$ é um isomorfismo, pois

$$\mathcal{O}_{y,z} \xrightarrow{(H^*)^{-1}} \mathcal{O}_{Y,z} \Rightarrow \frac{\mathcal{O}_{y,z}}{\mathcal{A}} \simeq \frac{\mathcal{O}_{Y,z}}{(H^*)^{-1}(\mathcal{A})} \simeq \mathcal{O}_z$$

Portanto $\frac{\mathcal{O}_{y,z}}{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{O}_z$.

Como $\mathcal{O}_z$ é anel de integridade, segue que $\mathcal{A}$ é um ideal primo.

Sendo 0 singularidade isolada de f , existe j tal que $\frac{\partial f}{\partial z_j}(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(0) = 0, \text{ tem-se que } \frac{\partial f}{\partial z_j}(0, \dots, 0, z_n) = z_n^k g(z_n), \text{ com } g(0) \neq 0$$

Portanto, pelo *Teorema de Preparação de Weierstrass*, existe uma função holomorfa h definida numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ tal que

$$h \frac{\partial f}{\partial z_j} = g_n = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \dots + a_k$$

onde a_j são funções holomorfas em $(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_{n-1})$. Como $\mathcal{A}$ é um ideal, $g_n \in \mathcal{A}$. Logo, $\tilde{z}_n =$ classe de z_n em $\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A}$ satisfaz uma equação algébrica com coeficientes em $\mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}/(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}})$.

Além disso, pelo *Teorema de Divisão de Weierstrass*, se $g \in \mathcal{O}_{y,z}$ então $g = qg_n + r$ onde $r \in \mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}[z_n]$

Logo, $g \equiv r \pmod{\mathcal{A}}$, ou seja,

$$\frac{\mathcal{O}_{y,z}}{\mathcal{A}} \simeq \frac{\mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}}{\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}}[\tilde{z}_n]$$

Procedendo analogamente com os ideais $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}$ sucessivamente e usando o fato que f é de codimensão finita obtemos

$$\frac{\mathcal{O}_{y,z}}{\mathcal{A}} \simeq \frac{\mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}}{\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{y,z_1, \dots, z_{n-1}}}[\tilde{z}_n] \simeq \dots \simeq \frac{\mathcal{O}_y}{\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_y}[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n] \simeq \mathcal{O}_y[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n]$$

Portanto, usando o isomorfismo $(\phi)^*(\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A}) \simeq \mathcal{O}_z$, obtemos $\mathcal{O}_z \simeq \phi^*(\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A}) \simeq \phi^*(\mathcal{O}_y[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n]) = \phi^*(\mathcal{O}_y)[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n] = (\partial f)^*(\mathcal{O}_y)[\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n]$.

Isto é, $\mathcal{O}_z$ é uma extensão algébrica finita do subanel $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$. Portanto $\mathcal{O}_z$ é um $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ -módulo finitamente gerado.

Temos que $\dim \mathcal{O}_z/Jf = \mu_a$. Sejam $\{b_1, \dots, b_{\mu_a}\}$ uma base de $\mathcal{O}_z/Jf$ e $\{c_1, \dots, c_{\mu_a}\}$ elementos de $\mathcal{O}_z$ tal que $\pi(c_j) = b_j$, onde

$$\pi : \mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_z/Jf$$

é a projeção canônica.

Seja β o $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ -módulo gerado por $\{c_1, \dots, c_{\mu_a}\}$.

Então $\mathcal{O}_z = \beta + Jf\mathcal{O}_z$, pois se $p \in \mathcal{O}_z \Rightarrow \pi(p) = r_1 b_1 + \dots + r_{\mu_a} b_{\mu_a} = r_1 \pi(c_1) + \dots + r_{\mu_a} \pi(c_{\mu_a}) \Rightarrow p = r_1 c_1 + \dots + r_{\mu_a} c_{\mu_a} + s$ onde $s \in Jf$.

Portanto $\mathcal{O}_z = \beta + Jf\mathcal{O}_z$ e, pelo *Lema de Nakayama* segue que $\mathcal{O}_z = \beta$, ou seja $\mathcal{O}_z$ é um $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ -módulo gerado por μ_a elementos.

□

Passemos à demonstração do Teorema 4.2.

Usando o fato de que $\{\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\}$ é um sistema de parâmetros é possível obter-se que $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$ -módulo livre de posto μ_a [14].

Na sequência, indicaremos por $K\{D\}$ corpo de frações de um anel de integridade D .

Como $\mathcal{A}$ é um ideal primo podemos formar o corpo quociente $\hat{K} = K\{\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A}\}$ e do fato de cada $\hat{z}_j$ ser algébrico sobre $\mathcal{O}_y$ obtemos que

$$K\{\mathcal{O}_y[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n]\} = K\{\mathcal{O}_y\}[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n]$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} K_z &= K\{\mathcal{O}_z\} \simeq K\{\mathcal{O}_{y,z}/\mathcal{A}\} \simeq K\{(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n]\} = \\ &= K\{(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)\}[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n] = (\partial f)^*K\{\mathcal{O}_y\}[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n] = (\partial f)^*K_y[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n]. \end{aligned}$$

Portanto, $K_z \simeq (\partial f)^*K_y[\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n]$ e pelo *Teorema do Elemento Primitivo* [13] existe uma combinação linear $\xi = c_1 \hat{z}_1 + \dots + c_n \hat{z}_n$ tal que

$$K_z \simeq (\partial f)^*(K_y)[\xi]$$

Fazendo uma mudança de coordenadas podemos supor $\xi = z_1$ de modo que

$$K_z \simeq (\partial f)^*(K_y)[z_1]$$

Seja p polinômio irredutível com coeficientes em $(\partial f)^*(K_y)$ tal que $p(z_1) = 0$. Como z_1 é combinação linear dos $\hat{z}_j$, $j = 1, \dots, n$, temos que z_1 satisfaz uma equação polinomial com coeficientes em $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$. Logo cada coeficiente de p também satisfaz uma tal equação [13, pag. 240].

Mas como $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ é integralmente fechado, por ser domínio de fatorização única, isto implica que cada coeficiente de p pertence a $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$.

Temos que $[K_z = (\partial f)^*(K_y)[z_1] : (\partial f)^*(K_y)] = \mu_a = \text{grau de } p$.

De fato, suponhamos que grau de $p = d$. Sabemos que $\{1, z_1, \dots, z_1^{d-1}\}$ é uma base de K_z sobre K_y , logo são linearmente independentes sobre $(\partial f)^*(K_y)$ e, portanto linearmente independentes sobre $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$.

Como $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$ -módulo livre de posto μ_a , segue que $d \leq \mu_a$.

Seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu_a}\}$ base de $\mathcal{O}_z$ como $\mathcal{O}_y$ -módulo livre. Sejam $a_i, b_i \in \mathcal{O}_y$ temos que

$$\sum_{i=1}^{\mu_a} \frac{a_i}{b_i} \alpha_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0,$$

ou seja, α_i são linearmente independentes sobre K_y isto implica em $\mu_a \leq d$.

Portanto, $\mu_a = d$.

Assim, existem funções $A_0, \dots, A_{\mu_a-1}$ pertencentes a $\mathcal{O}_y$ tais que

$$p(z_1) = z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) z_1^j = 0$$

Agora, sejam a e b pontos distintos tais que $\partial f(a) = \partial f(b) = y$. Consideremos a função coordenada $z_j(z) = z_j$. Temos que cada z_j pertence a K_z , logo

$$z_j(z) = z_j = \sum_k \Gamma_{jk} (\partial f(z)) z_1(z)^k, \text{ para } j = 2, \dots, n$$

Afirmamos que $z_1(a) \neq z_1(b)$. De fato, suponhamos que $z_1(a) = z_1(b)$. Como $a \neq b$ existe um j tal que $z_j(a) \neq z_j(b)$ mas,

$$z_j(a) = a_j = \sum_k \Gamma_{jk} (\partial f(a)) z_1(a)^k = \sum_k \Gamma_{jk} (\partial f(b)) z_1(b)^k = z_j(b) = b_j$$

o que é uma contradição.

Pelo Teorema 2.4, para y suficientemente próximo de 0, valor regular de ∂f a equação $\partial f(z) - y = 0$ possui exatamente μ_g soluções cada uma delas dando origem a uma solução distinta da equação polinomial

$$z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j(y) z_1^j = 0$$

Logo, $\mu_g \leq \mu_a$.

Por outro lado olhando para a subvariedade analítica de $\mathbb{C}^{n+1}$ definida por

$$\{(y_1, \dots, y_n, z_1) : z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j(y) z_1^j = 0\}$$

Ainda, se y é tal que existem μ_a soluções para a equação, então existem μ_a pontos distintos na pré-imagem de y por ∂f , isto porque fixados z_1 e y existe um único ponto $(z_1, z_2(z_1, y), \dots, z_n(z_1, y))$ tal que $\partial f(z_1, z_2(z_1, y), \dots, z_n(z_1, y)) = y$, logo $\mu_a \leq \mu_g$.

Portanto $\mu_a = \mu_g$.

□

Capítulo 5

Cálculo do Número de Milnor

O objetivo deste capítulo é calcular o número de Milnor, μ , de germes quase-homogêneos, tendo na origem uma singularidade isolada.

O resultado principal, Teorema 5.1 é devido a Milnor e Orlik [4].

Definição 5.1 *Sejam $w_1, \dots, w_n$ números racionais positivos. Um polinômio $f(z_1, \dots, z_n)$ é dito quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n)$ se ele pode ser expresso como combinação linear de monômios $z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ tal que*

$$\frac{i_1}{w_1} + \dots + \frac{i_n}{w_n} = 1$$

Lema 5.1 *Se uma aplicação polinomial $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é tal que sua i -ésima componente é um polinômio homogêneo de grau d_i , e se $G^{-1}(0) = 0$ então o grau local de G em 0 é igual a $d_1 \dots d_n$.*

Demonstração:

As hipersuperfícies G_i^{-1} estendem-se a hipersuperfícies projetivas $H_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de mesmo graus. A multiplicidade de intersecção de $H_1, \dots, H_n$ é igual ao produto $d_1 \dots d_n$ dos graus. Mas a intersecção $H_1 \cap \dots \cap H_n$ claramente consiste de um único ponto $0 \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

□

Teorema 5.1 *Seja $f(z_1, \dots, z_n)$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n)$, tendo na origem uma singularidade isolada. Então*

$$\mu = (w_1 - 1)(w_2 - 1) \dots (w_n - 1)$$

Demonstração:

Expressemos cada peso w_i , como fração irredutível $w_i = u_i/v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Seja $d = [u_1, \dots, u_n]$ o mínimo múltiplo comum dos u_i e $q_i = d/w_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dado $G(z_1, \dots, z_n) = (z_1^{q_1}, \dots, z_n^{q_n})$, temos que $f \circ G$ é homogêneo de grau d , pois como f é combinação linear de monômios $z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n}$, o grau de cada parcela de $f \circ G$ é dado por

$$i_1 q_1 + \dots + i_n q_n = i_1 \frac{d}{w_1} + \dots + i_n \frac{d}{w_n} = d \left(\frac{i_1}{w_1} + \dots + \frac{i_n}{w_n} \right) = d$$

Logo cada i -ésima componente de $\partial f \circ G$ é um polinômio homogêneo de grau $d - q_i$. De fato, temos que o grau de cada parcela da i -ésima componente de $\partial f \circ G$ é dado por

$$i_1 q_1 + \dots + (i_i - 1) q_i + \dots + i_n q_n = d \left(\frac{i_1}{w_1} + \dots + \frac{i_n}{w_n} \right) - q_i = d - q_i$$

Portanto, pelo Lema 5.1, $\text{grau}(\partial f \circ G) = (d - q_1) \dots (d - q_n)$. Por outro lado $\text{grau}(\partial f \circ G) = \text{grau}(\partial f) \text{grau}(G)$ portanto,

$$\mu_g(f) = \text{grau}(\partial f) = \frac{(d - q_1)}{q_1} \dots \frac{(d - q_n)}{q_n} = (w_1 - 1) \dots (w_n - 1)$$

como queríamos.

□

Exemplo 5.1 Os polinômios de Brieskorn

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n}$$

são quase-homogêneos do tipo $(a_1, \dots, a_n)$.

Portanto, $\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1)$.

Exemplo 5.2 Seja $f(z, w) = z^2 + w^5$. Temos que f é um polinômio quase-homogêneo do tipo $(2, 5)$.

$$\text{Portanto, } \mu = (2 - 1)(5 - 1) = 4.$$

Exemplo 5.3 Seja $f(z, w) = z^2w + w^4$. Temos que f é um polinômio quase-homogêneo do tipo $(8/3, 4)$.

$$\text{Portanto, } \mu = (8/3 - 1)(4 - 1) = 5.$$

Bibliografia

- [1] MILNOR, J. [1968]. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Annals of Math. Studies, 61, Princeton.
- [2] MILNOR, J. [1963]. *Morse Theory*. Annals of Math. Studies, 51, Princeton.
- [3] MILNOR, J. [1965]. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia.
- [4] MILNOR, J.; ORLIK, P. [1970]. *Isolated Singularities Defined by Weighted Homogeneous Polynomials*. Topology, vol. 9, pp. 385-393 Pergamon Press. Printed in Great Britain.
- [5] CARNEIRO, M. J. D.; SOARES, M. G. [1985]. *Introdução à Topologia de Singularidades Complexas*. 15^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.
- [6] GIBSON, C. G. [1979]. *Singular Points of Smooth Mappings*. Research Notes in Mathematics, 25. London, Pitman.
- [7] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. [1973]. *Stable Mappings and their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics, 14. Springer-Verlag, New York.
- [8] SPANIER, E. [1966]. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill.
- [9] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. [1974]. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] MASSEY, W. S. [1977]. *Algebraic Topology: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics, 56. Springer-Verlag, New York.
- [11] MAC LANE, S. [1963]. *Homology*. G.M.W., 114. Springer-Verlag, Berlin.
- [12] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. [1978]. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons Inc.
- [13] LANG, S. [1965]. *Algebra*. Addison-Wesley, Publishing Company.

- [14] NAGATA, M. [1975]. *Local Rings*. Robert E. Krieger Publishing Company Huntington, New York.
- [15] STEENROD, N. [1951]. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Pres.
- [16] LIMA, E. L. [1977]. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas.
- [17] TRÁNG, L. D. [1973]. *Topologie des Singularites des Hypersurfaces Complexes*. Asterisque 7 e 8, pp. 171-182.
- [18] TRÁNG, L. D.; RAMANUJAM, C. P. [1976]. *The Invariance of Milnor's Number Implies the Invariance of the Topological Type*. American Journal of Mathematics, vol. 98, N^o 1, pp. 67-78.
- [19] TIMOURIAN, J. G. [1977]. *The Invariance of Milnor's Number Implies the Topological Triviality*. American Journal of Mathematics, vol. 99, N^o 2, pp.437-446.
- [20] MOND, D. [1987]. *Somes Remarks on the Geometry and Classification of Germs of Maps from Surfaces to 3-space*. Topology 26, pp. 361-383.
- [21] MARAR, W. L.; MOND, D. [1989]. *Multiple Point Schemes for Corank 1 Maps*. Journal of the London Mathematical Society (2) 39, pp. 553-567.