Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves

Luís Márcio Salge

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Luís Márcio Salge

Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa

USP – São Carlos
Agosto de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S164f Salge, Luís Márcio
 Fórmula de aproximação de Baouendi-Treves / Luís
 Márcio Salge; orientador Éder Ritis Aragão Costa. --
 São Carlos, 2015.
 143 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
 e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

 1. fórmula de baouendi-treves. 2. estruturas
 localmente integráveis. 3. distribuições . I. Ritis
 Aragão Costa, Éder , orient. II. Título.

Luís Márcio Salge

Baouendi-Treves approximation formula

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa

USP – São Carlos
August 2015

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer em especial ao meu orientador de mestrado Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa e aos meus orientadores durante a graduação Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco e Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique pela amizade, dedicação e paciência durante a minha formação.

Aos meus pais, tios, demais familiares e amigos pelo seu amor e compreensão nos momentos mais difíceis da minha formação. Em especial aos meus avós paternos Márcio Antônio Salge e Terezinha Lemos Salge que me criaram, educaram e me ajudaram a chegar onde estou.

Aos professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação que contribuíram na minha formação durante a graduação e o mestrado.

À CAPES e Fapesp pelo apoio financeiro, sem os quais esse projeto não teria sido possível.

Peço desculpa às pessoas não citadas e contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

*“Os loucos abrem os
caminhos que depois emprestam
aos sensatos”
(Carlo Dossi)*

Resumo

O objetivo principal de estudo deste trabalho são as estruturas localmente integráveis $\mathcal{L}$ e a *fórmula de aproximação de Baouendi-Treves*, segundo a qual qualquer solução homogênea de

$$\mathcal{L}u = 0,$$

pode, localmente, ser aproximada por polinômios nas suas integrais primeiras.

A realização deste projeto requer um estudo rigoroso de alguns aspectos da teoria das estruturas involutivas e da teoria das distribuições. As principais referências são [2], [4] e [1].

Palavras-chave: fórmula de Baouendi-Treves. estruturas localmente integráveis. distribuições.

Abstract

The main goal of this project is to study a locally integrable structures $\mathcal{L}$ and the *Baouendi-Treves approximation formula*, which states that every homogeneous solution of

$$\mathcal{L}u = 0,$$

can be, locally, approximated by polynomials in their first integrals.

This result requires the rigorous study of some aspects of the involutive structures theory and of the distributions theory. The main references are [2], [4] e [1].

Key-words: Baouendi-Treves approximation formula. locally integrable structures. distributions.

Sumário

Introdução	17
1 Campos Vetoriais Complexos	19
1.1 Variedades Diferenciáveis N -Dimensionais	19
1.2 Funções Suaves Definidas em Uma Variedade	21
1.3 Campos Vetoriais Complexos	21
2 Estrutura Algébrica de $\mathfrak{X}(\Omega)$	25
2.1 Representação Local de Campos Vetoriais	25
3 Estruturas Involutivas (ou Formalmente Integráveis)	29
3.1 Germes de Funções C^∞	29
3.2 Fibrado Tangente Complexificado $CT\Omega$	29
3.3 Subfibrado Vetorial Complexo $\mathcal{V} \subset CT\Omega$	32
4 Formas Diferenciais	35
4.1 Fibrado Cotangente Complexificado $CT^*\Omega$	36
4.2 Subfibrado Vetorial Complexo $\mathcal{W} \subset CT^*\Omega$	38
4.3 Conjugação Complexa	41
5 Teorema de Frobenius	43
5.1 Problema de Cauchy	43
5.2 Teorema de Frobenius	45
6 Estruturas Localmente Integráveis	61
6.1 Conjunto Característico	61
6.2 Algumas estruturas especiais	65
6.3 Estruturas Localmente Integráveis	75
6.4 Geradores Locais	78
7 Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves	111
7.1 Versão Clássica	111
7.2 Versão Distribucional	118
7.2.1 Preliminares	118
7.2.2 Teorema de Baouendi-Treves	137
Referências	143

Introdução

O foco deste estudo são as estruturas involutivas localmente geradas por campos vetoriais complexos e o Teorema de Aproximação de Bouendi-Treves, o qual é uma ferramenta fundamental no estudo de sistemas involutivos de campos vetoriais complexos. Tal teorema fornece aproximações de soluções homogêneas de estruturas localmente integráveis em espaços de funções, tais como os espaços L^p , dessa forma possui aplicações em equações diferenciais parciais e várias variáveis complexas.

Neste estudo, sistemas de vetores complexos surgem como sendo uma base local de subfibrados vetoriais complexos involutivos $\mathcal{V}$ do fibrado tangente complexificado $CT\Omega$. Dizer que $\mathcal{V}$ é involutiva significa que o colchete de Lie de quaisquer duas seções de $\mathcal{V}$ também é, por sua vez, uma seção de $\mathcal{V}$.

Alguns exemplos de estruturas involutivas $(\Omega, \mathcal{V})$ incluem estruturas complexas, estruturas CR (ou de Cauchy-Riemann), estruturas localmente integráveis e foliações.

Para compreender o funcionamento destas estruturas, iniciamos com o estudo de campos vetoriais complexos definidos em uma variedade suave Ω . Em seguida, passamos a estudar subfibrados vetoriais complexos $\mathcal{V}$ do fibrado tangente complexificado $CT\Omega$, que são basicamente uma coleção de espaços vetoriais de mesma dimensão $\{\mathcal{V}_p\}_{p \in \Omega}$ e que são localmente gerados por campos vetoriais complexos.

Com isso podemos definir o que são estruturas involutivas. O Teorema de Frobenius é de suma importância para tal tema, para este teorema apresentamos uma demonstração detalhada tanto na versão que envolve um aberto de $\mathbb{R}^N$, quanto para a versão que envolve uma variedade suave N -dimensional.

Em sequência, estudamos algumas estruturas especiais tais como estruturas complexas, essencialmente reais, CR , elíticas. Sendo que existe uma espécie de equivalência entre a definição de uma estrutura seja elítica e o fato de os campos que geram localmente tal estrutura serem elíticos no sentido de operadores diferenciais parciais lineares. O conceito de conjunto característico T^0 de uma estrutura $\mathcal{V}$ também desempenha um papel importante no estudo de estruturas involutivas.

Daí em diante, nos focamos no estudo de estruturas localmente integráveis $\mathcal{V}$, em que o subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}^\perp$ do fibrado cotangente complexificado $CT^*\Omega$ é localmente gerado por diferenciais exatas.

Quando $(\Omega, \mathcal{V})$ é uma estrutura localmente integrável, cada ponto de Ω possui uma vizinhança U tal que se $\{L_1, \dots, L_n\}$ forem n campos vetoriais com

$$\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}], p \in U,$$

então neste caso podemos encontrar $m = N - n$ funções $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U; \mathbb{C})$, que são soluções de

$$L_j h = 0, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

e cujas diferenciais são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ para quaisquer pontos de U . Chamamos as funções $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ de conjunto completo de integrais primeiras na vizinhança U .

Por fim, apresentamos e demonstramos a *Fórmula de Baouendi-Treves* que afirma que qualquer $u \in \mathcal{D}'(W)$ solução de 1 pode ser aproximada, localmente, por uma sequência $P_k(Z)$, em que P_k são polinômios holomorfos de m variáveis e $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ é um conjunto completo de integrais primeiras.

A *Fórmula de Baouendi-Treves* está dividida nas versões clássica, em que a solução u é uma função suave, e distribucional. Destacamos que na demonstração da versão clássica fizemos uso de resultados de cálculo para funções de várias variáveis, matrizes hermitianas simétricas com parte real positivo definida, *Teorema de Stokes* para formas diferenciais, pull-back de formas diferenciais e análise complexa. Já no caso distribucional foram necessários conceitos mais sofisticados, tais como conjunto frente de onda, o estudo de subconjuntos densos de funções regulares em espaços do tipo

$$C_c^0(\{t \in \mathbb{R}^n; |t| \leq T\}; H^k(\mathbb{R}^m)),$$

propriedades do operador laplaciano, dentre outros.

Ressaltamos ainda, que tal teorema de aproximação tornou possível a utilização de ferramentas de análise complexa, análise harmônica e de equações diferenciais parciais no estudo de problemas envolvendo estruturas localmente integráveis. A saber, problemas sobre regularidade local e microlocal das soluções de 1, a determinação de conjuntos de unicidade para soluções de 1, resolubilidade de complexos diferenciais associados a estrutura $(\Omega, \mathcal{V})$, dentre outros.

1 Campos Vetoriais Complexos

1.1 Variedades Diferenciáveis N –Dimensionais

Inicialmente, introduzimos o conceito de uma variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável nada mais é do que um espaço topológico munido de uma estrutura diferenciável que nos permite utilizar ferramentas do cálculo diferencial para estudar funções definidas nestes espaços.

Definição 1.1.1 (Estrutura Diferenciável Sobre Ω). *Seja Ω um espaço topológico, Hausdorff e segundo enumerável. Considere a coleção $\mathcal{F} \doteq \{(U, x)\}$, onde $U \subset \Omega$ é um aberto não vazio,*

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

é um homeomorfismo sobre o aberto $x(U)$ de $\mathbb{R}^N$ e as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $\cup_{(U,x) \in \mathcal{F}} U = \Omega;$

2. a aplicação

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \rightarrow x'(U \cap U')$$

é infinitamente diferenciável para cada par $(U, x), (U', x') \in \mathcal{F}$ tais que $U \cap U' \neq \emptyset$.

3. $\mathcal{F}$ é maximal com respeito as duas propriedades acima, ou seja, se (V, y) são tais que $V \subset \Omega$ é um aberto não vazio, $y : V \rightarrow y(V)$ um homeomorfismo sobre o aberto $y(V)$ de $\mathbb{R}^N$ e para cada $(U, x) \in \mathcal{F}$, tal que $U \cap V \neq \emptyset$, as aplicações

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$$

são infinitamente diferenciáveis, então $(y, V) \in \mathcal{F}$.

Tal coleção $\mathcal{F}$ é chamada de *estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω .*

Observação 1.1.2. *Se $\mathcal{F}^* = \{(U, x)\}$ é uma coleção que satisfaz as propriedades 1 e 2 da definição acima, então existe única estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de dimensão N sobre Ω tal que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.*

De fato, defina a família $\mathcal{F} = \mathcal{F}^ \cup \mathcal{A}$, onde a coleção $\mathcal{A}$ é formada pelos pares (y, V) tais que $V \subset \Omega$ é um aberto não vazio, $y : V \rightarrow y(V)$ um homeomorfismo sobre o*

aberto $y(V)$ de $\mathbb{R}^N$ e para cada $(U, x) \in \mathcal{F}^*$, tal que $U \cap V \neq \emptyset$, as aplicações

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} : x(U \cap V) &\rightarrow y(U \cap V) \\ x \circ y^{-1} : y(U \cap V) &\rightarrow x(U \cap V) \end{aligned}$$

são suaves. Observe que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.

Além disso, pela forma como $\mathcal{F}$ foi definida, tal coleção satisfaz as propriedades 1, 2 e 3, pois se (y, V) tais que $V \subset \Omega$ é um aberto não vazio, $y : V \rightarrow y(V)$ um homeomorfismo sobre o aberto $y(V)$ de $\mathbb{R}^N$ e para cada $(U, x) \in \mathcal{F}$, em particular para cada $(U, x) \in \mathcal{F}^*$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$, as aplicações

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} : x(U \cap V) &\rightarrow y(U \cap V) \\ x \circ y^{-1} : y(U \cap V) &\rightarrow x(U \cap V) \end{aligned}$$

são suaves, então $(y, V) \in \mathcal{F}$. Logo esta coleção define uma estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω . Se $\mathcal{G}$ for outra estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω que contém $\mathcal{F}^*$, então sendo $\mathcal{G}$ maximal tem-se $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, sendo $\mathcal{F}$ maximal tem-se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e assim $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Definição 1.1.3 (Variedade Diferenciável (Suave) de Dimensão N). *Seja Ω um espaço topológico, Hausdorff e segundo enumerável, o qual é munido de uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de dimensão N . Dizemos que o par $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma variedade diferenciável de dimensão N .*

Por simplicidade, denotamos a variedade diferenciável $(\Omega, \mathcal{F})$ de dimensão N por Ω . Se, na definição 1.1.1, exigíssemos que as funções fossem reais analíticas, ou seja, infinitamente diferenciáveis com série de potências convergente numa vizinhança de cada ponto de seu domínio, obteríamos uma variedade real analítica de dimensão N .

A seguir apresentamos alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Exemplo 1.1.4. 1. Considere $\Omega \doteq \mathbb{R}^N$ munido da estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ N -dimensional que contém $(\mathbb{R}^N, id)$, tem-se que Ω define uma variedade diferenciável N -dimensional;

2. Seja Ω uma variedade diferenciável N -dimensional munido da estrutura diferencial $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$ N -dimensional. Considere $W \subset \Omega$, aberto não vazio, munido da topologia induzida pela topologia de Ω e a coleção

$$\mathcal{F}_W \doteq \{(W \cap U, x|_{W \cap U}); (U, x) \in \mathcal{F}, W \cap U \neq \emptyset\}.$$

Como Hausdorff e segundo enumerável são propriedades hereditárias, W será um espaço topológico, Hausdorff e segundo enumerável. Além disso, podemos facilmente mostrar que $\mathcal{F}_W$ define uma estrutura diferenciável N -dimensional. Sendo assim $(W, \mathcal{F}_W)$ é uma variedade diferenciável N -dimensional.

As estruturas diferenciáveis $\mathcal{F}$ também são chamadas de atlas C^∞ , seus elementos $(U, x) \in \mathcal{F}$ são chamados de cartas locais ou sistema de coordenadas local. Escrevemos $x = (x_1, \dots, x_N)$, assim $p \in U$ tem suas coordenadas locais dadas por $x(p) = (x_1(p), \dots, x_N(p))$.

1.2 Funções Suaves Definidas em Uma Variedade

Nesta seção, a partir da definição de variedade diferenciável introduzida na seção anterior, definimos o conceito de função suave definida em uma variedade diferenciável.

Definição 1.2.1 (Funções Suaves Definidas em uma Variedade). *Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita suave, ou infinitamente diferenciável se para cada $(U, x) \in \mathcal{F}$, tivermos que*

$$f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.1)$$

é infinitamente diferenciável. O conjunto constituído por tais funções é denotado por $C^\infty(\Omega)$.

Observação 1.2.2. *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que, para cada $p \in \Omega$, existe $(U, x) \in \mathcal{F}$ com $p \in U$ e $f \circ x^{-1} \in C^\infty(x(U))$, então $f \in C^\infty(\Omega)$.*

De fato, seja $(V, y) \in \mathcal{F}$ com $V \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $f \circ y^{-1} \in C^\infty(y(V))$. Para tanto, basta que para cada $p \in V$ exista aberto $W \subset y(V)$, que contém $y(p)$, tal que $f \circ y^{-1}|_W \in C^\infty(W)$. Seja $p \in V$, note que existe $(x, U) \in \mathcal{F}$, com $p \in U$, tal que $f \circ x^{-1} \in C^\infty(x(U))$. Como $x \circ y^{-1}$ é suave, então $f \circ y^{-1}|_W = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1})$ é suave.

Observação 1.2.3. *O conjunto $C^\infty(\Omega)$ é uma $\mathbb{C}$ -Álgebra.*

1.3 Campos Vetoriais Complexos

Dada uma variedade diferenciável Ω de dimensão N , vamos introduzir o conceito de campo vetorial complexo que é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear definida no conjunto das funções suaves $C^\infty(\Omega)$, tomando valores neste mesmo conjunto $C^\infty(\Omega)$ e que satisfaz uma certa propriedade, que será especificada mais adiante, de forma que estas aplicações se comportam essencialmente como derivadas de primeira ordem. O conceito de campos vetoriais é relevante no nosso contexto pois facilita o estudo da convergência de sequências de funções e suas derivadas.

Definição 1.3.1 (Campos Vetoriais Complexos). *Um campo vetorial complexo (suave) é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear:*

$$L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$$

que satisfaz a regra de Leibniz, a saber,

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \forall f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Denotamos o espaço de tais objetos por $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Proposição 1.3.2. *Seja $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Se f for uma função constante, então $Lf = 0$. Além disso,*

$$\text{supp}(Lf) \subset \text{supp}(f), \forall f \in C^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Demonstração. Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(p) = c, \forall p \in \Omega$, onde $c \in \mathbb{C}$. Como L é $\mathbb{C}$ -linear, tem-se que:

$$L(f) = L(1c) = cL(1),$$

agora basta mostrarmos que $L(1) = 0$.

Pela regra de Leibniz tem-se:

$$L(1) = L(1.1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1),$$

então $L(1) = 0$.

Sejam $L \in \mathfrak{X}(\Omega), f \in C^\infty(\Omega)$ e considere as seguintes famílias $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_{Lf}$, onde $U \in \mathcal{F}_f$ se $U \subset \Omega$ for aberto não vazio tal que $f|_U = 0$, e $U \in \mathcal{F}_{Lf}$ se $U \subset \Omega$ for aberto não vazio tal que $Lf|_U = 0$.

Por definição, temos

$$\text{supp}(f) = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{F}_f} U \right)^c$$

e

$$\text{supp}(Lf) = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{F}_{Lf}} U \right)^c,$$

logo basta mostrarmos que $\bigcup_{U \in \mathcal{F}_f} U \subset \bigcup_{U \in \mathcal{F}_{Lf}} U$.

Seja $V \subset \Omega$ aberto não vazio tal que $f|_V = 0$ e mostremos que $Lf|_V = 0$, ou seja, que para cada $p \in V$ tem-se $Lf(p) = 0$. Considere $p \in V$ e $(U, x) \in \mathcal{F}$ com $p \in U \subset V$.

Observe que $x(U) \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $\{x(p)\} \subset x(U)$ é compacto, logo existe $\phi \in C_c^\infty(x(U))$ com $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi|_W = 1$, onde $W \subset x(U)$ é um aberto que contém $x(p)$.

Defina:

$$g(q) = \begin{cases} \phi(x(q)), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)). \end{cases}$$

Note que g é suave, pois $\phi \circ x$ é suave e se $q \in U \cap (x^{-1}(\text{supp}(\phi)))^c$ então $g(q) = 0$. Além disso, tem-se $f = (1 - g)f$. Com efeito, se $q \in x^{-1}(\text{supp}(\phi)) \subset U \subset V$ então

$$(1 - g(q))f(q) = (1 - 1)f(q) = 0 = f(q),$$

e se $q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi))$, consequentemente

$$(1 - g(q))f(q) = 1f(q) = f(q).$$

Portanto, pela regra de Leibniz obtém-se que:

$$\begin{aligned} L(f)(q) &= f(q)L(1 - g)(q) + (1 - g(q))L(f)(q) \\ &= L(f)(q) - g(q)L(f)(q) - f(q)L(g)(q) \end{aligned}$$

e assim para $q = p$

$$L(f)(p) = L(f)(p) - L(f)(p) = 0.$$

Como $p \in V$ é arbitrário, concluímos que $Lf|_V = 0$ e segue que $\text{supp}(Lf) \subset \text{supp}(f)$.

□

Operadores com a propriedade 1.2 são chamados de operadores locais. Com o resultado da Proposição 1.3 somos capazes de definir a restrição de um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ a um aberto não vazio $W \subset \Omega$. Mais precisamente, definimos uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear:

$$\mathfrak{X}(\Omega) \ni L \mapsto L_W \in \mathfrak{X}(W),$$

que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{L} & C^\infty(\Omega) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ C^\infty(W) & \xrightarrow{L_W} & C^\infty(W) \end{array}.$$

Sejam $W \subset \Omega$ um aberto não vazio e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Para cada $f \in C^\infty(W)$ e cada $p \in \Omega$ defina:

$$L_W(f)(p) \doteq L(\tilde{f})(p),$$

onde $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$ é tal que f coincide com $\tilde{f}$ em alguma vizinhança de p .

Note que L_W está bem definido. De fato, sejam $f \in C^\infty(W)$ e $p \in W$, se $\hat{f}, \tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$ são tais que $f|_U = \hat{f}|_U$ e $f|_V = \tilde{f}|_V$, então $(\hat{f} - \tilde{f})|_{U \cap V} = 0$, ou seja, $U \cap V \subset (\text{supp}(\hat{f} - \tilde{f}))^c$.

Assim, pela Proposição 1.3 e por L ser $\mathbb{C}$ -linear, temos que:

$$U \cap V \subset (\text{supp } L(\hat{f} - \tilde{f}))^c = (\text{supp}(L\hat{f} - L\tilde{f}))^c,$$

em outras palavras obtemos $(L\hat{f} - L\tilde{f})|_{U \cap V} = 0$ e segue que $L\hat{f}(p) = L\tilde{f}(p)$.

Além disso, podemos verificar que o operador L_W faz o diagrama acima comutar e que de fato $L_W \in \mathfrak{X}(W)$.

2 Estrutura Algébrica de $\mathfrak{X}(\Omega)$

Sejam $g \in C^\infty(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ podemos definir a operação gL por:

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega) &\rightarrow \mathfrak{X}(\Omega) \\ (g, L) &\mapsto gL, \end{aligned}$$

onde $gL : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ é dada por:

$$(gL)(f)(p) \doteq g(p)Lf(p), p \in \Omega, f \in C^\infty(\Omega).$$

Dessa maneira, obtemos que tal operação torna $\mathfrak{X}(\Omega)$ um $C^\infty(\Omega)$ –módulo.

Uma operação muito relevante em $\mathfrak{X}(\Omega)$ é o *Lie-Bracket* ou comutador entre dois campos vetoriais que é dada por:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega) &\rightarrow \mathfrak{X}(\Omega) \\ (L, M) &\mapsto [L, M], \end{aligned}$$

onde $[L, M](f) \doteq L(M(f)) - M(L(f)), f \in C^\infty(\Omega)$.

Observação 2.0.3. *O conjunto $\mathfrak{X}(\Omega)$ munido do comutador é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, pois $[\cdot, \cdot]$ é um operador bilinear, alternado e respeita a identidade de Jacobi.*

2.1 Representação Local de Campos Vetoriais

Considere Ω uma variedade diferenciável N –dimensional com estrutura diferenciável $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$. Fixe $p \in \Omega$, sejam (U, x) uma carta local de Ω com $p \in U$, $L \in \mathfrak{X}(U)$ e escreva:

$$x(q) = (x_1(q), \dots, x_N(q)), q \in U.$$

Observe que $x(p) \in x(U) \subset \mathbb{R}^N$, então existe $r_p > 0$ tal que $B(x(p), r_p) \subset x(U)$. Tome $V \doteq x^{-1}(B(x(p), r_p)) \subset U$. Defina $a = (a_1, \dots, a_N) \doteq x(p)$, assim $p \in V$ e $x(V) = B(a, r_p)$.

Dada $f \in C^\infty(U)$, tome $f^* \doteq f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{C}$, em particular tem-se que $f^* \in C^\infty(x(U))$.

Para cada $(x_1, \dots, x_N) \in x(V)$, considere a função $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\psi(t) \doteq f^*(a + t(x - a)) = f^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_N + t(x_N - a_N)).$$

Assim $\psi \in C^\infty([0, 1])$ e podemos aplicar o *Teorema Fundamental do Cálculo* para obter:

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt.$$

Portanto:

$$f^*(x_1, \dots, x_N) = f^*(a_1, \dots, a_N) + \sum_{j=1}^N h_j(x_1, \dots, x_N)(x_j - a_j), \quad (2.1)$$

onde

$$h_j(x_1, \dots, x_N) \doteq \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a + t(x - a)) dt \in C^\infty(x(V)).$$

Tome $g_j = h_j \circ x \in C^\infty(V)$, substituindo em 2.1 tem-se que

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^N g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), q \in V.$$

Logo pela regra de Leibniz concluímos

$$L_V(f|_V)(q) = L(f)(q) = \sum_{j=1}^N (Lg_j)(q)(x_j(q) - x_j(p)) + \sum_{j=1}^N g_j(q)(Lx_j)(q), q \in V.$$

Por fim, avaliando em $q = p$:

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(x(p)) L(x_j)(p). \quad (2.2)$$

Para cada $j = 1, \dots, N$ considere a seguinte aplicação $\mathbb{C}$ -linear

$$\begin{aligned} C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ f &\mapsto \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ x, \end{aligned}$$

a qual denotamos por $\frac{\partial}{\partial x_j}$, define um elemento de $\mathfrak{X}(U)$.

De 2.2 tem-se que

$$\begin{aligned} L(f)(p) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(x(p)) (Lx_j)(p) = \\ &= \sum_{j=1}^N L(x_j)(p) \frac{\partial}{\partial x_j}(f)(p), \end{aligned}$$

como $p \in U$ e $f \in C^\infty(U)$ são arbitrários, concluímos que

$$L = \sum_{j=1}^N (Lx_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Consequentemente $\mathfrak{X}(U)$ é um $C^\infty(U)$ -módulo livre com base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right\}.$$

Observação 2.1.1. Observe que para quaisquer $j, k = 1, \dots, N$ vale

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

Com efeito, note que $x_j \circ x^{-1}(q) = q_j, q = (q_1, \dots, q_N) \in x(U)$ pois

$$x \circ x^{-1} = (x_1 \circ x^{-1}, \dots, x_{j-1} \circ x^{-1}, x_j \circ x^{-1}, x_{j+1} \circ x^{-1}, \dots, x_N \circ x^{-1}) = id,$$

assim, para cada $p \in U$ denote $q = x(p)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial x_k}(p) &= \frac{\partial(x_j \circ x^{-1})}{\partial e_k}(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_j \circ x^{-1}(q + te_k) - x_j \circ x^{-1}(q)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q_j - q_j}{t} = 0, j \neq k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial x_j}(p) &= \frac{\partial(x_j \circ x^{-1})}{\partial e_j}(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_j \circ x^{-1}(q + te_j) - x_j \circ x^{-1}(q)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q_j + t - q_j}{t} = 1, \end{aligned}$$

logo obtemos 2.3.

Seja $f \in C^\infty(U)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial e_k} \circ x \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial e_j} \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial e_k} \circ x \circ x^{-1} \right) \right) \circ x = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial e_j} \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial e_k} \right) \right) \circ x = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial e_k} \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial e_j} \right) \right) \circ x = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial e_k} \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial e_j} \circ x \circ x^{-1} \right) \right) \circ x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \end{aligned}$$

portanto concluímos 2.4.

3 Estruturas Involutivas (ou Formalmente Integráveis)

Neste capítulo, apresentamos as noções de fibrado tangente complexificado $\mathbb{C}T\Omega$ e subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$. Daí podemos definir o conceito de estruturas involutivas que tem um papel importante no nosso contexto.

3.1 Germes de Funções C^∞

Seja $p \in \Omega$ e denote por $\mathcal{B}_p$ o conjunto dos pares (V, f) , onde $V \subset \Omega$ aberto com $p \in V$ e $f \in C^\infty(V)$. Defina a relação $\sim$ em $\mathcal{B}_p$ da seguinte forma $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ se, e somente se, f_1 coincide com f_2 numa vizinhança de p .

A relação definida acima é de equivalência. Denotamos $\mathcal{B}_p / \sim$ por $C^\infty(p)$ e chamamos seus elementos, $\underline{f} \in C^\infty(p)$, de germes de uma função C^∞ em p .

Observação 3.1.1. *O conjunto $C^\infty(p)$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra. Além disso, podemos conjugar as classes de germes $\underline{f} \in C^\infty(p)$, basta tomar um elemento $g \in \underline{f}$ e considerar $\bar{f}$ como sendo a classe da função $\bar{g}$.*

3.2 Fibrado Tangente Complexificado $\mathbb{C}T\Omega$

Definição 3.2.1. *Um vetor complexo tangente à Ω em p é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear*

$$v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$v(\underline{fg}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f}), \quad \underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p).$$

Denotamos por $\mathbb{C}T_p\Omega$ o conjunto de todos os vetores complexos tangentes à Ω em p , o qual é chamado de espaço tangente à Ω em p , e por $\mathbb{C}T\Omega$ a coleção $\cup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega$, a qual é chamada de fibrado tangente complexificado.

Observação 3.2.2. *Note que o conjunto $\mathbb{C}T_p\Omega$ é um espaço vetorial.*

Observação 3.2.3. *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, defina $L_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{C}$ por:*

$$L_p(\underline{f}) \doteq L(f)(p),$$

assim $L_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$.

Além disso, pela construção feita anteriormente temos que existe uma carta local (U, x) de Ω e um aberto $V \subset U$ que contém p tais que

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^N g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), q \in V.$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned} v(\underline{f}) &= \sum_{j=1}^N v(\underline{x_j})g_j(p) = \sum_{j=1}^N v(\underline{x_j})\frac{\partial}{\partial x_j}(f)(p) = \\ &= \sum_{j=1}^N v(\underline{x_j})\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\underline{f}) \end{aligned}$$

e concluímos que

$$v = \sum_{j=1}^N v(\underline{x_j})\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p.$$

Segue deste fato que o conjunto $\mathbb{C}T_p\Omega$ é um espaço vetorial N -dimensional que admite como base o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)_p\right\}. \quad (3.1)$$

Observação 3.2.4. *Sejam $U \subset \Omega$ um aberto não vazio e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$. Considere as seguintes sentenças:*

1. *para cada $p \in U$, $\{L_{jp}\}_{j=1}^n$ é linearmente independente;*
2. *se $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ forem tais que*

$$\sum_{j=1}^n f_j L_j = 0,$$

então $f_1, \dots, f_n = 0$;

3. *se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ forem tais que*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j L_j = 0,$$

então $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$.

Afirmamos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Com efeito, suponha 1 e considere $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ tais que

$$\sum_{j=1}^n f_j L_j = 0.$$

Assim

$$\left(\sum_{j=1}^n f_j L_j\right)_p = \sum_{j=1}^n f_j(p) L_{jp} = 0,$$

e por 1 tem-se que $f_j(p) = 0, j = 1, \dots, n, p \in U$, ou seja, $f_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Agora suponha 2 e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j L_j = 0.$$

Considere

$$\begin{aligned} f_j : U &\rightarrow \mathbb{C} \\ p &\mapsto f_j(p), \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n$, assim $f_j \in C^\infty(U)$ e

$$\sum_{j=1}^n f_j L_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_j = 0.$$

Logo $\lambda_j = f_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Proposição 3.2.5. Para cada $p \in \Omega$, tem-se que:

$$\mathbb{C}T_p\Omega = \{L_p; L \in \mathfrak{X}(\Omega)\}.$$

Demonstração. De fato, seja $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$. Por 3.1 tem-se que existem $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p.$$

Seja (U, x) um sistema de coordenadas locais com $p \in U$. Considere

$$g(q) = \begin{cases} \phi(x(q)), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

onde $\phi \in C_c^\infty(x(U))$ com $\phi(x(p)) = 1$.

Defina $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, dada por:

$$Lf(q) = \begin{cases} g(q) \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(q), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

para $f \in C^\infty(\Omega)$.

Se $f, h \in C^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$L(f + \lambda h)(q) = \begin{cases} g(q) \left(\sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(q) + v_j \lambda \frac{\partial h}{\partial x_j}(q) \right), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

ou seja, $L(f + \lambda h) = Lf + \lambda Lh$ e

$$L(fh)(q) = \begin{cases} g(q) \left(\sum_{j=1}^N v_j h(q) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(q) + v_j f(q) \frac{\partial h}{\partial x_j}(q) \right), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

então $L(fh) = hLf + fLh$ e portanto $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Além disso, se $\underline{f} \in C^\infty(p)$ tem-se

$$L_p(\underline{f}) = g(p) \sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p (\underline{f}) = \sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p (\underline{f}) = v(\underline{f}),$$

logo $L_p = v$.

□

3.3 Subfibrado Vetorial Complexo $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$

Definição 3.3.1. Dizemos que o conjunto $\mathcal{V} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\Omega$ é um subfibrado vetorial complexo n -dimensional se satisfaz as seguintes propriedades:

1. para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$ é um subespaço vetorial n -dimensional;
2. para cada $p_0 \in \Omega$, existem $U \subset \Omega$ aberto com $p_0 \in U$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que, para cada $p \in U$, vale que $\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}]$.

Dados $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ um subfibrado vetorial complexo n -dimensional e $W \subset \Omega$ aberto não vazio, dizemos que $L \in \mathfrak{X}(W)$ é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W se

$$L_p \in \mathcal{V}_p, \forall p \in W.$$

Definição 3.3.2 (Estrutura Involutiva). Um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ de dimensão n é uma estrutura involutiva (ou formalmente integrável) sobre Ω se satisfaz a condição de Frobenius, a saber, dados $W \subset \Omega$ aberto não vazio e $L, M \in \mathfrak{X}(W)$ duas seções de $\mathcal{V}$ sobre W , então $[L, M] \in \mathfrak{X}(W)$ é, por sua vez, uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W .

Definição 3.3.3. Uma solução clássica de uma estrutura involutiva $\mathcal{V}$ sobre Ω é uma função $u \in C^1$ tal que $Lu = 0$, para toda seção L de $\mathcal{V}$ sobre W , para cada W aberto de Ω .

Proposição 3.3.4. Sejam $\mathcal{V}$ uma estrutura involutiva n -dimensional sobre Ω e $p \in \Omega$. Considere (U, x) um sistema de coordenadas locais, com $p \in U$, e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $\mathcal{V}_q = [L_{1q}, \dots, L_{nq}]$ para cada $q \in U$. Então existem $c_{jk}^\nu \in C^\infty(U)$, $j, k, \nu = 1, \dots, n$, tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^n c_{jk}^\nu L_\nu, j, k = 1, \dots, n.$$

Demonstração. De fato, como $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ existem $a_{jk} \in C^\infty(U)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, tais que

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Além disso, para cada $q \in U$, $\{L_{1q}, \dots, L_{nq}\}$ é linearmente independente então a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{21}(q) & \cdots & a_{n1}(q) \\ a_{12}(q) & a_{22}(q) & \cdots & a_{n2}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(q) & a_{2N}(q) & \cdots & a_{nN}(q) \end{pmatrix}$$

tem posto n .

Rearranjando os índices tem-se que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{21}(p) & \cdots & a_{n1}(p) \\ a_{12}(p) & a_{22}(p) & \cdots & a_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p) & a_{2n}(p) & \cdots & a_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

é invertível e, diminuindo a vizinhança U se necessário, obtemos que a matriz acima é invertível para cada $q \in U$. Isso é possível pelo fato das funções a_{jk} , $j, k = 1, \dots, n$, e det serem suaves.

Considere $A : U \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$, onde $A(q)$ é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{21}(q) & \cdots & a_{n1}(q) \\ a_{12}(q) & a_{22}(q) & \cdots & a_{n2}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(q) & a_{2n}(q) & \cdots & a_{nn}(q) \end{pmatrix}$$

e $B : U \rightarrow \mathbb{C}^{(N-n)n}$, em que $B(q)$ é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1n+1}(q) & a_{2n+1}(q) & \cdots & a_{nn+1}(q) \\ a_{1n+2}(q) & a_{2n+2}(q) & \cdots & a_{nn+2}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(q) & a_{2N}(q) & \cdots & a_{nN}(q) \end{pmatrix}.$$

Em particular, tem-se que A e B são funções suaves.

Afirmamos que $S_q \doteq \{L_{1q}, \dots, L_{nq}, (\partial/\partial x_{n+1})_q, \dots, (\partial/\partial x_N)_q\}$ é uma base para $\mathbb{C}T_q\Omega$, para todo $q \in U$. De fato, note que

$$\begin{pmatrix} A(q) & 0 \\ B(q) & Id \end{pmatrix}$$

onde Id é a matriz identidade de ordem $N - n$, é a matriz dos coeficientes dos vetores $L_{1q}, \dots, L_{nq}, (\partial/\partial x_{n+1})_q, \dots, (\partial/\partial x_N)_q$ na base canônica de $\mathfrak{X}(U)$, como esta matriz tem determinante igual ao determinante de $A(q)$ e $\det(A(q)) \neq 0$, concluímos que S_q é base do espaço tangente a Ω em q .

Observação 3.3.5. *Em particular, também concluímos que*

$$\{L_1, \dots, L_n, (\partial/\partial x_{n+1}), \dots, (\partial/\partial x_N)\}$$

é uma base para o $C^\infty(U)$ -módulo $\mathfrak{X}(U)$.

Por fim, visto que $[L_j, L_k] \in \mathfrak{X}(U)$, $j, k = 1, \dots, n$ existem $c_{jk}^\nu \in C^\infty(U)$, $j, k = 1, \dots, n, \nu = 1, \dots, N$ tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^n c_{jk}^\nu L_\nu + \sum_{\nu=n+1}^N c_{jk}^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

e $[L_j, L_k]_q \in \mathcal{V}_q$, para cada $q \in U$, então

$$\sum_{\nu=n+1}^N c_{jk}^\nu(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_q = 0, q \in U$$

e assim $c_{jk}^\nu(q) = 0, q \in U, j, k = 1, \dots, n, \nu = n+1, \dots, N$, concluindo a demonstração.

□

4 Formas Diferenciais

Neste capítulo apresentamos os conceitos de formas diferenciais, fibrado cotangente complexificado $\mathbb{C}T^*\Omega$ e subfibrado vetorial complexo $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}T^*\Omega$ que são essenciais na definição de estruturas localmente integráveis. Dessa forma, estas noções são bem relevantes no nosso contexto, visto que o *Teorema de Baouendi-Treves* é válido quando estamos trabalhando com estruturas localmente integráveis.

Definição 4.0.6. Denotaremos por $\mathfrak{N}(\Omega)$ o conjunto dual do $C^\infty(\Omega)$ –módulo $\mathfrak{X}(\Omega)$. Chamaremos seus elementos, $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, de formas diferenciais de grau 1 (ou 1–formas). Assim

$$\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$$

é uma aplicação $C^\infty(\Omega)$ –linear.

Observação 4.0.7. Sejam $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que L se anula no aberto não vazio $V \subset \Omega$, ou seja, $L_V = 0$ então $\omega(L)$ se anula em V .

Com efeito, como $L_V = 0$ tem-se que $L_V f = 0$ para toda $f \in C^\infty(V)$ e então $(Lf)|_V = L_V(f|_V) = 0$, para toda $f \in C^\infty(\Omega)$. Seja $p \in V$ e mostremos que $\omega(L)(p) = 0$.

Considere (U, x) um sistema de coordenadas locais e $g \in C^\infty(\Omega)$, tais que $p \in U \subset V$, $g(p) = 1$ e $g|_{\Omega-U} = 0$.

Assim se $q \in V$

$$(1 - g(q))Lf(q) = (1 - g(q))0 = 0 = Lf(q)$$

e se $q \notin V$

$$(1 - g(q))Lf(q) = (1 - 0)Lf(q) = Lf(q),$$

ou seja, $(1 - g)Lf = Lf$.

Logo

$$\omega(L)(p) = \omega((1 - g)L)(p) = (1 - g(p))\omega(L)(p) = 0,$$

como $p \in V$ é arbitrário concluímos que $\omega(L)|_V = 0$.

Observação 4.0.8. Sejam $V \subset \Omega$ um aberto não vazio e $L \in \mathfrak{X}(V)$, então para cada $p \in V$ existe $\hat{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $\hat{L}$ coincide com L numa vizinhança de p .

Com efeito, considere (U, x) um sistema de coordenadas locais e $g \in C^\infty(\Omega)$, tais que $p \in U$, $g(p) = 1$ e $g|_{\Omega-U} = 0$. Defina

$$\hat{L}(f)(q) = \begin{cases} g(q)L(f|_V)(q), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)). \end{cases}$$

Assim $\hat{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $L_U = \hat{L}_U$.

As observações acima nos permitem definir a restrição de uma 1-forma $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ a um aberto $W \subset \Omega$ não vazio, ou seja, existe $\omega_W \in \mathfrak{N}(W)$ que torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(\Omega) & \xrightarrow{\omega} & C^\infty(\Omega) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \mathfrak{X}(W) & \xrightarrow{\omega_W} & C^\infty(W) \end{array}.$$

Para tanto, basta para $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ e $W \subset \Omega$ aberto não vazio, definirmos

$$\omega_W(L)(p) \doteq (\omega(\tilde{L}))(p), L \in \mathfrak{X}(W), p \in W,$$

onde $\tilde{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é tal que L coincide com $\tilde{L}$ numa vizinhança de p .

Lema 4.0.9. *Sejam $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e suponha que $L_p = 0$, para algum $p \in \Omega$. Então $\omega(L)(p) = 0$.*

Demonstração. Seja (U, x) um sistema de coordenadas locais com $p \in U$. Observe que $L_U \in \mathfrak{X}(U)$ e

$$L_U = \sum_{j=1}^N L_U(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

então

$$\begin{aligned} \omega(L)(p) &= \omega_U(L_U)(p) = \sum_{j=1}^N L_U(x_j)(p) \omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) \\ &= \sum_{j=1}^N L_p(x_j) \omega_U \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) = 0. \end{aligned}$$

□

4.1 Fibrado Cotangente Complexificado $\mathbb{C}T^*\Omega$

Definição 4.1.1. *O conjunto $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ dual do espaço vetorial $\mathbb{C}T_p\Omega$, é definido como sendo o espaço cotangente à Ω em p . Por sua vez, o conjunto $\mathbb{C}T^*\Omega \doteq \cup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é chamado de fibrado cotangente complexificado.*

Note que se $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, $p \in \Omega$ e definirmos $\omega_p : \mathbb{C}T_p\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p), v \in \mathbb{C}T_p\Omega,$$

onde $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é tal que $L_p = v$, então $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$.

Seja (U, x) um sistema de coordenadas local em Ω e, para cada $j = 1, \dots, N$, defina a aplicação $C^\infty(U)$ -linear $dx_j : \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$ tal que

$$dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \delta_{jk}, k = 1, \dots, N.$$

Assim $dx_j \in \mathfrak{N}(U)$ para $j = 1, \dots, N$, tem-se também que $\{dx_1, \dots, dx_N\}$ é uma base para o $C^\infty(U)$ -módulo $\mathfrak{N}(U)$ de forma que:

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j. \quad (4.1)$$

Com efeito, seja $\omega \in \mathfrak{N}(U)$ e observe que para $L \in \mathfrak{X}(U)$ tem-se que

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^N L(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}, a_k \in C^\infty(U), k = 1, \dots, N, \\ dx_j(L) &= \sum_{k=1}^N a_k dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = a_j, j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

então

$$\omega(L) = \sum_{k=1}^N dx_k(L) \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^N \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) dx_k \right) (L).$$

Analogamente obtemos que $\{dx_{1p}, \dots, dx_{Np}\} \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é a base dual de $\{\partial/\partial x_{1p}, \dots, \partial/\partial x_{Np}\}$.

Proposição 4.1.2. *O espaço cotangente à Ω em p pode ser descrito da seguinte forma:*

$$\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p; \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}.$$

Demonstração. Considere $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$, então existem $\eta_1, \dots, \eta_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$\eta = \sum_{j=1}^N \eta_j (dx_j)_p.$$

Sejam (U, x) um sistema de coordenadas locais e $g \in C^\infty(\Omega)$, tais que $p \in U, g(p) = 1$ e $g|_{\Omega-U} = 0$.

Defina $\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, dada por:

$$\omega(L)(q) = \begin{cases} g(q) \sum_{j=1}^N \eta_j dx_j(L)(q), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

para $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $q \in \Omega$.

Se $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, tem-se:

$$\omega(L + fM)(q) = \begin{cases} g(q) \left(\sum_{j=1}^N \eta_j dx_j(L)(q) + \eta_j f(q) dx_j(M)(q) \right), & q \in U \\ 0, & q \notin x^{-1}(\text{supp}(\phi)), \end{cases}$$

ou seja, $\omega(L + fM) = \omega(L) + f\omega(M)$ e assim $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$.

Além disso, se $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tem-se

$$\begin{aligned}\omega_p(v) &= \omega_p\left(\sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = g(p) \sum_{k=1}^N \eta_k dx_{kp} \left(\sum_{j=1}^N v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \eta_k dx_{kp}(v) = \eta(v),\end{aligned}$$

logo $\omega_p = \eta$.

□

Definição 4.1.3. Dada $f \in C^\infty(\Omega)$, definimos $df \in \mathfrak{N}(\Omega)$ da seguinte maneira

$$df(L) \doteq L(f), \quad L \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Observe que de 4.1 tem-se que

$$df = \sum_{j=1}^N df \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

4.2 Subfibrado Vetorial Complexo $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}T^*\Omega$

Definição 4.2.1. Dizemos que o conjunto $\mathcal{W} \doteq \cup_{p \in \Omega} \mathcal{W}_p \subset \mathbb{C}T^*\Omega$ é um subfibrado vetorial complexo m -dimensional se satisfaz as seguintes propriedades:

1. para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{W}_p \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é um subespaço vetorial m -dimensional;
2. para cada $p_0 \in \Omega$, existem $U \subset \Omega$ aberto com $p_0 \in U$ e $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathfrak{N}(U)$ tais que, para cada $p \in U$, vale que $\mathcal{W}_p = [\omega_{1p}, \dots, \omega_{mp}]$.

Proposição 4.2.2. Seja $\mathcal{V} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$ um subfibrado vetorial complexo n -dimensional de $\mathbb{C}T\Omega$ e defina, para cada $p \in \Omega$, o seguinte conjunto

$$\mathcal{V}_p^\perp \doteq \{\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega; \eta(v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}_p\}.$$

Então $\mathcal{V}^\perp = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p^\perp$ é um subfibrado vetorial complexo m -dimensional de $\mathbb{C}T^*\Omega$, onde $m = N - n$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que, para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{V}_p^\perp \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é subespaço vetorial m -dimensional. Sejam $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{V}_p^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$(\eta_1 + \lambda\eta_2)(v) = \eta_1(v) + \lambda\eta_2(v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_p,$$

segue que $\eta_1 + \lambda\eta_2 \in \mathcal{V}_p^\perp$ e $\mathcal{V}_p^\perp$ é subespaço vetorial do espaço cotangente a Ω em p .

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{V}_p$, então existem $v_{n+1}, \dots, v_N \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tal que $\{v_1, \dots, v_N\}$ é uma base para o espaço tangente a Ω em p . Considere $\{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ base dual de $\{v_1, \dots, v_N\}$.

Além disso, se $\eta \in \mathcal{V}_p^\perp$ então $\eta(v_j) = 0, j = 1, \dots, n$ e

$$\eta = \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j,$$

onde $\alpha_j = \eta(v_j), j = 1, \dots, N$. Logo $\eta = \sum_{j=n+1}^N \alpha_j \eta_j$, e portanto $\mathcal{V}_p^\perp = [\eta_{n+1}, \dots, \eta_N]$ e $\mathcal{V}_p^\perp$ é um espaço vetorial m -dimensional.

Dado $p_0 \in \Omega$, sejam (U_0, x) sistema de coordenadas locais com $p_0 \in U_0$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$ tais que $\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}]$, para todo $p \in U_0$.

Assim para $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, N$, existem $a_{jk} \in C^\infty(U_0)$ tais que

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Como, para cada $p \in U_0$, $\{L_{jp}\}_{j=1}^n$ é LI, então a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{21}(p) & \cdots & a_{n1}(p) \\ a_{12}(p) & a_{22}(p) & \cdots & a_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(p) & a_{2N}(p) & \cdots & a_{nN}(p) \end{pmatrix}$$

tem posto n .

Logo podemos rearranjar os índices j, k de forma que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p_0) & a_{2n}(p_0) & \cdots & a_{nn}(p_0) \end{pmatrix}$$

possui determinante não nulo. Além disso, como as funções $\det$ e $a_{jk}, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N$ são suaves então, diminuindo a vizinhança U_0 se necessário, concluímos que a matriz acima é invertível para cada $p \in U_0$.

Sejam $b_{jk} \in C^\infty(U_0), j, k = 1, \dots, n$ tais que

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(p) b_{jk}(p) = \sum_{j=1}^n b_{lj}(p) a_{jk}(p) = \delta_{lk}, p \in U_0, l, k = 1, \dots, n.$$

Defina

$$L_j^\# = \sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} L_\nu, j = 1, \dots, n.$$

Como, para cada $p \in U_0$, a matriz formada pelos coeficientes $b_{j\nu}(p)$ é invertível então tal matriz é uma matriz de mudança de base, e portanto $\{L_{jp}^\#\}_{j=1}^n$ é uma base para $\mathcal{V}_p$.

Observe que

$$\begin{aligned} L_j^\# &= \sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} L_\nu = \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=1}^N b_{j\nu} a_{\nu k} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=n+1}^N \left(\sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} a_{\nu k} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Defina

$$c_{jk} \doteq \sum_{\nu=1}^n b_{j\nu} a_{\nu k+n}, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N - m,$$

então

$$L_j^\# = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m c_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

Agora tome

$$\omega_l \doteq dx_{n+l} - \sum_{\gamma=1}^n c_{\gamma l} dx_\gamma \in \mathfrak{N}(U_0), l = 1, \dots, m.$$

Vamos mostrar, para cada $p \in U_0$, que $\mathcal{V}_p^\perp = [\omega_{1p}, \dots, \omega_{mp}]$. Para tanto basta mostrar que $\{\omega_{lp}\}_{l=1}^m \subset \mathcal{V}_p^\perp$ e que este conjunto é linearmente independente.

Note que

$$\begin{aligned} \omega_{lp}(L_{jp}^\#) &= dx_{n+l} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) (p) + \sum_{j=n+1}^N c_{kj}(p) dx_{n+l} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p) - \\ &\quad - \sum_{\gamma=1}^n c_{\gamma l}(p) dx_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) (p) - \sum_{\gamma=1}^n \sum_{k=1}^m c_{\gamma l}(p) c_{jk}(p) dx_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) (p) \\ &= -c_{jl}(p) + c_{jl}(p) = 0, l = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{V}_p = [L_{1p}^\#, \dots, L_{np}^\#]$, tem-se que $\{\omega_{lp}\}_{l=1}^m \subset \mathcal{V}_p^\perp$. Além disso, se $\alpha_l \in \mathbb{C}, l = 1, \dots, m$ forem tais que

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l \omega_{lp} = 0,$$

consequentemente

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l \omega_l \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \right) (p) = \alpha_j, j = 1, \dots, m,$$

então $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, m$ e concluímos que $\{\omega_{lp}\}_{l=1}^m$ é linearmente independente completando a demonstração. □

Observação 4.2.3. É importante ressaltar também que se $\mathcal{V}^\perp$ for um subfibrado vetorial complexo m -dimensional de $\mathbf{CT}^*\Omega$, então $\mathcal{V}$ é um subfibrado vetorial complexo n -dimensional de $\mathbf{CT}\Omega$ com $n = N - m$. Além disso, quando $\mathcal{V}$ é uma estrutura involutiva, denotamos $\mathcal{V}^\perp$ simplesmente por T' .

4.3 Conjugação Complexa

Definição 4.3.1 (Conjugação Complexa). Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definimos seu campo vetorial conjugado $\bar{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ da seguinte forma

$$\bar{L}(f) \doteq \overline{L(\bar{f})}, f \in C^\infty(\Omega).$$

Além disso, dizemos que um campo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é real se $L = \bar{L}$.

Se $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, definimos sua forma diferencial conjugada $\bar{\omega} \in \mathfrak{N}(\Omega)$ por $\bar{\omega}(L) \doteq \overline{\omega(\bar{L})}$ e dizemos que tal forma é real se $\omega = \bar{\omega}$.

Se $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$, definimos seu conjugado $\bar{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega$ por $\bar{v}(\underline{f}) \doteq \overline{v(\bar{\underline{f}})}$ e dizemos que tal forma é real se $v = \bar{v}$. Denotamos por $T_p\Omega$ o conjunto formado por todos os vetores tangentes à Ω em p que são reais.

Se $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$, definimos seu conjugado $\bar{\eta} \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ por $\bar{\eta}(v) \doteq \overline{\eta(\bar{v})}$ e dizemos que tal forma é real se $\eta = \bar{\eta}$. Denotamos por $T_p^*\Omega$ o conjunto formado por todos os vetores cotangentes à Ω em p que são reais.

Observação 4.3.2. Dado um campo vetorial $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é fácil notar que L é real se, e somente se, $L(C^\infty(\Omega; \mathbb{R})) \subset C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Além disso, se (U, x) é um sistema de coordenadas locais com $p \in U$, então valem as seguintes afirmações:

1. $L \in \mathfrak{X}(U)$ é real se, e somente se, $L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ com $a_j \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}), j = 1, \dots, N$;
2. $\omega \in \mathfrak{N}(U)$ é real se, e somente se, $\omega = \sum_{j=1}^N a_j dx_j$ com $a_j \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}), j = 1, \dots, N$;
3. $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ é real se, e somente se, $v = \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial}{\partial x_j}_p$ com $v_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$;
4. $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é real se, e somente se, $\eta = \sum_{j=1}^N \eta_j dx_{jp}$ com $\eta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$.

Observação 4.3.3. Se $\mathcal{V} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$ é subfibrado vetorial complexo n -dimensional de $\mathbb{C}T\Omega$, então $\bar{\mathcal{V}} = \cup_{p \in \Omega} \bar{\mathcal{V}}_p$ é, por sua vez, um subfibrado vetorial complexo n -dimensional de $\mathbb{C}T\Omega$, onde

$$\bar{\mathcal{V}}_p \doteq \{\bar{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega; v \in \mathcal{V}_p\}.$$

Além disso, tem-se que $\bar{\mathcal{V}}^\perp = \overline{\mathcal{V}^\perp}$.

5 Teorema de Frobenius

5.1 Problema de Cauchy

Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto que contém a origem e considere $L \in \mathfrak{X}(U)$ um campo vetorial real. Assim

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $x(p) = id(p) = p, p \in U$. Assim $a_j \in C^\infty(U; \mathbb{R}), j = 1, \dots, N$.

Suponha que $L_0 \neq 0$, então, para algum $j_0 \in \{1, \dots, N\}, a_{j_0}(0) \neq 0$. Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1(0) \neq 0$.

Vamos encontrar coordenadas locais (W, y) , onde $W \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto que contém a origem e $y = (y_1, \dots, y_N)$ é tal que

$$L = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Em outras palavras, procuramos um aberto que contém a origem $W \subset \mathbb{R}^N$ e $\phi : W \rightarrow U$ um difeomorfismo dado por $\phi(q) = p, q \in W$ com $\phi(0) = 0$ e tal que para cada $f \in C^\infty(U)$ vale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1}(p) &= \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial e_1}(\phi^{-1}(p)) = (Df)(p)D\phi(\phi^{-1}(p))e_1 = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \frac{\partial \phi_j}{\partial e_1}(\phi^{-1}(p)) = \sum_{j=1}^N a_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = L(f)(p), p \in U \end{aligned}$$

em que

$$\frac{\partial \phi}{\partial e_k}(q) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(q+h) - \phi(q)}{h}, k = 1, \dots, N.$$

Tal aplicação ϕ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial e_1}(q) &= a_j(\phi(q)), q \in U, j = 1, \dots, N \\ \phi_j(0, q_2, \dots, q_N) &= q_j, j = 1, \dots, N \\ \phi_1(0, q_2, \dots, q_N) &= 0, \end{aligned}$$

assim tem-se que

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial e_k}(0, q_2, \dots, q_N) = \delta_{jk}, j, k = 2, \dots, N,$$

sendo que δ_{jk} é o *delta de Kronecker* e então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial e_k}(0, \dots, 0) &= \delta_{jk}, j, k = 2, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial e_1}(0, \dots, 0) &= a_j(\phi(0)) = a_j(0), j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Logo $\det D\phi(0) = a_1(0) \neq 0$ e, pelo *Teorema da Função Inversa*, obtemos que ϕ é um difeomorfismo em torno da origem. Tomando $y = (y_1, \dots, y_N) \doteq \phi^{-1}$ obtemos um sistema de coordenadas local (W, y) de forma que $L = \frac{\partial}{\partial y_1}$.

Vamos mostrar agora que existe uma função que satisfaz as propriedades da função ϕ descrita acima. Para tanto, primeiramente note que como $0 \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(0, \delta)} \subset U$.

Seja $\varepsilon > 0$ e considere o conjunto

$$E_\varepsilon \doteq \{u : K_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^N; \|u\|_\infty \leq \delta, u \in C(K_\varepsilon)\},$$

onde $K_\varepsilon \doteq \overline{B(0, \varepsilon)}$. Note que tal conjunto, equipado com a norma $\|\cdot\|_\infty$, é um *espaço métrico completo* não vazio.

Defina

$$\begin{aligned} T : E_\varepsilon &\rightarrow C(K_\varepsilon) \\ u &\mapsto Tu, \end{aligned}$$

em que

$$Tu(t_1, \dots, t_N) = (0, t_2, \dots, t_N) + \int_0^{t_1} a(u(t, t_2, \dots, t_N)) dt.$$

Esta aplicação é contínua. Note também que como cada a_j é infinitamente diferenciável, existe $M_1 \doteq \max_{(t_1, \dots, t_N) \in \overline{B(0, \delta)}} \|a(t_1, \dots, t_N)\|$ e assim:

$$\|Tu(t)\| \leq \|t\| + M_1 t_1 \leq \varepsilon(1 + M_1).$$

Daí, se $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{1+M_1}$ tem-se que a imagem de Tu é um subconjunto de $\overline{B(0, \delta)}$ para qualquer $u \in E_\varepsilon$, ou seja,

$$\begin{aligned} T : E_\varepsilon &\rightarrow E_\varepsilon \\ u &\mapsto Tu. \end{aligned}$$

Note também que

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_\infty = \sup_{t \in K_\varepsilon} |Tu_1(t) - Tu_2(t)|,$$

mas

$$\begin{aligned} |Tu_1(s) - Tu_2(s)| &\leq \int_0^{t_1} |a(u_1(s, t_2, \dots, t_N)) - a(u_2(s, t_2, \dots, t_N))| ds \leq \\ &\leq M|t_1| \|u_1 - u_2\|_\infty \leq \varepsilon M \|u_1 - u_2\|_\infty, \end{aligned}$$

sendo que

$$M = \sup_{t \in \overline{B(0, 3\delta)}} \|\nabla a(t)\| < \infty$$

é tal que $|a(x) - a(y)| \leq M\|x - y\|$, para $x, y \in \overline{B(0, \delta)}$.

Por fim, tomando $0 < \epsilon < \min\{\frac{1}{2M}, \frac{\delta}{1+M_1}\}$, obtemos que $T : E_\epsilon \rightarrow E_\epsilon$ é uma contração. Portanto, pelo *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, existe $\phi \in E_\epsilon$ tal que $T\phi = \phi$. Assim

$$\begin{aligned}\phi(B(0, \epsilon)) &\subset U, \\ \phi &\in C^\infty(B(0, \epsilon)), \\ \phi(0) &= T\phi(0) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial e_1} &= a, \\ \phi(0, y_2, \dots, y_N) &= (0, y_2, \dots, y_N).\end{aligned}$$

5.2 Teorema de Frobenius

Teorema 5.2.1 (Frobenius). *Sejam $V \subset \mathbb{R}^N$ aberto que contém a origem e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(V)$ campos vetoriais reais tais que*

$$\{L_{1p}, \dots, L_{np}\}$$

é linearmente independente, para todo $p \in V$. Assuma que o subfibrado vetorial complexo n -dimensional $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}TV$ gerado por estes vetores é uma estrutura involutiva. Então existe um sistema de coordenadas locais $(W, y), y \doteq (y_1, \dots, y_N)$, com $0 \in W$ tal que $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$.

Demonstração. Vamos utilizar o processo de indução. Para $n = 1$, tem-se $L \in \mathfrak{X}(V)$ campo real tal que $L_0 \neq 0$. Pelo que foi feito na seção anterior concluímos que existe sistema de coordenadas locais $(W, y), y \doteq (y_1, \dots, y_N)$ tais que

$$L = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Então $\mathcal{V}$ é gerado por $\{\partial/\partial y_1\}$.

Suponha, por hipótese de indução, que o resultado vale para valores menores que n . Visto que $\{L_{1p}, \dots, L_{np}\}$ gera $\mathcal{V}_p, p \in V$, tem-se que $L_{10} \neq 0$ então, diminuindo a vizinhança V se necessário, existe um difeomorfismo

$$\begin{aligned}\xi : V &\rightarrow \xi(V) \\ p &\mapsto \xi(p),\end{aligned}$$

com $\xi(0) = 0$, tal que

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_1}, L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial \xi_k}, j = 2, \dots, n.$$

Defina

$$\begin{aligned} L_1^\# &\doteq L_1, \\ L_j^\# &\doteq L_j - a_{j1}L_1, j = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

assim

$$L_j^\# = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial \xi_k} - a_{j1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \sum_{k=2}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial \xi_k}.$$

Note que, para cada $p \in V$, tem-se

$$\begin{aligned} L_{1p}^\# &= L_{1p} \in [L_{1p}, \dots, L_{np}] \\ L_{jp}^\# &= L_{jp} - a_{j1}(p)L_{1p} \in [L_{1p}, \dots, L_{np}], j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Além disso, se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $p \in V$ forem tais que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j L_{jp}^\# = 0,$$

consequentemente tem-se que

$$\left(\alpha_1 - \sum_{j=2}^n \alpha_j a_{j1}(p) \right) L_{1p} + \sum_{j=2}^n \alpha_j L_{jp} = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha_j &= 0, j = 2, \dots, n, \\ \alpha_1 &= \sum_{j=2}^n \alpha_j a_{j1}(p) = 0 \end{aligned}$$

e $\{L_{jp}^\#\}_{j=1}^n$ é linearmente independente, ou seja, $[L_{1p}^\#, \dots, L_{np}^\#] = [L_{1p}, \dots, L_{np}] = \mathcal{V}_p, p \in V$.

Pela Proposição 3.3.4, existem $c_{jk}^\nu \in C^\infty(V), j, k, \nu = 1, \dots, n$, tais que

$$[L_j^\#, L_k^\#] = \sum_{\nu=1}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\#, j, k = 1, \dots, n.$$

Observe que

$$[L_j^\#, L_k^\#] = \sum_{\nu=1}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\# = c_{jk}^1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\#, j, k = 2, \dots, n,$$

então

$$c_{jk}^1(p) = [L_j^\#, L_k^\#]_p(d\xi_{1p}), p \in V,$$

por outro lado

$$[L_j^\#, L_k^\#]_p(d\xi_{1p}) = L_j^\# \left(\sum_{\nu=2}^n a_{k\nu}(p) \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_\nu}(p) \right) - L_k^\# \left(\sum_{\nu=2}^n a_{j\nu}(p) \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_\nu}(p) \right) = 0, j, k \geq 2,$$

assim $c_{jk}^1 = 0, j, k \geq 2$ e

$$[L_j^\#, L_k^\#] = \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\#, j, k = 2, \dots, n.$$

Seja $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta)^N \subset \xi(V)$ e tome $W \doteq (-\delta, \delta)^{N-1} \subset \mathbb{R}^{N-1}$. Além disso, diminuindo a vizinhança V se necessário, podemos supor $\xi(V) = (-\delta, \delta)^N$. Note que W é uma variedade suave com estrutura diferenciável herdada de $\mathbb{R}^{N-1}$.

Dado $L \in \mathfrak{X}(V)$, vamos definir $L_U \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \doteq \xi(V) \subset \mathbb{R}^N$, o qual é dado por

$$\begin{aligned} L_U : C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\ g &\mapsto L_U(g), \end{aligned}$$

onde $L_U(g) \doteq L(g \circ \xi) \circ \xi^{-1}$.

Observação 5.2.2. Note que $g \circ \xi, L(g \circ \xi) \circ \xi^{-1} \in C^\infty(U)$ e

$$\begin{aligned} L_U(g_1 + \lambda g_2) &= L((g_1 + \lambda g_2) \circ \xi) \circ \xi^{-1} = (L(g_1 \circ \xi) + \lambda L(g_2 \circ \xi)) \circ \xi^{-1} = \\ &= L(g_1 \circ \xi) \circ \xi^{-1} + \lambda L(g_2 \circ \xi) \circ \xi^{-1} = \\ &= L_U(g_1) + \lambda L_U(g_2), g_1, g_2 \in C^\infty(U), \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

então $L_U \in \mathfrak{X}(U)$.

Agora, dado $L \in \mathfrak{X}(U)$, definiremos $L|_W \in \mathfrak{X}(W)$. Primeiramente, dada $f \in C^\infty(W)$ defina

$$\begin{aligned} \hat{f} : U &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t, q) &\mapsto \hat{f}(t, q), \end{aligned}$$

onde $\hat{f}(t, q) \doteq f(q)$, em particular tem-se que $\hat{f} \in C^\infty(U)$. Definimos $L|_W$ por

$$L|_W(f)(q) \doteq L(\hat{f})(0, q), f \in C^\infty(W), q \in W.$$

Observação 5.2.3. Observe que $L|_W \in \mathfrak{X}(W)$. Com efeito, se $f_1, f_2 \in C^\infty(W), \lambda \in \mathbb{C}$ então $\hat{f}_j(t, q) = \hat{f}_j(q), j = 1, 2$, e $(\hat{f}_1 + \lambda \hat{f}_2)(t, q) = (f_1 + \lambda f_2)(q)$. Assim

$$\begin{aligned} L|_W(f_1 + \lambda f_2)(q) &= L(\hat{f}_1 + \lambda \hat{f}_2)(0, q) = L(\hat{f}_1)(0, q) + \lambda L(\hat{f}_2)(0, q) = \\ &= (L|_W(f_1) + \lambda L|_W(f_2))(q), q \in W. \end{aligned}$$

Agora, para cada $j = 2, \dots, n$, tome

$$M_j \doteq (L_j^\#)|_W \in \mathfrak{X}(W), j = 2, \dots, n,$$

ou seja,

$$M_j = \sum_{k=2}^N \left(a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right) \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |_W, j = 2, \dots, n,$$

em que

$$\begin{aligned} \psi : W &\rightarrow U \\ q &\mapsto (0, q). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que, para cada $q \in W$, $\{M_{jq}\}_{j=2}^n$ é linearmente independente. Para tanto precisamos fazer algumas observações.

Para cada $q_0 \in W$, seja $p_0 \doteq \xi^{-1}(0, q_0) \in V$. Para $\underline{f} \in C^\infty(p_0)$, tem-se que $f \in C^\infty(V_1)$, onde $V_1 \subset V$ é uma vizinhança de p_0 . Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f} : W_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ q &\mapsto \tilde{f}(q) \doteq (f \circ \xi^{-1})(0, q), \end{aligned}$$

onde $W_1 \doteq (-\epsilon, \epsilon)^{N-1}$ e $\epsilon > 0$ é tal que $\xi(p_0) \in (-\epsilon, \epsilon)^N \subset \xi(V_1)$, assim $\tilde{f} \in C^\infty(q_0)$.

Observação 5.2.4. *Afirmamos que, para $\underline{f} \in C^\infty(p_0)$, $M_{jq_0}(\tilde{f}) = L_{jp_0}^\#(\underline{f})$, $j = 2, \dots, n$. De fato,*

$$\begin{aligned} M_{jq_0}(\tilde{f}) &= M_j(\tilde{f})(q_0) = (L_{jU}^\#)|_W(\tilde{f})(q_0) = \\ &= L_j^\#(\hat{f} \circ \xi) \circ \xi^{-1}(0, q_0) = L_j^\#(\hat{f} \circ \xi)(p_0), \end{aligned} \quad (5.1)$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial \xi_k}(p_0) &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial e_k}(0, q_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial e_k}(q_0) = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial e_k}(\xi(p_0)), \\ L_j^\#(\hat{f} \circ \xi)(p_0) &= \sum_{k=2}^N a_{jk}(p_0) \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial \xi_k}(p_0) = \\ &= \sum_{k=2}^N a_{jk}(p_0) \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial e_k}(\xi(p_0)) = L_j^\#(f)(p_0), \end{aligned} \quad (5.2)$$

logo de 5.1 e 5.2 tem-se que

$$M_{jq_0}(\tilde{f}) = L_j^\#(f)(p_0) = L_{jp_0}^\#(\underline{f}).$$

Por fim, se $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $q_0 \in W$ forem tais que $\sum_{j=2}^n \alpha_j M_{jq_0} = 0$ então $\sum_{j=2}^n \alpha_j L_{jp_0}^\# = 0$, onde $p_0 = \xi^{-1}(0, q_0)$, pois

$$\sum_{j=2}^n \alpha_j L_{jp_0}^\#(\underline{f}) = \sum_{j=2}^n \alpha_j M_{jq_0}(\tilde{f}) = 0, \underline{f} \in C^\infty(p_0),$$

então $\alpha_j = 0$, $j = 2, \dots, n$, e segue que $\{M_{jq}\}_{j=2}^n$ é linearmente independente para cada $q \in W$.

Defina $\mathcal{U}_q \doteq [M_{2q}, \dots, M_{nq}]$, $q \in W$. Então

$$\mathcal{U} = \cup_{p \in W} \mathcal{U}_p \subset \mathbf{CTW},$$

é subfibrado vetorial complexo, iremos mostrar que $\mathcal{U}$ é uma estrutura involutiva.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : W &\rightarrow U \\ q &\mapsto \psi(q) \doteq (0, q). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$[M_j, M_k] = \sum_{\nu=2}^n \left(c_{jk}^\nu \circ \xi^{-1} \circ \psi \right) M_\nu, j, k = 2, \dots, n.$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} [L_j^\#, L_k^\#]_{U|W} &= \left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\# \right) \Big|_U \Big|_W, \\ \left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\# \right) \Big|_U (f)(q) &= \left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\# \right) (\hat{f} \circ \xi)(\xi^{-1}(0, q)) = \\ &= \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu(\xi^{-1}(0, q)) L_\nu^\#(\hat{f} \circ \xi)(\xi^{-1}(0, q)) = \\ &= \sum_{\nu=2}^n \left(c_{jk}^\nu \circ \xi^{-1} \circ \psi \right) (q) M_\nu(f)(q), \end{aligned}$$

para $f \in C^\infty(W)$, $q \in W$, $j, k = 1, \dots, n$, e então

$$\left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\# \right) \Big|_U \Big|_W = \sum_{\nu=2}^n \left(c_{jk}^\nu \circ \xi^{-1} \circ \psi \right) M_\nu.$$

Agora basta mostrar que

$$[L_j^\#, L_k^\#]_{U|W} = [M_j, M_k], j, k = 2, \dots, n.$$

Observe que

$$\begin{aligned} (L_j^\#(L_k^\# f))(p) &= L_j^\# \left(\sum_{\nu=2}^N a_{k\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu} \right) (p) = \\ &= \sum_{l, \nu=2}^N a_{jl} \left(\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu} + a_{k\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_l \partial \xi_\nu} \right), \end{aligned}$$

e por 2.4 tem-se

$$[L_j^\#, L_k^\#](f) = L_j^\#(L_k^\# f) - L_k^\#(L_j^\# f) = \sum_{l, \nu=2}^N \left(a_{jl} \frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu} - a_{k\nu} \frac{\partial a_{jl}}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi_l} \right)$$

para $f \in C^\infty(V)$ e $j, k = 2, \dots, n$. Assim

$$\begin{aligned} [L_j^\#, L_k^\#]_U |W(f)(q) &= [L_j^\#, L_k^\#](\hat{f} \circ \xi)(\xi^{-1}(0, q)) \\ &= \sum_{l, \nu=2}^N (a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right)(q) \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f)(q) - \\ &\quad - (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial \xi_\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right)(q) \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W(f)(q), \end{aligned}$$

$q \in W, j, k = 2, \dots, n$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} M_j(M_k f)(q) &= \left(\sum_{l=2}^N a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \right) \left(\sum_{\nu=2}^N a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f) \right)(q) \\ &= \sum_{l, \nu=2}^N (a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f)(q) \right) + \\ &\quad + (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f) \right)(q), \end{aligned}$$

para $q \in W, j, k = 2, \dots, n$.

Observação 5.2.5. *Afirmamos que*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f) \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W(f) \right), f \in C^\infty(W) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi) = \frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi \quad (5.4)$$

$k, \nu, l = 2, \dots, n$.

Com efeito, observe que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f) \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \left(\frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial \xi_\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right),$$

denote

$$g(q) = \left(\frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial \xi_\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right)(q), q \in W.$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}} |W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}} |W(f) \right) = \frac{\partial(\hat{g} \circ \xi)}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi,$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{g} \circ \xi)}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi(q) &= \frac{\partial \hat{g}}{\partial e_l}(0, q) = \frac{\partial g}{\partial e_l}(q) = \frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial \xi_\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \right)(q) \\ &= \frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial e_\nu} \circ \xi^{-1} \right)(0, q) = \frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial f}{\partial e_\nu} \right)(q). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}}|_W(f) \right) &= \frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial f}{\partial e_\nu} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}}|_W \left(\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W(f) \right) &= \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial e_l} \right),\end{aligned}$$

e como

$$\frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial f}{\partial e_\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left(\frac{\partial f}{\partial e_l} \right),$$

concluimos 5.3.

Demonstremos 5.4. Note que

$$\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi(q) = \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \xi^{-1})}{\partial e_l}(0, q), \quad (5.5)$$

denote

$$g(q) \doteq (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q), q \in W.$$

Assim tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) &= \frac{\partial(\hat{g} \circ \xi)}{\partial \xi_l}(\xi^{-1}(0, q)) = \frac{\partial \hat{g}}{\partial e_l}(0, q) = \\ &= \frac{\partial g}{\partial e_l}(q) = \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)}{\partial e_l}(q),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)}{\partial e_l}(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q + he_l) - a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi(q)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a_{k\nu} \circ \xi^{-1})((0, q) + he_l) - a_{k\nu} \circ \xi^{-1}(0, q)}{h} = \\ &= \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \xi^{-1})}{\partial e_l}(0, q),\end{aligned} \quad (5.6)$$

de 5.5 e 5.6 concluimos 5.4.

Agora de 5.3 e 5.4 obtemos

$$\begin{aligned}[M_j, M_k](f) &= \sum_{l, \nu=2}^N a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W (a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi) \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}}|_W(f) - \\ &- a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}}|_W (a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi) \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W(f) = \\ &= \sum_{l, \nu=2}^N a_{jl} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial a_{k\nu}}{\partial \xi_l} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{\nu U}}|_W(f) - \\ &- a_{k\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial a_{jl}}{\partial \xi_\nu} \circ \xi^{-1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial \xi_{lU}}|_W(f) \\ &= [L_j^\#, L_k^\#]_U|_W(f) = \\ &= \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu \circ \xi^{-1} \circ \psi M_\nu,\end{aligned}$$

para $j, k = 2, \dots, n$ e portanto $\mathcal{U}$ é uma estrutura involutiva.

Aplicando a hipótese de indução, obtemos um sistema de coordenadas locais $\phi \doteq (\phi_2, \dots, \phi_N)$ em torno da origem tal que

$$\mathcal{U}_q = [(\partial/\partial\phi_2)_q, \dots, (\partial/\partial\phi_N)_q], q \in W.$$

Em particular,

$$\phi : W \rightarrow \phi(W) \subset \mathbb{R}^{N-1}$$

é difeomorfismo e denote $Z \doteq \phi(W)$.

Defina

$$\begin{aligned} \eta : U &\rightarrow \eta(U) \\ q &\mapsto \eta(q) \doteq (q_1, \phi_2(q_2, \dots, q_N), \dots, \phi_N(q_2, \dots, q_N)), \end{aligned}$$

assim $D\eta(q) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial e_2}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_2}{\partial e_N}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial\phi_N}{\partial e_2}(q) & \cdots & \frac{\partial\phi_N}{\partial e_N}(q) \end{pmatrix}$$

e então $\det D\eta(q) = \det D\phi(q) \neq 0$, por fim, pelo *Teorema da Função Inversa*, concluímos que η é difeomorfismo. Observe também que $\eta(U) = \eta(\xi(V)) = (-\delta, \delta) \times \phi(W) = (-\delta, \delta) \times Z$. Defina

$$\begin{aligned} h : V &\rightarrow h(V) \\ q &\mapsto h(q) \doteq \eta(\xi(q)). \end{aligned}$$

Em particular, tem-se que h é difeomorfismo e $h_1 = \xi_1$.

Observação 5.2.6. *Afirmamos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_1} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial h_l}|_W &= \frac{\partial}{\partial \phi_l}, l = 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{5.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(q) &= \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial e_1}(\xi(q)) \\ \frac{\partial f}{\partial h_1}(q) &= \frac{\partial(f \circ h^{-1})}{\partial e_1}(h(q)). \end{aligned}$$

Seja $\tilde{q} \doteq \xi^{-1}(\xi(q) + ke_1) \in V$. Assim

$$\begin{aligned} h(\tilde{q}) &= \eta(\xi(\tilde{q})) = \eta(\xi(q) + ke_1) = \eta(\xi_1(q) + k, \xi_2(q), \dots, \xi_N(q)) = \\ &= (\xi_1(q) + k, \phi(\xi_2(q), \dots, \xi_N(q))) = \eta(\xi(q)) + ke_1 = h(q) + ke_1, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial e_1}(\xi(q)) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f \circ \xi^{-1}(\xi(q) + ke_1) - f \circ \xi^{-1}(\xi(q))}{k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{q}) - f(q)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f \circ h^{-1}(h(\tilde{q})) - f \circ h^{-1}(h(q))}{k} = \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f \circ h^{-1}(h(q) + ke_1) - f \circ h^{-1}(h(q))}{k} = \\
 &= \frac{\partial(f \circ h^{-1})}{\partial e_1}(h(q)).
 \end{aligned}$$

Para provarmos 5.7, note que

$$h(\xi^{-1}(0, q)) = \eta(\xi(\xi^{-1}(0, q))) = \eta(0, q) = (0, \phi(q))$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial h_l} |_W(f)(q) &= \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi)}{\partial h_l}(\xi^{-1}(0, q)) = \\
 &= \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi \circ h^{-1})}{\partial e_l}(h \circ \xi^{-1}(0, q)) \\
 &= \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi \circ h^{-1})}{\partial e_l}(0, \phi(q)), \\
 \frac{\partial f}{\partial \phi_l}(q) &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial e_l}(\phi(q)).
 \end{aligned}$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
 \pi_1 \times \phi^{-1} : U &\rightarrow \mathbb{R}^N \\
 q &\mapsto (\pi_1 \times \phi^{-1})(q) \doteq (q_1, \phi^{-1}(q_2, \dots, q_N))
 \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned}
 (\pi_1 \times \phi^{-1})(\eta(q)) &= (q_1, \phi^{-1}(\phi(q_2, \dots, q_N))) = q, \\
 \eta(\pi_1 \times \phi^{-1}(q)) &= (q_1, \phi(\phi^{-1}(q_2, \dots, q_N))) = q,
 \end{aligned}$$

ou seja, $\eta^{-1} = \pi_1 \times \phi^{-1}$.

Logo

$$\hat{f} \circ \eta^{-1}(q) = \hat{f}(q_1, \dots, \phi^{-1}(q_2, \dots, q_N)) = f(\phi^{-1}(q_2, \dots, q_N))$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi \circ h^{-1})}{\partial e_l}(h \circ \xi^{-1}(0, q)) &= \frac{\partial(\hat{f} \circ \xi \circ h^{-1})}{\partial e_l}((0, \phi(q))) = \\
 &= \frac{\partial(\hat{f} \circ \eta^{-1})}{\partial e_l}(0, \phi(q)) = \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\hat{f} \circ \eta^{-1}((0, \phi(q)) + ke_l) - \hat{f} \circ \eta^{-1}(0, \phi(q))}{k} = \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f \circ \phi^{-1}(\phi(q) + ke_l) - f \circ \phi^{-1}(\phi(q))}{k}
 \end{aligned}$$

completando a demonstração.

Assim

$$L_1^\# = \frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial h_1}$$

e existem funções $b_{jk} \in C^\infty(V)$, $j = 2, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, tais que

$$L_j^\# = \sum_{k=1}^N b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k}.$$

Por outro lado,

$$b_{j1} = L_j^\#(h_1) = L_j^\#(\xi_1) = 0, j = 2, \dots, n,$$

então

$$L_j^\# = \sum_{k=2}^N b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k}.$$

Além disso,

$$M_j = L_{jU}^\#|_W = \sum_{k=2}^N (b_{jk} \circ \xi^{-1} \circ \psi) \frac{\partial}{\partial h_{kU}}|_W = \sum_{k=2}^N (b_{jk} \circ \xi^{-1} \circ \psi) \frac{\partial}{\partial \phi_k},$$

$j = 2, \dots, n$. Como, para cada $q \in W$, tem-se que $M_{jq} \in \mathcal{U}_q$, $j = 2, \dots, n$, então existem $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$M_{jq} = \sum_{k=2}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial \phi_{kq}},$$

mas

$$M_{jq} = \sum_{k=2}^N (b_{jk} \circ \xi^{-1} \circ \psi)(q) \frac{\partial}{\partial \phi_{kq}},$$

em outras palavras,

$$b_{jk} \circ \xi^{-1}(0, q) = 0, (0, q) \in U, j = 2, \dots, n, k = n+1, \dots, N.$$

Vamos mostrar que $b_{jk} = 0$, $j = 2, \dots, n$, $k = n+1, \dots, N$. Inicialmente, temos que

$$[L_1^\#, L_j^\#] = \sum_{\nu=1}^n c_{1j}^\nu L_\nu^\#,$$

mas

$$\begin{aligned} [L_1^\#, L_j^\#](g) &= \frac{\partial}{\partial h_1} \left(\sum_{k=2}^N b_{jk} \frac{\partial g}{\partial h_k} \right) - \sum_{k=2}^N b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\frac{\partial g}{\partial h_1} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^N \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial h_1} \frac{\partial g}{\partial h_k} + b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial g}{\partial h_k} - b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k} \frac{\partial g}{\partial h_1} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^N \frac{\partial b_{jk}}{\partial h_1} \frac{\partial g}{\partial h_k}, g \in C^\infty(V), \end{aligned}$$

ou seja,

$$[L_1^\#, L_j^\#] = \sum_{k=2}^N \frac{\partial b_{jk}}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_k}.$$

Como

$$\begin{aligned}
L_\nu^\#(h_l) &= \sum_{k=2}^N b_{\nu k} \frac{\partial h_l}{\partial h_k} = b_{\nu l}, \nu = 2, \dots, n, l = 2, \dots, N, \\
\sum_{\nu=1}^n c_{1j}^\nu L_\nu^\#(h_l) &= c_{1j}^1 L_1^\#(h_l) + \sum_{\nu=2}^n c_{1j}^\nu L_\nu^\#(h_l) = \\
&= \sum_{\nu=2}^n c_{1j}^\nu b_{\nu l}, \\
[L_1^\#, L_j^\#](h_l) &= \frac{\partial b_{jl}}{\partial h_1}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{\partial b_{jl}}{\partial h_1} = \sum_{\nu=2}^n c_{1j}^\nu b_{\nu l}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_{jk}}{\partial h_1}(\xi^{-1}(q)) &= \frac{\partial(b_{jk} \circ h^{-1})}{\partial e_1}(h \circ \xi^{-1}(q)) = \frac{\partial(b_{jk} \circ h^{-1})}{\partial e_1}((q_1, \phi(q_2, \dots, q_N)) \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{b_{jk} \circ h^{-1}((q_1, \phi(q_2, \dots, \phi(q_n))) + le_1) - b_{jk} \circ h^{-1}(q_1, \phi(q_2, \dots, q_N))}{l} \\
&= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{b_{jk} \circ \xi^{-1}(q + le_1) - b_{jk} \circ \xi^{-1}(q)}{l} \\
&= \frac{\partial(b_{jk} \circ \xi^{-1})}{\partial e_1}(q), q \in U,
\end{aligned}$$

pois $h^{-1} = \xi^{-1} \circ (\pi \times \phi^{-1})$. Assim

$$\frac{\partial(b_{jl} \circ \xi^{-1})}{\partial e_1} = \frac{\partial b_{kl}}{\partial h_1} \circ \xi^{-1} = \sum_{\nu=2}^N (c_{1j}^\nu \circ \xi^{-1}) (b_{\nu l} \circ \xi^{-1}).$$

Denote

$$\begin{aligned}
B_{jl} &\doteq b_{jl} \circ \xi^{-1} \\
C_{1j}^\nu &\doteq c_{1j}^\nu \circ \xi^{-1},
\end{aligned}$$

e concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{jl}}{\partial e_1} &= \sum_{\nu=2}^N C_{1j}^\nu B_{\nu l} \\
B_{jl}(0, q) &= 0, q \in W, j = 2, \dots, n, l = n+1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Defina, para cada $q \in W$, $B_{jlq}(t) \doteq B_{jl}(t, q)$, $C_{1jq}^\nu(t) \doteq C_{1j}^\nu(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$. Reescrevendo o sistema acima, tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dB_{jlq}}{dt}(t) &= \sum_{\nu=2}^N C_{1jq}^\nu(t) B_{\nu lq}(t), t \in (-\delta, \delta) \\
B_{jlq}(0) &= 0, j = 2, \dots, n, l = n+1, \dots, N,
\end{aligned}$$

que é uma equação diferencial ordinária que possui solução única, visto que $C_{1jq}^\nu \in C^\infty(-\delta, \delta)$. Como $B_{jlq}(t) = 0$ é solução, concluímos que

$$B_{jl}(t, q) = B_{jlq}(t) = 0, t \in (-\delta, \delta), q \in W, j = 2, \dots, n, l = n+1, \dots, N,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_{jl} \circ \xi^{-1} &= 0, j = 2, \dots, n, l = n+1, \dots, N, \\ b_{jl} &= 0, j = 2, \dots, n, l = n+1, \dots, N. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} L_1^\# &= \frac{\partial}{\partial h_1}, \\ L_j^\# &= \sum_{k=2}^N b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k} = \sum_{k=2}^n b_{jk} \frac{\partial}{\partial h_k}, j = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

e assim

$$\mathcal{V}_p = \left[\frac{\partial}{\partial h_{1p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial h_{np}} \right], p \in V.$$

□

Teorema 5.2.7 (Versão para variedades suaves). *Sejam Ω variedade suave de dimensão N e $U \subset \Omega$ um aberto não vazio. Se $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ são campos reais tais que $\{L_{jp}\}_{j=1}^n$ é linearmente independente, para cada $p \in U$. Se $\mathcal{V} \doteq \cup_{p \in U} \mathcal{V}_p$, em que*

$$\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}],$$

for involutiva, então para cada $p_0 \in U$ existe sistema de coordenadas locais (W, y) , com $p_0 \in W$, tal que

$$\mathcal{V}_p = \left[\frac{\partial}{\partial y_{1p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{np}} \right], p \in W.$$

Demonstração. Seja $p_0 \in U$ e considere (V, x) um sistema de coordenadas locais tal que $p_0 \in V$ e $x(p_0) = 0$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{X}(V) &\rightarrow \mathfrak{X}(x(V)) \\ L &\mapsto \psi(L), \end{aligned}$$

onde $\psi(L)f \doteq L(f \circ x) \circ x^{-1}$, $f \in C^\infty(x(V))$.

Note que ψ é $\mathbb{C}$ -linear e é bijeção. De fato, se $\psi(L) = \psi(M)$, $L, M \in \mathfrak{X}(V)$, então

$$\begin{aligned} L(f \circ x) \circ x^{-1} &= M(f \circ x) \circ x^{-1} \\ \Rightarrow L(f \circ x) &= M(f \circ x) \\ \Rightarrow L(f) = L(f \circ x^{-1} \circ x) &= M(f \circ x^{-1} \circ x) = M(f), \end{aligned}$$

$f \in C^\infty(V)$, então $L = M$.

Se $\tilde{L} \in \mathfrak{X}(x(V))$, defina $Lf \doteq \tilde{L}(f \circ x^{-1}) \circ x, f \in C^\infty(V)$. Assim

$$\psi(L)f = L(f \circ x) \circ x^{-1} = \tilde{L}(f \circ x \circ x^{-1}) \circ x \circ x^{-1} = \tilde{L}f, f \in C^\infty(x(V)),$$

ou seja, $\psi(L) = \tilde{L}$ e portanto ψ é bijeção.

Se $L_1, L_2 \in \mathfrak{X}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} \psi(L_1 + \lambda L_2)f &= [(L_1 + \lambda L_2)(f \circ x)] \circ x^{-1} = \\ &= [L_1(f \circ x) + \lambda L_2(f \circ x)] \circ x^{-1} = \\ &= L_1(f \circ x) \circ x^{-1} + \lambda L_2(f \circ x) \circ x^{-1} = \\ &= (\psi(L_1) + \lambda \psi(L_2))f, f \in C^\infty(x(V)), \end{aligned}$$

ou seja, $\psi(L_1 + \lambda L_2) = \psi(L_1) + \lambda \psi(L_2)$. Portanto ψ é um isomorfismo entre os $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais $\mathfrak{X}(V)$ e $\mathfrak{X}(x(V))$.

Seja $\phi \doteq \psi^{-1}$. Assim

$$\phi : \mathfrak{X}(x(V)) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$$

é tal que

$$\psi(\phi(\tilde{L})) = \tilde{L} \Leftrightarrow \tilde{L}f = \psi(\phi(\tilde{L}))f = \phi(\tilde{L})(f \circ x) \circ x^{-1}, f \in C^\infty(x(V)),$$

então

$$\phi(\tilde{L})f = \phi(\tilde{L})(f \circ x^{-1} \circ x) = \tilde{L}(f \circ x^{-1}) \circ x, f \in C^\infty(V).$$

Observe que o isomorfismo ψ induz, para cada $p \in V$, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_p : \mathbb{C}T_p V &\rightarrow \mathbb{C}T_q x(V) \\ v &\mapsto \psi_p(v) \doteq \psi(L)_q, \end{aligned}$$

onde $q = x(p)$, $L \in \mathfrak{X}(V)$ é tal que $v = L_p$.

Analogamente tem-se que, para cada $p \in V$, ψ_p é isomorfismo com $(\psi_p)^{-1} = \phi_q$ onde $q = x(p)$ e $\phi_q(v) = \phi(L)_p$, com $L \in \mathfrak{X}(x(V))$ tal que $v = L_q$.

Defina, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, os campos $\tilde{L}_j \doteq \psi(L_j)$. Assim $\tilde{L}_{jq} = \psi(L_j)_q = \psi_p(L_{jp}), j = 1, \dots, n, q \in x(V), p = x^{-1}(q)$.

Afirmamos que $\{\tilde{L}_{j1}\}_{j=1}^n$ é linearmente independente, $\forall q \in x(V)$. Com efeito, se $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$ e $q \in x(V)$ forem tais que $\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{L}_{jq} = 0$ e assim

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_p(L_{jp}) = 0 \Rightarrow \psi_p \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j L_{jp} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j L_{jp} = 0,$$

então $\lambda_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Considere $\mathcal{U} = \cup_{q \in x(V)} \mathcal{U}_q$, onde $\mathcal{U}_q = [\tilde{L}_{1q}, \dots, \tilde{L}_{nq}]$, $q \in x(V)$. Assim $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}Tx(V)$ é subfibrado vetorial complexo n -dimensional. Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_j f &= \overline{\tilde{L}_j(\bar{f})} = \overline{L_j(\bar{f} \circ x) \circ x^{-1}} = \overline{L_j(\overline{f \circ x})} \circ x^{-1} = \\ &= \overline{L_j(f \circ x) \circ x^{-1}} = L_j(f \circ x) \circ x^{-1} = \\ &= \tilde{L}_j f, f \in C^\infty(x(V)), \end{aligned}$$

assim $\tilde{L}_j, j = 1, \dots, n$, são campos reais.

Vamos mostrar que $\mathcal{U}$ é uma estrutura involutiva. Sejam $\tilde{L}, \tilde{M} \in \mathfrak{X}(x(V))$ seções de $\mathcal{U}$ sobre $x(V)$. Tome $L \doteq \phi(\tilde{L}), M \doteq \phi(\tilde{M}) \in \mathfrak{X}(V)$. Observe que, se $p \in V$ e $q = x(p) \in x(V)$, então existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_q &= \sum_{j=1}^n a_j \tilde{L}_{jq} = \sum_{j=1}^n a_j \psi_p(L_{jp}) = \\ &= \psi_p \left(\sum_{j=1}^n a_j L_{jp} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L_p = \sum_{j=1}^n a_j L_{jp}.$$

Analogamente, existem $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\tilde{M}_q = \sum_{j=1}^n b_j \tilde{L}_{jq}$$

e obtemos que

$$M_p = \sum_{j=1}^n b_j L_{jp},$$

ou seja, L e M são seções de $\mathcal{V}$ sobre V .

Assim, para cada $q \in x(V)$, existem $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$[L, M]_p = \sum_{j=1}^n c_j L_{jp}, p = x^{-1}(q).$$

Observe que

$$\psi_p([L, M]_p) = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{L}_{jq},$$

vamos mostrar que $[\tilde{L}, \tilde{M}]_q = \psi_p([L, M]_p)$ e assim teremos provado que $\mathcal{U}$ é de fato involutiva.

Note que

$$\begin{aligned} \psi([L, M])f &= [L, M](f \circ x) \circ x^{-1} = (L(M(f \circ x)) - M(L(f \circ x))) \circ x^{-1} = \\ &= L(M(f \circ x) \circ x^{-1} \circ x) \circ x^{-1} - M(L(f \circ x) \circ x^{-1} \circ x) \circ x^{-1} = \\ &= \tilde{L}(M(f \circ x) \circ x^{-1}) - \tilde{M}(L(f \circ x) \circ x^{-1}) = \\ &= \tilde{L}(\tilde{M}f) - \tilde{M}(\tilde{L}f) = [\tilde{L}, \tilde{M}]f, f \in C^\infty(x(V)), \end{aligned}$$

ou seja, $\psi([L, M]) = [\tilde{L}, \tilde{M}]$.

Portanto

$$\psi_p([L, M]_p) = \psi([L, M])_q = [\tilde{L}, \tilde{M}]_q$$

e concluimos que $\mathcal{U}$ é uma estrutura involutiva.

Como $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}Tx(V)$ é uma estrutura involutiva gerada por campos reais e $x(V) \subset \mathbb{R}^N$ é aberto não vazio, pelo Teorema 5.2.1, existe $(\tilde{W}, \tilde{y})$ sistema de coordenadas locais com $0 \in \tilde{W} \subset x(V)$ tal que

$$\mathcal{U}_q = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{1_q}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{n_q}} \right], \forall q \in \tilde{W}.$$

Defina $W \doteq x^{-1}(\tilde{W}) \subset V$ e $y \doteq \tilde{y} \circ x$. Assim $p_0 \in W$ e (W, y) é um sistema de coordenadas locais. Afirmamos que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \phi \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \right), j = 1, \dots, N.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} \right) f &= \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial \tilde{y}_j} \circ x = \frac{\partial(f \circ x^{-1} \circ \tilde{y}^{-1})}{\partial e_j} \circ \tilde{y} \circ x = \\ &= \frac{\partial(f \circ y^{-1})}{\partial e_j} \circ y = \frac{\partial f}{\partial y_j}, f \in C^\infty(W). \end{aligned}$$

Note também que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} = \psi \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right), j = 1, \dots, N.$$

Resta mostrarmos que $\mathcal{V}_p = [(\partial/\partial y_1)_p, \dots, (\partial/\partial y_n)_p], p \in W$. Primeiramente, vamos mostrar que $L_{jp} \in [(\partial/\partial y_1)_p, \dots, (\partial/\partial y_n)_p], p \in W$.

Observe que $\psi_p(L_{jp}) = \tilde{L}_{jq} \in [(\partial/\partial \tilde{y}_1)_q, \dots, (\partial/\partial \tilde{y}_n)_q], p \in W, q = x(p)$, então existem $a_j^k \in \mathbb{C}, j, k = 1, \dots, n$, tais que

$$\begin{aligned} \psi_p(L_{jp}) &= \sum_{k=1}^n a_j^k \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{k_q}} = \sum_{k=1}^n a_j^k \psi_p \left(\frac{\partial}{\partial y_{k_p}} \right) = \\ &= \psi_p \left(\sum_{k=1}^n a_j^k \frac{\partial}{\partial y_{k_p}} \right). \end{aligned}$$

Assim

$$L_{jp} = \sum_{k=1}^n a_j^k \frac{\partial}{\partial y_{k_p}} \in \left[\frac{\partial}{\partial y_{1_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n_p}} \right],$$

por fim concluimos que $\mathcal{V}_p = [(\partial/\partial y_1)_p, \dots, (\partial/\partial y_n)_p], p \in W$.

□

6 Estruturas Localmente Integráveis

No presente capítulo apresentaremos o conceito de estruturas localmente integráveis e alguns resultados que nos auxiliarão no enunciado e demonstração do *Teorema de Baouendi-Treves*.

6.1 Conjunto Característico

Definição 6.1.1. *Seja $\mathcal{V} \subset CT\Omega$ uma estrutura involutiva. Definimos seu conjunto característico como sendo:*

$$T^0 \doteq \cup_{p \in \Omega} T_p^0,$$

sendo que $T_p^0 \doteq \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^*\Omega$. Assim $T^0 = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^*\Omega = T' \cap T^*\Omega$. Observe que T_p^0 é subespaço vetorial real de $T_p^*\Omega$.

Definição 6.1.2 (Símbolo de um campo vetorial). *Seja $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, definimos o seu símbolo como sendo*

$$\sigma(L) : T^*\Omega \rightarrow \mathbb{C},$$

em que, para cada $p \in \Omega$ e $\xi \in T_p^*\Omega$, tem-se $\sigma(L)(\xi) \doteq \xi(L_p)$.

Observação 6.1.3. *Note que $\xi \in T_p^0$ se, e somente se, $\sigma(L)(\xi) = 0$ para qualquer seção L de $\mathcal{V}$.*

Seja uma carta local (U, x) em Ω com $x = (x_1, \dots, x_N)$ e fixe $p \in \Omega$. Para $\xi \in T_p^*\Omega$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, tem-se $\xi = \sum_{j=1}^N \xi_j dx_{jp}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ e $L = \sum_{j=1}^N a_j(\partial/\partial x_j)$, então

$$\sigma(L)(\xi) = \sum_{j=1}^N a_j(p) \xi_j.$$

Dessa forma, se $L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk}(\partial/\partial x_k)$, $j = 1, \dots, n$ são seções de $\mathcal{V}$ linearmente independentes sobre U podemos descrever o conjunto $T^0 \cap T^*U$ da seguinte forma

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in T_p^0 \cap T_p^*U \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N a_{jk}(p) \xi_k = 0, p \in U, \xi_k \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n.$$

Observação 6.1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto não vazio. Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $L_p \neq 0, \forall p \in \Omega$, tem-se que*

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, a_j \in C^\infty(\Omega), j = 1, \dots, N.$$

Este campo define também um operador diferencial parcial linear de ordem 1, a saber,

$$P(x, D) = \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

O símbolo deste operador é dado por

$$P_1(x, \xi) = \sum_{j=1}^N a_j(x) \xi_j, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dizemos que P é elítico se

$$P_1(x_0, \xi) = \sum_{j=1}^N a_j(x_0) \xi_j = 0 \Leftrightarrow \xi_j = 0, j = 1, \dots, N, \forall x_0 \in \Omega.$$

Note que se $\mathcal{V} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$, onde $\mathcal{V}_p = [L_p]$, $p \in \Omega$. Então $\mathcal{V}$ é um estrutura elítica se $T_p^0 = \{0\}$, $\forall p \in \Omega$. Em outras palavras, $\mathcal{V}$ é elítica se

$$\sum_{j=1}^N a_j(p) \xi_j = 0 \Leftrightarrow \xi_j = 0, j = 1, \dots, N,$$

para cada $p \in \Omega$. Logo as definições de $\mathcal{V}$ ser estrutura chamada de elítica, que definiremos mais adiante, e L ser operador elítico são equivalentes quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto não vazio.

Lema 6.1.5. *Todo subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ 1-dimensional é uma estrutura involutiva.*

Demonstração. De fato, considere $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ um subfibrado vetorial complexo unidimensional. Sejam $U \subset \Omega$ for aberto e $M_1, M_2 \in \mathfrak{X}(U)$ seções de $\mathcal{V}$ sobre U . Fixe $p_0 \in U$, vamos mostrar que $[M_1, M_2]_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}$, como $p_0 \in U$ é arbitrário teremos que $[M_1, M_2]_p \in \mathcal{V}_p$, $\forall p \in U$, o resultado segue.

Diminuindo a vizinhança U se necessário, existe $L \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\mathcal{V}_p = [L_p]$, $\forall p \in U$. Seja $x \doteq (x_1, \dots, x_N)$ um sistema de coordenadas locais. Assim existem funções $A_j, a_{1j}, a_{2j} \in C^\infty(U)$, $j = 1, \dots, N$, tais que

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^N A_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ M_1 &= \sum_{k=1}^N a_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ M_2 &= \sum_{k=1}^N a_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_p &= \sum_{j=1}^N A_j(p) \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}, \\ M_{1p} &= \sum_{k=1}^N a_{1k}(p) \frac{\partial}{\partial x_{k_p}} \in \mathcal{V}_p, \\ M_{2p} &= \sum_{k=1}^N a_{2k}(p) \frac{\partial}{\partial x_{k_p}} \in \mathcal{V}_p, \end{aligned}$$

$p \in U$.

Logo existem $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{C}$ tais que $M_{1p} = \alpha_p L_p$, $M_{2p} = \beta_p L_p$. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_{1j}(p) \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} &= \sum_{j=1}^N \alpha_p A_j(p) \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} \\ \sum_{j=1}^N a_{2j}(p) \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} &= \sum_{j=1}^N \beta_p A_j(p) \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} M_1(M_2) &= \sum_{j=1}^N a_{1j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^N a_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^N a_{1j} \left(\frac{\partial a_{2k}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right) \end{aligned}$$

analogamente

$$M_2(M_1) = \sum_{j,k=1}^N a_{2j} \left(\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + a_{1k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

e então

$$\begin{aligned} [M_1, M_2] &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{1j} \frac{\partial a_{2k}}{\partial x_j} - a_{2j} \frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ [M_1, M_2]_{p_0} &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{p_0} A_j(p_0) \frac{\partial a_{2k}}{\partial x_j}(p_0) - \beta_{p_0} A_j(p_0) \frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j}(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial x_{k_{p_0}}}. \end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar, o primeiro em que $M_{1p_0} \neq 0$ e $M_{2p_0} \neq 0$, e o segundo em que $M_{1p_0} = 0$ ou $M_{2p_0} = 0$.

Dessa forma, suponha $M_{1p_0} \neq 0$ e $M_{2p_0} \neq 0$ e assim existem $j_0, k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tais que $a_{1j_0}(p_0) \neq 0$ e $a_{2k_0}(p_0) \neq 0$. Como $\alpha_{p_0} A_{j_0}(p_0) = a_{1j_0}(p_0) \neq 0$ e $\beta_{p_0} A_{k_0}(p_0) = a_{2k_0}(p_0) \neq 0$, então $\alpha_{p_0}, \beta_{p_0}, A_{j_0}(p_0)$ e $A_{k_0}(p_0)$ são todos não nulos.

Diminuindo a vizinhança U se necessário, obtemos que $A_{j_0}(p)$ e $A_{k_0}(p)$ são não nulos em U e

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \left(\frac{a_{1j_0}}{A_{j_0}} \right) (p), p \in U \\ \beta_p &= \left(\frac{a_{2k_0}}{A_{k_0}} \right) (p), p \in U, \end{aligned}$$

assim $\alpha(p) \doteq \alpha_p$ e $\beta(p) \doteq \beta_p$ são funções suaves. Assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j}(p_0) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0)A_k(p_0) + \alpha(p_0)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}(p_0) \\ \frac{\partial a_{2k}}{\partial x_j}(p_0) &= \frac{\partial \beta}{\partial x_j}(p_0)A_k(p_0) + \beta(p_0)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}(p_0).\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}[M_1, M_2]_{p_0} &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \alpha(p_0)A_j(p_0)\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(p_0) \right) A_k(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} + \\ &+ \sum_{j,k=1}^N \alpha(p_0)A_j(p_0)\beta(p_0)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} + \\ &+ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N -\beta(p_0)A_j(p_0)\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0) \right) A_k(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} + \\ &+ \sum_{j,k=1}^N -\beta(p_0)A_j(p_0)\alpha(p_0)\frac{\partial A_k}{\partial x_j}(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} = \\ &= C \sum_{k=1}^N A_k(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} = \\ &= CL_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0},\end{aligned}$$

em que

$$C = \sum_{j=1}^N \left(\alpha(p_0)A_j(p_0)\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(p_0) - \beta(p_0)A_j(p_0)\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0) \right).$$

Suponha agora que $M_{1p_0} = 0$. Como $\alpha_{p_0}L_{p_0} = M_{1p_0} = 0$, temos que $\alpha_{p_0} = 0$. Assim

$$\begin{aligned}[M_1, M_2]_{p_0} &= \sum_{k,j=1}^N -a_{2j}(p_0)\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j}(p_0)\frac{\partial}{\partial x_{k p_0}} = \\ &= - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \beta_{p_0}A_j(p_0)\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_j}(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial x_{k p_0}}.\end{aligned}$$

Como $L_{p_0} \neq 0$, existe $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $A_{k_0}(p_0) \neq 0$. Então diminuindo a vizinhança U se necessário obtemos $A_{k_0}(p) \neq 0, \forall p \in U$, e

$$\alpha(p) \doteq \alpha_p = \frac{a_{1k_0}}{A_{k_0}}(p), p \in U.$$

Além disso, tem-se que

$$\frac{a_{1k}}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p)A_k(p) + \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(p)\alpha(p)$$

e

$$\frac{a_{1k}}{\partial x_j}(p_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0)A_k(p_0).$$

Por fim,

$$\begin{aligned} [M_1, M_2]_{p_0} &= \sum_{k=1}^N \left(- \sum_{j=1}^N \beta(p_0) A_j(p_0) \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0) \right) A_k(p_0) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{p_0} = \\ &= CL_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}, \end{aligned}$$

sendo que

$$C = - \sum_{j=1}^N \beta(p_0) A_j(p_0) \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(p_0).$$

□

6.2 Algumas estruturas especiais

Seja $\mathcal{V}$ um subfibrado vetorial complexo n -dimensional de $\mathbb{C}T\Omega$. Dizemos que:

1. $\mathcal{V}$ define uma estrutura elítica se $T_p^0 = \{0\}$, para todo $p \in \Omega$;
2. $\mathcal{V}$ define uma estrutura complexa se $\mathbb{C}T_p\Omega = \mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}}_p$, para todo $p \in \Omega$;
3. $\mathcal{V}$ define uma estrutura CR (ou de Cauchy-Riemann) se $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \{0\}$, para todo $p \in \Omega$;
4. $\mathcal{V}$ define uma estrutura essencialmente real se $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p$, para todo $p \in \Omega$.

Lema 6.2.1. *Se $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ forem tais que $\{L_{1p}, \dots, L_{np}\}$ é linearmente independente, para algum $p \in U$, então existe $V \subset U$ vizinhança de p tal que $\{L_{1q}, \dots, L_{nq}\}$ é linearmente independente, $\forall q \in V$.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in U \subset \Omega$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $\{L_{jp_0}\}_{j=1}^n$ é linearmente independente. Considere $x \doteq (x_1, \dots, x_N)$ um sistema de coordenadas locais. Assim, para cada $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, N$, existe $a_{jk} \in C^\infty(U)$ com

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, j = 1, \dots, n.$$

Como $\{L_{jp_0}\}_{j=1}^n$ é LI, então a matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(p_0) & a_{2N}(p_0) & \cdots & a_{nN}(p_0) \end{pmatrix}$$

tem posto n . Logo, rearranjando os índices se necessário, obtém-se que $\det A(p_0) \neq 0$, em que $A : U \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ é dada por $A(p) =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{21}(p) & \cdots & a_{n1}(p) \\ a_{12}(p) & a_{22}(p) & \cdots & a_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p) & a_{2n}(p) & \cdots & a_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

Como cada a_{jk} é suave e $\det$ é contínua, então $\det \circ A$ é contínua, sendo assim existe aberto $V \subset U$ que contém p_0 tal que $\det A(p) \neq 0, \forall p \in V$.

Considere a aplicação $B : V \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ dada por $B(p) =$

$$\begin{pmatrix} a_{1n+1}(p) & a_{2n+1}(p) & \cdots & a_{nn+1}(p) \\ a_{1n+2}(p) & a_{2n+2}(p) & \cdots & a_{nn+2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(p) & a_{2N}(p) & \cdots & a_{nN}(p) \end{pmatrix}$$

Assim a matriz

$$\begin{pmatrix} A(p) \\ B(p) \end{pmatrix}$$

tem posto n para todo $p \in V$ e tal matriz representa os coeficientes dos vetores $L_{1p}, \dots, L_{np}$ na base canônica, a saber $\{(\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_N)_p\}$, portanto $\{L_{1p}, \dots, L_{np}\}$ é linearmente independente para todo $p \in V$.

□

Proposição 6.2.2. *Toda estrutura essencialmente real é localmente gerada por campos vetoriais reais.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in U \subset \Omega$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}], \forall p \in U.$$

Note que, $L_j = \Re L_j + i\Im L_j, j = 1, \dots, n$, com $\Re L_j, \Im L_j$ campos reais. Assim

$$L_{jp} = \Re L_{jp} + i\Im L_{jp}, j = 1, \dots, n, p \in U,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} L_{jp} &\in [\Re L_{1p}, \Im L_{1p}, \dots, \Re L_{np}, \Im L_{np}], j = 1, \dots, n, p \in U, \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{V}_p &= [L_{1p}, \dots, L_{np}] \subset [\Re L_{1p}, \Im L_{1p}, \dots, \Re L_{np}, \Im L_{np}], p \in U. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\mathcal{V}$ é essencialmente real tem-se que $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}_p}, \forall p \in \Omega$, e assim $\overline{L_{jp}} \in \overline{\mathcal{V}_p} = \mathcal{V}_p, \forall p \in U$. Consequentemente

$$\Re L_{jp} = \frac{L_{jp} + \overline{L_{jp}}}{2}, \Im L_{jp} = \frac{L_{jp} - \overline{L_{jp}}}{2i} \in \mathcal{V}_p, j = 1, \dots, n, p \in U,$$

ou seja, $\Re L_j, \Im L_j$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre U . Segue que $\mathcal{V}_p = [\Re L_{1p}, \Im L_{1p}, \dots, \Re L_{np}, \Im L_{np}]$, $p \in U$.

Por fim, existem $M_1, \dots, M_n \in \{\Re L_j, \Im L_j; j = 1, \dots, n\}$ tais que

$$\mathcal{V}_{p_0} = [M_{1p_0}, \dots, M_{np_0}],$$

ou seja, $M_{1p}, \dots, M_{np} \subset \mathcal{V}_p, p \in U$, são campos reais tais que $\{M_{jp_0}\}_{j=1}^n$ é LI, pelo Lema 6.2.1, existe aberto $V \subset U$ que contém p_0 tal que $\{M_{jp}\}_{j=1}^n \subset \mathcal{V}_p$ é LI para todo $p \in V$ e concluímos que

$$\mathcal{V}_p = [M_{1p}, \dots, M_{np}], p \in U.$$

□

Lema 6.2.3. *Se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^N + i\mathbb{R}^N$ e se $V^0 \doteq V \cap \mathbb{R}^N$, então $V^0 + iV^0 = V \cap \overline{V}$.*

Demonstração. Seja $z \in V^0 + iV^0$. Assim $z = x + iy$ onde

$$x \doteq (x_1, \dots, x_N) \in V^0 = V \cap \mathbb{R}^N$$

$$y \doteq (y_1, \dots, y_N) \in V^0 = V \cap \mathbb{R}^N.$$

Então, obtemos que $z \in V$ e

$$\bar{z} = \bar{x} - i\bar{y} = x - iy \in V,$$

ou seja, $z = \bar{z} \in \overline{V}$. Concluímos que $V^0 + iV^0 \subset V \cap \overline{V}$.

Por outro lado, se $z \in V \cap \overline{V}$ então

$$z \doteq (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N,$$

$$\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) \in V.$$

Além disso,

$$z = \frac{z + \bar{z}}{2} - i \frac{(iz - i\bar{z})}{2} \in V^0 + iV^0,$$

pois

$$\frac{z + \bar{z}}{2} \in V \cap \mathbb{R}^N = V^0,$$

$$\frac{(iz - i\bar{z})}{2} \in V \cap \mathbb{R}^N = V^0.$$

□

Agora, utilizando o Lema 6.2.3, obtemos o seguinte resultado:

Observação 6.2.4. *Sejam X um espaço vetorial complexo de dimensão N e $\{x_1, \dots, x_N\}$ uma base para tal espaço. Dessa maneira, existe isomorfismo*

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow \mathbb{C}^N \\ x = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j &\mapsto Tx \doteq (\alpha_1, \dots, \alpha_N). \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^N + i\mathbb{R}^N$. Considere $E \doteq T^{-1}(\mathbb{R}^N) \subset X$. Observe que $X = E + iE$, pois $X = T^{-1}(\mathbb{C}^N) = T^{-1}(\mathbb{R}^N + i\mathbb{R}^N) = T^{-1}(\mathbb{R}^N) + iT^{-1}(\mathbb{R}^N) = E + iE$.

Se $x \in X$, definimos $\bar{x} \doteq T^{-1}(\overline{Tx})$ e se $V \subset X$ definimos

$$\bar{V} = \{\bar{x}; x \in V\}.$$

Note que se $x \in X$ então

$$x = \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j, \alpha_j \in \mathbb{C},$$

e assim

$$\bar{x} = T^{-1}(\overline{Tx}) = T^{-1}(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_N}) = \sum_{j=1}^N \overline{\alpha_j} x_j.$$

Afirmamos que se $V \subset X$ e $V^0 \doteq V \cap E$, então $V^0 + iV^0 = V \cap \bar{V}$. Com efeito, seja $V \subset X$ e considere $V^0 \doteq V \cap E$. Então $\tilde{V} \doteq T(V) \subset \mathbb{C}^N$ é subespaço vetorial e $\tilde{V}^0 \doteq T(V) \cap T(E) = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^N$.

Dessa forma, $\tilde{V}^0 + i\tilde{V}^0 = \tilde{V} \cap \widetilde{\bar{V}}$, como

$$\begin{aligned} \widetilde{\bar{V}} &= \overline{T(V)} = \{\overline{Tx}; x \in V\}, \\ T^{-1}(\widetilde{\bar{V}}) &= \{T^{-1}(\overline{Tx}); x \in V\} = \{\bar{x}; x \in V\} = \bar{V}, \end{aligned}$$

obtemos que

$$T(V^0 + iV^0) = T(V^0) + iT(V^0) = \tilde{V}^0 + i\tilde{V}^0 = \tilde{V} \cap \widetilde{\bar{V}} = T(V) \cap \overline{T(V)}.$$

Portanto

$$V^0 + iV^0 = T^{-1}(T(V^0 + iV^0)) = T^{-1}(T(V) \cap \overline{T(V)}) = V \cap T^{-1}(\overline{T(V)}) = V \cap \bar{V}.$$

Observação 6.2.5. *Observe que $\mathbb{C}T_p\Omega$ e $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ são espaços vetoriais N -dimensionais, $T_p\Omega = T^{-1}(\mathbb{R}^N)$ e $T_p^*\Omega = T^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Assim*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}T_p\Omega &= T_p\Omega + iT_p\Omega, \\ \mathbb{C}T_p^*\Omega &= T_p^*\Omega + iT_p^*\Omega. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura involutiva n -dimensional sobre Ω . Daí, tem-se que, para cada $p \in \Omega$, $V \doteq \mathcal{V}_p^\perp \subset \mathbb{C}T_p^\Omega$ é subespaço vetorial m -dimensional e $V^0 = V \cap E = \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^*\Omega = T_p^0$. Por fim, concluímos que*

$$T_p^0 + iT_p^0 = \mathcal{V}_p^\perp \cap \overline{\mathcal{V}_p^\perp}.$$

Corolário 6.2.6. *Toda estrutura complexa é uma estrutura elítica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura complexa, ou seja, $\mathbb{C}T_p\Omega = \mathcal{V}_p \oplus \bar{\mathcal{V}}_p, \forall p \in \Omega$, e vamos mostrar que $T_p^0 = \{0\}, \forall p \in \Omega$.

Primeiramente, note que se $\mathcal{V}_p = [v_1, \dots, v_n]$ então $\bar{\mathcal{V}}_p = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n]$ e $\mathcal{V}_p \cap \bar{\mathcal{V}}_p = \{0\}$. Assim $\mathbb{C}T_p\Omega = [v_1, \dots, v_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n]$ e $N = \dim \mathbb{C}T_p\Omega = 2n$.

Seja $\{\eta_j\}_{j=1}^{2n}$ base de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ dual de $\{v_1, \dots, v_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\eta_j(v_k) &= \delta_{jk}, j, k = 1, \dots, n, \\ \eta_j(\bar{v}_k) &= 0, j, k = 1, \dots, n, \\ \eta_{j+n}(\bar{v}_k) &= \delta_{jk}, j, k = 1, \dots, n, \\ \eta_{j+n}(v_k) &= 0, j, k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_j(v_k) &= \overline{\eta_j(\bar{v}_k)} = 0 = \eta_{j+n}(v_k), j, k = 1, \dots, n, \\ \bar{\eta}_j(\bar{v}_k) &= \overline{\eta_j(v_k)} = \delta_{jk} = \eta_{j+n}(\bar{v}_k), j, k = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

ou seja, $\eta_{j+n} = \bar{\eta}_j, j = 1, \dots, n$.

Além disso, como $\mathcal{V}_p = [v_1, \dots, v_n]$ então

$$\eta \in \mathcal{V}_p^\perp \Leftrightarrow \eta(v_k) = 0, k = 1, \dots, n,$$

e

$$\eta = \sum_{j=1}^n \eta(v_j) \eta_j + \sum_{j=1}^n \eta(\bar{v}_j) \bar{\eta}_j = \sum_{j=1}^n \eta(\bar{v}_j) \bar{\eta}_j \in [\eta_1, \dots, \eta_n].$$

Logo $\mathcal{V}_p^\perp = [\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n]$ e $\bar{\mathcal{V}}_p^\perp = [\eta_1, \dots, \eta_n]$. Dessa forma, tem-se que $\mathcal{V}_p^\perp \cap \bar{\mathcal{V}}_p^\perp = \{0\}$ e $\mathbb{C}T_p^*\Omega = \mathcal{V}_p^\perp \oplus \bar{\mathcal{V}}_p^\perp$, pois $\mathbb{C}T_p^*\Omega = [\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n, \eta_1, \dots, \eta_n]$

Por fim, como $\{0\} \subset T_p^0 = T_p^0 + i\{0\} \subset T_p^0 + iT_p^0 \subset \mathcal{V}_p^\perp \cap \bar{\mathcal{V}}_p^\perp = \{0\}$, concluímos que $T_p^0 = \{0\}, \forall p \in \Omega$.

□

Exemplo 6.2.7 (Operador de Mizohata). *Seja*

$$M \doteq -ti \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2),$$

em que (x, t) é o sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $x(p_1, p_2) = p_1$ e $t(p_1, p_2) = p_2$ para $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$.

Observe que $M_p \neq 0, \forall p \in \mathbb{R}^2$, pois $M_p = -ip_2(\partial/\partial x)_p + (\partial/\partial t)_p$ e $M_p(\underline{t}) = 1 \neq 0, p \in \mathbb{R}^2$. Considere $\mathcal{V} = \cup_{p \in \mathbb{R}^2} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\mathbb{R}^2$, assim $\mathcal{V}$ é subfibrado vetorial complexo unidimensional e pelo Lema 6.1.5 obtemos que tal estrutura é involutiva.

Agora, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, vamos calcular $\mathcal{V}_p^\perp$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \xi \in \mathcal{V}_p^\perp &\Leftrightarrow \xi(v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}_p = [M_p] \Leftrightarrow \xi(M_p) = -ip_2 \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right) + \xi\left(\frac{\partial}{\partial t_p}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right) = ip_2 \xi\left(\frac{\partial}{\partial t_p}\right) \end{aligned}$$

e assim

$$\xi \in \mathcal{V}_p^\perp \Leftrightarrow \xi = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)(dx_p + ip_2 dt_p).$$

Portanto $\mathcal{V}_p^\perp \subset [dx_p + ip_2 dt_p]$, como $\dim \mathcal{V}_p^\perp = N - n = 2 - 1 = 1$ concluímos que $\mathcal{V}_p^\perp = [dx_p + ip_2 dt_p]$.

Observe que para $p = (p_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ temos $\mathcal{V}_p^\perp = [dx_p]$ e $dx_p \in T_p^* \mathbb{R}^2$. Como $dx_p \neq 0$ e $dx_p \in T_p^0$, obtemos que $\mathcal{V}$ não é elítica. Consequentemente, $\mathcal{V}$ não é uma estrutura complexa.

Note que $\mathcal{V}$ não é essencialmente real, caso fosse teríamos $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p, \forall p \in \mathbb{R}^2$. Porém, para $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se que

$$\begin{aligned} M_p &= -i \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial t_p}, \\ \overline{M}_p &= i \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial t_p}. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_p} &= \frac{M_p + \overline{M}_p}{2} \in \mathcal{V}_p, \\ \frac{\partial}{\partial x_p} &= \frac{\overline{M}_p - M_p}{2i} \in \mathcal{V}_p \end{aligned}$$

e assim $\mathbb{C}T_p \mathbb{R}^2 = [(\partial/\partial x)_p, (\partial/\partial t)_p] \subset \mathcal{V}_p$, o que é absurdo pois $\dim \mathcal{V}_p = 1$.

Além disso, $\mathcal{V}$ não é uma estrutura CR. Caso $\mathcal{V}$ fosse CR, teríamos que $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \{0\}$, mas note que, para $p = (p_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e assim

$$M_p = \frac{\partial}{\partial t_p} = \overline{\frac{\partial}{\partial t_p}} = \overline{M}_p \neq 0,$$

o que implica em $M_p \in \mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p$ e $M_p \neq 0$. Logo $\mathcal{V}$ não é uma estrutura CR.

Por fim, vamos calcular $T_p^0, p \in \mathbb{R}^2$. Seja $\xi \in T_p^0 = \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^* \mathbb{R}^2$ então

$$\xi = \alpha dx_p + \alpha ip_2 dt_p, \alpha, \alpha ip_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $p = (p_1, 0)$, então $\xi = \alpha dx_p, \alpha \in \mathbb{R}$. Se $p = (p_1, p_2)$ com $p_2 \neq 0$, então $\xi = \alpha dx_p + \alpha ip_2 dt_p, \alpha, \alpha ip_2 \in \mathbb{R}$, e assim $\alpha = 0$, ou seja, $\xi = 0$. Em outras palavras, tem-se que

$$\begin{aligned} T_p^0 &= \{0\}, p \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R} \times \{0\}), \\ T_p^0 &= [dx_p], p \in \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Proposição 6.2.8. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura CR n -dimensional sobre Ω . Então seu conjunto característico T^0 é um subfibrado vetorial real $(N - 2n)$ -dimensional de $T^*\Omega$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura CR n -dimensional sobre Ω , assim $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \{0\}, \forall p \in \Omega$. Tome $\mathcal{W}_p \doteq \mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}}_p, p \in \Omega$, e $\mathcal{W} \doteq \cup_{p \in \Omega} \mathcal{W}_p$.

Observe que $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}T\Omega$ é subfibrado vetorial complexo $2n$ -dimensional. De fato, como $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \{0\}, \forall p \in \Omega$, então $\mathcal{W}_p \doteq \mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}}_p$ é subespaço vetorial $2n$ -dimensional de $\mathbb{C}T_p\Omega$.

Além disso, dado $p_0 \in \Omega$ temos que existe $U \subset \Omega$ com $p_0 \in U$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_p &= [L_{1p}, \dots, L_{np}], p \in U, \\ \overline{\mathcal{V}}_p &= [\overline{L_{1p}}, \dots, \overline{L_{np}}], p \in U,\end{aligned}$$

logo

$$\mathcal{W}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}, \overline{L_{1p}}, \dots, \overline{L_{np}}], p \in U.$$

Agora vamos mostrar $\mathcal{W}$ é uma estrutura essencialmente real. Fixe $p \in \Omega$, seja $v \in \mathcal{W}_p$ assim

$$v = v_1 + v_2, v_1 \in \mathcal{V}_p, v_2 \in \overline{\mathcal{V}}_p \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2 \in \mathcal{V}_p, \bar{v}_1 \in \overline{\mathcal{V}}_p,$$

então $\bar{v} \in \mathcal{W}_p$ e $v = \bar{\bar{v}} \in \overline{\mathcal{W}}_p$, ou seja, $\mathcal{W}_p \subset \overline{\mathcal{W}}_p$. Por outro lado, se $v \in \overline{\mathcal{W}}_p$ então $\bar{v} \in \mathcal{W}_p$ e

$$\bar{v} = v_1 + v_2, v_1 \in \mathcal{V}_p, v_2 \in \overline{\mathcal{V}}_p \Rightarrow v = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2 \in \mathcal{V}_p, \bar{v}_1 \in \overline{\mathcal{V}}_p,$$

assim $v \in \overline{\mathcal{W}}_p$, ou seja, $\overline{\mathcal{W}}_p \subset \mathcal{W}_p$ e portanto $\mathcal{W}_p = \overline{\mathcal{W}}_p$.

Dado $p_0 \in \Omega$, pela Proposição 6.2.2 temos que existem $V \subset \Omega$, com $p_0 \in V$, e $\eta_1, \dots, \eta_{N-2n} \in \mathfrak{N}(V)$ reais tais que $\mathcal{W}_p^\perp = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\eta_{1p}, \dots, \eta_{N-2np}\}, p \in V$. Assim $\eta_{jp}(v) = 0, v \in \mathcal{W}_p, j = 1, \dots, N - 2n$, e então $\eta_{jp}(v) = 0, v \in \mathcal{V}_p, j = 1, \dots, N - 2n$, pois $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{W}_p$.

Logo $\eta_{jp} \in \mathcal{V}_p^\perp \cap T_p^*\Omega, j = 1, \dots, N - 2n$. Daí, se $\eta \in T_p^0$ tem-se que

$$\eta = \sum_{j=1}^{N-2n} \alpha_j \eta_{jp}, \alpha_j \in \mathbb{C},$$

mas como $\eta \in T_p^*\Omega$ então

$$\eta = \bar{\eta} = \sum_{j=1}^{N-2n} \bar{\alpha}_j \eta_{jp},$$

dessa forma $\eta_j = \bar{\eta}_j, j = 1, \dots, N - 2n$, ou seja, $\eta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N - 2n$.

Por fim, concluímos que $T_p^0 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\eta_{jp}; j = 1, \dots, N - 2n\}$, pois $\{\eta_{jp}; j = 1, \dots, N - 2n\}$ é linearmente independente e geram T_p^0 sobre $\mathbb{R}$.

□

Lema 6.2.9. *Considere $V \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial m -dimensional. Sejam $V^0 \doteq V \cap \mathbb{R}^N$, $d \doteq \dim_{\mathbb{R}} V^0$, $\nu \doteq m - d$. Considere também $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial tal que $V = (V^0 \oplus iV^0) \oplus V_1$, e:*

- $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ uma base de V_1 ,
- $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ uma base de V^0 como espaço vetorial real.

Se $\alpha_j \doteq \Re \zeta_j$, $\eta_j \doteq \Im \zeta_j$, $j = 1, \dots, \nu$, então:

1. $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é uma base de V ;
2. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$;
3. $\nu + m \leq N$.

Observação 6.2.10. *Note que se $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial tal que $V = (V^0 \oplus iV^0) \oplus V_1$, então $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = \nu$. De fato, se $v \in V^0 \oplus iV^0$ então*

$$v = \sum_{j=1}^d a_j \xi_{\nu+j} + \sum_{j=1}^d b_j i \xi_{\nu+j}, a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{R}$ forem tais que

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j \xi_{\nu+j} + \sum_{j=1}^d \beta_j i \xi_{\nu+j} = 0$$

então

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j \xi_{\nu+j} - \sum_{j=1}^d \beta_j i \xi_{\nu+j} = \bar{0} = 0,$$

logo

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j \xi_{\nu+j} = 0, \sum_{j=1}^d \beta_j \xi_{\nu+j} = 0.$$

Como $\{\xi_{\nu+j}\}_{j=1}^d$ é base de V^0 , tem-se que $\alpha_j = \beta_j = 0$, $j = 1, \dots, d$. Portanto $\dim_{\mathbb{R}}(V^0 \oplus iV^0) = 2d$, dessa forma $\dim_{\mathbb{C}}(V^0 \oplus iV^0) = d$ e concluímos que $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V - \dim_{\mathbb{C}}(V^0 \oplus iV^0) = m - d = \nu$.

Demonstração. Seja $v \in V$, assim $v = v_0 + v_1$, $v_0 \in V^0 \oplus iV^0$, $v_1 \in V_1$ e então existem $u, \tilde{u} \in V^0$ e $\beta_1, \dots, \beta_\nu \in \mathbb{C}$ tais que

$$v_0 = u + i\tilde{u}, v_1 = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j \zeta_j.$$

Por outro lado, existem $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^d a_j \xi_{\nu+j}, \tilde{u} = \sum_{j=1}^d b_j \xi_{\nu+j},$$

dessa forma

$$v = \sum_{j=1}^d c_j \xi_{\nu+j} + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j \zeta_j,$$

onde $c_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, d$. Assim $S \doteq \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\nu}, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ gera V . Resta mostrar que tal conjunto é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$.

Se $a_1, \dots, a_{\nu}, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{C}$ forem tais que

$$\sum_{j=1}^d b_j \xi_{\nu+j} + \sum_{j=1}^{\nu} a_j \zeta_j = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^d b_j \xi_{\nu+j} = - \sum_{j=1}^{\nu} a_j \zeta_j \in V_1.$$

Como $V_1 \cap V^0 \oplus iV^0 = \{0\}$, tem-se que

$$\sum_{j=1}^d b_j \xi_{\nu+j} = - \sum_{j=1}^{\nu} a_j \zeta_j = 0,$$

assim $a_1 = \dots = a_{\nu} = b_1 = \dots = b_d = 0$, concluindo que S é linearmente independente.

Afirmamos agora que $V \cap \overline{V}_1 = \{0\}$. Com efeito, se $z \in V \cap \overline{V}_1$ então

$$z \in V \text{ e } \bar{z} \in V_1 \subset V \Rightarrow z \in V \cap \overline{V} = V^0 \oplus iV^0,$$

assim

$$\begin{aligned} z &= x + iy, x, y \in V^0 = V \cap \mathbb{R}^N \Rightarrow \bar{z} = x - iy \in V^0 \oplus iV^0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{z} \in V_1 \cap (V^0 \oplus iV^0) = \{0\} \Rightarrow \bar{z} = 0 \Rightarrow z = 0. \end{aligned}$$

Considere $\tilde{S} \doteq \{\zeta_1, \dots, \zeta_{\nu}, \overline{\zeta_1}, \dots, \overline{\zeta_{\nu}}, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ e mostremos que tal conjunto é linearmente independente. Sejam $a_1, \dots, a_{\nu}, b_1, \dots, b_{\nu}, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k \overline{\zeta_k} + \sum_{k=1}^{\nu} b_k \zeta_k + \sum_{k=1}^{\nu} c_k \xi_k = 0,$$

então

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k \zeta_k + \sum_{k=1}^{\nu} c_k \xi_k = - \sum_{k=1}^{\nu} a_k \overline{\zeta_k} \in \overline{V}_1,$$

mas

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k \zeta_k + \sum_{k=1}^{\nu} c_k \xi_k \in V \text{ e } V \cap \overline{V}_1 = \{0\},$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k \zeta_k + \sum_{k=1}^{\nu} c_k \xi_k = - \sum_{k=1}^{\nu} a_k \overline{\zeta_k} = 0.$$

Logo $a_1 = \dots = a_{\nu} = b_1 = \dots = b_{\nu} = c_1 = \dots = c_d = 0$, pois $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{\nu}, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ é base de V e $\{\overline{\zeta_1}, \dots, \overline{\zeta_{\nu}}\}$ é base $\overline{V}_1$, concluindo que $\tilde{S} \subset \mathbb{C}^N$ é LI. Sendo assim, tem-se que

$$\nu + m = \nu + \nu + d = \dim_{\mathbb{C}}[\tilde{S}] \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^N = N.$$

Por fim, vamos mostrar que $\hat{S} \doteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ é LI sobre $\mathbb{R}$. Sejam $a_1, \dots, a_\nu, b_1, \dots, b_\nu, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{\nu} b_k \eta_k + \sum_{k=1}^d c_k \xi_{\nu+k} = 0,$$

como $\alpha_k = (\zeta_k + \bar{\zeta}_k)/2, \eta_k = (\zeta_k - \bar{\zeta}_k)/2i, k = 1, \dots, \nu$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) \zeta_k + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) \bar{\zeta}_k + \sum_{k=1}^d c_k \xi_{\nu+k} = 0.$$

Além disso, por $\tilde{S}$ ser LI tem-se que

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) &= \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) = c_j = 0, k = 1, \dots, \nu, j = 1, \dots, d \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_k = b_k = c_j = 0, k = 1, \dots, \nu, j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Observação 6.2.11. *Sejam X um espaço vetorial N -dimensional, $V \subset X$ um subespaço vetorial m -dimensional, $V^0 \doteq V \cap \mathbb{R}^N, d \doteq \dim_{\mathbb{R}} V^0$ e $\nu \doteq m - d$. Considere também $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial tal que $V = (V^0 \oplus iV^0) \oplus V_1$, e:*

- $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ uma base de V_1 ,
- $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ uma base de V^0 como espaço vetorial real.

Se $\alpha_j \doteq \Re \zeta_j, \eta_j \doteq \Im \zeta_j, j = 1, \dots, \nu$, então:

1. $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é uma base de V ;
2. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$;
3. $\nu + m \leq N$.

De fato, tome

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\doteq T(V) \subset T(X) = \mathbb{C}^N, \tilde{V}_0 \doteq T(V_0) = T(V) \cap T(E) = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^N, (\tilde{V}_1) \doteq T(V_1), \\ \tilde{\zeta}_j &\doteq T(\zeta_j) = T(\alpha_j) + iT(\eta_j), j = 1, \dots, \nu, \\ \tilde{\xi}_{j+\nu} &\doteq T(\xi_{j+\nu}), j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_\nu\} &\quad \text{é base de } \tilde{V}_1, \\ \{\tilde{\xi}_{\nu+1}, \dots, \tilde{\xi}_m\} &\quad \text{é base real de } \tilde{V}_0, \end{aligned}$$

aplicando o Lema acima obtemos que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_\nu, \tilde{\xi}_{\nu+1}, \dots, \tilde{\xi}_m\} & \quad \text{é base de } \tilde{V}, \\ \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_\nu, \tilde{\xi}_{\nu+1}, \dots, \tilde{\xi}_m, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_\nu\} & \quad \text{é LI sobre } \mathbb{R}, \\ \nu + m & \leq N, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_j = T(\alpha_j)$, $\tilde{\eta}_j = T(\eta_j)$, $j = 1, \dots, \nu$, como T é isomorfismo temos que

$$\begin{aligned} \{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\} & \quad \text{é base de } V, \\ \{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_\nu\} & \quad \text{é LI sobre } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6.3 Estruturas Localmente Integráveis

Definição 6.3.1 (Estruturas Localmente Integráveis). *Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ um subfibrado complexo n -dimensional. Dizemos que $\mathcal{V}$ define uma estrutura localmente integrável sobre Ω se, dado $p_0 \in \Omega$, existem $U_0 \subset \Omega$ aberto, com $p_0 \in U_0$, e $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U_0)$ tal que*

$$\mathcal{V}_p^\perp = [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], p \in U_0,$$

onde $m \doteq N - n$.

É importante ressaltar que toda estrutura localmente integrável $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ é uma estrutura involutiva. Para demonstrar tal fato faremos uso do seguinte lema:

Lema 6.3.2. *Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n \in: X \rightarrow \mathbb{C}$ operadores lineares não nulos. Então:*

$$\cap_{j=1}^n N(\phi_j) \subset N(\phi) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \text{ tais que } \phi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_j.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que existam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que $\phi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_j$. Seja $x \in \cap_{j=1}^n N(\phi_j)$, ou seja,

$$\phi_j(x) = 0, j = 1, \dots, n,$$

e assim

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_j(x) = 0,$$

então $\cap_{j=1}^n N(\phi_j) \subset N(\phi)$.

($\Rightarrow$) Faremos por indução. No caso $n = 1$ temos $\phi, \phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ operadores lineares e suponha $N(\phi_1) \subset N(\phi)$. Fixe $x_0 \in X$ tal que $\phi_1(x_0) = 1$ e seja $x \in X$ qualquer, assim

$$x = (x - \phi_1(x)x_0) + \phi_1(x)x_0.$$

Dessa forma,

$$\phi_1(x - \phi_1(x)x_0) = \phi_1(x) - \phi_1(x) = 0,$$

ou seja, $x - \phi_1(x)x_0 \in N(\phi_1) \subset N(\phi)$ e como $x_0 \notin N(\phi_1)$ segue que $X = N(\phi_1) \oplus [x_0]$. Logo

$$\phi(x) = \phi(x - \phi_1(x)x_0) = \phi(x_0)\phi_1(x),$$

como $x \in X$ é arbitrário concluímos que $\phi = \phi(x_0)\phi_1$.

Suponha, por indução, que o resultado seja válido para $k = 1, \dots, n-1$ e provemos para $k = n$. Sejam $\phi, \phi_1, \dots, \phi_n \in X^*$ tais que $\cap_{j=1}^n N(\phi_j) \subset N(\phi)$. Observe que $N(\phi_n) \subset X$ é subespaço vetorial e considere

$$\phi_j^* \doteq \phi_j|_{N(\phi_n)}, j = 1, \dots, n-1 \text{ e } \phi^* \doteq \phi|_{N(\phi_n)}.$$

Assim $\phi^*, \phi_1^*, \dots, \phi_{n-1}^* \in (N(\phi_n))^*$ e se $x \in \cap_{j=1}^{n-1} N(\phi_j^*)$ então

$$\begin{aligned} x \in N(\phi_n) \text{ e } \phi_j^*(x) = \phi_j(x) = 0 &\Rightarrow x \in \cap_{j=1}^n N(\phi_j) \subset N(\phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in N(\phi_n) \text{ e } \phi^*(x) = \phi(x) = 0 &\Rightarrow x \in N(\phi^*), \end{aligned}$$

ou seja, $\cap_{j=1}^{n-1} N(\phi_j^*) \subset N(\phi^*)$.

Pela hipótese de indução, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ tais que $\phi^* = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j^*$. Seja $x_0 \in X$ tal que $\phi_n(x_0) = 1$. Logo, para $x \in X$, tem-se que $x = (x - \phi_n(x)x_0) + \phi_n(x)x_0$ com $x - \phi_n(x)x_0 \in N(\phi_n)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x - \phi_n(x)x_0) - \phi_n(x)\phi(x_0) = \\ &= \phi^*(x - \phi_n(x)x_0) + \phi(x_0)\phi_n(x) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j^*(x - \phi_n(x)x_0) \phi(x_0) \phi_n(x) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(x - \phi_n(x)x_0) - \phi(x_0)\phi_n(x) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j + \left(\phi(x_0) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x_0) \right) \phi_n \right) (x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_j,$$

sendo que $\lambda_j = \alpha_j, j = 1, \dots, n-1$ e $\lambda_n = \phi(x_0) - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x_0)$.

□

Seja $\mathcal{V} \subset CT\Omega$ uma estrutura localmente integrável, considere $U \subset \Omega$ não vazio e $L, M \in \mathfrak{X}(U)$ seções de $\mathcal{V}$ sobre U . Fixe $p_0 \in U$, mostremos que $[L, M]_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}$. Com

efeito, existem $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U)$ e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_p^\perp &= [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], \forall p \in U, \\ \mathcal{V}_p &= [L_{1p}, \dots, L_{np}], \forall p \in U.\end{aligned}$$

Observe que $[L, M]_{p_0}, L_{jp_0} : C^\infty(p_0) \rightarrow \mathbb{C}$ são aplicações $\mathbb{C}$ -lineares, para $j = 1, \dots, n$, e denote $N_j \doteq N(L_{jp_0})$. Seja $\underline{f} \in \cap_{j=1}^n N_j \subset C^\infty(p_0)$, assim $L_{jp_0}(\underline{f}) = 0, j = 1, \dots, n$. Em outras palavras, $df_{p_0}(L_{jp_0}) = 0$, ou seja, $df_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}^\perp$ e portanto

$$df_{p_0} = \sum_{j=1}^m \alpha_j dZ_{jp_0}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}.$$

Além disso, $[L, M]_{p_0} = (L \circ M)_{p_0} - (M \circ L)_{p_0}$ e

$$\begin{aligned}(L \circ M)_{p_0}(\underline{f}) &= (L \circ M)(f)(p_0) = df_{p_0}(L \circ M)_{p_0} = \sum_{j=1}^m \alpha_j dZ_{jp_0}(L \circ M)_{p_0} = \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j (L \circ M)(Z_j)(p_0) = \sum_{j=1}^m \alpha_j L(MZ_j)(p_0) = 0.\end{aligned}$$

Analogamente, $(M \circ L)_{p_0}(\underline{f}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j M(LZ_j)(p_0) = 0 \Rightarrow [L, M]_{p_0}(\underline{f}) = 0$, ou seja, $\underline{f} \in N([L, M]_{p_0})$ e $\cap_{j=1}^n N_j \subset N([L, M]_{p_0})$.

Por fim, pelo Lema 6.3.2 concluímos que existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$[L, M]_{p_0} = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_{jp_0},$$

então $[L, M]_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}$, como $p_0 \in U$ é arbitrário segue que $[L, M]_p \in \mathcal{V}_p, \forall p \in U$ e $\mathcal{V}$ é involutiva.

Note que o operador de Mizohata do Exemplo 6.2.7 é uma estrutura localmente integrável, pois $\mathcal{V}_p^\perp = [dx_p + ip_2 dt_p]$ então basta tomar

$$Z = x + \frac{i}{2}t^2$$

e assim

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial t} dt = dx + it dt.$$

Teorema 6.3.3. *Toda estrutura essencialmente real $\mathcal{V}$ é localmente integrável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura essencialmente real, dado $p_0 \in \Omega$ existem $U \subset \Omega$ aberto que contém p_0 e $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ reais tais que $\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}], \forall p \in U$. Logo $L_1, \dots, L_n$ são campos reais que geram a estrutura involutiva $\cup_{p \in U} \mathcal{V}_p$, assim pelo *Teorema de Frobenius para Variedades Suaves*, existem $V \subset U$, aberto que contém p_0 , e $y \doteq (y_1, \dots, y_N)$ sistema de coordenadas locais tais que

$$\mathcal{V}_p = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right], \forall p \in V.$$

Tome $Z_j \doteq y_{j+n} \in C^\infty(V), j = 1, \dots, m$. Assim

$$dZ_j \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = dy_{j+m} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \delta_{j+m, k} = 0, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, m,$$

ou seja, $dZ_{jp} \in \mathcal{V}_p^\perp, j = 1, \dots, m, p \in V$, como $\{dZ_{jp}\}_{j=1}^m$ é linearmente independente e $\dim \mathcal{V}_p^\perp = m, p \in V$, segue que

$$\mathcal{V}_p^\perp = [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], p \in V.$$

□

6.4 Geradores Locais

Agora, sendo $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável, obteremos um sistema de coordenadas locais de Ω e geradores locais para $\mathcal{V}^\perp$ de forma a simplificar as expressões de seções $L \in \mathfrak{X}(U)$ de $\mathcal{V}$ e de $Z \in C^\infty(U)$, em que $dZ_p \in \mathcal{V}_p^\perp, p \in U$, e $U \subset \Omega$ é um aberto não vazio.

Sejam $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável e $p_0 \in \Omega$. Assim existem $U \subset \Omega$, que contém p_0 , e $G_1, \dots, G_m \in C^\infty(U)$ tais que:

$$\mathcal{V}_p^\perp = [dG_{1p}, \dots, dG_{mp}], \forall p \in U.$$

Considere $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu\}$ base de V_1 e $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ base de $T_{p_0}^0$, sendo que $V_1 \subset \mathcal{V}_{p_0}$ é subespaço vetorial tal que $\mathcal{V}_{p_0} = (T_{p_0}^0 \oplus iT_{p_0}^0) \oplus V_1, d = \dim_{\mathbb{R}} T_{p_0}^0$ e $\nu = m - d$. Logo pela Observação 6.2.11, tem-se que

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\} \text{ é base de } \mathcal{V}_{p_0}^\perp,$$

então existe $(c_{jk})_{1 \leq j, k \leq m} \in GL(m; \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m c_{jk} dG_{kp_0} &= \zeta_j, j = 1, \dots, \nu, \\ \sum_{k=1}^m c_{jk} dG_{kp_0} &= \xi_j, j = \nu + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Observação 6.4.1. Note que se $f, g \in C^\infty(U), \alpha \in \mathbb{C}$, então

$$d(f + \alpha g)(L) = L(f + \alpha g) = L(f) + \alpha L(g) = (df + \alpha dg)(L), L \in \mathfrak{X}(U),$$

ou seja, $d(f + \alpha g) = df + \alpha dg$. Além disso, se $f(p) = c, p \in U$, onde $c \in \mathbb{C}$, então

$$df(L) = Lf = 0, L \in \mathfrak{X}(U),$$

e assim $df = 0$.

Tome

$$\begin{aligned} Z_j(p) &\doteq \sum_{k=1}^m c_{jk}[G_k(p) - G_k(p_0)], p \in U, j = 1, \dots, \nu \\ W_l(p) &\doteq \sum_{k=1}^m c_{l+\nu k}[G_k(p) - G_k(p_0)], p \in U, l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} dZ_j &= d\left(\sum_{k=1}^m c_{jk}(G_k - G_k(p_0))\right) = \sum_{k=1}^m c_{jk}dG_k, j = 1, \dots, \nu, \\ dW_l &= d\left(\sum_{k=1}^m c_{l+\nu k}(G_k - G_k(p_0))\right) = \sum_{k=1}^m c_{l+\nu k}dG_k, l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Se $p \in U$, então

$$\begin{aligned} dZ_{jp} &= \sum_{k=1}^m c_{jk}dG_{kp}, j = 1, \dots, \nu, \\ dW_{lp} &= \sum_{k=1}^m c_{l+\nu k}dG_{kp}, l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Note que a matriz

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{\nu 1} & c_{\nu+11} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & \cdots & c_{\nu 2} & c_{\nu+12} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & \cdots & c_{\nu m} & c_{\nu+1m} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

representa os coeficientes dos vetores $dZ_{1p}, \dots, dZ_{\nu p}, dW_{1p}, \dots, dW_{dp}$ na base $\{dG_{kp}\}_{k=1}^m$. Como $(c_{jk})_{1 \leq j, k \leq m} \in GL(m; \mathbb{C})$, então tal matriz é invertível, portanto

$$\{dZ_{1p}, \dots, dZ_{\nu p}, dW_{1p}, \dots, dW_{dp}\} \text{ é base de } \mathcal{V}_p^\perp, p \in U.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} dZ_{jp_0} &= \sum_{k=1}^m c_{jk}dG_{kp_0} = \zeta_j, j = 1, \dots, \nu, \\ dW_{lp_0} &= \sum_{k=1}^m c_{j+\nu k}dG_{kp_0} = \xi_{j+l}, j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Tome $x_j \doteq \Re Z_j, y_j \doteq \Im Z_j, j = 1, \dots, \nu, s_l \doteq \Re W_l, l = 1, \dots, d$. Assim $x_j, y_j, s_l \in C^\infty(U; \mathbb{R}), j = 1, \dots, \nu, l = 1, \dots, d$ e

$$\begin{aligned} dx_{jp} &= \Re dZ_{jp}, dy_{jp} = \Im dZ_{jp}, j = 1, \dots, \nu, \\ ds_{lp} &= \Re dW_{lp}, l = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

para $p \in U$. Logo

$$\begin{aligned} dx_{jp_0} &= \Re dZ_{jp_0} = \Re \zeta_j, dy_{jp_0} = \Im dZ_{jp_0} = \Im \zeta_j, j = 1, \dots, \nu, \\ ds_{lp_0} &= \Re dW_{lp_0} = \xi_{l+\nu}, l = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

e

$$\{dx_{1p_0}, \dots, dx_{\nu p_0}, dy_{1p_0}, \dots, dy_{\nu p_0}, ds_{1p_0}, \dots, ds_{dp_0}\} \quad \text{é LI sobre } \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

$$T_{p_0}^0 = [ds_{1p_0}, \dots, ds_{dp_0}].$$

Teorema 6.4.2. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω . Considere $p_0 \in \Omega$ e $d \doteq \dim_{\mathbb{R}} T_{p_0}^0$, então existem um sistema de coordenadas locais*

$$\{x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\},$$

com $x_j(p_0) = y_j(p_0) = s_l(p_0) = t_k(p_0) = 0, j = 1, \dots, \nu, l = 1, \dots, d, k = 1, \dots, n'$, e funções reais e suaves $\phi_1, \dots, \phi_d$, definidas numa vizinhança de p_0 tais que

$$\phi_k(p_0) = 0, d_x \phi_k(p_0) = 0, k = 1, \dots, d.$$

Além disso, as diferenciais das seguintes funções

$$\begin{aligned} Z_j(x, y) &\doteq x_j + iy_j, j = 1, \dots, \nu \\ W_k(x, y, s, t) &\doteq s_k + i\phi_k(x, y, s, t), k = 1, \dots, d \end{aligned}$$

geram $\mathcal{V}^\perp$ numa vizinhança de p_0 . Em particular, tem-se que $\nu + d = m, \nu + n' = n$ e

$$T_{p_0}^0 = [ds_{1p_0}, \dots, ds_{dp_0}].$$

Demonstração. Considere $n' = n - \nu$, (U, ψ) um sistema de coordenadas locais com $p_0 \in U$ e $\psi(p_0) = 0 \in \mathbb{R}^N$. Consequentemente, tem-se que:

$$\begin{aligned} dx_j &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial \psi_k} d\psi_k, j = 1, \dots, \nu \\ dy_j &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial y_j}{\partial \psi_k} d\psi_k, j = 1, \dots, \nu \\ ds_l &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial s_l}{\partial \psi_k} d\psi_k, l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned} b_{jk}(p) &\doteq \frac{\partial x_j}{\partial \psi_k}(p), j = 1, \dots, \nu, \\ b_{j+\nu k}(p) &\doteq \frac{\partial y_j}{\partial \psi_k}(p), j = 1, \dots, \nu, \\ b_{j+2\nu k}(p) &\doteq \frac{\partial s_j}{\partial \psi_k}(p), j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

para $p \in U, k = 1, \dots, N$. Note que tais funções são suaves e, de 6.1, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} b_{11}(p_0) & b_{21}(p_0) & \cdots & b_{m+\nu 1}(p_0) \\ b_{12}(p_0) & b_{22}(p_0) & \cdots & b_{m+\nu 2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1N}(p_0) & b_{2N}(p_0) & \cdots & b_{m+\nu N}(p_0) \end{pmatrix}$$

$p \in U$, tem posto $m + \nu$. Portanto, renomeando os índices se necessário, obtemos que a seguinte matriz $B(p)$ dada por

$$\begin{pmatrix} b_{11}(p) & b_{21}(p) & \cdots & b_{m+\nu 1}(p) \\ b_{12}(p) & b_{22}(p) & \cdots & b_{m+\nu 2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m+\nu}(p) & b_{2m+\nu}(p) & \cdots & b_{m+\nu m+\nu}(p) \end{pmatrix}$$

tem determinante não nulo em p_0 .

Tome $t_j \doteq \psi_{m+\nu+j}, j = 1, \dots, n'$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ por:

$$f(p) \doteq (x_1(p), \dots, x_\nu(p), y_1(p), \dots, y_\nu(p), s_1(p), \dots, s_d(p), t_1(p), \dots, t_{n'}(p)), p \in U.$$

Note que $Df(p_0)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} b_{11}(p_0) & b_{12}(p_0) & \cdots & b_{1m+\nu}(p_0) & b_{1m+\nu+1}(p_0) & \cdots & b_{1N}(p_0) \\ b_{21}(p_0) & b_{22}(p_0) & \cdots & b_{2m+\nu}(p_0) & b_{2m+\nu+1}(p_0) & \cdots & b_{2N}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m+\nu 1}(p_0) & b_{m+\nu 2}(p_0) & \cdots & b_{m+\nu m+\nu}(p_0) & b_{m+\nu m+\nu+1}(p_0) & \cdots & b_{m+\nu N}(p_0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

e então $\det Df(p_0) = \det B^t(p_0) \det(Id_{N-(m+\nu)}) = \det B(p_0) \neq 0$, onde $Id_{N-(m+\nu)}$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^{N-(m+\nu)}$.

Logo, pelo *Teorema da Função Inversa*, existe $V \subset U$ aberto que contém p_0 tal que $f : V \rightarrow f(V)$ é difeomorfismo e $f(V) \subset \mathbb{R}^N$ é aberto.

Para concluir a demonstração, basta tomar $\phi_k \doteq \Im W_k \in C^\infty(V), k = 1, \dots, d$, assim

$$\phi_k(p_0) = \Im \phi_k(p_0) = 0,$$

$$d\phi_{kp_0} = \Im \xi_{\nu+k} = 0,$$

$k = 1, \dots, d$. □

Nas condições do teorema acima, tem-se que

$$dW_k = \sum_{j=1}^N \frac{\partial W_k}{\partial f_j}, k = 1, \dots, d,$$

e como $dW_{kp_0} = ds_{kp_0} = df_{k+2\nu p_0}$, obtemos que

$$\frac{\partial W_k}{\partial s_l}(p_0) = \delta_{kl}, k, l = 1, \dots, d. \quad (6.2)$$

Queremos encontrar $\mu_{kk'} \in C^\infty(U)$, $k, k' = 1, \dots, d$, tais que os campos

$$M_k \doteq \sum_{k'=1}^d \mu_{kk'} \frac{\partial}{\partial k'}, k = 1, \dots, d,$$

satisfazem $M_k(W_{k'}) = \delta_{kk'}$ numa vizinhança de p_0 , para $k, k' = 1, \dots, d$.

Para tanto considere a seguinte função a valores matriciais em que $A(p)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial s_1}(p) & \frac{\partial W_1}{\partial s_2}(p) & \cdots & \frac{\partial W_1}{\partial s_d}(p) \\ \frac{\partial W_2}{\partial s_1}(p) & \frac{\partial W_2}{\partial s_2}(p) & \cdots & \frac{\partial W_2}{\partial s_d}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial W_d}{\partial s_1}(p) & \frac{\partial W_d}{\partial s_2}(p) & \cdots & \frac{\partial W_d}{\partial s_d}(p) \end{pmatrix},$$

$p \in U$, por 6.2 temos que A_{p_0} é a matriz identidade e portanto é inversível em p_0 . Como as entradas da matriz A são funções suaves, segue que A uma função suave. Unindo estes fatos obtemos que A é inversível numa vizinhança, $V \subset U$, de p_0 .

Assim para cada $p \in V$, tome $\mu_{kl}(p)$ como sendo o elemento da l -ésima linha e k -ésima coluna da matriz $A^{-1}(p)$. Logo

$$\sum_{l=1}^d \mu_{kl}(p) \frac{\partial W_{k'}}{\partial s_l}(p)$$

será o elemento da k -ésima linha e k' -ésima coluna da matriz $A^{-1}(p)A(p) = I_d$, ou seja, será igual a $\delta_{kk'}$.

Considere os seguintes campos vetoriais

$$\begin{aligned} L_j &\doteq \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} - i \sum_{k=1}^d \frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{Z}_j} M_k, j = 1, \dots, \nu \\ \tilde{L}_l &\doteq \frac{\partial}{\partial t_l} - i \sum_{k=1}^d \frac{\partial \phi_k}{\partial t_l} M_k, l = 1, \dots, n'. \end{aligned}$$

Proposição 6.4.3. *O conjunto $\{L_{1p}, \dots, L_{\nu p}, \tilde{L}_{1p}, \dots, \tilde{L}_{n'p}\}$ é linearmente independente para todo $p \in V$ e além disso*

$$L_j Z_{j'} = \tilde{L}_l Z_{j'} = L_j W_k = \tilde{L}_l W_k = 0,$$

para $j, j' = 1, \dots, \nu, k = 1, \dots, d, l = 1, \dots, n'$.

Demonstração. Com efeito, primeiramente observe que

$$M_k Z_j = \sum_{l=1}^d \mu_{kl} \frac{\partial Z_j}{\partial s_l} = 0 = \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{Z}_j} = \frac{\partial Z_j}{\partial t_l}$$

e então $L_j Z_{j'} = \tilde{L}_l Z_j = 0, j, j' = 1, \dots, \nu, l = 1, \dots, n'$. Além disso,

$$\begin{aligned} L_j W_k &= \frac{\partial W_k}{\partial \bar{Z}_j} - i \frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{Z}_j} = \frac{\partial s_k}{\partial \bar{Z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_k}{\partial x_j} + i \frac{\partial s_k}{\partial y_j} \right) = 0 \\ \tilde{L}_l W_k &= \frac{\partial W_k}{\partial t_l} - i \frac{\partial \phi_k}{\partial t_l} = \frac{\partial s_k}{\partial t_l} = 0. \end{aligned}$$

Resta mostrar que os campos são linearmente independentes em cada ponto $p \in V$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_1, \dots, \beta_{n'} \in \mathbb{C}$ e $p \in V$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j L_{jp} + \sum_{l=1}^{n'} \beta_l \tilde{L}_{lp} = 0,$$

assim

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_{jp}} + i \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha_j}{2} \frac{\partial}{\partial y_{jp}} - iC \sum_{k'=1}^d \mu_{kk'}(p) \frac{\partial}{\partial s_{k'p}} + \sum_{l=1}^{n'} \beta_l \frac{\partial}{\partial t_{lp}} = 0,$$

sendo que

$$C = \left(\sum_{j,k=1}^{\nu} \alpha_j \frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{Z}_j}(p) \sum_{l,k=1}^{\nu} \beta_l \frac{\partial \phi_k}{\partial t_l}(p) \right).$$

Como $(x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'})$ é um sistema de coordenadas locais segue que $\alpha_j = \beta_l = 0, j = 1, \dots, \nu, l = 1, \dots, n'$.

□

Segue da proposição acima que

$$dZ_{j'p}(L_{jp}) = dW_{kp}(L_{jp}) = dZ_{j'p}(\tilde{L}_{lp}) = dW_{kp}(\tilde{L}_{lp}) = 0,$$

para $j, j' = 1, \dots, \nu, k = 1, \dots, d, l = 1, \dots, n', p \in V$.

Dessa forma,

$$\{L_{1p}, \dots, L_{\nu p}, \tilde{L}_{1p}, \dots, \tilde{L}_{n'p}\} \subset \mathcal{V}_p$$

e como $\mathcal{V}_p$ tem dimensão igual $n = \nu + n'$ obtemos que

$$\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{\nu p}, \tilde{L}_{1p}, \dots, \tilde{L}_{n'p}], p \in V.$$

Proposição 6.4.4. *Seja $p \in V$, então*

$$\{dZ_{1p}, \dots, dZ_{\nu p}, d\bar{Z}_{1p}, \dots, d\bar{Z}_{\nu p}, dW_{1p}, \dots, dW_{dp}, dt_{1p}, \dots, dt_{n'p}\} \quad (6.3)$$

é uma base para $\mathbb{C}T_p^* \Omega$ e

$$\{L_1^b, \dots, L_\nu^b, L_1, \dots, L_\nu, \tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{n'}, M_1, \dots, M_d\} \quad (6.4)$$

é a sua base dual, em que

$$L_j^b \doteq \frac{\partial}{\partial Z_j} - i \sum_{k=1}^d \frac{\partial \phi_k}{\partial Z_j} M_k, j = 1, \dots, \nu.$$

Além disso, os campos $L_1, \dots, L_\nu, L_1^b, \dots, L_\nu^b, \tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{n'}, M_1, \dots, M_d$ são comutativos, ou seja, seu comutador $[\cdot, \cdot]$ é nulo.

Demonstração. De fato, sejam $p \in V$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_1, \dots, \beta_\nu, \gamma_1, \dots, \gamma_d, \delta_1, \dots, \delta_{n'} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j dZ_{jp} + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j d\bar{Z}_{jp} + \sum_{j=1}^d \gamma_j dW_{jp} + \sum_{j=1}^{n'} \delta_j dt_{jp} = 0.$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{\nu} \beta_j d\bar{Z}_{jp} + \sum_{j=1}^{n'} \delta_j dt_{jp} = - \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j dZ_{jp} - \sum_{j=1}^d \gamma_j dW_{jp} \in \mathcal{V}_p^\perp,$$

para cada $l = 1, \dots, n'$, calculando em $\tilde{L}_{lp}$ obtemos

$$\delta_l = \sum_{j=1}^{n'} \delta_j dt_{jp}(\tilde{L}_{lp}) = 0,$$

pois $\tilde{L}_{lp} \in \mathcal{V}_p$ e $d\bar{Z}_{jp}(\tilde{L}_{lp}) = 0, j = 1, \dots, \nu$.

Por outro lado, calculando a mesma expressão em L_{lp} obtemos

$$\beta_l = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j d\bar{Z}_{jp}(L_{lp}) = 0, l = 1, \dots, \nu.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j dZ_{jp} + \sum_{j=1}^d \gamma_j dW_{jp} = 0,$$

como os vetores $dZ_{1p}, \dots, dZ_{\nu p}, dW_{1p}, \dots, dW_{dp}$ formam uma base para $\mathcal{V}_p^\perp$ concluímos que $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \gamma_1, \dots, \gamma_d$ são todos nulos.

Mostremos agora que 6.4 é base dual de 6.3. Para tanto, seja $p \in V$. Assim

$$\begin{aligned} dZ_{kp}(L_{lp}^b) &= \delta_{jk}, dZ_{kp}(L_{jp}) = 0, l, j, k = 1, \dots, \nu \\ dZ_{kp}(\tilde{L}_{lp}) &= 0, dZ_{kp}(M_{jp}) = 0, k = 1, \dots, \nu, j = 1, \dots, d, l = 1, \dots, n' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{Z}_{kp}(L_{lp}^b) &= 0, d\bar{Z}_{kp}(L_{jp}) = \delta_{jk}, l, j, k = 1, \dots, \nu \\ d\bar{Z}_{kp}(\tilde{L}_{lp}) &= 0, d\bar{Z}_{kp}(M_{jp}) = 0, k = 1, \dots, \nu, j = 1, \dots, d, l = 1, \dots, n' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dW_{kp}(L_{lp}^b) &= 0, dW_{kp}(L_{jp}) = 0, l, j = 1, \dots, \nu, k = 1, \dots, d \\ dW_{kp}(\tilde{L}_{lp}) &= 0, dW_{kp}(M_{jp}) = \delta_{jk}, j, k = 1, \dots, d, l = 1, \dots, n' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt_{kp}(L_{lp}^b) &= 0, dt_{kp}(L_{jp}) = 0, k = 1, \dots, n', j = 1, \dots, \nu \\ dt_{kp}(\tilde{L}_{lp}) &= \delta_{kl}, dt_{kp}(M_{jp}) = 0, j = 1, \dots, d, l, k = 1, \dots, n', \end{aligned}$$

que é suficiente para concluir que 6.4 é a base dual de 6.3.

Por fim, observe que tais campos são comutativos entre si. Com efeito, como qualquer campo $L \in \mathfrak{X}(U)$ pode ser escrito da forma

$$L_p = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j L_{jp}^b + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j L_{jp} + \sum_{l=1}^{n'} \xi_l \tilde{L}_{jp} + \sum_{k=1}^{\nu} \zeta_k L_{kp}^b, \quad (6.5)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_j &= dZ_j(L)(p), \beta_j = d\bar{Z}_j(L)(p), j = 1, \dots, \nu \\ \xi_l &= dt_l(L)(p), l = 1, \dots, n', \zeta_k = dW_k(L)(p), k = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

basta mostrar que as diferenciais dos comutadores dos campos se anulam em cada $p \in V$.

Note que

$$\begin{aligned} dZ_k([L_j, L_{j'}]) &= dt_l([L_j, L_{j'}]) = dW_{k'}([L_j, L_{j'}]) = 0, \\ d\bar{Z}_k([L_j, L_{j'}]) &= L_j(\delta_{kj'}) - L_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{Z}_k([L_j^b, L_{j'}^b]) &= dt_l([L_j^b, L_{j'}^b]) = dW_{k'}([L_j^b, L_{j'}^b]) = 0, \\ dZ_k([L_j^b, L_{j'}^b]) &= L_j^b(\delta_{kj'}) - L_{j'}^b(\delta_{kj}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dZ_k([\tilde{L}_j, \tilde{L}_{j'}]) &= d\bar{Z}_l([\tilde{L}_j, \tilde{L}_{j'}]) = dW_{k'}([\tilde{L}_j, \tilde{L}_{j'}]) = 0, \\ dt_k([\tilde{L}_j, \tilde{L}_{j'}]) &= \tilde{L}_j(\delta_{kj'}) - \tilde{L}_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dZ_k([M_j, M_{j'}]) &= dt_l([M_j, M_{j'}]) = d\bar{Z}_{k'}([M_j, M_{j'}]) = 0, \\ dW_k([M_j, M_{j'}]) &= M_j(\delta_{kj'}) - M_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt_l([L_j, L_{j'}^b]) &= dW_{k'}([L_j, L_{j'}^b]) = 0, \\ d\bar{Z}_k([L_j, L_{j'}^b]) &= L_j(0) - L_{j'}^b(\delta_{kj}) = 0, \\ dZ_k([L_j, L_{j'}^b]) &= L_j(\delta_{kj'}) - L_{j'}^b(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dZ_k([L_j, \tilde{L}_{j'}]) &= dW_{k'}([L_j, \tilde{L}_{j'}]) = 0, \\ d\bar{Z}_k([L_j, \tilde{L}_{j'}]) &= L_j(0) - \tilde{L}_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \\ dt_l([L_j, \tilde{L}_{j'}]) &= L_j(\delta_{lj'}) - \tilde{L}_{j'}(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{Z}_k([L_j^b, \tilde{L}_{j'}]) &= dW_{k'}([L_j^b, \tilde{L}_{j'}]) = 0, \\ dZ_k([L_j^b, \tilde{L}_{j'}]) &= L_j^b(0) - \tilde{L}_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \\ dt_l([L_j^b, \tilde{L}_{j'}]) &= L_j^b(\delta_{lj'}) - \tilde{L}_{j'}(0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dZ_k([L_j, M_{j'}]) &= dt_l([L_j, M_{j'}]) = 0, \\
d\bar{Z}_k([L_j, M_{j'}]) &= L_j(0) - M_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \\
dW_{k'}([L_j, M_{j'}]) &= L_j(\delta_{k'j'}) - M_{j'}(0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\bar{Z}_k([L_j^b, M_{j'}]) &= dt_l([L_j^b, M_{j'}]) = 0, \\
dZ_k([L_j^b, M_{j'}]) &= L_j^b(0) - M_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \\
dW_{k'}([L_j^b, M_{j'}]) &= L_j^b(\delta_{k'j'}) - M_{j'}(0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\bar{Z}_k([\tilde{L}_j, M_{j'}]) &= dZ_k([\tilde{L}_j, M_{j'}]) = 0, \\
dt_l([\tilde{L}_j, M_{j'}]) &= \tilde{L}_j(0) - M_{j'}(\delta_{lj}) = 0, \\
dW_{k'}([\tilde{L}_j, M_{j'}]) &= \tilde{L}_j(\delta_{k'j'}) - M_{j'}(0) = 0,
\end{aligned}$$

mostrando que todos os colchetes são nulos e concluindo a demonstração. $\square$

Como consequência do Teorema 6.4.2, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 6.4.5. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω . Considere $p_0 \in \Omega$ e $d \doteq \dim_{\mathbb{R}} T_{p_0}^0$, então existem um sistema de coordenadas locais*

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\},$$

com $x_j(p_0) = t_k(p_0) = 0, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$, e funções reais, suaves $\phi_1, \dots, \phi_m$, definidas numa vizinhança de p_0 tais que

$$\phi_k(p_0) = 0, d_x \phi_{kp_0} = 0, k = 1, \dots, m.$$

Além disso, as diferenciais das seguintes funções

$$Z_j(x, t) \doteq x_j + i\phi_j(x, t), j = 1, \dots, m$$

geram $\mathcal{V}^\perp$ numa vizinhança de p_0 .

Demonstração. Sejam $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω e $p_0 \in \Omega$. Pelo Teorema 6.4.2, existem $U \subset \Omega$ aberto que contém p_0 , funções $Z_1, \dots, Z_\nu, W_1, \dots, W_d \in C^\infty(U)$ tais que

$$\mathcal{V}_p^\perp = [dZ_1, \dots, dZ_\nu, dW_1, \dots, dW_d], p \in U.$$

Além disso, existem $\phi_k(p_0) = d\phi_{kp_0} = 0, k = 1, \dots, d$, a função

$$f \doteq (x_1, \dots, x_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}, y_1, \dots, y_\nu)$$

forma um sistema de coordenadas locais com $f(p_0) = 0$, onde $n' = n - \nu$,

$$x_j = \Re Z_j, y_j = \Im Z_j, j = 1, \dots, \nu, s_k = \Re W_k$$

e ainda vale

$$T_{p_0}^0 = [ds_1, \dots, ds_d].$$

Tome

$$\begin{aligned} x_{j+\nu} &\doteq s_j, j = 1, \dots, d, \\ \phi_k &\doteq y_k, k = 1, \dots, \nu, \\ \phi_{k+\nu} &\doteq \Im W_k, k = 1, \dots, d, \\ t_{j+n'} &\doteq y_j, j = 1, \dots, \nu, \\ Z_{k+\nu} &\doteq W_k, k = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} f &= (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) \\ Z_j &= x_j + i\phi_j, j = 1, \dots, m, \\ \phi_k(p_0) &= 0, k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p^\perp &= [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], p \in U \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(p_0) &= 0, j, k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

□

Nas condições do teorema acima, denote

$$Z(x, t) \doteq (Z_1(x, t), \dots, Z_m(x, t)).$$

Dessa maneira, tem-se que

$$\frac{\partial Z_j}{\partial x_k}(p_0) = \delta_{jk}, j, k = 1, \dots, m,$$

pois $d_x \phi_{kp_0} = 0, k = 1, \dots, m$, ou seja, $Z_x(p_0) = Id_m$.

Pelo mesmo argumento utilizado acima, existem, numa vizinhança U de p_0 , funções $\mu_{kl} \in C^\infty(U)$ tais que $M_k(Z_j) = \delta_{jk}, j, k = 1, \dots, m$, onde

$$M_k \doteq \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Defina os campos

$$L_j \doteq \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j} M_l, j = 1, \dots, n.$$

Então temos o seguinte resultado:

Proposição 6.4.6. *Considere os conjuntos $S \doteq \{L_{1p}, \dots, L_{np}, M_{1p}, \dots, M_{mp}\}$ e $S^* \doteq \{dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}, dt_{1p}, \dots, dt_{np}\}$. Então S é linearmente independente em $\mathbb{C}T_p\Omega$ e S^* é linearmente independente em $\mathbb{C}T_p^*\Omega$, para todo $p \in U$, vale*

$$L_j Z_k = M_k t_j = 0, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m,$$

$$\{dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}, dt_{1p}, \dots, dt_{np}\}$$

é uma base para $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ e

$$\{L_{1p}, \dots, L_{np}, M_{1p}, \dots, M_{mp}\}$$

é a sua base dual. Além disso, os campos $L_1, \dots, L_n, M_1, \dots, M_m$ são comutativos, ou seja, seu comutador $[\cdot, \cdot]$ é nulo.

Demonstração. Inicialmente, observe que $M_k t_j = 0, L_j Z_k = 0, M_k Z_l = \delta_{kl}$ e $L_j t_k = \delta_{jk}$, pois

$$\frac{\partial t_j}{\partial x_l} = 0$$

e

$$\frac{\partial Z_k}{\partial t_j} - i \sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j} M_l Z_k = i \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} - i \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j} = 0.$$

Sejam $p \in U, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j dt_{jp} + \sum_{k=1}^m \beta_k dZ_{kp} = 0.$$

Calculando em L_{jp} obtemos que $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, n$ e calculando em M_{kp} obtemos que $\beta_k = 0, k = 1, \dots, m$.

Assim S^* é linearmente independente e como tal conjunto tem N elementos, concluímos que tal conjunto é base de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$.

Agora como $dZ_{kp}(L_{jp}) = L_j(Z_k)(p) = 0, dt_{jp}(M_{kp}) = M_k(t_j)(p) = 0, dZ_{kp}(M_{jp}) = M_j(Z_k)(p) = \delta_{jk}, dt_{jp}(L_{kp}) = L_k(t_j)(p) = \delta_{jk}$ e do fato de S^* ser base de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$, segue que S é sua base dual.

Por fim, mostremos que os campos são comutativos, para concluirmos este fato, como em 6.5, é suficiente mostrar que as diferenciais dos comutadores se anulam.

Note que

$$\begin{aligned} dZ_k([L_j, L_{j'}]) &= 0, dZ_k(L_j, M_{j'}) = L_j(\delta_{kj'}) - M_{j'}(0) = 0, \\ dZ_k([M_j, M_{j'}]) &= M_j(\delta_{kj'}) - M_{j'}(\delta_{kj}) = 0 \\ dt_k([M_j, M_{j'}]) &= 0, dt_k(L_j, M_{j'}) = L_j(0) - M_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \\ dt_k([L_j, L_{j'}]) &= L_j(\delta_{kj'}) - L_{j'}(\delta_{kj}) = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 6.4.7. Observe que se estivermos nas condições da proposição acima, segue que

$$\mathcal{V}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}], p \in U,$$

pois $dZ_{kp}(L_{jp}) = 0$ e $\{L_{1p}, \dots, L_{np}\}$ é linearmente independente.

A seguir apresentaremos alguns lemas que são de suma importância na demonstração da versão clássica do *Teorema de Baouendi-Treves*.

Primeiramente, se $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$ denotamos

$$[\zeta]^2 \doteq \sum_{j=1}^m \zeta_j^2,$$

suponha que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$ que contém a origem, $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável sobre Ω e fixe $p_0 = 0$. Observe que estamos nas condições de 6.4.5 e 6.4.6.

Para cada $\tau \in (0, +\infty)$, considere o seguinte operador:

$$G_\tau u(x, t) \doteq \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx', u \in C^1(W),$$

onde $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ com $h(x) = 0, |x| \geq R$ e $h = 1$ numa vizinhança do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^m; |x| \leq R/2\},$$

tal R será determinado mais adiante, W é aberto de Ω que contém a origem em que a função $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ está definida e $Z_x(x, t)$ é a matriz jacobiana na variável x desta função calculada em $(x, t) \in W$.

Se $L \in \mathfrak{X}(W)$ denote

$$[G_\tau, L] \doteq G_\tau(L) - L(G_\tau),$$

$$[L, G_\tau] \doteq L(G_\tau) - G_\tau(L).$$

Lema 6.4.8. Para $u \in C^1(W)$ e $k = 1, \dots, m$ vale

$$[M_k, G_\tau]u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) M_k h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Demonstração. Observe que se

$$F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C},$$

for uma função inteira, $g \in C(W; \mathbb{C}^m)$, $L \in \mathfrak{X}(W)$ e ξ denota o sistema de coordenadas locais de W , então

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}, a_j \in C^\infty(W),$$

e como

$$\begin{aligned}\frac{\partial(F \circ g)}{\partial \xi_j}(p) &= \frac{\partial(F \circ g \circ \xi^{-1})}{\partial e_j} \circ \xi(p) = F'(g(p)) \frac{\partial(g \circ \xi^{-1})}{\partial e_j} \circ \xi(p) = \\ &= \left(F' \circ g \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right)(p), p \in W, j = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

assim $L(F \circ g) = (F' \circ g)Lg$.

Denotaremos por $M_k(x', t, D_{x'})$ o operador M_k atuando nas variáveis (x', t) , ou seja,

$$M_k(x', t, D_{x'}) \doteq \sum_{l=1}^m \mu_{kl}(x', t) \frac{\partial}{\partial x'_l}, k = 1, \dots, m.$$

Dessa maneira, para $k, j = 1, \dots, m$ tem-se que

$$M_k(x, t, D_x)(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) = \delta_{jk} - \sum_{l=1}^m \mu_{kl}(x, t) \frac{\partial(x'_j + i\phi_j(x', t))}{\partial x_l} = \delta_{jk},$$

analogamente

$$M_k(x', t, D_{x'})(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) = -\delta_{jk},$$

logo

$$M_k(x, t, D_x)(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) = -M_k(x', t, D_{x'})(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)) = \delta_{jk}. \quad (6.6)$$

Seja $F(\zeta) \doteq e^{-\tau[\zeta]^2}$, que é uma função inteira. Então

$$\begin{aligned}&M_k(x, t, D_x)(F(Z(x, t) - Z(x', t))) = \\ &= -2\tau(F(Z(x, t) - Z(x', t))\left(\sum_{j=1}^m (Z_j(x, t) - Z_j(x', t))\right)M_k(x, t, D_x)(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)),\end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}&M_k(x', t, D_{x'})(F(Z(x, t) - Z(x', t))) = \\ &= -2\tau(F(Z(x, t) - Z(x', t))\left(\sum_{j=1}^m (Z_j(x, t) - Z_j(x', t))\right)M_k(x', t, D_{x'})(Z_j(x, t) - Z_j(x', t)),\end{aligned}$$

e de 6.6 conclui-se que

$$M_k(x, t, D_x)(F(Z(x, t) - Z(x', t))) = -M_k(x', t, D_{x'})(F(Z(x, t) - Z(x', t))).$$

O fato de h ter suporte compacto faz com que, para qualquer função $u \in C^1(W)$, $G_\tau u$ tenha suporte compacto e portanto é uma função uniformemente contínua na variável x , assim podemos derivar sob o sinal de integração e obter que

$$\begin{aligned}M_k G_\tau u(x, t) &= \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} M_k(x, t, D_x)(F(Z(x, t) - Z(x', t)))u(x', t)h(x') \det Z_x(x', t) dx' = \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} -M_k(x', t, D_{x'})(F(Z(x, t) - Z(x', t)))u(x', t)h(x') \det Z_x(x', t) dx' .\end{aligned}$$

Afirmamos que para cada $(x, t) \in W$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} M_k(v) w dZ = - \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} M_k(w) v dZ, \quad (6.7)$$

em que $v, w \in C^1(W)$ e uma delas tem suporte compacto.

Agora note que

$$\begin{aligned} M_k G_\tau u(x, t) &= \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} -M_k(x', t, D_{x'}) F(Z(x, t) - Z(x', t)) u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx' = \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} -i_t^*(M_k(x', t, D_{x'}) F(Z(x, t) - Z(x', t))) (i_t^* u)(x') i_t^* h(x') (i_t^* dZ)(x'), \end{aligned}$$

sendo que i_t^* denota o *pull-back* pela função $i_t(x) = (x, t)$.

Portanto, a expressão acima é igual a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} -M_k(x', t, D_{x'}(F(Z(x, t) - Z(x', t)))) u(x', t) h(x') dZ = \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} F(Z(x, t) - Z(x', t)) M_k(u(x', t) h(x')) dZ = \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} F(Z(x, t) - Z(x', t)) (M_k(u(x', t)) h(x') + u(x', t) M_k h(x')) dZ = \\ &= G_\tau M_k u(x, t) + \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) M_k h(x') \det Z_x(x', t) dx', \end{aligned}$$

concluindo o lema.

Resta provar que 6.7 é verdadeira.

Sejam $v, w \in C^1(W)$ uma delas com suporte compacto e considere, para cada $k = 1, \dots, m$, a seguinte m -forma é uma diferencial exata

$$\begin{aligned} \omega_k &\doteq d(uv dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m) = \\ &= d(uv) \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m, \end{aligned}$$

ou seja, ω_k é a derivada exterior da $(m-1)$ -forma diferencial

$$\tilde{\omega}_k \doteq uv dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m.$$

Como $uv \in C^1(W)$, tem-se que

$$d(uv) = \sum_{j=1}^n L_j(uv) dt_j + \sum_{l=1}^m M_l(uv) dZ_l,$$

logo

$$\omega_k = \left(\sum_{j=1}^n L_j(uv) dt_j + \sum_{l=1}^m M_l(uv) dZ_l \right) \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m.$$

Além disso, temos $i_t^* dt_j = d(i_t^* t_j) = 0, j = 1, \dots, n$, e assim

$$i_t^*(dt_j \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m) = d(i_t^* t_j) \wedge d(i_t^* Z_1) \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge d(i_t^* Z)_m = 0.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
i_t^* \omega_k &= i_t^* \left(\sum_{j=1}^n L_j(uv) dt_j \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^m M_l(uv) dZ_l \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m \right) = \\
&= i_t^* M_l(uv) i_t^* (dZ_k \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge \hat{dZ}_k \wedge \dots \wedge dZ_m) = \\
&= (-1)^{k+1} i_t^* M_k(uv) i_t^* dZ
\end{aligned}$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} \omega_k = \int_{\mathbb{R}^m} i_t^* \omega_k = \int_{\mathbb{R}^m} i_t^* d\tilde{\omega}_k = \int_{\mathbb{R}^m} d(i_t^* \tilde{\omega}_k) = 0.$$

Em outras palavras, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} i_t^* (vM_k u + uM_k v) i_t^* dZ &= (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^m} (-1)^{k+1} i_t^* (vM_k u + uM_k v) i_t^* dZ \\
&= (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^m} d(i_t^* \tilde{\omega}_k) = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} vM_k u dZ &= \int_{\mathbb{R}^m} i_t^* (vM_k u) i_t^* dZ = - \int_{\mathbb{R}^m} i_t^* (uM_k v) i_t^* dZ = \\
&= - \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} uM_k v dZ,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Antes de enunciarmos o próximo lema, vamos simplificar a notação dos campos L_j . Tais campos são da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j} \mu_{lk} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

ou seja,

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

em que

$$\lambda_{jk} \doteq -i \sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j} \mu_{lk}, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Vamos calcular o operador transposto de L_j , ou seja, o operador denotado por tL_j tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (L_j u) v dx dt = \int_{\mathbb{R}^N} u ({}^tL_j v) dx dt,$$

para quaisquer u, v funções suaves e uma delas com suporte compacto. Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (L_j u) v dx dt &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial t_j} v dx dt + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} v dx dt = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial t_j} u dx dt - \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial(\lambda_{jk} v)}{\partial x_k} u dx dt = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u \left(\frac{\partial v}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} v)}{\partial x_k} \right) dx dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$${}^t L_j v = - \frac{\partial v}{\partial t_j} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} v)}{\partial x_k}.$$

Lema 6.4.9. Para cada $j = 1, \dots, n$ vale

$$\frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} = 0. \quad (6.8)$$

Demonstração. Seja $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e considere a N -forma a seguir

$$\begin{aligned} \omega_j &\doteq d(v dZ \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \hat{dt}_j \wedge \dots \wedge dt_n) = \\ &= dv \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \hat{dt}_j \wedge \dots \wedge dt_n. \end{aligned}$$

Mas como

$$dv = \sum_{j=1}^n L_j v dt_j + \sum_{k=1}^m M_k v dZ_k,$$

temos

$$\begin{aligned} \omega_j &= L_j v dt_j \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \hat{dt}_j \wedge \dots \wedge dt_n = \\ &= (-1)^{m+j-1} L_j(v) dZ \wedge dt = (-1)^{m+j-1} L_j(v) \det Z_x dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Como ω_j é uma N -forma exata sua integral em $\mathbb{R}^N$ é zero. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v {}^t L_j(\det Z_x) dx dt &= \int_{\mathbb{R}^N} (L_j v) \det Z_x dx dt = \\ &= (-1)^{m+j-1} \int_{\mathbb{R}^N} \omega_j = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v {}^t L_j(\det Z_x) dx dt = 0, \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e portanto

$$\frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} = - {}^t L_j(\det Z_x) = 0.$$

□

Lema 6.4.10. Para $u \in C^1(W)$ e $j = 1, \dots, n$ vale

$$[L_j, G_\tau]u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Observação 6.4.11. Seja $\tilde{g}(\zeta, t)$ uma função suave definida em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$, ou seja, holomorfa com respeito a $\zeta \in \mathbb{C}^m$ e suave com respeito a $t \in \mathbb{R}^n$. Defina

$$g(x, t) \doteq \tilde{g}(Z(x, t), t), (x, t) \in W.$$

Então

$$\frac{\partial g}{\partial t_j}(x_0, t_0) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x_0, t_0), t_0) + D_\zeta \tilde{g}(Z(x_0, t_0), t_0) \frac{\partial Z}{\partial t_j}(x_0, t_0).$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x_0, t_0) = D_\zeta \tilde{g}(Z(x_0, t_0), t_0) \frac{\partial Z}{\partial x_k}(x_0, t_0).$$

Logo

$$\begin{aligned} L_j g(x, t) &= \frac{\partial g}{\partial t_j}(x, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}(x, t) \frac{\partial g}{\partial x_k}(x, t) = \\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x, t), t) + D_\zeta \tilde{g}(Z(x, t), t) \left(\frac{\partial Z}{\partial t_j}(x, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}(x, t) \frac{\partial Z}{\partial x_k}(x, t) \right) = \\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x, t), t) + D_\zeta \tilde{g}(Z(x, t), t) (L_j Z_1(x, t), \dots, L_j Z_m(x, t)) = \\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x, t), t), (x, t) \in W. \end{aligned}$$

Agora faremos a prova do lema anterior.

Demonstração. Para cada $\tau \in (0, +\infty)$, $u \in C^1(W)$ o operador

$$\tilde{G}_\tau u(\zeta, t) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx', \zeta \in \mathbb{C}^m.$$

Temos que, se $u \in C^1(W)$, então $\tilde{G}_\tau u(\zeta, t)$ é uma função holomorfa nas variáveis ζ , suave na variável t e

$$G_\tau u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{m/2} \tilde{G}_\tau u(Z(x, t), t), (x, t) \in W,$$

logo, pela observação anterior, obtemos

$$L_j(G_\tau u)(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{m/2} \frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t).$$

Derivando sob o sinal de integração encontramos

$$\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t) = \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial t_j} \left(e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) \right) dx'.$$

Defina

$$e_\tau(\zeta, x', t) \doteq e^{-\tau[\zeta - Z(x', t)]^2},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_\tau u h \det Z_x)}{\partial t_j} &= \frac{\partial(e_\tau u h)}{\partial t_j} \det Z_x + \frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j} e_\tau h u = \\ &= L_j(e_\tau h u) \det Z_x - \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau u h)}{\partial x_k} \det Z_x + \frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j} e_\tau h u. \end{aligned}$$

Observação 6.4.12. *Note que, por 6.8, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t) &= \int_{\mathbb{R}^m} L_j(e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) \det Z_x(x', t) dx' - \\
&- \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}(x', t) \frac{\partial(e_\tau u h)}{\partial x_k}(Z(x, t), x', t) \det Z_x(x', t) dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j}(x', t) (e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) dx' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} L_j(e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) \det Z_x(x', t) dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} (e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k}(x', t) \right) + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} (e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) \frac{\partial(\det Z_x)}{\partial t_j}(x', t) dx' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} L_j(e_\tau h u)(Z(x, t), x', t) \det Z_x(x', t) dx'.
\end{aligned}$$

Como

$$L_j(e_\tau u h)(Z(x, t), x', t) = e_\tau(Z(x, t), x', t) (L_j u(x', t) h(x') + u(x', t) L_j h(x')),$$

pois

$$L_j Z = (L_j Z_1, \dots, L_j Z_m) = (0, \dots, 0),$$

e pela observação acima concluímos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t) &= \int_{\mathbb{R}^m} (e_\tau(L_j u) h \det Z_x)(Z(x, t), x', t) dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} (e_\tau u(L_j h) \det Z_x)(Z(x, t), x', t) dx' = \\
&= \tilde{G}_\tau L_j u(Z(x, t), t) + \int_{\mathbb{R}^m} (e_\tau u(L_j h) \det Z_x)(Z(x, t), x', t) dx'.
\end{aligned}$$

Portanto, multiplicando a última expressão por $(\tau/\pi)^{m/2}$ e subtraindo $G_\tau L_j u$ obtemos

$$[L_j, G_\tau]u(x, t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

□

Defina, para cada $u \in C^1(W)$, o seguinte operador:

$$H_{\tau f} u(\zeta, t) = \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(\zeta, x', t) u(x', t) f(x') \det Z_x(x', t) dx',$$

em que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que f tem suporte contido no suporte de h .

Tem-se que $H_{\tau f}u$ é holomorfa nas variáveis ζ e suave nas variáveis t . Além disso,

$$\begin{aligned} G_{\tau}u(x, t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau h}u(Z(x, t), t), \\ [M_k, G_{\tau}]u(x, t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau M_k h}u(Z(x, t), t), \\ [L_j, G_{\tau}]u(x, t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau L_j h}u(Z(x, t), t), \end{aligned}$$

para $(x, t) \in W, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$.

Observe que

$$L_j M_k G_{\tau}u = L_j [M_k, G_{\tau}]u + L_j G_{\tau} M_k u,$$

e então

$$L_j [M_k, G_{\tau}]u(x, t) = L_j (\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau M_k h}u(Z(x, t), t) = (\tau/\pi)^{m/2} \frac{\partial H_{\tau M_k h}}{\partial t_j}(Z(x, t), t),$$

para $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$.

Repetindo o mesmo raciocínio para o operador $H_{\tau M_k h}$, encontramos

$$\frac{\partial H_{\tau M_k h}}{\partial t_j}(Z(x, t), t) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial t_j} (e_{\tau}(Z(x, t), x', t) u(x', t) M_k h(x') \det Z_x(x', t)) dx'$$

e analogamente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\tau M_k h}}{\partial t_j}(Z(x, t), t) &= \int_{\mathbb{R}^m} L_j(e_{\tau} u M_k h)(Z(x, t), x', t) \det Z_x(x', t) dx' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (e_{\tau} L_j u M_k \det Z_x)(Z(x, t), x', t) dx' + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^m} (e_{\tau} u L_j M_k \det Z_x)(Z(x, t), x', t) dx' = \\ &= H_{\tau M_k h} L_j(Z(x, t), t) + H_{\tau L_j M_k h}(Z(x, t), t). \end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$M_k L_j G_{\tau}u = M_k [L_j, G_{\tau}]u + M_k G_{\tau} L_j u,$$

e então

$$M_k [L_j, G_{\tau}]u(x, t) = M_k (\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_j h}u(Z(x, t), t),$$

para $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$.

Analogamente, para o operador $H_{\tau L_j h}$, encontramos

$$\begin{aligned}
M_k(x, t, D_x) \quad H_{\tau L_j h} \quad (Z(x, t), t) &= \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} M_k(x, t, D_x)(e_\tau)(Z(x, t), x', t)u(x', t)L_j h(x') \det Z_x(x', t)dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} -M_k(x', t, D_{x'})(e_\tau)(Z(x, t), x', t)u(x', t)L_j h(x')dZ(x', t)dx' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t)M_k(x', t, D_{x'})(u(x', t)L_j h(x'))dZ(x', t)dx' = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t)M_k u(x', t)L_j h(x') \det Z_x(x', t)dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t)u(x', t)M_k L_j h(x') \det Z_x(x', t)dx' = \\
&= H_{\tau L_j h} M_k u(Z(x, t), t) + H_{\tau M_k L_j} u(Z(x, t), t).
\end{aligned}$$

Observação 6.4.13. *Resumidamente, obtivemos que*

$$\begin{aligned}
L_j H_{\tau f} u &= H_{\tau L_j f} u + H_{\tau f} L_j u, \\
M_k H_{\tau f} u &= H_{\tau M_k f} u + H_{\tau f} M_k u.
\end{aligned}$$

Tais fatos nos levam ao seguinte resultado

Lema 6.4.14. *Para quaisquer $s, r \in \mathbb{N}$, vale a igualdade*

$$\begin{aligned}
L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} G_\tau u &= [L_{j_1}, G_\tau] L_{j_2} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u + \dots \\
&+ L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_{r-1}} [M_{k_r}, G_\tau] u + \\
&+ G_\tau L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Demonstração. A prova será feita por indução finita. Observe que, como os campos são comutativos entre si e como já provamos o caso em que $s, r = 1$, basta que provemos a validade da fórmula para uma quantidade $s + r + 1$ qualquer de campos.

Denote

$$\begin{aligned}
L_J &\doteq L_{j_1} \dots L_{j_s}, \\
M_K &\doteq M_{k_1} \dots M_{k_r}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
L_{j_0} L_J M_K G_\tau u &= L_{j_0} [L_{j_1}, G_\tau] L_{j_2} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u + \dots \\
&+ L_{j_0} L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_{r-1}} [M_{k_r}, G_\tau] u + \\
&+ L_{j_0} G_\tau L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u = \\
&= [L_{j_0}, G_\tau] L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u + \\
&+ L_{j_0} [L_{j_1}, G_\tau] L_{j_2} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u + \dots \\
&+ L_{j_0} L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_{r-1}} [M_{k_r}, G_\tau] u + \\
&+ G_\tau L_{j_0} L_{j_1} \dots L_{j_s} M_{k_1} \dots M_{k_r} u.
\end{aligned}$$

□

Agora mostraremos que se $u \in C^\infty(W)$ então a função $G_\tau u$ converge, na topologia $C^\infty(U)$, para u quando $\tau \rightarrow \infty$ em que $U \subset \Omega$ que contém a origem.

Para tanto, faremos algumas simplificações. Como $0 \in \Omega$ e para $j, k = 1, \dots, m$, $(\partial\phi_j/\partial x_k)(x, t)$ são funções contínuas que se anulam na origem, então existe $R > 0$ tal que $\bar{V} \subset W$, onde

$$V \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N; |x| < R, |t| < R\}$$

e

$$\left| \frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}(x, t) \right| < \frac{1}{2}, (x, t) \in \bar{V}.$$

Lema 6.4.15. *Seja B uma matriz $m \times m$ com coeficientes reais e norma $\|B\| < 1$, então*

$$\det(A) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{m/2},$$

em que $A = Id_m + iB$.

Observação 6.4.16. *De agora em diante, a menos que seja necessário especificar, denotaremos a matriz identidade Id_k de $\mathbb{R}^k$ apenas por I , para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A princípio, observe que

$$[Ax]^2 = \sum_{j=1}^m (Ax)_j^2 = \langle Ax, Ax \rangle,$$

onde $(Ax)_j$ denota a j -ésima coordenada do vetor Ax . Afirmamos que

$$[Ax]^2 = \langle {}^t A A x, x \rangle.$$

Denote por a_{jk} o elemento da j -ésima linha e k -ésima coluna de A , assim

$$\begin{aligned} (Ax)_j &= \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k, \\ ({}^t A A x)_l &= \sum_{k,j=1}^m a_{kl} a_{kj} x_j, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \langle {}^t A A x, x \rangle &= \sum_{k,j,l=1}^m a_{kl} a_{kj} x_j x_l = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^m a_{kl} x_l \right) \left(\sum_{j=1}^m a_{kj} x_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^m (Ax)_k^2 = [Ax]^2. \end{aligned}$$

Defina $C \doteq {}^t A A$, então

$$[Ax]^2 = \langle {}^t A A x, x \rangle = \langle Cx, x \rangle, x \in \mathbb{R}^m.$$

Note que

$$C = {}^tAA = {}^t(I + iB)(I + iB) = (I + i{}^tB)(I + iB) = (I + {}^tBB) + i({}^tB + B).$$

Logo $\Re C = I + {}^tBB$ é tal que

$$\langle (I + {}^tBB)x, x \rangle = |x|^2 - \langle {}^tBBx, x \rangle > |x|^2 - |x|^2 = 0,$$

pois $\|{}^tB\| = \|B\| < 1$, ou seja, C é uma matriz complexa simétrica e com parte real positivo definida.

Afirmamos que, para matrizes M simétricas com parte real positivo definida vale

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Mx, x \rangle} dx = \pi^{m/2} (\det M)^{-1/2},$$

sendo que o ramo da raiz quadrada é escolhido de forma que $(\det M)^{1/2} > 0$ quando M é real.

Assumindo a afirmação acima concluímos o resultado, pois

$$\det C = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \det A = (\det A)^2.$$

Provemos agora a afirmação acima. Temos que se $a \in (0, +\infty)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-ax^2} dx = \pi^{m/2}.$$

Defina

$$f(z) \doteq \pi^{1/2} z^{-1/2}, z \in (0, +\infty) + i\mathbb{R} \quad (6.10)$$

$$g(z) \doteq \int_{\mathbb{R}^m} e^{-zx^2} dx, z \in (0, +\infty) + i\mathbb{R}, \quad (6.11)$$

tais funções são holomorfas e $f(z) = g(z)$, $z \in (0, +\infty)$ então pelo princípio da identidade (veja [6]) obtemos que $f = g$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-zx^2} dx = \pi^{1/2} z^{-1/2}, z \in (0, +\infty) + i\mathbb{R}.$$

Se M for uma matriz hermitiana diagonal com seus elementos da diagonal $a_j \in (0, +\infty) + i\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Mx, x \rangle} dx &= \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} e^{-a_j x_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^m \pi^{m/2} (\det a_j)^{-1/2} = \\ &= \pi^{m/2} (\det M)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Por fim, seja M uma matriz hermitiana simétrica com parte real positivo definida. Tal matriz é diagonalizável por ser simétrica, ou seja, existe matriz P unitária ($|\det P| =$

1) tal que PAP^{-1} é diagonal. Se indicarmos por z_j o j -ésimo elemento da diagonal de PAP^{-1} , então $z_j \in (0, +\infty) + i\mathbb{R}$ e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle PAP^{-1}x, x \rangle} dx = \pi^{m/2} (\det PAP^{-1})^{-1/2} = \pi^{m/2} (\det A)^{-1/2}.$$

Por outro lado, como P é unitária podemos fazer a mudança de variáveis $y = P^{-1}x$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle PAP^{-1}x, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle PAy, Py \rangle} |\det P| dy = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle PAy, Py \rangle} dy,$$

e temos ainda que matrizes unitárias satisfazem

$$\langle PAy, Py \rangle = \langle P^* PAy, y \rangle = \langle Ay, y \rangle, y \in \mathbb{R}^m,$$

concluindo a demonstração. □

No nosso caso, temos

$$Z_x(x, t) = I + i\phi_x(x, t),$$

com $\|\phi(x, t)\| \leq 1/2 < 1$, $(x, t) \in \bar{V}$, logo pelo lema acima

$$\det Z_x(x, t) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x, t)x']^2} dx' = \pi^{m/2}. \quad (6.12)$$

Proposição 6.4.17. *Se $u \in C^\infty(W)$ então $(\tau/\pi)^{m/2} H_\tau f u$ converge uniformemente para fu em $\bar{V}$, em que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ com suporte contido no suporte de h .*

Observação 6.4.18. *Vale ressaltar que a convergência uniforme da proposição acima ocorre em*

$$\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\},$$

pois h tem suporte compacto contido em

$$\{|x| < R\},$$

daí podemos definir $(hu)(x, t) = 0$ se $|x| \geq R$, $|t| \leq R$. Destacamos também, que segue da proposição acima que, como $h = 1$ numa vizinhança de

$$\{|x| \leq R/2\},$$

$G_\tau u$ converge uniformemente para u em

$$\{|x| \leq R/2\} \times \{|t| \leq R\}.$$

Demonstração. Defina a função

$$v(x, t) \doteq f(x)u(x, t) \det Z_x(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}.$$

Logo, de 6.12 concluímos que

$$(fu)(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x, t)x']^2} v(x, t) dx'.$$

Realizando a mudança de variáveis

$$x' \mapsto x + \tau^{-1/2}x',$$

na integral que define $H_\tau f u$ obtemos

$$(\tau/\pi)^{m/2} H_\tau f u(x, t) = \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'.$$

Dividimos a diferença $H_\tau f u(x, t) - f(x)u(x, t)$ em duas integrais, a saber

$$\begin{aligned} I_\tau(x, t) &\doteq \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x, t)x']^2} (v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t)) dx', \\ J_\tau(x, t) &\doteq \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} (e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}) v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx'. \end{aligned}$$

É importante destacar que podemos separar essa diferença em duas integrais somando e subtraindo o termo

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x, t)x']^2} v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx',$$

sabemos que tal integral é finita por 6.12 e pois v é contínua, portanto é limitada no compacto

$$\text{supp}(h) \times \{|t| \leq R\}.$$

Vamos estimar primeiro $|I_\tau(x, t)|$. Observe que

$$|I_\tau(x, t)| \leq \pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\Re[Z_x(x, t)x']^2} |v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t)| dx',$$

assim basta estimarmos tal função exponencial

$$e^{-\Re[Z_x(x, t)x']^2}$$

e a diferença

$$v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t),$$

para $(x, t) \in \overline{V}$, $x' \in \mathbb{R}^m$.

Sabemos que

$$Z_x(x, t)x' = x' + i\phi_x(x, t)x',$$

então

$$\begin{aligned}
 -[Z_x(x, t)x']^2 &= -\sum_{j=1}^m (x'_j + i(\phi_x(x, t)x')_j)^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^m (-x_j'^2 + (\phi_x(x, t)x')_j^2 - 2ix'_j(\phi_x(x, t)x')_j) = \\
 &= -|x'|^2 + |\phi_x(x, t)x'|^2 + i(-2) \sum_{j=1}^m x'_j(\phi_x(x, t)x')_j,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$-\Re[Z_x(x, t)x']^2 = -|x'|^2 + |\phi_x(x, t)x'|^2.$$

Logo,

$$-\Re[Z_x(x, t)x']^2 \leq -|x'|^2 + \frac{1}{4}|x'|^2 = -\frac{3}{4}|x'|^2,$$

e assim

$$|e^{-\Re[Z_x(x, t)x']^2}| \leq e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}, (x, t) \in \bar{V}, x' \in \mathbb{R}^m.$$

Observação 6.4.19. *Temos que v é uma função suave, então pelo Teorema Fundamental do Cálculo vale*

$$v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}(v(\lambda(s), t))ds = \int_0^1 \nabla_x v(\lambda(s), t)\tau^{-1/2}x' ds,$$

em que $\lambda(s) = x + s\tau^{-1/2}x'$, $x, x' \in \mathbb{R}^m$, $|t| \leq R$.

Além disso, sabemos que, para cada $|t| \leq R$,

$$\text{supp}(v(\cdot, t)) \subset \text{supp}(h),$$

assim as derivadas de $v(\cdot, t)$ também têm suporte contido neste compacto e são nulas fora deste compacto.

Portanto, existe, para cada $j = 1, \dots, m$,

$$M_j = \sup_{\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|,$$

e então

$$|\nabla_x v(x, t)| \leq M < \infty, (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\},$$

em que

$$M = \sqrt{m} \max_{1 \leq j \leq m} M_j.$$

Da observação acima, concluímos que

$$|v(x + \tau^{-1/2}x', t) - v(x, t)| \leq \tau^{-1/2}M|x'|, x, x' \in \mathbb{R}^m, |t| \leq R.$$

Portanto

$$|I_\tau(x, t)| \leq \tau^{-1/2}C,$$

sendo que

$$C \doteq M\pi^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} |x'| e^{\frac{-3}{4}|x'|^2} dx' < \infty,$$

e consequentemente I_τ converge uniformemente, em $\bar{V}$, para zero quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Provemos agora que J_τ também converge uniformemente para zero na mesma região que I_τ .

Para cada $K > 0$, temos que

$$\begin{aligned} J_\tau(x, t) &= \pi^{-m/2} \int_{|x'| < K} (e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}) v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx' + \\ &+ \pi^{-m/2} \int_{|x'| \geq K} (e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}) v(x + \tau^{-1/2}x', t) dx', \end{aligned}$$

agora vamos estimar cada integral separadamente.

Inicialmente, vamos estimar a integral na região $\{|x'| \geq K\}$. Visto que

$$|\phi(x + \tau^{-1/2}x', t) - \phi(x, t)| = \int_0^1 \|\phi_x(\lambda(s), t)\| \tau^{-1/2}|x'| ds \leq \frac{1}{2} \tau^{-1/2}|x'|,$$

então

$$\begin{aligned} \Re \quad & -\tau^{1/2}[Z(x + \tau^{-1/2}x', t) - Z(x, t)]^2 = \\ &= -\tau(\tau^{-1/2}|x'|^2 - |\phi(x + \tau^{-1/2}x', t) - \phi(x, t)|^2) = \\ &= -|x'|^2 + \tau|\phi(x + \tau^{-1/2}x', t) - \phi(x, t)|^2 \leq \\ &\leq -\frac{3}{4}|x'|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$|e^{-\tau^{1/2}[Z(x + \tau^{-1/2}x', t) - Z(x, t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}| \leq 2e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}, |x'| \leq K.$$

Por outro lado, v é contínua e tem suporte contido no compacto

$$\text{supp}(h) \times \{|t| \leq R\},$$

pois se $x \in \mathbb{R}^m$ e $|t| \leq R$, então

$$v(x, t) = f(x)u(x, t) \det Z_x(x, t) = 0.$$

Sendo assim, existe $C_v > 0$ tal que

$$|v(x, t)| \leq C_v, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \{|s| \leq R\}.$$

Juntando estes fatos, obtemos que

$$\begin{aligned} &\pi^{-m/2} \int_{|x'| \geq K} |e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}| |v(x + \tau^{-1/2}x', t)| dx' \leq \\ &\leq \pi^{-m/2} \int_{|x'| \geq K} 2e^{-\frac{1}{4}|x'|^2} e^{-\frac{1}{2}|K|^2} C_v dx' \leq C e^{-\frac{1}{2}|K|^2}, \end{aligned}$$

em que

$$C = 2\pi^{-m/2}C_v \int_{|x'| \geq K} e^{-\frac{1}{4}|x'|^2} dx' < \infty,$$

para $|x|, |t| \leq R, |x'| \geq K, \tau > 0$.

Para estimarmos a integral do domínio restante, defina

$$\begin{aligned}\zeta_1(x, t) &\doteq \tau^{1/2}[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)], \\ \zeta_2(x, t) &\doteq -Z_x(x, t)x'.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\zeta_1(x, t) &= -\tau^{1/2}[Z(x + \tau^{-1/2}x', t) - Z(x, t)] = \\ &= -\tau^{1/2} \int_0^1 Z_x(\lambda(s), t)x'\tau^{-1/2}ds = \\ &= -\int_0^1 Z_x(\lambda(s), t)x'ds,\end{aligned}$$

onde

$$\lambda(s) = x + s\tau^{-1/2}x'.$$

Dessa forma tem-se que

$$|\zeta_1(x, t) - \zeta_2(x, t)| \leq \int_0^1 \|\phi_x(x + s\tau^{-1/2}x', t) - \phi_x(x, t)\| |x'| ds, \quad (6.13)$$

e como $\partial\phi_j/\partial x_j$ são funções suaves no compacto

$$\{\overline{B}_{R/2} + \text{supp}(h)\} \times \overline{B}_R,$$

para cada $j, k = 1, \dots, m$, temos que a diferença 6.13 converge para zero uniformemente quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}\Re[\zeta_1(x, t)]^2 &= \Re[|x'| + i\tau^{1/2}(\phi(x, t) - \phi(x + \tau^{-1/2}x', t))]^2 = \\ &= |x'|^2 - \tau|\phi(x, t) - \phi(x + \tau^{-1/2}x', t)|^2 \geq \\ &\geq |x'|^2 - \frac{1}{4}|x'|^2 = \frac{3}{4}|x'|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Destes dois fatos, obtemos que para τ suficientemente grande $\Re[\zeta_2(x, t)]^2 \geq 0$.

Observação 6.4.20. Note que a função inteira $f(\zeta) = e^{-\zeta}, \zeta \in \mathbb{C}$ é lipschitziana em $[0, +\infty) + i\mathbb{R}$, ou seja, existe constante M_0 tal que

$$|f(\xi) - f(\zeta)| \leq M_0|\xi - \zeta|$$

para quaisquer ζ, ξ números complexos com parte real maior ou igual a zero.

Pela observação acima concluímos que

$$\begin{aligned} |e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-1/2}x',t)]^2} - e^{-[Z(x,t)x']^2}| &= |e^{-[\zeta_1(x,t)]^2} - e^{-[\zeta_2(x,t)]^2}| \leq \\ &\leq M_0|[\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2|. \end{aligned}$$

Sendo assim, vamos estimar agora as partes real e imaginária da diferença

$$|[\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2|.$$

Começamos pela parte imaginária:

$$\begin{aligned} |\Im([\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2)| &= \\ \left| 2i \sum_{j=1}^m x'_j (-\tau^{1/2}(\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) - \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')) \right|. \end{aligned}$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} |(\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) - \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')| &\leq \\ \leq \int_0^1 \|\nabla_x \phi_j(x + s\tau^{-1/2}x', t) - \nabla_x \phi_j(x, t)\| \tau^{-1/2}|x'| ds &\leq \\ \frac{m^{1/2}M\tau^{-1}|x'|}{2}, \end{aligned}$$

em que

$$M = \max_{1 \leq j, k \leq m} \sup_{\{\overline{B}_{R/2} + \text{supp}(h)\} \times \overline{B}_R} \left\| \nabla_x \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial e_k} \right) \right\|.$$

Logo

$$|\Im([\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2)| \leq m^{3/2}M\tau^{-1/2}|x'|^2.$$

Resta estimar a parte real

$$\begin{aligned} |\Re([\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2)| &= |-\tau|\phi(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi(x, t)|^2 + |\phi_x(x, t)x'|^2| = \\ &= \left| -\tau \left(\sum_{j=1}^m (\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t))^2 - (\nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')^2 \right) \right|. \end{aligned}$$

Mas, temos que $(\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t))^2 =$

$$\begin{aligned} &= (\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) + \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x' - \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')^2 = \\ &= (\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) - \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')^2 - \\ &- 2(\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) + \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')\nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x' + \\ &+ (\nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')^2, \end{aligned}$$

então $|\Re([\zeta_1(x,t)]^2 - [\zeta_2(x,t)]^2)|$ é dada pela expressão

$$\left| -\tau \sum_{j=1}^m \left(|\phi_j(x + \tau^{1/2}x', t) - \phi_j(x, t) - \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x'|^2 - \right. \right.$$

$$-2(\phi_j(x + \tau^{-1/2}x', t) - \phi_j(x, t) + \nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')\nabla_x \phi_j(x, t)\tau^{-1/2}x')\Big|$$

e conseqüentemente

$$|\Re([\zeta_1(x, t)]^2 - [\zeta_2(x, t)]^2)| \leq \tau \sum_{j=1}^m \left(\frac{mM^2|x'|^4\tau^{-2}}{4} + 2C_0 \frac{m^{1/2}M|x'|^3\tau^{-3/2}}{2} \right).$$

Portanto

$$|e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}| \leq \hat{C}\tau^{-1/2},$$

e então

$$\begin{aligned} \pi^{-m/2} \int_{|x'| \leq K} |e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x + \tau^{-1/2}x', t)]^2} - e^{-[Z_x(x, t)x']^2}| |v(x + \tau^{-1/2}x', t)| dx' &\leq \\ &\leq CK^m \tau^{-1/2}. \end{aligned}$$

Em suma, provamos que existe constante C_J tal que

$$|J_\tau(x, t)| \leq C_J(K^m \tau^{-1/2} + e^{-K/2}), K, \tau > 0.$$

Fazendo $\tau \rightarrow +\infty$ obtemos que

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \infty} |J_\tau(x, t)| \leq C_J e^{-K/2}, K > 0,$$

finalmente fazendo $K \rightarrow +\infty$ concluímos que J_τ converge para 0 em $\overline{V}$.

□

Observação 6.4.21. *Observe que a partir da proposição acima que quando $\tau \rightarrow +\infty$ acontecem as seguintes convergências:*

$$G_\tau u = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau h} u \rightarrow hu,$$

$$[M_k, G_\tau]u = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau M_k h} u \rightarrow M_k(h)u,$$

$$[L_j, G_\tau]u = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} H_{\tau L_j h} u \rightarrow L_j(h)u,$$

e como $h(x) = 1, |x| \leq R/2$ então

$$M_k G_\tau u = [M_k, G_\tau]u + G_\tau M_k u \rightarrow M_k(h)u + M_k u = M_k u,$$

$$L_j G_\tau u = [L_j, G_\tau]u + G_\tau L_j u \rightarrow L_j(h)u + L_j u = L_j u,$$

quando $\tau \rightarrow +\infty$ no conjunto

$$U \doteq \{(x, t); |x| \leq R/2, |t| \leq R\}.$$

Estes fatos irão nos ajudar a demonstrar que $G_\tau u$ converge para u na topologia de $C^\infty(U)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} L_j(\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau f} u &= (\tau/\pi)^{m/2} (H_{\tau L_j f} u + H_{\tau f} L_j u) \rightarrow L_j(f)u + f L_j u, \\ M_k(\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau f} u &= (\tau/\pi)^{m/2} (H_{\tau M_k f} u + H_{\tau f} M_k u) \rightarrow M_k(f)u + f M_k u, \end{aligned}$$

quando $\tau \rightarrow +\infty$.

O seguinte resultado é uma generalização da observação acima para quaisquer quantidades finitas de campos L_j, M_k . Antes de tal resultado, renomeie os campos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} L_j^\# &\doteq L_j, j = 1, \dots, n, \\ L_j^\# &\doteq L_{j-n}, j = n+1, \dots, N. \end{aligned}$$

Proposição 6.4.22. *Seja $u \in C^\infty(W)$, então quando τ vai para infinito temos as convergências:*

$$L_J^\#(\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_K^\# h} u \rightarrow 0, \quad (6.14)$$

e

$$L_J^\# [L_{j_0}^\#, G_\tau] u \rightarrow 0,$$

no conjunto U , onde

$$L_J^\# \doteq L_{j_1}^\# \dots L_{j_r}^\#$$

e

$$L_K^\# \doteq L_{k_1}^\# \dots L_{k_s}^\#,$$

são quaisquer quantidades de campos.

Demonstração. Primeiramente, destacamos que $L_K^\# h$ é uma função suave com suporte compacto contido no suporte de h e como h é identicamente 1 numa vizinhança de U , esta função se anula em U .

Faremos a prova por indução. Da Observação 6.4.21 tiramos o caso inicial.

Suponha 6.14 válida para $L_J^\#$ e provemos para $L_{j_0}^\# L_J^\#$. Basta notar que como os campos são comutativos entre si, vale

$$\begin{aligned} L_{j_0}^\# L_J^\#(\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_K^\# h} u &= L_{j_0}^\# L_{j_1}^\# \dots L_{j_r}^\#(\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_K^\# h} u = \\ &= L_{j_1}^\# \dots L_{j_r}^\#(\tau/\pi)^{m/2} L_{j_0}^\# H_{\tau L_K^\# h} u = \\ &= L_{j_1}^\# \dots L_{j_r}^\#(\tau/\pi)^{m/2} (H_{\tau L_{j_0}^\# L_K^\# h} u + H_{\tau L_K^\# h} L_{j_0}^\# u), \end{aligned}$$

pela hipótese de indução concluímos a convergência.

Resta mostrar que

$$L_J^\# [L_{j_0}^\#, G_\tau] u \rightarrow 0.$$

O caso inicial já foi provado anteriormente, suponha válida a convergência acima e provemos para

$$L_{k_0} L_J^\# [L_{j_0}^\#, G_\tau] u \rightarrow 0.$$

Como

$$[L_{j_0}^\#, G_\tau] u = (\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_{j_0}^\# h} u,$$

então

$$L_{k_0} L_J^\# [L_{j_0}^\#, G_\tau] u = L_{k_0} L_J^\# (\tau/\pi)^{m/2} H_{\tau L_{j_0}^\# h} u$$

e usando a convergência de 6.14 finalizamos a demonstração. □

Ressaltamos que de 6.4.14 temos, voltando a notação original dos campos,

$$L_J M_K G_\tau u = [L_{j_1}, G_\tau] L_{j_2} \dots M_{k_r} u + \dots + L_{j_1} \dots M_{k_{r-1}} [M_{k_r}, G_\tau] u + G_\tau L_J M_K u$$

e combinando com 6.4.22 obtemos que

$$L_J M_K G_\tau u \rightarrow L_J M_K u,$$

em U quando $\tau \rightarrow +\infty$.

O próximo resultado nos fornecerá uma forma de escrever qualquer derivada

$$\partial^\alpha \doteq \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_k}$$

como combinação de composições dos campos $L_j^\#$, em que os coeficientes são funções suaves. Assim seremos capazes de obter que $G_\tau u$ converge para u na topologia de $C^\infty(U)$ quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Proposição 6.4.23. *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}^N$ multi-índice, então existem funções suaves*

$$a_{j_1}, a_{j_1, j_2}, \dots, a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}},$$

onde $|\alpha|$ é comprimento do multi-índice, tais que

$$\begin{aligned} \partial^\alpha &= \sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# + \sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|-1}=1}^N a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|-1}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|-1}}^\# + \\ &+ \sum_{j_1, j_2=1}^N a_{j_1, j_2} L_{j_1}^\# L_{j_2}^\# + \sum_{j_1=1}^N a_{j_1} L_{j_1}^\#. \end{aligned}$$

Demonstração. Novamente, faremos a prova por indução. Observe que o caso inicial é consequência de $\{L_1^\#, \dots, L_N^\#\}$ ser um conjunto linearmente independente e então geram qualquer campo, ou seja, como $\partial_k \in \mathfrak{X}(U)$ então existem funções suaves $a_1, \dots, a_N$ tais que

$$\partial_k = \sum_{j=1}^N a_j L_j^\#.$$

Suponha válida a fórmula da proposição para multi-índices de comprimento $|\alpha| = k_0$ e provemos para multi-índices de comprimento $k_0 + 1$.

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial^\alpha &= \sum_{j=1}^N a_j L_j^\# (\partial^\alpha) = \sum_{j, j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N a_j a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_j^\# L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# + \\
&+ \sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_j L_j^\# (a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}}) \right) a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# + \\
&+ \sum_{j, j_1, \dots, j_{|\alpha|-1}=1}^N a_j a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|-1}} L_j^\# L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|-1}}^\# + \dots + \sum_{j, j_1=1}^N a_j a_{j_1} L_j^\# L_{j_1}^\# + \\
&+ \sum_{j_1=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_j L_j^\# (a_{j_1}) \right) L_{j_1}^\# = \sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N \tilde{a}_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# + \sum_{j_1=1}^N \tilde{a}_{j_1} L_{j_1}^\#,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{j_1, \dots, j_l} &= a_{j_l} a_{j_1, \dots, j_{l-1}} + \sum_{l=1}^N a_l L_l^\# (a_{j_1, \dots, j_{k-1}}), \quad l = 2, \dots, k_0, \\
\tilde{a}_{j_1, \dots, j_{k_0+1}} &= a_{j_{k_0+1}} a_{j_1, \dots, j_{k_0}}, \\
\tilde{a}_{j_1} &= \sum_{j=1}^N a_j L_j^\# (a_{j_1}),
\end{aligned}$$

finalizando a demonstração □

Teorema 6.4.24. *Seja $u \in C^\infty(W)$, então $G_\tau u$ converge para u , na topologia de $C^\infty(U)$, quando $\tau \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Como já foi feito que $G_\tau u$ converge para u uniformemente em U , resta mostrar que $\partial^\alpha G_\tau u$ converge uniformemente para $\partial^\alpha u$ em U , para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$.

Primeiramente, observe que pela proposição anterior vale

$$\partial^\alpha G_\tau u = \sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# G_\tau u + \dots + \sum_{j_1=1}^N a_{j_1} L_{j_1}^\# G_\tau u, \quad (6.15)$$

que converge, em U quando $\tau \rightarrow +\infty$, para

$$\sum_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}=1}^N a_{j_1, \dots, j_{|\alpha|}} L_{j_1}^\# \dots L_{j_{|\alpha|}}^\# u + \dots + \sum_{j_1=1}^N a_{j_1} L_{j_1}^\# u = \partial^\alpha u, \quad (6.16)$$

como queríamos demonstrar. □

7 Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves

Neste capítulo provaremos um dos resultados mais importantes envolvendo a teoria de estruturas localmente integráveis. O Teorema de Baouendi-Treves afirma que dada uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ sobre Ω , então qualquer solução da equação $\mathcal{L}u = 0$ pode ser aproximada, localmente, por polinômios nas suas integrais primeiras.

A prova de tal resultado para o caso distribucional exige o conhecimento de conceitos mais sofisticados como alguns tópicos da Teoria das Distribuições e de Análise Funcional.

7.1 Versão Clássica

Antes de apresentarmos o enunciado e a demonstração do teorema vamos apresentar um exemplo de um caso mais particular e bem conhecido da análise complexa em que podemos aplicar o *Teorema de Baouendi-Treves*.

Exemplo 7.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Considere $\mathcal{L} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{L}_p$, em que cada fibra $\mathcal{L}_p$ é gerada pelo operador de Cauchy-Riemann*

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Observe que $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável unidimensional, pois as diferenciais da função $Z = x + iy$ calculadas em $p \in \Omega$ geram as fibras de $\mathcal{L}^\perp$. Além disso, se $u \in C^\infty(\Omega)$ é uma solução de $\mathcal{L}u = 0$, temos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0$$

e da análise complexa sabemos que u é uma função holomorfa, portanto esta função admite representação em série de potências em torno de cada ponto $p \in \Omega$, ou seja, u é limite de polinômios holomorfos na variável Z .

Visto que a fórmula de aproximação possui natureza local, é suficiente focarmos nossa atenção no caso em que $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que contém a origem, em que

$$\mathcal{L}_p^\perp = [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], \quad \forall p \in \Omega$$

e $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(\Omega)$.

Teorema 7.1.2 (Fórmula de Baouendi-Treves). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto que contém a origem e $\mathcal{L}$ estrutura localmente integrável sobre Ω , em que*

$$\mathcal{L}_p^\perp = [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], \quad \forall p \in \Omega$$

e $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(\Omega)$. Nessas condições, existem abertos U e W que contém a origem, $U \subset \bar{U} \subset W \subset \Omega$ tais que se $u \in C^\infty(W)$ satisfaz

$$\mathcal{L}u = 0,$$

então existe uma sequência de polinômios $P_l \circ Z = P_l(Z_1, \dots, Z_m)$ de forma que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d_{C^\infty(U)}(u, P_l \circ Z) = 0.$$

Demonstração. Para a prova, defina

$$\begin{aligned} E_\tau u(x, t) &\doteq \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') \det Z_x(x', 0) dx', \\ R_\tau u(x, t) &\doteq G_\tau u(x, t) - E_\tau u(x, t), \end{aligned}$$

mostremos que $R_\tau u$ converge uniformemente para zero em U quando $\tau \rightarrow +\infty$ e por fim aproximemos a função $e^{-\tau[\zeta]^2}$ na topologia de C^∞ , para τ fixado suficientemente grande, pela soma parcial, de grau l , $P_l(\zeta)$ da sua série de Taylor em

$$\{\tau^{1/2}(Z(x, t) - Z(x', 0)); |x|, |x'| \leq R/2, |t| \leq R\}.$$

Assim teremos

$$P_l(Z(x, t) - Z(x', 0)) = \sum_{|\alpha|=0}^l C_\alpha(x') (Z(x, t))^\alpha,$$

em que $C_\alpha(x')$ são funções suaves e então

$$\begin{aligned} d_{C^\infty(U)} &\left(u(\cdot), (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^l (Z(\cdot))^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} C_\alpha(x') h(x') \det Z_x(x', 0) dx' \right) \leq \\ &\leq d_{C^\infty(U)}(u(\cdot), G_\tau(\cdot)) + d_{C^\infty(U)}(R_\tau u(\cdot), 0) + \\ &+ d_{C^\infty(U)} \left(E_\tau u(\cdot), (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} P_l(Z(\cdot) - Z(x', 0)) h(x') \det Z_x(x', 0) dx' \right), \end{aligned}$$

em que

$$d_{C^\infty(U)}(f_1, f_2), f_1, f_2 \in C^\infty(U)$$

representa a distância na topologia de $C^\infty(U)$ (Confira [3]).

Portanto, fazendo $l \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} d_{C^\infty(U)} &\left(u(\cdot), (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^l (Z(\cdot))^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} C_\alpha(x') h(x') \det Z_x(x', 0) dx' \right) \leq \\ &\leq d_{C^\infty(U)}(u(\cdot), G_\tau(\cdot)) + d_{C^\infty(U)}(R_\tau u(\cdot), 0), \end{aligned}$$

para cada τ suficientemente grande fixado.

Por fim, fazendo $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_{C^\infty(U)} \left(u(\cdot), (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (Z(\cdot))^\alpha \int_{\mathbb{R}^m} C_\alpha(x') h(x') \det Z_x(x', 0) dx' \right) = 0.$$

Para estimarmos o termo $R_\tau u$ fazemos uso do *Teorema de Stokes*. Considere a m -forma

$$\omega(x', t') \doteq v(x', t') dZ(x', t'),$$

em que

$$v(x', t') = (\tau/\pi)^{m/2} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2} h(x') u(x', t')$$

e

$$dZ(x', t') = dZ_1(x', t') \wedge \dots \wedge dZ_m(x', t').$$

Nessas condições, temos que

$$\begin{aligned} G_\tau u(x, t) &= (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2} u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} i_t^* \omega dx' = \int_{i_t(\mathbb{R}^m)} \omega = \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} \omega, \end{aligned}$$

em que $i_t^* \omega$ é o pull-back de ω pela aplicação

$$i_t(x') = (x', t), x' \in \mathbb{R}^m.$$

Analogamente obtemos que

$$E_\tau u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \omega.$$

Pelo *Teorema de Stokes* concluímos que

$$R_\tau u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m \times \{t\}} \omega - \int_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \omega = \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} d\omega.$$

Como $\omega = v dZ$ temos

$$d\omega = dv \wedge dZ + v \wedge d(dZ) = dv \wedge dZ.$$

Além do mais, visto que

$$dv = \sum_{j=1}^n L_j(v) dt_j + \sum_{k=1}^m M_k(v) dZ_k,$$

obtemos que

$$d\omega = \sum_{j=1}^n L_j(v) dt_j \wedge dZ + \sum_{k=1}^m M_k(v) dZ_k \wedge dZ = \sum_{j=1}^n L_j(v) dt_j \wedge dZ.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
L_j v(x', t') &= (\tau/\pi)^{m/2} L_j (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(\cdot)]^2} h(\cdot) u(\cdot))(x', t') = \\
&= (\tau/\pi)^{m/2} L_j (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(\cdot)]^2})(x', t') h(x') u(x', t') + \\
&+ (\tau/\pi)^{m/2} (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) L_j(h)(x') u(x', t') \\
&+ (\tau/\pi)^{m/2} (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) h(x') L_j(u)(x', t') = \\
&= (\tau/\pi)^{m/2} (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) L_j(h)(x') u(x', t'),
\end{aligned}$$

pois

$$L_j u = L_j Z_k = 0.$$

Reunindo os fatos acima, tem-se que

$$R_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} \sum_{j=1}^n (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) L_j(h)(x') u(x', t') dt_j \wedge dZ(x', t').$$

Para concluirmos a convergência do resto $R_\tau u$ basta estimarmos o integrando acima.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\Re\left(-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2\right) &= \Re\left(-\tau[x - x' - i(\phi(x, t) - \phi(x', t'))]^2\right) = \\
&= -\tau|x - x'|^2 + \tau|\phi(x, t) - \phi(x', t')|^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$|\phi(x, t) - \phi(x', t')| \leq |\phi(x, t) - \phi(x, t')| + |\phi(x, t') - \phi(x', t')| \leq \frac{1}{2}|x - x'| + C|t - t'|,$$

em que

$$C = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{\bar{B}_{R/2} \times \bar{B}_{3R/2}} \|\nabla_t \phi_j(x, t)\|.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\phi(x, t) - \phi(x', t')|^2 &\leq \frac{1}{4}|x - x'|^2 + C\frac{R}{2} + C^2\frac{R^2}{4} = \\
&= \frac{1}{2}|x - x'|^2 + \left(\frac{-1}{R^2}|x - x'|^2 + \frac{2C}{R}|x - x'|C^2\right)\frac{R^2}{4} \leq \\
&\leq \frac{1}{2}|x - x'|^2 + \lambda\frac{R^2}{2},
\end{aligned}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda \geq \frac{5C}{4} + \frac{C^2}{2}.$$

Além disso, como

$$\text{supp}(L_j(h)) \subset \text{supp}(h) \subset \bar{B}_R,$$

e h é identicamente 1 em $\overline{B}_{R/2}$ então $L_j(h)$ se anula em

$$\{x' \in \mathbb{R}^m; |x'| > R\} \cup \{x' \in \mathbb{R}^m; |x'| \leq R/2\},$$

logo para $R/2 \leq |x'| \leq R$ temos

$$|e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}| \leq e^{\tau\left(\frac{1}{2}|x-x'|^2+2\lambda\frac{R^2}{4}-|x-x'|^2\right)} \leq e^{\tau\left(\lambda\frac{R^2}{2}-\frac{1}{2}|x-x'|^2\right)} \leq e^{\tau\left(\lambda\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{32}\right)} \leq e^{\frac{-\tau R^2}{33}},$$

para $R > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, se necessário podemos diminuir a vizinhança da origem tal que a desigualdade acima seja verdadeira.

Como, para cada $j = 1, \dots, n$, $i^*(dt_j \wedge dZ)$ é uma $(m+1)$ -forma diferencial tem-se que existem funções

$$f_j \in C^\infty(\overline{B}_R \times [0, t])$$

tais que

$$i^*(dt_j \wedge dZ)(y) = f_j(y)dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{m+1}, y \in \overline{B}_R \times [0, t]. \quad (7.1)$$

Portanto $R_\tau u(x, t)$ é dado pela expressão

$$(\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} \sum_{j=1}^n (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(i(y))]^2}) L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y)) f_j(y) dy.$$

Por fim, como para cada $j = 1, \dots, n$,

$$L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y))$$

são funções suaves com suporte contido em

$$\overline{B}_R \times [0, t],$$

existe constante $C_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} |L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y))| dy \leq C_0,$$

para qualquer $j = 1, \dots, n$.

Concluimos, dessa forma, que

$$|R_\tau u(x, t)| \leq C_0 (\tau/\pi)^{m/2} e^{\frac{-\tau R^2}{33}}, (x, t) \in U,$$

e fazendo $\tau \rightarrow +\infty$ obtemos que $|R_\tau u(x, t)| \rightarrow 0$ uniformemente em U .

Finalmente, mostremos que, para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, $\partial^\alpha R_\tau u$ converge uniformemente para zero em U quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Afirmamos que, para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, existem funções $g_1, \dots, g_{|\alpha|}$ suaves definidas em $U \times \overline{B}_R \times [0, t]$ tais que

$$\partial^\alpha (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) = \sum_{\eta=1}^{|\alpha|} \tau^\eta e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} g_\eta(x, t, x', t').$$

Assumindo a afirmação acima o resultado segue, visto que

$$\partial^\alpha R_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} \sum_{\eta=1}^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n \tau^\eta g_\eta(x, t, i(y)) L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y)) dy$$

com

$$g_\eta(x, t, i(y)) L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y))$$

funções suaves com suporte contido em

$$\overline{B}_R \times [0, t]$$

para cada $(x, t) \in U$. Logo existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m \times [0, t]} \sum_{\eta=1}^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n \tau^\eta |g_\eta(x, t, i(y)) L_j(h)(i(y)) u(i(y)) \det Z_x(i(y))| dy \leq C_\alpha,$$

para qualquer $j = 1, \dots, n$, $(x, t) \in \overline{U}$.

Dessa forma,

$$|\partial^\alpha R_\tau u(x, t)| \leq C_\alpha \frac{\tau^{|\alpha|+m/2}}{\pi^{m/2}} e^{\frac{-\tau R^2}{33}}, (x, t) \in U,$$

$\tau \geq 1$ e concluimos que $|\partial^\alpha R_\tau u|$ converge uniformemente para zero em U quando $\tau \rightarrow +\infty$ para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, ou seja,

$$d_{C^\infty(U)}(R_\tau u, 0) \rightarrow 0,$$

quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Provemos então que a afirmação é verdadeira. Faremos a prova por indução. Para $|\alpha| = 0$ não há o que fazer. Suponha que a afirmação é válida para $|\alpha| = \alpha_0$ e provemos para $\partial_k \circ \partial^\alpha$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial^\alpha (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) &= \sum_{\eta=1}^{|\alpha|} \tau^\eta \partial_k (e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} g_\eta(x, t, x', t')) = \\ &= \sum_{\eta=1}^{|\alpha|} \tau^\eta \tau e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \tilde{g}_\eta(x, t, x', t'), \end{aligned}$$

em que

$$\tilde{g}_\eta(x, t, x', t') = \partial_k(g_\eta)(x, t, x', t') + g_\eta(x, t, x', t') \sum_{l=1}^m (-2)(Z_l(x, t) - Z_l(x', t')) \partial_k(Z_l)(x, t) +$$

provando a afirmação. $\square$

Agora daremos uma ideia de como generalizar o resultado acima para o caso em que $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω que um aberto de uma variedade suave difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^N$ que contém a origem.

Note que podemos, partindo da estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ e do difeomorfismo ξ , definir uma estrutura $\hat{\mathcal{L}}$ sobre $\xi(\Omega)$ analogamente como foi feito na demonstração do Teorema de Frobenius.

Primeiramente considere a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : \mathfrak{X}(\Omega) &\rightarrow \mathfrak{X}(\xi(\Omega)) \\ L &\mapsto \psi(L),\end{aligned}$$

em que

$$\psi(L)(f) = L(f \circ \xi) \circ \xi^{-1}.$$

Assim, como na demonstração do Teorema de Frobenius, sabendo que $\{L_{jp}\}_{j=1}^n$ é linearmente independente para cada $p \in \Omega$, concluímos que $\{\psi(L_j)_q\}_{j=1}^n$ é linearmente independente para cada $q \in \xi(\Omega)$.

Assim podemos definir a estrutura $\hat{\mathcal{L}}$ dada por

$$\hat{\mathcal{L}}_q = [\psi(L_1)_q, \dots, \psi(L_n)_q], q \in \xi(\Omega).$$

Podemos transportar as funções $Z_1, \dots, Z_m$ para $C^\infty(\xi(\Omega))$ da seguinte forma

$$\hat{Z}_k \doteq Z_j \circ \xi^{-1}, k = 1, \dots, m.$$

Dessa forma,

$$d\hat{Z}_k(\psi(L_j)) = L_j(Z_k \circ \xi^{-1} \circ \xi) \circ \xi^{-1} = L_j(Z_k) \circ \xi^{-1} = 0,$$

para quaisquer $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$ e então $d\hat{Z}_{kq} \in \hat{\mathcal{L}}_q^\perp$, $q \in \xi(\Omega)$. Para concluirmos que a estrutura $\hat{\mathcal{L}}$ é localmente integrável, resta mostrarmos que $\{d\hat{Z}_{kq}\}_{k=1}^m$ é linearmente independente.

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ e $q \in \xi(\Omega)$ tais que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k d\hat{Z}_{kq} = 0.$$

Além disso,

$$d\hat{Z}_k(\psi(M_l)) = M_l(Z_k) \circ \xi^{-1} = \delta_{kl}$$

logo

$$0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k d\hat{Z}_{kq}(\psi(M_l)_q) = \lambda_l$$

para $l = 1, \dots, m$.

Então

$$\hat{\mathcal{L}}_q^\perp = [d\hat{Z}_{1q}, \dots, d\hat{Z}_{mq}], q \in \xi(\Omega)$$

e concluímos que $\hat{\mathcal{L}}$ é uma estrutura localmente integrável sobre $\xi(\Omega)$, o qual é um aberto de $\mathbb{R}^N$ que contém a origem e assim está nas condições do Teorema 7.1.2.

Agora basta utilizar o caso feito no início da seção para obtermos o resultado desejado.

7.2 Versão Distribucional

7.2.1 Preliminares

Antes de enunciarmos a versão distribucional do teorema, com o intuito de tornar mais clara sua demonstração, estabeleceremos alguns resultados auxiliares e também destacaremos algumas propriedades importantes dos objetos envolvidos em sua formulação.

Definição 7.2.1 (Espaço de Sobolev). *Dado $k \in \mathbb{N}$ definimos os espaços de Sobolev como sendo*

$$H^k(\mathbb{R}^N) \doteq \{f \in L^2(\mathbb{R}^N); \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

e $H^{-k}(\mathbb{R}^N)$ como sendo o espaço vetorial dual de $H^k(\mathbb{R}^N)$. Além disso, estes espaços são normados com normas dada por

$$\|f\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha f|_{L^2}$$

se $f \in H^k(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f\|_{-k} = \sup_{\phi \in H^k(\mathbb{R}^N), \|\phi\|_k \leq 1} |\langle f, \phi \rangle|$$

se $f \in H^{-k}(\mathbb{R}^N)$.

A seguir apresentamos os conceitos de distribuição e conjunto frente de onda de uma distribuição.

Definição 7.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Uma distribuição u em Ω é uma aplicação linear*

$$u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que para qualquer compacto $K \subset \Omega$ existem uma constante $C > 0$ e um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ de tal forma que vale a desigualdade

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|,$$

para quaisquer $\phi \in C_c^\infty(K)$. O conjunto de todas as distribuições em Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Antes de definirmos conjunto frente de onda de uma distribuição precisamos da seguinte definição.

Definição 7.2.3. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R} - \{0\})$. Dizemos que u é C^∞ em (x_0, ξ_0) se existirem $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\phi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0 , e um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^N - \{0\}$ contendo ξ_0 tais que*

$$|\mathcal{F}(\phi u)| \leq C_k(1 + |\xi|)^{-k}, \xi \in \Gamma,$$

em que $\mathcal{F}$ denota a transformada de Fourier, $C_k > 0$ é uma constante e $k \in \mathbb{N}$.

Definição 7.2.4 (Conjunto frente de onda). *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. O conjunto frente de onda de u é a coleção dos pontos $(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N - \{0\})$ tais que u não é C^∞ em (x, ξ) . O conjunto frente de onda da distribuição u é denotado por $WF(u)$.*

A principal referência destas definições é [2].

Observação 7.2.5. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(W)$ e $L \in \mathfrak{X}(W)$. Por um lado, se*

$$(x_1, \dots, x_N)$$

for um sistema de coordenadas locais, o campo pode ser descrito da seguinte forma

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, a_j = L(x_j).$$

Por outro, de [2] sabemos que

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \phi \in C_c^\infty(W), \alpha \in \mathbb{Z}^N,$$

e assim

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = (-1) \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \phi \in C_c^\infty(W), j = 1, \dots, N.$$

Dessa forma,

$$\langle Lu, \phi \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \sum_{j=1}^N \frac{\partial(a_j \phi)}{\partial x_j} \right\rangle, \phi \in C_c^\infty(W).$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(W)$ tal que $\mathcal{L}u = 0$, isto é,

$$L_j u = 0, j = 1, \dots, n.$$

Faremos uso do seguinte resultado de [2]:

Teorema 7.2.6. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x, D)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes em Ω , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto. Então*

$$WF(u) \subset WF(Pu) \cup V_P,$$

em que

$$V_P = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N - \{0\}); P_m(x, \xi) = 0\}$$

é o conjunto característico de $P(x, D)$, m sua ordem, $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ é seu símbolo principal e $WF(u)$ indica o conjunto frente de onda da distribuição u .

No nosso caso os campos $L_1, \dots, L_n$ podem ser vistos como operadores diferenciais parciais lineares de ordem 1. Note que $\mathcal{L}_p = [L_{1p}, \dots, L_{np}]$, $p \in W$ e $((x, t), \xi) \in T^0$ se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^m a_{jk}(x, t) \xi_k + \sum_{l=1}^n b_{jl}(x, t) \xi_{l+m} = 0, j = 1, \dots, n,$$

ou seja, se, e somente se, $((x, t), \xi) \in T_j^0$, $j = 1, \dots, n$ onde T_j^0 é o conjunto característico de $\mathcal{L}_{jp} = [L_{jp}]$, $p \in W$.

Além disso, como

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{p1} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{pn}, p \in W,$$

então

$$\mathcal{L}_p^\perp = \cap_{j=1}^p \mathcal{L}_{pj}^\perp, p \in W.$$

Logo

$$T_p^0 = \mathcal{L}_p^\perp \cap T_p^* \mathbb{R}^N = \cap_{j=1}^n \mathcal{L}_{pj}^\perp \cap T_p^* \mathbb{R}^N = \cap_{j=1}^n T_{pj}^0,$$

ou seja,

$$T^0 = \cap_{j=1}^n T_j^0.$$

Sabemos também que

$$T_j^0 = V_{L_j} \cup (\mathbb{R}^N \times \{0\}),$$

juntando os dois fatos obtemos

$$T^0 = \cap_{j=1}^n V_{L_j} \cup (\mathbb{R}^N \times \{0\}).$$

Para cada $j = 1, \dots, n$, de 7.2.6 e sendo $L_j u = 0$ temos

$$WF(u) \subset WF(L_j u) \cup V_{L_j} = V_{L_j},$$

então

$$WF(u) \subset \cap_{j=1}^n V_{L_j} \subset T^0.$$

Como $\overline{V} \subset W$, $\overline{V}$ é compacto e W aberto, é possível obter $0 < R' < R''$ tal que

$$\overline{V} \subset V' \doteq \{(x, t); |x|, |t| < R'\} \subset \overline{V'} \subset V'' \doteq \{(x, t); |x|, |t| < R''\} \subset W.$$

Nessas condições, afirmamos que

$$WF(u) \cap \{(x, t, 0, \lambda) \in V'' \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \lambda \neq 0\} = \emptyset.$$

Com efeito, suponha que existam $(x, t) \in V''$ e $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tais que $(x, t, 0, \xi) \in T^0 = \cap_{j=1}^n T_j^0$. Assim, como

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, j = 1, \dots, n,$$

tem-se que

$$\xi_j = \xi_j + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk}(x, t)0 = 0, j = 1, \dots, n$$

que é uma contradição, pois assumimos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$.

Portanto

$$\{(x, t, 0, \lambda) \in V'' \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \lambda \neq 0\} \subset (T^0)^c \subset (WF(u))^c.$$

Dessa maneira, o conjunto $WF(hu)$ está contido em T^0 , então não intercepta

$$\{(x, t, 0, \lambda) \in V'' \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \lambda \neq 0\}.$$

e de [5] obtemos que

$$u \in C^\infty(\{|t| \leq R'\}; \mathcal{D}'(\{|x| < R'\})).$$

Além do mais, se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ com χ identicamente 1 numa vizinhança de

$$\{|x| \leq R'\}$$

e suporte contido em

$$\{|x| < R''\},$$

consequentemente tem-se que

$$\hat{u} \doteq \chi u \in C^\infty(\{|t| \leq R'\}; \mathcal{E}'(\{|x| < R'\})) \subset C^0(\{|t| \leq R'\}; \mathcal{E}'(\{|x| < R'\})).$$

Por simplicidade e como nosso resultado principal vale apenas localmente, denotaremos $\hat{u}$ simplesmente por u . Observe que $\hat{u}(\cdot, t) = u(\cdot, t)$ em numa vizinhança de $\{|x| \leq R'\}$ para qualquer t .

Como $\{|t| \leq R'\}$ é compacto e pela continuidade na variável t , estando $\mathcal{D}'(\{|x| < R'\})$ munido da topologia fraca estrela, obtemos que $u(\cdot, t)$ é uniformemente contínua na variável t , isto é, dado $\varepsilon > 0$, para cada $\phi \in C^\infty(\{|x| < R'\})$, existe $\delta = \delta(\phi) > 0$ tal que

$$|\langle u(\cdot, t) - u(\cdot, s), \phi \rangle| < \varepsilon, \forall |t - s| < \delta, |t|, |s| \leq R'. \quad (7.2)$$

Por outro lado, como, para cada t , $u(\cdot, t)$ é uma distribuição com suporte compacto, então também é uma distribuição de ordem finita, ou seja, existe $N_t \in \mathbb{N}$ tal que para cada compacto $K \subset \{|x| < R'\}$, podemos encontrar constante $C = C(K) > 0$ tais que

$$|\langle u(\cdot, t), \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N_t} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \phi \in C_c^\infty(K). \quad (7.3)$$

Logo, dados $\varepsilon > 0$, $K \subset \{|x| < R'\}$ e $\phi \in C_c^\infty(K)$ existe $\delta = \delta(\phi) > 0$ tal que vale 7.2. Como $\{|t| \leq R'\}$ é compacto, existem $t_1, \dots, t_l$ contidos em neste compacto tais que

$$\{|t| \leq R'\} \subset \cup_{j=1}^l B(t_j; \delta).$$

Além disso, para $j = 1, \dots, l$, existem $C_j > 0$ uma constante e $N_j \in \mathbb{N}$ tais que vale 7.3.

Tome

$$C \doteq \max_{1 \leq j \leq l} C_j, N_0 \doteq \max_{1 \leq j \leq l} N_j.$$

Assim, para $|t| \leq R'$ existe $1 \leq j \leq l$, tal que $|t - t_j| < \delta$ e assim

$$|\langle u(\cdot, t), \phi \rangle| < |\langle u(\cdot, t_j), \phi \rangle| + \varepsilon \leq C \sum_{|\alpha| \leq N_0} \sup_K |\partial^\alpha \phi| + \varepsilon.$$

Visto que a desigualdade acima vale para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos calcular o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e obtemos

$$|\langle u(\cdot, t), \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N_0} \sup_K |\partial^\alpha \phi|,$$

isto é, concluímos que $u(\cdot, t) \in \mathcal{D}'_{N_0}(\{|x| < R''\})$.

Por fim, tem-se que

$$u(\cdot, t) \in H^{k_0}(\{|x| < R''\}),$$

para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$, com $k_0 + \frac{N_0}{2} < \frac{-m}{2}$, qualquer que seja $|t| \leq R'$. Em outras palavras

$$u \in C^0(\{|t| \leq R'\}; H^{k_0}(\{|x| < R''\})).$$

Agora faremos alguns lemas que nos fornecem subespaços densos de funções mais regulares em

$$X_k \doteq \{v \in C^0(\{|t| \leq R'\}; H^k(\mathbb{R}^m)); \text{supp}(v(\cdot, t)) \subset B_{R''}(0)\}, k \in \mathbb{Z},$$

Esta densidade é essencial para a demonstração da *fórmula de Baouendi-Treves* e para obtermos essa densidade lançamos mão de resultados sofisticados como o *Teorema de Arzela-Ascoli*.

Observação 7.2.7. *É importante ressaltar que os espaços*

$$Y_k \doteq C^0(\{|t| \leq R'\}; H^k(\{|x| < R''\})), k \in \mathbb{Z}$$

são normados, a saber

$$\|u\|_{Y_k} \doteq \sup_{|t| \leq R'} \|u(\cdot, t)\|_k, u \in Y_k,$$

sendo que $\|\cdot\|_k$ denota a norma do espaço de Sobolev H^k .

Lema 7.2.8. *Para cada $k \in \mathbb{N}, r_1, r_2 > 0$, considere o seguinte espaço*

$$X \doteq \{f \in C_c^0(\{|t| \leq r_2\}; H^k(\mathbb{R}^m)); \text{supp}(f(\cdot, t)) \subset B_{r_1}(0), \forall |t| \leq r_2\}.$$

Então dada $v \in X$ existe uma sequência $\{\phi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ em $C^\infty(\overline{B}_{r_1+1} \times \overline{B}_{r_2+1})$ que converge para v na norma de X .

Demonstração. A convergência é dividida em duas partes. Sejam $v \in X$ e $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ uma sequência regularizante. Para cada $t \in \mathbb{R}^n$, considere $\rho_l * v(\cdot, t)$, isto é,

$$\rho_l * v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m} \rho(y) v(x - y, t) dy.$$

Temos

$$\text{supp}(\rho_l * v(\cdot, t)) \subset \text{supp}(\rho_l) + \text{supp}(v(\cdot, t)) \subset \overline{B}_{r_1+1},$$

e como $\rho_l * v(\cdot, t)$ é suave temos que

$$\rho_l * v \in C_c^0(\{|t| \leq r_2\}; C_c^\infty(\overline{B}_{r_1+1})).$$

Como $v \in X$, sabemos que $\partial_x^\alpha v(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^m), 0 \leq |\alpha| \leq k$ e $t \in \mathbb{R}^n$. Além do mais, para cada t fixo, quando $l \rightarrow \infty$ vale que

$$\|\partial^\alpha(\rho_l * v(\cdot, t)) - v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \|\rho_l * \partial^\alpha v(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\|\rho_l * v(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_k \rightarrow 0. \quad (7.4)$$

Defina

$$f_l(t) \doteq \|\rho_l * v(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_k, t \in K \doteq \overline{B}_{r_2}, l \in \mathbb{N}.$$

Note que $f_l \in C^0(K; \mathbb{R})$ e que por 7.4 tal sequência converge pontualmente para 0 quando $l \rightarrow \infty$.

Vamos mostrar que esta sequência de funções satisfaz as hipóteses do teorema de Arzela-Ascoli. Para tanto, observe que pela *desigualdade de Young*

$$\|\rho_l * \partial^\alpha v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|\rho_l\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \|\partial^\alpha v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \|\partial^\alpha v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)},$$

então

$$\|\rho_l * v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|v(\cdot, t)\|_k.$$

Além disso, como $v(\cdot, t)$ é contínua na variável t existe constante $C > 0$ tal que

$$\|v(\cdot, t)\|_k \leq C, \forall t \in K.$$

Logo

$$|f_l(t)| \leq 2\|v(\cdot, t)\|_k \leq 2C, \forall t \in K, l \in \mathbb{N},$$

isto é, a sequência é uniformemente limitada.

Novamente por ser $v(\cdot, t)$ é contínua na variável t e K compacto, $v(\cdot, t)$ é uniformemente contínua.

Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_k < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ toda vez que } t, s \in K \text{ cumprem } |t - s| < \delta.$$

Então

$$|f_l(t) - f_l(s)| = \|\rho_l * (v(\cdot, t) - v(\cdot, s)) - (v(\cdot, t) - v(\cdot, s))\|_k \leq 2\|(v(\cdot, t) - v(\cdot, s))\|_k < \varepsilon,$$

para quaisquer $t, s \in K$ com $|t - s| < \delta$ e $l \in \mathbb{N}$ e dessa forma f_l é equicontínua.

Agora podemos aplicar o teorema de Arzela-Ascoli para concluir a existência de uma subsequência $(f_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para 0, isto é,

$$\sup_K \|\rho_{l_j} * v(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_k = \sup_K f_{l_j}(t) \rightarrow 0$$

quando $j \rightarrow \infty$. Por simplicidade, denotamos tal subsequência por $\rho_l * v$.

Agora tome $\psi_l \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sequência regularizante e considere $\psi_l * \rho_l * v$. Destacamos que é possível realizar este produto de convolução, uma vez que

$$\partial^\alpha(\rho_l * v) = \rho_l * \partial^\alpha v \in C_c^0(\overline{B}_{r_2}; C_c^0(\overline{B}_{r_1+1})) \equiv C_c^0(\overline{B}_{r_1+1} \times \overline{B}_{r_2}),$$

para $0 \leq |\alpha| \leq k$. Assim

$$\psi_l * (\rho_l * v)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_l(s) \rho_l * v(x, t - s) ds,$$

analogamente ao caso anterior, para $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\psi_l * (\rho_l * v)(x, \cdot) \in C_c^\infty(\overline{B}_{r_2+1}),$$

então

$$\psi_l * (\rho_l * v) \in C_c^\infty(\overline{B}_{r_1+1} \times \overline{B}_{r_2+1}).$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
|\rho_l * \partial^\alpha v(x, t-s) - \rho_l * \partial^\alpha v(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \rho_l(x-y) |\partial^\alpha v(y, t-s) - \partial^\alpha v(y, t)| dy \leq \\
&\leq \|\partial^\alpha v(\cdot, t-s) - \partial^\alpha v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \\
&\leq \|v(\cdot, t-s) - v(\cdot, t)\|_k.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Mais uma vez, utilizando a continuidade uniforme na variável t de v no compacto K , dado $\varepsilon > 0$ tome $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/l_0 < \delta$ portanto

$$\begin{aligned}
&|\psi_l * (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t) - (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t)| \leq \\
&\leq \int_{B_{\frac{1}{l}}} \psi_l(s) |\rho_l * \partial^\alpha v(x, t-s) - (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t)| ds \leq \\
&\leq \|v(\cdot, t-s) - v(\cdot, t)\|_k < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Resumidamente, obtivemos que

$$|\psi_l * (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t) - (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t)| < \varepsilon, \forall t \in K, x \in \mathbb{R}^m, l \geq l_0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} |\psi_l * (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t) - (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t)|^2 dx \leq \\
&\leq \int_{\overline{B}_{r_1+1}} |\psi_l * (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t) - (\rho_l * \partial^\alpha v)(x, t)|^2 dx < \\
&< \varepsilon^2 \mu(\overline{B}_{r_1+1}), \forall t \in K, l \geq l_0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_K \|\psi_l * (\rho_l * v)(\cdot, t) - (\rho_l * v)(\cdot, t)\|_k < \varepsilon \sqrt{\mu(\overline{B}_{r_1+1})}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluímos a demonstração.

□

Lema 7.2.9. Para cada $k \in \mathbb{N}, r_1, r_2 > 0$, considere o seguinte espaço

$$X \doteq \{f \in C_c^0(\{|t| \leq r_2\}; H^{-k}(\mathbb{R}^m)); \text{supp}(f(\cdot, t)) \subset B_{r_1}(0), \forall |t| \leq r_2\}.$$

Então dada $v \in X$ existe uma sequência $\{\phi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ em $C^\infty(\overline{B}_{r_1+1} \times \overline{B}_{r_2+1})$ que converge para v na norma de X .

Demonstração. A convergência é dividida em duas partes. Sejam $v \in X$ e $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ sequência regularizante. Para cada $t \in \mathbb{R}^n$, considere $v(\cdot, t) * \rho_l$, isto é,

$$\langle v(\cdot, t) * \rho_l, f \rangle = \langle v(\cdot, t), (\rho_l * f^\vee)^\vee \rangle, f \in H^k(\mathbb{R}^m).$$

Observação 7.2.10. Se $u \in H^{-k}(\mathbb{R}^m)$ com suporte contido em $\overline{B}_{r_1}$ então

$$\|u\|_{-k} = \sup_{f \in H^k, \|f\|_k \leq 1} |\langle u, \phi f \rangle|,$$

onde $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ que vale 1 numa vizinhança de $\overline{B}_{r_1}$ e tem suporte contido em $\overline{B}_{r_1+1}$.

Com efeito,

$$f = \phi f + (1 - \phi)f,$$

temos que $(1 - \phi)f = 0$ numa vizinhança de $\overline{B}_{r_1}$ e então

$$\text{supp}((1 - \phi)f) \cap \overline{B}_{r_1} = \emptyset.$$

Logo

$$\langle u, f \rangle = \langle u, \phi f \rangle, \forall f \in H^k.$$

Além do mais, se $C = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|$ então

$$\partial^\alpha(\phi f) = \phi \partial^\alpha f + \sum_{0 \leq |\beta| < |\alpha|} (\partial^\beta \phi)(\partial^{\alpha-\beta} f)$$

e

$$\|\partial^\alpha(\phi f)\|_{L^2} \leq \|\phi \partial^\alpha f\|_{L^2} + \sum_{0 \leq |\beta| < |\alpha|} \|\partial^\beta \phi \partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^2} \leq C \left(\|f\|_k + \sum_{0 \leq |\beta| < |\alpha|} \|f\|_k \right) \leq \tilde{C} \|f\|_k,$$

ou seja, existe constante $\tilde{C}$ tal que $\|\phi f\|_k \leq \tilde{C}$, para $f \in H^k$ com $\|f\|_k \leq 1$.

Por fim, se $f \in H^k(\mathbb{R}^m)$ com suporte contido em B_{r_1+1} para $0 \leq |\alpha| \leq k$ temos

$$\partial^\alpha(\rho_l * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \rho_l(x - y) \partial^\alpha f(y) dy, x \in B_{r_1+1},$$

pois $\text{supp}(\rho_l * f) \subset B_{r_1+1}$, então

$$|\partial^\alpha(\rho_l * f)(x)| \leq \|\partial^\alpha f\|_{L^2} \|\rho_l(x - \cdot)\| = \|\partial^\alpha f\|_{L^2} \leq \|f\|_k, x \in B_{r_1+1}$$

$$\|\partial^\alpha(\rho_l * f)\|_{L^2} \leq \|f\|_k \sqrt{\mu(B_{r_1+1})},$$

e assim concluímos que

$$\|\rho_l * f\|_k \leq \|f\|_k \sqrt{\mu(B_{r_1+1})}.$$

Temos

$$\text{supp}(v(\cdot, t) * \rho_l) \subset \text{supp}(\rho_l) + \text{supp}(v(\cdot, t)) \subset \overline{B}_{r_1+1},$$

$v(\cdot, t) * \rho_l$ é suave e então

$$v * \rho_l \in C_c^0(\{|t| \leq r_2\}; C_c^\infty(\overline{B}_{r_1+1})).$$

Dessa forma, para $f \in H^k(\mathbb{R}^m)$ com $\|f\|_k \leq 1$ vale

$$\begin{aligned} |\langle v(\cdot, t) * \rho_l - v(\cdot, t), \phi f \rangle| &= |\langle v(\cdot, t), (\rho_l * (\phi f)^\vee)^\vee - \phi f \rangle| \leq \\ &\leq \|v(\cdot, t)\|_{-k} \|(\rho_l * (\phi f)^\vee)^\vee - \phi f\|_k = \|v(\cdot, t)\|_{-k} \|\rho_l * (\phi f)^\vee - (\phi f)^\vee\|_k \leq \\ &\leq \|v(\cdot, t)\|_{-k} (\|\rho_l * (\phi f)^\vee\|_k + \|(\phi f)^\vee\|_k) \leq \tilde{C} \|v(\cdot, t)\|_{-k} \|f^\vee\|_k = \\ &= \tilde{C} \|v(\cdot, t)\|_{-k} \|f\|_k \leq \tilde{C} \|v(\cdot, t)\|_{-k}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Como $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^m)} = H^{-k}(\mathbb{R}^m)$, temos que para cada $t \in K = \overline{B}_{r_2}$ vale

$$\|v(\cdot, t) * \rho_l - v(\cdot, t)\|_{-k} \rightarrow 0,$$

quando $l \rightarrow \infty$. Sendo assim, tome

$$g_l(t) \doteq \|v(\cdot, t) * \rho_l - v(\cdot, t)\|_{-k} \in C^0(K; \mathbb{R}).$$

Note que, como vimos, g_l converge pontualmente para 0. Como v é contínua na variável t e K compacto existe constante $M > 0$ tal que

$$\|v(\cdot, t)\|_{-k} \leq M, t \in K$$

e então

$$|g_l(t)| \leq \tilde{C}M, t \in K, l \in \mathbb{N}.$$

Agora mostremos que a sequência de funções é equicontínua. Com efeito, para $t, s \in K$ tem-se que

$$|g_l(t) - g_l(s)| \leq \|(v(\cdot, t) - v(\cdot, s)) * \rho_l\|_{-k} + \|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\langle (v(\cdot, t) - v(\cdot, s)) * \rho_l, \phi f \rangle| &= |\langle v(\cdot, t) - v(\cdot, s), (\rho * (\phi f)^\vee)^\vee \rangle| \leq \\ &\leq \|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k} \|(\rho * (\phi f)^\vee)^\vee\|_k = \|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k} \|(\rho * (\phi f)^\vee)\|_k \leq \\ &\leq \|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k} C_1 \|(\phi f)^\vee\|_k \leq C_2 \|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \sqrt{\mu(B_{r_1+1})}$ e $C_2 = C_1 \tilde{C}$. Mais uma vez, utilizando que v é contínua no compacto K e portanto uniformemente contínua obtemos que a sequência é equicontínua. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, existe subsequência $(g_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para 0, ou seja,

$$\sup_{t \in K} \|v(\cdot, t) * \rho_{l_j} - v(\cdot, t)\|_{-k} \rightarrow 0,$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Antes de provarmos a segunda parte da convergência, ressaltamos que para $f \in H^k$ com norma menor ou igual a 1 vale

$$|\langle v(\cdot, t) * \rho_l, f \rangle| = |\langle v(\cdot, t), (\rho * (f)^\vee)^\vee \rangle| \leq C_1 \|v(\cdot, t)\|_{-k}.$$

Agora tome $\psi_l \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sequência regularizante e considere $\psi_l * \rho_l * v$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{-k} < \varepsilon, \forall |t - s| < \delta.$$

Considere $l_0 > 1/\delta$, assim para $f \in H^k(\mathbb{R}^m)$ com norma menor ou igual a 1 temos

$$\langle \psi_l * (\rho_l * v)(\cdot, t) - (\rho_l * v)(\cdot, t), f \rangle = \int_{B_{\frac{1}{l}}} \psi_l(s) \langle \rho_l * v(\cdot, t - s) - \rho_l * v(\cdot, t), f \rangle ds.$$

Logo

$$\begin{aligned} |\langle \psi_l * (\rho_l * v)(\cdot, t) - (\rho_l * v)(\cdot, t), f \rangle| &\leq C_1 \int_{B_{\frac{1}{l}}} \psi_l(s) \|v(\cdot, t - s) - v(\cdot, t)\|_{-k} ds < \\ &< C_1 \varepsilon \int_{B_{\frac{1}{l}}} \psi_l(s) ds = C_1 \varepsilon \end{aligned}$$

para $l \geq l_0$, isto é,

$$\|\psi_l * (\rho_l * v)(\cdot, t) - (\rho_l * v)(\cdot, t)\|_{-k} < C_1 \varepsilon$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluímos a demonstração do lema. □

Na prova da versão para distribuições também fazemos uso do operador G_τ , porém ainda temos que definir este operador para distribuições.

Como, para cada $|t| \leq R'$, $u(\cdot, t) \in H^k(\mathbb{R}^m)$ com suporte contido em $B_{R''}(0)$ definimos

$$G_\tau u(x, t) \doteq \langle u(\cdot, t), (\tau/\pi)^{m/2} e_\tau(Z(x, t), \cdot, t) h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \rangle.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$G_\tau, T : X_1 \rightarrow X_2,$$

são operadores lineares com $T \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$, onde

$$Tu(\cdot, t) \doteq u(\cdot, t)|_{B_{R/2}}, |t| \leq R'$$

$$X_{1k} = \{v \in C^0(\{|t| \leq R'\}; H^k(\mathbb{R}^m)); \text{supp}(v(\cdot, t)) \subset \overline{B_{R''}}\}$$

e

$$X_{2k} = C^0(\{|t| \leq R'\}; H^k(B_{\frac{R}{2}}))$$

são espaços normados.

Proposição 7.2.11. $G_\tau \in \mathcal{L}(X_{1k}; X_{2k}), \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Primeiramente, façamos o caso em que $k = 0$, nesta situação temos

$$H^0(\mathbb{R}^m) = L^2(\mathbb{R}^m)$$

e assim $u(\cdot, t)$ é uma função em L^2 . Note que este fato simplifica a expressão do operador, a saber

$$G_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) h(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Lembramos que

$$|e_\tau(Z(x, t), x', t)| = |e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2}| \leq e^{\frac{-3\tau}{4}|x - x'|^2}.$$

Defina

$$F_\tau(x) \doteq \tau^{m/2} e^{\frac{-3\tau}{4}|x|^2}, \tau > 0, x \in \mathbb{R}^m.$$

Assim

$$|G_\tau u(x, t)| \leq (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{-3\tau}{4}|x - x'|^2} |u|(x', t) |h(x') \det Z_x(x', t)| dx' \leq CF_\tau * |u|(x, t). \quad (7.7)$$

Como

$$\|F_\tau\|_{L^1} = \tau^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{-3}{4}|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{-3}{4}|x|^2} dx = \|F_1\|_{L^1},$$

aplicando a desigualdade de Young em 7.7 obtemos

$$\|G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C \|F_1\|_{L^1} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} = C_0 \|u(\cdot, t)\|_{L^2},$$

para qualquer $|t| \leq R'$. Portanto

$$\sup_{|t| \leq R'} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_0 \sup_{|t| \leq R'} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}$$

demonstrando o resultado para $k = 0$.

Para $k = 1$, basta encontrarmos uma constante C_0 tal que

$$\sup_{|t| \leq R'} \|\partial_{x_j} G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_0 \sup_{|t| \leq R'} \|u(\cdot, t)\|_{H^1},$$

$j = 1, \dots, m$. Para tanto utilizaremos os campos M_k , visto que

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} M_k.$$

Tendo em vista que as funções μ_{kl} são suaves e $\overline{B}_{R''} \times \overline{B}_{R'}$ é compacto, tem-se que tais funções são limitadas neste conjunto. Logo existe constante M_0 tal que

$$\|M_k u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq M_0 \sum_{j=1}^m \|\partial_{x_j} u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq M_0 \|u(\cdot, t)\|_{H^1},$$

e assim

$$\|G_\tau M_k u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_0 \|M_k u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C_0 M_0 \|u(\cdot, t)\|_{H^1}.$$

Além disso,

$$M_k G_\tau = G_\tau M_k + [M_k, G_\tau]$$

e

$$[M_k, G_\tau]u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) (M_k h)(x') \det Z_x(x', t) dx'.$$

Analogamente ao caso anterior temos

$$|[M_k, G_\tau]u(x, t)| \leq C F_\tau * |u|(x, t),$$

então

$$\|[M_k, G_\tau]u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C \|F_\tau\|_{L^1} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} = C_0 \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C_0 \|u(\cdot, t)\|_{H^1},$$

para qualquer $|t| \leq R'$. Juntamos os fatos, encontramos uma constante, que por simplicidade denotaremos por C_0 , tal que

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq R'} \|M_k G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} &\leq C_0 \sup_{|t| \leq R'} (\|[M_k, G_\tau]u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} + \|G_\tau M_k u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})}) \leq \\ &\leq C_0 \sup_{|t| \leq R'} \|u(\cdot, t)\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Agora observe que como $(\partial Z_k / \partial x_j)$ são funções suaves então são limitadas no compacto $\overline{B}_{R''} \times \overline{B}_{R'}$, portanto existe $C_\mu > 0$ tal que

$$\|\partial_j G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_\mu \sum_{k=1}^m \|M_k G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_\mu C_0 m \|u(\cdot, t)\|_{H^1}.$$

Unindo a expressão acima ao resultado obtido para o caso $k = 0$, obtemos que existe constante $C_1 > 0$, tal que

$$\sup_{\|t\| \leq R'} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{H^1(B_{R/2})} \leq C_1 \|u(\cdot, t)\|_{H^1}.$$

Seja $k_0 \in \mathbb{N}$, lembramos que se

$$M_{K_J} \doteq M_{k_1} \dots M_{k_{j_0}}, 1 \leq j_0 \leq k_0,$$

então

$$\begin{aligned} M_{K_J} G_\tau &= [M_{k_1}, G_\tau] M_{k_2} \dots M_{k_{j_0}} \dots + M_{k_1} [M_{k_2}, G_\tau] \dots M_{k_{j_0}} + \dots \\ &+ M_{k_1} \dots M_{k_{j_0-1}} [M_{j_0}, G_\tau] + G_\tau M_{K_J}. \end{aligned}$$

Vamos estimar $\|M_{K_J} G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})}$.

Para tanto, primeiramente provemos que para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ multi-índice existem funções

$$g_\alpha \in C^\infty(\overline{B}_{R'} \times \overline{B}_{R'} \times \mathbb{R}^m)$$

com

$$\text{supp}(g_\alpha(x, t, \cdot)) \subset \text{supp}(h), \forall (x, t) \in \mathbb{R}^m \times B_{R''},$$

e tais que a seguinte fórmula é verdadeira

$$\partial^\alpha [M_k, G_\tau]u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) g_\alpha(x, x', t) dx'.$$

Provemos por indução. Se $|\alpha| = 1$, então $\partial^\alpha = \partial_{x_j}$. Devido ao fato de

$$e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) (M_k h)(x') \det Z_x(x', t)$$

ter suporte compacto na variável x' , tal função é uniformemente contínua e então podemos derivar sob o sinal de integração na fórmula de $[M_k, G_\tau]u$:

$$\partial_{x_j} [M_k, G_\tau]u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) g_j(x, t, x') dx',$$

onde

$$g_j(x, t, x') = -2\tau(M_k h(x') \det Z(x', t)) \sum_{l=1}^m (Z_l(x, t) - Z_l(x', t)) \partial_{x_j} Z_l(x, t).$$

Suponha que a fórmula vale para $|\alpha| = \alpha_0$. Vamos calcular $\partial_{x_j} \partial^\alpha [M_k, G_\tau]u$. Observe que por hipótese de indução

$$e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) g_\alpha(x, t, x')$$

tem suporte compacto na variável x' , portanto podemos derivar sob o sinal de integração e encontrar

$$(\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) u(x', t) (\partial_{x_j} g_\alpha(x, t, x') + g_\alpha(x, t, x') g_j(x, t, x')) dx'.$$

Como a função

$$\partial_{x_j} g_\alpha(x, t, x') + g_\alpha(x, t, x') g_j(x, t, x')$$

é suave e para cada (x, t) possui suporte contido no suporte de h , fica provada a fórmula.

Utilizando a fórmula e observando que

$$\text{supp}(g_\alpha) \subset \overline{B}_{R''} \times \overline{B}_{R''} \times \text{supp}(h),$$

concluimos que existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|g_\alpha(x, t, x')| \leq C_\alpha,$$

para quaisquer (x, t, x') em seu domínio. Dessa forma,

$$|\partial^\alpha [M_k, G_\tau] u(x, t)| \leq C_\alpha \tau^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau \frac{3}{4} |x-x'|^2} |u|(x', t) dx' = C_\alpha F_\tau * |u|(x, t).$$

Pelo mesmo raciocínio usado anteriormente, tem-se que

$$\|\partial^\alpha [M_k, G_\tau] u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{L^2}$$

e portanto

$$\|[M_k, G_\tau] u(\cdot, t)\|_{H^{|\alpha|}(B_{R/2})} \leq C_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{L^2}.$$

Agora afirmamos que, para cada $l_1, \dots, l_{j_0} = 1, \dots, m$, existem funções suaves $a_{l_1 \dots l_{j_0}}, \dots, a_{l_1}$ tais que

$$M_{K_J} = \sum_{l_1, \dots, l_{j_0}=1}^m a_{l_1 \dots l_{j_0}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m a_{l_1} \partial_{x_{l_1}},$$

para qualquer $j_0 \in \mathbb{N}$.

Para $j_0 = 1$ basta notar que

$$M_k = \sum_{j=1}^m \mu_{kj} \partial_{x_j}.$$

Suponha a fórmula válida para $j_0 \in \mathbb{N}$ e provemos para $j_0 + 1$. Assim

$$\begin{aligned} M_k(M_{K_J}) &= \left(\sum_{j=1}^m \mu_{kj} \partial_{x_j} \right) \left(\sum_{l_1, \dots, l_{j_0}=1}^m a_{l_1 \dots l_{j_0}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m a_{l_1} \partial_{x_{l_1}} \right) = \\ &= \sum_{j, l_1, \dots, l_{j_0}=1}^m \mu_{kj} a_j a_{l_1 \dots l_{j_0}} \partial_{x_j} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \mu_{kj} \partial_{x_j} a_{l_1} \right) \partial_{x_{l_1}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_k M_{K_J} = \sum_{l_1, \dots, l_{j_0}, l_{j_0+1}=1}^m \tilde{a}_{l_1 \dots l_{j_0}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+1}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m \tilde{a}_{l_1} \partial_{x_{l_1}},$$

em que as seguintes funções

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{l_1} &\doteq \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \partial_{x_l} a_{l_1}, \\ \tilde{a}_{l_1, \dots, l_{j_0}} &\doteq \mu_{k j_0+1} a_{j_0+1} a_{l_1 \dots l_{j_0+1}}, \\ \tilde{a}_{l_1, \dots, l_j} &\doteq \mu_{kl_j} a_{l_1 \dots l_{j-1}} + \sum_{l=1}^m \mu_{kl} \partial_{x_l} a_{l_1 \dots l_j}, \quad 2 \leq j \leq j_0, \end{aligned}$$

são suaves e portanto a fórmula está provada.

Além disso, por estes coeficientes serem funções suaves segue que são limitadas no compacto $\overline{B_{R''}} \times \overline{B_{R''}}$ e assim existe constante $K_\alpha > 0$ tal que

$$|a_{l_1, \dots, l_j}(x, t)| \leq M_\alpha, \quad 1 \leq |\alpha|.$$

Agora provemos que, para cada $k_0 \in \mathbb{N}$, existe constante $C_{k_0} > 0$

$$\sup_{\|t\| \leq R'} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}(B_{R/2})} \leq C_{k_0} \sup_{\|t\| \leq R'} \|u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}}.$$

Então, unidos os dois fatos

$$\|M_{K_J} u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq M_{j_0} \sum_{|\alpha| \leq j_0} \|\partial^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq M_{j_0} \|u(\cdot, t)\|_{H^{j_0}}.$$

Por fim, afirmamos que se $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ então existe $C_{\alpha_0} > 0$ constante tal que

$$\|M_{K_J} u(\cdot, t)\|_{H^{\alpha_0}(B_{R/2})} \leq C_{\alpha_0} \|u(\cdot, t)\|_{H^{\alpha_0+j_0}}.$$

De fato, provemos antes que para $\alpha \in \mathbb{Z}$ vale

$$\partial^\alpha M_{K_J} = \sum_{l_1, \dots, l_{j_0+|\alpha|}=1}^m a_{l_1 \dots l_{j_0+|\alpha|}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+|\alpha|}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m a_{l_1} \partial_{x_{l_1}}. \quad (7.8)$$

Faremos a prova da fórmula acima por indução no comprimento de α . Se $|\alpha| = 1$, então

$$\begin{aligned} \partial_{x_l} M_{K_J} &= \sum_{l_1, \dots, l_{j_0}=1}^m a_{l_1 \dots l_{j_0+|\alpha|}} \partial_{x_l} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+|\alpha|}}} + \\ &+ \sum_{l_1, \dots, l_{j_0}=1}^m \partial_{x_l} a_{l_1 \dots l_{j_0+|\alpha|}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+|\alpha|}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m \partial_{x_l} a_{l_1} \partial_{x_{l_1}}. \end{aligned}$$

Suponha que a fórmula é verdadeira para $|\alpha|$ e calculemos $\partial_{x_l} \partial^\alpha M_{K_J}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_l} \partial^\alpha M_{K_J} &= \sum_{l_1, \dots, l_{j_0+|\alpha|}=1}^m a_{l_1 \dots l_{j_0+|\alpha|}} \partial_{x_l} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+|\alpha|}}} + \\ &\sum_{l_1, \dots, l_{j_0+|\alpha|}=1}^m \partial_{x_l} a_{l_1 \dots l_{j_0+|\alpha|}} \partial_{x_{l_1}} \dots \partial_{x_{l_{j_0+|\alpha|}}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m \partial_{x_l} a_{l_1} \partial_{x_{l_1}} \end{aligned}$$

provando a fórmula.

Observe mais uma vez que os coeficientes da fórmula 7.8 são funções suaves e então são limitadas no compacto $\overline{B_{R''}} \times \overline{B_{R''}}$.

Em suma, concluímos que para $0 \leq |\alpha| \leq \alpha_0$ existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|\partial^\alpha M_{K_J} u(\cdot, t)\|_{L^2(B_R)} \leq C_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{H^{|\alpha|+j_0}} \leq C_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{H^{\alpha_0+j_0}},$$

logo

$$\|M_{K_J} u(\cdot, t)\|_{H^{\alpha_0}(B_R)} \leq C_\alpha \|u(\cdot, t)\|_{H^{\alpha_0+j_0}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} & \|M_{k_1} \dots M_{k_j} [M_{k_{j+1}}, G_\tau] M_{k_{j+2}} \dots M_{k_{j_0}} u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq \\ & \leq C_j \| [M_{k_{j+1}}, G_\tau] M_{k_{j+2}} \dots M_{k_{j_0}} u(\cdot, t)\|_{H^j(B_{R/2})} \leq \\ & \leq C_{j+1} C_j \|M_{k_{j+2}} \dots M_{k_{j_0}} u(\cdot, t)\|_{H^j} \leq C_{j+2} C_{j+1} C_j \|u(\cdot, t)\|_{H^j}. \end{aligned}$$

Daí, existe constante $C_{K_J} > 0$ tal que

$$\|M_{K_J} G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{R/2})} \leq C_{K_J} \|u(\cdot, t)\|_{H^{j_0}}, \forall 1 \leq j_0 \leq k_0.$$

Finalmente, a seguinte fórmula nos fornece a última informação necessária para provarmos a proposição no caso $k_0 \in \mathbb{N}$. Para $\alpha \in \mathbb{N}$, afirmamos que vale

$$\partial^\alpha = \sum_{l_1, \dots, l_{|\alpha|}} b_{l_1 \dots l_{|\alpha|}} M_{l_1} \dots M_{l_{|\alpha|}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m b_{l_1} M_{l_1},$$

onde $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}$ e os coeficientes são funções suaves.

Novamente, a prova é dada por indução finita. Para $|\alpha| = 1$:

$$\partial_{x_l} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_k}{\partial x_l} M_k.$$

Suponha a fórmula válida para α e calculemos $\partial_{x_l} \partial^\alpha$:

$$\begin{aligned} & \partial_{x_l} \left(\sum_{l_1, \dots, l_{|\alpha|}} b_{l_1 \dots l_{|\alpha|}} M_{l_1} \dots M_{l_{|\alpha|}} + \dots + \sum_{l_1=1}^m b_{l_1} M_{l_1} \right) = \\ & = \sum_{k, l_1, \dots, l_{|\alpha|}} \partial_{x_l} Z_k b_{l_1 \dots l_{|\alpha|}} M_k M_{l_1} \dots M_{l_{|\alpha|}} + \\ & + \sum_{k, l_1, \dots, l_{|\alpha|}} \left(\sum_{k=1}^m \partial_{x_l} Z_k M_k b_{l_1 \dots l_{|\alpha|}} \right) M_{l_1} \dots M_{l_{|\alpha|}} + \dots + \\ & + \sum_{l_1=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \partial_{x_l} Z_k M_k b_{l_1} \right) M_{l_1}. \end{aligned}$$

Logo se $|\alpha| \leq k_0$:

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha G_\tau u(\cdot, t)\|_{L^2(B_R)} & \leq C_\alpha \sum_{l_1, \dots, l_{|\alpha|}} \|M_{k_{|\alpha|}} u(\cdot, t)\|_{L^2(B_R)} + \dots \\ & + C_\alpha \sum_{l_1=1}^m \|M_{l_1} u(\cdot, t)\|_{L^2(B_R)} \leq \\ & \leq \tilde{C}_\alpha (\|u(\cdot, t)\|_{H^{|\alpha|}} + \dots + \|u(\cdot, t)\|_{H^1}) \leq \\ & \leq C \|u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|G_\tau u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}(B_{R/2})} \leq C \|u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}}.$$

Como as constantes encontradas durante a demonstração não dependem da variável t , concluímos que

$$\sup_{|t| \leq R''} \|G_\tau u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}(B_R)} \leq C \sup_{|t| \leq R''} \|u(\cdot, t)\|_{H^{k_0}}.$$

□

Proposição 7.2.12. $G_\tau \in \mathcal{L}(X_{1-k}; X_{2-k}), \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, se $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ uma delas com suporte compacto denotamos

$$\langle a, b \rangle \doteq \int_{\mathbb{R}^m} a(x)b(x) \det Z_x(x, t) dx$$

e para $u \in C^0(\overline{B_{R'}}; H^{-k}(\mathbb{R}^m))$ defina $G'_\tau u(x, t) \doteq h(x)G_\tau u(x, t)$.

Assim, como

$$e_\tau(Z(x, t), x', t) = e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t)]^2} = e^{-\tau[Z(x', t) - Z(x, t)]^2} = e_\tau(Z(x', t), x, t),$$

então para $v, w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tem-se que $\langle G'_\tau v, w \rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x, t), x', t) h(x') v(x') \det Z_x(x', t) dx' w(x) \det Z_x(x, t) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau(Z(x', t), x, t) h(x') v(x') \det Z_x(x', t) dx' w(x) \det Z_x(x, t) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} h(x') G'_\tau w(x') v(x') \det Z_x(x', t) dx' = \langle v, G'_\tau w \rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$\langle G'_\tau u(\cdot, t), w \rangle = \langle u(\cdot, t), G'_\tau w \rangle, w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ é denso em $H^k(B_R)$, obtém-se que

$$\langle G'_\tau u(\cdot, t), w \rangle = \langle u(\cdot, t), G'_\tau w \rangle, w \in H^k(B_R),$$

então $G'_\tau u(\cdot, t) \in (H^k(B_R))^* = H^{-k}(B_R)$.

Observação 7.2.13. Ressaltamos que se $f \in H^{-k}$ então

$$\|f\|_{-k} = \sup_{w \in H^k, \|w\|_k \leq 1} |\langle f, w \rangle|.$$

Porém, dada $w \in H^k$ existe uma sequência $(\psi_l)_l$ de funções suaves com suporte compacto que convergem para w na norma de H^k . Assim existe l_0 tal que se $l \geq l_0$ vale

$$\|w - \psi_l\|_k < \frac{1}{2}.$$

Então

$$\|\psi_l\|_k \leq \|w\|_k + \|w - \psi_l\|_k < \frac{3}{2},$$

para $l \geq l_0$ e $0 < \|w\|_k \leq 1$. Considere a subsequência $(\psi_l)_{l \geq l_0}$

Enfim, temos que

$$\begin{aligned} |\langle f, w \rangle| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |\langle f, \phi_l \rangle| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{3}{2} |\langle f, \psi_l / (\|\psi_l\|_k) \rangle| \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} |\langle f, \psi \rangle| = \frac{3}{2} \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} |\langle f, \psi \rangle|. \end{aligned}$$

Aplicando o que foi concluído na observação acima ao nosso caso, encontramos

$$\begin{aligned} \|G'_\tau u(\cdot, t)\|_{-k} &\leq \frac{3}{2} \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} |\langle G'_\tau u(\cdot, t), \psi \rangle| = \\ &= \frac{3}{2} \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} |\langle u(\cdot, t), G'_\tau \psi \rangle| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} \|u(\cdot, t)\|_{-k} \|G'_\tau \psi\|_k \leq \\ &\leq C \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} \|u(\cdot, t)\|_{-k} \|G_\tau \psi\|_k \\ &\leq C \sup_{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \|\psi\|_k \leq 1} \|u(\cdot, t)\|_{-k} \|\psi\|_k \leq C \|u(\cdot, t)\|_{-k}. \end{aligned}$$

□

Agora note que se $\chi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $\chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\chi_1 = 1$ numa vizinhança de $\overline{B}_{R'}$, com suporte contido em $B_{R''}$, $\chi_2 = 1$ numa vizinhança de $\overline{B}_{R'}$, com suporte contido em $B_{R''}$, e $\hat{u} \doteq \chi_1 \chi_2 u \in X_1$, então

$$\|G_\tau u - Tu\|_{X_2} = \|G_\tau \hat{u} - T\hat{u}\|_{X_2}.$$

Portanto, segue das proposições a respeito da densidade e continuidade do operador G_τ que existe sequência $(\psi_l)_l$ tal que

$$\|\psi_l - \hat{u}\|_{X_1} \rightarrow 0, l \rightarrow \infty,$$

então

$$\begin{aligned} \|G_\tau \hat{u} - T\hat{u}\|_{X_2} &\leq \|G_\tau(\hat{u} - \psi_l)\|_{X_2} + \|G_\tau \psi_l - T\psi_l\|_{X_2} + \|T(\hat{u} - \psi_l)\|_{X_2} \leq \\ &\leq C \|\hat{u} - \psi_l\|_{X_1} + \|G_\tau \psi_l - T\psi_l\|_{X_2}, \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$ e $\tau > 0$.

Fazendo $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \|G_\tau \hat{u} - T\hat{u}\|_{X_2} \leq C \|\hat{u} - \psi_l\|_{X_1}, \forall l \in \mathbb{N},$$

finalmente fazendo $l \rightarrow \infty$:

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \|G_\tau \hat{u} - T\hat{u}\|_{X_2} = 0.$$

Reunindo os fatos, concluímos que

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|G_\tau u - Tu\|_{X_2} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|G_\tau \hat{u} - T\hat{u}\|_{X_2} = 0.$$

7.2.2 Teorema de Baouendi-Treves

Teorema 7.2.14 (Fórmula Distribucional de Baouendi-Treves). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto que contém a origem e $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável sobre Ω , em que*

$$\mathcal{L}_p^\perp = [dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}], \quad \forall p \in \Omega$$

e $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(\Omega)$. Nessas condições, existem abertos U e W que contêm a origem, $U \subset \bar{U} \subset W \subset \Omega$ tais que se $u \in \mathcal{D}'(W)$ satisfaz

$$\mathcal{L}u = 0,$$

então existe uma sequência de polinômios $P_l \circ Z$ que converge para u na topologia de $\mathcal{D}'(U)$.

Demonstração. Primeiramente visto que o resultado é local pelo que foi feito na seção anterior podemos concluir a convergência de $G_\tau u$ para u no caso distribucional. Assim, para obtermos o resultado no caso distribucional basta definirmos $E_\tau u$ e mostrarmos que o resto $R_\tau u$ converge para zero em seus respectivos espaços.

Analogamente a definição do operador G_τ , definimos

$$E_\tau u(x, t) \doteq \langle u(\cdot, 0), (\tau/\pi)^{m/2} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(\cdot, 0)]^2} h(\cdot) \det Z_x(\cdot, 0) \rangle$$

e

$$R_\tau u(x, t) \doteq G_\tau u(x, t) - E_\tau u(x, t).$$

Observação 7.2.15. *Seendo $u \in C^\infty(\{|t| \leq R'\}; \mathcal{D}(B_{R'}))$, para $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(\cdot, t) \in C^\infty(K), \forall |t| \leq R'$. Nestas condições*

$$v(t) \doteq \langle u(\cdot, t), \phi(\cdot, t) \rangle, \quad |t| \leq R'$$

é uma função C^1 .

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{v(t_0 + he_j) - v(t_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left\langle u(\cdot, t_0 + he_j) - u(\cdot, t_0), \phi(\cdot, t_0) \right\rangle + \\ &+ \left\langle u(\cdot, t_0 + he_j), \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(\cdot, t_0) \right\rangle + \left\langle u(\cdot, t_0 + he_j), \frac{r_\phi}{h} \cdot \right\rangle. \end{aligned}$$

Note que

$$(u(\cdot, t_0 + he_j))|_{|h| < \delta} \subset \mathcal{L}(C_c^\infty(K); \mathbb{C})$$

com

$$u(\cdot, t_0 + he_j) \rightarrow u(\cdot, t_0), \delta \rightarrow 0.$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus para espaços de Fréchet existem $\delta' > 0$ e $M > 0$ com $B_{\delta'} \subset C_c^\infty(K)$ tal que

$$|\langle u(\cdot, t_0 + he_j), \psi \rangle| < M, \forall |h| < \delta.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta'' < \min\{\delta, \delta'\}$ tal que se $|h| < \delta''$ então

$$\frac{r_\phi}{h} \in B_{\delta'}$$

e

$$\left| \left\langle u(\cdot, t_0 + he_j), \frac{r_\phi}{h} \right\rangle \right| < \varepsilon.$$

Calculemos agora a expressão do resto. Considere

$$\tilde{G}_\tau u(\zeta, t') \doteq \langle u(\cdot, t'), e_\tau(\zeta, \cdot, t') h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t') \rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t') &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t_j}(\cdot, t'), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t') \right\rangle + \\ &+ \left\langle u(\cdot, t'), \frac{\partial(e_\tau h)}{\partial t_j}(Z(x, t), \cdot, t') \det Z_x(\cdot, t') \right\rangle + \\ &+ \left\langle u(\cdot, t'), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') h(\cdot) \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j}(\cdot, t') \right\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t_j} = L_j - \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial u}{\partial t_j}(\cdot, t'), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t') \right\rangle = - \\ &- \sum_{k=1}^m \left\langle \left(\lambda_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\cdot, t') \right), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t') \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^m \left\langle u(\cdot, t'), \frac{\partial(e_\tau h)}{\partial x_k}(Z(x, t), \cdot, t') (\lambda_{jk} \det Z_x)(\cdot, t') \right\rangle + \\ &+ \left\langle u(\cdot, t'), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') h(\cdot) \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k}(\cdot, t') \right\rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\left\langle u(\cdot, t'), \frac{\partial(e_\tau h)}{\partial t_j}(Z(x, t), \cdot, t') \det Z_x(\cdot, t') \right\rangle = \\ &= \langle u(\cdot, t'), e_\tau(Z(x, t), \cdot, t') L_j(h)(\cdot) \det Z_x(\cdot, t') \rangle - \\ &- \sum_{k=1}^m \left\langle u(\cdot, t'), \lambda_{jk}(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \frac{e_\tau h}{\partial x_k}(Z(x, t), \cdot, t') \right\rangle, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t') = \langle u(\cdot, t'), (e_\tau L_j(h) \det Z_x)(Z(x, t), \cdot, t'), \rangle$$

pois

$$e_\tau h \left(\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial (\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Defina $g(t') \doteq \tilde{G}_\tau u(Z(x, t), t')$, pelo teorema de Stokes segue que

$$g(t) - g(0) = \int_{[0, t]} dg = \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial t_j}(t') dt'_j.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} G_\tau u(x, t) &= (\tau/\pi)^{m/2} \tilde{G}_\tau u(Z(x, t), t) = (\tau/\pi)^{m/2} g(t) \\ E_\tau u(x, t) &= (\tau/\pi)^{m/2} \tilde{G}_\tau u(Z(x, t), 0) = (\tau/\pi)^{m/2} g(0) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t_j}(t') = \frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x, t), t')$$

obtemos que

$$R_\tau u(x, t) = \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^m r_j(x, t, t', \tau) dt'_j,$$

em que

$$r_j(x, t, t', \tau) = \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', t')]^2} u(x', t') L_j(h)(x') \det Z_x(x', t') dx'.$$

Agora vamos estimar as expressões acima. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ que vale 1 numa vizinhança de $\overline{B}_{R/4}$ e tem suporte contido em $B_{R/2}$. Nestas condições, temos $\chi L_j h = L_j h$.

Note que para cada $k \in \mathbb{N}$, $t' \in [0, t]$, tem-se

$$L_j h u(\cdot, t') \det Z_x(\cdot, t') = \chi(1 - \Delta_{x'})^k (1 - \Delta_{x'})^{-k} (L_j h u(\cdot, t') \det Z_x(\cdot, t')).$$

Defina

$$v_j(\cdot, t') \doteq (1 - \Delta_{x'})^{-k} (L_j h u(\cdot, t') \det Z_x(\cdot, t')),$$

e observe que

$$L_j h u(\cdot, t') \det Z_x(\cdot, t') \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m).$$

Como

$$(1 - \Delta_{x'})^{-k} : H^s(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^{s+2k}(\mathbb{R}^m)$$

é um operador linear contínuo e

$$H^{s+2k}(\mathbb{R}^m) \subset L^\infty(\mathbb{R}^m) \cap C^0(\mathbb{R}^m),$$

se $s + 2k > m/2$, então conseguimos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_j(\cdot, t') \in L^\infty(\mathbb{R}^m) \cap C^0(\mathbb{R}^m).$$

Assim

$$r_j(x, t, t', \tau) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \chi(x') e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} (1 - \Delta_{x'})^k (v_j(x', t')) dx',$$

integrando por partes obtemos

$$r_j(x, t, t', \tau) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} v_j(x', t') (1 - \Delta_{x'})^k (\chi(x') e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) dx',$$

Analogamente ao caso clássico, tem-se que existe $g \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^m \times [0, t])$ função suave com suporte compacto na variável x' tal que

$$|(1 - \Delta_{x'})^k (\chi(x') e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2})| \leq e^{-\tau C} \tau^{2k} g(x, t, x', t).$$

Dessa maneira,

$$V \times [0, t] \ni (x, t, t') \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |v_j(x', t') g(x, t, x', t)| dx' < \infty$$

é uma função contínua então existe constante $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m} |v_j(x', t') g(x, t, x', t)| dx' \leq M,$$

para quaisquer $|x| \leq R/2, |t'| \leq |t| \leq R$.

Finalmente

$$|r_j(x, t, t', \tau)| \leq \frac{\tau^{2k+m/2}}{\pi^{m/2}} M e^{-C\tau} \rightarrow 0,$$

uniformemente quando $\tau \rightarrow +\infty$ e então

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} |R_\tau u(x, t)| &\leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^m |r_j(x, t, t', \tau)| dt'_j = \\ &= \int_{[0, t]} \sum_{j=1}^m \lim_{\tau \rightarrow +\infty} |r_j(x, t, t', \tau)| dt'_j = 0. \end{aligned}$$

Observe que da forma como definimos $E_\tau u$, mesmo quando u é uma distribuição, esta função é suave nas variáveis (x, t) . Sendo assim, como no nosso caso

$$u \in X_{1k}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, temos que existe sequência de polinômios P_l que aproxima a função $e^{-\tau[\zeta]^2}$ na topologia de C^∞ no conjunto

$$\{\tau^{1/2}(Z(x, t) - Z(x', 0)); |x|, |x'| \leq R/2, |t| \leq R\}$$

em que

$$P_l(Z(x, t) - Z(x', 0)) = \sum_{|\alpha|=0}^l C(x')(Z(x, t))^\alpha$$

e assim

$$\begin{aligned} & \sup_{|t| \leq R} \left\| E_\tau u(\cdot, t) - (\tau/\pi)^{m/2} \langle u(\cdot, t), P_l(Z(x, t) - Z(\cdot, 0))h(\cdot) \det Z_x(\cdot, 0) \rangle \right\|_k = \\ & = \sup_{|t| \leq R} \left\| (\tau/\pi)^{m/2} \langle u(\cdot, t), (e^{-\tau[Z(x, t) - Z(\cdot, 0)]^2} - P_l(Z(x, t) - Z(\cdot, 0)))h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \rangle \right\|_k \end{aligned}$$

converge para zero quando $l \rightarrow \infty$.

Logo

$$\begin{aligned} & \sup_{|t| \leq R} \left\| u(\cdot, t) - (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^l (Z(\cdot, t))^\alpha \langle u(\cdot, t), C_\alpha(\cdot)h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \rangle \right\|_k \leq \\ & \leq \sup_{|t| \leq R} \|u(\cdot, t) - G_\tau u(\cdot, t)\|_k + \sup_{|t| \leq R} \|R_\tau u(\cdot, t)\|_k + \\ & + \sup_{|t| \leq R} \left\| E_\tau u(\cdot, t) - (\tau/\pi)^{m/2} \langle u(\cdot, t), P_l(Z(x, t) - Z(\cdot, 0))h(\cdot) \det Z_x(\cdot, 0) \rangle \right\|_k, \end{aligned}$$

fazendo $l \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq R} \left\| u(\cdot, t) - (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^l (Z(\cdot, t))^\alpha \langle u(\cdot, t), C_\alpha(\cdot)h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \rangle \right\|_k \leq \\ & \leq \sup_{|t| \leq R} \|u(\cdot, t) - G_\tau u(\cdot, t)\|_k + \sup_{|t| \leq R} \|R_\tau u(\cdot, t)\|_k, \end{aligned}$$

e finalmente fazendo $\tau \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{|t| \leq R} \left\| u(\cdot, t) - (\tau/\pi)^{m/2} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (Z(\cdot, t))^\alpha \langle u(\cdot, t), C_\alpha(\cdot)h(\cdot) \det Z_x(\cdot, t) \rangle \right\|_k = 0.$$

□

Referências

- [1] S. Berhanu, P. Cordaro and J. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.
- [2] Hormander, L. V., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, New York 1963. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 119.
- [3] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. Wiley Interscience 1999. Citado na página 112.
- [4] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York 1967. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.
- [5] F. Trèves, *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by systems of complex vector fields*. Centre Math. École Polytechnique, 1981. Citado na página 121.
- [6] E. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003. Citado na página 99.