UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Ferramentas de Aproximação em Espaços Compactos
2-Homogêneos**

Angelina Carrijo de Oliveira Ganancin Faria

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Angelina Carrijo de Oliveira Ganancin Faria

Ferramentas de Aproximação em Espaços Compactos 2-Homogêneos

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
Setembro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C316f Carrijo, Angelina de Oliveira Ganancin Faria
 Ferramentas de aproximação em espaços compactos 2-
homogêneos / Angelina de Oliveira Ganancin Faria
Carrijo; orientadora Thaís Jordão. -- São Carlos,
2019.
 65 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

 1. K-funcional do tipo Peetre. 2. módulo de
suavidade fracionário. 3. raio de aproximação. 4.
decaimento de sequências de autovalores. 5. condição
de Hölder. I. Jordão, Thaís, orient. II. Título.

Angelina Carrijo de Oliveira Ganancin Faria

Approximation Tools on Compact Two-Point Homogeneous Spaces

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Thaís Jordão

**USP – São Carlos
September 2019**

*“Porque um homem que foge do seu medo pode descobrir que, afinal,
apenas enveredou por um atalho para ir ao seu encontro.”*
(J. R. R. Tolkien)

RESUMO

CARRIJO, A. O. **Ferramentas de Aproximação em Espaços Compactos 2-Homogêneos**. 2019. 65 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Neste trabalho apresentamos duas caracterizações para o K -funcional do tipo Peetre sobre os espaços compactos 2-homogêneos. Provamos a equivalência no sentido assintótico entre o módulo de suavidade de ordem fracionária e o K -funcional do tipo Peetre, e a equivalência deste último com o raio de aproximação de um operador multiplicativo definido para este propósito. Como consequência obtivemos a desigualdade de Marchaud, neste contexto. Estes resultados generalizam os equivalentes, e bem conhecidos, sobre o contexto esférico. As caracterizações foram aplicadas para mostrar que uma condição abstrata de Hölder, ou de diferenciabilidade de ordem finita, sobre núcleos que geram operadores integrais positivos, implica a obtenção de uma taxa de decrescimento polinomial para suas sequências de autovalores.

Palavras-chave: K -funcional, módulo de suavidade fracionário, raio de aproximação, decrescimento de sequências de autovalores, condição de Hölder.

ABSTRACT

CARRIJO, A. O. **Approximation Tools on Compact Two-Point Homogeneous Spaces**. 2019. 65 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

We prove two characterizations for the Peetre type K -functional on $\mathbb{M}$, a compact two-point homogeneous space. One in terms of the rate of approximation of a family of multiplier operators defined to this purpose, and another in terms of the fractional moduli of smoothness. As a direct consequence of those we obtained the Marchaud inequality on this framework. These extend the well known results on the spherical setting. The characterizations are employed to show that an abstract Hölder condition or finite order of differentiability condition imposed on kernels generating certain operators implies a sharp decay rates for their eigenvalues sequences.

Keywords: K -functional, fractional modulus of smoothness, rate of approximation, decay of eigenvalue sequences, Hölder condition.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 CONTEXTO E RESULTADOS PRINCIPAIS	15
1.1 Espaços Compactos 2-Homogêneos	15
1.2 Polinômios de Jacobi	18
1.3 Ferramentas de Aproximação	20
1.4 Resultados principais	24
2 CARACTERIZAÇÃO DO K-FUNCIONAL PARTE I	25
2.1 Estimativas para os polinômios de Jacobi	25
2.2 Resultados auxiliares	31
2.3 Demonstração dos Teoremas 1.6 e 1.7	39
3 CARACTERIZAÇÃO DO K-FUNCIONAL PARTE II	41
3.1 Estimativas para sequências de multiplicadores	41
3.2 Demonstração do Teorema 1.8	45
4 APLICAÇÕES	49
4.1 Desigualdade de Hausdorff-Young	49
4.2 Sequência de autovalores de operadores integrais	53
4.3 Uma classe de exemplos	60
REFERÊNCIAS	61
Índice	65

INTRODUÇÃO

Os espaços compactos 2-homogêneos, também conhecidos como espaços compactos simétricos de posto 1 (HELGASON, 1965), formam uma classe importante de variedades Riemannianas homogêneas que possuem uma estrutura muito bem desenvolvida de análise harmônica. Em particular, o operador de Laplace-Beltrami está bem definido e possui autoespaços análogos aos espaços dos harmônicos esféricos sobre as esferas m -dimensionais (SEELEY, 1966; MORIMOTO, 1998). Na verdade, as esferas unitárias m -dimensionais centradas na origem, formam uma das classes contempladas pelos espaços compactos 2-homogêneos. A analogia natural entre esferas e espaços compactos 2-homogêneos permite que uma variedade de problemas clássicos de análise harmônica e de teoria da aproximação possam ser estudados nesses espaços (BROWN; DAI, 2005; KUSHPEL; TOZONI, 2012).

Na teoria da aproximação construtiva existem diversas ferramentas que podem ser usadas para medir a suavidade de funções nos mais diversos contextos. Nesse sentido, estabelecer relações entre as ferramentas é de grande valia. Em particular, as relações entre módulos de suavidade, K -funcionais e raios de aproximação de operadores média ganham especial atenção. As duas primeiras ferramentas são bastante abstratas apesar de muito úteis teoricamente, enquanto a terceira, mais palpável, oferece uma alternativa computacionalmente mais viável do que as anteriores. Portanto, estabelecer relações entre tais ferramentas, conforme veremos, é bastante conveniente para a aplicabilidade delas em áreas correlatas. O estudo realizado, apesar de muito bem sedimentado em outros contextos como o esférico, euclidiano e toro (RUSTAMOV, 1993; DITZIAN; RUNOVSKII, 1999; BELINSKY; DAI; DITZIAN, 2003; TIKHONOV, 2004/05), ainda é pouco desenvolvido sobre os espaços compactos 2-homogêneos.

O módulo de suavidade para cada função f considerada, é uma função a valores reais que oferece propriedades interessantes e que nos permite obter informações sobre a suavidade da função. Além disso, o módulo de suavidade possui uma estreita relação com *operador melhor aproximação*:

$$E_k(f) = \inf_{g \in Y_k} \|f - g\|_p, \quad k = 0, 1, \dots$$

onde Y_k é o subespaço de polinômios de grau $k > 1$ em $m + 1$ variáveis, por meio dos Teoremas direto e inverso. Estas ferramentas foram bem exploradas no contexto esférico (DAI; XU, 2010) e possuem alguns estudos sobre os espaços compactos 2-homogêneos (PLATONOV, 2009). O K -funcional do tipo Peetre, ou simplesmente K -funcional, é também uma função a valores reais, e é fácil notar uma relação com a melhor aproximação diretamente de sua definição. O estudo a respeito de equivalências das ferramentas anteriores, no sentido assintótico, surge em alguns trabalhos dos anos 80, como por exemplo (WEHRENS, 1981; KALYABIN, 1987).

Nesta tese, exploramos as relações entre as ferramentas acima mencionadas sobre os espaços compactos 2-homogêneos. O primeiro resultado a ser apresentado estabelece a equivalência entre o módulo de suavidade de ordem fracionária e o K -funcional. Este é o análogo do resultado clássico na teoria da aproximação: caracterizar o K -funcional através de

equivalências assintóticas via ferramentas mais “simples”, simplicidade esta que depende do contexto e objetivo. A versão esférica desse resultado e aplicações podem ser encontradas em (RUSTAMOV, 1993; DAI; DITZIAN, 2004). A versão para os espaços compactos 2-homogêneos, com a ordem r inteira positiva, é provada em (PLATONOV, 2009).

Resultados deste tipo têm inúmeras aplicações para uma variedade de problemas na teoria da aproximação, principalmente na obtenção de relações entre módulos de suavidade de diferentes ordens. Resultados desta natureza podem ser encontrados em abundância na literatura sob as seguintes nomenclaturas: desigualdade de Kolyada, de Marchaud e de Ul’yanov (KOLYADA, 1988; RUSTAMOV, 1991; DITZIAN; TIKHONOV, 2005; SIMONOV; TIKHONOV, 2010). Estas últimas, por sua vez, oferecem uma alternativa ao estudo de imersões de espaços de suavidade (veja (TREBELS, 2010) para outro contexto). Desta forma, o resultado obtido oferece o necessário para iniciar o estudo das desigualdades citadas sobre os espaços compactos 2-homogêneos. Neste trabalho, foi obtida uma primeira versão da desigualdade de Marchaud, em conjunto com membros do grupo de pesquisa de Análise Funcional Aplicada do ICMC, (CARRIJO; JORDAO; SANTOS, 2019).

O resultado seguinte, cujo caso particular pode ser encontrado em (DAI; DITZIAN, 2004), estabelece a equivalência entre o K -funcional e o raio de aproximação do operador média generalizado. Tal equivalência nos permitiu analisar o comportamento assintótico de sequências de autovalores de certos operadores integrais, gerados por núcleos satisfazendo ou uma certa condição de Hölder abstrata ou suavidade segundo o operador de Laplace-Beltrami. Resultados deste tipo fornecem uma taxa de decrescimento polinomial dos coeficientes de Fourier de núcleos com uma representação em série do tipo Mercer. A versão esférica desse resultado foi provado anteriormente por (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014) e, neste trabalho, ganha sua versão para os espaços compactos 2-homogêneos (CARRIJO; JORDAO, 2019).

No Capítulo 1, é apresentada toda a estrutura do nosso contexto de trabalho. Estabelecemos as notações e definições pertinentes dos operadores envolvidos no estudo e das ferramentas utilizadas. Também, são enunciados os resultados principais obtidos neste projeto e, portanto, principais desta tese. Já no Capítulo 2, provamos o resultado acerca da equivalência assintótica entre o módulo de suavidade de ordem fracionária e o K -funcional, precedido de várias considerações e resultados auxiliares. Também, provamos a versão da desigualdade de Marchaud neste contexto. No Capítulo 3, o enfoque é provar a equivalência assintótica entre o K -funcional e o raio de aproximação do operador média generalizado. Para isso, apresentamos várias estimativas envolvendo as sequências de multiplicadores de tais operadores. Finalmente, no Capítulo 4, os resultados são aplicados afim de obter taxa de decaimento polinomial para sequências de autovalores de operadores integrais gerados por certos núcleos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

CONTEXTO E RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo introdutório, de maneira compilada e sucinta, apresentamos os espaços compactos 2-homogêneos e as ferramentas de aproximação que serão exploradas no decorrer do trabalho. Apresentamos, também, os espaços de funções considerados, algumas de suas propriedades, os operadores definidos sobre eles e úteis para medir suavidade. Por fim, enunciamos os principais resultados desta tese, a serem demonstrados nos capítulos subsequentes.

1.1 Espaços Compactos 2-Homogêneos

Um espaço métrico (X, d) é dito *2-homogêneo* se, para quaisquer dois pares de pontos (p_1, q_1) e (p_2, q_2) satisfazendo $d(p_1, q_1) = d(p_2, q_2)$, existir uma isometria que leva p_1 e q_1 em p_2 e q_2 , respectivamente. Neste trabalho, denotaremos por $\mathbb{M}$ um espaço compacto 2-homogêneo de dimensão $m \geq 1$. Cada $\mathbb{M}$ é uma variedade Riemanniana e assim possui uma métrica invariante $d(\cdot, \cdot)$, que pode ser considerada normalizada de modo que todas as geodésicas tenham mesmo comprimento 2π . Além disso, $\mathbb{M}$ é munido de uma medida dx , induzida pela medida de Haar proveniente de sua representação como quociente L/S_O , em que O é um ponto fixo em $\mathbb{M}$, L é um Grupo de Lie compacto relacionado a componente identidade do grupo de isometrias de $\mathbb{M}$ e S_O é o subgrupo estacionário do ponto O . Ao leitor interessado, sugerimos as referências (GANGOLLI, 1967; BROWN; DAI, 2005; PLATONOV, 2009; KUSHPEL; TOZONI, 2012) para informações mais detalhadas.

De acordo com (WANG, 1952), os espaços compactos 2-homogêneos são: as esferas unitárias $\mathbb{S}^m$, $m = 1, 2, \dots$; os espaços projetivos reais $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, $m = 2, 3, \dots$; os espaços projetivos complexos $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $m = 4, 6, \dots$; os espaços projetivos quaterniônicos $\mathbb{P}^m(\mathbb{H})$, $m = 8, 12, \dots$ e o plano elíptico de Cayley 16-dimensional $\mathbb{P}^{16}$. Ao longo desta tese, exceto se mencionado o contrário, assumimos $\mathbb{M} \neq \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, uma vez que os problemas de análise harmônica nos espaços projetivos reais podem ser reduzidos aos problemas correspondentes na esfera $\mathbb{S}^m$ (PLATONOV, 1997), e os resultados que serão apresentados aqui já possuem a versão esférica estabelecida nos trabalhos (RUSTAMOV, 1993; DAI; XU, 2013).

Os espaços compactos 2-homogêneos satisfazem propriedades de mergulho isométrico análogas aos que os anéis esféricos (esferas com uma dimensão a menos) satisfazem no contexto esférico (BERENS; BUTZER; PAWELKE, 1968/1969). Um espaço métrico (M_1, d_1) está mergulhado isometricamente em outro (M_2, d_2) se existe uma função $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$, tal que

para todo $x, y \in M_1$, $d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$. Segundo (ASKEY, 1975) as seguintes imersões isométricas, entre os espaços compactos 2-homogêneos, existem:

- $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$;
- $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{m+1}(\mathbb{R})$, $m = 2, 3, \dots$;
- $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{m+2}(\mathbb{C})$, $m = 4, 6, \dots$;
- $\mathbb{P}^m(\mathbb{H}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{m+4}(\mathbb{H})$, $m = 8, 12, \dots$;
- $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{2m}(\mathbb{C})$, $m = 2, 3, \dots$;
- $\mathbb{P}^{2m}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{4m}(\mathbb{H})$, $m = 2, 3, \dots$;
- $\mathbb{P}^8(\mathbb{H}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{16}$;

e se $m \geq 2$, existe $d \geq 1$ tal que

$$\mathbb{S}^d \hookrightarrow \mathbb{M}. \quad (1.1)$$

Seja $\mathbb{M}$ um espaço compacto 2-homogêneo de dimensão $m \geq 2$. Dado $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções complexas p -integráveis em $\mathbb{M}$ será denotado por $(L^p(\mathbb{M}), \|\cdot\|_p)$. Em particular, $L^2(\mathbb{M})$ é o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável sobre $\mathbb{M}$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{M}),$$

em que σ_m é a constante de normalização dada pelo volume de $\mathbb{M}$. Para $p = \infty$, $L_\infty(\mathbb{M}) = C(\mathbb{M})$ é o espaço de Banach das funções contínuas em $\mathbb{M}$, com a norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C := \max_{x \in \mathbb{M}} |f(x)|.$$

O espaço $\mathbb{M}$ admite essencialmente um operador diferencial invariante de segunda ordem $\mathcal{B}$ chamado de *operador de Laplace-Beltrami*, sobre os espaços de funções definidas em $\mathbb{M}$, (PLATONOV, 1997). O operador $\mathcal{B}$ possui um espectro discreto em $\mathbb{M}$ dado por números reais não negativos que, organizados de maneira crescente, são $\{k(k + \alpha + \beta + 1) : k = 0, 1, \dots\}$. Os parâmetros α e β dependem de cada $\mathbb{M}$, com $\alpha = (m - 2)/2$ e

- $\beta = (m - 2)/2$, para $\mathbb{S}^m$;
- $\beta = -1/2$, para $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$;
- $\beta = 0$, para $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$;
- $\beta = 1$, para $\mathbb{P}^m(\mathbb{H})$ e
- $\beta = 3$, para $\mathbb{P}^{16}$.

Cada autovalor $k(k + \alpha + \beta + 1)$ de $\mathcal{B}$ está associado ao autoespaço $\mathcal{H}_k^m$, $k = 0, 1, \dots$, de dimensão finita $d_k^m := \dim \mathcal{H}_k^m$. Estes espaços são dois a dois ortogonais segundo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ e, se $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^m\}$ denota uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k^m$ em $L^2(\mathbb{M})$, então $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^m; k = 0, 1, \dots\}$ forma uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{M})$. Quando restritos à $\mathbb{S}^m$, estes elementos são os bem conhecidos espaços dos harmônicos esféricos em $m + 1$ variáveis e grau k (RUSTAMOV, 1993; PLATONOV, 1997). Por conveniência e similaridade, esses espaços serão assim chamados no presente contexto.

O estabelecimento das notações anteriores nos permite considerar, sobre os espaços compactos 2-homogêneos, expansões em séries de Fourier. Os coeficientes de Fourier de uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$ são definidos por

$$\widehat{f}_{k,j} := \frac{1}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} f(y) \overline{Y_{k,j}(y)} dy, \quad j = 1, 2, \dots, d_k^m; k = 0, 1, \dots,$$

e sua expansão em série de Fourier é

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} \widehat{f}_{k,j} Y_{k,j}.$$

A Fórmula de Adição nesse contexto (BROWN; DAI, 2005), é dada por

$$\sum_{j=1}^{d_k^m} Y_{k,j}(x) \overline{Y_{k,j}(y)} = c_k P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta), \quad x, y \in \mathbb{M}, \theta = d(x, y), k = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

em que

$$c_k = \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(k + \alpha + \beta + 1) (2k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(k + \beta + 1)},$$

Γ indica a função gama usual e $P_k^{(\alpha, \beta)}$ denota o polinômio de Jacobi (SZEGŐ, 1939), de grau k com índices $\alpha, \beta > -1$, não normalizado, ou seja,

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(1) := \binom{k + \alpha}{k} = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha + 1)}.$$

A Fórmula de Adição (1.2), nos permite ainda expressar a *projeção ortogonal* $\mathcal{Y}_k$ de $L^2(\mathbb{M})$ em $\mathcal{H}_k^m$, $k = 0, 1, \dots$, através da convolução

$$\mathcal{Y}_k(f)(x) = c_k \int_{\mathbb{M}} P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{M}, \theta = d(x, y). \quad (1.3)$$

Além disso, ela permite estimar a dimensão de cada espaço de harmônico esférico:

$$d_k^m = c_k P_k^{(\alpha, \beta)}(1) \asymp k^{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

O símbolo $A \asymp B$ denota que $c_1 A \leq B \leq c_2 A$, para constantes positivas c_1, c_2 que não dependem das variáveis essenciais de A e B . Adicionalmente, se vale somente $B \leq c_2 A$, então escrevemos $B \lesssim A$. Tais simbologias serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Sugerimos, por exemplo, as referências (BROWN; DAI, 2005; PLATONOV, 2009; KUSHPEL; TOZONI, 2012) para o apresentado até agora.

1.2 Polinômios de Jacobi

A seguir, listamos algumas propriedades envolvendo os polinômios de Jacobi que serão cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. Uma das principais referências aqui é (SZEGŐ, 1939), outras serão citadas convenientemente.

Os polinômios de Jacobi $P_k^{(\alpha, \beta)}$ de grau $k = 0, 1, \dots$, associados ao par (α, β) , com $\alpha, \beta > -1$, formam uma família ortogonal sobre $[-1, 1]$, com relação à medida $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$, ou seja,

$$\int_{-1}^1 P_j^{(\alpha, \beta)}(t) P_k^{(\alpha, \beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = \delta_{j,k} l_k, \quad k, j = 0, 1, \dots,$$

em que

$$l_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2k+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)},$$

e $\delta_{j,k}$ é o delta de Kronecher.

Os polinômios de Jacobi serão utilizados, também, em sua forma normalizada

$$Q_k^{(\alpha, \beta)}(t) := \frac{P_k^{(\alpha, \beta)}(t)}{P_k^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Os polinômios $Q_k^{(\alpha, \alpha)}$ são conhecidos como os polinômios de Gegenbauer e admitem uma representação em termos de cossenos como a seguir (SZEGŐ, 1939, p.93),

$$Q_k^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) = \sum_{i=0}^{[k/2]} b_{k,i} \cos((k-2i)\theta), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad (1.5)$$

em que os coeficientes $b_{k,i}$ são positivos para $\alpha > -1/2$ e $[k/2]$ representa a parte inteira de $k/2$. Mais que isso, temos

$$b_{k,i} = \frac{\binom{k-i+\alpha-1/2}{k-i} \binom{i+\alpha-1/2}{i}}{\binom{k+2\alpha}{k}}, \quad i = 0, \dots, [k/2], \quad k = 0, 1, \dots$$

É bem sabido que os polinômios de Jacobi satisfazem a fórmula diferencial (SZEGŐ, 1939),

$$\frac{d}{dt} \left[P_k^{(\alpha, \beta)}(t) \right] = \frac{1}{2} (k + \alpha + \beta + 1) P_{k-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 1, 2, \dots,$$

cuja versão para polinômios normalizados é

$$\frac{d}{dt} \left[Q_k^{(\alpha, \beta)}(t) \right] = \frac{k}{2(\alpha+1)} (k + \alpha + \beta + 1) Q_{k-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(t). \quad (1.6)$$

Outras propriedades necessárias são listadas a seguir.

Lema 1.1. (DAI; WANG; YU, 2002) Se $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ e $k = 1, 2, \dots$, então

$$\left| Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| \lesssim \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ (k\theta)^{-\alpha-1/2}, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ k(\pi - \theta)^{-\beta-1/2}, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

O próximo resultado é uma compilação das Proposições 3.2 e 3.3 de (PLATONOV, 2009).

Lema 1.2. Sejam $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ e $k = 1, 2, \dots$. Valem as seguintes desigualdades:

i) Se l é um inteiro positivo, então

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| \lesssim \theta^l, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

ii) Se $\tau > 0$, então existe um número $c = c(\tau, \alpha, \beta) > 0$, tal que

$$1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \geq c, \quad \text{com } k\theta \geq \tau.$$

iii) Adicionalmente,

$$\begin{aligned} 1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &\lesssim k(k + \alpha + \beta + 1)\theta^2, & 0 \leq \theta \leq \pi/2; & \text{ e} \\ k(k + \alpha + \beta + 1)\theta^2 &\lesssim 1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \pi/(k + \alpha + \beta + 1). \end{aligned}$$

De acordo com (ASKEY, 1975, p.63-66), para índices $\alpha = (m-2)/2$, $\beta = 0, 1, 3$ e $\delta = \beta + 1, \beta + 2, \dots$, os polinômios de Jacobi podem ser decompostos da seguinte forma:

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(t) = \sum_{j=0}^k a_{k,j} P_j^{(\alpha, \delta)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots,$$

em que cada $a_{k,j}$ é não negativo. Em particular, podemos sempre escolher $\delta = \alpha$, donde obtemos

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(t) = \sum_{j=0}^k a_{k,j} P_j^{(\alpha, \alpha)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.7)$$

com $a_{k,j}$ todos não negativos. Explicitamente, temos

$$a_{k,j} = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)\Gamma(2\alpha + j + 1)\Gamma(2\alpha + 2j + 2)\Gamma(k + \alpha + \beta + j + 1)}{\Gamma(\alpha - \beta - k + j + 1)\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)\Gamma(k - j + 1)\Gamma(\alpha + j + 1)\Gamma(2\alpha + 2j + 1)\Gamma(k + 2\alpha + j + 2)}.$$

A validade da decomposição (1.7) está diretamente ligada ao mergulho (1.1), de uma esfera em $\mathbb{M}$ (veja (ASKEY, 1975)). Observado isso, é possível obter uma representação em termos de cossenos para os polinômios de Jacobi, sobre certos $\mathbb{M}$, como a seguir.

Proposição 1.3. Se $\alpha = (m-2)/2$ e $\beta = 0, 1, 3$, então

$$Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k,j,i} \cos((j-2i)\theta), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad (1.8)$$

em que os coeficientes $a_{k,j,i}$ são todos não negativos.

Demonstração. Considerando as possíveis opções de α e β sobre $\mathbb{M}$, o polinômio de Jacobi não normalizado $P_k^{(\alpha,\beta)}$ pode ser escrito, segundo a fórmula (1.7), como

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{j=0}^k a_{k,j} P_j^{(\alpha,\alpha)}(t), \quad t \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots,$$

com $a_{k,j} \geq 0$. Fazendo a mudança de variável $t = \cos \theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, a igualdade anterior implica em

$$Q_k^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^k a_{k,j} Q_j^{(\alpha,\alpha)}(\cos \theta) \frac{P_j^{(\alpha,\alpha)}(1)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}. \quad (1.9)$$

Da representação do polinômio de Gegenbauer $Q_j^{(\alpha,\alpha)}$ na fórmula (1.5) e, definindo

$$a_{k,j,i} := a_{k,j} b_{j,i} \frac{P_j^{(\alpha,\alpha)}(1)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)},$$

obtemos

$$Q_k^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} a_{k,j,i} \cos((j-2i)\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

com $a_{k,j,i} \geq 0$. ■

Observação 1.4. O lema anterior não inclui o caso em que $\beta = (m-2)/2$, ou seja, quando $\mathbb{M}$ é a esfera unitária. No entanto, para este caso, o polinômio de Jacobi associado se reduz ao polinômio de Gegenbauer $Q_k^{(\alpha,\alpha)}$ que já admite a representação em termos de cossenos dada em (1.5).

1.3 Ferramentas de Aproximação

Nesta seção, apresentamos as ferramentas de aproximação de interesse neste trabalho, assim como algumas propriedades que tais ferramentas gozam. As principais referências aqui são (RUSTAMOV, 1993; BROWN; DAI, 2005; KUSHPEL; TOZONI, 2012), além das que serão citadas ao longo do texto mediante a necessidade.

Dizemos que T em $L^p(\mathbb{M})$ é um *operador multiplicativo* se é limitado e existe uma sequência $\{\mu_k\}_k$ de números complexos tal que,

$$\mathcal{Y}_k(T(f)) = \mu_k \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

ou seja, as projeções ortogonais do operador sobre o espaço dos harmônicos esféricos são múltiplos das próprias projeções. Nesse caso, a sequência $\{\mu_k\}_k$ é chamada de *sequência de multiplicadores* de T .

No decorrer deste trabalho, poderá ser observado que os operadores considerados são operadores multiplicativos, o que será essencial na prova de alguns dos resultados.

O operador média de uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$ (PLATONOV, 1997), é dado por

$$S_\theta(f)(x) := \frac{1}{\sigma_\theta^m} \int_{\sigma_\theta^x} f(y) d\sigma_x(y), \quad x \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (1.10)$$

em que $\sigma_\theta^x = \{y \in \mathbb{M} : d(x, y) = \theta\}$, σ_θ^m denota sua área (que não depende de x) e $d\sigma_x$ é o elemento de volume σ_θ^x . Este operador é limitado em $L^p(\mathbb{M})$, precisamente temos

$$\|S_\theta(f)\|_p \leq \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}),$$

e a família $\{S_\theta\}_\theta$ apresenta uma das propriedades básicas de aproximação: a propriedade de aproximação da identidade, isto é,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|S_\theta(f) - f\|_p = 0, \quad f \in L^p(\mathbb{M}).$$

O operador média, também, é um operador multiplicativo em $L^p(\mathbb{M})$, ou seja, para $f \in L^p(\mathbb{M})$ vale a seguinte propriedade (PLATONOV, 2009, p. 855-856):

$$\mathcal{Y}_k(S_\theta(f)) = Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \mathcal{Y}_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (1.11)$$

Com isso, o operador média pode ser visto por meio da sua expansão em série de Fourier

$$S_\theta(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad 0 < \theta < \pi. \quad (1.12)$$

Considere $f \in L^p(\mathbb{M})$ e r um inteiro positivo. Definimos o *operador média generalizado* por

$$S_{r, \theta}(f) := \frac{-2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} S_{l\theta}(f), \quad 0 < \theta < \pi. \quad (1.13)$$

A denominação “generalizado” surge naturalmente da seguinte observação: $S_{1, \theta} = S_\theta$, $0 < \theta < \pi$. Claramente, este operador está bem definido e é limitado em $L^p(\mathbb{M})$. De fato, pela limitação do operador média, temos

$$\|S_{r, \theta}(f)\|_p \lesssim \|S_\theta(f)\|_p \leq \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}).$$

O operador média nos permite, também, definir o *operador diferença de ordem $r > 0$* , por:

$$\Delta_\theta^r := (I - S_\theta)^{r/2} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{r/2}{l} (S_\theta)^l, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (1.14)$$

em que I é o operador identidade. Este operador está bem definido e é limitado, uma vez que a série definida por seus coeficientes é absolutamente convergente e

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{r/2}{l} = 2^{r/2}.$$

Pela fórmula (1.11) é fácil ver que para $f \in L^p(\mathbb{M})$,

$$\mathcal{Y}_k(\Delta_\theta^r(f)) = \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\right)^{r/2} \mathcal{Y}_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \theta < \pi.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_k(\Delta_\theta^r(f)) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{r/2}{l} \mathcal{Y}_k((S_\theta(f))^l) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{r/2}{l} \left(Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right)^l \mathcal{Y}_k(f) \\
 &= \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right)^{r/2} \mathcal{Y}_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, 0 < \theta < \pi.
 \end{aligned}$$

Desta maneira, o operador diferença de ordem r , que também é um operador multiplicativo, possui a seguinte expansão em série de Fourier

$$\Delta_\theta^r(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right)^{r/2} \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}), 0 < \theta < \pi.$$

O módulo de suavidade de ordem $r > 0$ de uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$, é definido (PLATONOV, 2009) em termos do operador diferença (1.14), por

$$\omega_r(f, \theta)_p := \sup \left\{ \|(I - S_t)^{r/2}(f)\|_p : 0 < t \leq \theta \right\}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (1.15)$$

Esta ferramenta de aproximação possui propriedades interessantes como a de monotonicidade e continuidade (DEVORE; LORENTZ, 1993). As seguintes propriedades foram demonstradas em (PLATONOV, 2009) para o caso em que r é um inteiro positivo. Porém, elas são facilmente estendidas para o caso $r > 0$, e as ideias básicas a serem empregadas são provenientes do caso esférico (RUSTAMOV, 1993). Convencionamos que o operador de Laplace-Beltrami elevado à potência zero $\mathcal{B}^0$, é o operador identidade.

Proposição 1.5. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$.

- i) $\omega_r(f, \theta)_p$ é não decrescente com respeito à θ e $\omega_r(f, \theta)_p = \omega_r(f, \pi)_p$, para $\theta \geq \pi$;
- ii) $\omega_r(f, \theta)_p$ é contínua com respeito à θ e $\omega_r(f, \theta)_p \rightarrow 0$, com $\theta \rightarrow 0$;
- iii) Se $g \in L^p(\mathbb{M})$, então $\omega_r(f + g, \theta)_p \leq \omega_r(f, \theta)_p + \omega_r(g, \theta)_p$;
- iv) $\omega_r(f, \theta)_p \leq 2^{r/2} \|f\|_p$;
- v) Se $0 < s < r$, então $\omega_r(f, \theta)_p \leq 2^{(r-s)/2} \omega_s(f, \theta)_p$;
- vi) Se l é um inteiro positivo, $\mathcal{B}^l f \in L^p(\mathbb{M})$ e $r > 2l$, então $\omega_r(f, \theta)_p \lesssim \theta^{2l} \omega_{r-2l}(\mathcal{B}^l f, \theta)_p$.

Demonstração. Os itens (i), (ii), (iii) seguem diretamente da definição do módulo de suavidade e da limitação do operador média. Para a prova do item (iv), note que

$$\|(I - S_t)^{r/2}(f)\|_p \leq \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r/2}{l} \|(S_t(f))^l\|_p \leq \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r/2}{l} \|f\|_p = 2^{r/2} \|f\|_p, \quad 0 < t \leq \theta.$$

Tomando o supremo, em ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos $\omega_r(f, \theta)_p \leq 2^{r/2} \|f\|_p$.

Para provar (v), basta observar que $\Delta_t^r = \Delta_t^{r-s} \Delta_t^s$ e $\|\Delta_t^{r-s}\|_p \leq 2^{(r-s)/2}$, logo

$$\|\Delta_t^r(f)\|_p = \|\Delta_t^{r-s} \Delta_t^s(f)\|_p \leq 2^{(r-s)/2} \|\Delta_t^s(f)\|_p, \quad 0 < t \leq \theta.$$

E tomando novamente o supremo em t , obtemos $\omega_r(f, \theta)_p \leq 2^{(r-s)/2} \omega_s(f, \theta)_p$.

Finalmente, para provar o item (vi), utilizamos a seguinte desigualdade (PLATONOV, 2009, p.868),

$$\|\Delta_s(f)\|_p \leq (1/2) s^2 \|\mathcal{B}(f)\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad 0 < s < \pi/2.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^r(f)\|_p &= \left\| (I - S_t)(I - S_t)^{r/2-1}(f) \right\|_p \\ &\leq (1/2) t^2 \left\| \mathcal{B} \left((I - S_t)^{r/2-1}(f) \right) \right\|_p, \quad 0 < t \leq \theta, \end{aligned}$$

e procedendo recursivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^r(f)\|_p &\leq (1/2) t^2 \left\| (I - S_t)^{r/2-1}(\mathcal{B}(f)) \right\|_p \\ &\vdots \\ &\leq (1/2)^l t^{2l} \left\| (I - S_t)^{r/2-l}(\mathcal{B}^l(f)) \right\|_p \\ &= (1/2)^l t^{2l} \left\| \Delta_t^{r-2l}(\mathcal{B}(f)) \right\|_p, \quad 0 < t \leq \theta. \end{aligned}$$

O supremo em t , tomado acima, implica a desigualdade desejada. ■

Além das iterações do operador de Laplace-Beltrami, podemos definir mais geralmente o seguinte conceito de diferenciabilidade em $\mathbb{M}$. A *derivada fracionária de ordem $r > 0$* (BROWN; DAI, 2005), no sentido distribucional, é dada por

$$\mathcal{B}^r \sim \sum_{k=0}^{\infty} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \mathcal{Y}_k. \quad (1.16)$$

Para r um inteiro positivo par, $\mathcal{B}^r$ também pode ser obtido de maneira iterada como $\mathcal{B}^r = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1})$ e coincide com a definição dada na fórmula (1.16). A partir da definição da derivada fracionária temos definido o seguinte espaço de Sobolev de ordem $r > 0$,

$$W_p^r(\mathbb{M}) = \{f \in L^p(\mathbb{M}) : \|\mathcal{B}^r(f)\|_p < \infty\}, \quad p \geq 1.$$

Estes espaços estão munidos naturalmente com a norma $\|\cdot\|_{W_p^r} := \|\cdot\|_p + \|\mathcal{B}^r(\cdot)\|_p$.

Finalmente, a última e principal ferramenta de aproximação a ser explorada é o *K-funcional de ordem $r > 0$* , associado ao espaço de Sobolev $W_p^r(\mathbb{M})$ (PLATONOV, 2009) dado por

$$K_r(f, \theta)_p := \inf \left\{ \|f - g\|_p + \theta^r \|g\|_{W_p^r} : g \in W_p^r(\mathbb{M}) \right\}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (1.17)$$

Com todo o apresentado até este ponto, podemos enunciar algumas das contribuições desta tese.

1.4 Resultados principais

Neste capítulo, enunciamos duas caracterizações para o K-funcional e comentamos sobre a importância e aplicabilidade de ambas. A prova de cada um será apresentada nos capítulos subsequentes.

O primeiro resultado que apresentamos estabelece a equivalência assintótica entre o módulo de suavidade e o K-funcional anteriormente definidos. A versão esférica desse resultado e algumas de suas aplicações podem ser consultadas em (RUSTAMOV, 1993; DAI; DITZIAN, 2004). A versão para os espaços compactos 2-homogêneos, com a ordem de r inteira não negativa, está provada em (PLATONOV, 2009). A generalização deste resultado para a ordem fracionária é enunciada a seguir e a prova é dada no Capítulo 2.

Teorema 1.6. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$ e $r > 0$. Vale a seguinte equivalência,

$$K_r(f, \theta)_p \asymp \omega_r(f, \theta)_p, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Além disso, foi possível obter uma desigualdade do tipo Marchaud, enunciada abaixo, que também será provada no Capítulo 2.

Teorema 1.7. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 < p < \infty$ e $0 < r < s$. Vale a seguinte desigualdade,

$$\omega_r(f, \theta)_p \lesssim \theta^{2r} \int_{\theta}^{\infty} \frac{\omega_s(f, t)_p}{t^{2r+1}} dt, \quad \theta > 0.$$

Estes tipos de desigualdades oferecem uma alternativa ao estudo de imersões de espaços de suavidade, o que justifica sua importância. No contexto euclidiano, por exemplo, a desigualdade de Marchaud fornece imersões entre espaços de Riez e de Besov (TREBELS, 2010, Teorema 2.1). Tais imersões, ainda não obtidas na literatura para o contexto desta tese, configuram possibilidades futuras de pesquisa.

O próximo resultado, cuja versão esférica pode ser encontrada em (DAI; DITZIAN, 2004), estabelece a equivalência assintótica, agora, entre o K-funcional definido na seção anterior e o raio de aproximação do operador média generalizado. A prova deste resultado será apresentada no Capítulo 3.

Teorema 1.8. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 < p < \infty$ e r um inteiro positivo. Vale a seguinte equivalência,

$$K_{2r}(f, \theta)_p \asymp \|f - S_{r, \theta}(f)\|_p, \quad 0 < \theta < \pi.$$

O resultado anterior nos fornece o necessário para analisar o comportamento assintótico de sequências de autovalores de certos operadores integrais, gerados por núcleos satisfazendo ou uma condição de Hölder abstrata dada pelo operador média ou supondo suavidade segundo o operador de Laplace-Beltrami (ver (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014) para versão esférica). Resultados deste tipo nos dão uma taxa de decrescimento polinomial dos coeficientes de Fourier de núcleos com uma representação em série do tipo Mercer, como será visto no Capítulo 4. Neste capítulo, também, estão as outras contribuições desta tese.

CARACTERIZAÇÃO DO K-FUNCIONAL

PARTE I

Neste capítulo apresentamos as demonstrações dos Teoremas 1.6 e 1.7. Para tanto, provamos uma série de estimativas envolvendo os polinômios de Jacobi e suas derivadas e apresentamos alguns lemas auxiliares envolvendo as ferramentas e operadores definidos anteriormente.

2.1 Estimativas para os polinômios de Jacobi

As estimativas apresentadas nesta seção, a priori, podem parecer técnicas demais, porém são fundamentais para a obtenção dos resultados da seção seguinte. A necessidade delas se fará clara ao longo do texto.

Sejam $\alpha > \beta > -1/2$. Consideramos a seguinte representação integral para os polinômios de Jacobi (PLATONOV, 2009, p. 862), para $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &= c_{\alpha, \beta} (\sin \theta/2)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\zeta-1} (\cos \varphi/2)^{1-2\nu} \\ &\quad \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} \cos((k+\nu)t) dt \right) \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

com $0 < \theta < \pi$, em que

$$c_{\alpha, \beta} = \frac{2^{-\nu-\zeta+1} \Gamma(\nu+\zeta+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu) \Gamma(\zeta)}, \quad \nu = (\alpha + \beta + 1)/2 \quad \text{e} \quad \zeta = (\alpha - \beta)/2.$$

Utilizamos as seguintes funções auxiliares, afim de facilitar a representação das estimativas a serem obtidas. Para $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta < \pi$, escrevemos

$$\begin{aligned} f(k; \theta) &:= k(k + \alpha + \beta + 1) \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right); \\ g(k; \theta) &:= (2k + \alpha + \beta + 1) \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right) + k(k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial}{\partial k} \left(Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

Lema 2.1. Para todo $l = 0, 1, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta \leq \pi/(k + \alpha + \beta + 1)$, temos

- i) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} f(k; \theta) \right| \lesssim k^{4-l} \theta;$
- ii) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} (f(k; \theta))^{-1} \right| \lesssim k^{-4-l} \theta^{-1};$
- iii) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} g(k; \theta) \right| \lesssim k^{5-l} \theta^2;$
- iv) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} (g(k; \theta))^{-1} \right| \lesssim k^{-5-l} \theta^{-2};$
- v) $g(k; \theta) \geq c k^5 \theta^2.$

Demonstração. Para $l = 0$ a estimativa (i) segue do Lema 1.2. Seja $l \geq 1$. Pela fórmula de diferenciação de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial k^l} f(k; \theta) &= \frac{\partial^l}{\partial k^l} \left[k(k + \alpha + \beta + 1) \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \frac{d^i}{dk^i} [k(k + \alpha + \beta + 1)] \frac{\partial^{l-i}}{\partial k^{l-i}} \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial k^l} f(k; \theta) &= \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right) \frac{d^l}{dk^l} [k(k + \alpha + \beta + 1)] \\ &\quad - \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l}{i} \frac{d^i}{dk^i} [k(k + \alpha + \beta + 1)] \frac{\partial^{l-i}}{\partial k^{l-i}} \left(Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

Como

$$\left| \frac{d^i}{dk^i} [k(k + \alpha + \beta + 1)] \right| \leq 2(k + \alpha + \beta + 1)^{2-i}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

o Lema 1.2 implica que

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} f(k; \theta) \right| \lesssim k^{4-l} \theta$$

e, portanto, (i) está provado.

A estimativa (ii), será obtida por indução em l . Para $l = 0$, a desigualdade segue diretamente do Lema 1.2. Agora, suponha que a estimativa (ii) valha para $l = 0, 1, \dots, v$. É claro que,

$$\frac{\partial^{v+1}}{\partial k^{v+1}} (f(k; \theta))^{-1} = - \frac{\partial^v}{\partial k^v} \left(\frac{1}{(f(k; \theta))^2} \frac{\partial}{\partial k} f(k; \theta) \right).$$

Dessa igualdade e da fórmula de diferenciação de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{v+1}}{\partial k^{v+1}} (f(k; \theta))^{-1} &= - \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{\partial^{i+1}}{\partial k^{i+1}} f(k; \theta) \frac{\partial^{v-i}}{\partial k^{v-i}} (f(k; \theta))^{-2} \\ &= - \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{\partial^{i+1}}{\partial k^{i+1}} f(k; \theta) \left[\sum_{j=0}^{v-i} \binom{v-i}{j} \frac{\partial^j}{\partial k^j} (f(k; \theta))^{-1} \frac{\partial^{v-i-j}}{\partial k^{v-i-j}} (f(k; \theta))^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Como $|(f(k; \theta))^{-1}| \lesssim k^{-4} \theta^{-2}$, temos

$$\left| \frac{\partial^{v+1}}{\partial k^{v+1}} (f(k; \theta))^{-1} \right| \lesssim k^{-4-(v+1)} \theta^{-1},$$

e isto prova (ii).

Para provar (iii), vamos considerar os casos $l = 0, 1, 2$ e $l \geq 3$ separadamente. Para $l = 0$, da representação (2.1) e de

$$\frac{\partial^l}{\partial k^l} (\cos((v+k)\theta)) = \begin{cases} (-1)^{(l+1)/2} \theta^l \sin((v+k)\theta), & k \text{ ímpar} \\ (-1)^{l/2} \theta^l \cos((v+k)\theta), & k \text{ par} \end{cases}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} g(k; \theta) &= (2k + \alpha + \beta + 1) c_{\alpha, \beta} (\sin \theta/2)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\zeta-1} (\cos \varphi/2)^{1-2v} \\ &\quad \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{v-1} (\cos(vt) - \cos(v+k)t) dt \right) \sin \varphi d\varphi \\ &\quad + c_{\alpha, \beta} (\sin \theta/2)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\zeta-1} (\cos \varphi/2)^{1-2v} \\ &\quad \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{v-1} \frac{\partial}{\partial k} \cos(v+k)t dt \right) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Usando que, $\sin x \leq x$, para $x \in [0, +\infty)$ e que $\cos x - \cos y = 2 \sin((y-x)/2) \sin((y+x)/2)$, temos

$$\cos(vt) - \cos(v+k)t \leq \frac{k(2v+k)}{2} t^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial k} \cos(v+k)t \leq (v+k)t^2.$$

Além disso, considerando

$$\begin{aligned} F(\theta) &= (\sin \theta/2)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\zeta-1} (\cos \varphi/2)^{1-2v} \\ &\quad \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{v-1} t^2 dt \right) \sin \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{v-1} t^2 dt &= 2^{v-1} \int_0^\varphi \left(\sin \frac{\varphi-t}{2} \sin \frac{\varphi+t}{2} \right)^{v-1} t^2 dt \\ &\asymp \int_0^\varphi (\varphi^2 - t^2)^{v-1} t^2 dt \\ &\asymp \varphi^{2v+1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} F(\theta) &\asymp \theta^{-2\alpha} \int_0^\theta (\theta^2 - \varphi^2)^{\zeta-1} \times \left(\int_0^\varphi (\varphi^2 - t^2)^{v-1} t^2 dt \right) \varphi d\varphi \\ &\asymp \theta^{-2\alpha} \int_0^\theta (\theta^2 - \varphi^2)^{\zeta-1} \varphi^{2v+1} \varphi d\varphi \\ &\asymp \theta^2. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima, concluímos que $|g(k; \theta)| \lesssim k^5 \theta^2$. Se $l = 1$, temos a seguinte fórmula

$$\frac{\partial}{\partial k} g(k; \theta) = 2(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)) + k(k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial k^2} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

Utilizando novamente a representação (2.1) e as estimativas

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} \cos(v + k)t \leq \frac{(v + k)^2}{2} t^4 \quad \text{e} \quad t^2 F(\theta) \lesssim \theta^4,$$

obtemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial k} g(k; \theta) \right| \lesssim k^4 \theta^2.$$

Analogamente ao caso anterior, para $l = 2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial k^2} g(k; \theta) &= -2 \frac{\partial}{\partial k} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) + (2k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial k^2} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \\ &\quad + k(k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^3}{\partial k^3} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Pela representação (2.1) e estimativas anteriores, obtemos

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial k^2} g(k; \theta) \right| \lesssim k^3 \theta^2.$$

Finalmente, para $l \geq 3$, note que

$$\frac{\partial^3}{\partial k^3} g(k; \theta) = 2(2k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^3}{\partial k^3} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) + k(k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^4}{\partial k^4} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

Pela fórmula de diferenciação de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial k^l} g(k; \theta) &= 2 \sum_{i=0}^{l-3} \binom{l-3}{i} \frac{d^i}{dk^i} (2k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^{l-i}}{\partial k^{l-i}} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{l-3} \binom{l-3}{i} \frac{d^i}{dk^i} k(k + \alpha + \beta + 1) \frac{\partial^{l-i+1}}{\partial k^{l-i+1}} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Novamente da fórmula (2.2) e do Lema 1.2, chegamos a

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} g(k; \theta) \right| \lesssim k^{5-l} \theta^2.$$

Para obter a estimativa (v), procedemos de maneira análoga à prova do item (iii), considerando a representação (1.2). Como $\sin x \geq 2x/\pi$, para $x \in [0, \pi/2)$, temos

$$g(k; \theta) \geq c k(2k + \alpha + \beta + 1)(k + \alpha + \beta + 1) \theta^2.$$

Para um número n suficientemente grande, obtemos $g(k; \theta) \geq (c/n) k^5 \theta^2$.

Por fim, a prova de (iv) é análoga ao item (ii) utilizando os itens (iii) e (v). ■

Para enunciar o próximo corolário definimos, para $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta < \pi$,

$$h(k; \theta) := \frac{g(k; \theta)}{f(k; \theta)} = \frac{(2k + \alpha + \beta + 1)}{k(k + \alpha + \beta + 1)} + \frac{1}{1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)} \frac{\partial}{\partial k} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta).$$

Corolário 2.2. Para todo $l = 0, 1, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta \leq \pi/(k + \alpha + \beta + 1)$, temos

- i) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} h(k; \theta) \right| \lesssim k^{1-l} \theta;$
- ii) $\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} \left(\frac{1}{h(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta) \right) h(k; \theta) \right| \lesssim k^{-l-1}.$

Demonstração. Para o item (i), o caso $l = 0$ segue diretamente do Lema 2.1, itens (ii) e (iii). Se $l \geq 1$, aplicando a fórmula de diferenciação de Leibniz, segue que

$$\frac{\partial^l}{\partial k^l} h(k; \theta) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \frac{\partial^{l-i}}{\partial k^{l-i}} g(k; \theta) \frac{\partial^i}{\partial k^i} (f(k; \theta))^{-1},$$

e concluímos a estimativa pelo Lema 2.1. No item (ii), se $l = 0$, temos

$$\frac{1}{h(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta) = \frac{1}{g(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} g(k; \theta) - \frac{1}{f(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} f(k; \theta)$$

e, pelo Lema 2.1, segue que

$$\left| \frac{1}{h(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta) \right| \lesssim k^{-1}.$$

Se $l \geq 1$, aplicamos novamente a fórmula de diferenciação de Leibniz e o Lema 2.1, obtendo assim a estimativa desejada. ■

Definimos, para $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta < \pi$,

$$u(k; \theta) := \left(\frac{k(k + \alpha + \beta + 1)}{1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)} \right)^{r/2} \quad \text{e} \quad v(k; \theta) := \left(\frac{1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)}{k(k + \alpha + \beta + 1)} \right)^{r/2}.$$

Lema 2.3. Para todo $l = 0, 1, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta \leq \pi/(k + \alpha + \beta + 1)$, temos

- i) $\frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta) \geq 0;$
- ii) $\frac{\partial}{\partial k} v(k; \theta) \leq 0;$
- iii) $\left| \frac{\partial^{l+1}}{\partial k^{l+1}} u(k; \theta) \right| \lesssim k^{-l} \frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta);$
- iv) $\left| \frac{\partial^{l+1}}{\partial k^{l+1}} v(k; \theta) \right| \lesssim k^{-l} \frac{\partial}{\partial k} v(k; \theta).$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta) &= \frac{r}{2} \left(\frac{k(k + \alpha + \beta + 1)}{1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)} \right)^{\frac{r}{2}} \frac{g(k; \theta)}{k(k + \alpha + \beta + 1) (1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta))} \\ &= \frac{r}{2} u(k; \theta) h(k; \theta). \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial k} v(k; \theta) = -\frac{r}{2} v(k; \theta) h(k; \theta).$$

Assim, (i) e (ii) seguem diretamente dos Lemas 1.2 e 2.1. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial k^2} u(k; \theta) &= \frac{r}{2} \left[u(k; \theta) \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta) + h(k; \theta) \frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta) \right] \\ &= \tilde{h}(k; \theta) \frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta), \end{aligned}$$

em que

$$\tilde{h}(k; \theta) = \frac{r}{2} h(k; \theta) + \frac{1}{h(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta).$$

Analogamente, para $v(k; \theta)$ temos

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} v(k; \theta) = \tilde{\tilde{h}}(k; \theta) \frac{\partial}{\partial k} v(k; \theta),$$

em que

$$\tilde{\tilde{h}}(k; \theta) = -\frac{r}{2} h(k; \theta) + \frac{1}{h(k; \theta)} \frac{\partial}{\partial k} h(k; \theta).$$

Pelo Corolário 2.2, obtemos as estimativas

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} \tilde{h}(k; \theta) \right| \lesssim k^{-l-1} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial k^l} \tilde{\tilde{h}}(k; \theta) \right| \lesssim k^{-l-1}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Como a prova de (iii) e de (iv) são análogas, provamos apenas (iii), por indução em l . Suponha que (iii) vale para $l = 1, 2, \dots, v$. Pela fórmula de diferenciação de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{v+2}}{\partial k^{v+2}} u(k; \theta) &= \frac{\partial^v}{\partial k^v} \left(\frac{\partial^2}{\partial k^2} u(k; \theta) \right) \\ &= \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{\partial^i}{\partial k^i} \tilde{h}(k; \theta) \frac{\partial^{v-i+1}}{\partial k^{v-i+1}} u(k; \theta), \end{aligned}$$

e portanto

$$\left| \frac{\partial^{v+2}}{\partial k^{v+2}} u(k; \theta) \right| \lesssim k^{-v-1} \frac{\partial}{\partial k} u(k; \theta).$$

Com isso concluímos a prova do lema. ■

As estimativas obtidas até aqui são análogas às do contexto esférico, (RUSTAMOV, 1993). As principais ideias envolvidas nas demonstrações apresentam alguma semelhança porém, como estamos lidando com polinômios de Jacobi, as demonstrações são ligeiramente diferentes.

2.2 Resultados auxiliares

Nesta seção, apresentamos estimativas para algumas das ferramentas de aproximação consideradas.

O *operador diferença* é definido para uma sequência de números reais $\{b_k\}_k$, indutivamente, por $\Delta^0 b_k = b_k$ e

$$\Delta b_k = b_{k+1} - b_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

É claro que, se j é um inteiro positivo, então $\Delta^j b_k = \Delta(\Delta^{j-1} b_k)$. Algumas propriedades do operador diferença, que serão utilizadas ao longo do trabalho, podem ser encontradas no Apêndice A.3 de (DAI; XU, 2013, p.406).

Denotamos por $E_v(f)_p$ a *melhor aproximação* da função $f \in L^p(\mathbb{M})$, (PLATONOV, 2009) definida por

$$E_v(f)_p := \inf \{ \|f - Y\|_p : Y \in \mathcal{P}_v(\mathbb{M}) \}, \quad v > 0,$$

em que

$$\mathcal{P}_v(\mathbb{M}) = \sum_{j \in [0, v] \cap \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_j^m.$$

Mais informações sobre a existência e unicidade da melhor aproximação, para um espaço de Banach X , pode ser encontrada em (DEVORE; LORENTZ, 1993, p.58).

Considere o operador η_v dependendo apenas de uma função $\eta \in C^\infty[0, \infty)$ tal que, $\eta \equiv 1$ em $[0, 1]$, $\eta \equiv 0$ em $[2, \infty)$ e $\eta(s) \leq 1$, $s \in (1, 2)$. O operador η_v , com $v > 0$, é definido pela fórmula

$$\eta_v(f) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k/v) \mathcal{B}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{M}). \quad (2.4)$$

Este último, é um operador multiplicativo e satisfaz as propriedades descritas no lema a seguir. Abaixo, $\lceil \cdot \rceil$ é a função *teto* que associa um número real ao menor inteiro maior ou igual a ele.

Lema 2.4. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$ e $v > 0$.

- i) $\eta_v(f)$ é um polinômio esférico de grau no máximo $2\lceil v \rceil - 1$ e $\eta_v(Y) = Y$, para $Y \in \mathcal{P}_v(\mathbb{M})$;
- ii) $\|\eta_v(f)\|_p \lesssim \|f\|_p$;
- iii) $\|f - \eta_v(f)\|_p \lesssim E_v(f)_p$.

Demonstração. É claro que $\eta(k/v) = 0$ para $k/v \geq 2$. Além disso, se $T \in \mathcal{P}_v(\mathbb{M})$, então $\mathcal{B}_k(T) = 0$ para $k > v$ e, como $\eta(k/v) = 1$ para $0 \leq k \leq v$, então

$$\eta_v(T) = \sum_{0 \leq k \leq v} \mathcal{B}_k(T) = T.$$

Isso prova (i).

Para o item (ii), recorremos a $(s+1)$ -transformação de Abel (ou *soma por partes* (DAI; XU, 2013, Fórmula A.4.8, p.409)), para um inteiro positivo s e obtemos

$$\eta_\nu(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{s+1} \eta(k/\nu) \sum_{i=0}^k A_{k-i}^s \mathcal{Y}_i(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{s+1} \eta(k/\nu) A_k^s (\delta_k^s f), \quad (2.5)$$

em que $A_k^s = \binom{s+k}{k}$ e δ_k^s é a média de Cèsaro de ordem s , isto é,

$$\delta_k^s = (A_k^s)^{-1} \sum_{i=0}^k A_{k-i}^s \mathcal{Y}_i.$$

Se $s > (m-1)/2$, então a sequência $\{\delta_k^s\}_k$ é uniformemente limitada em $L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, (ver (BROWN; DAI, 2005)). Segue de (2.5) que

$$\|\eta_\nu(f)\|_p \lesssim \|f\|_p \sum_{k=1}^{2[\nu]} |\Delta^{s+1} \eta(k/\nu)| A_k^s.$$

Também, $A_k^s \lesssim k^s$ e, como $\eta \in C^\infty[0, \infty)$, segue que

$$|\Delta^{s+1} \eta(k/\nu)| \lesssim \nu^{-s-1}.$$

Com isso, obtemos $\|\eta_\nu(f)\|_p \lesssim \|f\|_p$.

Para provar (iii), tomamos Y como sendo a melhor aproximação de grau ν da função $f \in L^p(\mathbb{M})$, isto é, $E_\nu(f)_p = \|f - Y\|_p$. Assim, pelos itens anteriores, temos

$$\begin{aligned} \|f - \eta_\nu(f)\|_p &\leq \|f - Y\|_p + \|\eta_\nu(f - Y)\|_p \\ &\lesssim E_\nu(f)_p + \|f - Y\|_p \\ &\lesssim E_\nu(f)_p. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos o lema. ■

Os próximos lemas são propriedades, envolvendo o módulo de suavidade e a derivada fracionária de ordem r , úteis para provar o Teorema 1.6.

Proposição 2.5. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$ e ν um inteiro positivo. Vale a seguinte desigualdade,

$$\|\mathcal{B}^r(\eta_\nu(f))\|_p \lesssim \theta^{-r} \|\Delta_\theta^r f\|_p, \quad 0 < \theta \leq \pi/(2\nu + \alpha + \beta + 1).$$

Demonstração. Pelo fato de η_ν e Δ_θ^r serem operadores multiplicativos, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^r(\eta_\nu(f)) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \mathcal{Y}_k(\eta_\nu(f)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \eta(k/\nu) \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2}}{(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta))^{r/2}} \eta(k/\nu) \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\right)^{r/2} \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u(k; \theta) \eta(k/\nu) \mathcal{Y}_k(\Delta_\theta^r(f)). \end{aligned}$$

Aplicando a $(s+1)$ -transformação de Abel, obtemos

$$\mathcal{B}^r(\eta_v(f)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^{s+1} [u(k; \theta) \eta(k/v)] A_k^s \delta_k^s(\Delta_\theta^r(f)).$$

Como $\eta(k/v) = 0$, para $k \geq 2v$, escolhendo $s > (m-1)/2$, segue que

$$\|\mathcal{B}^r(\eta_v(f))\|_p \leq \sum_{k=1}^{2v-1} |\Delta^{s+1} [u(k; \theta) \eta(k/v)]| k^s \|\Delta_\theta^r f\|_p.$$

Para concluir a prova, precisamos mostrar que o lado direito da desigualdade anterior é limitado por θ^{-r} . Para simplificar, utilizamos as seguintes notações: $x = (x_1, x_2, \dots, x_{s+1})$, $|x| = x_1 + x_2 + \dots + x_{s+1}$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_{s+1}$,

$$\int_{(0,1)^{s+1}} \star dx = \int_0^1 \dots \int_0^1 \star dx_1 dx_2 \dots dx_{s+1}$$

e, também, algumas propriedades do operador diferença (2.3), (DAI; XU, 2013, p.406). Como,

$$\Delta^{s+1} [u(k; \theta) \eta(k/v)] = \int_{(0,1)^{s+1}} \frac{\partial^{s+1}}{\partial k^{s+1}} \left(u(k + |x|; \theta) \eta \left(\frac{k + |x|}{v} \right) \right) dx,$$

da fórmula de diferenciação de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned} \Delta^{s+1} [u(k; \theta) \eta(k/v)] &= \int_{(0,1)^{s+1}} u(k + |x|; \theta) \frac{d^{s+1}}{dk^{s+1}} \eta \left(\frac{k + |x|}{v} \right) dx \\ &\quad + \int_{(0,1)^{s+1}} \sum_{i=1}^{s+1} \frac{\partial^i}{\partial k^i} u(k + |x|; \theta) \frac{d^{s-i+1}}{dk^{s-i+1}} \eta \left(\frac{k + |x|}{v} \right) dx. \end{aligned}$$

Considere F_1 e F_2 , respectivamente, as parcelas da soma do lado direito da igualdade anterior. Como $\eta \in C^\infty[0, \infty)$, temos

$$\left| \frac{d^j}{dk^j} \eta \left(\frac{k + |x|}{v} \right) \right| \lesssim v^{-j}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Dos Lemas 1.2 e 2.3, valem as estimativas

$$|F_1| \lesssim \theta^{-r} v^{-s}$$

e

$$\begin{aligned} |F_2| &\lesssim k^{1-s} \int_{(0,1)^{s+1}} \frac{\partial}{\partial x_{s+1}} u(k + |x|; \theta) dx \\ &\lesssim k^{1-s} \int_{(0,1)^{s+1}} [u(k + 1 + x_1 + \dots + x_s; \theta) - u(k + x_1 + \dots + x_s; \theta)] dx_1 \dots dx_s. \end{aligned}$$

Assim, $|F_2| \lesssim k^{1-s} \theta^{-r}$, logo

$$\sum_{k=1}^{2v-1} |\Delta^{s+1} (u(k; \theta) \eta(k/v))| k^s \lesssim \theta^{-r}$$

e, portanto, $\|\mathcal{B}^r(\eta_v(f))\|_p \lesssim \theta^{-r} \|\Delta_\theta^r(f)\|_p$. ■

Proposição 2.6. Sejam $f \in W_p^r(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, v um inteiro positivo e $r > 0$. Vale que

$$\|\Delta_\theta^r(\eta_v(f))\|_p \lesssim \theta^r \|\mathcal{B}^r(f)\|_p, \quad 0 < \theta \leq \pi/(2v + \alpha + \beta + 1).$$

Demonstração. Como, η_v e $\mathcal{B}^r$ são operadores multiplicativos, temos

$$\begin{aligned} \Delta_\theta^r(\eta_v(f)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\right)^{r/2} \mathcal{Y}_k(\eta_v(f)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\right)^{r/2} \eta(k/v) \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta))^{r/2}}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2}} \eta(k/v) (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v(k; \theta) \eta(k/v) \mathcal{Y}_k(\mathcal{B}^r(f)). \end{aligned}$$

Aplicando a $(s + 1)$ -transformação de Abel,

$$\Delta_\theta^r(\eta_v(f)) = \sum_{k=1}^{2v-1} \Delta^{s+1}[v(k; \theta) \eta(k/v)] A_k^s \delta_k^s(\mathcal{B}^r(f)).$$

Assim,

$$\|\Delta_\theta^r(\eta_v(f))\|_p \leq \sum_{k=1}^{2v-1} |\Delta^{s+1}[v(k; \theta) \eta(k/v)]| k^s \|\mathcal{B}^r f\|_p.$$

Procedendo de forma análoga à proposição anterior, chegamos a

$$\sum_{k=1}^{2v-1} |\Delta^{s+1}(v(k; \theta) \eta(k/v))| k^s \lesssim \theta^r.$$

Portanto, $\|\Delta_\theta^r(\eta_v(f))\|_p \lesssim \theta^r \|\mathcal{B}^r(f)\|_p$. ■

Vejam algumas propriedades do operador diferença (2.3) que serão utilizadas no próximo resultado e, também, em algumas estimativas do próximo capítulo.

Lema 2.7. Sejam $\{a_k\}_k, \{b_k\}_k$ sequências e j um inteiro positivo.

i) A seguinte igualdade vale para o operador diferença

$$\Delta^j(a_k b_k) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (\Delta^{j-i} a_k) (\Delta^i b_{k+j-i}).$$

ii) Se a sequência $\{a_k\}_k$ satisfaz $a_k \geq c > 0$, $k = 0, 1, \dots$, então

$$\begin{aligned} |\Delta^j a_k^{-1}| &\leq \frac{1}{|a_k|} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} |\Delta^i a_k^{-1}| |\Delta^{j+i} a_{k+i}| \\ &\leq C \max_{0 \leq i \leq j} |\Delta^i a_k^{-1}| |\Delta^{j+i} a_{k+i}|, \end{aligned}$$

em que $C = 2^j/c$.

Demonstração. O item (i) segue por indução matemática. Para a parte (ii) note que $a_k^{-1}a_k = 1$ e, a desigualdade vale aplicando o item (i) nas sequências $\{a_k^{-1}\}_k$ e $\{a_k\}_k$. ■

O próximo resultado tem sua versão esférica em (KAMZOLOV, 1982; DITZIAN, 1998).

Teorema 2.8. Sejam $f \in W_p^r(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$ e v um inteiro positivo. Vale a seguinte estimativa

$$E_v(f)_p \lesssim v^{-r/2} \|\mathcal{B}^r(f)\|_p.$$

Demonstração. Note que, $E_v(f)_p \leq \|f - \eta_{v/2}(f)\|_p$. Como $\mathcal{B}^r$ é operador multiplicativo, temos

$$\begin{aligned} f - \eta_{v/2}(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 - \eta(2k/v)] \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \eta(2k/v)}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2}} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \mathcal{Y}_k(f) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \eta(2k/v)}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2}} \mathcal{Y}_k(\mathcal{B}^r(f)). \end{aligned}$$

Denotando $a_k := (k(k + \alpha + \beta + 1))^{-r/2}$ e $b_k := 1 - \eta(2k/v)$, $k = 0, 1, \dots$, e aplicando a $(s + 1)$ -transformação de Abel, obtemos

$$\begin{aligned} \|f - \eta_{v/2}(f)\|_p &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^{s+1} a_k b_k| A_k^s \|\delta_k^s(\mathcal{B}^r(f))\|_p \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta^{s+1} a_k b_k| k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p. \end{aligned}$$

Logo, precisamos estimar $|\Delta^{s+1} a_k b_k|$. Separamos a última desigualdade da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{\lceil v/2 \rceil} |\Delta^{s+1} a_k b_k| k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p + \sum_{k=\lceil v/2 \rceil}^v |\Delta^{s+1} a_k b_k| k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p + \sum_{k=v}^{\infty} |\Delta^{s+1} a_k b_k| k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p.$$

Observamos que para $k < v/2$, temos $\eta(2k/v) = 1$ e, portanto, a primeira soma se anula. Para $v/2 < k < v$, pelo item (i) no Lema 2.7, temos

$$\begin{aligned} |\Delta^{s+1} a_k b_k| &\leq \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} \left| \Delta^{s+1-i} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{-r/2} \right| |\Delta^i \eta(2(k + s + 1 - i)/v)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} k^{-r/2-s-1+i} (2/v)^i \\ &\lesssim k^{-r/2-s-1}. \end{aligned}$$

Para $k > v$, temos $\eta(2k/v) = 0$, logo precisamos estimar $|\Delta^{s+1} a_k|$. Procedendo de forma análoga ao que vimos anteriormente, chegamos a $|\Delta^{s+1} a_k| \lesssim k^{-r/2-s-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f - \eta_{v/2}(f)\|_p &\lesssim \sum_{k=\lceil v/2 \rceil}^v k^{-r/2-s-1} k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p + \sum_{k=v}^{\infty} k^{-r/2-s-1} k^s \|\mathcal{B}^r(f)\|_p \\ &\lesssim \sum_{k=\lceil v/2 \rceil}^{\infty} k^{-r/2-1} \|\mathcal{B}^r(f)\|_p \\ &\lesssim v^{-r/2} \|\mathcal{B}^r(f)\|_p. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $\|f - \eta_{v/2}(f)\|_p \lesssim v^{-r/2} \|\mathcal{B}^r(f)\|_p$. ■

Proposição 2.9. Sejam $f \in W_p^r(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$ e $r > 0$. Vale que

$$\omega_r(f, \theta)_p \lesssim \theta^r \|\mathcal{B}^r(f)\|_p, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Demonstração. Afim de aplicar o Lema 2.4 e a Proposição 2.6, tomamos v um inteiro positivo tal que,

$$\pi/(2v+1+\alpha+\beta+1) < \theta \leq \pi/(2v+\alpha+\beta+1),$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^r(f)\|_p &= \|\Delta_t^r(f) + \Delta_t^r(\eta_v(f)) - \Delta_t^r(\eta_v(f))\|_p \\ &\leq \|\Delta_t^r(f - \eta_v(f))\|_p + \|\Delta_t^r(\eta_v(f))\|_p \\ &\leq 2^{r/2} \|f - \eta_v(f)\|_p + \|\Delta_t^r(\eta_v(f))\|_p \\ &\lesssim 2^{r/2} E_v(f)_p + t^r \|\mathcal{B}^r(f)\|_p. \end{aligned}$$

Agora, tomando o supremo em $0 < t \leq \theta$, segue que

$$\omega_r(f, \theta) \lesssim E_v(f)_p + \theta^r \|\mathcal{B}^r(f)\|_p.$$

Assim, da estimativa anterior e do Teorema 2.8, concluímos a proposição. ■

Finalmente, são provadas duas desigualdades envolvendo a melhor aproximação de uma função e o módulo de suavidade.

Lema 2.10. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$ e $r > 0$. Se f é ortogonal a 1 em $\mathbb{M}$, isto é, $\int_{\mathbb{M}} f(t) dt = 0$, então

$$E_v(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f))_p \lesssim \omega_r\left(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f), \pi/(2v+\alpha+\beta+1)\right)_p, \quad v = 0, 1, \dots$$

Demonstração. Suponha o contrário, que para algum κ inteiro positivo, existe uma função $f_\kappa \in L^p(\mathbb{M})$ e um inteiro positivo v_κ , tais que

$$E_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))_p \geq \kappa \omega_r\left(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa), \pi/(2v_\kappa+\alpha+\beta+1)\right)_p. \quad (2.6)$$

Como a estimativa (2.6) vale para qualquer função $f_\kappa/\|f_\kappa\|_p$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\|f_\kappa\|_p = 1$, $\kappa = 1, 2, \dots$. Além disso, como a bola unitária no espaço $W_p^1(\mathbb{M})$ é compacta em $L^p(\mathbb{M})$, assumimos, que a sequência $\{\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\}_\kappa$, converge em $L^p(\mathbb{M})$ para uma certa função $f_0 \in L^p(\mathbb{M})$, isto é,

$$\|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa) - f_0\|_p \rightarrow 0, \quad \text{para } \kappa \rightarrow 0.$$

Assim, como potências negativas do operador $\mathcal{B}$ são limitadas em $L^p(\mathbb{M})$, segue que

$$\|\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa) - \mathcal{B}^{-r}(f_0)\|_p = \|\mathcal{B}^{-r}(\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa) - f_0)\|_p \lesssim \|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa) - f_0\|_p \rightarrow 0, \quad \kappa \rightarrow 0.$$

De (2.6), temos

$$\frac{E_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))_p}{\omega_r\left(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa), \pi/(2v_\kappa+\alpha+\beta+1)\right)_p} \geq \kappa. \quad (2.7)$$

Agora, temos duas possíveis situações para a sequência $\{v_\kappa\}_\kappa$: é limitada ou ilimitada. No caso em que ela é limitada, existe uma subsequência $\{v_{\kappa_i}\}_n$ convergente. Se a sequência for ilimitada, existe uma subsequência cujo limite vai para infinito. Para simplificar, utilizamos a mesma notação $\{v_\kappa\}_\kappa$ para falar de uma subsequência da mesma. Assim, consideramos os seguintes casos. Se $\{v_\kappa\}_\kappa$ converge para um número v_0 , tomando $\kappa \rightarrow \infty$, o lado esquerdo em (2.7) converge para

$$\frac{E_{v_0}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_0))_p}{\omega_r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_0), \pi/(2v_0 + \alpha + \beta + 1))_p}$$

e, o lado direito é infinito, o que é impossível pois $\mathcal{B}^{-r}(f_0) \in L^p(\mathbb{M})$. Se $v_\kappa \rightarrow \infty$, com $\kappa \rightarrow \infty$, obtemos de (2.6), que o seguinte limite é infinito

$$L = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{E_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))_p}{\omega_r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa), \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, do Teorema 2.8, temos

$$E_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))_p \lesssim v_\kappa^{-r/2} \|\mathcal{B}^r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))\|_p = v_\kappa^{-r/2} \|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p,$$

e, pela Proposição 2.5,

$$\begin{aligned} \omega_r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa), \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p &\geq \|\Delta_{v_\kappa}^r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa))\|_p \\ &\geq c v_\kappa^r \|\mathcal{B}^r(\eta_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(f_\kappa)))\|_p \\ &= c v_\kappa^r \|\eta_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa))\|_p. \end{aligned}$$

Assim,

$$L \lesssim \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{v_\kappa^{-r/2}}{v_\kappa^r} \frac{\|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p}{\|\eta_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa))\|_p}.$$

Como

$$\|\eta_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa))\|_p \geq \|\eta_{v_\kappa}(f_0)\|_p - \|\eta_{v_\kappa}(f_0 - \mathcal{B}^{-1}(f_\kappa))\|_p$$

e, pelo Lema 2.4 vale

$$\|\eta_{v_\kappa}(f_0 - \mathcal{B}^{-1}(f_\kappa))\|_p \lesssim \|f_0 - \mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p,$$

obtemos

$$L \lesssim \limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{v_\kappa^{(3r)/2}} \frac{\|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p}{\|\eta_{v_\kappa}(f_0)\|_p - \|f_0 - \mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p}.$$

Como $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} 1/v_\kappa^{(3r)/2} = 0$, e

$$\limsup_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p}{\|\eta_{v_\kappa}(f_0)\|_p - \|f_0 - \mathcal{B}^{-1}(f_\kappa)\|_p} = \frac{\|f_0\|_p}{\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|\eta_{v_\kappa}(f_0)\|_p} = 1,$$

o limite L é zero, o que contradiz (2.8). ■

Observação 2.11. Uma potência r negativa do operador $\mathcal{B}$, como mencionada no lema anterior, é a integral fracionária de ordem $r > 0$, para funções p -integráveis sobre os espaços compactos 2-homogêneos, definida pela sequência $(k(k + \alpha + \beta + 1))^{-r/2}$ (KUSHPEL; TOZONI, 2012).

Proposição 2.12. Sejam $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$ e v um inteiro positivo. Vale a seguinte desigualdade,

$$E_v(f)_p \lesssim \omega_r(f, \pi/(v+1))_p.$$

Demonstração. Como um termo constante não influencia no valor da melhor aproximação nem no valor do módulo de suavidade de uma função, assumimos que f é ortogonal a 1 em $\mathbb{M}$. Definimos uma sequência $\{v_\kappa\}_\kappa$ com $v_0 = 1$ e

$$v_{\kappa+1} = \inf \left\{ v : \omega_r(f, \pi/(2v + \alpha + \beta + 1))_p \leq \frac{1}{2} \omega_r(f, \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p \right\}, \quad \kappa = 0, 1, \dots$$

Como $\omega_r(f, t)_p$ é monótona não decrescente em $(0, \pi)$, é claro que $v_\kappa \rightarrow \infty$ com $\kappa \rightarrow \infty$. Pelo Lema 2.4,

$$f = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\eta_{v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_\kappa} f] + \eta_1 f.$$

Assim,

$$E_{2v_l}(f)_p \leq \|f - \eta_1 f\|_p \leq \sum_{\kappa=l}^{\infty} \|\eta_{v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_\kappa} f\|_p.$$

Por outro lado, como

$$\|\eta_{v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_\kappa} f\|_p \leq \|\eta_{2v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_{\kappa+1}}(\eta_{2v_{\kappa+1}})f\|_p + \|\eta_{2v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_\kappa}(\eta_{2v_{\kappa+1}})f\|_p,$$

pelo Lema 2.4,

$$\|\eta_{v_{\kappa+1}} f - \eta_{v_\kappa} f\|_p \lesssim E_{v_{\kappa+1}}(\eta_{2v_{\kappa+1}} f)_p + E_{v_\kappa}(\eta_{2v_{\kappa+1}} f)_p \lesssim E_{v_\kappa}(\eta_{2v_{\kappa+1}} f)_p.$$

Como $\eta_{2v_{\kappa+1}} f = \mathcal{B}^{-(r+1)}(\mathcal{B}^{r+1} \eta_{2v_{\kappa+1}} f)$, aplicando o Lema 2.10 para a função $\mathcal{B}^{r+1} \eta_{2v_{\kappa+1}} f$, obtemos

$$\begin{aligned} E_{v_\kappa}(\eta_{2v_{\kappa+1}} f)_p &= E_{v_\kappa}(\mathcal{B}^{-(r+1)}(\mathcal{B}^{r+1} \eta_{2v_{\kappa+1}} f))_p \\ &\lesssim \omega_r(\mathcal{B}^{-(r+1)}(\mathcal{B}^{r+1} \eta_{2v_{\kappa+1}} f); \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p \\ &\lesssim \omega_r(\eta_{2v_{\kappa+1}} f; \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p. \end{aligned}$$

Como a sequência $\{\eta_{v_\kappa}\}_\kappa$ é uniformemente limitada em $L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq \infty$, segue que

$$E_{v_\kappa}(\eta_{2v_{\kappa+1}} f)_p \lesssim \omega_r(f; \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p.$$

Assim, obtemos

$$E_{2v_l}(f)_p \lesssim \sum_{\kappa=l}^{\infty} \omega_r(f; \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p.$$

Pela definição da sequência $\{v_\kappa\}_\kappa$,

$$\omega_r(f; \pi/(2v_\kappa + \alpha + \beta + 1))_p \leq \frac{1}{2^{\kappa-l}} \omega_r(f; \pi/(2v_l + \alpha + \beta + 1))_p, \quad \kappa = l, l+1, \dots$$

Com isso, obtemos

$$E_{2v_l}(f)_p \lesssim \omega_r(f; \pi/(2v_l + \alpha + \beta + 1))_p, \quad l = 1, 2, \dots$$

Seja v um inteiro positivo e escolha um outro inteiro positivo l tal que $v_l \leq v/2 \leq v_{l+1}$. Segue que

$$E_v(f)_p \leq E_{2v_l}(f)_p \lesssim \omega_r(f; \pi/(2v_l + \alpha + \beta + 1))_p.$$

Por outro lado, pela definição da sequência $\{v_\kappa\}_\kappa$,

$$\omega_r(f; \pi/(2v_l + \alpha + \beta + 1))_p < 2 \omega_r(f; \pi/(2v_{l+1} - 2 + \alpha + \beta + 1))_p, \quad l = 0, 1, \dots,$$

consequentemente, continuando o processo, obtemos

$$E_v(f)_p \lesssim \omega_r(f; \pi/(2v_{l+1} - 2 + \alpha + \beta + 1))_p \lesssim \omega_r(f; \pi/(v+1))_p.$$

Com isso, concluímos a proposição. ■

2.3 Demonstração dos Teoremas 1.6 e 1.7

Demonstração do Teorema 1.6. Seja $g \in W_p^r(\mathbb{M})$. Temos,

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^r f\|_p &= \|\Delta_t^r f + \Delta_t^r g - \Delta_t^r g\|_p \\ &\leq \|\Delta_t^r(f - g)\|_p + \|\Delta_t^r g\|_p \\ &\leq 2^{r/2} \|f - g\|_p + \|\Delta_t^r g\|_p \end{aligned}$$

e, tomando o supremo em $0 < t \leq \theta$, segue que

$$\omega_r(f, \theta)_p \leq 2^{r/2} \|f - g\|_p + \omega_r(g, \theta)_p.$$

Pela Proposição 2.9, temos

$$\omega_r(f, \theta)_p \lesssim \|f - g\|_p + \theta^r \|\mathcal{B}^r g\|_p.$$

Como o lado esquerdo da desigualdade anterior não depende de $g \in W_p^r(\mathbb{M})$, tomamos o ínfimo e obtemos

$$\omega_r(f, \theta)_p \lesssim K_r(f, \theta)_p.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.4, para $v > 0$, temos

$$\begin{aligned} K_r(f, \theta)_p &\lesssim \|f - \eta_v(f)\|_p + \theta^r \|\mathcal{B}^r(\eta_v(f))\|_p \\ &\lesssim E_v(f)_p + \theta^r \|\mathcal{B}^r(\eta_v(f))\|_p. \end{aligned}$$

Aplicando as Proposições 2.12 e 2.5, para $0 < \theta \leq \pi/(2v + \alpha + \beta + 1)$, segue que

$$\begin{aligned} K_r(f, \theta)_p &\lesssim \omega_r(f, \pi/(v+1))_p + \theta^r \theta^{-r} \|\Delta_\theta^r f\|_p \\ &\lesssim \omega_r(f, \pi/(v+1))_p + \omega_r(f, \pi/(2v + \alpha + \beta + 1))_p \\ &\lesssim \omega_r(f, \pi/(v+1))_p. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\omega_r(f, \pi/(v+1))_p}{\omega_r(f, \theta)_p} = 1$$

dado $\varepsilon > 0$, para v suficientemente grande, vale que $\omega_r(f, \pi/(v+1))_p \leq (1 - \varepsilon) \omega_r(f, \theta)_p$. Com isso, obtemos

$$K_r(f, \theta)_p \lesssim \omega_r(f, \theta)_p,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Teorema 1.7.

Seja $H(x) = \frac{1-2^{-2r}}{(1-x)^{\delta/2}}$, uma função real com $\delta > 0$. Podemos escrever

$$(1-x)^{r/2} = 2^{-2r} (1-x)^{r/2} + H(x) (1-x)^{\frac{r+\delta}{2}}.$$

Assim, tomando $x = S_\theta(f)$, com $f \in L^p(\mathbb{M})$ na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_\theta^r(f) &= (I - S_\theta(f))^{r/2} \\ &= 2^{-2r} (I - S_\theta(f))^{r/2} + H(S_\theta(f)) (I - S_\theta(f))^{\frac{r+\delta}{2}} \\ &= 2^{-2r} \Delta_\theta^r(f) + H(S_\theta(f)) \Delta_\theta^{r+\delta}(f). \end{aligned}$$

Uma vez que $\Delta_\theta^r(f)$ é limitado, $H(S_\theta(f))$ também o é, logo $\|H(S_\theta(f))\| \leq C$, para toda $f \in L^p(\mathbb{M})$. Com isso, temos

$$\|\Delta_\theta^r(f)\|_p \leq 2^{-2r} \|\Delta_\theta^r(f)\|_p + C \omega_{r+\delta}(f, \theta)_p.$$

Aplicando a fórmula anterior n vezes, chegamos em

$$\|\Delta_\theta^r(f)\|_p \leq 2^{-2r(n+1)} \|\Delta_\theta^r(f)\|_p + C \sum_{i=0}^n 2^{-2ri} \omega_{r+\delta}(f, \theta)_p.$$

Pela Proposição 1.5, estimamos

$$\|\Delta_\theta^r(f)\|_p \leq 2^{-2r(n+1)+r/2} \|f\|_p + C \theta^{2r} \sum_{i=0}^n (2^i \theta) (2^i \theta)^{-2r-1} \omega_{r+\delta}(f, 2^i \theta)_p,$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ na desigualdade anterior, obtemos

$$\omega_r(f, \theta)_p \lesssim \theta^{2r} \int_\theta^\infty \frac{\omega_{r+\delta}(f, t)_p}{t^{2r+1}} dt,$$

concluindo a prova da desigualdade de Marchaud. ■

CARACTERIZAÇÃO DO K-FUNCIONAL

PARTE II

Apresentamos neste capítulo a demonstração do Teorema 1.8. Para isso, derivamos estimativas necessárias para a sequência de multiplicadores (fórmula 3.2) associada ao operador média generalizado $S_{r,\theta}$ definido na fórmula (1.13). Algumas das ideias básicas envolvidas aqui são provenientes de (DAI; DITZIAN, 2004). Porém, várias considerações e adaptações são necessárias, uma vez que os autores trabalham na esfera e aqui consideramos um contexto mais geral. Mesmo que a análise harmônica em ambas as configurações seja semelhante, trabalhar com espaços compactos 2-homogêneos traz várias complicações. Contudo, a essência da técnica é: obter estimativas para a sequência de multiplicadores associada ao operador média generalizado, para provar o Teorema 1.8 via uma aplicação do Teorema de Marcinkiewicz para multiplicadores.

3.1 Estimativas para sequências de multiplicadores

O primeiro lema traz estimativas para o operador diferença, definido em (2.3), aplicado aos polinômios de Jacobi.

Lema 3.1. Sejam $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, j um inteiro positivo, $k = 1, 2, \dots$ e $0 < \theta \leq \pi/2$. Temos,

$$\left| \Delta^j Q_k^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta) \right| \lesssim \begin{cases} \theta^j, & 0 < k\theta \leq 1 \\ \theta^j (k\theta)^{-(\alpha+1/2)}, & k\theta \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Se $x \in [-1, 1]$ de maneira indutiva obtemos

$$\Delta^j Q_k^{(\alpha,\beta)}(x) \leq \sum_{l \geq j/2}^j (1-x)^l P_l(k) Q_k^{(\alpha+l,\beta)}(x),$$

em que $P_l(k)$ é um polinômio de grau $2l - j$ em k . Note que,

$$P_l(k) = a_{2l-j} k^{2l-j} + \dots + a_1 k + a_0 \leq \max_i \{a_i\} (2l - j + 1) k^{2l-j}.$$

Assim, substituindo $x = \cos \theta$ na primeira desigualdade, e como $2\theta^2/\pi^2 \leq (1 - \cos \theta) \leq \theta^2/2$ para $0 \leq \theta < \pi/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \Delta^j Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| &\lesssim \sum_{l \geq j/2}^j |(1 - \cos \theta)|^l |P_l(k)| \left| Q_k^{(\alpha+l, \beta)}(\cos \theta) \right| \\ &\lesssim \sum_{l \geq j/2}^j \frac{(2l-j+1)}{2^l} (k\theta)^{2l-j} \theta^j \left| Q_k^{(\alpha+l, \beta)}(\cos \theta) \right|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se $k\theta \leq 1$, como $0 < \theta \leq \pi/2$, no Lema 1.1 tomamos $|Q_k^{(\alpha+l, \beta)}(\cos \theta)| \leq 1$. Logo, de (3.1) segue que

$$\left| \Delta^j Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| \lesssim \sum_{l \geq j/2}^j \frac{(2l-j+1)}{2^l} \theta^j \lesssim \theta^j.$$

Para $k\theta \geq 1$, no Lema 1.1 tomamos $|Q_k^{(\alpha+l, \beta)}(\cos \theta)| \lesssim (k\theta)^{-(\alpha+l+1/2)}$. Novamente, de (3.1) temos

$$\begin{aligned} \left| \Delta^j Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| &\lesssim \sum_{l \geq j/2}^j \frac{(2l-j+1)}{2^l} (k\theta)^{2l-j} \theta^j \frac{1}{(k\theta)^{\alpha+l+1/2}} \\ &\lesssim \sum_{l \geq j/2}^j \frac{(2l-j+1)}{2^l} \frac{\theta^j}{(k\theta)^{\alpha+1/2}} \frac{1}{(k\theta)^{j-l}} \\ &\lesssim \frac{\theta^j}{(k\theta)^{\alpha+1/2}}. \end{aligned}$$

Isso conclui o lema. ■

Considerando o operador média generalizado, definido em (1.13), e suas projeções ortogonais (1.12), temos

$$S_{r, \theta} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos(l\theta)) \right] \mathcal{Y}_k, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Isso significa que $S_{r, \theta}$ é um operador multiplicativo e sua sequência de multiplicadores $\{m_r(k, \theta)\}_k$ é dada por

$$m_r(k, \theta) := \frac{-2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos(l\theta)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

O Lema 3.1 é aplicado para obter boas estimativas relacionadas a sequência $\{m_r(k, \theta)\}_k$ como segue.

Lema 3.2. Sejam r e j inteiros positivos e $k = 1, 2, \dots$. Para todo $0 < \theta \leq \pi/2r$, temos

$$\left| \Delta^j m_r(k, \theta) \right| \lesssim \begin{cases} \theta^j, & 0 < k\theta \leq 1 \\ \theta^j (k\theta)^{-(\alpha+1/2)}, & k\theta \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Para cada k , a representação de $m_r(k, \theta)$, fórmula (3.2), implica na seguinte desigualdade

$$|\Delta^j m_r(k, \theta)| \leq \frac{2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r \left| \binom{2r}{r-l} \right| |\Delta^j Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos(l\theta))|.$$

Uma aplicação do Lema 3.1 é suficiente para obter

$$|\Delta^j m_r(k, \theta)| \lesssim \theta^j, \quad \text{se } 0 < k\theta \leq 1,$$

e

$$|\Delta^j m_r(k, \theta)| \lesssim \theta^j (k\theta)^{-(\alpha+1/2)}, \quad \text{se } k\theta \geq 1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Na seqüência, faremos uso da expansão em série de Fourier de uma potência da função seno, como abaixo. Para r um inteiro positivo, temos a seguinte expansão de uma potência do seno via cossenos (DAI; DITZIAN, 2004, Lema 3.2):

$$\binom{2r}{r} + 2 \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} \cos(l\theta) = 4^r \sin^{2r}(\theta/2). \quad (3.3)$$

Para visualizar a igualdade anterior basta escrever $\cos(l\theta) = (1/2)(e^{il\theta} + e^{-il\theta})$ e $\sin(\theta/2) = (1/2i)(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$ e, com simples cálculos, obtemos (3.3).

O próximo lema no contexto esférico é dado em (DAI; DITZIAN, 2004, Lema 4.4). A ideia principal é emprestada daí, mas várias considerações são necessárias para prová-lo no presente contexto.

Teorema 3.3. Sejam r um inteiro positivo e $\{m_r(k, \theta)\}_k$ a seqüência de multiplicadores do operador $S_{r, \theta}$ média generalizado, com $k = 1, 2, \dots$. Para todo $0 < \theta \leq \pi/2$, temos

$$0 < c_1 \leq \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k\theta)^{2r}} \leq c_2 < \infty, \quad 0 < k\theta \leq \pi. \quad (3.4)$$

Além disso, para algum $\tau > 0$, existe $v_{r, \tau} < 1$, tal que

$$m_r(k, \theta) \leq v_{r, \tau}, \quad 0 < \tau \leq k\theta. \quad (3.5)$$

Demonstração. A fórmula (3.2) e Proposição 1.3 implicam que

$$\begin{aligned} 1 - m_r(k, \theta) &= 1 + \frac{2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\cos(l\theta)) \\ &= 1 + \frac{2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k, j, i} (\cos(j-2i)l\theta). \end{aligned}$$

Se tomarmos $\theta = 0$ na representação do polinômio de Jacobi da Proposição 1.3, obtemos

$$\sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k, j, i} = 1,$$

e, aplicando a fórmula (3.3), segue que

$$\begin{aligned} 1 - m_r(k, \theta) &= 1 + \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k,j,i} \left[\frac{2}{\binom{2r}{r}} \sum_{l=1}^r (-1)^l \binom{2r}{r-l} (\cos(j-2i)l\theta) \right] \\ &= \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k,j,i} [\sin^{2r}((j-2i)\theta/2)]. \end{aligned}$$

Além disso, para $k\theta \leq \pi$, vale

$$\sin^{2r}((j-2i)\theta/2) \leq \sin^{2r}(j\theta/2) \leq (k\theta/2)^{2r},$$

logo,

$$1 - m_r(k, \theta) \leq \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k,j,i} (k\theta/2)^{2r} = \frac{(k\theta)^{2r}}{\binom{2r}{r}}.$$

Assim,

$$1 - m_r(k, \theta) \lesssim (k\theta)^{2r}, \quad 0 < k\theta \leq \pi.$$

Por outro lado, temos

$$1 - m_r(k, \theta) = \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{[j/2]} a_{k,j,i} [\sin^{2r}((j-2i)\theta/2)],$$

e, para cada índice $i \leq [j/4]$,

$$\sin^{2r}((j-2i)\theta/2) \geq \sin^{2r}(j\theta/4) \geq \left(\frac{j\theta}{2\pi}\right)^{2r}.$$

Com isso, fazendo $\sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{[j/4]} a_{k,j,i} > C > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 - m_r(k, \theta) &\geq \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{[j/4]} a_{k,j,i} [\sin^{2r}((j-2i)\theta/2)] \\ &\geq \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{[j/4]} a_{k,j,i} \left(\frac{j\theta}{2\pi}\right)^{2r} \\ &\geq C \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^{2r}. \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior, concluímos que

$$(k\theta)^{2r} \lesssim 1 - m_r(k, \theta), \quad 0 < k\theta \leq \pi,$$

e isso termina a prova de (3.4). Agora, considere $0 < \tau \leq \pi$ e $k\theta \leq \pi$. Para obter a desigualdade (3.5), usamos a estimativa (3.4), tomando uma constante $c > 0$ de modo que

$$c \leq \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k\theta)^{2r}} \leq \frac{1 - m_r(k, \theta)}{\tau^{2r}}.$$

Com isso, $m_r(k, \theta) \leq 1 - c \tau^{2r}$, e tomamos $v_{r,\tau} := 1 - c \tau^{2r} < 1$ com $0 < \tau \leq k\theta$. Por outro lado, se $k\theta \geq \pi$, então

$$\begin{aligned} 1 - m_r(k, \theta) &= \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} a_{k,j,i} [\sin^{2r}((j-2i)\theta/2)] \\ &\geq \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} \sum_{j=0}^k \sum_{i \in I(k)} a_{k,j,i} [\sin^{2r}((j-2i)\theta/2)], \end{aligned}$$

em que

$$I(k) = \bigcup_{l=0}^{\lfloor \frac{j\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \rfloor} \{i : 0 \leq i \leq \lfloor j/2 \rfloor; \pi/4 + l\pi \leq (j-2i)\theta/2 \leq 3\pi/4 + l\pi\}.$$

Denotando $c' = \sum_{j=0}^k \sum_{i \in I(k)} a_{k,j,i}$, obtemos

$$1 - m_r(k, \theta) \geq \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} c', \quad \text{para } 0 < \tau \leq \pi \leq k\theta.$$

Tomando $v_{r,\tau} := 1 - \frac{4^r}{\binom{2r}{r}} c' < 1$, concluímos o teorema. ■

O próximo lema fornece estimativas para certas sequências envolvendo a sequência de multiplicadores $\{m_r(k, \theta)\}_k$ dada pela fórmula (3.2). Omitiremos a demonstração por ser semelhante à encontrada em (DAI; XU, 2013, p. 255-258).

Lema 3.4. Sejam r um inteiro positivo, $k = 1, 2, \dots$ e $\{m_r(k, \theta)\}_k$ a sequência de multiplicadores associada ao operador $S_{r,\theta}$ média generalizado. Para algum j inteiro positivo e algum $\tau > 0$ tal que $0 < k\theta < \tau$, temos

$$\left| \triangle^j \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k(k + \alpha + \beta + 1)\theta^2)^r} \right| \lesssim [k^{-j} + k^{-j-1}], \quad 0 < \theta < \pi/2. \quad (3.6)$$

3.2 Demonstração do Teorema 1.8

Uma propriedade importante envolvendo o K-funcional e que vamos utilizar na demonstração do Teorema 1.8 é o Teorema da Realização (DITZIAN, 1998, Teorema 5.1). Para $r > 0$ e $f \in L^p(\mathbb{M})$, o Teorema da Realização garante que o K-funcional $K_r(f, \theta)_p$ assume seu ínfimo via o operador $\eta_{\frac{1}{\theta}}$, ou seja,

$$K_r(f, \theta)_p \asymp \|f - \eta_{\frac{1}{\theta}}(f)\|_p + \theta^r \|\eta_{\frac{1}{\theta}}(f)\|_{W_p^r}, \quad 0 < \theta \leq \pi. \quad (3.7)$$

Finalmente, a demonstração do Teorema 1.8 faz uso da seguinte versão do Teorema de Marcinkiewicz para multiplicadores, sobre os espaços compactos 2-homogêneos (BONAMI; CLERC, 1973, Teorema 7.1). Este resultado estabelece uma condição para que um determinado operador, construído através de sequências (multiplicadores), seja limitado.

Teorema 3.5. Sejam $\mathbb{M}$ um espaço compacto 2-homogêneo de dimensão m e $\{\mu_j\}_j$ uma sequência de números reais satisfazendo

$$\text{i) } \sup_j \{|\mu_j|\} < \infty;$$

ii) $\sup_j \left\{ 2^{j(s-1)} \sum_{l=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s \mu_l| \right\} < \infty$, com $s = (m+1)/2$ se m é ímpar e $s = (m+2)/2$ se m é par. Temos,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \mathcal{Y}_k(f) \right\|_p \lesssim \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad 1 < p < \infty.$$

Demonstração do Teorema 1.8. Para provar a equivalência do Teorema devemos mostrar que, para algum número positivo a , as três seguintes desigualdades valem

$$\|f - \eta_{a\theta}(f)\|_p \lesssim \|f - S_{r,\theta}(f)\|_p, \quad (3.8)$$

$$\theta^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(\eta_{a\theta}(f))\|_p \lesssim \|f - S_{r,\theta}(f)\|_p \quad (3.9)$$

e

$$\|\eta_{a\theta}(f) - S_{r,\theta}(\eta_{a\theta}(f))\|_p \lesssim \theta^{2r} \|\mathcal{B}^{2r}(\eta_{a\theta}(f))\|_p. \quad (3.10)$$

Como

$$\|(I + S_{r,\theta} + \dots + S_{r,\theta}^4)(I - \eta_{a\theta})(f - S_{r,\theta}(f))\|_p \lesssim \|f - S_{r,\theta}(f)\|_p,$$

pois $S_{r,\theta}$ é um operador limitado, para obter (3.8) é suficiente mostrar que

$$\|f - \eta_{a\theta}(f) - (I + S_{r,\theta} + \dots + S_{r,\theta}^4)(I - \eta_{a\theta})(f - S_{r,\theta}(f))\|_p \lesssim \|f - S_{r,\theta}(f)\|_p.$$

Para obter a desigualdade anterior, via o Teorema 3.5, precisamos mostrar que

$$\mu_{k,1} := (1 - \eta(a\theta k)) \frac{m_r(k, \theta)^4}{1 - m_r(k, \theta)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

define uma sequência de multiplicadores e portanto o operador associado a ele é limitado em $L^p(\mathbb{M})$.

Note que, se $a\theta k \leq 1$, então $\eta(a\theta k) = 1$, logo $\mu_{k,1} = 0$.

Se $a\theta k \geq \tau > 1$, pelo Teorema 3.3, temos $1 - m_r(k, \theta) \geq c_{\tau,r} > 0$. Além disso, $|1 - \eta(a\theta k)| \leq c$, para alguma constante $c > 0$ e, como $\{(k\theta)^{-(4\alpha+4/2-s)}\}_k$ é limitado para $4\alpha + 4/2 - s \geq 0$, segue do Lema 3.2 que

$$|\Delta^s \mu_{k,1}| \lesssim |\Delta^s m_r(k, \theta)^4| \lesssim \theta^s (k\theta)^{-(4\alpha+4/2)} \lesssim (k\theta)^{-(4\alpha+4/2-s)} k^{-s},$$

logo $|\Delta^s \mu_{k,1}| \lesssim k^{-s}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s \mu_{k,1}| &\lesssim \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} k^{-s} \\ &\leq \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} (2^j)^{-s} \\ &= \sup_j 2^{j(s-1)} 2^j 2^{-js}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s \mu_{k,1}| \leq 1.$$

Com isso, o Teorema 3.5 garante que $\{\mu_{k,1}\}_k$ é uma sequência de multiplicadores e, portanto, a desigualdade (3.8) está provada.

Para provar a desigualdade (3.10), procedemos de forma análoga à anterior, mas tendo em conta a sequência de multiplicadores conveniente. Para $0 < k\theta < \tau$, seja

$$\mu_{k,2} := \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^r \theta^{2r}} \eta(a\theta k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

uma sequência de multiplicadores para o operador envolvido na desigualdade (3.10) como será mostrado. Definimos

$$a_k := \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^r \theta^{2r}} \quad \text{e} \quad b_k := \eta(a\theta k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

e note que $|\Delta^i \eta(a\theta k)| \lesssim (a\theta)^i$, com i um inteiro positivo. Uma aplicação do Lema 2.7 parte (i) e Lema 3.4, respectivamente, garante que

$$\begin{aligned} |\Delta^s \mu_{k,2}| &\lesssim \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \left[\frac{1}{k^{s+1}} + \frac{1}{k^s} \right] (k\theta)^s \\ &\lesssim \left[\frac{1}{k^{s+1}} + \frac{1}{k^s} \right]. \end{aligned}$$

Para aplicar o Teorema 3.5, precisamos verificar se vale o seguinte

$$\sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s \mu_{k,2}| \leq M,$$

para alguma constante M . De fato, pelas estimativas obtidas acima, temos

$$\begin{aligned} \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} |\Delta^s \mu_{k,2}| &\lesssim \sup_j 2^{j(s-1)} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} \left[\frac{1}{k^{s+1}} + \frac{1}{k^s} \right] \\ &\lesssim \sup_j \left[\frac{1}{2^j} + 1 \right] \leq 3/2. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema 3.5 implica que $\{\mu_{k,2}\}_k$ é uma sequência de multiplicadores e, portanto, a desigualdade (3.10) é válida.

Finalmente, para provar a desigualdade (3.9) precisamos mostrar que, para $0 < k\theta < \tau$,

$$\mu_{k,3} := \frac{(k(k + \alpha + \beta + 1))^r \theta^{2r}}{1 - m_r(k, \theta)} \eta(a\theta k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

é uma sequência de multiplicadores e uma aplicação do Teorema 3.5 garante que a desigualdade (3.9) vale. Observe que, nos Lemas 3.4 e 2.7 parte (i), podemos substituir a sequência $\{a_k\}_k$ por $\{a_k^{-1}\}_k$. Também, o Lema 2.7 parte (ii) cabe no nosso contexto para a sequência abaixo e, pelo Teorema 3.3,

$$a_k := \frac{1 - m_r(k, \theta)}{(k(k + \alpha + \beta + 1))^r \theta^{2r}} \geq C, \quad k = 1, 2, \dots,$$

para alguma constante $C > 0$. Mais que isso, da fórmula (3.4) temos $a_k^{-1} \geq C' > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Tendo em conta que a estimativa já foi provada para a_k^{-1} , logo, pelo Lema 2.7, também vale a estimativa para a sequência formada por seus inversos multiplicativos e, portanto, mostramos que $\{\mu_{k,3}\}_k$ é uma sequência de multiplicadores. ■

APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos, como aplicação do Teorema 1.8, alguns resultados acerca do comportamento assintótico de sequências de autovalores de operadores integrais, gerados por núcleos sob uma condição abstrata de Hölder ou de diferenciabilidade. Para isso, apresentamos uma desigualdade do tipo Hausdorff-Young que implica a relação entre o decrescimento dos coeficientes de Fourier de uma função e as ferramentas de aproximação. Finalizamos construindo uma classe de exemplos, ilustrando a aplicabilidade dos resultados.

4.1 Desigualdade de Hausdorff-Young

Fornecemos estimativas para as somas dos coeficientes de Fourier de uma função $f \in L^p(\mathbb{M})$. São elas

$$s_k(f) := \sum_{j=1}^{d_k^m} |\widehat{f}_{k,j}|^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

O seguinte resultado pode ser visto em (DITZIAN, 2012) no contexto esférico. A mesma prova se aplica em um espaço compacto 2-homogêneo, mas é incluída aqui por uma questão de completude.

Lema 4.1. (Desigualdade do tipo Hausdorff-Young) Seja q o expoente conjugado de p . Valem as seguintes desigualdades,

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \lesssim \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{M}), \quad 1 < p \leq 2,$$

e

$$\sup_{k \geq 0} \left\{ (d_k^m)^{-1/2} [s_k(f)]^{1/2} \right\} \lesssim \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{M}).$$

Demonstração. Primeiro observamos que, no caso $p = q = 2$, a primeira desigualdade é a identidade de Parseval

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} |\widehat{f}_{k,j}|^2 = \|f\|_2^2.$$

Uma vez que, a prova para o caso extremo $p = 1$ e $q = \infty$ é feita, o Teorema de interpolação de Riez-Thorin (STEIN, 1956, Teorema 1) termina a demonstração. Assim, para $f \in L^1(\mathbb{M})$,

$$s_k(f) = \frac{[s_k(f)]^{1/2}}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} f(x) \left(\sum_{j=1}^{d_k^m} \widehat{f_{k,j}} \overline{Y_{k,j}(x)} \right) [s_k(f)]^{-1/2} dx, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$

e definimos

$$Z_k := \left(\sum_{j=1}^{d_k^m} \widehat{f_{k,j}} \overline{Y_{k,j}} \right) [s_k(f)]^{-1/2},$$

que é um elemento de $\mathcal{H}_k^m$, tal que

$$\frac{1}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} Z_k(x) \overline{Z_k(x)} dx = 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Além disso, $\{Z_k\}_k$ é um sistema ortonormal em $L^2(\mathbb{M})$ e seus elementos podem ser identificados como elementos da base $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^m; k = 0, 1, \dots\}$. Juntando esta informação e a Fórmula da Adição (1.2), obtemos

$$|Z_k(x)|^2 \leq d_k^m, \quad x \in \mathbb{M}, \quad k = 0, 1, \dots$$

e, consequentemente, a fórmula (4.2) garante que

$$\begin{aligned} s_k(f) &\leq \frac{[s_k(f)]^{1/2}}{\sigma_m} \int_{\mathbb{M}} |f(x)| |Z_k(x)| dx \\ &\leq [s_k(f)]^{1/2} \|f\|_1 (d_k^m)^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(d_k^m)^{-1/2} [s_k(f)]^{1/2} \leq \|f\|_1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

que é essencialmente a desigualdade desejada para $p = 1$ e $q = \infty$. ■

O teorema a seguir relaciona o decrescimento dos coeficientes de Fourier de uma função com o raio de aproximação do operador $S_{r,\theta}$ média generalizado. Em (JORDAO; MENEGATTO, 2016, Teorema 2.1) uma prova semelhante do resultado é apresentada para um operador multiplicativo no contexto esférico e é ligeiramente diferente da apresentada abaixo.

Teorema 4.2. Sejam r um inteiro positivo e $0 < \theta \leq \pi/2$. Se $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 < p \leq 2$, então

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \lesssim \|S_{r,\theta}(f) - f\|_p,$$

em que q é o expoente conjugado de p . A desigualdade anterior é uma igualdade no caso em que $p = 2$. E, se $f \in L^1(\mathbb{M})$, então

$$\sup_{k \geq 0} \left\{ (d_k^m)^{-1/2} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f)]^{1/2} \right\} \lesssim \|S_{r,\theta}(f) - f\|_1.$$

Demonstração. Considere a sequência de multiplicadores $\{m_r(k, \theta)\}_k$ do operador $S_{r, \theta}$ dado em (3.2). Fixando $f \in L^p(\mathbb{M})$, a linearidade da projeção ortogonal implica que

$$\mathcal{Y}_k(S_{r, \theta}(f) - f) = (m_r(k, \theta) - 1)\mathcal{Y}_k(f), \quad k = 1, 2, \dots$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{d_k^m} (\widehat{S_{r, \theta}(f)} - f)_{k,j} Y_{k,j} = (m_r(k, \theta) - 1) \sum_{j=1}^{d_k^m} \widehat{f}_{k,j} Y_{k,j}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Calculando a norma L^2 em ambos os lados, obtemos

$$s_k(S_{r, \theta}(f) - f) = (m_r(k, \theta) - 1)^2 s_k(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

isto é,

$$(d_k^m)^{(2-q)/2q} [s_k(S_{r, \theta}(f) - f)]^{q/2} = (d_k^m)^{(2-q)/2q} |m_r(k, \theta) - 1|^q [s_k(f)]^{q/2}.$$

Levando em conta que $1 - m_r(k, \theta) \asymp (\min\{1, k\theta\})^r$, no Teorema 3.3, temos

$$\begin{aligned} (d_k^m)^{(2-q)/2q} [s_k(S_{r, \theta}(f) - f)]^{q/2} &= (d_k^m)^{(2-q)/2q} |m_r(k, \theta) - 1|^q [s_k(f)]^{q/2} \\ &\asymp (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, a desigualdade do tipo Hausdorff-Young (4.1) completa a primeira desigualdade do teorema. Para o caso $p = 2$, basta aplicar a identidade de Parseval na expressão anterior. A desigualdade no caso $p = 1$ é obtida de forma análoga. ■

O teorema anterior e os Teoremas 1.6 e 1.8 nos permitem escolher a ferramenta mais conveniente para estudar o decrescimento dos coeficientes de Fourier, ou seja, o K-funcional definido em (1.17), o módulo de suavidade (1.15) ou mesmo o raio de aproximação do operador média generalizado (1.13).

Devido ao Teorema 4.2, a seguinte proposição relaciona o decrescimento dos coeficientes de Fourier de uma função e o K-funcional definido em (1.17). Este teorema, no contexto esférico, foi provado para o caso em que r é um inteiro positivo (DITZIAN, 1998). A mesma prova pode ser ligeiramente modificada para o caso em que r é um real positivo e esta prova pode ser encontrada em (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014) no contexto esférico.

Proposição 4.3. Sejam $r > 0$, $f \in L^p(\mathbb{M})$, $1 \leq p \leq 2$, e q o expoente conjugado de p . Vale a seguinte desigualdade

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \lesssim K_r(f, \theta)_p, \quad 0 < \theta \leq \pi/2. \quad (4.3)$$

Demonstração. Pelo Teorema da Realização, fórmula (3.7), é suficiente provar que

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \lesssim \|f - \eta_\theta(f)\|_p + \theta^r \|\eta_\theta(f)\|_{w_p^r}.$$

Observamos que,

$$\begin{aligned}
 s_k(f) &= \sum_{j=1}^{d_k^m} |(\widehat{f - \eta_\theta(f)})_{k,j} + (\widehat{\eta_\theta(f)})_{k,j}|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{d_k^m} 2^2 \left[(\widehat{f - \eta_\theta(f)})_{k,j}^2 + (\widehat{\eta_\theta(f)})_{k,j}^2 \right] \\
 &= 2^2 \sum_{j=1}^{d_k^m} (\widehat{f - \eta_\theta(f)})_{k,j}^2 + 2^2 \sum_{j=1}^{d_k^m} (\widehat{\eta_\theta(f)})_{k,j}^2 \\
 &= 2^2 s_k(f - \eta_\theta(f)) + 2^2 s_k(\eta_\theta(f)).
 \end{aligned}$$

Assim, denotando por $T_{k,\theta,r}$ o lado esquerdo da desigualdade (4.3), segue que

$$\begin{aligned}
 T_{k,\theta,r} &\lesssim \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(f - \eta_\theta(f))]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
 &\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} (\min\{1, k\theta\})^{rq} [s_k(\eta_\theta(f))]^{q/2} \right\}^{1/q}.
 \end{aligned}$$

Denotando por, T_1 e T_2 , respectivamente, os termos do lado direito da desigualdade anterior, temos

$$T_1 \lesssim \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} [s_k(f - \eta_\theta(f))]^{q/2} \right\}^{1/q}$$

e, aplicando o Lema 4.1, obtemos

$$T_1 \lesssim \|f - \eta_\theta(f)\|_p.$$

Analogamente, estimamos T_2 ,

$$\begin{aligned}
 T_2 &\lesssim \theta^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} k^{rq} [s_k(\eta_\theta(f))]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
 &\lesssim \theta^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} [(k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} s_k(\eta_\theta(f))]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
 &\lesssim \theta^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^m)^{(2-q)/2q} [s_k(\mathcal{B}^r(\eta_\theta(f)))]^{q/2} \right\}^{1/q},
 \end{aligned}$$

e, novamente, aplicando o Lema 4.1,

$$T_2 \lesssim \theta^r \|\mathcal{B}^r(\eta_\theta(f))\|_p \lesssim \theta^r (\|\eta_\theta(f)\|_p + \|\mathcal{B}^r(\eta_\theta(f))\|_p) \lesssim \theta^r \|\eta_\theta(f)\|_{W_p^r}.$$

Assim,

$$T_{k,\theta,r} \lesssim \|f - \eta_\theta(f)\|_p + \theta^r \|\eta_\theta(f)\|_{W_p^r} \lesssim K_r(f, \theta)_p.$$

Isso conclui a prova. ■

4.2 Sequência de autovalores de operadores integrais

Como consequência do que foi desenvolvido até aqui, analisamos o comportamento assintótico de sequências de autovalores de operadores integrais gerados por núcleos sob uma condição abstrata de Hölder dada pelo operador média ou supondo suavidade do núcleo segundo o operador de Laplace-Beltrami. Resultados deste tipo são úteis no sentido de proporcionar uma ponte de mão única entre a suavidade de um núcleo e as taxas de decrescimento de sequências de autovalores associadas ao operador gerado por ele.

Consideramos os operadores integrais definidos por

$$\mathcal{L}_K(f) = \int_{\mathbb{M}} K(\cdot, y) f(y) dy, \quad (4.4)$$

em que o núcleo gerador $K: \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ é um elemento de $L^2(\mathbb{M} \times \mathbb{M})$. É fácil ver que $\mathcal{L}_K$ define um operador compacto sobre $L^2(\mathbb{M})$. Adicionando a hipótese de positividade sobre o operador anterior, obtemos que ele é auto-adjunto. Assim, o Teorema Espectral para operadores compactos e auto-adjuntos é aplicável e obtemos uma sequência de números não negativos (possivelmente finita) $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}_n$ que forma uma sequência de autovalores do operador $\mathcal{L}_K$ (ver (KREYSZIG, 1978)).

Nosso estudo aqui, diz respeito a núcleos em $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ com expansão em série do tipo Mercer, que têm a forma

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} Y_{k,j}(x) \overline{Y_{k,j}(y)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} < \infty, \quad x, y \in \mathbb{M}. \quad (4.5)$$

Faremos duas hipóteses básicas sobre os núcleos: a primeira, chamada *positividade*, diz que os coeficientes da expansão são não negativos, ou seja, $a_{k,j} \geq 0$; e a segunda, chamada *monotonicidade*, diz que os coeficientes da expansão são monótonos decrescentes com respeito a k , isto é, $a_{k+1,j} \leq a_{k,j'}$, $1 \leq j \leq d_{k+1}^m$ e $1 \leq j' \leq d_k^m$.

Schoenberg (SCHOENBERG, 1942) caracterizou todos os núcleos zonais positivos definidos, contínuos na esfera, com expansão em série dada pela fórmula (4.5) com coeficientes não dependendo do índice j e satisfazendo a definição de positividade anterior. Recentemente, Berg e colaboradores (BERG; PERON; PORCU, 2017) mostraram uma caracterização similar para núcleos positivos definidos em um contexto mais geral, a saber, em produtos de pares de Gelfand compactos com grupos localmente compactos. Portanto, as suposições feitas aqui em espaços compactos 2-homogêneos são naturais e esperadas na maioria das aplicações.

Assumindo positividade, o operador $\mathcal{L}_K$ é positivo e tem o operador raiz quadrada $\mathcal{L}_K^{1/2}$ unicamente definido, cujo núcleo $K_{1/2}$ tem a seguinte expansão em série

$$K_{1/2}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j}^{1/2} Y_{k,j}(x) \overline{Y_{k,j}(y)}, \quad x, y \in \mathbb{M}. \quad (4.6)$$

Ambos $\mathcal{L}_K$ e $\mathcal{L}_K^{1/2}$ são operadores auto-adjuntos. Pela fórmula (4.4) é fácil ver que os elementos $Y_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, d_k^m$ e $k = 0, 1, \dots$, da base de $L^2(\mathbb{M})$, são auto-funções do operador $\mathcal{L}_K$ associadas aos autovalores $a_{k,j}$, respectivamente. Uma vez que supomos monotonicidade nos coeficientes de K , ela nos fornece uma ordenação da sequência de autovalores que é adequada

para nossa análise. Notemos ainda que, o núcleo K do operador $\mathcal{L}_K$ pode ser recuperado a partir do núcleo $K_{1/2}$ pela seguinte relação,

$$\int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(x, z) K_{1/2}(y, x) dx = K(y, z), \quad y, z \in \mathbb{M}. \quad (4.7)$$

O primeiro objetivo aqui é continuar o caminho feito no contexto esférico (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014).

Dizemos que um núcleo K sobre $\mathbb{M}$, satisfaz a condição (B, β) -Hölder se, existe um número $0 < \beta \leq 2$ e uma função B em $L^1(\mathbb{M})$ tais que

$$|S_\theta(K(\cdot, y))(x) - K(x, y)| \leq B(y) \theta^\beta, \quad x, y \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (4.8)$$

O teorema abaixo é uma melhoria e uma generalização de resultados conhecidos anteriormente no contexto esférico, agora, sobre espaços compactos 2-homogêneos. Ver (JORDAO; MENEGATTO, 2016; JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014; KÜHN, 1987) para detalhes.

Teorema 4.4. Seja $\mathcal{L}_K$ o operador integral induzido pelo núcleo K como na fórmula (4.5) e assumamos as hipóteses de positividade e monotonicidade. Se K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder (4.8), então

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-\beta/m}), \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

Para $r > 0$, escrevemos $\mathcal{B}^{r,0}K$ para a ação do operador derivada fracionária aplicado apenas à primeira variável. Além disso, K^y denota a função $\cdot \mapsto K(\cdot, y)$, $y \in \mathbb{M}$. O segundo resultado é uma generalização de ambos Teorema 2.5 em (CASTRO; MENEGATTO, 2012) e Teorema 3 em (JORDAO; MENEGATTO; SUN, 2014), de modo que também vale para a derivada de ordem fracionária de Laplace-Beltrami, como definido na fórmula (1.16), sobre espaços compactos 2-homogêneos. Isso pode ser visto como consequência do teorema anterior, pois em ambos as técnicas aplicadas para prová-los são similares.

Um operador é dito *nuclear* se seu traço é finito e independente da escolha da base. Veja (CASTRO; MENEGATTO, 2012), para mais detalhes e aplicações.

Corolário 4.5. Seja $\mathcal{L}_K$ o operador integral induzido pelo núcleo K como na fórmula (4.5), assumamos as hipóteses de positividade e monotonicidade e tal que, para um $r > 0$ fixo, $K^y \in W_2^{2r}(\mathbb{M})$. Se o operador integral gerado por $\mathcal{B}^{2r,0}K$ é nuclear, então

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

Para provarmos tanto o Teorema 4.4 como o Corolário 4.5, alguns resultados técnicos adicionais são necessários. Notemos que, para cada $y \in \mathbb{M}$, os coeficientes de Fourier da função $K^y := K(\cdot, y)$ são

$$\widehat{K^y}_{k,j} = a_{k,j} \overline{Y_{k,j}(y)}, \quad j = 1, 2, \dots, d_k^m \text{ e } k = 0, 1, \dots$$

Considerando o núcleo $K_{1/2}$ (fórmula (4.6)), obtemos seus coeficientes de Fourier

$$\widehat{K_{1/2}^y}_{k,j} = a_{k,j}^{1/2} \overline{Y_{k,j}(y)}, \quad j = 1, 2, \dots, d_k^m \text{ e } k = 0, 1, \dots$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{M}} s_k(K_{1/2}^y) dy = \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

A ação da derivada fracionária, fórmula (1.16), sobre $K_{1/2}^y$, nos fornece

$$\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j}^{1/2} (k(k + \alpha + \beta + 1))^{r/2} \overline{Y_{k,j}(y)} Y_{k,j}, \quad y \in \mathbb{M}.$$

Com isso, $|\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y)|^2$ tem uma expansão em série de Fourier conveniente para a qual a hipótese de $K^y \in W_2^{2r}(\mathbb{M})$ pode ser facilmente verificada

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y)\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} (k(k + \alpha + \beta + 1))^r |Y_{k,j}(y)|^2 \\ &= \mathcal{B}^{2r} K^y(y) \\ &= \mathcal{B}^{2r,0} K(y, y), \quad y \in \mathbb{M}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Obtemos uma estimativa conveniente baseada na condição (B, β) -Hölder que será utilizada na prova do teorema. A demonstração é análoga no contexto esférico (JORDAO; MENE-GATTO; SUN, 2014).

Lema 4.6. Se K satisfaz a condição (B, β) -Hölder, então

$$\int_{\mathbb{M}} \|S_{\theta}(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 dy \lesssim \theta^{\beta} \|B\|_1, \quad y \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Demonstração. Fixando $y \in \mathbb{M}$ e $0 < \theta < \pi$, vemos que

$$\begin{aligned} \|S_{\theta}(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 &= \int_{\mathbb{M}} \left[S_{\theta}(K_{1/2}^y)(x) - K_{1/2}^y(x) \right]^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) K_{1/2}(y, x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) K_{1/2}(x, y) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(x, y) K_{1/2}(y, x) dx. \end{aligned}$$

Denotamos por I_1, I_2, I_3 e I_4 , respectivamente, cada um dos termos do lado direito da expressão anterior. Vamos estimar cada um deles. Para I_1 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{M}} \left(\frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K_{1/2}(t, y) d\sigma_x(t) \right) \left(\frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^y} K_{1/2}(y, \omega) d\sigma_y(\omega) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{M}} \left(\frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \right)^2 \int_{\sigma_{\theta}^x} \int_{\sigma_{\theta}^y} K_{1/2}(t, y) K_{1/2}(y, \omega) d\sigma_x(t) d\sigma_y(\omega) dx. \end{aligned}$$

Integrando e aplicando a fórmula (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{M}} I_1 dy &= \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{M}} \left(\frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \right)^2 \int_{\sigma_{\theta}^x} \int_{\sigma_{\theta}^x} \int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(t, y) K_{1/2}(y, \omega) dy d\sigma_x(t) d\sigma_x(\omega) dx \\
 &= \int_{\mathbb{M}^m} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K(t, \omega) d\sigma_x(\omega) d\sigma_x(t) dx \\
 &= \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} S_{\theta}(K(t, \cdot))(x) d\sigma_x(t) dx.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para I_2 ,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) K_{1/2}(y, x) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K_{1/2}(t, y) d\sigma_x(t) K_{1/2}(y, x) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K_{1/2}(t, y) K_{1/2}(y, x) d\sigma_x(t) dx.
 \end{aligned}$$

Integrando e aplicando novamente a fórmula (4.7), encontramos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{M}} I_2 dy &= \int_{\mathbb{M}} - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(\cdot, y))(x) K_{1/2}(y, x) dx dy \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} \int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(t, y) K_{1/2}(y, x) dy d\sigma_x(t) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K(t, x) d\sigma_x(t) dx.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para I_3 ,

$$\begin{aligned}
 I_3 &= - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) K_{1/2}(x, y) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K_{1/2}(y, t) d\sigma_x(t) K_{1/2}(x, y) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K_{1/2}(y, t) K_{1/2}(x, y) d\sigma_x(t) dx,
 \end{aligned}$$

e, como antes, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{M}} I_3 dy &= \int_{\mathbb{M}} - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K_{1/2}(y, \cdot))(x) K_{1/2}(x, y) dx dy \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} \int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(y, t) K_{1/2}(x, y) dy d\sigma_x(t) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_{\theta}^m} \int_{\sigma_{\theta}^x} K(x, t) d\sigma_x(t) dx \\
 &= - \int_{\mathbb{M}} S_{\theta}(K(x, \cdot))(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalmente, para I_4 , procedendo de forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{M}} I_4 dy &= \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{M}} K_{1/2}(x, y) K_{1/2}(y, x) dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{M}} K(x, x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Denotando

$$I_\theta^y := \int_{\mathbb{M}} \|S_\theta(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 dy,$$

e das fórmulas (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} I_\theta^y &= \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_\theta^m} \int_{\sigma_x^\theta} [S_\theta(K(t, \cdot))(x) - K(t, x)] d\sigma_x(t) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{M}} [K(x, x) - S_\theta(K(x, \cdot))(x)] dx. \end{aligned}$$

Portanto, como K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder,

$$\begin{aligned} I_\theta^y &\leq \int_{\mathbb{M}} \frac{1}{\sigma_\theta^m} \int_{\sigma_x^\theta} B(t) \theta^\beta d\sigma_x(t) dx + \int_{\mathbb{M}} B(x) \theta^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{M}} S_\theta(B)(x) \theta^\beta dx + \int_{\mathbb{M}} B(x) \theta^\beta dx \\ &= \theta^\beta (\|S_\theta(B)\|_1 + \|B\|_1) \\ &\leq \theta^\beta (\|B\|_1 + \|B\|_1) \\ &\lesssim \theta^\beta \|B\|_1, \end{aligned}$$

e isso completa a demonstração. ■

Uma outra estimativa que transporta o decrescimento de uma subsequência à sequência original, necessária na demonstração dos resultados, é o seguinte lema que pode ser encontrado em (AZEVEDO; MENEGATTO, 2014).

Lema 4.7. Seja $\{c_n\}_n$ uma sequência de números reais positivos decrescente para zero. Se existem inteiros positivos l, m e r tais que

$$c_{(ln)^m} \leq \frac{C}{n^r}, \quad n \geq n_0, \quad (4.15)$$

para algum n_0 inteiro positivo, então

$$c_n \leq \frac{C'}{n^{r/m}}, \quad n \geq n_1,$$

para algum $C' > 0$ e algum n_1 .

Agora estamos prontos para provar o principal resultado desta seção.

Demonstração do Teorema 4.4. Aplicando o Teorema 1.8 e a Proposição 4.3, para $p = q = 2$ e $r = 2$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^4 s_k(K_{1/2}^y) \lesssim \|S_\theta(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2, \quad y \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima e usando a fórmula (4.9),

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} \lesssim \int_{\mathbb{M}} \|S_\theta(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 dy, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Como K satisfaz a condição (B, β) -Hölder, o Lema 4.6 garante que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} \lesssim \theta^\beta \|B\|_1, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Para $\theta = 1/n$, n um inteiro positivo, a desigualdade anterior implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k/n\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} \lesssim n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Eliminando os termos com índice $k < n$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} \lesssim n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

logo

$$d_n^m \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} d_k^m a_k \lesssim n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

em que $a_k := \min\{a_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^m\}$, $k = 0, 1, \dots$. A equivalência $d_n^m \asymp n^{m-1}$, fórmula (1.4), que é consequência da Fórmula da Adição com $n \rightarrow \infty$, nos garante que

$$n^{m-1} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \lesssim n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

isto é,

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \lesssim n^{-\beta-m+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalmente, observe que

$$n^{\beta+m} a_n = n^{\beta+m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} a_n \leq n^{\beta+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq C, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $C > 0$ ou, equivalentemente, $a_n = O(n^{-\beta-m})$, com $n \rightarrow \infty$. Voltando para a notação original dos autovalores de $\mathcal{L}_K$ e, lembrando que $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}_n$ decresce para zero, temos $a_n = \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K)$, $n = 1, 2, \dots$. Assim,

$$n^{\beta+m} \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K) \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como $d_n^{m+1} \leq 2n^m \leq (2n)^m$, então $\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K)$, logo

$$\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \frac{C}{n^{\beta+m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, aplicando o Lema 4.7, obtemos

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) \leq \frac{C'}{n^{1+\beta/m}},$$

para algum $C' > 0$, isto é,

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-\beta/m}), \quad n \rightarrow \infty,$$

e isso prova o teorema. ■

Demonstração do Corolário 4.5. A maioria das etapas dessa demonstração são essencialmente as mesmas do teorema anterior. Aplicando a Proposição 4.3, no caso particular em que $p = q = 2$, para a função $K_{1/2}^y$ temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^{2r} s_k(K_{1/2}^y) \lesssim [\omega_r(K_{1/2}^y, \theta)_2]^2, \quad y \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Como, $K_{1/2}^y \in W_2^{2r}$, a Proposição 2.9 garante que

$$\omega_r(K_{1/2}^y, \theta)_2 \lesssim \theta^{2r} \|\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y)\|_2, \quad y \in \mathbb{M}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^{2r} \left(\int_{\mathbb{M}} s_k(K_{1/2}^y) dy \right) \lesssim \theta^{2r} \int_{\mathbb{M}} \|\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y)\|_2^2 dy, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Como $B^{2r,0}K$ é o núcleo de um operador nuclear, a igualdade na fórmula (4.10) garante que $\|\mathcal{B}^r(K_{1/2}^y)\|_2^2$ é uma constante não negativa. Com isso, a fórmula (4.9) implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k\theta\})^{2r} \sum_{j=1}^{d_k^m} a_{k,j} \lesssim \theta^{2r}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

A partir daqui, com cálculos análogos aos da demonstração anterior e, tomando $\theta = 1/n$, temos

$$n^{2r+m} a_n = n^{2r+m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} a_n \leq n^{2r+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq C, \quad n = 1, 2, \dots,$$

com $C > 0$, isto é, $a_n = O(n^{-2r-m})$, com $n \rightarrow \infty$. Retomando a notação original dos autovalores de $\mathcal{L}_K$ e, lembrando que $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}_n$ decresce para zero, segue que $a_n = \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K)$, $n = 1, 2, \dots$.

Assim,

$$n^{2r+m} \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K) \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como $d_n^{m+1} \leq 2n^m \leq (2n)^m$, então $\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \lambda_{d_n^{m+1}}(\mathcal{L}_K)$. Logo

$$\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \frac{C}{n^{2r+m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Novamente, aplicando o Lema 4.7, obtemos

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) \leq \frac{C'}{n^{1+2r/m}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $C' > 0$, isto é,

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad n \rightarrow \infty,$$

e isso prova o teorema. ■

4.3 Uma classe de exemplos

Construímos uma classe de exemplos de maneira a considerar um núcleo assumindo as hipóteses da Seção 4.2. Consequentemente, obtemos estimativas precisas para a sequência de autovalores do operador integral gerado por este núcleo.

Seja $\varepsilon > 0$ um número fixado com $m\varepsilon > 1$ e seja K um núcleo com expansão em série na forma

$$K(x, y) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^{m(1+\varepsilon)+2r-1}} P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta), \quad x, y \in \mathbb{M}, \quad \theta = d(x, y), \quad (4.16)$$

em que

$$c_k = \frac{\Gamma(\beta + 1)(2k + \alpha + \beta + 1)\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(k + \beta + 1)}.$$

Como $d_k^m = c_k P_k^{(\alpha, \beta)}(1)$, fórmula (1.4), obtemos

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^{m(1+\varepsilon)+2r-1}} \leq 1 + C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m\varepsilon+2r}} < \infty,$$

para alguma constante C dependendo apenas de m . Isso significa que a expansão em série de K na fórmula (4.16) converge uniformemente para $K(x, y)$ e portanto K é contínuo. Além disso, o operador integral é positivo, pois K é positivo definido (GANGOLLI, 1967). Também, a expansão em série de $\mathcal{B}^{2r,0}K$ é dada por

$$\mathcal{B}^{2r,0}K(x, y) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^{m(1+\varepsilon)+2r-1}} (k(k + \alpha + \beta + 1))^r P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta), \quad x, y \in \mathbb{M}.$$

Como,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^{m(1+\varepsilon)+2r-1}} (k(k + \alpha + \beta + 1))^r \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m\varepsilon}} < \infty,$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de m e r , então $\mathcal{B}^{2r,0}K$ é contínuo. Assim, $K \in W_2^{2r}(\mathbb{M})$. Pela ortonormalidade de $\{Y_{k,j}\}_{k,j}$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}} \mathcal{B}^{2r,0}K(x, x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k(k + \alpha + \beta + 1))^r}{k^{m(1+\varepsilon)+2r-1}} \sum_{j=1}^{d_k^m} \int_{\mathbb{M}} |Y_{j,k}(x)|^2 dx \\ &\leq C \sigma_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m\varepsilon}} < \infty. \end{aligned}$$

Em particular, o operador integral gerado por $\mathcal{B}^{2r,0}K$ é nuclear e K se encaixa nas hipóteses do Corolário 4.5. Logo,

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad \text{com } n \rightarrow \infty.$$

Isto conclui o exemplo.

REFERÊNCIAS

- ASKEY, R. **Orthogonal polynomials and special functions**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975. vii+110 p. Citado nas páginas 16 e 19.
- AZEVEDO, D.; MENEGATTO, V. A. Eigenvalue decay of integral operators generated by power series-like kernels. **Math. Inequal. Appl.**, v. 17, n. 2, p. 693–705, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.7153/mia-17-51>. Citado na página 57.
- BELINSKY, E.; DAI, F.; DITZIAN, Z. Multivariate approximating averages. **J. Approx. Theory**, v. 125, n. 1, p. 85–105, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.005>. Citado na página 13.
- BERENS, H.; BUTZER, P. L.; PAWELKE, S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. **Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A**, v. 4, p. 201–268, 1968/1969. Disponível em: <https://doi.org/10.2977/prims/1195194875>. Citado na página 15.
- BERG, C.; PERON, A. P.; PORCU, E. Orthogonal expansions related to compact gelfand pairs. **Expositiones Mathematicae**, 2017. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086917300658>. Citado na página 53.
- BONAMI, A.; CLERC, J.-L. Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 183, p. 223–263, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1996468>. Citado na página 45.
- BROWN, G.; DAI, F. Approximation of smooth functions on compact two-point homogeneous spaces. **J. Funct. Anal.**, v. 220, n. 2, p. 401–423, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.10.005>. Citado nas páginas 13, 15, 17, 20, 23 e 32.
- CARRIJO, A. O.; JORDAO, T. Approximation tools and decay rates for eigenvalues of integral operators on a general setting. **Positivity**, 2019. Aceito para publicação. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11117-019-00706-z>. Citado na página 14.
- CARRIJO, A. O.; JORDAO, T.; SANTOS, C. On the relations between fractional moduli smoothness on compact two-point homogeneous spaces. 2019. Em produção. Citado na página 14.
- CASTRO, M. H.; MENEGATTO, V. A. Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere. **Math. Comp.**, v. 81, n. 280, p. 2303–2317, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2012-02595-6>. Citado na página 54.
- DAI, F.; DITZIAN, Z. Combinations of multivariate averages. **J. Approx. Theory**, v. 131, n. 2, p. 268–283, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.10.003>. Citado nas páginas 14, 24, 41 e 43.
- DAI, F.; WANG, K.; YU, C. On a conjecture of Ditzian and Runovskii. **J. Approx. Theory**, v. 118, n. 2, p. 202–224, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jath.2002.3717>. Citado na página 19.

DAI, F.; XU, Y. Moduli of smoothness and approximation on the unit sphere and the unit ball. **Advances in Mathematics**, v. 224, n. 4, p. 1233 – 1310, 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870810000125>>. Citado na página 13.

_____. **Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls**. Springer, New York, 2013. xviii+440 p. (Springer Monographs in Mathematics). Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6660-4>>. Citado nas páginas 15, 31, 32, 33 e 45.

DEVORE, R. A.; LORENTZ, G. G. **Constructive approximation**. [S.l.]: Grundlehren Math. Wiss., 1993. v. 303. Citado nas páginas 22 e 31.

DITZIAN, Z. Fractional derivatives and best approximation. **Acta Math. Hungar.**, v. 81, n. 4, p. 323–348, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1006554907440>>. Citado nas páginas 35, 45 e 51.

_____. Relating smoothness to expressions involving Fourier coefficients or to a Fourier transform. **J. Approx. Theory**, v. 164, n. 10, p. 1369–1389, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.05.004>>. Citado na página 49.

DITZIAN, Z.; RUNOVSKII, K. Averages and K -functionals related to the Laplacian. **J. Approx. Theory**, v. 97, n. 1, p. 113–139, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jath.1997.3262>>. Citado na página 13.

DITZIAN, Z.; TIKHONOV, S. Ul'yanov and Nikol'skiĭ-type inequalities. **J. Approx. Theory**, v. 133, n. 1, p. 100–133, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.12.008>>. Citado na página 14.

GANGOLLI, R. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. **Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)**, v. 3, p. 121–226, 1967. Citado nas páginas 15 e 60.

HELGASON, S. The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds. **Acta Math.**, v. 113, p. 153–180, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02391776>>. Citado na página 13.

JORDAO, T.; MENEGATTO, V. A. Estimates for Fourier sums and eigenvalues of integral operators via multipliers on the sphere. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 144, n. 1, p. 269–283, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/proc12716>>. Citado nas páginas 50 e 54.

JORDAO, T.; MENEGATTO, V. A.; SUN, X. Eigenvalue sequences of positive integral operators and moduli of smoothness. **Springer, Cham**, Springer, Cham, v. 83, p. 239–254, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06404-8_13>. Citado nas páginas 14, 24, 51, 54 e 55.

KALYABIN, G. A. On the moduli of smoothness of functions given on a sphere. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 294, n. 5, p. 1051–1054, 1987. Citado na página 13.

KAMZOLOV, A. I. The best approximation of classes of functions $W_p^\alpha(S^n)$ by polynomials in spherical harmonics. **Mat. Zametki**, v. 32, n. 3, p. 285–293, 425, 1982. Citado na página 35.

KOLYADA, V. I. On the relations between moduli of continuity in various metrics. **Trudy Mat. Inst. Steklov.**, v. 181, p. 117–136, 270, 1988. Translated in Proc. Steklov Inst. Math. 1989, no. 4, 127–148. Citado na página 14.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. [S.l.]: Wiley, 1978. Citado na página 53.

KÜHN, T. Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels. **Arch. Math. (Basel)**, v. 49, n. 6, p. 525–534, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01194301>>. Citado na página 54.

KUSHPEL, A.; TOZONI, S. A. Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces. **Constr. Approx.**, v. 35, n. 2, p. 137–180, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00365-011-9146-7>>. Citado nas páginas 13, 15, 17, 20 e 38.

MORIMOTO, M. **Analytic functionals on the sphere**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. v. 178. xii+160 p. (Translations of Mathematical Monographs, v. 178). Citado na página 13.

PLATONOV, S. S. Approximations on compact symmetric spaces of rank 1. **Mat. Sb.**, v. 188, n. 5, p. 113–130, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/SM1997v188n05ABEH000233>>. Citado nas páginas 15, 16, 17 e 21.

_____. Some problems in the theory of the approximation of functions on compact homogeneous manifolds. **Mat. Sb.**, v. 200, n. 6, p. 67–108, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/SM2009v200n06ABEH004021>>. Citado nas páginas 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25 e 31.

RUSTAMOV, K. P. On the best approximation of functions on the sphere in the metric of $L_p(S^n)$, $1 < p < \infty$. **Anal. Math.**, v. 17, n. 4, p. 333–348, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01905937>>. Citado na página 14.

_____. On the approximation of functions on a sphere. **Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.**, v. 57, n. 5, p. 127–148, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/IM1994v043n02ABEH001566>>. Citado nas páginas 13, 14, 15, 17, 20, 22, 24 e 30.

SCHOENBERG, I. J. Positive definite functions on spheres. **Duke Math. J.**, v. 9, p. 96–108, 1942. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077493072>>. Citado na página 53.

SEELEY, R. T. Spherical harmonics. **Amer. Math. Monthly**, v. 73, n. 4, part II, p. 115–121, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2313760>>. Citado na página 13.

SIMONOV, B.; TIKHONOV, S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness. **J. Approx. Theory**, v. 162, n. 9, p. 1654–1684, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jat.2010.04.010>>. Citado na página 14.

STEIN, E. M. Interpolation of linear operators. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 83, p. 482–492, 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1992885>>. Citado na página 50.

SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. [S.l.]: American Mathematical Society, New York, 1939. ix+401 p. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23. Citado nas páginas 17 e 18.

TIKHONOV, S. On moduli of smoothness of fractional order. **Real Anal. Exchange**, v. 30, n. 2, p. 507–518, 2004/05. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.rae/1129416479>>. Citado na página 13.

TREBELS, W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces. **Arch. Math. (Basel)**, v. 94, n. 2, p. 155–164, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00013-009-0078-4>>. Citado nas páginas 14 e 24.

WANG, H.-C. Two-point homogeneous spaces. **Ann. of Math. (2)**, v. 55, p. 177–191, 1952. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1969427>>. Citado na página 15.

WEHRENS, M. **Best approximation on the unit sphere in $\mathbb{R}^k$** . [S.l.]: Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1981. v. 60. 233–245 p. (Internat. Ser. Numer. Math., v. 60). Citado na página 13.

ÍNDICE

A_k^s , 32
 $E_v(f)_p$, 31
 K^y , 54
 $K_r(f, \theta)_p$, 23
 $L^p(\mathbb{M})$, 16
 $L_\infty(\mathbb{M})$, 16
 $P_k^{(\alpha, \beta)}$, 17
 $Q_k^{(\alpha, \beta)}$, 18
 S_θ , 21
 $S_{r, \theta}$, 21
 $W_p^r(\mathbb{M})$, 23
 $Y_{k, j}$, 17
 Δ_θ^r , 21
 δ_k^s , 32
 η_v , 31
 $\lambda_n(\mathcal{L}_K)_n$, 53
 $\mathbb{M}$, 15
 $\mathcal{B}$, 16
 $\mathcal{B}^r$, 23
 $\mathcal{B}^{r, 0}K$, 54
 $\mathcal{H}_k^m$, 17
 $\mathcal{L}_K$, 53
 $\mathcal{Y}_k$, 17
 $\omega_r(f, \theta)_p$, 22
 $\triangle$, 31
 $\hat{f}_{k, j}$, 17
 d_k^m , 17
 $m_r(k, \theta)_k$, 42
 $s_k(f)$, 49

Derivada fracionária, 23

Desigualdade Hausdorff-Young, 49

Fórmula de Adição, 17

K-funcional, 23

Módulo de suavidade, 22

Melhor aproximação, 31

Operador

diferença, 31

diferença de ordem r , 21

Laplace-Beltrami, 16

média, 21

média generalizado, 21

multiplicativo, 20, 21

nuclear, 54

projeção ortogonal, 17

Polinômio

de Gegenbauer, 18

de Jacobi, 18

Teorema

da Realização, 45

de Multiplicadores, 45