Um Estudo de Algumas Classes Específicas
de Equações Diferenciais Retardadas
◦ Surgem em Modelos Biológicos

MARCOS ROBERTO TEIXEIRA PRIMO

Orientador: PROF. DR. HERMINIO CASSAGO JUNIOR

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de
São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título
de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Agosto de 1993

À minha família

Agradecimentos ¹

Ao Herminio pelo incentivo, pelos conselhos, pela dedicação , pela calma e pela forma segura com que sempre nos orientou durante o desenvolver deste trabalho.

À Sandra pela sua dedicação , pelos conselhos e pelo impulso para trabalhar nesta Dissertação .

À minha família pelo apoio durante os momentos mais difíceis destes anos.

A todos os meus colegas de Universidade, especialmente ao Antonio, ao Wladimir (Di), ao João e ao Vanderlei pelo incentivo e apoio durante a realização do Mestrado, e pela paciência com que me suportaram durante todos esses anos.

A todos os professores com os quais tive o prazer de trabalhar.

À Beth e a Laura pelo zelo com que sempre tratam dos nossos assuntos acadêmicos.

A todos os funcionários pela disposição com que sempre nos atenderam.

Enfim, agradeço a todos que direta, ou indiretamente, cooperaram para a realização deste trabalho. Desde já, peço desculpas às pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

Abstract

The perturbed differential-delay equation

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)) \quad (0.1)$$

is studied for functions like $f(x) = x^3 - \mu x$, $f(x) = -\mu[\text{sen}(x + \theta) - \text{sen}(\theta)]$, $f(x) = \mu x^\nu e^{-x}$ and $f(x) = \mu x(1 - x^2)$. With these functions, such equation arises in biological phenomena. Under some hypotheses on f , the equation (0.1) has periodic solutions which oscillate about a fixed point x_0 and converges to a function like a "square-wave" as $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Our aim is to give some results that help in verifying these hypotheses, and then apply these results to the specific functions.

Resumo

A equação diferencial com retardamento

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)) \quad (0.1)$$

é estudada para funções como $f(x) = x^3 - \mu x$, $f(x) = -\mu[\text{sen}(x + \theta) - \text{sen}(\theta)]$, $f(x) = \mu x^\nu e^{-x}$ e $f(x) = \mu x(1 - x^2)$. Com estas funções, a equação (0.1) aparece em fenômenos biológicos. Sob algumas hipóteses em f , a equação (0.1) possui soluções periódicas que oscilam em torno de um ponto fixo x_0 e que convergem para uma função do tipo "onda quadrada", quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Nosso objetivo é dar alguns resultados que ajudam a verificação de tais hipóteses, e depois aplicá-los às específicas funções.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Existência de soluções periódicas	3
1.2 Comportamento assintótico de soluções periódicas	8
1.3 A derivada Schwarziana	16
2 Condições para que as hipóteses sobre f sejam satisfeitas	22
2.1 Hipóteses sobre f	22
2.2 Condições para que uma função f satisfaça (I), (II), e (III) . . .	32
3 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para funções específicas	51
3.1 Funções específicas f_k	51
3.2 As condições (NS_1) e (NS_2) para as funções f_k	56
3.3 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_1	59
3.4 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_2	63
3.5 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_3	66
4 Um modelo originado em Biologia	86
4.1 O modelo	86

4.2	As condições (NS_1) e (NS_2) para f	88
4.3	Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f	90
4.4	Conclusões	98
Bibliografia		100

Lista de Figuras

0.1	Gráfico da função $f = \mu \bar{f}$	2
1.1	Solução periódica que oscila lentamente com período mínimo $\bar{q}$. .	5
1.2	S-solução com período $\bar{q} = 2q$	7
1.3	Uma solução periódica que oscila lentamente satisfazendo a Propriedade M	9
1.4	Soluções das equações camadas de transição no Corolário 1.2 . . .	13
1.5	Solução periódica que oscila lentamente com f monótona	15
1.6	Solução periódica que oscila lentamente com fenômeno de Gibbs .	16
2.1	Gráfico de uma função satisfazendo (PM) com $\xi = \alpha = \infty$	25
2.2	Gráfico da função f_*	27
2.3	Gráfico de f^2 com $f(\xi) \geq -\eta$	45
2.4	Gráfico de f^2 com $f(\xi) < -\eta$	46
3.1	Gráfico da função f_1	52
3.2	Gráfico da função f_2	53
3.3	Gráfico da função f_3 com ponto fixo x_0	53
3.4	Gráfico de uma função $f = \mu \bar{f}$ satisfazendo (PM) com $x_2 = \theta$ e $x_3 = x_4 = \infty$	68

4.1	Gráfico de f com z par	87
4.2	Gráfico de f com z ímpar	88

Introdução

A equação diferencial retardada

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \quad (0.1)$$

com $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, que surge em vários modelos usados em Óptica, Biologia e Fisiologia, tem sido estudada por muitos autores, veja [2], [5], [11] e [12]. No Capítulo 1, enunciamos vários resultados que dizem respeito à existência e comportamento assintótico de soluções periódicas da equação (0.1), estabelecidos por Mallet-Paret e Nussbaum em [13]. Não demonstraremos nenhum deles, pois não é o objetivo deste trabalho. Entretanto para obtermos tais resultados, é necessário que a função f da equação (0.1) satisfaça várias hipóteses, as quais podem não serem de fácil verificação. Mallet-Paret e Nussbaum em [14] demonstraram vários resultados que facilitam a verificação dessas hipóteses. O objetivo deste trabalho é estudar com detalhes estes resultados, e aplicá-los para um determinado modelo originado em Biologia. Ainda, no Capítulo 1 demonstraremos alguns resultados importantes sobre a condição "Derivada Schwarziana", e daremos algumas condições para uma função f qualquer possuir Derivada Schwarziana negativa.

No Capítulo 2, fazemos um estudo detalhado dos resultados obtidos por Mallet-Paret e Nussbaum em [14], os quais fornecem condições necessárias e suficientes para determinadas funções f satisfazerem as hipóteses exigidas no Capítulo 1. Mas, para isso precisaremos assumir que tais funções possuam derivada Schwarziana negativa, uma propriedade relativamente mais fácil de ser verificada do que as hipóteses exigidas no Capítulo 1.

No Capítulo 3, aplicaremos os resultados obtidos no Capítulo 2 para algumas funções específicas:

$$f_1(x) = x^3 - \mu x,$$

$$f_2(x) = -\mu[\text{sen}(x + \theta) - \text{sen}(\theta)],$$

$$f_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}, x \geq 0.$$

Determinaremos os valores do parâmetro μ para os quais as funções f_k satisfazem as hipóteses exigidas no Capítulo 1, com algumas restrições do parâmetro ν . Para obtermos esses valores para a função f_3 , demonstraremos primeiramente alguns resultados gerais para que funções $f = \mu \bar{f}$, que tenham a mesma forma do gráfico da Figura 0.1, satisfaçam as hipóteses do Capítulo 1. Então aplicamos estes resultados para a função f_3 .

Figura 0.1: Gráfico da função $f = \mu \bar{f}$

No Capítulo 4, aplicamos os resultados dos Capítulos 2 e 3 para determinar quando a função

$$f(x) = \mu x(1 - x^2) \tag{0.2}$$

satisfaz as hipóteses exigidas no Capítulo 1. A função f em (0.2), quando usada na equação (0.1), é o modelo usado pela "Comissão Internacional da Pesca da Baleia". Para maiores detalhes veja [15].

Considerando uma aplicação $\psi : (a, b) \rightarrow (c, d)$, de classe C^3 com $\psi'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, Mallet-Paret e Nussbaum demonstraram que uma função f satisfaz as hipóteses exigidas no Capítulo 1 se, e somente, se $\psi^{-1}f\psi$ também satisfizer. Podemos dessa forma aplicar os resultados estudados aqui para uma grande quantidade de funções.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos a equação cujo estudo será o objetivo central deste capítulo. Enunciaremos alguns resultados, os quais se encontram demonstrados em [13], que dizem respeito à existência e comportamento assintótico de soluções periódicas. Será introduzido o conceito de derivada Schwarziana com algumas propriedades que serão de fundamental importância no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

1.1 Existência de soluções periódicas

A equação diferencial com retardamento

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \quad \varepsilon > 0 \quad (1.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tem sido muito estudada, devido às suas aplicações em modelos biológicos.

Notemos inicialmente que esta equação é equivalente à equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad \lambda > 0. \quad (1.2)$$

Nos resultados desta seção e da seção seguinte precisaremos geralmente assumir que a função f satisfaça algumas condições, que passamos agora a enunciar.

(H_1) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Existem constantes positivas A e B tais que

$$f([-B, A]) \subseteq [-B, A]$$

e

$$xf(x) < 0 \text{ se } x \in [-B, A], x \neq 0.$$

(H_2) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, satisfaz $f(0) = 0$ e é diferenciável em $x = 0$ com

$$-f'(0) = k, \quad k > 1$$

Além disso, f é monótona decrescente em alguma vizinhança de $x = 0$.

(H_3) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (H_1) e, além disso, existem constantes positivas $a \leq A$ e $b \leq B$, tais que se $x_0 \in (0, A]$ e $x_n = f^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de x_0 pela função f para cada $n > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = -b$$

Notemos que todas as condições acima assumem que $f(0) = 0$, mas no estudo de algumas funções teremos um ponto fixo não nulo $x_0 = f(x_0)$ e neste caso tomando $\bar{f}(x) = f(x + x_0) - x_0$ podemos assumir, sem perda da generalidade, que $x = 0$ é o ponto fixo em questão.

Vamos agora enunciar um resultado que garante a existência de uma classe de soluções periódicas da equação (1.1), que se encontra demonstrado em [13]. Antes, porém, precisamos de alguns conceitos e notações.

Definição 1.1 *Uma solução $x(t)$ de (1.1) é uma solução periódica que oscila lentamente se existirem números $q > 1$ e $\bar{q} > q + 1$, tais que*

$$x(0) = 0,$$

$$x(t) > 0 \text{ quando } 0 < t < q,$$

$$x(t) < 0 \text{ quando } q < t < \bar{q} \text{ e}$$

$$x(t + \bar{q}) = x(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O número $\bar{q}$ da Definição 1.1 será chamado de *período mínimo*. A figura abaixo ilustra uma solução periódica que oscila lentamente .

Figura 1.1: Solução periódica que oscila lentamente com período mínimo $\bar{q}$

Para cada $\lambda > 0$, sejam os conjuntos

$$K = \{\psi \in C[0, 1] : \psi(0) = 0 \text{ e } \psi(t) \geq 0 \text{ para } t \in [0, 1]\},$$

$$K_\lambda = \{\psi \in K : \exp(\lambda t) \text{ é monótona crescente em } [0, 1]\}$$

e consideremos os números positivos q e $\bar{q}$, definidos por

$$q = q(\lambda, \varphi) = \inf\{t > 1 : x(t; \lambda, \varphi) = 0\}$$

e

$$\bar{q} = \bar{q}(\lambda, \varphi) = \inf\{t > q + 1 : x(t; \lambda, \varphi) = 0\},$$

onde $x(t; \lambda, \varphi)$ é uma solução da equação (1.2) com $x|_{[0,1]} = \varphi$ e satisfazendo as três primeiras condições da Definição 1.1. Podemos agora definir, para cada $\lambda > 0$, o operador $\Psi_\lambda : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$, como segue. Se $\varphi \in K_\lambda$ e $\bar{q}(\lambda, \varphi)$ estiver definido, então seja

$$(\Psi_\lambda \varphi)(t) = x(t + \bar{q}; \lambda, \varphi) \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Se $\bar{q}$ não está definido (em particular se φ é a função nula), consideremos

$$(\Psi_\lambda \varphi)(t) = 0 \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

As soluções periódicas que oscilam lentamente correspondem a pontos fixos do operador Ψ_λ . Definindo o conjunto

$$\Sigma = \{(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K : \varphi \in K_\lambda - \{0\} \text{ e } \Psi_\lambda(\varphi) = \varphi\} \quad (1.3)$$

e considerando ν_0 e λ_0 soluções de

$$\cos(\nu_0) = \frac{1}{-k}, \quad \nu_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \text{e} \quad \lambda_0 = \frac{\nu_0}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad (1.4)$$

onde $k = f'(0)$, podemos então enunciar o

Teorema 1.1 *Suponhamos que a função f satisfaça a hipótese (H_1) e seja diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = -k$, onde $k > 1$. Consideremos o conjunto $\Sigma \subseteq (0, \infty) \times K$ definido em (1.3) e λ_0 dado em (1.4). Então temos os seguintes resultados*

(i) *Existe $\delta > 0$ tal que se $(\lambda, \varphi) \in \Sigma$, então $\lambda \geq \delta$ e $\|\varphi\| \leq A$ (onde A é dado na hipótese (H_1) e $\|\cdot\|$ denota a norma do sup).*

(ii) *O fecho $\bar{\Sigma}$ de Σ em $(0, \infty) \times K$ é*

$$\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{(\lambda_0, 0)\}.$$

(iii) *Seja $\Sigma_0 \subset \bar{\Sigma}$ a maior componente conexa de $\bar{\Sigma}$ contendo $(\lambda_0, 0)$. Então Σ_0 é um subconjunto ilimitado de $(0, \infty) \times K$.*

(iv) *Para cada $\lambda > \lambda_0$ existe uma solução periódica que oscila lentamente $x(t)$ da equação (1.2) tal que $(\lambda, \varphi) \in \Sigma_0$ satisfazendo*

$$-B \leq x(t) \leq A, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

com A e B dados na hipótese (H_1) .

Se a função $f(x)$ é ímpar, é natural olhar para as soluções periódicas que oscilam lentamente $x(t)$ de (1.1) satisfazendo

$$x(t + q) = -x(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

onde $q > 0$ é o primeiro zero da solução $x(t)$.

Definição 1.2 *Uma solução periódica que oscila lentamente é chamada uma S - solução se ela satisfaz as quatro condições da Definição 1.1 e além disso, satisfaz (1.5).*

A figura abaixo ilustra uma S-solução com período $\bar{q}$.

Figura 1.2: S-solução com período $\bar{q} = 2q$

Suponhamos agora que f é uma função ímpar satisfazendo (H_1) com $A = B$. Para cada $\varphi \in K_\lambda$ e $\lambda > 0$, definamos o operador $S_\lambda : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ por

$$(S_\lambda \varphi)(t) = -x(t + q(\lambda, \varphi); \lambda, \varphi) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

se $q(\lambda, \varphi)$ está definido, e

$$(S_\lambda \varphi)(t) = 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

se $q(\lambda, \varphi)$ não está definido. As S-soluções correspondem então a pontos fixos do operador S_λ . Definindo

$$S = \{(\lambda, \varphi) \in (0, \infty) \times K : \varphi \in K_\lambda - \{0\} \text{ e } S_\lambda(\varphi) = \varphi\}$$

podemos então, enunciar um resultado análogo ao Teorema 1.1 para S-soluções .

Teorema 1.2 *Suponhamos que f esteja nas condições do Teorema 1.1, e que f seja uma função ímpar, com $A = B$ na hipótese (H_1) . Então as conclusões do Teorema 1.1 são válidas com Σ , Σ_0 e soluções periódicas que oscilam lentamente trocados por S , S_0 e S-soluções respectivamente.*

1.2 Comportamento assintótico de soluções periódicas

O objetivo desta seção é descrever o comportamento assintótico de soluções periódicas que oscilam lentamente da equação (1.1) quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Daremos também uma estimativa para o período mínimo de uma tal solução

Definição 1.3 *Seja $x(t)$ uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1), com primeiro e segundo zeros q e $\bar{q}$ respectivamente. Fixados números $-d < 0 < c$ nós dizemos que $x(t)$ satisfaz a Propriedade M entre $-d$ e c se*

- (1) $x(t)$ é monótona crescente em $[0, \sigma_1]$;
- (2) $x(t) \geq c$ se $\sigma_1 \leq t \leq \tau_1$;
- (3) $x(t)$ é monótona decrescente em $[\tau_1, \sigma_2]$;
- (4) $x(t) \leq -d$ se $\sigma_2 \leq t \leq \tau_2$ e
- (5) $x(t)$ é monótona crescente em $[\tau_2, \bar{q}]$,

onde os números $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ e τ_2 são definidos da seguinte maneira. Sejam $\rho_1 \in (0, q)$ e $\rho_2 \in (q, \bar{q})$ tais que

$$x(\rho_1) = \max\{x(t) : 0 \leq t \leq q\} > 0$$

e

$$x(\rho_2) = \min\{x(t) : q \leq t \leq \bar{q}\} < 0.$$

Se $x(\rho_1) > c$ definimos

$$\sigma_1 = \inf\{t \in [0, q] : x(t) = c\}$$

e

$$\tau_1 = \sup\{t \in [0, q] : x(t) = c\};$$

se $x(\rho_1) \leq c$ definimos $\sigma_1 = \tau_1 = \rho_1$. Analogamente se $x(\rho_2) < -d$ definimos

$$\sigma_2 = \inf\{t \in [q, \bar{q}] : x(t) = -d\}$$

e

$$\tau_2 = \sup\{t \in [q, \bar{q}] : x(t) = -d\},$$

e se $x(\rho_2) \geq -d$ definimos $\sigma_2 = \tau_2 = \rho_2$.

A figura abaixo descreve uma solução satisfazendo a Propriedade M entre $-d$ e c .

Figura 1.3: Uma solução periódica que oscila lentamente satisfazendo a Propriedade M

O próximo teorema implica que a solução periódica que oscila lentamente obtida no Teorema 1.1 satisfaz a Propriedade M para alguns $-d$ e c independentemente de ε .

Teorema 1.3 *Suponhamos que A e B são números positivos e $f : [-B, A] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que*

$$xf(x) < 0 \text{ se } x \in [-B, A] - \{0\}.$$

Suponhamos além disso que existam números positivos $c \leq A$ e $d \leq B$ e uma constante $\gamma > 1$ tais que

- (1) f é monótona decrescente em $[-d, c]$;
- (2) $f(x) \geq c$ se $-B \leq x \leq -d$ e $f(x) \leq -d$ se $c \leq x \leq A$, e
- (3) $|f(f(x))| \geq \gamma|x|$ quando $-d \leq x \leq c$ e a composição estiver definida.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x(t)$ uma solução periódica que oscila lentamente de (1.1) que satisfaz $-B \leq x(t) \leq A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $x(t)$ satisfaz a Propriedade M entre $-d$ e c .

Observemos que se a condição (1) no Teorema 1.3 é substituída por uma condição mais forte

f é estritamente decrescente em $[-d, c]$,

então nós obtemos a conclusão mais forte que $x(t)$ satisfaz a Propriedade M e além disso,

$x(t)$ é estritamente crescente em $[0, \sigma_1]$, estritamente decrescente em $[\tau_1, \sigma_2]$, e estritamente crescente em $[\tau_2, \bar{q}]$.

Notemos ainda que se além das hipóteses do Teorema 1.3, assumirmos que

f é diferenciável em $(-d, c)$, com $f'(x) < 0$, se $x \in (-d, c)$,

então obtemos a mesma conclusão do Teorema 1.3 satisfazendo

$$\dot{x}(t) > 0 \text{ em } [0, \sigma_1) \cup (\tau_2, \bar{q}]$$

e

$$\dot{x}(t) < 0 \text{ em } (\tau_1, \sigma_2).$$

O próximo resultado descreve um importante caso especial do Teorema 1.3 que ocorre quando a função f é monótona em toda extensão de uma solução periódica que oscila lentamente. Tal solução possui então a propriedade de monotonicidade, veja a Figura 1.2.

Corolário 1.1 *Suponhamos que A e B são números positivos e $f : [-B, A] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que $xf(x) < 0$ se $x \in [-B, A]$ e $x \neq 0$. Suponhamos além disso, que f seja não crescente em $[-B, A]$ e satisfaça $|f(f(x))| > |x|$ se $x \in (-B, A)$, $x \neq 0$ e $f(x) \in [-B, A]$. Suponhamos também que*

$$\liminf_{|x| \rightarrow 0} \frac{|f(f(x))|}{|x|} > 1.$$

Então se $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente de (1.1) para algum $\varepsilon > 0$, e se $-B \leq x(t) \leq A$ para todo t , existe $p \in (0, q)$ e $\bar{p} \in (q, \bar{q})$ tais que $x(t)$ é monótona crescente em $[0, p]$, monótona decrescente em $[p, \bar{p}]$ e monótona crescente em $[\bar{p}, \bar{q}]$ (como antes q e $\bar{q}$ são o primeiro e o segundo zeros respectivamente de $x(t)$).

Nosso próximo resultado garante que se f satisfaz (H_1) e (H_2) então o período mínimo $\bar{q}$ de toda solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1) é menor que $2(1 + \bar{C}\varepsilon)$ para alguma constante $\bar{C} > 0$ independente de ε .

Teorema 1.4 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_1) e (H_2) . Então existem constantes positivas C e $\bar{C}$ tais que se $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente de (1.1) para algum $\varepsilon > 0$, então seus dois primeiros zeros q e $\bar{q}$ satisfazem*

$$1 < q < 1 + C\varepsilon,$$

e

$$2 < \bar{q} < 2(1 + \bar{C}\varepsilon).$$

As constantes C e $\bar{C}$ dependem somente de f , e não dependem de ε e nem da solução $x(t)$.

Para estudarmos melhor o comportamento assintótico da equação (1.1) para valores pequenos de ε , faremos uso de um sistema associado de equações diferenciais,

$$\dot{y}(t) = y(t) - f(z(t - r)) \tag{1.6}$$

e

$$\dot{z}(t) = z(t) - f(y(t - r)) \tag{1.7}$$

onde o número $r \geq 0$ é um parâmetro que está relacionado com o período mínimo $\bar{q}$.

Definição 1.4 *As equações (1.6) e (1.7) são chamadas de equações de camada de transição, associadas a equação (1.1).*

Com o auxílio das equações camadas de transição vamos agora enunciar alguns resultados que mostram a convergência de uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1) com $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Antes porém introduzimos uma pequena notação. Se q e $\bar{q}$ e ε são números reais positivos e $\bar{q} > q$, definamos o conjunto

$$N(q, \bar{q}, \varepsilon) = [0, \varepsilon] \cup [q - \varepsilon, q + \varepsilon] \cup [\bar{q} - \varepsilon, \bar{q}].$$

Teorema 1.5 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_1) e (H_2) . Sejam c e d constantes positivas satisfazendo as condições do Teorema 1.3 para algum $\gamma > 1$ e sejam c_0 e d_0 constantes positivas tais que*

$$c_0 < c \text{ e } d_0 < d$$

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1), então

$$\max_t x(t) > c_0 \text{ e } \min_t x(t) < -d_0.$$

Além disso, existe uma constante $K > 0$ tal que se $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1) para algum $\varepsilon > 0$, então

$$\{t \in [0, \bar{q}] : -d_0 \leq x(t) \leq c_0\} \subseteq N(q, \bar{q}, K\varepsilon),$$

onde q e $\bar{q}$ são os dois primeiros zeros de $x(t)$. As constantes ε_0 e K dependem de c_0 e d_0 , mas não dependem da solução $x(t)$. Além disso K não dependem de ε .

O seguinte corolário descreve o comportamento de soluções periódicas que oscilam lentamente nas camadas de transição quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Corolário 1.2 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_1) e (H_2) e sejam c e d constantes positivas satisfazendo as condições do Teorema 1.3 para algum $\gamma > 1$. Seja $x_n(t)$ uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1) com $\varepsilon = \varepsilon_n$ para alguma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$, e definamos $r_n > 0$ por $\bar{q}_n = 2(1 + \varepsilon_n r_n)$, onde $\bar{q}_n$ é o período mínimo de $x_n(t)$. Então, tomando uma subsequência se necessário, temos*

$$x_n(-\varepsilon_n t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(t) \text{ e } x_n\left(\frac{1}{2}\bar{q}_n - \varepsilon_n t\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z(t) \quad (1.8)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ para algumas funções C^1 , $y(t)$ e $z(t)$. Além disso, temos a convergência das primeiras derivadas com respeito à t em (1.8), e as funções $(y(t), z(t))$ satisfazem as equações camada de transição (1.6) e (1.7), para todo $t \in \mathbb{R}$, onde

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \text{ é estritamente positivo.}$$

Ainda, as soluções $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem

$$-B \leq y(t), z(t) \leq A, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e temos as propriedades assintóticas

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} y(t) \text{ e } \liminf_{t \rightarrow -\infty} z(t) \geq c,$$

$$\limsup_{t \rightarrow -\infty} y(t) \text{ e } \limsup_{t \rightarrow -\infty} z(t) \leq -d,$$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \text{ e } \limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) > c,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \text{ e } \liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) < -d.$$

Finalmente, $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem as condições de monotonicidade

$$-d < y(t) < c \Rightarrow \dot{y}(t) \leq 0$$

e

$$-d < z(t) < c \Rightarrow \dot{z}(t) \geq 0.$$

A figura 1.3 descreve as soluções $y(t)$ e $z(t)$ das equações camada de transição obtidas neste corolário.

Figura 1.4: Soluções das equações camadas de transição no Corolário 1.2

O corolário seguinte é um refinamento do Teorema 1.5.

Corolário 1.3 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_1) e (H_2) , e sejam c e d constantes positivas satisfazendo as condições do Teorema 1.3 para algum $\gamma > 1$. Consideremos I um intervalo contendo a origem, tal que f seja diferenciável em cada $x \in I$ e satisfaça*

$$x \in I \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Consideremos J um intervalo compacto tal que

$$0 \in J \subseteq (-d, c) \cup f(I) \cup f(f(J)).$$

Então existem constantes positivas ε_0 e K tais que se $x(t)$ é uma solução periódica que oscila lentamente da equação (1.1) para algum $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então

$$x(t) \in J \Rightarrow |\dot{x}(t)| \geq \frac{1}{K\varepsilon}.$$

Os dois próximos resultados descrevem a convergência de uma solução periódica que converge lentamente para uma função onda quadrada.

Corolário 1.4 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_1) e (H_2) , e que além disso, f é monótona decrescente em $[-B, A]$ e satisfaz $|f(f(x))| > |x|$ quando $x \in (-B, A)$ e $x \neq 0$. Sejam $y(t)$ e $z(t)$ como no Corolário 1.2. Então $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem as condições de monotonicidade*

$$\dot{y}(t) \leq 0 \text{ e } \dot{z}(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

e possuem os limites

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (A, -B) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (-B, A).$$

Corolário 1.5 *Suponhamos que f satisfaça as hipóteses (H_2) e (H_3) . Sejam $y(t)$, $z(t)$ e r como no Corolário 1.2. Então, com a e b dados em (H_3) , temos*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t), z(t)) = (a, -b) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t), z(t)) = (-b, a).$$

Observemos que

(1) Sob as hipóteses do Corolário 1.4, vemos o sentido no qual uma solução periódica que oscila lentamente $x(t)$ se aproxima da função onda quadrada

$$sqw(t) = \begin{cases} A & \text{se } 2n < t < 2n + 1, \\ -B & \text{se } 2n + 1 < t < 2n + 2 \end{cases}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Isto segue do Corolário 1.4 e do fato que para toda constante $c < A$ e $d < B$ a solução $x(t)$ satisfaz a Propriedade M entre $-d$ e c . Na verdade, $x(t)$ tem a forma simples da figura 1.3 .

Figura 1.5: Solução periódica que oscila lentamente com f monótona

(2) Se f satisfaz (H_2) e (H_3) o Corolário 1.5 garante que os limites das equações camada de transição $(y(t), z(t))$ existem, quando $t \rightarrow \pm\infty$, mas a existência de tais limites não garante informações de como uma solução periódica que oscila lentamente se comporta longe das camadas de transição quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Não podemos portanto concluir que $x(t)$ está próximo de

$$sqw(t) = \begin{cases} a & \text{se } 2n < t < 2n + 1, \\ -b & \text{se } 2n + 1 < t < 2n + 2 \end{cases}$$

em subconjuntos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Na realidade pode surgir uma convergência similar ao fenômeno de Gibbs de séries de Fourier clássicas, como ilustra a figura abaixo .

Figura 1.6: Solução periódica que oscila lentamente com fenômeno de Gibbs

1.3 A derivada Schwarziana

Para finalizar, nesta seção introduziremos o conceito de derivada Schwarziana, demonstraremos algumas propriedades e daremos algumas condições para uma função ter derivada Schwarziana negativa. Começemos com a

Definição 1.5 A derivada Schwarziana Sf de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ em um intervalo I é definida pela função

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2, \quad (1.9)$$

nos pontos $x \in I$ onde f é três vezes diferenciável e $f'(x) \neq 0$. Em todos os outros pontos Sf não está definida.

A proposição seguinte resume alguns resultados conhecidos sobre a derivada Schwarziana. Para maiores detalhes veja [10] e [17].

Proposição 1.1 *Consideremos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas sobre intervalos I e J . Então*

$$(i) \ S(g \circ f)(x) = Sf(x) + [f'(x)]^2 Sg(f(x)),$$

$$(ii) \ S(g \circ f)(x) < 0 \text{ se } Sf(x) < 0 \text{ e } Sg(f(x)) < 0,$$

quando Sf está definido em $x \in I$ e Sg está definido em $f(x) \in J$.

Ainda, se m é a transformação de Möbius

$$m(x) = \frac{c_1 x + c_2}{c_3 + c_4}, \quad c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0,$$

então

$$(iii) \ Sm(x) = 0 \text{ onde estiver definida e, portanto}$$

$$S(m \circ f)(x) = Sf(x)$$

se Sf está definida em $x \in I$ e $c_3 f(x) + c_4 \neq 0$.

$$(iv) \ (\frac{d^2}{dx^2})(|f'(x)|^{-1/2}) > 0 \text{ se, e somente, se } Sf(x) < 0,$$

$$(v) \ Se \ (\frac{d^2}{dx^2})(\log |f'(x)|) < 0, \text{ então } Sf(x) < 0 \text{ quando } Sf \text{ está definida.}$$

Prova :

Não faremos a demonstração dos itens (i), (ii) e (iii) pois trata-se apenas de alguns cálculos simples, observemos apenas que (ii) e (iii) seguem facilmente de (i). Agora notemos que

$$\frac{d}{dx}(|f'(x)|^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \frac{f'(x)f''(x)}{|f'(x)|^{5/2}}$$

e, portanto

$$\frac{d^2}{dx^2}(|f'(x)|^{-1/2}) = \frac{3(f''(x))^2 - 2f'(x)f'''(x)}{4|f'(x)|^{5/2}}.$$

Logo

$$\frac{d^2}{dx^2}(|f'(x)|^{-1/2}) > 0$$

se, e somente, se

$$3(f''(x))^2 - 2f'(x)f'''(x) > 0,$$

o que demonstra a parte (iv).

Ainda se $h''(x) > 0$ implica

$$\frac{d^2}{dx^2}(\exp(\frac{-1}{2}h(x))) > 0;$$

então tomando $h(x) = -\frac{1}{2} \log |f'(x)|$ obtemos o item (v) de (iv). ■

O seguinte corolário encontra-se demonstrado em [17].

Corolário 1.6 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função três vezes diferenciável em um intervalo aberto I , e suponhamos que*

$$f'(x) \neq 0 \text{ e } Sf(x) < 0 \text{ para todo } x \in I.$$

Então $|f'(x)|$ não atinge um mínimo em I . Isto é, não existe $w \in I$ tal que $|f'(w)| \leq |f'(x)|$ para todo $x \in I$.

Os dois próximos resultados são importantes propriedades de funções com derivada Schwarziana negativa.

Lema 1.1 *Seja $f : I \rightarrow I$ três vezes diferenciável em um intervalo (não necessariamente aberto), com imagem em I , e suponhamos que $Sf(x) < 0$ em cada $x \in I$ para o qual $f'(x) \neq 0$. Suponhamos ainda que para algum $w \in I$ (possivelmente um extremo) temos*

$$f(w) = w \text{ e } |f'(w)| \geq 1.$$

Além disso, suponhamos que

$$f''(w) = 0 \text{ se } f'(w) = 1$$

neste ponto fixo w . Então existe uma vizinhança relativamente aberta $U \subseteq I$, com $w \in U$ tal que

$$f(U) \subseteq U \text{ e } f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w, \text{ para cada } x \in U.$$

Prova :

No caso da desigualdade estrita $|f'(w)| < 1$ é fácil verificar que o conjunto

$$U = (w - \delta, w + \delta) \cap I$$

satisfaz as condições do lema para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. O mesmo conjunto também serve se $f'(w) = 1$, pois por hipótese $f''(w) = 0$ e $Sf(x) < 0$ então devemos ter $f'''(w) = 0$, considerando a função g definida por

$$g(x) = f(x) - x,$$

então

$$g^{(j)}(w) = 0 \text{ se } 0 \leq j \leq 2$$

e

$$g'''(w) < 0.$$

Logo pela fórmula de Taylor

$$g(x) = \frac{g'''(w)(x-w)^3}{6} + r(x-w)$$

com

$$\lim_{x \rightarrow w} \frac{r(x)}{|x-w|} = 0.$$

Logo tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos que se $x \in (w, w + \delta) \cap I$ então $g(x) < 0$ e, portanto $f(x) < x$, e se $x \in (w - \delta, w) \cap I$ então $g(x) > 0$ e, portanto $f(x) > x$. Ainda, como $f'(w) = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } w - \delta \leq x \leq w \leq y \leq w + \delta \text{ então } f(x) \leq w \leq f(y).$$

Segue então que se $x \in (w - \delta, w + \delta) \cap I$, a sequência $x_n = f^n(x)$ é monótona, limitada inferiormente por w se $x \geq w$, e é limitada superiormente por w se $x \leq w$. Assim existe $\xi \in (w - \delta, w + \delta) \cap I$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi$, para todo $x \in (w - \delta, w + \delta) \cap I$. Mas $f(\xi) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \xi$ e, portanto $\xi = w$ pois w é o único ponto fixo de f em $(w - \delta, w + \delta) \cap I$.

No caso restante, quando $f'(w) = -1$, temos

$$\begin{aligned} f^2(w) &= w, \\ (f^2)'(w) &= 1, \\ (f^2)''(w) &= 0. \end{aligned}$$

Pela parte (ii) da Proposição 1.1 temos

$$Sf^2(x) < 0 \text{ sempre que } (f^2)'(x) \neq 0,$$

portanto f^2 satisfaz as hipóteses sobre a função f já consideradas no caso anterior, então existe $U_0 \ni w$ satisfazendo as conclusões do lema para a função f^2 . Deste

fato, temos que o conjunto $U = U_0 \cap f(U_0)$ satisfaz as hipóteses do lema para a função f . ■

Na parte principal deste trabalho precisaremos geralmente assumir que a função f tenha derivada Schwarziana negativa. O próximo resultado dá uma condição, fácil de ser verificada, para uma função ter derivada Schwarziana negativa. Antes porém, daremos algumas propriedades de funções inteiras, que utilizaremos na demonstração da próxima proposição. Seja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ uma função inteira de ordem ω finita. Então f tem a seguinte representação produto

$$f(z) = e^{\Omega(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) E_M\left(\frac{z}{z_n}\right) \right], \quad (1.10)$$

com, no máximo, um número contável de fatores, onde Ω é um polinômio de grau menor ou igual a $[\omega]$, $k \leq 0$ é a multiplicidade de $z = 0$ como raiz de f , os números z_n são as outras raízes de f listadas de acordo com a sua multiplicidade, E_M é a função elementar

$$E_M(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^M \frac{z^n}{n}\right)$$

com $E_0(z) = 1$, para todo z e $M \geq 0$ é um número inteiro satisfazendo $M \leq \omega \leq M + 1$. E além disso, M é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^{M+1}} < \infty \quad (1.11)$$

e o produto infinito converge em subconjuntos compactos de $\mathcal{C}$. Notemos ainda que a ordem da derivada f' é a mesma ordem de f . Para maiores detalhes veja [4].

Proposição 1.2 *Consideremos f uma função inteira de ordem $\omega < 2$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ sempre que $x \in \mathbb{R}$, e tal que todos os zeros da primeira derivada $f'(x)$ são reais. Então ou*

$$Sf(x) < 0 \text{ quando } f'(x) \neq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R},$$

ou f é uma função linear $f(x) = c_0x + c_1$.

Prova :

Como a ordem ω de f' é igual a ordem de f , então $M = 0$ ou $M = 1$ no produto infinito (1.10) para f' . Denotando os zeros de $f'(x)$ por $x_n \in \mathbb{R}$ temos

$$f'(x) = e^{\Omega(x)} x^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right), \text{ ou} \quad (1.12)$$

$$f'(x) = e^{\Omega(x)} x^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) e^{x/x_n} \quad (1.13)$$

onde estamos interessados apenas nos valores reais do argumento x . No caso (1.12) ou no caso (1.13) temos $\Omega''(x) = 0$ para todo x , e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x_n|^2} < \infty \quad (1.14)$$

por (1.11).

Agora suponhamos que f' possua uma raiz; pois caso contrário $f'(x) = e^{\Omega(x)}$ e a proposição é fácil de demonstrar. No primeiro caso (1.12) temos

$$\log |f'(x)| = \Omega(x) + (k-1) \log |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left|1 - \frac{x}{x_n}\right|,$$

então derivando termo-a-termo e usando (1.14) obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \log |f'(x)| = 0 - \frac{(k-1)}{x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|(x - x_n)|^2} < 0 \quad (1.15)$$

para $x \neq x_n$ e $x \neq 0$ se $k > 1$. No segundo caso, (1.13), obtemos a mesma fórmula (1.15). Logo em qualquer caso a parte (v) da Proposição 1.1 implica que $Sf(x) < 0$ quando $f'(x) \neq 0$. ■

Capítulo 2

Condições para que as hipóteses sobre f sejam satisfeitas

No Capítulo 1, enunciamos vários resultados que dizem respeito à existência e comportamento assintótico de uma classe de soluções periódicas da equação (1.1). Entretanto, estes resultados exigem que a função f satisfaça várias hipóteses, que são de difícil verificação, mesmo para funções simples. O objetivo deste capítulo é dar condições necessárias e suficientes, para que a função f satisfaça tais hipóteses. A teoria estudada neste capítulo foi desenvolvida por Mallet-Paret e Nussbaum em [14].

2.1 Hipóteses sobre f

Nesta seção enunciaremos novamente as hipóteses que foram utilizadas no Capítulo 1, mas para facilitar nosso trabalho, o faremos em ordem crescente de restrições sobre a classe de funções. Mostraremos também algumas implicações imediatas. Note que todas as hipóteses assumem a condição $f(0) = 0$. Em geral, as funções de interesse terão um ponto fixo não nulo $x_0 = f(x_0)$, e será necessário transladar este ponto fixo para a origem, como já foi observado na seção 1.1.

(0) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, satisfaz $f(0) = 0$ e é diferenciável em $x = 0$ com

$$f'(0) < -1.$$

Além disso, f é monótona decrescente em alguma vizinhança de $x = 0$.

(I) A função f satisfaz (0) e, além disso, existem números $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$f([-B, A]) \subseteq [-B, A] \quad (2.1)$$

e

$$xf(x) < 0 \text{ se } x \in [-B, A], x \neq 0. \quad (2.2)$$

(II) Existem números A e B tais que (I) é válida, e números positivos $a \leq A$ e $b \leq B$ tais que, se $x_0 \in [-B, A] - \{0\}$ e $x_n = f^n(x_0)$, para cada $n \geq 0$, então

$$f^n(x_0) = x_n \longrightarrow \{-b, a\} \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

(III) Existem números positivos A e B tais que (I) é válida, f é monótona decrescente em $[-B, A]$ e (II) é válida com $a = A$ e $b = B$.

Observação 2.1 A condição (2.2) é usualmente chamada de condição *feedback negativa*.

Observação 2.2 Se f satisfizer (II), então $f(a) = -b$ e $f(-b) = a$. Ainda, se f satisfizer apenas (I), então existem números positivos $a \leq A$ e $b \leq B$ tais que $f(a) = -b$ e $f(-b) = a$. Porém, estes números podem não ser únicos, e não atrair a iteradas $x_n = f^n(x_0)$, para $x_0 \in (-B, A)$.

De fato : A primeira parte da observação segue imediatamente de (2.3). Para mostrar a outra parte, note que $f^2(I) \subseteq I$ e, além disso, f^2 é contínua, donde existe $a > 0 \in I$ tal que $f^2(a) = a$. Tomando $c = f(a)$ obtemos pela condição feedback negativa que $c < 0$ e satisfaz $f(c) = f(f(a)) = f^2(a) = a$.

Observação 2.3 Se f satisfaz (I), é monótona decrescente em $[-B, A]$ e f^2 tem um único ponto fixo positivo a em $(0, A]$, então f satisfaz (II) .

De fato : É fácil verificar que nestas hipóteses f^2 tem um único ponto fixo negativo $-b = f(a)$ em $[-B, 0)$. Como f^2 é monótona crescente em $[-B, A]$ e $f'(0) < -1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|f^2(x)| > |x|$ para $0 < |x| < \epsilon$. Segue então do Teorema do Valor Intermediário que $f^2(x) > x$, para $0 < x < a$. Seja $0 < y_0 < a$ e considere $y_n = f^{2n}(y_0)$, então concluímos que

$$y_0 < f^2(y_0) \leq f^2(a) = a,$$

e por indução

$$y_n < y_{n+1} < a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Logo y_n converge para um limite $y \in (0, a]$, com $f^2(y) = y$. Mas, a é o único ponto fixo em $(0, a]$, donde $y = a$. Analogamente se $-b < z_0 < 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(z_0) = -b.$$

Ainda, como $f^2(A) \leq A$ e a é o único ponto fixo positivo de f^2 em $(0, A]$, então $f^2(A) < A$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, $f^2(x) < x$ para todo $a < x \leq A$. Com o mesmo argumento usado acima mostramos que se $a \leq y_0 \leq A$ e $y_n = f^{2n}(y_0)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(y_0) = a.$$

Analogamente se $-B \leq z_0 \leq -b$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(z_0) = -b.$$

Logo, podemos concluir que se $-B \leq x \leq A$ e $x \neq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \{-b, a\}, \quad (2.4)$$

pois, se $x \in (0, A]$, pelo visto acima temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = a,$$

e pela continuidade de f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(x) = -b.$$

Logo se $x \in (0, A]$ obtemos (2.4). Da mesma forma obtemos o resultado se $x \in [-B, 0)$.

Observação 2.4 Verificar a hipótese (II) diretamente, pode ser muito difícil, pois devemos analisar a convergência de $x_n = f^n(x_0)$, para cada x_0 em $[-B, A]$. Mesmo assumindo que $f'(x) < 0$, para todo $x \in [-B, A]$, mostrar a existência de um ponto fixo de f^2 , pode ser muito difícil. Assumindo que f tenha derivada Schwarziana negativa, demonstraremos alguns teoremas que nos ajudarão a verificar as hipóteses (I), (II) e (III), inclusive a unicidade do ponto fixo de f^2 . Além disso, a condição derivada Schwarziana negativa é mais fácil de ser verificada, pelo menos nos casos de interesse.

Nosso trabalho será determinar quando as hipóteses (I), (II) ou (III) são válidas para algumas funções f que aparecem em modelos matemáticos. Introduziremos agora a condição (PM) sobre uma função f , que nos será útil na verificação de tais hipóteses.

Definição 2.1 Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade (PM) se satisfizer a hipótese (0) e, além disso, existirem números reais $0 < \xi \leq \alpha \leq \infty$ e $0 < \eta \leq \beta \leq \infty$ tais que

- (i) $f(-\beta) = 0$ se $\beta < \infty$;
- (ii) f é monótona crescente e estritamente positiva em $(-\beta, -\eta)$ se $\eta < \infty$;
- (iii) f é monótona decrescente em $(-\eta, \xi)$, mas não em qualquer intervalo maior contendo $x_0 = 0$;
- (iv) f é monótona crescente e estritamente negativa em (ξ, α) se $\xi < \infty$;
- (v) $f(\alpha) = 0$ se $\alpha < \infty$.

Ainda, se $\xi = \eta = \infty$, então $|f^2(x)| < |x|$ para algum x .

A figura abaixo descreve uma função satisfazendo (PM) .

Figura 2.1: Gráfico de uma função satisfazendo (PM) com $\xi = \alpha = \infty$

Note que (PM) implica que $xf(x) < 0$ se $|x| \neq 0$ for suficientemente pequeno, pois $f(0) = 0$ e $f'(0) < -1$. Supondo que f satisfaça (PM), a questão que se coloca é sob quais condições tal função satisfará (I).

Observemos que

(1) Se f satisfaz (PM) e (I), então a condição feedback negativa implica que os números positivos A e B em (I) satisfazem,

$$A < \alpha \text{ e } B < \beta. \quad (2.5)$$

Por outro lado, se f satisfaz (PM) e A e B são números positivos satisfazendo (2.5), então segue da definição de (PM) que f satisfaz (I) se, e somente, se

$$f([-B, A]) \subseteq [-B, A]. \quad (2.6)$$

Agora, se (2.5) e (2.6) são válidas para uma função f satisfazendo (PM), então existe um intervalo maximal $[-B_*, A_*] \subseteq (-\beta, \alpha)$, com A_* e B_* estritamente positivos, para os quais (2.6) é uma igualdade

$$f([-B_*, A_*]) = [-B_*, A_*].$$

Isto segue do fato que $f'(0) < -1$.

(2) Suponhamos que f satisfaça (PM), e consideremos a função monótona decrescente $f_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-\eta) & \text{se } x \in (-\infty, -\eta] \text{ e } \eta < \infty, \\ f(x) & \text{se } x \in (-\eta, \xi), \\ f(\xi) & \text{se } x \in [\xi, \infty) \text{ e } \xi < \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

A Figura 2.2 ilustra o gráfico de f_* . Se A e B são números positivos satisfazendo (2.5), então segue de (2.7) que

$$f([-B, A]) = [f_*(A), f_*(-B)]. \quad (2.8)$$

Assim a igualdade em (2.6) é válida com $A_* = A$ e $B_* = B$ se, e somente, se

$$f_*(A_*) = -B_* \text{ e } f_*(-B_*) = A_*. \quad (2.9)$$

De fato :

$$\begin{aligned} f([-B_*, A_*]) = [-B_*, A_*] &\Leftrightarrow [f_*(A_*), f_*(-B_*)] = [-B_*, A_*] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f_*(A_*) = -B_* \text{ e } f_*(-B_*) = A_*. \end{aligned}$$

(3) Assim concluímos das observações acima que f satisfaz (I) se, e somente, se existem dois pontos distintos no intervalo $(-\beta, \alpha)$ que são aplicados um no outro pela função f_* .

Figura 2.2: Gráfico da função f_* .

Destas observações concluímos os seguintes resultados :

Proposição 2.1 *Suponhamos que f satisfaça (PM) e consideremos a função f_* definida por (2.7). Sejam os números reais*

$$A_* = \inf\{A > 0 : f_*^2(A) = A\} \quad (2.10)$$

$$B_* = \inf\{B > 0 : f_*^2(-B) = -B\}.$$

Então A_ e B_* são números positivos, bem definidos, satisfazendo (2.9) e a hipótese (I) é satisfeita pela f se, e somente, se*

$$A_* < \alpha \text{ e } B_* < \beta. \quad (2.11)$$

E, em tal caso, tomamos $A = A_$ e $B = B_*$ na afirmação de (I). Ainda as condições abaixo são suficientes para (I) ser válida :*

$$f_*^2(\alpha) < \alpha \text{ se } \alpha < \infty \text{ e } f_*^2(-\beta) > -\beta \text{ se } \beta < \infty, \quad (2.12)$$

ou

$$f_*(\alpha) > -\beta \text{ e } f_*^2(\alpha) < \alpha \text{ se } \alpha < \infty, \quad (2.13)$$

ou

$$f_*(-\beta) < \alpha \text{ e } f_*^2(-\beta) > -\beta \text{ se } \beta < \infty. \quad (2.14)$$

Prova :

Como $f'_*(0) < -1$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|f_*^2(x)| < |x| \text{ se } 0 < |x| < \epsilon$$

e, além disso, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f_*^2(x)| > |x|.$$

Para mostrarmos esta última desigualdade, observemos primeiro que se $\xi = \eta = \infty$ então a existência já foi assumida na definição de (PM). Temos ainda, três casos a considerar :

- se $\xi < \infty$ e $\eta = \infty$, concluímos de (2.7) que

$$f_*(x) = f_*(\xi) \text{ e } f_*^2(x) = f_*^2(\xi), \text{ para todo } x \geq \xi,$$

e se existe $x_0 < 0$ tal que $f_*(x_0) = \xi$, obtemos

$$f_*(x) \geq f_*(x_0) = \xi, \text{ para todo } x \leq x_0,$$

e novamente de (2.7) obtemos

$$f_*^2(x) = f_*(\xi), \text{ para todo } x < x_0.$$

Então a continuidade de f_*^2 garante que f_*^2 é uma função limitada. Por outro lado, se para todo $x < 0$, $f_*(x) < \xi$ e como $f_*(x) > f(\xi)$ para todo $x \geq 0$, obtemos também que f_*^2 é limitada.

- O mesmo raciocínio se aplica quando $\eta < \infty$ e $\xi = \infty$.
- Notemos que o caso em que $\xi < \infty$ e $\eta < \infty$, (2.7) implica que f_*^2 é limitada.

Assim, em qualquer caso, segue imediatamente da limitação de f_*^2 a existência de $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo esta desigualdade.

Portanto, existem constantes positivas A e B , tais que

$$f_*^2(A) = A \text{ e } f_*^2(-B) = -B.$$

Então, considerando

$$A_* = \inf\{A > 0 : f_*^2(A) = A\}$$
$$B_* = \inf\{b > 0 : f_*^2(-b) = -b\},$$

temos que A_* e B_* satisfazem (2.9). Para mostrarmos este fato, tomemos $A = f_*(-B_*)$. A condição feedback negativa de f_* implica que $A > 0$. Ainda, $f_*^2(A) = A$, donde $A \geq A_*$ e, portanto a monotonicidade de f_* implica que

$$-B_* = f_*(A) \leq f_*(A_*).$$

Por outro lado,

$$f_*(A_*) < 0 \text{ e } f_*^2(f_*(A_*)) = f_*(A_*),$$

logo

$$f_*(A_*) \leq -B_*.$$

Assim, concluímos que

$$f_*(A_*) = -B_* \text{ e } f_*(-B_*) = A_*.$$

Pelo discutido anteriormente, temos que f satisfaz (I) com $A = A_*$ e $B = B_*$ se, e somente, se

$$A_* < \alpha \text{ e } B_* < \beta.$$

Para mostrarmos a outra parte da proposição, observemos primeiro que, se mostrarmos a existência de um ponto fixo positivo A e um negativo $-B$ de f_*^2 , satisfazendo (2.9) com $A \in (0, \alpha)$ e $-B \in (-\beta, 0)$, então as observações anteriores implicam que f satisfaz (I) em tais pontos fixos.

É fácil verificar que (2.12), (2.13) e (2.14) garantem a existência de tais pontos fixos.

Defato :

- Suponhamos $f_*^2(\alpha) < \alpha$, $\alpha < \infty$ e $f_*^2(-\beta) > -\beta$, $\beta < \infty$.

Então temos :

1. Se $\beta = \infty$ e $\alpha < \infty$, e como $f_*^2(x) > x$ para $0 < x < \epsilon$, existe $0 < A < \alpha$ tal que $f_*^2(A) = A$. Considerando $-B = f_*(A) < 0$ temos $B < \infty$ e, portanto A e $-B$ são dois pontos fixos distintos em $(-\beta, \alpha)$, satisfazendo (2.9).
2. Analogamente se $\alpha = \infty$ e $\beta < \infty$.
3. Se $\alpha < \infty$ e $\beta < \infty$, então existem constantes positivas $A < \alpha$ e $B < \beta$ tais que

$$f_*^2(A) = A \text{ e } f_*^2(-B) = -B,$$

e considerando

$$A_* = \inf\{A > 0 : f_*^2(A) = A\}$$

$$B_* = \inf\{b > 0 : f_*^2(-B) = -B\},$$

temos que A_* e B_* são pontos fixos de f_*^2 satisfazendo (2.9).

- Suponhamos $f_*(\alpha) > -\beta$ e $f_*^2(\alpha) < \alpha$ com $\alpha < \infty$.

Então temos :

1. Se $\beta = \infty$, e como $f_*^2(x) > x$ para $0 < x < \epsilon$, existe uma constante positiva $A < \alpha$ tal que $f_*^2(A) = A$, e considerando $-B = f_*(A)$ temos

$$f_*^2(-B) = -B \text{ com } -\beta < -B < 0.$$

Logo, A e $-B$ são pontos fixos de f_*^2 satisfazendo (2.9).

2. Se $\beta < \infty$, então como acima, existe uma constante positiva $A < \alpha$ com $f_*^2(A) = A$ e, considerando $-B = f_*(A)$ temos

$$-\beta < f_*(\alpha) \leq f_*(A) = -B < 0,$$

logo

$$f_*^2(-B) = -B \text{ com } 0 < B < \beta.$$

Assim A e $-B$ são pontos fixos de $(f_*)^2$ satisfazendo (2.9).

- O caso em que $f_*(-\beta) < \alpha$ e $f_*^2(-\beta) > -\beta$ com $\beta < \infty$, é análogo ao caso anterior. ■

O próximo resultado nos diz quando a condição (III) é válida se f satisfizer (PM).

Proposição 2.2 *Suponhamos que f satisfaça (PM), e sejam f_* , A_* , B_* como na Proposição 2.1. Então (III) é válida para a função f se, e somente, se*

$$A_* \leq \xi \text{ e } B_* \leq \eta. \quad (2.15)$$

Como antes, temos $A = A_$ e $B = B_*$ nas afirmações de (III). As seguintes condições são suficientes para (III) ser válida :*

$$f_*^2(\xi) \leq \xi \text{ se } \xi < \infty \text{ e } f_*^2(-\eta) \geq -\eta \text{ se } \eta < \infty, \quad (2.16)$$

ou

$$f_*(\xi) \geq -\eta, \text{ } f_*^2(\xi) \text{ se } \xi < \infty, \quad (2.17)$$

ou

$$f_*(-\eta) \leq \xi, \text{ } f_*^2(-\eta) \geq -\eta \text{ se } \eta < \infty. \quad (2.18)$$

Prova :

Já mostramos na Proposição 2.1 que existem constantes positivas

$$A_* = \inf\{A > 0 : f_*^2(A) = A\}$$

$$B_* = \inf\{B > 0 : f_*^2(-B) = -B\},$$

satisfazendo (2.9) e, além disso, mostramos que f satisfaz (I) com $A = A_*$ e $B = B_*$ se, e somente, se

$$A_* < \alpha \text{ e } B_* < \beta.$$

Mostremos agora que f satisfaz (III) com $A = A_*$ e $B = B_*$ se, e somente, se

$$B_* \leq \eta \text{ e } A_* \leq \xi.$$

A condição suficiente segue imediatamente do item (iii) da (PM). Suponhamos agora que $B_* \leq \eta$ e $A_* \leq \xi$. A Proposição 2.1 implica que f satisfaz (I) em $[-B_*, A_*]$ e, além disso, $f_* = f$ em $[-B_*, A_*]$, donde f é monótona decrescente em $[-B_*, A_*]$. Ainda, A_* é o único ponto fixo de f^2 em $(0, A_*]$ e $-B_*$ é o único ponto fixo de f^2 em $[-B_*, 0)$. Logo, pela Observação 2.2, concluímos que f satisfaz (II) com $a = A_*$ e $b = B_*$, ou seja, f satisfaz (III).

A prova da outra parte da proposição é análoga à Proposição 2.1. ■

Observação 2.5 Se a função f_*^2 tiver exatamente um ponto fixo em $(0, \infty)$, então f satisfará (I) se, e somente, se f satisfizer (2.12) .

De fato :

A condição suficiente foi demonstrada na Proposição 2.1. Para demonstrar a condição necessária suponhamos que $A_* < \alpha$ e $B_* < \beta$, ou seja, f satisfaz (I). Suponhamos, por absurdo, que

$$f_*^2(\alpha) > \alpha \text{ ou } f_*^2(-\beta) < -\beta \text{ com } \alpha < \infty \text{ e } \beta < \infty.$$

Então como f_*^2 é limitada, o Teorema do Valor Intermediário, implica que existem constantes x_0 e x_1 satisfazendo

$$f_*^2(x_0) = x_0 \text{ com } x_0 \in (\alpha, \infty)$$

ou

$$f_*^2(x_1) = x_1 \text{ com } x_1 \in (-\infty, -\beta).$$

O que é um absurdo, pois A_* e $-B_*$ são os únicos pontos fixos de f_*^2 .

Observação 2.6 Assumindo que f_*^2 possui um único ponto fixo positivo, é fácil mostrar que f satisfará (I) se, e somente, se f satisfizer (2.13), ou (2.14), ou $\alpha = \beta = \infty$.

Observação 2.7 Analogamente, se f satisfizer as hipóteses da Proposição 2.2, e se f_*^2 tiver um único ponto fixo positivo, então f satisfará a hipótese (III) se, e somente, se f satisfizer (2.16). Também f satisfará (III) se, e somente, se f satisfizer (2.17), ou (2.18), ou $\xi = \eta = \infty$.

As desigualdades (2.12) e (2.16) são, em geral, mais fáceis de serem verificadas do que as desigualdades (2.11) e (2.15). Se a função f tiver derivada Schwarziana negativa, mostraremos que f^2 tem exatamente um ponto fixo positivo, e um único ponto fixo negativo e obteremos dessa forma condições necessárias e suficientes para f satisfazer (I), (II) e (III).

2.2 Condições para que uma função f satisfaça (I), (II), e (III)

Nesta seção daremos condições necessárias e suficientes para que f satisfaça (I), (II) e (III). Para demonstrarmos os resultados desta seção precisamos assumir que f satisfaça (PM) e, além disso, tenha derivada Schwarziana negativa. As duas hipóteses seguintes resumem estes dois fatos.

(NS_1) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (PM), é três vezes diferenciável em $(-\eta, \xi)$, satisfazendo $f'(x) < 0$ e $Sf(x) < 0$ em $(-\eta, \xi)$.

(NS_2) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (PM), é três vezes diferenciável em $(-\beta, \alpha)$, satisfazendo $f'(x) \neq 0$ e $Sf(x) < 0$ se $x \in (-\beta, \alpha)$ com $x \neq \xi, -\eta$.

Com a condição (NS_1), o Teorema 2.1 dá condições necessárias e suficientes para (I) e (III) serem válidas. Com a condição (NS_2), o Teorema 2.3 dá uma condição necessária e suficiente para verificar (II), desde que (I) também seja válida. O Teorema 2.2 será útil na verificação de (I), (II), e (III) para funções específicas nos capítulos seguintes. O nosso próximo lema garante a unicidade do ponto fixo da função f_*^2 .

Lema 2.1 *Suponhamos que f satisfaça (NS_1), e sejam f_* , A_* , e B_* como em (2.7) e (2.10). Então A_* e $-B_*$ são os únicos pontos fixos não nulos de f_*^2 . Além disso, $f_*^2(x) - x$ troca de sinal nestes pontos, com $|f_*^2(x)| > |x|$ em $(-B_*, A_*) - \{0\}$, e $|f_*^2(x)| > |x|$ em $(-\infty, -B_*) \cup (A_*, \infty)$.*

Prova :

Observemos primeiramente que existe uma constante $\xi_* > 0$, tal que

$$\begin{aligned} (f_*^2)'(x) &> 0 \quad \text{em } [0, \xi_*), \\ f_*^2(x) &= f_*^2(\xi_*) \quad \text{em } [\xi_*, \infty) \text{ se } \xi_* < \infty. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para mostrarmos isto, temos quatro casos a considerar

- Se $\xi = \eta = \infty$, segue imediatamente da definição de f_* em (2.7), que $\xi_* = \infty$.
- Se $\xi < \infty$ e $\eta = \infty$. Neste caso a definição (2.7) fica

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (-\infty, \xi), \\ f(\xi) & \text{se } x \in [\xi, \infty). \end{cases}$$

Para todo $x \geq \xi$, temos $f_*(x) = f(\xi)$, donde

$$f_*^2(x) = f_*^2(\xi).$$

Ainda,

$$f_*'(x) = f'(x) < 0, \text{ para } x \in (0, \xi),$$

logo

$$(f_*^2)'(x) > 0 \text{ em } (0, \xi).$$

Portanto tomando $\xi_* = \xi$ obtemos o resultado desejado.

- Se $\xi = \infty$ e $\eta < \infty$, então a definição de f_* fica

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-\eta) & \text{se } x \in (-\infty, -\eta), \\ f(x) & \text{se } x \in [-\eta, \infty). \end{cases}$$

Como $f_*'(x) < 0$ em $(-\eta, \infty)$, então $(f_*^2)'(x) > 0$ em $(-\eta, \infty)$. Temos

1. se existir $x_0 \in (0, \infty)$, tal que $f_*(x_0) \leq -\eta$, tomemos $\xi_* = f_*^{-1}(-\eta)$,
2. se para todo $x \geq 0$, $f_*(x) \geq -\eta$, tomemos $\xi_* = \infty$.

Então nos dois casos obtemos o resultado desejado.

- O caso em que $\xi < \infty$ e $\eta < \infty$, prova-se unindo os dois casos anteriores.

Note ainda, que o item (ii) da Proposição 1.1 implica que

$$Sf_*^2(x) < 0, \text{ para todo } x \in [0, \xi_*),$$

e por hipótese

$$(f_*^2)'(0) = (f'(0))^2 > 1.$$

Como A_* é o menor ponto fixo positivo de f_*^2 em $(0, \infty)$, temos dois casos a considerar.

- Se $A_* \geq \xi_*$, então A_* é o único ponto fixo de f_*^2 .
- Se $A_* < \xi_*$, e como A_* é o menor ponto fixo positivo e $f'_*(0) < -1$, então $f_*^2(x) > x$, para $0 < x < A_*$ donde

$$(f_*^2)'(A_*) \leq 1. \quad (2.20)$$

Agora $(f_*^2)'(x) > 0$ e $Sf_*^2(x) < 0$ em $[0, \xi_*)$, então o Corolário 1.6 implica que $(f_*^2)'$ não atinge mínimo em qualquer intervalo aberto de $[0, \xi_*)$. Ainda, $(f_*^2)'(x) > 0$ e $(f_*^2)'(0) > 1$, então (2.20) implica que

$$(f_*^2)'(x) < 1, \text{ para } A_* < x < \xi_*. \quad (2.21)$$

Integrando (2.21) de A_* até u , para $u \in (A_*, \xi_*]$, obtemos

$$f_*^2(u) - f_*^2(A_*) = f_*^2(u) - A_* < \int_{A_*}^u 1 dx = u - A_*, \quad (2.22)$$

donde $f_*^2(x) < x$, para $x \in (A_*, \xi_*]$ e, portanto (2.19) implica que

$$\begin{aligned} f_*^2(x) &> x, \text{ para } x \in (0, A_*), \\ f_*^2(x) &< x, \text{ para } x \in (A_*, \infty). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Analogamente, $-B_*$ é o único ponto fixo negativo de f_*^2 , satisfazendo

$$\begin{aligned} f_*^2(x) &> x, \text{ para } x \in (-\infty, -B_*), \\ f_*^2(x) &< x, \text{ para } x \in (-B_*, 0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ou seja, $f_*^2(x) - x$ troca de sinal em A_* e $-B_*$. Juntando (2.23) e (2.24), obtemos a última parte da proposição. ■

Com este lema, as Proposições 2.1 e 2.2, e as Observações 2.5, 2.6 e 2.7, demonstramos o seguinte teorema

Teorema 2.1 *Suponhamos que f satisfaça (NS_1) , e seja f_* definida por (2.7). Então f satisfaz (I) se, e somente, se*

$$f_*^2(\alpha) < \alpha \text{ se } \alpha < \infty, f_*^2(-\beta) > -\beta \text{ se } \beta < \infty. \quad (2.25)$$

Também, f satisfaz (I) se, e somente, se pelo menos uma das três condições for satisfeita :

1. $\alpha = \beta = \infty$;
2. $\alpha < \infty, f_*(\alpha) > -\beta$ e $f_*^2(\alpha) < \alpha$;
3. $\beta < \infty, f_*(-\beta) < \alpha$ e $f_*^2(-\beta) > -\beta$.

A função f satisfaz (III) se, e somente, se

$$f_*^2(\xi) \leq \xi \text{ se } \xi < \infty \text{ e } f_*^2(-\eta) \geq -\eta \text{ se } \eta < \infty. \quad (2.26)$$

Também, f satisfaz (III) se, e somente, se pelo menos uma das três seguintes condições for satisfeita :

1. $\eta = \xi = \infty$;
2. $\xi < \infty, f_*(\xi) \geq -\eta$ e $f_*^2(\xi) \leq \xi$;
3. $\eta < \infty, f_*(-\eta) \leq \xi$ e $f_*^2(-\eta) \geq -\eta$.

Observemos que

$$f_*^2(\alpha) = f_*^2(\xi) \text{ e } f_*^2(-\beta) = f_*^2(-\eta)$$

para os números reais no Teorema 2.1.

Note que o Teorema 2.1 exige que f tenha um ponto fixo $x_0 = 0$. Mas nos capítulos seguintes, precisaremos aplicar este teorema para funções com pontos fixos não nulos. O que faremos agora é usar este teorema para obter condições para funções f satisfazer as hipóteses (I), (II), e (III) em pontos fixos não nulos. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e possua um ponto fixo não nulo x_0 , e suponhamos que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x + x_0) - x_0$$

satisfaça (PM) no ponto fixo $y_0 = 0$. Sejam α, β, ξ e η as constantes da (PM) para g , definindo

$$x_1 = x_0 - \beta, \quad x_2 = x_0 - \eta, \quad x_3 = x_0 + \xi \text{ e } x_4 = x_0 + \alpha, \quad (2.27)$$

então f satisfaz

- $f(x) > x_0$ se $x_1 < x < x_0$;
- $f(x_1) = x_0$ se $x_1 > -\infty$;
- $f(x) < x_0$ se $x_0 < x < x_4$;
- $f(x_4) = x_0$ se $x_4 < \infty$;
- $f'(x) > 0$ se $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$ e
- $f'(x) < 0$ se $x \in (x_2, x_3)$, mas não em qualquer intervalo maior contendo x_0 .

Assim a definição de f_* em (2.7) fica

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x_2) & \text{se } x \in (-\infty, x_2] \text{ e } x_2 > -\infty, \\ f(x) & \text{se } x \in (x_2, x_3), \\ f(x_3) & \text{se } x \in [x_3, \infty) \text{ e } x_3 < \infty. \end{cases} \quad (2.28)$$

Portanto para nossas aplicações nos capítulos seguintes, usaremos as constantes x_1, x_2, x_3 e x_4 na definição de (PM) para f , e a definição de f_* como em (2.28), independentemente de f ter ponto fixo nulo ou não nulo.

Já vimos que f satisfaz (I), (II), ou (III) em x_0 se, e somente, se g satisfaz tais hipóteses no ponto fixo $y_0 = 0$, respectivamente. Suponhamos que f é C^3 e satisfaça (NS_1) em $(-\eta, \xi)$. Então o Teorema 2.1 implica que f satisfaz (I) em x_0 se, e somente, se

$$\begin{aligned} (f_*^2)(x_4) &< x_4 & \text{se } x_4 < \infty, \\ (f_*^2)(x_1) &> x_1 & \text{se } x_1 > -\infty. \end{aligned} \quad (2.29)$$

e f satisfaz (III) em $x_0 = 0$ se, e somente, se

$$\begin{aligned} (f_*^2)(x_3) &\leq x_3 & \text{se } x_3 < \infty, \\ (f_*^2)(x_2) &\geq x_2 & \text{se } x_2 > -\infty. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto usaremos as condições acima para verificar quando uma função f satisfará (I) ou (III).

O próximo teorema, será de grande importância na verificação das hipóteses (I), (II) e (III) para funções f que consideraremos nos Capítulos 3 e 4.

Teorema 2.2 *Suponhamos que f satisfaça (NS_1) , exceto que*

$$f'(0) = -k, \quad 0 < k \leq 1,$$

vale no lugar de $f'(0) < -1$. Se $0 < k < 1$, assumimos que $f''(0) \geq 0$. Então com f_* dado por (2.7) temos

$$|f_*^2(x)| < |x|, \text{ para todo } x \neq 0.$$

Prova :

Seja ξ_* dado em (2.19), então f^2 e f_*^2 coincidem em $[0, \xi_*]$, e um cálculo mostra que

$$(f_*^2)''(0) = f''(0)[k^2 - k]. \quad (2.31)$$

Como $f''(0) \geq 0$ se $k \in (0, 1)$, então (2.31) implica que

$$(f_*^2)''(0) \leq 0, \text{ para } 0 < k \leq 1. \quad (2.32)$$

Se $(f_*^2)''(0) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$(f_*^2)''(x) < 0, \text{ para } 0 < x < \delta$$

e, portanto o Teorema do Valor Médio e (2.19) implicam que

$$0 < (f_*^2)'(x) < (f_*^2)'(0) = k^2, \text{ para } 0 < x < \delta. \quad (2.33)$$

Se $(f_*^2)''(0) = 0$, então $(f_*^2)'''(0) < 0$, pois $Sf_*^2(0) < 0$ e $(f_*^2)'(0) = k^2 > 0$, e pela fórmula de Taylor

$$(f_*^2)'(x) = (f_*^2)'(0) + (f_*^2)''(0)x + \frac{(f_*^2)'''(0)}{2}x^2 + r(x)$$

com

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x} = 0.$$

Tomando $\delta > 0$ tal que

$$\frac{(f_*^2)'(0)}{2}x^2 + r(x) < 0,$$

obtemos que para $x \in (0, \delta)$, (2.33) está satisfeita. Portanto

$$(f_*^2)'(x) < k^2, \text{ para } 0 < x < \xi_*. \quad (2.34)$$

pois caso contrário $(f_*^2)'$ atingiria um mínimo em $(0, \xi_*)$, contradizendo o Corolário 1.6. Integrando (2.34) de 0 até $x \leq \xi_*$ obtemos

$$(f_*^2)'(x) < k^2x < x, \text{ para } 0 < x \leq \xi_*,$$

e, portanto (2.19) implica

$$f_*^2(x) < x, \text{ para } 0 < x. \quad (2.35)$$

A desigualdade (2.35) implica que f_*^2 não tem ponto fixo y negativo, pois caso contrário, $f_*(y)$ seria ponto fixo positivo. Como $f_*^2(x) > x$, para x pequeno e negativo obtemos

$$f_*^2(x) > x, \text{ para } x < 0,$$

demonstrando portanto o teorema. ■

Notemos que (2.25) e (2.26) estão satisfeitas, sob as hipóteses do Teorema 2.2.

Os próximos resultados são lemas técnicos, e nos ajudarão a verificar quando (II) é válida.

Lema 2.2 *Suponhamos que f satisfaça (NS_1) e (I). Se $a \in (-\beta, \alpha)$, é tal que $f(a) \in (-\beta, \alpha)$, e $f^2(a) = a$, então $a, f(a) \in [-B, A] \subseteq (-\beta, \alpha)$ onde A e B são dados em (I).*

Lema 2.3 *Suponhamos que f satisfaça (PM) e (I), seja diferenciável com $f'(x) \neq 0$ em $(-\beta, \alpha)$, exceto em $x = \xi$ e $x = -\eta$. Então com A dado em (I), valem os seguintes resultados :*

(i) *Os pontos críticos de f^2 em $(0, A)$ são isolados, e $(f^2)'$ muda de sinal em cada um desses pontos.*

(ii) *Se um ponto ω no intervalo aberto $(0, A)$ é um mínimo local de f^2 , então ele é um mínimo global em $[0, A]$:*

$$f^2(\omega) = \max_{[0, A]} f^2(x). \quad (2.36)$$

(iii) *Se f^2 possui um ponto crítico no intervalo fechado $[0, A]$, e se ω no intervalo fechado $[0, A]$ satisfaz (2.35), então ω é um ponto crítico :*

$$(f^2)'(\omega) = 0.$$

As demonstrações desses dois lemas, podem ser encontradas em [14].

Lema 2.4 *Suponhamos que as hipóteses do Lema 2.3 sejam válidas e que exista um intervalo $J = [r, s]$ com $0 \leq r < s \leq A$, tais que*

$$f^2(J) = J, \quad f^2(\partial J) = \partial J, \text{ e } J - \partial J \text{ contém um ponto crítico de } f^2, \quad (2.37)$$

onde $\partial J = \{r, s\}$. Além disso, suponhamos que $f^2(r) = s = f^2(s)$ não ocorra. Então existe $v \in J - \partial J$, tal que $f^2(v) = s$. Também, se $w \in \partial J$ é tal que $f^2(w) = s$, então $(f^2)'(w) = 0$.

Prova :

Como $f^2(\{r, s\}) = \{r, s\}$, e $f^2(r) = s = f^2(s)$ não ocorre, então temos os seguintes casos :

- (a) $f^2(r) = s$ e $f^2(s) = r$,
- (b) $f^2(r) = r$ e $f^2(s) = s$,
- (c) $f^2(r) = r$ e $f^2(s) = r$.

Para demonstrar o caso (b), consideremos

$$v = \inf\{x > r : (f^2)'(x) = 0\}.$$

Então temos os seguintes fatos:

- (1) $(f^2)'$ muda de sinal em v pelo Lema 2.3.
- (2) Como $f^2(J) \subset J$, então $f^2(x) \geq r$, para todo $x \in [r, s]$ e $f^2(r) = r$, ou seja, r é um ponto de mínimo de f^2 .
- (3) f^2 tem ponto crítico em (r, s) por hipótese.

Então de (1) segue que $v \in (r, s)$. Agora, por (i) do Lema 2.3 e de (2), concluímos que $(f^2)'$ muda de sinal em r e $(f^2)''(r) > 0$, donde existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < (f^2)'(x), \text{ para } x \in (r, r + \delta),$$

e como v é o menor valor tal que $(f^2)'(x) = 0$, então

$$0 < (f^2)'(x), \text{ para } x \in (r, v),$$

e finalmente por (1)

$$0 > (f^2)'(x), \text{ para } x \in (v, v + \delta).$$

Portanto $(f^2)''(v) < 0$, ou seja, v é um ponto de máximo local de f^2 .

Com uma pequena modificação nos casos (a) e (c), mostra-se que f^2 sempre tem um ponto crítico $v \in (r, s)$ no qual f^2 assume um máximo local. Note, entretanto, que não podemos usar este tipo de argumento se $f^2(s) = s = f^2(r)$.

Como $f^2(J) \subset J$, então $f^2(v) \leq s$, mas pela parte (ii) do Lema 2.3, segue que

$$f^2(v) = \max_{[0, A]} f^2(x) \geq \max_{[r, s]} f^2(x) = s$$

e, portanto

$$f^2(v) = s = \max_{[0,A]} f^2(x). \quad (2.38)$$

Se existe $w \in \partial J$, tal que $f^2(w) = s$, então por (2.38)

$$f^2(w) = \max_{[0,A]} f^2(x),$$

logo a parte (iii) do Lema 2.3, garante que $(f^2)'(w) = 0$, demonstrando portanto este lema. ■

O seguinte lema encontra-se demonstrado em [17]

Lema 2.5 *Sejam $a < b < c$ três pontos fixos consecutivos de $g = f^4$. Suponhamos ainda, que $[a, c]$ não contém outros pontos fixos de g , e que f tenha derivada Schwarziana negativa. Então $g'(b) > 1$.*

Podemos agora demonstrar o

Teorema 2.3 *Suponhamos que f satisfaça (NS_2) e (I). Então f satisfaz (II) se, e somente, se*

- (i) $|(f^2)'(x)| \leq 1$, e
- (ii) $(f^2)''(x) = 0$ se $(f^2)'(x) = 1$

forem válidas, quando

$$f^2(x) = x, x \in (0, \alpha), f(x) \in (-\beta, 0), \quad (2.39)$$

ou se (i) e (ii) forem válidas, quando

$$f^2(x) = x, x \in (-\beta, 0), f(x) \in (0, \alpha). \quad (2.40)$$

Prova :

Se $f^2(x) = x$ e $f^2(y) = y$, onde $y = f(x)$, então

- (i) $(f^2)'(x) = (f^2)'(y)$ e
- (ii) $(f^2)''(x) = f'(f(y))(f^2)''(y)$.

Segue portanto desses dois fatos que se (i) e (ii) valem para pontos fixos satisfazendo (2.39) se, e somente, se (i) e (ii) valem para pontos fixos satisfazendo (2.40). Ainda, o Lema 2.2 implica que podemos, além disso, considerar pontos

fixos x de f^2 em $(0, A]$, com $f(x) \in [-B, 0)$ valendo automaticamente, onde A e B são dados na hipótese (I). Portanto mostraremos que f satisfaz (II) se, e somente, se todo ponto fixo de f^2 em $(0, A]$ satisfazem (i) e (ii).

($\Rightarrow$) Suponhamos que f satisfaça (II) para algum $0 < a \leq A$ e para algum $0 < b \leq B$. De (2.3) temos que a é o único ponto fixo positivo de f^2 e f^4 em $(0, \infty)$. Suponhamos, por absurdo, que (i) e (ii) não são válidos em $x = a$. Como $f(A) \leq A$ e $f'(0) < 1$, então para $n = 2$ e $n = 4$ temos

$$f^n(x) > x, \text{ para } x \in (0, a) \quad (2.41)$$

$$f^n(x) < x, \text{ para } x \in (a, A) \text{ se } a < A$$

Agora $(f^4)'(a) = [(f^2)'(a)]^2 \geq 0$, logo (2.41) implica que $(f^4)'(a) \leq 1$ e, portanto $|(f^2)'(a)| \leq 1$. Ou seja, (i) é válido em $x = a$.

Assim devemos ter

$$(f^2)'(a) = 1 \text{ e } (f^2)''(a) \neq 0. \quad (2.42)$$

Mas, para (2.41) ser válida, é necessário que

$$(f^2)''(a) > 0. \quad (2.43)$$

Para mostrarmos esta desigualdade suponhamos, por absurdo, que $(f^2)''(a) < 0$, então existe uma vizinhança $V \ni a$ tal que

$$(f^2)'(x) > 1, \text{ para } x \in V = (a - \delta, a + \delta),$$

ou seja, $(f^2)'$ é decrescente em V e, portanto

$$(f^2)'(x) > 1, \text{ para } x \in (a - \delta, a).$$

Integrando esta expressão de $x \in (a - \delta, a)$ até a , obtemos uma contradição de (2.41). Com este mesmo argumento obtemos

$$f^2(A) = A \text{ com } a = A.$$

Agora, por hipótese, f tem derivada Schwarziana negativa, e então a Proposição 1.1, e o Corolário 1.6 implicam que o intervalo $(0, A)$ contém um ponto crítico de f^2 . Portanto o intervalo $J = [0, A]$ satisfaz todas as hipóteses do Lema 2.4, e como $f^2(A) = A$ devemos ter $(f^2)'(A) = 0$, o que contradiz (2.43), demonstrando assim a condição necessária do teorema.

($\Leftarrow$) Suponhamos que f satisfaça (NS_1) e (I) para $A > 0$ e $B > 0$, e que todo ponto fixo de f^2 satisfaça (i) e (ii). Como $(f^2)'(0) > 1$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f^2(x) > x, \text{ para } x \in (0, \delta_1].$$

Ainda, $f^2(x) > 0$, para $x > 0$, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$f^2(x) > \delta_2, \text{ para } x \in (0, A].$$

Logo tomando δ suficientemente pequeno temos

$$f^2([\delta, A]) \subseteq [\delta, A],$$

e a continuidade de f^2 implica que existe um ponto fixo $a \in (0, A]$ de f^2 . Consideremos seu domínio de atração W em $[0, A]$, definido por

$$W = \{x \in [0, A] : f^{2n}(x) \rightarrow a, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

É fácil ver que $a \in W$ e $0 \notin W$. Agora (i) e (ii) do teorema implicam, pelo Lema 1.1, que W é relativamente aberto. Seja $I \subseteq W$ a maior componente conexa de W contendo $x = a$, então I é um intervalo da forma

$$I = (r, s), \text{ ou } I = (r, A],$$

onde em qualquer caso as quantidades r e s satisfazem

$$0 \leq r < a, a < s \leq A.$$

Como $f^2(W) \subseteq W$, e $f^2(I)$ é um subconjunto conexo de W contendo a , e I é a maior componente conexa contendo a temos

$$f^2(I) \subseteq I. \quad (2.44)$$

A continuidade de f^2 garante que $f^2(\bar{I}) \subseteq \bar{I}$. Se $I = (r, s)$ devemos ter

$$f^2(r), f^2(s) \in \{r, s\}. \quad (2.45)$$

Se, por absurdo, $f^2(r) = y$, com $y \in I$, então

$$f^{2n}(r) = f^{2n-2}(y),$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n-2}(y) = a,$$

ou seja, $r \in I$, pois I é a maior componente conexa de W , contendo a , o que é um absurdo. Se $I = (r, A]$, o mesmo argumento implica

$$f^2(r) = r. \quad (2.46)$$

Agora, observemos que se $I = (r, s)$ nem o ponto r , nem o ponto s , podem ser pontos fixos não nulos de f^2 . Pois se $x = r$ ou $x = s$ são pontos fixos positivos de f^2 , então o Lema 1.1, garante que

$$f^{2n}(y) \longrightarrow x = r \text{ ou } x = s, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para y suficientemente próximo de $x = r$ ou $x = s$. Mas, sabemos que estes pontos $y \in I$ próximos de $x = r$ ou $x = s$, satisfazem

$$f^{2n}(y) \longrightarrow a, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto se $I = (r, s)$, (2.45) implica que devemos ter

$$f^2(s) = r \text{ e } f^2(r) = s,$$

exceto se $r = 0$. Se $I = (r, A]$, então de (2.46), devemos ter $f^2(r) = r$ e, portanto $r = 0$. Assim se $I = (r, A]$, o domínio de atração do ponto fixo $x = a$ de f^2 , é o intervalo $(0, A]$ demonstrando portanto o teorema. Assumiremos para o restante da demonstração que $I = (r, s)$.

Como $f^2(s) = r$ e $s > 0$, então a condição feedback negativa de f implica que $r > 0$, e pelo visto anteriormente temos $f^2(r) = s$. Consideremos uma aplicação $g = f^4 : [r, s] \rightarrow [r, s]$. Como f é C^3 , então g é uma aplicação C^3 , satisfazendo

$$\begin{aligned} g(r) &= r, \\ g(s) &= s, \\ g(a) &= a, \end{aligned}$$

onde a, r, s são os únicos pontos fixos de g em $[r, s]$. Ainda,

$$(f^4)'(x) = (f^2)'(f^2(x))(f^2)'(x), \quad (2.47)$$

então

$$0 \leq g'(a) = ((f^2)'(a))^2 \leq 1, \quad (2.48)$$

onde a última desigualdade de (2.48) é assumida por hipótese. Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in [r, s]$, então

$$Sg(x) < 0, \text{ para todo } x \in [r, s].$$

Portanto o Lema 2.5 implica que $g'(a) > 1$, o que contradiz (2.48). Logo

$$g'(x_0) = 0, \text{ para algum } x_0 \in (r, s).$$

Como $f^2(I) \subseteq I$ e $g'(x_0) = 0$, então (2.47) garante que

$$(f^2)'(y_0) = 0, \text{ para algum } y_0 \in (r, s).$$

O Lema 2.4 agora implica que existe $v \in I$, tal que $f^2(v) = s$. Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = a, \text{ para } x \in I,$$

e, além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(v) = \{r, s\},$$

o que é um absurdo, pois $r < a < s$.

Portanto devemos ter $I = (0, A]$ e já mostramos que neste caso a condição suficiente é válida. ■

O próximo resultado foi demonstrado por Allwright em [1], o qual também pode ser obtido como uma simples consequência do Teorema 2.2.

Corolário 2.1 *Suponhamos que $g(x, \theta)$ esteja definida, e seja contínua para $|x| < \delta_1$ e $|\theta - \theta_*| < \delta_2$. Ainda, suponhamos que g seja uma aplicação C^3 na variável x , e que tenha derivada Schwarziana negativa (com respeito à variável x) em $x = 0$ e $\theta = \theta_*$. Suponhamos que*

$$g(0, \theta) = 0, \text{ para } |\theta - \theta_*| < \delta_2,$$

e

$$g'(0, \theta_*) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, \theta_*) = -1.$$

Suponhamos também que $\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} g$ esteja definida, e seja contínua no domínio de g

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} g(0, \theta_*) \neq 0.$$

Então existe $\delta > 0$ tal que, a aplicação $x \rightarrow g(x, \theta)$ satisfaz (III) para

$$\theta_* < \theta < \theta_* + \delta \text{ se } \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} g(0, \theta_*) < 0,$$

e satisfaz (III) para

$$\theta_* - \delta < \theta < \theta_* \text{ se } \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} g(0, \theta_*) > 0.$$

O próximo teorema afirma que a hipótese (II) falha antes da hipótese (I), isto é, se f não satisfizer (I) então a condição (2.3) não será satisfeita pela f .

Teorema 2.4 *Suponhamos que f satisfaça (PM), e α ou β sejam finitos (α, β, ξ e η como na definição de (PM)). Suponhamos que f é C^3 em $[-\beta, \alpha]$, $f'(x) \neq 0$ e $Sf(x) < 0$ para $x \neq -\eta$ e $x \neq \xi$. Se $f([-\beta, \alpha]) \subseteq [-\beta, \alpha]$ e $f_*^2(\alpha) = \alpha$ ou $f_*^2(-\beta) = -\beta$ (f_* como em (2.7)), então existe $\gamma \in (-\beta, \alpha)$, $\gamma \neq 0$, tal que*

$$(f^2)'(\gamma) < -1.$$

Prova :

Sem perda da generalidade, podemos assumir que $f_*^2(\alpha) = \alpha$. Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso. Então

$$(f^2)'(\gamma) \geq -1, \text{ para todo } \gamma \in (-\beta, \alpha).$$

Como $(f^2)'(\gamma) \geq -1$, e se $(f^2)'(\gamma) < 1$, então o Lema 1.1 implica que γ é um ponto fixo estável, isto é, existe $\delta > 0$, tal que

$$f^{2n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma \text{ se } |x - \gamma| < \delta.$$

Temos dois casos a considerar, cada um correspondente a uma forma do gráfico de f^2 . As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram o gráfico de f^2 .

Figura 2.3: Gráfico de f^2 com $f(\xi) \geq -\eta$

Figura 2.4: Gráfico de f^2 com $f(\xi) < -\eta$

Caso 1. Suponhamos que $-\eta < f(\xi) = f_*(\alpha)$. Neste caso (2.7) implica que

$$f_*^2(\alpha) = f^2(\xi) = \alpha,$$

e uma análise do gráfico de f^2 , mostra que

$$(f^2)'(x) \geq 0, \text{ para } 0 \leq x \leq \xi$$

e

$$(f^2)'(x) < 0, \text{ para } \xi < x < \alpha.$$

Por conveniência definamos $\xi_2 = \xi$ neste caso.

Caso 2. Suponhamos $f(\xi) = f_*(\alpha) \leq -\eta$, neste caso

$$f_*^2(\alpha) = f(-\eta) = \alpha.$$

Além disso, a definição de (PM) implica que existe um único ξ_1 , com $0 < \xi_1 \leq \xi$, e um único ξ_2 , com $\xi \leq \xi_2 < \alpha$, tais que

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = -\eta.$$

Com estas informações, e uma análise do gráfico de f^2 temos

$$\begin{aligned}
(f^2)'(x) &> 0, \text{ para } 0 \leq x < \xi_1, \\
(f^2)'(x) &< 0, \text{ para } \xi_1 < x < \xi, \\
(f^2)'(x) &> 0, \text{ para } \xi < x < \xi_2, \\
(f^2)'(x) &< 0, \text{ para } \xi_2 < x < \alpha.
\end{aligned}$$

Segue, em qualquer caso, que

$$f^2(\xi_2) = \alpha \text{ e } (f^2)'(x) < 0, \text{ para } x \in (\xi_2, \alpha).$$

Como $f^2(\alpha) = 0$ e $f^2(\xi_2) = \alpha$, então o Teorema do Valor Intermediário implica que existe um único $\gamma \in (\xi_2, \alpha)$ tal que

$$f^2(\gamma) = \gamma,$$

e pelo visto acima temos

$$-1 \leq (f^2)'(\gamma) < 0,$$

portanto γ é um ponto fixo estável de f^2 .

Como na prova do Teorema 2.3, o conjunto

$$U = \{x \in [0, \alpha] : f^{2n}(x) \rightarrow \gamma \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

é um conjunto aberto, pois neste caso $\alpha \notin U$. Seja U_1 a maior componente conexa de U contendo γ , então U_1 é um subconjunto aberto, satisfazendo

$$f^2(\overline{U_1}) \subseteq \overline{U_1}.$$

Como U_1 é conexo e aberto, podemos escrever $U_1 = (r, s)$. Se $r < \xi_2$, então

$$0 = f^4(\xi_2) \in U_1,$$

o que é um absurdo, donde $\xi_2 \leq r$. Da mesma forma temos que $s < \alpha$. Como mostramos no Teorema 2.3, devemos ter

$$f^2(r), f^2(s) \in \{r, s\}.$$

Existem duas possibilidades a serem consideradas. Se $f^2(s) = s$ ou $f^2(r) = r$, nós contradizemos o fato de γ ser o único ponto fixo de f^2 em $[\xi_2, \alpha]$. Logo a única possibilidade é que

$$f^2(r) = s \text{ e } f^2(s) = r.$$

Definindo $g = f^4 : [r, s] \rightarrow [r, s]$, temos que $r < \gamma < s$ são os únicos pontos fixos de g em $[r, s]$, então com um raciocínio análogo ao usado na demonstração

do Teorema 2.3, existe $x_0 \in (r, s)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Usando a regra da cadeia, obtemos que

$$x_0 = \xi \text{ ou } f^2(x_0) = \xi \text{ ou } f(x_0) = -\eta \text{ ou } f^3(x_0) = -\eta.$$

Como $f^2(x_0) \in (r, s)$, $x_0 \in (r, s)$ e $r \geq \xi_2 \geq \xi$, a únicas possibilidades que restam são

$$f(x_0) = -\eta \text{ ou } f^3(x_0) = -\eta.$$

Em particular, estamos no caso 2 e, portanto $f(\xi) \leq -\eta$ e $f(-\eta) = \alpha$, logo

$$\alpha = f^2(x_0) \in (r, s) \text{ ou } \alpha = f^4(x_0) \in (r, s),$$

o que é um absurdo. Como em qualquer dos dois casos obtemos uma contradição, o teorema está demonstrado. ■

Observação 2.8 Note que, na verdade, provamos um pouco mais do que é exigido no Teorema 2.4. Se f é como no Teorema 2.4, $f_*^2(\alpha) = \alpha$ e ξ_2 é como definido em sua prova, um exame dos argumentos mostra que existe γ com $\xi_2 < \gamma < \alpha$, tal que $f^2(\gamma) = \gamma$ satisfazendo $(f^2)'(\gamma) < -1$. Uma afirmação análoga é válida se $f_*^2(\beta) = -\beta$.

Com uma análise detalhada dos gráficos de f e f^2 , e com o mesmo tipo de argumento usado na prova do Teorema 2.4, podemos obter uma descrição mais detalhada dos pontos fixos de $g = f^2$. Se f satisfizer as hipóteses do Teorema 2.4, $f_*^2(\alpha) = \alpha$, e ξ_1 e ξ_2 são como na prova do Teorema 2.4 ($\xi_1 = \xi_2 = \xi$ se $f(\xi) \geq -\eta$), então podemos provar que g não tem ponto fixo não nulo em $[0, \xi_1]$. Se $g(\xi) \leq \xi$, então g tem únicos pontos fixos γ_1 em $[\xi_1, \xi]$ e γ_2 em $(\xi, \xi_2]$, com $g'(\gamma_2) > 1$. Se $g(\xi) > \xi$, então g não tem pontos fixos em $[\xi_1, \xi]$ e g tem no máximo dois pontos fixos em $[\xi, \xi_2]$. Se g tiver exatamente dois pontos fixos $\gamma_1 < \gamma_2$ em $[\xi, \xi_2]$, então $0 < g'(\gamma_1) < 1$ e $g'(\gamma_2) > 1$. Se g tiver exatamente um ponto fixo γ_1 em $[\xi, \xi_2]$, então $g'(\gamma_1) = 1$ e $g''(\gamma_1) > 0$.

Corolário 2.2 Suponhamos que f satisfaça as hipóteses do Teorema 2.4, e seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $n \geq 1$, uma sequência de funções C^1 , satisfazendo a hipótese (0), tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$ uniformemente em intervalos compactos, quando $n \rightarrow \infty$, e que existam constantes positivas A_n e B_n tais que

$$f_n([-B_n, A_n]) \subset [-B_n, A_n],$$

$$x f_n(x) < 0, \text{ para } x \in [-B_n, A_n] - \{0\},$$

$A_n \rightarrow \alpha$ e $B_n \rightarrow \beta$, quando $n \rightarrow \infty$.

Se $f_*^2(\alpha) = \alpha$ ou $f_*^2(-\beta) = -\beta$, então existe $\gamma \in (-\beta, \alpha)$, tal que

$$f^2(\gamma) = \gamma \text{ com } (f^2)'(\gamma) < -1,$$

e existe uma sequência $(\gamma_n) \rightarrow \gamma$, definida para n suficientemente grande, tal que

$$\gamma_n \in (-B_n, A_n), f_n^2(\gamma_n) = \gamma_n \text{ e } (f_n^2)'(\gamma_n) < -1.$$

Prova :

Pelo Teorema 2.4, existe um único $\gamma \in [\xi_2, \alpha]$, tal que

$$f^2(\gamma) = \gamma \text{ e } (f^2)'(\gamma) < 1.$$

Ainda,

$$(f^2)'(x) < 0, \text{ para } x \in (\xi_2, \alpha) \text{ e } f^2(\xi_2) = \alpha.$$

Agora, como f_n satisfaz a condição feedback negativa em $[-B_n, A_n]$, obtemos

$$f_n^2([0, A_n]) \subset [0, A_n].$$

Por hipótese $A_n \rightarrow \alpha$, quando $n \rightarrow \infty$, e como $f_n^2(x) \rightarrow f^2(x)$ uniformemente em intervalos compactos, concluímos

$$f_n^2(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^2(\alpha) = 0,$$

também

$$f_n^2(\xi_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^2(\xi) = \alpha.$$

Portanto, para n suficientemente grande, o Teorema do Valor Médio implica que existe $\gamma_n \in (\xi_2, \alpha)$, tal que

$$f_n^2(\gamma_n) = \gamma_n \text{ com } \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma} \in [\xi_2, \alpha].$$

Mas, γ é o único ponto fixo de f^2 em $[\xi_2, \alpha]$, então $\bar{\gamma} = \gamma$.

Para mostrar a última afirmação do corolário, suponhamos que

$$(f_n^2)'(\gamma_n) \geq -1, \tag{2.49}$$

para algum n . Como $f_n'(x)$ converge para $f'(x)$ uniformemente em intervalos compactos, segue que

$$-1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^2)'(\gamma_n) = (f^2)'(\gamma),$$

o que é um absurdo. Logo, devemos ter apenas um número finito de índices n 's satisfazendo (2.49). Tomando n suficientemente grande, obtemos o corolário. ■

O próximo resultado será usado na verificação das hipóteses (II) e (III) para algumas funções nos capítulos seguintes. Além disso ele poderá ser usado para aplicar a teoria desenvolvida neste capítulo para uma grande quantidade de funções .

Proposição 2.3 *Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^3 satisfazendo (PM), com constantes x_1, x_2, x_3 e x_4 como em (2.27). Suponhamos que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função C^1 tal que $\varphi'(y) > 0$ para $y \in (y_1, y_4)$ onde $\varphi(y_i) = x_i$, $i = 1, 2, 3$. Suponhamos ainda, que $y_1 = -\infty$ se $x_1 = -\infty$ e $y_4 = \infty$ se $x_4 = \infty$. Então $\varphi^{-1}f\varphi$ satisfaz (I), (II), ou (III) em $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ se, e somente, se f satisfaz (I), (II), ou (III) em x_0 respectivamente.*

Capítulo 3

Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para funções específicas

O objetivo deste capítulo é aplicar a teoria do capítulo 2, para verificar se determinadas funções satisfazem as hipóteses (0), (I), (II) e (III). Tais funções quando usadas na equação (1.1) modelam problemas ópticos, biológicos e fisiológicos.

3.1 Funções específicas f_k

Apresentaremos nesta seção as funções , que serão estudadas neste capítulo . Além disso, como as hipóteses (I), (II), e (III) exigem que f satisfaça a condição (0), determinaremos quando cada uma delas satisfaz tal hipótese.

Consideremos $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq k \leq 3$, definidas por

$$f_1(x) = x^3 - \mu x,$$

$$f_2(x) = -\mu[\text{sen}(x + \theta) - \text{sen}\theta],$$

$$f_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Os valores de f_3 para $x < 0$ são pouco importantes, então por definição conside-

remos

$$f_3(x) = f_3(0) \text{ se } x < 0,$$

além disso, assumiremos que $\nu \geq 0$ e $\theta \in (0, 2\pi)$.

A figura abaixo ilustra o gráfico da função f_1 , que apesar de simples, é muito utilizada em modelos biológicos .

Figura 3.1: Gráfico da função f_1

A função f_2 é um caso geral da função trigonométrica

$$f(x) = \mu_1 + \mu_2 \text{sen}(\mu_3 + \mu_4), \quad (3.1)$$

a qual origina-se em modelos ópticos. Além disso, após uma série de cálculos, podemos escolher os parâmetros μ e θ satisfazendo

$$\mu > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < \pi. \quad (3.2)$$

A figura abaixo ilustra o gráfico da função f_2 .

Figura 3.2: Gráfico da função f_2

A função f_3 é muito usada em modelos biológicos e fisiológicos, e tem como gráfico a figura abaixo .

Figura 3.3: Gráfico da função f_3 com ponto fixo x_0

O objetivo deste capítulo é determinar os valores dos parâmetros μ , ν e θ , para os quais as funções f_k satisfaçam as hipóteses (I), (II), e (III). A hipótese (0) é uma condição local, mais fácil de ser verificada. Encontraremos um ponto fixo x_0 e um valor μ_0 para cada função f_k tal que f_k satisfaz (0) em x_0 se, e somente, se $\mu > \mu_0$.

A função $f_1(x) = x^3 - \mu x$, claramente tem um ponto fixo $x_0 = 0$ e, além disso, $f'_1(0) = -\mu$. Como f_1 é uma função decrescente em uma vizinhança de $x_0 = 0$ obtemos que f_1 satisfaz (0) em $x_0 = 0$ se, e somente, se

$$\mu > \mu_0 = 1.$$

Consideremos agora a função $f_2(x) = -\mu[\sin(x + \theta) - \sin\theta]$, com $\mu > 0$ e $\theta \in [0, \pi)$. Claramente $x_0 = 0$ é um ponto fixo de f_2 e, além disso $f'_2(x) = -\mu \cos \theta$. Mas para f_2 satisfazer (0) em $x_0 = 0$, devemos ter

$$\mu \cos \theta > 1$$

e, portanto θ deve pertencer ao intervalo $[0, \pi/2)$, pois neste caso $\cos \theta > 0$. Assim f_2 satisfaz (0) em $x_0 = 0$ se, e somente, se

$$\mu > \mu_0 = \frac{1}{\cos \theta} \text{ com } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

O próximo teorema será útil para determinar os valores dos parâmetros para a função f_3 e para a função no exemplo do capítulo 4, satisfazerem a hipótese (0).

Teorema 3.1 *Suponhamos $\bar{f} : [0, b) \rightarrow [0, b)$ uma função contínua com derivada em todos os pontos do intervalo $(0, b)$, e que exista uma constante $\theta \geq 0$ tal que $\bar{f}'(x) > 0$ para $0 < x < \theta$ e $\bar{f}'(x) < 0$ para $\theta < x < b$. Suponhamos também que exista $s_0 > \theta$ tal que*

$$\frac{d}{dx} x \bar{f}(x) > 0 \text{ se } 0 < x < s_0$$

e

$$\frac{d}{dx} x \bar{f}(x) < 0 \text{ se } s_0 < x < b.$$

Então para $\mu \geq \theta(\bar{f}(\theta))^{-1}$, a equação $\mu \bar{f}(x) = x$ tem uma única solução $x_0 = x_0(\mu)$ tal que $x_0 \geq \theta$ e $\mu \bar{f}$ satisfaz (0) em x_0 se, e somente, se $\mu > \mu_0 = s_0(\bar{f}(s_0))^{-1}$.

Prova :

(a) Mostraremos primeiramente que para cada $\mu \geq \theta(\bar{f}(\theta))^{-1}$, existe uma única solução $x_0 = x_0(\mu) \geq \theta$ de $\mu\bar{f}(x) = x$.

De fato :

Suponhamos $\theta > 0$. Como $\bar{f}$ tem derivada em todos os pontos de $(0, b)$, então por hipótese, $\bar{f}'(\theta) = 0$, e como $\theta > 0$, temos $\bar{f}(\theta) > 0$. Consideremos $g = \mu\bar{f}$. Então para cada $\mu \geq \theta(\bar{f}(\theta))^{-1}$ temos que g é estritamente decrescente em (θ, b) e, além disso, $g(\theta) \geq \theta$. Logo existe $x_0 = x_0(\mu)$ tal que $g(x_0) = x_0$ com $x_0 \geq \theta$, demonstrando portanto o resultado desejado. Observemos que se $\mu = \theta(\bar{f}(\theta))^{-1}$, temos $x_0 = \theta$.

(b) Mostraremos agora que $\mu\bar{f}$ satisfaz (0) no ponto fixo $x_0(\mu)$ dado na parte (a) se, e somente, se $\mu > s_0[\bar{f}(s_0)]^{-1}$.

De fato :

A idéia da demonstração é parametrizar $\mu\bar{f}$ pelo ponto fixo $s = x_0(\mu)$ obtido no caso (a), no lugar de μ . Como $\bar{f}(s)$ é estritamente crescente para $s > \theta$, então $s(\bar{f}(s))^{-1}$ é estritamente crescente para $s > \theta$, então podemos definir

$$\mu(s) = s[\bar{f}(s)]^{-1}, \text{ para } s \geq \theta.$$

Assim, $\mu(s)\bar{f}(s)$ tem um único ponto fixo $s \geq \theta$. Portanto os conjuntos abaixo são os mesmos

$$\{\mu : \mu\bar{f}'(x_0(\mu)) < -1\} = \{\mu(s) : \mu(s)\bar{f}'(s) < -1\}.$$

Mas $\mu(s)\bar{f}'(s) < -1$ se, e somente se $\frac{d}{ds}(s\bar{f}(s)) < 0$, pois

$$\frac{d}{ds}(s\bar{f}(s)) < 0 \Leftrightarrow s\bar{f}'(s) + \bar{f}(s) < 0 \Leftrightarrow$$

$$s\bar{f}'(s)\mu(s) + \mu(s)\bar{f}(s) < 0 \Leftrightarrow s(\bar{f}'(s)\mu(s) + 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu(s)\bar{f}'(s) < -1.$$

Por hipótese $\frac{d}{ds}(s\bar{f}(s)) < 0$ se, e somente, se $s > s_0$. Portanto $\mu\bar{f}'(x_0) < -1$ se, e somente, se $\mu > s_0(\bar{f}(s_0))^{-1}$. ■

Vamos agora aplicar o Teorema 3.1 para determinar os valores do parâmetro μ para os quais a função f_3 satisfaz a hipótese (0). É fácil ver que $\bar{f}_3 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $\bar{f}_3(x) = x^\nu e^{-x}$ é uma função contínua, com derivada em todos os pontos de $(0, \infty)$. Um cálculo mostra que $\bar{f}_3'(x) = e^{-x}x^{\nu-1}(\nu - x)$. Logo a constante θ no Teorema 3.1 deve ser igual a ν . Ainda,

$$\frac{d}{ds}(s\bar{f}_3(s)) = e^{-s}s^\nu(\nu + 1 - s).$$

Assim a constante s_0 do Teorema 3.1 para f_3 é $s_0 = \nu + 1$. Concluimos portanto do Teorema 3.1 que

- para cada $\mu \geq \nu^{1-\nu}e^\nu$, a função f_3 tem um único ponto fixo $x_0 \geq \nu$.
- A função f_3 satisfaz (0) em x_0 se, e somente, se

$$\mu > s_0(\bar{f}_3(s_0))^{-1} = \mu_0 = (\nu + 1)^{1-\nu}e^{1+\nu}.$$

A Tabela 3.1 abaixo resume os resultados obtidos nesta seção . Colocaremos também os resultados para a função $f_4(x) = \mu - x^2$, mas não faremos os cálculos, pois são análogos aos da função f_1 .

Tabela 3.1: Pontos fixos x_0 de f_k e valores críticos μ_0 tais que f_k satisfaz (0) em x_0 se, e somente, se $\mu > \mu_0$, para θ e ν satisfazendo as restrições .

k	x_0	μ_0	Restrições
1	0	1	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ $\nu \geq 0$
2	0	$\frac{1}{\cos \theta}$	
3	$x_0 > \nu$	$(\nu + 1)^{1-\nu}e^{\nu+1}$	
4	$\frac{-1+\sqrt{4\mu+1}}{2}$	$\frac{3}{4}$	

3.2 As condições (NS_1) e (NS_2) para as funções f_k

Para aplicar a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para as funções f_k , precisaremos assumir que tais funções satisfaçam as condições (NS_1) ou (NS_2) , mas para isso, é necessário que elas satisfaçam primeiramente a condição (0). Portanto, mostraremos que cada f_k satisfaz (NS_1) ou (NS_2) em seus respectivos pontos fixos x_0 com $\mu > \mu_0$, onde x_0 e μ_0 dados na Tabela 3.1. Analisemos primeiro a propriedade (PM).

- Consideremos $f_1(x) = x^3 - \mu x$, com ponto fixo $x_0 = 0$ e $\mu > \mu_0 = 1$. É fácil ver que os zeros não nulos de f_1 são

$$x_1 = 0 - \beta = -\sqrt{\mu} \quad \text{e} \quad x_4 = 0 + \alpha = \sqrt{\mu}.$$

Ainda, os únicos pontos críticos de f_1 são

$$x_2 = 0 - \eta = -\frac{\sqrt{3\mu}}{3} \quad \text{e} \quad x_3 = 0 + \xi = \frac{\sqrt{3\mu}}{3}$$

e, além disso x_2 é um ponto de máximo e x_3 é um ponto de mínimo de f_1 . Portanto f_1 satisfaz (PM) com as constantes acima.

- Mostremos agora que $f_2(x) = -\mu[\sin(x + \theta) - \sin\theta]$ satisfaz (PM) no ponto fixo $x_0 = 0$ com $\mu > 1/\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi/2)$. Um cálculo mostra que os zeros não nulos de f_2 são

$$x = \pi - 2\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e os pontos críticos são

$$x = \frac{\pi}{2} - \theta + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim com

$$\begin{aligned} x_1 &= -\pi - 2\theta, & x_2 &= -\frac{\pi}{2} + \theta, \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} - \theta & \text{e} & \quad x_4 = \pi - 2\theta, \end{aligned}$$

temos que f_2 satisfaz (PM) em $x_0 = 0$ para $\mu > 1/\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi/2)$.

- Para a função $f_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}$ com único ponto fixo $x_0 > \nu$, $\mu > (\nu + 1)^{1-\nu} e^{\nu+1}$ e $\nu \geq 0$ já vimos que

$$\begin{aligned} f'_3(x) &> 0 \text{ se } 0 < x < \nu, \\ f'_3(x) &< 0 \text{ se } \nu < x < \infty, \\ f'_3(\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Ainda, pelo Teorema 3.1 temos que o ponto fixo $x_0 > \nu$ satisfaz

$$f_3(x_0) = x_0 < f_3(\nu).$$

Portanto existe $x_1 < \nu$ tal que $f_3(x_1) = x_0$. Ainda, tomando $x_2 = \nu$ e $x_3 = x_4 = \infty$ vemos que f_3 satisfaz (PM) em $x_0 > \nu$.

Observemos que o ponto fixo x_0 da função f_3 e as constantes x_1 e x_2 da propriedade (PM) para f_3 , não foram explicitadas, por isso teremos um pouco mais de trabalho para determinar os valores do parâmetro μ para os quais f_3 satisfaz as hipóteses (I), (II), e (III).

Determinaremos agora quando as funções f_k possuem derivada Schwarziana negativa, nos respectivos pontos fixos, e com as constantes da propriedade (PM) determinadas acima. Determinando dessa forma quando tais funções satisfazem as condições (NS_1) e (NS_2) .

- Consideremos primeiro $f_1(x) = x^3 - \mu x$. Como f_1 é um polinômio, então $|f_1(x)| < e^{|x|}$, para $|x|$ suficientemente grande. Portanto a ordem ω de f_1 é menor ou igual a 2. A Proposição 1.2 implica neste caso que

$$Sf_1(x) < 0 \text{ quando } f_1'(x) \neq 0.$$

Portanto f_1 satisfaz (NS_2) para todo $x \in \mathbb{R}$, no ponto fixo $x_0 = 0$ se $\mu > \mu_0 = 1$.

- Para a função $f_2(x) = -\mu[\sin(x + \theta) - \sin\theta]$ temos

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -\mu \cos(x + \theta), \\ f_2''(x) &= \mu \sin(x + \theta), \\ f_2'''(x) &= \mu \cos(x + \theta), \end{aligned}$$

logo

$$Sf_2(x) = -1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu \sin(x + \theta)}{\mu \cos(x + \theta)} \right)^2 \leq -1.$$

Como $\mu \cos(x + \theta) \neq 0$. Ou seja,

$$Sf_2(x) < 0 \text{ se } f_2'(x) \neq 0.$$

Portanto f_2 satisfaz (NS_2) para todo $x \in \mathbb{R}$ no ponto fixo $x_0 = 0$ se $\mu > \mu_0 = 1/\cos\theta$, com $\theta \in [0, \pi/2)$.

- Para determinarmos quando a função $f_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}$ possui derivada Schwarziana negativa, usaremos o item (v) da Proposição 1.1. Temos

$$f_3'(x) = e^{-x} x^{\nu-1} (\nu\mu - \mu x),$$

logo supondo $\mu > 0$, $x \neq 0$ e $x \neq \nu$ temos

$$\frac{d^2}{dx^2} \log |f_3'(x)| = -\frac{\nu-1}{x^2} - \frac{1}{(x-\nu)^2}. \quad (3.3)$$

1. Se $\nu \geq 1$, então (3.3) é negativo. Portanto a Proposição 1.1 implica que f_3 satisfaz (NS_2) para todo $x > 0$ no ponto fixo $x_0 > \nu$ se $\mu > \mu_0$ e $\nu \geq 1$.
2. Se $0 < \nu < 1$ e $x > \nu$, então
$$\frac{-\nu + 1}{x^2} - \frac{1}{(x - \nu)^2} < -\frac{\nu - 1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{\nu}{x^2} < 0,$$
ou seja, (3.3) é negativo. Portanto f_3 satisfaz (NS_1) em $x_0 > \nu$ se $\mu > \mu_0$.
3. Se $\nu = 0$, é fácil mostrar que $Sf_3(x) = -1/2$ para todo $x > 0$ e, portanto f_3 satisfaz (NS_2) no ponto fixo $x_0 > \nu$ se $\mu > \mu_0$.

A Tabela 3.2 abaixo, resume os resultados obtidos nessa seção . Colocaremos também os dados da função $f_4(x) = \mu - x^2$, mas não faremos os cálculos, pois são análogos aos feitos para a função f_1 .

Tabela 3.2: Valores onde a derivada Schwarziana de f_k é negativa quando $f'_k(x) \neq 0$, e onde (NS_1) ou (NS_2) são válidas, no ponto fixo x_0 para $\mu > \mu_0$.

k	Valores onde a derivada Schwarziana é negativa quando $f'_k(x) \neq 0$	Condições (NS_1) ou (NS_2) satisfeitas em x_0 para todo $\mu > \mu_0$
1	$\forall x \in \mathbb{R}, \mu \geq 0$	(NS_2)
2	$\forall x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$	(NS_2) quando $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
3	$x > 0$ quando $\nu \geq 1$	(NS_2) quando $\nu \geq 1$ ou $\nu = 0$
	$x > 0$ quando $0 \leq \nu < 1$	(NS_1) quando $0 < \nu < 1$
4	$\forall x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$	(NS_2)

3.3 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_1

Nesta seção determinaremos os valores do parâmetro μ para os quais a função f_1 satisfaz (I) em $x_0 = 0$, desde que f_1 satisfaça as restrições da Tabela 3.2 para

satisfazer (NS_2) .

Teorema 3.2 *Consideremos $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x^3 - \mu x$. Então f_1 satisfaz (I), (II), e (III) em $x_0 = 0$ se, e somente, se*

$$(1) \quad \mu_0 < \mu < \mu_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$(2) \quad \mu_0 < \mu \leq \mu_2 = 2,$$

$$(3) \quad \mu_0 < \mu \leq \mu_3 = \frac{3}{2},$$

respectivamente

Prova :

Observemos primeiramente que para determinarmos quando f_1 satisfaz (I), (II), e (III) , ela deve satisfazer (NS_1) ou (NS_2) e portanto, pela Tabela 3.2, devemos ter $\mu > \mu_0 = 1$. Já vimos que as constantes da (PM) para f_1 são dadas por

$$x_1 = -\sqrt{\mu} \quad , \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$$

$$x_3 = +\frac{\sqrt{3\mu}}{3} \quad \text{e} \quad x_4 = \sqrt{\mu}.$$

Logo a definição em (2.28) para f_1 fica

$$f_{1*}(x) = \begin{cases} \frac{2\mu\sqrt{3\mu}}{9} & \text{se } x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3\mu}}{3}] , \\ x^3 - \mu x & \text{se } x \in (-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}, \frac{\sqrt{3\mu}}{3}), \\ -\frac{2\mu\sqrt{3\mu}}{9} & \text{se } x \in [\frac{\sqrt{3\mu}}{3}, \infty). \end{cases} \quad (3.4)$$

- Para determinarmos quando f_1 satisfaz (I) em $x_0 = 0$, precisamos verificar as condições (2.29), ou seja, devemos encontrar os valores de μ tais que

$$(f_{1*}^2)(\sqrt{\mu}) < \sqrt{\mu} \quad \text{e} \quad (f_{1*}^2)(-\sqrt{\mu}) > -\sqrt{\mu}.$$

Como

$$(f_{1*}^2)(\sqrt{\mu}) = f_{1*}\left(\frac{-2\mu\sqrt{3\mu}}{9}\right),$$

temos dois caso a considerar :

1. Se $\mu \geq 3/2$, então $\frac{-2\mu\sqrt{3\mu}}{9} \leq -\frac{\sqrt{3\mu}}{3}$ e, portanto

$$f_{1*}^2(\sqrt{\mu}) = \frac{2\mu\sqrt{3\mu}}{9}.$$

Assim

$$f_{1*}^2(\sqrt{\mu}) = \frac{2\mu\sqrt{3\mu}}{9} < \sqrt{\mu} \Leftrightarrow \mu < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, se $\mu \in [3/2, 3\sqrt{3}/2)$ temos $(f_{1*}^2)(\sqrt{\mu}) < \sqrt{\mu}$.

2. Se $\mu < 3/2$, então $-\frac{\sqrt{3\mu}}{3} < -\frac{2\mu\sqrt{3\mu}}{9}$ e, portanto

$$f_{1*}^2(\sqrt{\mu}) = -\frac{8\sqrt{3\mu}\mu^4}{243} + \frac{2\sqrt{3\mu}\mu^2}{9}.$$

Assim

$$f_{1*}^2(\sqrt{\mu}) < \sqrt{\mu} \Leftrightarrow p(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} -8\mu^4\sqrt{3} + 54\sqrt{3}\mu^2 - 243 < 0.$$

Mas $p(\mu) < 0$ para todo $\mu \geq 0$. Portanto, se $\mu \in (1, 3/2)$ temos também que $(f_{1*}^2)(\sqrt{\mu}) < \sqrt{\mu}$.

Juntando esses dois casos temos que

$$(f_{1*}^2)(\sqrt{\mu}) < \sqrt{\mu} \text{ se, e somente, se } \mu \in (1, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

Com o mesmo raciocínio mostramos que

$$(f_{1*}^2)(-\sqrt{\mu}) > -\sqrt{\mu} \text{ se, e somente, se } \mu \in (1, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

- Para determinarmos quando f_1 satisfaz (III) em $x_0 = 0$, devemos determinar os valores de μ tais que

$$(f_{1*}^2)(\frac{\sqrt{3\mu}}{3}) \leq \frac{\sqrt{3\mu}}{3} \text{ e } (f_{1*}^2)(-\frac{\sqrt{3\mu}}{3}) \geq -\frac{\sqrt{3\mu}}{3}.$$

O mesmo tipo de argumento usado no caso anterior implica que f_1 satisfaz (III) em $x_0 = 0$ se, e somente, se $1 < \mu \leq 3/2$.

- Para determinarmos quando f_1 satisfaz (II) em $x_0 = 0$, usaremos o Teorema 2.3, ou seja, devemos analisar as condições (i) e (ii) do referido teorema para números reais a, b tais que

$$f_1(a) = b \text{ e } f_1(b) = a \tag{3.5}$$

satisfazendo

$$-\sqrt{\mu} < a < 0 < b < \sqrt{\mu}. \tag{3.6}$$

Temos

$$af_1(a) - bf_1(b) = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)[-(a^2 + b^2) + \mu] = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = -b \text{ ou } \mu = a^2 + b^2 \text{ se } a \neq b.$$

Ainda,

$$f_1(a) - b - f_1(b) - a = 0,$$

então

$$a^2 + ab + b^2 = \mu - 1.$$

Portanto, se $a \neq -b$ devemos ter $\mu = a^2 + b^2$, donde

$$ab = -1 \tag{3.7}$$

Mas $f_1(a) = b$, logo $a^3 - \mu a = -b$ e, portanto (3.7) implica que

$$a^4 - \mu a^2 = -1,$$

e esta equação tem solução se, e somente, se $\mu \geq 2$. Portanto, se $1 < \mu < 2$ devemos ter $a = -b$. Mas f_1 é uma função ímpar logo

$$f_1(a) = f_1(-b) = -f_1(b) = -a,$$

ou seja,

$$a^3 - \mu a = a.$$

Resolvendo esta equação e usando (3.6), obtemos que

$$a = -\sqrt{\mu - 1} \text{ e } b = \sqrt{\mu - 1} \tag{3.8}$$

são as únicas soluções satisfazendo (3.5). Ainda

$$(f_1^2)'(a) = f_1'(a)f_1'(b) = (f_1^2)'(b) = (3a^2 - \mu)(3b^2 - \mu). \tag{3.9}$$

Agora temos três caso a considerar

1. Se $1 < \mu < 2$, então temos que $a = -\sqrt{\mu - 1}$ e $b = \sqrt{\mu - 1}$ são os únicos pontos fixos de f_1^2 satisfazendo (3.5) e (3.6). Substituindo estes valores em (3.9) temos

$$(f_1^2)'(a) = (f_1^2)'(b) = (2\mu - 3)^2 < 1.$$

Portanto, o Teorema 2.3 implica que f_1 satisfaz (II) em x_0 .

2. Se $\mu > 2$ e tomarmos $a = -b$, então novamente substituindo em (3.9) temos que

$$|(f_1^2)'(a)| = |(f_1^2)'(b)| = (2\mu - 3)^2 > 1.$$

Portanto, neste caso o Teorema 2.3 implica que f_1 não satisfaz (II).

3. O caso em que $\mu = 2$, é fácil mostrar analiticamente que f_1 satisfaz (II) em $x_0 = 0$.

Portanto f_1 satisfaz (II) em $x_0 = 0$ se, e somente, se $1 < \mu \leq 2$. ■

3.4 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_2

Nesta seção encontraremos os valores do parâmetro μ para os quais a função f_2 satisfaz (I) e (III) no ponto fixo $x_0 = 0$ com $\mu > \mu_0 = 1/\cos \theta$ e $0 \leq \theta < \pi/2$, de acordo com a Tabela 3.2. Mostraremos que existe um intervalo (μ_0, μ_2) tal que se $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$, então f_2 satisfará (II).

Teorema 3.3 *Seja $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = -\mu[\sin(x + \theta) - \sin \theta]$ com $\theta \in [0, \pi/2)$. Então existem funções contínuas*

$$\mu_1, \mu_3 : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$$

tais que

$$\mu_0(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} < \mu_3(\theta) < \mu_1(\theta).$$

Temos que f_2 satisfaz (I) ou (III) em $x_0 = 0$ se, e somente, se

$$\mu_0(\theta) < \mu < \mu_1(\theta),$$

ou

$$\mu_0(\theta) < \mu < \mu_3(\theta),$$

respectivamente.

Prova :

Suponhamos que $\mu > 0$ e $0 \leq \theta < \pi/2$, então já vimos que as constantes da (PM) para f_2 são

$$x_1 = -\pi - 2\theta \text{ e } x_2 = -\frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ e } x_4 = \pi - 2\theta.$$

Logo, a definição em (2.28) para f_2 fica

$$f_{2*}(x) = \begin{cases} \mu(1 + \sin \theta) & \text{se } x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - \theta], \\ f_2(x) & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \theta), \\ -\mu(1 - \sin \theta) & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases} \quad (3.10)$$

Logo

$$f_{2*}(x_3) = f_{2*}(x_4) = -\mu(1 - \text{sen}\theta)$$

e

$$f_{2*}(x_1) = f_{2*}(x_2) = \mu(1 + \text{sen}\theta).$$

Para determinarmos quando f_2 satisfaz (I) ou (III) em $x_0 = 0$, utilizaremos o Teorema 2.1, ou seja, devemos analisar as condições (2.29) e (2.30). Mas,

$$\begin{aligned} \text{se } (f_{2*})^2(x_4) < x_4, \text{ então } (f_{2*})^2(x_1) &> x_1, \\ \text{se } (f_{2*})^2(x_3) \leq x_3, \text{ então } (f_{2*})^2(x_2) &\geq x_2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mostraremos apenas a última implicação de (3.11), pois a outra prova-se de maneira análoga. Suponhamos, por absurdo, que

$$(f_{2*})^2(x_2) < x_2. \tag{3.12}$$

Usando (3.10) e (3.12) obtemos

$$f_{2*}(x_3) \leq f_{2*}(f_{2*}(x_2)) = (f_{2*})^2(x_2) < x_2,$$

e novamente por (3.10)

$$(f_{2*})^2(x_3) = f_{2*}(x_2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (f_{2*})^2(x_3) &= f_{2*}(x_2) = \mu(1 + \text{sen}\theta) \geq \mu(1 - \text{sen}\theta) = \\ &= -f_{2*}(x_3) > -x_2 = \frac{\pi}{2} + \theta \geq \frac{\pi}{2} - \theta = x_3, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.11).

Logo, para determinarmos quando f_2 satisfaz (I) e (III), devemos encontrar os valores de μ tais que

$$(f_{2*})^2(x_4) < x_1$$

e

$$(f_{2*})^2(x_3) \geq x_3.$$

Notemos ainda que

$$(f_{2*})^2(x_3) = (f_{2*})^2(x_4).$$

Consideremos $h : (0, \infty) \times [0, \pi/2) \rightarrow (0, \infty)$ definida por $h(\mu, \theta) = (f_{2*})^2(x_3) = (f_{2*})^2(x_4)$. Então (3.10) implica que

$$h(\mu, \theta) = \begin{cases} \mu[\sin\theta - \sin(\theta - \mu(1 - \sin\theta))] & \text{se } \mu \leq \frac{\pi/2 + \theta}{1 - \sin\theta}, \\ \mu(1 + \sin\theta) & \text{se } \mu \geq \frac{\pi/2 + \theta}{1 - \sin\theta}. \end{cases}$$

É fácil mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \mu} h(\mu, \theta) > 0, \text{ para } \mu > 0,$$

ou seja, h é uma função estritamente crescente de μ , para cada $\theta \in [0, \pi/2)$ fixado. Ainda, se $a \in \mathbb{R}_+$, então existe um único $\mu(a)$ tal que

$$h(\mu(a), \theta) = a, \text{ para cada } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

De fato :

- Se

$$a \geq \frac{(1 + \sin\theta)(\pi/2 + \theta)}{1 - \sin\theta},$$

então tomando $\mu(a) = a/(1 + \sin\theta)$ temos que $h(\mu(a), \theta) = a$, para todo $\theta \in [0, \pi/2)$.

- Se

$$a \leq \frac{(1 + \sin\theta)(\pi/2 + \theta)}{1 - \sin\theta},$$

então tomando

$$\mu(a) = \frac{a}{\sin\theta - \sin(\theta - \mu(1 - \sin\theta))},$$

temos que $h(\mu(a), \theta) = a$, para todo $\theta \in [0, \pi/2)$.

A unicidade segue imediatamente da monotonicidade de h na variável μ . Portanto, para cada $a > 0$ e $\theta \in (0, \pi/2)$ temos que existe um único $\mu = \mu(a, \theta)$ tal que $h(\mu, \theta) = a$. Assim, existem funções contínuas

$$\mu_1, \mu_3 : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$$

tais que

$$h(\mu_1(\theta), \theta) = x_4$$

$$h(\mu_3(\theta), \theta) = x_3.$$

Novamente a monotonicidade de h em μ implica que para cada θ fixado temos

$$h(\mu, \theta) < h(\mu_1(\theta), \theta) \Leftrightarrow \mu < \mu_1(\theta), \quad (3.13)$$

$$h(\mu, \theta) < h(\mu_3(\theta), \theta) \Leftrightarrow \mu < \mu_3(\theta).$$

Ainda, se $\mu = \mu_0(\theta) = 1/\cos \theta$, então $f_2'(0) = -1$. Logo o Teorema 2.2 garante que

$$h\left(\frac{1}{\cos \theta}, \theta\right) < x_3 = h(\mu_3, \theta) < x_4 = h(\mu_1(\theta), \theta).$$

Portanto,

$$\mu_0(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} < \mu_3(\theta) < \mu_1(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

Mas, para $\mu > \mu_0(\theta)$ já vimos que f_2 satisfaz (NS_2) . Assim (3.13) e o Teorema 2.1, implicam que f_2 satisfaz (I) ou (III) em $x_0 = 0$ se, e somente, se

$$\mu_0(\theta) < \mu < \mu_1,$$

$$\mu_0(\theta) < \mu \leq \mu_3,$$

para $\theta \in [0, \pi/2)$, respectivamente. ■

Observação 3.1 Para $\mu_1(\theta)$, vimos no Teorema 3.3 que f_2 não satisfaz (I). Logo, tomando $f_n(x) = -\mu_n[\sin(x + \theta) - \sin \theta]$ com

$$\mu_n \rightarrow \mu_1, \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}),$$

o Corolário 2.2 implica que f_2 não satisfaz (II) se $\mu_1 - \delta < \mu \leq \mu_1$. Ainda, para $\mu = \mu_3(\theta)$, temos que os pontos 2-*periódicos* a e b de f_2 são *super-estáveis*, isto é, $(f_2^2)'(a) = (f_2^2)'(b) = 0$. Portanto, deve existir $\bar{\mu}_2(\theta) > \mu_3(\theta)$, para todo $\theta \in [0, \pi/2)$ tal que se $\mu_0(\theta) < \mu < \bar{\mu}_2(\theta)$, então f_2 satisfaz (II) em $x_0 = 0$.

3.5 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f_3

Para encontrarmos os valores do parâmetro μ tais que f_3 satisfaça (I), (II) ou (III), demonstraremos primeiro alguns resultados gerais que nos ajudarão a determinar quando f_3 e a função do exemplo no capítulo 4 satisfazem tais hipóteses.

Além disso, estes teoremas podem ser usados para determinar quando as hipóteses (I), (II), e (III) são válidas para outras funções, que não serão estudadas aqui.

Teorema 3.4 *Suponhamos que $\bar{f} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ seja uma função C^3 , e que existam números $0 \leq \theta < s_0$ tais que*

$$\bar{f}'(x) > 0, \text{ para } 0 < x < \theta,$$

$$\bar{f}'(x) < 0, \text{ para } x > \theta$$

e

$$\frac{d}{dx}x\bar{f}(x) > 0, \text{ para } 0 < x < s_0,$$

$$\frac{d}{dx}x\bar{f}(x) < 0, \text{ para } x > s_0.$$

Suponhamos também que $(S\bar{f})(x) < 0$ para $x > \theta$. Consideremos funções $\mu(s)$, $x_1(s)$, $x_2(s)$ e $x_3(s)$ definidas por :

$$\mu(s) = s(\bar{f})^{-1}, \quad x_1(s) = \mu(s)\bar{f}(\theta)$$

e

$$x_j(s) = \mu(s)\bar{f}(x_{j-1}(s)), \text{ para } j = 2, 3.$$

Se $x_0(\mu)$ for o único ponto fixo de $\mu\bar{f}(x)$ tal que $x_0(\mu) \geq \theta$, para $\mu \geq \theta(\bar{f}(\theta))^{-1}$, então

$$\{\mu : \mu\bar{f}(x) \text{ satisfaz (I) em } x_0(\mu)\} = \{\mu(s) : s > s_0 \text{ e } x_3(s) > s\}.$$

e

$$\{\mu : \mu\bar{f}(x) \text{ satisfaz (III) em } x_0(\mu)\} = \{\mu(s) : s > s_0 \text{ e } x_2(s) \geq s\}.$$

Além disso, existe um número $\mu_3 > \mu(s_0) = \mu_0$ tal que $\mu\bar{f}$ satisfaz (III) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu \in (\mu_0, \mu_3]$. Ainda, $\mu_3 < \infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\bar{f}(x) = 0,$$

e neste caso $\mu_3 = z(\bar{f}(\theta))^{-1}$, onde $z > s_0$ é raiz de $z\bar{f}(z) = \theta\bar{f}(\theta)$.

Prova :

1ª parte : Para cada $\mu > 0$ consideremos $x_0 = x_0(\mu)$ o único ponto fixo de $\mu\bar{f}$. Temos que existe $x_1 = x_1(\mu) < \theta$ tal que

$$\mu\bar{f}(x_1) = \mu\bar{f}(x_0),$$

e tomando $x_2 = \theta$ e $x_3 = x_4 = \infty$ temos que $\mu\bar{f}$ satisfaz (PM) no ponto fixo $x_0(\mu)$. A figura abaixo ilustra o gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do teorema.

Figura 3.4: Gráfico de uma função $f = \mu\bar{f}$ satisfazendo (PM) com $x_2 = \theta$ e $x_3 = x_4 = \infty$

Assim, a definição em (2.28) para $\mu\bar{f}$ fica

$$\mu\bar{f}(x) = \begin{cases} (\mu\bar{f})(\theta) & \text{se } x \in (-\infty, \theta), \\ (\mu\bar{f})(x) & \text{se } x \in [\theta, \infty). \end{cases}$$

Agora, a definição de $\mu\bar{f}$ acima, e o Teorema 2.1, implicam que $\mu\bar{f}$ satisfaz (I) ou (III) em x_0 se, e somente, se $\mu > \mu_0$ e

$$(\mu\bar{f})_*^2(\theta) = (\mu\bar{f})^2(\theta) \geq \theta \quad (3.14)$$

e

$$(\mu\bar{f})_*^2(x_1) = (\mu\bar{f})^2(\theta) > x_1, \quad (3.15)$$

respectivamente. Mas,

$$x_1 < (\mu\bar{f})^2(\theta) \Leftrightarrow (\mu\bar{f})^3(\theta) > x_0,$$

ou seja, $\mu\bar{f}$ satisfaz (I) em x_0 se, e somente, se $\mu > \mu_0$ e

$$(\mu\bar{f})^3(\theta) > x_0. \quad (3.16)$$

Como $\mu\bar{f}(x_0) = x_0$, então podemos definir

$$\mu = x_0[\bar{f}(x_0)]^{-1} = s[\bar{f}(s)]^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mu(s),$$

e como $s[\bar{f}(s)]^{-1}$ é uma função estritamente crescente de $s = x_0 = x_0(\mu)$, então podemos parametrizar $\mu\bar{f}$ pelo ponto fixo s no lugar de μ .

Definindo μ , x_1 , x_2 e x_3 como no enunciado do teorema, temos que $\mu(s)\bar{f}(x)$ satisfaz (III) ou (I) no ponto fixo $s \geq \theta$ se, e somente, se $s > s_0$ e

$$x_2(s) \geq \theta \quad (3.17)$$

ou

$$x_3(s) > s, \quad (3.18)$$

respectivamente.

Temos que para cada $s \geq \theta$ a função $\mu(s)\bar{f}(x)$ tem um único ponto fixo $s = x_0(s)$. Consideremos então a função $g : (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) \times (x_0(s) - \delta_1, x_0(s) + \delta_1)$ definida por

$$g(s, x) = \mu(s)\bar{f}(x).$$

Tomando δ_0 e δ_1 suficientemente pequenos, podemos supor que g tenha derivada Schwarziana negativa com relação à variável x para todo $s \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$. Com um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Teorema 3.1 é fácil mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x} g(s_0, x_0(s_0)) = \mu(s_0)\bar{f}'(x_0(s_0)) = -1,$$

notando que $s_0 = x_0(s_0) = x_0(\mu_0)$ é o ponto fixo da aplicação $\mu_0\bar{f}$. Ainda,

$$g(s, x_0(s)) = \mu(s)\bar{f}(x_0(s)) = x_0(s),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial s \partial x} g(s_0, x_0(s_0)) = \mu'(s_0)\bar{f}'(x)|_{s=s_0, x=x_0(s_0)} < 0,$$

pois, $\bar{f}'(x) < 0$ para $x > \theta$ e $\mu'(s) > 0$. Logo o Corolário 3.1 implica que existe $\delta > 0$ tal que $\mu(s)\bar{f}(x)$ satisfaz (III) no ponto fixo $x_0(s) = x_0(\mu)$ para $s_0 < s < s_0 + \delta$, demonstrando a primeira parte do teorema.

2ª parte : Para mostrar a outra parte do teorema, devemos mostrar que $\mu\bar{f}$ satisfaz (III) em um intervalo $(\mu_0, \mu_3]$. Para isso, usando (3.17) é suficiente mostrar que

$$\{s : s > s_0 \text{ e } x_2(s) \geq \theta\}$$

é um intervalo $(s_0, s_*)]$, pois neste caso definindo $\mu_3 = \mu(s_*)$, temos que $\mu\bar{f}$ satisfará (III) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu \in (\mu_0, \mu_3]$. Agora, para s próximo

de s_0 , já vimos na primeira parte da demonstração que $x_2(s) \geq \theta$. Logo precisamos mostrar apenas que $x_2'(s) < 0$, para $s > s_0$. Usando a regra da cadeia, temos que

$$x_1'(s) = \bar{f}(\theta)[\bar{f}(s)]^{-2}[\bar{f}(s) - s\bar{f}'(s)]$$

e como $\bar{f}'(s) < 0$ para $s > \theta$, então $x_1'(s) > 0$ para todo $s > \theta$. Ainda, é fácil mostrar que

$$x_1(s) > s > s_0, \text{ para } s > s_0,$$

e isto implica que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x_1(s) = \infty \quad (3.19)$$

Escrevendo $\mu(s) = x_1(s)(\bar{f}(\theta))^{-1}$, e definindo

$$g(s) = [\bar{f}(\theta)]^{-1}x\bar{f}(x),$$

temos

$$x_2(s) = g(x_1(s)) \text{ e } x_2'(s) = g'(x_1(s))x_1'(s). \quad (3.20)$$

Mas, como $x_1(s) > s_0$ e $g'(s) < 0$ para $s > s_0$, então $x_2'(s) < 0$, para $s > s_0$.

3ª parte: Suponhamos que exista $s_* > s_0$ e $z > s_0$ tais que $x_2(s_*) = \theta$ e $x_1(s_*) = z$. Então

$$\begin{aligned} \theta = x_2(s_*) &= [\bar{f}(\theta)]^{-1}x_1(s_*)\bar{f}(x_1(s_*)) = \\ &= [\bar{f}(\theta)]^{-1}z\bar{f}(z). \end{aligned}$$

Logo,

$$\theta\bar{f}(\theta) = z\bar{f}(z).$$

Como já vimos na 2ª parte $\mu(s)\bar{f}(x)$ satisfaz (III) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu \in (\mu_0, \mu_3]$, onde $\mu_3 = \mu(s_*)$ e s_* é tal que $x_2(s_*) = \theta$. Assim, $\mu_3 = z[\bar{f}(\theta)]^{-1}$, onde $s_0 < z < 1$ é raiz de $z\bar{f}(z) = \theta\bar{f}(\theta)$.

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} x\bar{f}(x) = 0$, então (3.20) implica que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} x_2(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} g(x_1(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{f}(\theta)^{-1}x_1(s)\bar{f}(x_1(s)) = \\ &= \bar{f}(\theta)^{-1} \lim_{s \rightarrow \infty} x_1(s)\bar{f}(x_1(s)). \end{aligned}$$

Mas então (3.19) implica que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x_2(s) = \bar{f}(\theta)^{-1} \lim_{s \rightarrow \infty} x_1(s)\bar{f}(x_1(s)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x\bar{f}(x) = 0.$$

Portanto existe $s_* > s_0$ tal que $x_2(s_*) = \theta$, e neste caso já vimos que $\mu_3 < \infty$. ■

Corolário 3.1 *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto, e $\bar{f} : (0, \infty) \times D \rightarrow (0, \infty)$ uma função C^3 tal que a aplicação $x \rightarrow \bar{f}(x, \gamma)$ satisfaça todas as hipóteses do Teorema 3.4 para cada $\gamma \in D$. Então o número $\mu_3 = \mu_3(\gamma)$ existe e é uma função contínua de γ .*

Note que neste caso as constantes $s_0(\gamma)$ e $\theta(\gamma)$ são funções contínuas de γ . O próximo teorema, aplica o Corolário 3.1 para determinar quando a função f_3 satisfaz as hipóteses (I) e (III). Não faremos a demonstração, pois é uma aplicação imediata do referido Corolário.

Teorema 3.5 *Sejam $f_3(x) = \mu \bar{f}_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}$, com $\nu > 0$ e as constantes $\theta = \nu$ e $s_0 = \nu + 1$ como na seção 3.1. Consideremos $z > s_0 = \nu + 1$ a única solução de*

$$z \bar{f}_3(z) = \nu \bar{f}_3(\nu),$$

e $x_0 > \nu$ o único ponto fixo de $\mu \bar{f}_3$. Então

$$\{\mu : \mu \bar{f}_3 \text{ satisfaz (III) em } x_0\} = (\mu_0(s_0), \mu_3],$$

onde $\mu_3 = \mu_3(\nu) = z[\bar{f}_3(\nu)]^{-1}$ é uma função contínua de ν . Se $\nu = 0$, então f_3 satisfaz (III) em x_0 para todo $\mu > \mu_0$.

Os dois próximos resultados são lemas técnicos que nos ajudarão a determinar quando f_3 satisfaz (I) em $x_0 > \nu$. Omitiremos as demonstrações, pois tratam-se apenas de cálculos envolvendo propriedades de integração e derivação.

Lema 3.1 *Se $\nu > 0$, então*

$$\left(\frac{\nu+2}{\nu}\right)^{\nu+1} > e^2 \quad (3.21)$$

e se $\nu \geq 1$

$$e < \left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu. \quad (3.22)$$

Se $0 \leq \nu < \sqrt{5} - 2$, então existe $\nu(c) \geq 1$ tal que para $\nu \geq \nu(c)$ temos

$$e^{1+c} \leq \left(\frac{\nu+1+c}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{\nu+2}{\nu+1+c}\right), \quad (3.23)$$

onde $\nu(c)$ é dado por

$$\nu(c) = \frac{c^3 + 4c^2 + c + 2}{1 - 4c - c^2} \quad (3.24)$$

Lema 3.2 Consideremos f_3 , $\mu(s)$, $x_1(s)$ e $x_2(s)$ definidas como no Teorema 3.4. Se $x_1(s) \leq \nu + 2$ e $s > \nu + 1$, então $x_2(s) > \nu$.

Podemos então demonstrar o

Teorema 3.6 Consideremos f_3 como no Teorema 3.5. Então existe uma função contínua

$$\mu_1 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

tal que $\mu_0(\nu) = (\nu + 1)^{1-\nu} e^{\nu+1} < \mu_3(\nu) < \mu_1(\nu)$, onde $\mu_3(\nu)$ é dada no Teorema 3.5. Temos que f_3 satisfaz (I) em $x_0 > \nu$ se, e somente, se $\mu_0 < \mu < \mu_1(\nu)$. Além disso,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \mu_1(\nu) = \infty \text{ e } \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\mu_1(\nu) - \mu_0(\nu)) = 0 \quad (3.25)$$

$$\mu_1(\nu) - \mu_0(\nu) \leq \mu(2\nu) - \mu(\nu + 1) \leq \left(\frac{e^2}{2\nu}\right)^\nu 2\nu \text{ se } \nu \geq 2,$$

onde $\mu(s) = s^{1-\nu} e^s$. Para $0 < c < \sqrt{5} - 2$ e $\nu > \nu(c)$ temos

$$\{s^{1-\nu} e^s : \nu + 1 < s \leq \nu + 1 + c\} \subset (\mu_0(\nu), \mu_3(\nu)], \quad (3.26)$$

com $\nu(c)$ definido em (3.24).

Prova :

1ª parte : Já vimos na seção 3.1 que $\theta = \nu$ e $s_0 = \nu + 1$ para a função $f_3(x) = \mu \bar{f}_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}$. O Teorema 3.4 implica que

$$\{\mu : \mu \bar{f}_3 \text{ satisfaz (I) em } x_0 > \nu\} \equiv \{\mu(s) : s > \nu + 1 \text{ e } x_3(s) > s\}.$$

Além disso, sabemos que

$$x'_1(s) > 0 \text{ e } x'_2(s) < 0, \forall s > \nu + 1.$$

Temos

$$x_3(s) > s \Leftrightarrow \log(s^{-1} x_3(s)) > 0.$$

Logo, para mostrar a existência de $\mu_1(\nu)$ devemos mostrar que o conjunto

$$\{s : s > \nu + 1 \text{ e } \log(s^{-1} x_3(s)) > 0\}$$

é um intervalo. Um cálculo mostra que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} x_1(s) &= x_1(s) \left[\frac{s+1-\nu}{s} \right] \\ \frac{d}{ds} x_2(s) &= x_2(s) \left[\frac{s+1-\nu}{s} \right] (\nu + 1 - x_1(s)) \\ \frac{d}{ds} \log(s^{-1} x_3(s)) &= \left(\frac{s+1-\nu}{s} \right) [1 + (\nu - x_2)(\nu + 1 - x_1)] - \left(\frac{1}{s} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Se s_* for o primeiro $s > \nu + 1$ tal que $\log(s_*^{-1}x_3(s_*)) = 0$, então como $\mu(s)\bar{f}_3(x)$ satisfaz (III) para s próximo de $s_0 = \nu + 1$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log(s^{-1}x_3(s))|_{s=s_*} &= \\ &= s_*^{-1}[(s_* + 1 - \nu)(1 - (\nu - x_2(s_*))(x_1(s_*) - \nu - 1)) - 1] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como $\mu(s)\bar{f}_3$ não satisfaz (III) em s_* , então o Teorema 3.4 implica que $x_2(s_*) < \nu$ e, portanto o Lema 3.2 garante que $x_1(s_*) > \nu + 2$. Se mostrarmos que

$$(s + 1 - \nu)[1 - (\nu - x_2(s))(x_1(s) - \nu - 1)] - 1 \equiv \phi(s) < 0,$$

para $s > s_*$, tomando $\mu_1(\nu) = \mu(s_*)$, obtemos que f_3 satisfaz (I) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu \in (\mu_0(\nu), \mu_1(\nu))$. Mas $\phi(s_*) \leq 0$, logo basta mostrar que

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= (\nu - x_2)(x_1 - \nu - 1) - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} (x_1 - \nu - 1)^2 x_2 \\ &\quad - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} x_1 (\nu - x_2) < 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $s > s_*$. Temos dois casos a considerar :

Caso 1 : Suponhamos $\nu \geq 1$. Como $x_1(s) - \nu - 1 > 1$ e $\nu - x_2(s) > 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \phi'(s) &< 1 - (\nu - x_2) - x_2(s + 1 - \nu)^2 s^{-1} - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} (\nu + 2)(\nu - x_2) = \\ &= 1 - (\nu - x_2)[1 + (\nu + 1)(s + 1 - \nu)^2 s^{-1}] - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} \nu, \end{aligned}$$

o que implica

$$\phi'(s) < 1 - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} \nu = g(s). \quad (3.30)$$

Mas, $g(s)$ é uma função decrescente para $s > \nu + 1$, então a desigualdade (3.30) para $s \geq s_*$ fica

$$\phi'(s) < 1 - \frac{4\nu}{\nu + 1} = \frac{-3\nu + 1}{\nu + 1} < 0.$$

para todo $s > s_*$.

Caso 2 : Suponhamos $0 < \nu < 1$. Como $x_2'(s) < 0$, $x_2(s) < \nu$, $x_1'(s) > 0$ e $x_1(s) > \nu + 1$ para $s > s_*$, então $(\nu - x_2(s))(x_1(s) - \nu - 1)$ é uma função crescente de s para $s > s_*$. Temos $1 - (s_* + 1 - \nu)^{-1} > 1/2$, logo a desigualdade em (3.28) implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< 1 - (s_* + 1 - \nu)^{-1} \leq (\nu - x_2(s_*))(x_1(s_*) - \nu - 1) < \\ &< (\nu - x_2(s))(x_1(s) - \nu - 1), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e substituindo em (3.29), temos

$$\phi'(s) < 1 - (\nu - x_2(s))(x_1(s) - 1 - \nu) - (s + 1 - \nu)^2 s^{-1} (\nu - x_2(s)) x_1(s). \quad (3.32)$$

Como $0 < \nu < 1$, então $(s + 1 - \nu)^2 s^{-1} > \nu + 1 > 1$. Logo, juntando (3.31) e (3.32), obtemos que

$$\phi'(s) < 1 - (\nu - x_2(s))(x_1(s) - 1 - \nu) - (\nu - x_2(s)) x_1(s) < 0.$$

para todo $s > s_*$.

2ª parte : Para demonstrarmos (3.25) mostraremos primeiro que $x_3(s) < s$ para s suficientemente grande, ou seja,

$$\log(s^{-1} x_3(s)) < 0,$$

para s suficientemente grande. É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \log(s^{-1} x_3(s)) &< -\nu \log s + s + \nu \log x_2(s) = \\ &= -\nu^3 \log s + (1 + \nu + \nu^2)s + \nu^3 \log \nu - \nu^3 - \nu^{\nu+1} \epsilon^{-\nu} s^{1-\nu} e^s. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como para s grande, e^s domina o lado direito de (3.33), temos que $x_3(s) < s$ para s suficientemente grande. Um cálculo mostra que

$$\log(s^{-1} x_3(s)) < 0, \text{ para } s \geq 2\nu \text{ e } \nu \geq 2. \quad (3.34)$$

Portanto, segue de (3.34) que para $\nu \geq 2$

$$\begin{aligned} \{\mu : \mu \bar{f}_3 \text{ satisfaz (I) em } x_0\} &\subset \{\mu(s) : \nu + 1 < s < 2\nu\} = \\ &= (\mu(\nu + 1), \mu(2\nu)). \end{aligned}$$

Como $\mu(s)$ é uma função crescente para $s > \nu$, então

$$\begin{aligned} \mu(2\nu) - \mu(\nu) &< \mu(2\nu) - \mu(\nu) = \nu \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^\nu [2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^\nu - 1] \leq \\ &\leq 2\nu \left(\frac{\epsilon^2}{2\nu}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Agora, $\mu_1(\nu) \leq \mu(2\nu)$ logo,

$$\mu_1(\nu) - \mu_0(\nu) = \mu_1(\nu) - \mu(\nu + 1) \leq \mu(2\nu) - \mu(\nu + 1) \leq 2\nu \left(\frac{\epsilon^2}{2\nu}\right)^\nu$$

e, portanto

$$0 \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_1(\nu) - \mu_0(\nu) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\frac{e^2}{2\nu}\right)^\nu (2\nu) = 0,$$

mostrando dessa forma as duas últimas afirmações de (3.25).

Mostremos agora que $\mu_1 \rightarrow \infty$ quando $\nu \rightarrow 0^+$. Um cálculo mostra que

$$\log(s^{-1}x_3(s)) = -\nu^3 \log s + (1+\nu+\nu^2)s + \nu^3 \log \nu - \nu^3 - \nu^{\nu+1} s^{1-\nu} e^{s-\nu} - x_2. \quad (3.35)$$

Como $\nu^\nu e^{-\nu}$ converge para 1 quando $\nu \rightarrow 0^+$, então

$$x_1(s) = s^{1-\nu} e^s \nu^\nu e^{-\nu} \rightarrow s e^s, \text{ quando } \nu \rightarrow 0^+$$

uniformemente em intervalos compactos. Mas isto implica que

$$x_2(s) = s^{1-\nu} e^s x_1(s)^\nu e^{-x_1(s)} \rightarrow s \exp(s - s e^s), \text{ quando } \nu \rightarrow 0^+$$

uniformemente em intervalos compactos. E, portanto

$$\log(s^{-1}x_3(s)) \rightarrow s - s \exp(s - s e^s), \text{ quando } \nu \rightarrow 0^+ \quad (3.36)$$

uniformemente em intervalos compactos. Como o lado direito de (3.36) é negativo para $s > 1$, dado $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que

$$\log(s^{-1}x_3(s)) < 0, \text{ para } 1 \leq s \leq M \text{ e } 0 < \delta < \nu.$$

Assim, se ν é suficientemente pequeno, $\mu(s)\bar{f}_3(x)$ satisfaz (I) em $x_0 > \nu$ para todo $s > \nu + 1$, mostrando a primeira afirmação de (3.25).

Para mostrarmos (3.26), observe que o Lema 3.2 e o Teorema 3.4 implicam que se $x_1(s) \leq \nu + 2$, então $\mu(s)\bar{f}_3(x)$ satisfará (III) em $x_0 > \nu$ se $\nu + 1 < s \leq \nu + 2$. Agora

$$x_1(\nu + 1 + c) \leq \nu + 2 \Leftrightarrow e^{1+c} \leq \left(\frac{\nu + 1 + c}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{\nu + 2}{\nu + 1 + c}\right).$$

Mas, então o Lema 3.1 implica que se $0 < c < \sqrt{5} - 2$ e $\nu \geq \nu(c)$, então $x_1(\nu + 1 + c) \leq \nu + 2$ e, portanto obtemos a inclusão em (3.26). ■

Finalmente, vamos determinar os valores do parâmetro μ para os quais a função f_3 satisfaz a hipótese (II) no ponto fixo $x_0 > \nu$. Novamente, demonstraremos alguns resultados gerais, que nos ajudarão nesta tarefa, e também na verificação da hipótese (II) para a função no exemplo do capítulo 4. Para isso, precisaremos estudar os pontos 2-*periódicos* de uma função $f(x) = \mu\bar{f}(x)$.

Suponhamos que para algum μ , existam números $0 < a < b$ satisfazendo

$$\mu\bar{f}(a) = b \text{ e } \mu\bar{f}(b) = a. \quad (3.37)$$

Então

$$a\bar{f}(a) = b\bar{f}(b) = c, \quad (3.38)$$

onde

$$\mu = \frac{ab}{c} \quad (3.39)$$

Se, $0 < a < b$ satisfazem (3.38) e (3.39), então eles satisfazem (3.37). Consideremos

$$k = (f^2)'(a) = f'(a)f'(b) = (f^2)'(b) = \mu^2 \bar{f}'(a)\bar{f}'(b).$$

Definindo a função

$$u(x) = \frac{x\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)}, \quad (3.40)$$

é fácil mostrar que

$$k = u(a)u(b). \quad (3.41)$$

A idéia é parametrizar os números a , b e μ e a derivada k pela constante c , e com isto obter resultados sobre os pontos 2-periódicos a e b . Suponhamos que $\bar{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ seja uma função contínua e C^2 em $(0, \infty)$, e consideremos uma função g definida por $g(x) = x\bar{f}(x)$ tal que exista um número s_0 satisfazendo

$$g'(x) < 0 \text{ se } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) > 0 \text{ se } x > s_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Consideremos c_* definido por

$$c_* = g(s_0) = \max_{x > 0} g(x)$$

e sejam $g_1 = g|_{[0, s_0]}$ e $g_2 = g|_{[s_0, \infty)}$. Então

$$\begin{aligned} a &= a(c) = g_1^{-1}(c) \in [0, s_0], \\ b &= b(c) = g_2^{-1}(c) \in [s_0, \infty), \end{aligned} \quad (3.42)$$

para $0 < c \leq c_*$, ou seja, a e b são funções de c , satisfazendo:

- a é contínua em $[0, c_*]$
- b é contínua em $(0, c_*]$,

- a e b são C^2 em $(0, c_*)$,
- $a(0) = 0$, $a(c_*) = s_0$ e $a'(c) > 0$ para todo $c \in (0, c_*)$.
- $b(c_*) = s_0$ e $b'(c) < 0$ para todo $c \in (0, c_*)$,
- $\lim_{c \rightarrow 0^+} b(c) = \infty$.

Observe que as hipóteses sobre g implicam que b está definida em $(0, c_*]$. Como μ e k são funções contínuas de a e b , então elas são funções contínuas de c . Em nosso próximo resultado obteremos algumas propriedades de $\mu(c)$ e $k(c)$ que serão úteis na verificação da hipótese (II) para a função f_3 e para a função no exemplo do Capítulo 4.

Lema 3.3 *Suponhamos que $\bar{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ seja uma função contínua e C^2 em $(0, \infty)$. Se $g(x) = x\bar{f}(x)$, suponhamos que exista uma constante $s_0 > 0$ tal que*

$$g'(x) > 0 \text{ se } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) < 0 \text{ se } x > s_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Sejam $a(c)$ e $b(c)$ como definidas em (3.42), e $\mu(c)$ e $k(c)$ como definidas em (3.39) e (3.41). Então $\mu(c)$ e $k(c)$ possuem as seguintes propriedades :

(i) $\mu(c) \rightarrow s_0^2/c_* > 0$ e $k(c) \rightarrow 1$ quando $c \rightarrow c_*$.

(ii) $\mu(c) \rightarrow \infty$ quando $c \rightarrow 0^+$. Consideremos que $u(x)$ definido por (3.40), e suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = L_2,$$

com $L_1 < \infty$ e $L_2 \geq -\infty$. Então

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} k(c) = L_1 L_2.$$

(iii) Suponhamos que exista $\theta \geq 0$ tal que

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta.$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } x > \theta,$$

$$u'(x) < 0 \text{ para } x > \theta.$$

Sejam $v(x) = -u(x)$ para $x \geq 0$ e $\delta = \max\{-1/L_2, -L_1\}$, e suponhamos que

$$g(v^{-1}(\gamma)) > g(v^{-1}(\gamma^{-1})) \text{ para } \delta < \gamma < 1. \quad (3.43)$$

Então $k(c) < 1$ para $0 < c < c_*$. Se definirmos $\Phi(t) = \log(g(v^{-1}(t)))$ para $\delta < t < 1$, a desigualdade (3.43) será satisfeita se

$$\Phi'(t) < -\left(\frac{1}{t^2}\right)\Phi'\left(\frac{1}{t}\right) \text{ para } \delta < t < 1. \quad (3.44)$$

(iv) Se $k(c) < 1$ para $0 < c < c_*$, então $\mu'(c) < 0$ para $0 < c < c_*$.

(v) Se $u'(x) < 0$ para $x > 0$ e se $k(c) \leq 0$ para algum $c \in (0, c_*)$, então $k'(c) > 0$.

Prova :

(i) Como g é uma função C^2 , então

$$0 = g'(s_0) = \bar{f}(s_0) + s_0 \bar{f}'(s_0),$$

logo

$$u(s_0) = \frac{s_0 \bar{f}'(s_0)}{\bar{f}(s_0)} = -1.$$

Mas, $a(c)$ e $b(c)$ são funções contínuas de c , logo

$$\lim_{c \rightarrow c_*} k(c) = \lim_{c \rightarrow c_*} u(a(c))u(b(c)) = u(s_0)u(s_0) = 1.$$

Pela mesma razão, obtemos que

$$\lim_{c \rightarrow c_*} \mu(c) = \lim_{c \rightarrow c_*} \frac{a(c)b(c)}{c} = \frac{s_0^2}{c_*}.$$

(ii) Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{f}(x) = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$, então $0 < \bar{f}(x) < \epsilon$. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que se $0 < x < \delta$, então

$$g(x) = x \bar{f}(x) \geq Mx.$$

Portanto

$$Ma(c) \geq g(a(c)) \stackrel{\text{def}}{=} c,$$

ou seja,

$$a(c) \geq \frac{c}{M}.$$

Assim, para $0 < c < \delta$ temos

$$\mu(c) \geq \frac{1}{M} b(c).$$

Mas, $b(c) \rightarrow \infty$ quando $c \rightarrow 0^+$. Segue portanto que

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mu(c) = \infty.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} k(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} u(a(c)) \lim_{c \rightarrow 0^+} u(b(c)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} u(x) \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = L_1 L_2. \end{aligned}$$

(iii) Suponhamos, por absurdo, que exista $c_0 \in (0, c_*)$, tal que $k(c_0) \geq 1$. Como $L_1 \geq 0$ e $L_2 \leq 0$, então

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} k(c) = L_1 L_2 \leq 0$$

e, portanto podemos supor, sem perda da generalidade, que $k(c_0) = 1$. Como $u(x)$ é uma função estritamente crescente para $x > \theta$, então

$$u(b(c_0)) < u(s_0) = -1.$$

Ainda, $u(x) > 0$ para $x > \theta$, então devemos ter $a(c_0) > \theta$. Se considerarmos $\gamma = v(a(c_0))$, então devemos ter

$$0 = -u(\theta) = v(\theta) < v(a(c_0)) = \gamma < 1,$$

se $\theta > 0$, e se $\theta = 0$, temos

$$-L_1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} v(a(c)) < \lim_{c \rightarrow 0^+} v(a(c_0)) = \gamma < 1.$$

Além disso,

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{-u(a(c_0))} = \frac{k(c_0)}{-u(a(c_0))} = -u(b(c_0)) = v(b(c_0)).$$

Mas, $v(b(c)) \rightarrow -L_2$ quando $c \rightarrow 0^+$, logo

$$\gamma^{-1} = v(b(c_0)) \in (1, -L_2).$$

Portanto, devemos ter $\gamma \in (\delta, 1)$ onde $\delta = \max\{-1/L_2, -L_1\}$. Temos ainda que

$$v^{-1}(\gamma) = v^{-1}(v(a(c_0))) = a(c_0),$$

$$v^{-1}(\gamma^{-1}) = v^{-1}(v(b(c_0))) = b(c_0).$$

Logo, (3.38) implica que

$$\begin{aligned} g(v^{-1}(\gamma)) &= g(a(c_0)) = a(c_0)\bar{f}(a(c_0)) = \\ &= b(c_0)\bar{f}(b(c_0)) = g(v^{-1}(\gamma^{-1})), \end{aligned}$$

contradizendo (3.43), pois $\gamma \in (\delta, 1)$. Logo $k(c) < 1$ para todo $c \in (0, c_*)$.

Considerando $\Phi(t) = \log(g(v^{-1}(t)))$ para $t \in (\delta, 1)$ com δ definido acima, então (3.43) é válida se, e somente, se

$$\Phi(t) > \Phi(t^{-1}) \text{ para } \delta < t < 1,$$

que é válida se, e somente, se

$$1 - \Phi(t) < 1 - \Phi(t^{-1}) \text{ para } \delta < t < 1. \quad (3.45)$$

Mas, (3.45) é equivalente a

$$\int_t^1 \Phi'(s)ds < \int_t^1 -\frac{1}{s^2}\Phi'(\frac{1}{s})ds. \quad (3.46)$$

De fato:

No lado direito de (3.46) considerando a mudança de variável $x = 1/s$, temos

$$\int_t^1 (-\frac{1}{s^2})\Phi'(\frac{1}{s})ds = \int_{1/t}^1 \Phi'(x)dx.$$

Logo (3.46) é equivalente à

$$\int_t^1 \Phi'(s)ds < \int_{1/t}^1 \Phi'(s)ds.$$

Portanto o Teorema Fundamental do Cálculo implica que (3.46) é equivalente à (3.45).

Agora (3.46) é válida se, e somente, se

$$\Phi'(t) < -\frac{1}{t^2}\Phi'(\frac{1}{t}) \text{ para } \delta < t < 1,$$

mostrando que (3.43) é equivalente a (3.44).

(iv) Para facilitar a notação consideremos $a(c) = x_1(c) = x_1$ e $b(c) = x_2(c) = x_2$, então é fácil mostrar que

$$\mu(c)^2 = \frac{x_1 x_2}{\bar{f}(x_1)\bar{f}(x_2)}.$$

Assim, para mostrarmos que $\mu'(c) < 0$, é suficiente mostrarmos que

$$\frac{d}{dc} \log\left(\frac{x_1 x_2}{\bar{f}(x_1) \bar{f}(x_2)}\right) < 0. \quad (3.47)$$

Como $x'_j(c) = (\bar{f}(x_j)^{-1}(1 + u(x_j)))^{-1}$, então (3.47) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^2 (x_j \bar{f}(x_j) (1 + u(x_j)))^{-1} - \sum_{j=1}^2 \bar{f}'(x_j) (\bar{f}(x_j) (1 + u(x_j)))^{-1} < 0.$$

Multiplicando essa desigualdade por $x_1 x_2 \bar{f}(x_1) \bar{f}(x_2) = c^2$, obtemos que ela é equivalente a

$$2c(1 + u(x_1))^{-1}(1 + u(x_2))^{-1}(1 - k(c)) < 0.$$

Mas já vimos no começo da demonstração que $u(x) > -1$ para $0 < x < s_0$ e $u(x) < -1$ para $x > s_0$, logo concluímos que

$$(1 + u(x_1))(1 + u(x_2)) < 0,$$

pois $x_1(c) < s_0$ e $x_2(c) > s_0$ e, portanto $\mu'(c) < 0$ se $k(c) < 1$.

(v) Suponhamos $k(c_0) \leq 0$ para algum $c_0 \in (0, c_*)$. Como $u(x_2(c)) < -1$ para $c \in (0, c_*)$, então $u(x_1(c)) \geq 0$. Mas, por hipótese $u'(x) < 0$ para todo $x > 0$, logo

$$k'(c_0) = u'(x_1(c_0))x'_1(c_0)u(x_2(c_0)) + u(x_1(c_0))u'(x_2(c_0))x'_2(c_0) > 0,$$

demonstrando portanto o lema. ■

Com a ajuda deste Lema, podemos determinar os valores do parâmetro μ para os quais a função $\mu \bar{f}(x)$ satisfaz a hipótese (II) no ponto fixo $x_0(\mu)$. Faremos isso no

Teorema 3.7 *Consideremos $\bar{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua e C^3 em $(0, \infty)$, e suponhamos que exista uma constante $\theta \geq 0$ tal que*

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta,$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } x > \theta.$$

Consideremos ainda, $g(x) = x\bar{f}(x)$, e suponhamos que exista uma constante $s_0 > \theta$ tal que

$$g'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) < 0 \text{ para } s_0 < x < \infty.$$

Definamos

$$u(x) = \frac{x\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)} \text{ e } v(x) = -u(x),$$

e suponhamos que $u'(x) < 0$ para todo $x > 0$, e

$$g(v^{-1}(\gamma)) > g(v^{-1}(-\gamma^{-1})) \text{ para } \delta < \gamma < 1, \quad (3.48)$$

onde δ está definido como no Lema 3.3. Suponhamos ainda que exista uma aplicação $\psi : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ de classe C^3 tal que $\psi'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$ e que $\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi$ possua derivada Schwarziana negativa para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante $\mu_2 > \mu_0 = s_0\bar{f}(s_0)^{-1}$ tal que $\mu\bar{f}(x)$ satisfaz (II) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu_0 < \mu < \mu_2$. Se $\mu(c)$ e $k(c)$ são definidos como no Lema 3.3 e $k(c_2) = -1$ para algum $c_2 \in (0, c_*)$ onde $c_* = \max g(x)$, então $\mu_2 = \frac{x_1(c_2)x_2(c_2)}{c_2} = \mu(c_2)$

Prova :

A idéia da demonstração é usar os Teoremas 2.3 e 2.4, para determinar quando a função $\mu\bar{f}(x)$ satisfará a hipótese (II). Suponhamos então que $\mu\bar{f}(x)$ satisfaça (I) no ponto fixo $x_0 = x_0(\mu)$. Pelo Lema 2.3 temos que $\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi$ satisfaz (I) no ponto fixo $y_0 = \psi^{-1}(x_0)$, e como $\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi$ possui derivada Schwarziana negativa, o Teorema 2.3 implica que $\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi$ satisfará (II) no ponto fixo y_0 se, e somente, se todo ponto fixo y positivo de $(\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2$ satisfizer

$$(i) |((\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2)'(y)| \leq 1,$$

$$(ii) \text{ se } ((\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2)'(y) = 1, \text{ então } ((\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2)''(y) = 0.$$

Mas, novamente o Lema 2.3 implica que $\mu\bar{f}$ satisfará (II) no ponto fixo x_0 se, e somente, se todo ponto fixo x positivo de $(\mu\bar{f})^2$ satisfizer

$$(i) |((\mu\bar{f})^2)'(x)| \leq 1,$$

$$(ii) \text{ se } |((\mu\bar{f})^2)'(x)| = 1, \text{ então } ((\mu\bar{f})^2)''(x) = 0.$$

Para mostrarmos este fato, basta notarmos que $|((\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2)'(y)| = |((\mu\bar{f})^2)'(x)|$, para todo ponto fixo x de $(\mu\bar{f})^2$ e todo ponto fixo $y = \psi^{-1}(x)$ de $(\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi)^2$. Com os mesmos argumentos acima obtemos que $\mu\bar{f}$ satisfaz as conclusões do Teorema 2.4.

Consideremos $\mu(c)$ e $k(c)$ com definidos no Lema 3.3. Já vimos que $\mu\bar{f}(x)$ satisfaz a hipótese (0) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu > \mu_0 = s_0\bar{f}(s_0)^{-1}$ e, além disso

$$\mu(c_*) = \frac{x_1(c_*)x_2(c_*)}{c_*} = \frac{s_0^2}{g(s_0)} = \frac{s_0^2}{s_0\bar{f}(s_0)} = s_0\bar{f}(s_0)^{-1} = \mu(s_0) = \mu_0,$$

e

$$\mu(c) > \mu(c_*) \text{ para } 0 < c < c_*.$$

Notemos ainda, que $\mu'(c) < 0$ para $0 < c < c_*$ e

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mu(c) = \infty.$$

Logo, podemos parametrizar a função $\mu\bar{f}(x)$ por $c \in (0, c_*)$ no lugar de $\mu \in (0, \infty)$.

Consideremos o número c_1 definido por

$$c_1 := \inf\{c > 0 : \mu(t)\bar{f}(x) \text{ satisfaz (I) em } x_0, \text{ para } c \leq t < c\}.$$

Já vimos na demonstração do Teorema 3.5 que existe $\delta > 0$ tal que se $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \delta]$, então $\mu\bar{f}$ satisfaz (III) em x_0 . Como μ é uma função decrescente de c , então $c_1 < c_*$. Consideremos c_2 tal que $k(c_2) = -1$. Caso contrário, se não existir c tal que $k(c) = -1$, definamos $c_2 = 0$. Como $u'(x) < 0$ para todo $x > 0$, então o item (v) do Lema 3.3 implica que $k(c) \geq -1$ se, e somente, se $c \geq c_2$. Ainda, como (3.48) é válida então o item (iii) do Lema 3.3 implica que $k(c) < 1$ para todo $c \in (0, c_*)$. Se mostrarmos que $c_2 > c_1$, então o Teorema 2.3 implicará que $\mu(c)\bar{f}(x)$ satisfará (II) em x_0 se, e somente, se $c_2 \leq c < c_*$. Mostremos portanto que $c_2 > c_1$.

De fato:

Se $c_1 > 0$, então o Teorema 2.4 e o Corolário 2.2 implicam que existe um $\delta > 0$ tal que se $\mu(c_1) < \mu < \mu(c_1) + \delta$, a aplicação $(\mu\bar{f})^2$ tem um ponto fixo x tal que $\frac{d}{dx}(\mu\bar{f})^2(x) < -1$. Suponhamos, por absurdo, que $c_2 \leq c_1$. Então temos que $k(c_2) = -1 > k(c_0)$ para algum $c_0 \in (c_1, c_1 + \delta)$, ou seja, $k(c)$ é uma função decrescente de c_2 para c_0 , contradizendo o Lema 3.3. ■

Para finalizar este capítulo, vamos aplicar o Teorema 3.7 para determinar os valores do parâmetro μ , para os quais a função $f_3(x) = \mu\bar{f}_3(x) = \mu x^\nu e^{-x}$ satisfaz a hipótese (II) no ponto fixo x_0 . Observemos que neste caso $\theta = \nu$ e $s_0 = \nu + 1$.

Lema 3.4 Consideremos $f_3(x)$ definida como acima e $\mu(c)$, $u(x)$ e $k(c)$ definidas respectivamente em (3.39), (3.40) e (3.41) trocando $\mu\bar{f}$ por $\mu\bar{f}_3$. Então $\mu(c)$ e $k(c)$ satisfazem :

- (i) $\mu(c) \rightarrow \frac{c_0^2}{c_*}$ e $k(c) \rightarrow 1$ quando $c \rightarrow c_*$.
- (ii) $\mu(c) \rightarrow \infty$, $k(c) \rightarrow -\infty$, quando $c \rightarrow 0^+$.
- (iii) $k(c) < 1$, se $0 < c < c_*$.
- (iv) $\mu'(c) < 0$, se $0 < c < c_*$.
- (v) Se $k(c_0) < 0$ para algum $c_0 \in (0, c_*)$, então $k'(c_0) > 0$.

Prova :

Temos que

$$u(x) = -x + \nu,$$

$$v(x) = x - \nu \text{ e}$$

$$v^{-1}(x) = x + \nu.$$

Portanto, para aplicarmos os resultados do Lema 3.3, precisamos apenas mostrar que

$$\Phi'(t) < -\frac{1}{t^2}\Phi'\left(\frac{1}{t}\right) \text{ para } \delta < t < 1,$$

onde

$$\Phi'(t) = \frac{1-t}{\nu+t}$$

e

$$\delta = \max\left\{-L_1, \frac{-1}{L_2}\right\} = \max\{-\nu, 0\} = 0,$$

ou seja, devemos mostrar que

$$\frac{1-t}{\nu+t} < \frac{1-t}{\nu t^3 + t^2} \text{ para } 0 < t < 1. \quad (3.49)$$

Mas, (3.49) é equivalente a

$$-\nu t^3 - t^2 + t + \nu > 0 \text{ para } 0 < t < 1,$$

que é sempre válida. ■

Corolário 3.2 Consideremos f_3 definida como no Lema 3.4 e $\mu_0 = \mu_0(\nu) = (\nu + 1)^{1-\nu}e^{1+\nu}$ com $\nu > 0$ dado na Tabela 3.2. Então existe uma única função contínua de $\mu_2(\nu)$ tal que f_3 satisfaz (II) em $x_0(\mu) > \theta = \nu$ se, e somente, se $\mu \in (\mu_0(\nu), \mu_2(\nu)]$,

Observação 3.2 A continuidade de μ_2 em relação ao parâmetro ν , segue do fato de $k(c)$ e $\mu(c)$ dependerem continuamente de c .

Capítulo 4

Um modelo originado em Biologia

Neste capítulo apresentaremos o modelo usado pela Comissão Internacional da Pesca da Baleia, o qual pode ser expresso na forma da equação (1.1). Maiores detalhes veja [6], [7] e [15]. Para obtermos resultados sobre o comportamento da população de Baleias utilizaremos os resultados obtidos no Capítulo 1, mas para isso precisaremos determinar quando a função f que surge neste exemplo satisfaz as hipóteses (I), (II), e (III) e, portanto, utilizaremos as técnicas dos Capítulos 2 e 3.

4.1 O modelo

A equação utilizada pela “Comissão Internacional da Pesca da Baleia”, é

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\alpha N(t) + \nu N(t-T)(1 - N(t-T)^z), \quad (4.1)$$

onde $N(t)$ representa a população de Baleias adultas, o retardamento T é o tempo gasto para uma baleia atingir a idade adulta, α é a taxa de mortalidade, ν é a taxa de natalidade e z é um número inteiro positivo qualquer.

Observemos que podemos supor $0 \leq N(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e $N(t) = 0$ se $t \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Com uma conveniente mudança de variáveis, temos que a equação (4.1) é equivalente à equação

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda f(x(t-1)), \quad (4.2)$$

com a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \mu \bar{f}(x) = \mu x(1 - x^z), \quad (4.3)$$

onde $\mu = \nu/\alpha$ é a razão entre as taxas de natalidade e mortalidade.

Temos que os únicos pontos de equilíbrio da equação (4.2) são

$$x_0 = 0 \text{ e } x_0 = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{1/z},$$

que são os pontos fixos da função f . Notemos que

$$f'(x) = \mu - \mu(z+1)x^z,$$

logo

$$f'(0) = \mu.$$

Assim, se $\mu < 1$ o ponto de equilíbrio $x_0 = 0$ é um ponto fixo atrator da função f e, neste caso a população se extinguiria. Estudaremos o comportamento assintótico das soluções periódicas de (4.2) em uma vizinhança do ponto fixo $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$ de tal forma que

$$f'(x_0) < -1,$$

ou seja, x_0 é um ponto repulsor.

Figura 4.1: Gráfico de f com z par

Figura 4.2: Gráfico de f com z ímpar

4.2 As condições (NS_1) e (NS_2) para f

Como já vimos anteriormente, para usar a teoria desenvolvida nos Capítulos 2 e 3, precisamos mostrar primeiramente que a função f satisfaz as condições (NS_1) ou (NS_2) . Observemos que a função f tem a forma da Figura 4.1 se z é par, e tem a forma da Figura 4.2 se z é ímpar.

Na seção 4.1 vimos que o ponto fixo em questão $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$, é o único ponto fixo não nulo de f . Usaremos agora o Teorema 3.1 para determinar quando a função f satisfaz a hipótese (0) em tal ponto fixo. É fácil verificar que a função $\bar{f}(x) = x(1 - x^z)$ é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$ e possui derivada em todos os pontos de $(0, 1)$. Temos

$$\bar{f}'(x) = (1 - (z + 1)x^z).$$

Logo,

$$\bar{f}'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{z+1}\right)^{1/z},$$

$$\bar{f}'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{z+1}\right)^{1/z}.$$

Ainda,

$$\frac{d}{dx}x\bar{f}(x) = x(2 - (2+z)x^2).$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}x\bar{f}(x) < 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{2}{2+z}\right)^{1/2},$$

$$\frac{d}{dx}x\bar{f}(x) > 0 \Leftrightarrow x > \left(\frac{2}{2+z}\right)^{1/2}.$$

Portanto $\bar{f}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 com as constantes

$$\theta = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{1/2},$$

$$s_0 = \left(\frac{2}{2+z}\right)^{1/2}$$

e, além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x(1 - x^2) = 0.$$

Logo, o Teorema 3.1 implica que $f = \mu\bar{f}$ satisfaz (0) no ponto fixo $x_0(\mu) = (1 - 1/\mu)^{1/2} \geq \theta$ se, e somente, se $\mu > \mu_0 = 1 + \frac{2}{z}$.

Observação 4.1 Notemos que $\theta \rightarrow 1^-$ quando $z \rightarrow \infty$, logo $x_0(\mu) \rightarrow 1^-$ quando $z \rightarrow \infty$ e $\mu > \theta\bar{f}(\theta)^{-1}$.

Observação 4.2 Se $\mu > \mu_0 = 1 + 2/z$, então $f'(x_0) < -1$ e, portanto x_0 é um ponto repulsor.

Como $f(x) = 0$ para todo $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ e satisfaz a hipótese (0) para todo $\mu > \mu_0 = 1 + 2/z$ e ainda, existe $x_1 < \theta$ tal que $f(x_1) = x_0$, e tomando $x_2 = \theta$ e $x_3 = x_4 = \infty$, temos que f satisfaz a propriedade (PM) no ponto fixo x_0 para todo $x \in [0, 1]$. Note que, f é um polinômio, logo f possui derivada Schwarziana para todo $x \in [0, 1]$. Portanto, f satisfaz a condição (NS_2) no ponto fixo x_0 para todo $x \in [0, 1]$ se $\mu > \mu_0$.

4.3 Verificação das hipóteses (I), (II), e (III) para f

Nesta seção determinaremos os valores do parâmetro μ para os quais a função $f(x) = \mu \bar{f}(x) = \mu x(1 - x^z)$ satisfaz as hipóteses (I), (II), e (III) no ponto fixo $x_0 = x_0(\mu) = (1 - 1/\mu)^{1/z}$ com $\mu > \mu_0 = 1 + 2/z$, $z \neq 0$. Para aplicarmos as técnicas utilizadas no capítulo 3 precisaremos supor que $f(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in [0, 1]$, ou seja, devemos assumir que

$$\mu < \bar{\mu} = \frac{z+1}{z}(z+1)^{1/z}.$$

Portanto para todos os nossos cálculos assumiremos que

$$\mu \in (1 + \frac{2}{z}, \frac{z+1}{z}(z+1)^{1/z}).$$

Observação 4.3 Definindo $\mu(s) = s[\bar{f}(s)]^{-1}$, devemos encontrar $\bar{s} > s_0$ tal que $\mu(\bar{s}) = \bar{\mu}$. Para isto basta considerarmos

$$\bar{s} = (1 - \frac{z}{(z+1)^{1/z+1}})^{1/z}, \quad (4.4)$$

e teremos $\bar{s} > s_0$ para todo $z \in \mathbb{Z}_+$ satisfazendo $\mu(\bar{s}) = \bar{\mu}$. Notemos ainda que

$$\bar{s} \rightarrow 1^- \text{ quando } z \rightarrow \infty.$$

Observação 4.4 Consideremos a aplicação $\mu : (s_0, \bar{s}) \rightarrow (0, \infty)$ definida por $\mu(s) = s[\bar{f}(s)]^{-1}$, e as funções auxiliares $x_i : (s_0, \bar{s}) \rightarrow (0, 1)$ definidas por

$$x_1(s) = \mu(s)\bar{f}(\theta),$$

$$x_2(s) = \mu(s)\bar{f}(x_1(s)),$$

$$x_3(s) = \mu(s)\bar{f}(x_2(s)),$$

então temos que

$$\lim_{s \rightarrow \bar{s}} x_1(s) = x_1(\bar{s}) = 1$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \bar{s}} x_2(s) = x_2(\bar{s}) = 0.$$

Podemos agora enunciar o

Teorema 4.1 *Seja $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua e C^3 em $(0, 1)$, com derivada Schwarziana negativa para todo $x \in [0, 1]$. Suponhamos ainda que existam números $0 \leq \theta < s_0 \leq 1$ tais que*

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta,$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } \theta < x < 1,$$

$$\frac{d}{dx} x \bar{f}(x) > 0 \text{ para } 0 < x < s_0,$$

$$\frac{d}{dx} x \bar{f}(x) < 0 \text{ para } s_0 < x < 1.$$

Se $x_0 = x_0(\mu)$ for o único ponto fixo de $\mu \bar{f}(x)$ tal que $x_0 \geq \theta$ para $\mu > \theta[\bar{f}(\theta)]^{-1}$, então

$$\{\mu : \mu \bar{f} \text{ satisfaz (I) em } x_0\} \equiv \{\mu(s) : s > s_0 \text{ e } x_3(s) > s\}$$

e

$$\{\mu : \mu \bar{f} \text{ satisfaz (III) em } x_0\} \equiv \{\mu(s) : s > s_0 \text{ e } x_2(s) \geq \theta\},$$

onde $\mu(s)$ e $x_i(s)$ estão definidos na Observação 4.4. Além disso, existe um número $\mu_3 > \mu(s_0) = \mu_0$ tal que

$$\{\mu : \mu \bar{f} \text{ satisfaz (III) em } x_0\} \equiv (\mu_0, \mu_3],$$

e $\mu_3 < \infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x \bar{f}(x) = 0.$$

Ainda, $\mu_3 = \tau(\bar{f}(\theta))^{-1}$, onde $s_0 < \tau < 1$, é raiz de $\tau \bar{f}(\tau) = \theta \bar{f}(\theta)$.

Prova :

A demonstração deste teorema é análoga à do Teorema 3.5. ■

Observação 4.5 É fácil verificar que $f(x) = \mu \bar{f}(x) = \mu x(1 - x^z)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1 com as constantes

$$\theta = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{1/z} \text{ e } s_0 = \left(\frac{2}{2+z}\right)^{1/z},$$

para cada $z \in \mathbb{Z}_+$ fixado. Logo existe uma função contínua $\mu_3 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$ tal que f satisfaz (III) no ponto fixo $x_0 = x_0(\mu) = (1 - 1/\mu)^{1/z}$ se, e somente, se

$$\mu_0(z) = 1 + \frac{2}{z} < \mu \leq \mu_3(z).$$

Os valores do parâmetro μ para os quais a função f satisfaz a hipótese (I) no ponto fixo $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$ ainda não estão claros. Sabemos apenas que existe um número $s_1 > s_0$ satisfazendo $\mu_0 < \mu_3 < \mu(s_1) = \mu_1$ tal que se $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$, então f satisfaz (I) no ponto fixo x_0 , mas não sabemos se este intervalo é o único. Temos o

Teorema 4.2 *Existe uma função contínua $\mu_1 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$ tal que $f = \mu \bar{f}$ satisfaz (I) em $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$ se $\mu_0(z) < \mu < \mu_1(z)$ com $\mu_1(z) > \mu_3(z)$ para todo $z \in \mathbb{Z}_+$, onde $\mu_3(z)$ é dado na Observação 4.5.*

Prova :

Consideremos $f(x) = \mu x(1 - x^z)$ onde $z \in \mathbb{Z}_+$ e seja $\psi[0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ uma aplicação definida por $\psi(x) = x^{1/z}$. Portanto $\psi^{-1}(x) = x^z$. Pelo Lema 2.2 temos que $\mu \bar{f}$ satisfaz (I) em x_0 se, e somente, se $h(x) = \mu^z \bar{h}$ satisfaz (I) no ponto fixo $y_0 = x_0^z$, onde

$$h(x) = \mu^z \bar{h}(x) = (\psi^{-1} f \psi)(x) = \mu^z x(1 - x)^z.$$

Assim, os conjuntos abaixo são os mesmos

$$\{\mu : \mu \bar{f} \text{ satisfaz (I) em } x_0\} = \{\mu : \mu^z \bar{h} \text{ satisfaz (I) em } y_0 = x_0^z\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \theta_h &= \frac{1}{1 + z}, \\ s_{0h} &= \frac{2}{2 + z}, \\ \bar{s}_h &= 1 - \frac{z}{(z + 1)^{1+1/z}}. \end{aligned}$$

e, portanto o Teorema 4.1 implica que $\mu^z \bar{h}$ satisfaz (I) em $y_0 = x_0^z$ se, e somente, se $\mu > \mu_0$ e

$$(\mu^z \bar{h})^3(\theta_h) > x_0^z.$$

Como antes, definindo

$$\begin{aligned}\mu(s) &= \frac{1}{(1-s)^z}, \\ x_1(s) &= \frac{z^z}{(z+1)^{z+1}(1-s)^z}, \\ x_2(s) &= \frac{z^z(1-x_1(s))^z}{(z+1)^{z+1}(1-s)^{2z}}, \\ x_3(s) &= \frac{z^z(1-x_1(s))^z(1-x_2(s))^z}{(z+1)^{z+1}(1-s)^{3z}},\end{aligned}$$

para $s \in (0, \overline{s}_h)$ temos

$$\{\mu : \mu \overline{f} \text{ satisfaz (I) em } x_0\} = \{\mu(s) : s > s_{0h} \text{ e } x_3(s) > s\},$$

ou equivalentemente

$$\{\mu : \mu \overline{f} \text{ satisfaz (I) em } x_0\} = \{s : s > s_{0h} \text{ e } \log(s^{-1}x_3(s)) > 0\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\log(s^{-1}x_3(s)) &= z \log z - (z+1) \log(z+1) - \log s - 3z \log(1-s) + \\ &\quad + z \log(1-x_1(s)) + z \log(1-x_2(s)).\end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{s \rightarrow \overline{s}_h} x_3(s) = 0,$$

logo existe $s_* < \overline{s}_h$ tal que $x_3(s) < s$ para $s > s_*$, ou seja, $\mu \overline{f}$ não satisfaz (I) para $\mu > \mu(s_*)$.

Para s próximo de s_{0h} temos pelo Teorema 4.1 que h satisfaz (III) em $y_0 = x_0^z$ e, portanto h satisfaz (III) em y_0 , e isto implica que

$$\log(s^{-1}x_3(s)) > 0,$$

para s próximo de s_{0h} . Um cálculo mostra que

$$\frac{d}{ds}(\log(s^{-1}x_3(s))) = \frac{s(3z+1)-1}{s(1-s)} - \frac{zx'_1(s)}{1-x_1(s)} - \frac{zx'_2(s)}{1-x_2(s)}.$$

Como

$$\frac{s(3z+1)-1}{s(1-s)} > 0,$$

$$x_1'(s) = \frac{czx_1(s)}{1-s} > 0$$

e

$$x_2''(s) = \frac{czx_1(s)}{(1-s)^2} + \frac{czx_1'(s)}{1-s} > 0,$$

para todo $s \in (0, 1)$ e para todo inteiro positivo z , onde $c = z^z/(z+1)^{z+1}$ é uma constante positiva. Então como $x_2'(s) < 0$ para $s \in (s_0, s_{0h})$, existe uma constante $s_{1h} \in (s_{0h}, s_*)$ tal que

$$\frac{d}{ds} \log(s^{-1}x_3(s)) > 0 \text{ para } s < s_{1h},$$

$$\frac{d}{ds} \log(s^{-1}x_3(s)) < 0 \text{ para } s \in (s_{1h}, s_{1h} + \delta), \text{ com } \delta \text{ pequeno.}$$

Logo para cada inteiro positivo z existe $\mu_1 = \mu_1(s_1)$ onde $s_1 = \psi(s_{1h})$ tal que se $\mu \in (\mu_0(z), \mu_1(z))$, então f satisfaz (I) em $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$. ■

Observação 4.6 Para mostrarmos que o intervalo $(\mu_0(z), \mu_1(z))$, no Teorema 4.2 é o único intervalo tal que f satisfaz (I) no ponto fixo x_0 , precisamos mostrar que

$$\frac{d}{ds} \log(s^{-1}x_3(s)) < 0$$

para todo $s \in (s_{1h}, s_*)$, o que ainda não conseguimos verificar.

Estamos interessados agora em estudar quando $f(x) = \mu \bar{f}(x) = \mu x(1 - x^z)$ satisfaz (II) no ponto fixo $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$. Façamos primeiro alguns cálculos, que dizem respeito à estabilidade local dos pontos 2 - periódicos de $f = \mu \bar{f}$. Suponhamos que para algum $\mu \in (\mu_0, \bar{\mu})$ onde $\bar{\mu} = \mu(\bar{s})$ com $\bar{s}$ dado em (4.4), existam números $0 < x_1 < x_2 < 1$ satisfazendo

$$\mu \bar{f}(x_1) = x_2 \text{ e } \mu \bar{f}(x_2) = x_1. \quad (4.5)$$

Então

$$x_1 \bar{f}(x_1) = x_2 \bar{f}(x_2) = c \quad (4.6)$$

e

$$\mu = \frac{x_1 x_2}{c}. \quad (4.7)$$

Observação 4.7 Se (4.6) e (4.7) são válidas, então é fácil mostrar que (4.5) também é válida.

Um cálculo mostra que

$$k = (f^2)'(x_1) = \mu^2 \bar{f}'(x_1) \bar{f}'(x_2) = (f^2)'(x_2),$$

então

$$k = u(x_1)u(x_2), \quad (4.8)$$

onde

$$u(x) = \frac{x \bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)}. \quad (4.9)$$

Como na Seção 3.5 a idéia é parametrizar os números x_1 , x_2 , μ e k dados acima pela constante c e, então obter resultados sobre a estabilidade dos pontos x_1 e x_2 . Consideremos $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua e C^3 em $(0, 1)$ e $g(x) = x \bar{f}(x)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0.$$

Suponhamos que existam constantes $0 \leq \theta < s_0$ tais que

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta,$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } \theta < x < 1,$$

$$g'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) < 0 \text{ para } s_0 < x < 1.$$

Definindo

$$c_* = g(s_0) = \max_{x \in (0,1)} g(x),$$

e considerando

$$g_1 = g|_{[0,s_0]} \text{ e } g_2 = g|_{[s_0,1]},$$

temos que

$$x_1 = x_1(c) = g_1^{-1}(c) \in [0, s_0],$$

$$x_2 = x_2(c) = g_2^{-1}(c) \in [s_0, 1],$$

ou seja, x_1 e x_2 são funções de $c \in [0, c_*]$ e, além disso, satisfazem as seguintes propriedades:

- x_1 e x_2 são funções C^3 em seus respectivos domínios abertos.

- $x_1'(c) > 0$ para $c \in [0, c_*)$.
- $x_2'(c) < 0$ para $c \in [0, c_*)$.
- $x_1(c_*) = x_2(c_*) = s_0$.
- $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 1$.

Os dois próximos resultados são adaptações do Lema 3.3 e do Teorema 3.7 para a função $f(x) = \mu x(1 - x^2)$, e suas demonstrações são análogas às demonstrações dos mesmos.

Lema 4.1 *Suponhamos que $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ seja uma função contínua e C^3 em $(0, 1)$. Se $g(x) = x\bar{f}(x)$, suponhamos que exista uma constante $s_0 > 0$ tal que*

$$g'(x) > 0 \text{ se } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) < 0 \text{ se } x > s_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0.$$

Consideremos $x_1(c)$ e $x_2(c)$ definidas como acima, e $\mu(c)$ e $k(c)$ definidas em (4.7) e (4.8). Então $\mu(c)$ e $k(c)$ satisfazem as seguintes propriedades :

$$(i) \mu(c) \rightarrow s_0^2/c_* > 0 \text{ e } k(c) \rightarrow 1 \text{ quando } c \rightarrow c_*.$$

(ii) $\mu(c) \rightarrow \infty$ quando $c \rightarrow 0^+$. Consideremos $u(x)$ definido por (4.9), e suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = L_2,$$

com $L_1 < \infty$ e $L_2 \geq -\infty$. Então

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} k(c) = L_1 L_2.$$

(iii) Suponhamos que exista $\theta \geq 0$ tal que

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta.$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } \theta < x < 1,$$

$$u'(x) < 0 \text{ para } \theta < x < 1.$$

Sejam $v(x) = -u(x)$ para $x \geq \theta$ e $\delta = \max\{-1/L_2, -L_1\}$, e suponhamos que

$$g(v^{-1}(\gamma)) > g(v^{-1}(\gamma^{-1})) \text{ para } \delta < \gamma < 1. \quad (4.10)$$

Então $k(c) < 1$ para $0 < c < c_*$. Se definirmos $\Phi(t) = \log(g(v^{-1}(t)))$ para $\delta < t < 1$, a desigualdade (4.10) será satisfeita se

$$\Phi'(t) < -\left(\frac{1}{t^2}\right)\Phi'\left(\frac{1}{t}\right) \text{ para } \delta < t < 1. \quad (4.11)$$

(iv) Se $k(c) < 1$ para $0 < c < c_*$, então $\mu'(c) < 0$ para $0 < c < c_*$.

(v) Se $u'(x) < 0$ para $x > 0$ e se $k(c) \leq 0$ para algum $c \in (0, c_*)$, então $k'(c) > 0$.

Teorema 4.3 Consideremos $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua e C^3 em $(0, 1)$, e suponhamos que exista uma constante $\theta \geq 0$ tal que

$$\bar{f}'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \theta,$$

$$\bar{f}'(x) < 0 \text{ para } \theta < x < 1.$$

Consideremos ainda, $g(x) = x\bar{f}(x)$, e suponhamos que exista uma constante $s_0 > \theta$ tal que

$$g'(x) > 0 \text{ para } 0 < x < s_0,$$

$$g'(x) < 0 \text{ para } s_0 < x < 1.$$

Sejam

$$u(x) = \frac{x\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)} \text{ e } v(x) = -u(x),$$

e suponhamos que $u'(x) < 0$ para todo $x > 0$, e

$$g(v^{-1}(\gamma)) > g(v^{-1}(-\gamma^{-1})) \text{ para } \delta < \gamma < 1, \quad (4.12)$$

onde δ é definido como no Lema 4.1. Suponhamos ainda que exista uma aplicação $\psi : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ de classe C^3 tal que $\psi'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$ e que $\psi^{-1}\mu\bar{f}\psi$ possua derivada Schwarziana negativa para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante $\mu_2 > \mu_0 = s_0\bar{f}(s_0)^{-1}$ tal que $\mu\bar{f}(x)$ satisfaz (II) em $x_0(\mu)$ se, e somente, se $\mu_0 < \mu < \mu_2$. Se $\mu(c)$ e $k(c)$ são definidos como no Lema 4.1 e $k(c_2) = -1$ para algum $c_2 \in (0, c_*)$ onde $c_* = \max g(x)$, então $\mu_2 = \frac{x_1(c_2)x_2(c_2)}{c_2} = \mu(c_2)$

Para finalizar esta seção, usaremos os resultados acima para determinar quando a função $f(x) = \mu x(1 - x^z)$ satisfaz a hipótese (II) no ponto fixo $x_0 = (1 - 1/\mu)^{1/z}$. É fácil mostrar que neste caso temos

$$u(x) = \frac{1 - (z+1)x^z}{1 - x^z},$$

$$u'(x) = \frac{-z^2 x^{z-1}}{(1 - x^z)^2},$$

portanto $u'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Ainda,

$$v(x) = \frac{-1 + (z+1)x^z}{1 - x^z},$$

então

$$v^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{z+1+x} \right)^{\frac{1}{z}}.$$

E se considerarmos

$$\Phi(t) = \frac{2}{z} \log(t+1) - \frac{2}{z} \log(z+1+t) + \log z - \log(z+1+t),$$

então

$$\Phi'(t) = \frac{1-t}{(z+1+t)(t+1)}.$$

Notemos ainda que $L_1 = 1$ e $L_2 = -\infty$ e, portanto $\delta = 0$. Assim precisamos apenas verificar se (4.12) é válida. Mas (4.12) é equivalente a

$$\frac{(z+1)+1}{\frac{(z+1)}{t}+1} < 1, \quad t \in (0, 1).$$

Mas a desigualdade acima é válida para todo $t \in (0, 1)$. Portanto o Teorema 4.3 implica que existe uma função contínua $\mu_2 : \mathbf{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$ tal que f satisfaz (II) no ponto fixo x_0 se, e somente, se $\mu \in (\mu_0(z), \mu_2(z)]$ com $\mu_2(z) < \mu_1(z)$.

4.4 Conclusões

Consideremos a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \mu x(1 - x^z)$, onde $\mu > 0$ e $z \in \mathbf{Z}$. Vimos no começo da Seção 4.3 que para todo $\mu > \mu_0 = 1 + \frac{2}{z}$, $z \neq 0$ a função f satisfaz a hipótese (0) no ponto fixo $x_0 = (1 - \frac{1}{\mu})^{1/z}$.

O Teorema 4.2 implica que existe um valor $\mu_1(z) > \mu_0(z)$ tal que f satisfaz a hipótese (I) no ponto fixo x_0 se $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$. Portanto o Teorema 1.1 garante que

existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe uma solução periódica que oscila lentamente $x(t)$ da equação

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) - \mu x(t-1)[1 - x(t-1)^z] \quad (4.13)$$

satisfazendo

$$-B \leq x(t) \leq A \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

onde A e B são dados na hipótese (I).

O Teorema 4.1 afirma que existe um número $\mu_3 = \tau \bar{f}(\theta)^{-1}$, onde $\theta = (\frac{1}{1+z})^{1/z}$ e $(\frac{2}{2+z})^{1/z} < \tau < 1$ é uma raiz de $\tau^2(1 - \tau^z) = \theta^z(1 - \theta^z)$, tal que f satisfaz a hipótese (III) no ponto fixo x_0 se, e somente, se $\mu \in (\mu_0, \mu_3]$. Logo o Corolário 1.4 implica que existe uma solução periódica que oscila lentamente da equação (4.13) que se aproxima da função onda quadrada

$$sqw(t) = \begin{cases} A & \text{se } 2n < t < 2n+1, \\ -B & \text{se } 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, uniformemente em intervalos compactos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Ainda, vimos no final da Seção 4.3 que existe um valor $\mu_2(z)$ tal que f satisfaz a hipótese (II) no ponto fixo x_0 se, e somente, se $\mu \in (\mu_0, \mu_2]$. Portanto o Corolário 1.5 implica que existe uma solução periódica que oscila lentamente da equação que se aproxima da função onda quadrada

$$sqw(t) = \begin{cases} a & \text{se } 2n < t < 2n+1, \\ -b & \text{se } 2n+1 < t < 2n+2 \end{cases}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, podendo esta convergência ser similar ao fenômeno de Gibbs que ocorre em séries de Fourier.

Por exemplo, para $z = 1$ temos que os valores do parâmetro μ são dados por

$$\mu_0 = 3,$$

$$\mu_1 = 3.69,$$

$$\mu_2 = 3.45,$$

$$\mu_3 = 3.2360.$$

Bibliografia

- [1] D. J. ALLWRIGHT, *Hypergraphic functions and bifurcations in recurrence relations*, SIAM J. Math., 34 (1978), pp. 687-691.
- [2] S. P. BLYTHE, R. M. NISBET, AND W. S. C. GURNEY, *Instability and complex dynamic behaviour in population models with long time delay*, Theoret. Population Biol., 2 (1982), pp. 147-176.
- [3] P. COLLET E J. P. ECKMANN, *Iterated Maps on the Intervals as Dynamical Systems*, Birkäuser, Boston, 1980.
- [4] J. B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, Berlim , 1978.
- [5] M. W. DERSTINE, H. M. GIBBS, F. A. HOPF, AND D. L. KAPLAN, *Alternate paths to chaos in optical bistability*, Phys. Rev. A(3), 27 (1983), pp. 474-477.
- [6] G. G. DUARTE JR., *Comportamento Assintótico de Uma Classe de Equações Diferenciais Retardadas com Aplicações em Biologia*, Tese de Doutorado, ICMSC- USP, São Carlos (1987).
- [7] S. M. S. GODOY, *Existência de Soluções Periódicas, Estabilidade e Aplicações de uma Classe de Equações Diferenciais Autônomas não Lineares*, Tese de Doutorado, ICMSC - USP, São Carlos (1989).
- [8] K. P. HADELER AND J. TOMIUK, *Periodic solutions of difference-differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 65 (1977), pp. 87-95.
- [9] J. K. HALE, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Berlim, 1977.
- [10] E. HILLE, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.

- [11] M. C. MACKEY E L. GLASS, *Oscillation and chaos in physiological control systems*, Science, 197 (1977), pp. 287-289.
- [12] J. MALLET-PARET AND R. D. NUSSBAUM, *Global continuation and complicated trajectories for periodic solutions of a differential-delay equation*, Proc Sympos. Pure Math., 45 (1986), pp. 155-167.
- [13] J. MALLET-PARET E R. D. NUSSBAUM, *Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation*, Annali di Matematica Pura ed Appl., 145 (1986), pp. 33-182.
- [14] J. MALLET- PARET E R. D. NUSSBAUM *A differential-delay equation arising in Optics and Physiology*, SIAM J. Appl. Math., 20 (1989), pp. 249-292.
- [15] R. M. MAY, *Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology*, Non-linear Dynamics , Annals of the New York Academy of Science, 357 (1980), pp. 267-281.
- [16] R. D. NUSSBAUM, *Periodic solutions of nonlinear autonomous functional differential equations*, Lecture Notes in Mathematics 730, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1979, pp. 283-325.
- [17] D. SINGER, *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, SIAM J. Math., 35 (1978), pp. 260-267.