Multiplicidade de ideais e números de Segre

Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 18 de novembro de 2008

Assinatura:

Multiplicidade de um ideal e números de Segre

Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima

Orientador: *Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Novembro/2008

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo, dificuldades e alegrias.

Ao professor Victor Hugo, pela orientação, dedicação e paciência.

Pais amados, minha gratidão por vocês não pode ser medida por simples palavras. Meu coração permanecerá sempre ao vosso lado, não importa a distância.

A meus irmãos, por terem atuado como pais. Jamais poderei retribuí-los.

A pessoa de Luis Gerson Júnior, pela insistência em favor de minha carreira acadêmica, e principalmente, pelo o exemplo que és.

Aos amigos e colegas de sala: Renato, Luís Renato, Vinícius, Jaqueline, Íris, Leonardo, Marcos, Fábio, Paulo, Thaís, Matheus, Daniela, Gabriela e Edér, por todos os momentos de sofrimento e felicidade, que compartilhamos. Ao Paulo, pela significativa ajuda no latex.

Aos professores: Raimundo Nonato, Daniel Levcovitz, Maria Aparecida Ruas, Alexandre Nolasco, Roberta Godoi, Plácido Zoega, Marcelo Saia, Miguel Frasson Márcia Federson, e aos professores do Departamento de Matemática, pelo crescimento acadêmico. Particularmente, agradeço ao professor Alexandre Fernandes (UFC), pelo incentivo inicial a fazer mestrado no ICMC.

Aos funcionários do ICMC, pela disposição em ajudar, que sempre demonstraram.

Por fim, ao CNPq, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a multiplicidade de Hilbert-Samuel, e suas possíveis generalizações, tais como números de Segre e a sequência de multiplicidades de Achilles e Manaresi.

Abstract

In this work is studied the multiplicity of Hilbert-Samuel and its possible generalizations, such as Segre numbers and sequence of multiplicities of Achilles and Manaresi.

Sumário

1 Funções de Hilbert e Multiplicidade de Hilbert-Samuel **1**

1.1 Anéis Graduados 1

1.2 Funções de Hilbert e Multiplicidade 6

2 Espaços Analíticos e Esquemas **11**

2.1 Germes Analíticos 11

2.2 Feixes 17

2.3 Esquemas afins e arbitrários 19

3 Explosões sobre Ideais **21**

3.1 Explosão sobre um ponto 21

3.2 Explosão sobre um ideal 22

4 Ciclos e Classe de Chern de um Fibrado em Retas **25**

4.1 Ciclos de Esquemas 25

4.2 Imagem Inversa 30

4.3 Divisor de Cartier e seu ciclo associado de Weil 31

4.4 Fibrados 32

4.5 Operador Classe de Chern de um Fibrado em Retas 36

5 Números de Segre **39**

5.1 Variedades Polares, Ciclos Segre e Números de Segre 39

5.2 Teoria da interseção 49

5.3 Fórmulas de Interseção 51

5.4 Seções de Hiperplanos e Números de Segre 54

6 Números de Segre e Multiplicidade Generalizada de Hilbert-Samuel 57

Lista de Figuras

(3.1) Explosões, 23

(3.2) Explosão do Cone, 25

(4.1) Fibrado Vetorial de posto um, 34

Introdução

A multiplicidade de um ideal I em um anel Noetheriano local $(A,\mathfrak{m})$, é um dos conceitos básicos, mais conhecidos da álgebra comutativa, e de grande aplicabilidade, em várias áreas da matemática.

No caso em que I é $\mathfrak{m}$-primário, essa multiplicidade está bem definida, e é chamada de multiplicidade de Hilbert-Samuel. Esta, possui grande importância na área de redução de ideais (fecho integral), tendo como uma de suas aplicações, o teorema de Rees: Se $J \subset I$ são ideais $\mathfrak{m}$-primários de A, então J é redução de I se, e somente se as multiplicidades de Hilbert-Samuel de I e J coincidem, ver [22]. Também possui diversas aplicações na teoria de equisingularidades, ver Teissier [26], Kleiman [15], Massey [11], Gaffney-Gassler [10], dentre outros.

Para o caso em que A é o anel Noetheriano local de um espaço analítico complexo reduzido $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ de dimensão pura n, denotado por $\mathscr{O}_{X,0}$, e I é um ideal arbitrário de A, Gaffney e Gassler [10] estenderam essa noção de multiplicidade de Hilbert-Samuel, e a chamaram de números de Segre, denotados por $e_k(I,X)$, $k = 1,...,n$. Quando I é o ideal Jacobiano de uma hipersuperfície singular complexa, os números de Segre foram chamados por Massey [19], de números de Lê, os quais, generalizam os números de Milnor. Utilizando estes números de Segre, Gaffney e Gassler [10], generalizaram o teorema de Rees, no contexto analítico: Se $J \subset I$ são ideais quaisquer de $\mathscr{O}_{X,0}$, então J é redução de I se, e somente se os números de Segre I e J coincidem, isto é $e_k(I,X) = e_k(J,X)$, $k = 1,...,n$ (ver [10, Cor. 4.9]). No mesmo artigo, são dados também, algumas aplicações na teoria de equisingularidade para hipersuperfícies singulares complexas.

No caso algébrico, em que $(A,\mathfrak{m})$ é um anel Noetheriano local qualquer, de dimensão d, e I é um ideal arbitrário, Achilles e Manaresi [1] introduziram uma sequência de multiplicidades $c_0(I,A),\ldots,c_d(I,A)$, as quais, generalizam a multiplicidade de Hilbert-Samuel: Se I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário, $c_0(I,A)$ é a multiplicidade de Hilbert-Samuel de I, e o restante dos termos da

sequência $c_k(I,A)$, $k = 1,\ldots,d$ são nulos. Com esta sequência de multiplicidades, Ciupercă [4] mostra uma das implicações do Teorema de Rees no contexto algébrico: Se $J \subset I$ são ideais quaisquer de um anel $(A,\mathfrak{m})$ Noetheriano local de dimensão d, e J é redução de I, então a sequência de multiplicidades de Achilles e Manaresi de I e J coincidem, isto é $c_k(I,A) = c_k(J,A)$, $k = 0,...,d$. Uma demonstração mais direta deste resultado, foi feita por Bedregal e Pérez [5]. A outra implicação, continua em aberto. É importante salientar que Achilles e Rams [2], mostraram que os números de Segre podem ser obtidos, por meio desta sequência de multiplicidades de Achilles e Manaresi. Nosso trabalho também tem como objetivo, apresentar estas multiplicidades e algumas de suas propriedades.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 1, estudamos a multiplicidade de Hilbert-Samuel de um ideal I $\mathfrak{m}$-primário, e apresentamos os teoremas (1.2.9) e (1.2.11), que demonstram a aditividade e invariância por redução dessa multiplicidade.

Nos capítulos 2, 3 e 4, apresentamos ao leitor os elementos básicos e necessários ao bom entendimento do trabalho (ressaltamos que muitos dos resultados são colocados sem demonstrações).

No capítulo 5 (capítulo principal), damos a definição de variedades polares, ciclos de Segre e números de Segre, bem como as fórmulas de interseção (5.3.1) e as fórmulas de expansão (5.4.2).

No último capítulo, introduzimos a sequência de multiplicidades de Achilles-Manaresi $c_0(I,A)$, ..., $c_d(I,A)$, para um ideal I arbitrário, e enunciamos o teorema (6.0.10), que expressa os números de Segre, em termos dessa sequência.

Capítulo

1

Funções de Hilbert e Multiplicidade de Hilbert-Samuel

O principal objetivo do primeiro capítulo, é definir a multiplicidade de Hilbert-Samuel. Esta multiplicidade possui importantes aplicações na teoria de fecho integral, redução de ideais, teoria de singularidades e geometria algébrica. No capítulo 6, generaliza-se essa multiplicidade e será visto que os números de Segre podem ser dados de forma algébrica, a saber, em termos dessas multiplicidades generalizadas. Para mais detalhes, sugerimos [3], [20], [18] e [6].

1.1 Anéis Graduados

Definição 1.1.1. *Seja A um anel Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Dizemos que um ideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, é um* ***primo associado*** *de M, se uma das condições equivalentes ocorrem:*

(1) Existe $x \in M$, tal que $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}$.

(2) Existe uma aplicação $A/\mathfrak{p} \to M$ A-linear.

Denotamos $\mathrm{Ass}M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\colon \mathfrak{p}$ é um primo associado de $M\}$.

Lema 1.1.2. *Seja I um elemento maximal (com respeito a inclusão) do conjunto $S = \{\mathrm{ann}(x) : x \in M, x \neq 0\}$ de ideais em A. Então, I é um ideal primo e $I \in \mathrm{Ass}M$.*

Definição 1.1.3. *Um* ***anel graduado*** *A, é uma família $(A_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos do grupo aditivo A, tal que $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subseteq A_{m+n},\ m,n \geq 0$.*

Exemplo 1.1.4. *O anel dos polinômios $A = K[x_1, ..., x_r]$ sobre o corpo K, é um anel graduado, onde A_n = conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau n.*

Definição 1.1.5. *Seja A um anel graduado. Um **A-módulo graduado** M, é um A-módulo, junto com uma família $(M_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos do grupo aditivo M, tais que $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$, $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$, $\forall\, m, n \geq 0$. Dizemos que $x \in M$ é **homogêneo**, se $x \in M_n$ para algum n ($\deg x = n$).*

Observação 1.1.6.

1. *Cada M_n é um A_0-módulo ($A_0 M_n \subseteq M_n$).*
2. *Cada $y \in M$ pode ser escrito de maneira única, como soma finita de elementos homogêneos não-nulos. Os elementos não-nulos são chamados de componentes homogêneas de y.*

Notação 1.1.7. *Seja A_0 um anel local Artiniano e $\mathfrak{m}_0$ seu ideal maximal. Seja $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ um anel Noetheriano graduado gerado por elementos de grau um. Assim, A é uma A_0-álgebra finitamente gerada (ver [3, 10.7]). Portanto, $A = A_0[x_1, ..., x_s]$, onde $\deg x_i = 1$, $\forall i$. Seja $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \bigoplus (\bigoplus_{n\geq 1} A_n)$ o **ideal maximal graduado** de A e M um A-módulo graduado finitamente gerado.*

Lema 1.1.8. *Temos*

1. *Todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} M$ é um ideal graduado;*
2. *Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} M$, existe um elemento $x \in A$ homogêneo, tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$.*

Definição 1.1.9. *Definimos a dimensão de um A-módulo M, como sendo a dimensão de Krull do anel quociente $A/\mathrm{ann}(A)$. Denotamos essa dimensão por $\dim M$.*

Notação 1.1.10. *Denotamos $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = \{x \in M : \mathfrak{m}^n x = 0$ para algum $n \geq 0\}$.*

Lema 1.1.11.

1. *$H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ é um A-módulo tal que $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_n = 0$, para $n >> 0$;*
2. $\mathrm{Ass} H^0_{\mathfrak{m}}(M) = \mathrm{Supp}\, H^0_{\mathfrak{m}}(M)$;
3. $\mathrm{Ass}(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = (\mathrm{Ass} M) \backslash \{\mathfrak{m}\}$;
4. *(i)* $\dim M = 0 \Rightarrow M = H^0_m(M)$;

   (ii) $\dim M > 0 \Rightarrow \dim M = \dim(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$.

Lema 1.1.12. *Seja $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ um polinômio de grau $d-1$. As seguintes afirmações, são equivalentes:*

1. *$P(n) \in \mathbb{Z}$, para $n >> 0$.*

2. *Existem inteiros $a_0, \ldots, a_{d-1}$, tais que*

$$P(X) \;=\; \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{X+i}{i}.$$

3. *$P(n) \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: $(1) \Rightarrow (2)$

O conjunto

$$\{\binom{X+i}{i} : \; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

é uma $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[X]$. Então, podemos escrever

$$P(X) \;=\; \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{X+i}{i}, \text{ onde } a_i \in \mathbb{Q}.$$

O resto da prova, segue por indução sobre o grau do polinômio $P(X)$:

Se deg $P(X) = d-1 = 0$, então $P(X) = a_0 \in \mathbb{Z}$. Suponhamos então, que $d-1 > 0$ e $(1) \Rightarrow (2)$, para todo $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grau $< d-1$. Ou seja, se para $n >> 0$, $Q(n) \in \mathbb{Z}$ e

$$Q(X) \;=\; \sum_{i=0}^{d-2} a'_i \binom{X+i}{i},$$

onde $a'_i \in \mathbb{Q}$, então $a'_i \in \mathbb{Z}$.

Veja que

$$\begin{aligned} P(X)-P(X-1) &= \sum_{i=0}^{d-1} a_i\left[\binom{X+i}{i}-\binom{X+i-1}{i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} a_i\binom{X+i-1}{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{d-2} a_{i+1}\binom{X+i}{i}. \end{aligned}$$

Agora, $P(X)-P(X-1)$ é um polinômio de grau $d-2$. Pela hipótese de indução, segue que os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$a_0 = -\sum_{i=0}^{d-2} a_{i+1}\binom{n+i}{i} + P(n) \in \mathbb{Z},$$

para $n >> 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Basta utilizar o fato de $\binom{n+i}{i} \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $i \geq 0$.

Definição 1.1.13. *Seja M e A como na notação (1.1.7). Chamamos a função $H(M,-)$: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, com $H(M,n) = \ell(M_n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, de* ***função de Hilbert*** *(com respeito a M). Convencionamos que $M_n = 0$, para $n < 0$.*

Definição 1.1.14. *Dizemos que uma função $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é um* ***tipo polinomial de grau*** *d, se existe um polinômio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, de grau d, tal que $F(n) = P(n)$ para todo $n >> 0$. Dizemos que uma tal função é um tipo polinomial de grau -1, quando $P(X)$ for o polinômio nulo.*

Lema 1.1.15. *Seja F uma função em $\mathbb{Z}$, tal que*

$$G(n) = F(n) - F(n-1)$$

é igual a um polinômio em n de grau $d-1$, para n suficientemente grande. Então, F é igual a um polinômio de grau d, para n suficientemente grande.

Teorema 1.1.16. *Seja M um A-módulo graduado finitamente gerado de dimensão d, onde A é como em (1.1.7). Então, $H(M,-)$ é um tipo polinomial de grau $d-1$.*

Demonstração: A prova segue por indução sobre a dimensão de M. Se $\dim M = 0$, o resultado segue pelo Lema (1.1.11), já que $M = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ e assim existe n_0, tal que $M_n = 0$, para $n \geq n_0$; implicando que $H(M,n) = 0$, para $n >> 0$ e portanto, um tipo polinomial de grau -1.

Seja $\dim M = d > 0$ e suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema é válido para todo A-módulo graduado finitamente gerado de dimensão $< d$.

1º caso: Suponhamos que exista $x \in A_1$, tal que x não seja um divisor de zero de M.

Então, temos a seguinte sequência exata de A-módulos graduados:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\times x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0,$$

na qual, a restrição à cada componente graduada dará a nova sequência exata:

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\times x} M_n \longrightarrow (M/xM)_n \longrightarrow 0.$$

Assim, por aditividade, concluímos que:

$$\ell((M/xM)_n) \;=\; \ell(M_n) \;-\; \ell(M_{n-1}) \Rightarrow$$

$$H(M/xM,n) \;=\; H(M,n) \;-\; H(M,n-1).$$

Pela hipótese de indução, $H(M/xM,n)$ é um tipo polinomial de grau $d-2$, já que $\dim(M/xM) = d-1$. Ou seja, existe $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ e $n_0 \geq 0$, tal que para todo $n \geq n_0$, $H(M/xM,n) = Q(n)$. Assim, $H(M,n) = \sum_{i=n_0}^{n} Q(i) + H(M,n_0-1)$. Agora, pelo lema (1.1.15), a função $\sum_{i=n_0}^{n} Q(i)$ é um polinômio de grau $d-1$. Portanto, $H(M,n)$ é um polinômio de grau $d-1$.

2º caso: Seja M um A-módulo graduado de dimensão $d > 0$ e considere a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0,$$

pela qual se obtém uma sequência exata de A_0-módulos :

$$0 \longrightarrow (H^0_{\mathfrak{m}}(M))_n \longrightarrow M_n \longrightarrow (M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))_n \longrightarrow 0.$$

Por aditividade,

$$\ell(M_n) \;=\; \ell(M_n^0) \;+\; \ell((M/H_{\mathfrak{m}}^0(M))_n),$$

para todo $n \geq 0$. Mas $\ell(H_{\mathfrak{m}}^0(M)) = 0$, para $n >> 0$. Assim, $\ell(M_n) = \ell((M/H_{\mathfrak{m}}^0(M))_n)$, para $n >> 0$. Portanto,

$$H(M,n) \;=\; H(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M),n), \textit{para } n >> 0.$$

Agora, basta mostrar que $H(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M),n)$ é um tipo polinomial de grau $d-1$:

Podemos supor que a classe residual de A_0 é infinita (do contrário, escolhemos uma indeterminada Y sobre A_0). Seja agora, $A_0(Y) \;=\; S^{-1}A_0[Y]$, onde

$$S \;=\; \{p[Y] \in A_0[Y] : \; p[Y] \neq 0 \textit{ em } A_0[Y]/\mathfrak{m}_0[Y]\}$$

e substituímos o anel A, por $R \;=\; A \otimes_{A_0} A_0(Y)$ e $M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)$, por $N \;=\; (M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)) \otimes_{A_0} A_0(Y)$. Agora, existe um graduando canônico sobre R e N, tal que R seja um anel graduado padrão sobre o Artiniano $A_0(Y)$ e o ideal maximal graduado de $A_0(Y)$ seja $S^{-1}\mathfrak{m}_0[Y]$. Assim, $H(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M),n) \;=\; H(N,n)$, para todo n.

Pelo Lema (1.1.11), $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M))$. Portanto, podemos supor que exista um $x \in A_1$, o qual, não seja divisor de zero de M. Além disso, novamente pelo lema (1.1.11), $\dim(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)) = d$. Assim, pelo **1° caso**, $H(M/H_{\mathfrak{m}}^0(M),n)$ é um polinômio de grau $d \;-\; 1$. Donde segue o teorema. ■

1.2 Funções de Hilbert e Multiplicidade

Definição 1.2.1. *Seja A e M, como na notação (1.1.7). Então, o polinômio $p(X) = p_M(X) \in \mathbb{Q}(X)$, tal que $H(M,n) \;=\; p(n)$, para $n >> 0$, é chamado* ***polinômio de Hilbert de*** *M. Pelo Lema (1.1.12), podemos escrever*

$$p_M(X) \;=\; \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{X+i}{i},$$

onde $e_i \in \mathbb{Z}$. O inteiro e_0, é chamado ***multiplicidade de*** *M e é denotado por $e(M)$.*

Seja $(A,\mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Podemos obter o **anel**

graduado associado ao anel A, sobre o anel Artiniano A/I, dado por

$$G_I(A) \;=\; \frac{A}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \cdots \oplus \frac{I^n}{I^{n+1}} \oplus \cdots.$$

Similarmente, para um A-módulo M finitamente gerado qualquer e um ideal $I \subset A$, onde A e I, são como acima, podemos obter o $G_I(A)$-**módulo graduado associado a** M,

$$G_I(M) \;=\; \frac{M}{IM} \oplus \frac{IM}{I^2M} \oplus \cdots \oplus \frac{I^nM}{I^{n+1}M} \oplus \cdots.$$

Definição 1.2.2. *Para M, A e I como acima, definimos a* ***função de Hilbert-Samuel de*** *M (com respeito a I), por*

$$\chi_M^I(n) \;:=\; \sum_{i=0}^{n} H(G_I(M), i) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \ell(I^iM/I^{i+1}M) \;=\; \ell(M/I^{n+1}M).$$

Teorema 1.2.3. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Se M é um A-módulo finitamente gerado de dimensão d, então:*

1. *A função de Hilbet-Samuel $\chi_M^I(n)$ é um tipo polinomial de grau d, da forma*

$$\chi_M^I(n) \;=\; \frac{e_0}{d!}n^d \;+\; (\textit{termos em } n \textit{ de potências de ordem} \leq d-1); \tag{1.1}$$

2. $$e_0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d}\ell(M/I^{n+1}M).$$

Demonstração: (1) Pelo teorema (1.1.16), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$,

$$H(G_I(M), n) \;=\; P_{G_I(M)}(n) \;=\; \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{n+i}{i},$$

onde $e_k \in \mathbb{Z}$. Seja

$$C_{n_0} \;=\; \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) \;-\; \sum_{j=0}^{n_0-1} P_{G_I(M)}(j).$$

Então, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\chi_M^I(n) &= \sum_{j=0}^{n} H(G_I(M), j) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) + \sum_{j=n_0}^{n} P_{G_I(M)}(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) - \sum_{j=0}^{n_0-1} P_{G_I(M)}(j) + \sum_{j=0}^{n} P_{G_I(M)}(j) \\
&= C_{n_0-1} + \sum_{j=n_0}^{n} P_{G_I(M)}(j),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} P_{G_I(M)}(j) &= \sum_{j=0}^{n} \left(e_0 \binom{j+d-1}{d-1} - e_1 \binom{j+d-2}{d-2} + \ldots + (-1)^{d-1} e_{d-1} \binom{j+0}{0} \right) \\
&= e_0 \sum_{j=0}^{n} \binom{j+d-1}{d-1} - e_1 \sum_{j=0}^{n} \binom{j+d-2}{d-2} + \ldots + (-1)^{d-1} e_{d-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{j+0}{0} \\
&= e_0 \binom{j+d}{d} - e_1 \binom{j+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^{d-1} e_{d-1} \binom{j+1}{1}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\chi_M^I(n) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i} \binom{n+i}{i}, \tag{1.2}$$

onde $e_d = C_{n_0}$. Ou seja, $\chi_M^I(n)$ é um polinômio de grau d ($n >> 0$).

(2) Devido à equação (1.2),

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \frac{e_0}{d!} n^d + (\text{termos em } n \text{ de potências de ordem} \leq d-1),$$

para n suficientemente grande. Tomando o limite,

$$e_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{d!}{n^d} \ell(M/I^{n+1}M).$$

■

Definição 1.2.4. *O inteiro e_0 acima, é chamado* ***multiplicidade de Hilbert-Samuel****, e denotado*

por $e(I,M)$.

Definição 1.2.5. *Uma* ***filtração de um*** *A-módulo M, é uma cadeia infinita de submódulos*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots,$$

denotada por (M_n). *Uma filtração* (M_n) *é uma I-**filtração** (I ideal de A), se*

$$IM_n \subseteq M_{n+1}, \text{ para cada } n.$$

*Uma I-filtração é **estável**, se* $IM_n = M_{n+1}$ *para n suficientemente grande.*

Exemplo 1.2.6. (I^n) *é uma I-filtração estável, já que* $IM_n = II^nM = I^{n+1}M = M_{n+1}$

Proposição 1.2.7. *(Lema de Artin-Rees) (Ver [3, p.107]) Seja A um anel Noetheriano, I um ideal de A, M um A-módulo finitamente gerado,* (M_n) *uma I-filtração estável de M. Se* M' *é um submódulo de M, então* $(M' \cap M_n)$ *é uma I-filtração estável de* M'.

Corolário 1.2.8. *Existe um inteiro k, tal que*

$$(I^nM) \cap M' = I^{n-k}((I^kM) \cap M'),$$

para todo $n \geq k$.

A seguir, veremos como propriedades da multiplicidade de Hilbert-Samuel, a sua aditividade e invariância por redução.

Teorema 1.2.9. *Seja* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *uma sequência exata de A-módulos finitamente gerados. Então,*

$$e(I,M) = e(I,M') \ + \ e(I,M'').$$

Demonstração: Identificamos M', como submódulo de M. Então,

$$\ell(M/I^nM) = \ell(M''/I^nM'') + \ell(M'/M' \cap I^nM'),$$

e $I^nM' \subset M' \cap I^nM$. Além disso, pelo corolário (1.2.8), existe $k > 0$ tal que

$$M' \cap I^nM = I^{n-k}((I^kM) \cap M') \subset I^{n-k}M', \ \textit{para todo } n > k.$$

Assim,

$$\ell(M'/I^{n-k}M') \leq \ell(M'/M' \cap I^nM) \leq \ell(M'/I^nM').$$

Portanto, pelo teorema (1.2.3), obtemos:

$$e(I,M) - e(I,M'') = \lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} \ell(M'/M' \cap I^nM) = e(I,M').$$

■

Definição 1.2.10. *Seja A um anel e I um ideal. Dizemos que um ideal $J \subset A$ é uma redução de I, se: $J \subset I$ e para algum r, $I^{r+1} = JI^r$. Note também que se J é uma redução de I e $I^{r+1} = JI^r$, então para algum $n > 0$ nós temos $I^{r+n} = J^nI^r$.*

Teorema 1.2.11. *(Teorema de Rees) Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e J uma redução de I. Então J também é $\mathfrak{m}$-primário, e para qualquer A-módulo finitamente gerado M, temos*

$$e(I,M) = e(J,M).$$

Demonstração: Se $I^{r+1} = JI^r$, então $I^{r+1} \subset J \subset I$, e assim J é também m-primário. Por outro lado,

$$\ell(M/J^{n+r}M) \geq \ell(M/I^{n+r}M) = \ell(M/J^nI^rM) \geq \ell(M/J^nM).$$

Portanto,

$$e(I,M) = e(J,M).$$

■

Observação 1.2.12. *A recíproca deste teorema, também é verdadeira (ver [22]). Sua prova, necessita de mais ferramentas algébricas.*

Capítulo

2

Espaços Analíticos e Esquemas

Neste capítulo, relembramos algumas definições e resultados da teoria de espaços analíticos complexos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Para um estudo mais aprofundado, recomendamos [12], [23] e [14], para a primeira seção, e [7], [13], para as duas restantes.

2.1 Germes Analíticos

Definição 2.1.1. *Considere a família de todas as funções analíticas definidas em alguma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de $x \in \mathbb{C}^n$, com valores em $\mathbb{C}$. Nesta família, definimos uma relação de equivalência. Dizemos que duas funções analíticas $f : U \to \mathbb{C}$ e $g : V \to \mathbb{C}$ são equivalentes no ponto x, se existe uma vizinhança W de x, tal que $W \subset U \cap V$ e $f_{|W} = g_{|W}$. Se f é uma função analítica, a classe de equivalência que contêm f, é chamada de* ***germe da função*** *f* ***em*** *x, denotada por $\mathbf{f}$. Podemos definir operações nesta família, de modo a torná-la um anel: Para quaisquer dois germes $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ em x, escolhemos representantes $f : U \to \mathbb{C}$ e $g : V \to \mathbb{C}$, e definimos $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, como sendo o germe da função $f+g : U \cap V \to \mathbb{C}$. Analogamente definimos o produto $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$. Denotamos por $\mathscr{O}_{n,x}$ o* ***anel dos germes de funções em*** *$x \in \mathbb{C}^n$.*

Definição 2.1.2. *Seja U um aberto de $\mathbb{C}^n$ e seja X um subconjunto de U. Dizemos que X é um* ***subconjunto analítico*** *de U, se para todo $x \in U$, existem um domínio V, tal que $x \in V \subset U$ e funções $f_1, \ldots, f_r$ analíticas em V tais que:*

$$X \cap V \;=\; \{z \in V : \; f_1(z) \;=\; \cdots = \; f_r(z) \;=\; 0\}.$$

Dizemos que $X \subset \mathbb{C}^n$ é um ***conjunto analítico****, se X é um subconjunto analítico de um aberto*

de $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 2.1.3. *Os conjuntos* $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^3 = 0\}$ *e* $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ *são conjuntos analíticos de* $\mathbb{C}^2$ *e* $\mathbb{C}^3$*, respectivamente. Em geral, toda variedade algébrica (afim) em* $\mathbb{C}^n$ *é um conjunto analítico.*

Exemplo 2.1.4. *O conjunto*

$$X = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \subset \mathbb{C}$$

é um subconjunto analítico de $\mathbb{C} - \{0\}$*, mas não é um subconjunto analítico de* $\mathbb{C}$.

Proposição 2.1.5. *Se* X *e* Y *são subconjuntos analíticos do aberto* $U \subset \mathbb{C}^n$*, então* $X \cup Y$ *e* $X \cap Y$ *são subconjuntos analíticos de* U.

Demonstração: Fixado $a \in U$, temos por definição, a existência de um domínio V e funções $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$ analíticas em V tais que $a \in V \subset U$ e

$$X \cap V = \{z \in V : f_1(z) = \cdots = f_r(z) = 0\}$$

e

$$Y \cap V = \{z \in V : g_1(z) = \cdots = g_s(z) = 0\}.$$

Portanto,

$$(X \cup Y) \cap V = \{z \in V : f_i(z) g_j(z) = 0 \ (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)\}$$

e

$$(X \cap Y) \cap V = \{z \in V : f_1(z) = \cdots = f_r(z) = g_1(z) = \cdots = g_s(z) = 0\}.$$

■

Proposição 2.1.6. *Sejam* U *um aberto de* $\mathbb{C}^n$ *e* X *um subconjunto analítico de* U*. Então,* X *é um subconjunto fechado de* U.

Demonstração: Seja $\{x_n\} \subset X$ uma sequência que converge para $x \in U$. Pela definição de subconjunto analítico, existem uma vizinhança W de x e funções analíticas $f_1, \dots, f_r$ tais que

$X \cap W = \{x \in W : \ f_1(x) = \cdots = \ f_r(x) = 0\}$. Logo, para cada j, $f_j(x_n) = 0$ para n suficientemente grande. Por continuidade, $f_j(x) = 0, \forall j$. ■

Definição 2.1.7. *Seja $a \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que dois subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ fazem parte do mesmo* ***germe*** *em a, se existe uma vizinhança U de a, tal que $X \cap U \ = \ Y \cap U$. É fácil verificar que essa é uma relação de equivalência entre conjuntos. As classes de equivalência são chamadas* ***germes de conjunto*** *em a. Denotaremos uma tal classe por (X, a), ou simplesmente diremos que X é um germe analítico em a.*

Definição 2.1.8. *Também definimos as relações de inclusão, união e interseção. Por exemplo, se (X, x) e (Y, x) são germes de um conjunto em $x \in \mathbb{C}^n$, dizemos que $(X, x) \subset (Y, x)$, se eles poderem ser representados, respectivamente, por conjuntos X e Y, tais que $X \subset Y$. A união $(X, x) \cup (Y, x)$ é a classe de equivalência do conjunto $X \cup Y$, onde X e Y são, respectivamente, representantes dos germes (X, x) e (Y, x). A interseção segue analogamente.*

Definição 2.1.9. *Seja $\boldsymbol{f}$ um germe de uma função analítica em $0 \in \mathbb{C}^n$. Definimos $V(\boldsymbol{f})$, como sendo a classe de equivalência do conjunto $\{x \in U : \ f(x) = 0\}$, onde f é um representante do germe $\boldsymbol{f}$ no aberto U. Seja $\boldsymbol{f} \in \mathscr{O}_{n,0}$ e $(X, 0)$ o germe de um conjunto. Dizemos que* ***$\boldsymbol{f}$ se anula sobre*** *$(X, 0)$, se $(X, 0) \subset V(\boldsymbol{f})$.*

Definição 2.1.10. *Seja X um germe de um conjunto em $0 \in \mathbb{C}^n$. O conjunto*

$$I(X) \ = \ \{\boldsymbol{f} \in \mathscr{O}_{n,0} : \ \boldsymbol{f} \text{ anula-se sobre } X\}$$

é um ideal de $\mathscr{O}_{n,0}$ e chama-se ***ideal do germe*** *X.*

Seja agora, I um ideal de $\mathscr{O}_{n,0}$. Seja $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ um sistema finito de geradores de I (lembre-se que $\mathscr{O}_{n,0}$ é Noetheriano). Seja U uma vizinhança de 0, tal que $\boldsymbol{f}_j$ possua um representante analítico f_j em U ($1 \leq j \leq r$). Seja X o subconjunto de U definido pelas equações $f_1 \ = \ \cdots = f_r \ = \ 0$. Definimos então, o ***germe dos zeros de*** *I, denotado por $V(I)$, como sendo a classe do conjunto S.*

Exemplo 2.1.11. *Seja X o germe em 0 do eixo z_n. Então $I(X)$ é o ideal gerado por $z_1, \ldots, z_{n-1}$ em $\mathscr{O}_{n,0}$.*

Exemplo 2.1.12. *Se M é o maximal de $\mathscr{O}_{n,0}$. Então, $V(M) = V(M^n)$ ($n = 1,2,3,...$).*

Proposição 2.1.13. *Sejam X e Y germes de conjuntos em $0 \in \mathbb{C}^n$. Então:*

a) $X \subset Y \Rightarrow I(Y) \subset I(X)$;

b) $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.

Se I, J são ideais de $\mathscr{O}_{n,0}$:

c) $I \subset J \Rightarrow V(J) \subset V(I)$;

d) $V(I + J) = V(J) \cap V(I)$;

e) $V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$.

Exemplo 2.1.14. *Note que em geral,*

$$I(X \cap Y) \neq I(X) + I(Y).$$

Seja X o germe do eixo z_1 em $0 \in \mathbb{C}^2$ e Y o germe da parábola $z_2 = z_1^2$ em $0 \in \mathbb{C}^2$. Dessa forma $I(X) = (\overline{z_2})$, $I(Y) = (\overline{z_2} - \overline{z_1^2})$ e $I(X \cap Y) = (\overline{z_1}, \overline{z_2})$. No entanto,

$$\overline{z_1} \notin I(X) + I(Y).$$

Definição 2.1.15. *Dizemos que um germe de um conjunto X em $0 \in \mathbb{C}^n$ é um **germe analítico**, se existe um ideal $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$, tal que $X = V(I)$.*

*Dizemos que um ideal $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ é um **ideal analítico**, se existe um germe X de um conjunto em $0 \in \mathbb{C}^n$, tal que $I = I(X)$.*

Observação 2.1.16. *Se $X \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto analítico em 0, seu germe $(X, 0)$ é analítico, já que numa vizinhança de 0, o conjunto X é definido por um sistema de funções analíticas:*

$$g_1 = \cdots = g_r = 0.$$

Reciprocamente, todo germe analítico é o germe de um conjunto analítico em 0.

Proposição 2.1.17. *Seja X um germe de um conjunto em $0 \in \mathbb{C}^n$ e $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ um ideal. Então:*

a) $X \subset V(I(X))$ e $X = V(I(X)) \Leftrightarrow X$ é analítico.

b) $I \subset I(V(I))$.

Demonstração: Ver em [23, p.70].

Observação 2.1.18. *Seja $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ o ideal gerado por*

$$\overline{z_1^2}, \ldots, \overline{z_n^2}.$$

Logo, $V(I)$ é o germe de $\{0\}$ e $I(V(I))$ é o ideal de $\mathscr{O}_{n,0}$ gerado por:

$$\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}.$$

Note que se I é analítico, existe um germe de conjunto em $0 \in \mathbb{C}^n$. Pela própria definição de $I(X)$, é óbvio que se $\boldsymbol{f} \in \mathscr{O}_{n,0}$ e $\boldsymbol{f}^n \in I(X)$, então $\boldsymbol{f} \in I(X)$. Portanto, $I = I(X)$ é um ideal radical. A recíproca é verdadeira e segue do seguinte teorema de Hilbert.

Teorema 2.1.19. *(Teorema dos Zeros de Hilbert) Seja $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ um ideal. Então,*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Demonstração: Ver [23, p.71] ou [12]. ■

Corolário 2.1.20. *Seja $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ um ideal. Então, I é um ideal analítico se, e somente se, I é um ideal radical.*

Demonstração: Se I é radical, então

$$I = \sqrt{I} = I(V(I))$$

e portanto I é analítico. A recíproca já foi discutida. ■

Corolário 2.1.21. *Seja $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ um ideal. Então, $I = I(V(I))$ se, e somente se I é um ideal analítico.*

Definição 2.1.22. *Seja X um germe de conjunto analítico em $0 \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que X é* ***irredutível*** *se $X = Y \cup Z$ (Y e Z germes analíticos) implicar que $X = Y$ ou $X = Z$. Caso contrário, X é dito* ***redutível****.*

Proposição 2.1.23. *Seja X um germe analítico em $0 \in \mathbb{C}^n$. Então, X é irredutível se, e somente se $I(X)$ é um ideal primo.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Suponhamos que $X = Y \cup Z$, $X \neq Y$, $X \neq Z$, Y e Z analíticos. Então, pela proposição, $I(X) \neq I(Y)$, $I(X) \neq I(Z)$ e

$$I(X) \;=\; I(Y) \cap I(Z) \subset I(Y) \cdot I(Z).$$

E então, $I(X)$ é primo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que existam ideais I_1, I_2 tais que

$$I(X) \subset I_1 \cap I_2,\; I(X) \subset I_1 \cdot I_2,\; I(X) \neq I_1,\; I(X) \neq I_2.$$

Sejam $Y = V(I_1)$, $Z = V(I_2)$. Então,

$$X = V(I(X)) \supset V(I_1 \cap I_2) \;=\; V(I_1) \cup V(I_2) \;=\; Y \cup Z$$

e

$$X = V(I(X)) \subset V(I_1 \cdot I_2) \;=\; V(I_1) \cup V(I_2) \;=\; Y \cup Z$$

devido a (2.1.13, e)). Assim, $X = Y \cup Z$. Veja que $X \neq Y$, pois do contrário, $I(X) \;=\; I(Y) \supset I_1$. Como $I(X) \subset I_1$, segue que $I(X) \;=\; I_1$ (contradição). Analogamente $X \neq Z$. Logo, X é redutível. ■

Corolário 2.1.24. *Seja $I \subset \mathscr{O}_{n,0}$ um ideal próprio. Então, $V(I)$ é irredutível se, e somente se $\sqrt{I}$ é um ideal primo.*

Demonstração: Segue facilmente do Teorema de zeros de Hilbert. ■

Teorema 2.1.25. *Seja X um germe analítico em $0 \in \mathbb{C}^n$. Então, X escreve-se, de maneira única, a menos da ordem dos X_j, como:*

$$X \;=\; X_1 \cup \cdots \cup X_r,$$

onde cada X_j é irredutível, não-vazio e $X_i \not\subset X_j$ para $i \neq j$. Chamamos os X_j de ***componentes irredutíveis*** *de X.*

Exercício 2.1.26. *Seja X um germe analítico em $0 \in \mathbb{C}^2$. Se*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$$

é uma decomposição de X em fatores irredutíveis, então $X_i \cap Y_j = \{0\}$ para $i \neq j$.

Exemplo 2.1.27. *O germe X em 0 do conjunto definido em $\mathbb{C}^2$ pela equação $z_1, z_2 = 0$ é redutível. Já que, $X = Y \cup Z$, onde Y é o germe do eixo z_1 e Z o germe do eixo z_2.*

2.2 Feixes

Definição 2.2.1. *Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe $\mathscr{F}$ de anéis** em X, consiste de que:*

- *para todo aberto $U \subseteq X$, temos um anel $\mathscr{F}(U)$;*
- *para toda inclusão $V \subseteq U$ de abertos de X, temos um homomorfismo de anéis ρ_{UV} : $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$,*

satisfazendo as condições:

1. $\mathscr{F}(\varnothing) = 0$;
2. *ρ_{UU} é a aplicação identidade de $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$;*
3. *se $W \subseteq V \subseteq U$ são três abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.*

Se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe em X, nos referimos a $\mathscr{F}(U)$, como as *seções* do pré-feixe $\mathscr{F}$ sobre o aberto U e algumas vezes usaremos a notação $\Gamma(U, \mathscr{F})$ para denotar o anel $\mathscr{F}(U)$. Chamaremos as aplicações ρ_{UV} de *restrições* e algumas vezes escreveremos $s|_V$ no lugar de $\rho_{UV}(s)$, para $s \in \mathscr{F}(U)$.

Definição 2.2.2. *Um pré-feixe $\mathscr{F}$ num espaço topológico X é um **feixe**, se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de um aberto $U \subset X$ e $s \in \mathscr{F}(U)$ é um elemento tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i, então $s = 0$;*

2. *Se $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de um aberto $U \subset X$ e $\{s_i\}$ é uma coleção de elementos $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$, tais que, se para cada i, j, vale a igualdade $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe um único elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i. (a unicidade vem da condição 1.).*

Exemplo 2.2.3. *Seja X uma variedade sobre um corpo de base K. Definimos o feixe $\mathscr{O}_X$ de X, chamado **feixe das funções regulares sobre** X, como segue: Para cada aberto $U \subseteq X$, considere a seção $\mathscr{O}_X(U)$, como sendo o anel das funções regulares de U a valores em K. E para cada $V \subseteq U$, tomemos $\rho_{UV} : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$, como sendo a aplicação restrição. É fácil verificar que $\mathscr{O}_X$ é um feixe de X.*

Definição 2.2.4. *Se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe em X e p é um ponto de X, definimos o **talo** $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ em p, como sendo o limite direto dos anéis $\mathscr{F}(U)$ para todos os abertos U contendo p, por meio das restrições ρ.*

Dessa forma, um elemento de $\mathscr{F}_p$ é representado pelo par (U,s), onde U é uma vizinhança de p e s é um elemento de $\mathscr{F}(U)$. Portanto, dois pares (U,s) e (V,t), definem o mesmo elemento de $\mathscr{F}_p$ se, e somente se existe uma vizinhança aberta W de p, com $W \subseteq U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Deste modo, podemos falar dos elementos de $\mathscr{F}_p$, como germes de seções de $\mathscr{F}$ no ponto p. No caso de uma variedade X e o seu feixe de funções regulares $\mathscr{O}_X$, o talo $\mathscr{O}_{X,p}$ no ponto p, é exatamente o anel local de p em X.

Definição 2.2.5. *Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são pré-feixes em X. Um **morfismo de pré-feixes** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ consiste no homomorfismos de anéis $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ para cada aberto U, tais que para qualquer inclusão $V \subseteq U$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathscr{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathscr{G}(V) \end{array}$$

*comuta, onde ρ e ρ' são as restrições de $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$. Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são feixes em X, usamos a mesma definição para um **morfismo de feixes**. Um **isomorfismo**, é um morfismo tal que $\varphi(U)$ é um isomorfismo de anéis, para cada aberto $U \subset X$.*

Proposição 2.2.6. *Seja $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes em um espaço topológico X. Então*

φ é um isomorfismo se, e somente se, a aplicação induzida

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p : & \mathscr{F}_p & \to & \mathscr{G}_p \\ & (U,\, s) & \mapsto & (U,\, \varphi(U)(s)) \end{array}$$

também for um isomorfismo.

Observação 2.2.7. *Isto nem sempre é válido para morfismos de pré-feixes.*

Definição 2.2.8. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Para qualquer feixe $\mathscr{F}$ em X, definimos o* ***feixe de imagem direta*** *$f_*\mathscr{F}$ em Y por*

$$(f_*\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

para qualquer aberto $V \subseteq Y$.

2.3 Esquemas afins e arbitrários

Sabemos que dado um anel A, temos o espaço topológico Spec$A$. Agora definiremos o **espectro** de A. Antes, definiremos o feixe de anéis $\mathscr{O}$ em Spec$A$. Para um aberto $U \subseteq$ Spec$A$, definimos $\mathscr{O}(U)$ como o conjunto de funções $s : U \to \bigcup_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$ tal que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, para cada $\mathfrak{p}$, e tal que s é localmente o quociente de elementos de A, isto é, para cada $p \in U$, existem uma vizinhança $V \subset U$ de p, e elementos $a, f \in A$, tais que, para cada $q \in V$, temos $f \notin q$ e $s(q) = a/f$ em A_q.

Definição 2.3.1. *O* ***espectro*** *de A, é o par* $(\mathrm{Spec}A, \mathscr{O})$,

Definição 2.3.2. *O* ***espaço anelado*** *é um par $(X, \mathscr{O}_X)$, consistindo do espaço topológico X e do feixe de anéis $\mathscr{O}_X$ em X. Um* ***morfismo de espaços anelados*** *$(X, \mathscr{O}_X)$ em $(Y, \mathscr{O}_Y)$, é o par $(f, f^\sharp)$, de uma aplicação contínua $f : X \to Y$ e uma aplicação $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ de feixes de anéis em Y. O espaço anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ é um* ***espaço anelado localmente****, se para cada ponto $p \in X$, o* talo *$\mathscr{O}_{X,p}$ é um anel local. Um* ***morfismo de espaços anelados localmente****, é um morfismo de espaços anelados $(f, f^\sharp)$ tais que, para cada ponto $p \in X$, a aplicação induzida (ver [13, p.72]) de anéis locais $f_p^\sharp : \mathscr{O}_{Y,f(p)} \to \mathscr{O}_{X,p}$ é um homomorfismo local de anéis locais. Um mosfismo de*

espaços anelados localmente é dito um ***isomorfismo****, quando f é um homeomorfismo e $f^\sharp$ é um isomorfismo de feixes.*

Agora podemos definir esquemas.

Definição 2.3.3. *Um* ***esquema afim*** *é um espaço anelado $(X, \mathscr{O}_X)$ isomorfo (como espaço anelado localmente) ao spectrum de algum anel. Um* ***esquema*** *é um espaço anelado localmente $(X, \mathscr{O}_X)$, no qual, todo ponto tem uma vizinhança U, tal que o espaço topológico U, juntamente com o feixe restrito $(\mathscr{O}_X)_{|U}$, é um esquema afim. Um* ***morfismo de esquemas*** *é um morfismo de espaços anelados localmente.*

Notação 2.3.4. *Frequentemente, o esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ é denotado apenas por X.*

Dados morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y' \to Y$, definimos o esquema produto $X \times_Y Y'$, como sendo o conjunto

$$X \times_Y Y' = \{(x, w) \in X \times Y' : f(x) = g(w)\}.$$

Definição 2.3.5. *Um morfismo $f : X \to Y$ de esquemas é* ***próprio****, se é separado, de tipo finito e universalmente fechado. Este último, é um morfismo fechado, tal que, para todo morfismo $Y' \to Y$, o morfismo induzido $X \times_Y Y' \to Y'$ seja uma aplicação fechada.*

Capítulo

3

Explosões sobre Ideais

No capítulo 5, estamos sempre em contato com o conceito de "explodir conjuntos". A definição dos números de Segre encontra-se em termos da explosão de conjuntos analíticos. É necessário então, ter conhecimento de algumas propriedades dessas explosões. Uma delas, será muito utilizada: o fato que ao explodir um conjunto analítico sobre um ideal, sua dimensão permanecerá a mesma. Para leituras complementares, recomendamos [13], [8] e [25].

3.1 Explosão sobre um ponto

A idéia de "explodir" $\mathbb{C}^n$ em um ponto p, é deixar $\mathbb{C}^n$ inalterado, exceto no ponto p, o qual é substituído pelo conjunto de todas as retas passando por p, uma cópia de $\mathbb{P}^{n-1}$. Primeiramente adotemos, através de uma mudança de coordenadas, que p seja a origem. Agora, seja B o conjunto dos pares (x,ℓ), onde $x \in \mathbb{C}^n$ e $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}$ é a reta passando pela origem contendo x. Ou seja,

$$B = \{(x,\ell) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in \ell\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Definição 3.1.1. *Definimos a* ***explosão*** *de $\mathbb{C}^n$ em p, como sendo a projeção natural de B sobre o fator afim:*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^n, \\ (x,\ell) & \mapsto & x \end{array}$$

Observação 3.1.2. *É importante verificar que a explosão $B \to \mathbb{C}^n$, possui as propriedades desejadas. Note que a fibra de π sobre um ponto x que não seja a origem, é apenas o ponto (x,ℓ), onde ℓ é a única reta passando por x e a origem. No entanto, a fibra sobre a origem p, é uma*

cópia de $\mathbb{P}^{n-1}$*, a saber* $\{(p,\mathbb{P}^{n-1})\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$*, já que a origem, encontra-se sobre todas as retas passando por* p*.*

Definição 3.1.3. *Seja* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico e* p *um ponto de* X*. A* ***explosão*** *de* X *em* p*, é o fecho da imagem inversa*

$$\pi^{-1}(X \setminus \{p\})$$

em B. Denotamos a explosão de X *em* p*, por* $\mathrm{Bl}_p X$*.*

Observação 3.1.4. *É fácil mostrar que* $\mathrm{Bl}_p\mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$ *é um isomorfismo, quando nos restringimos a* $\mathrm{Bl}_p\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(p)$*, e que a restrição de* π *a* $\mathrm{Bl}_p X \setminus \pi^{-1}(p)$ *é um isomorfismo sobre* $X \setminus p$*.*

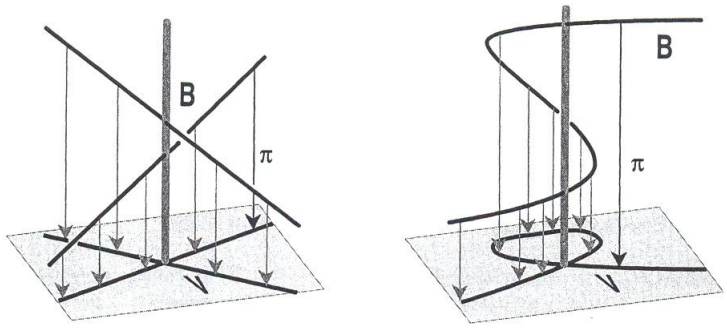

Figura 3.1: Explosões

3.2 Explosão sobre um ideal

Definição 3.2.1. *Sejam* $f_1, ..., f_r$ *funções em* $\mathscr{O}_{X,0}$ *de um conjunto analítico* X*, e* I *o ideal gerado por eles. Suponhamos que* I *seja um ideal próprio não-nulo de* $\mathscr{O}_{X,0}$*. A* ***explosão*** *de* X ***ao longo do ideal*** I*, é o gráfico B, da aplicação*

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} \mathbb{P}^{r-1}, \\ x &\mapsto f(x) := [f_1(x) : ... : f_r(x)] \end{aligned}$$

junto com a projeção natural $B \subset X \times \mathbb{P}^{r-1} \to X$*. Denotamos a explosão de* X*, ao longo de* I*, por* $\mathrm{Bl}_I X$*.*

A projeção

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Bl}_I X & \to & X, \\ (x, f(x)) & \mapsto & x \end{array}$$

define um isomorfismo entre os conjuntos

$$\mathrm{Bl}_I X \setminus \pi^{-1}(Y) \to X \setminus Y,$$

onde Y é um conjunto fechado em X, definido pelos zeros de $f_1, ..., f_r$ e a imagem inversa $\pi^{-1}(Y)$, o **divisor excepcional** da explosão $\mathrm{Bl}_I X$. De fato, o isomorfismo inverso pode ser definido como

$$\begin{array}{rcl} X \setminus Y & \to & \mathrm{Bl}_I X \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}, \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

ao qual, está bem definido em $X \setminus Y$, pelo fato das funções $f_1, ..., f_r$ não se anularem simultaneamente sobre $X \setminus Y$. Como consequência, X e $\mathrm{Bl}_I X$ possuem a mesma dimensão.

Observação 3.2.2. *Note que a definição (3.2.1), é uma generalização de (3.1.1) e (3.1.3).*

Exemplo 3.2.3. *Explodiremos o cone $V(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{C}^3$ sobre a origem (ou, ao longo, do ideal maximal definido pela origem). Intuitivamente, essa explosão seria um cilindro. Agora, de forma explícita, tomemos a aplicação explosão*

$$\begin{array}{rcl} B = \{(x, \ell) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 : x \in \ell\} & \to & \mathbb{C}^3, \\ (x, \ell) & \mapsto & x \end{array}$$

Como o espaço projetivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2_x \cup \mathbb{C}^2_y \cup \mathbb{C}^2_z$ pode ser coberto por abertos afins, obtemos

$$B \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2_x) \cup (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2_y) \cup (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2_z) \to \mathbb{C}^3.$$

E dessa forma, podemos encontrar facilmente a interseção da imagem inversa do cone, com

cada aberto afim da cobertura de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2$. *Por exemplo,*

$$\begin{aligned} V &= \pi^{-1}(V(x^2+y^2-z^2)) \cap (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2_z) \\ &= \{((x,y,z),(x:y:z)) : x^2+y^2=z^2\} \\ &\cong \{(x,y,z,u,v) : x=uz, y=vz, u^2+v^2=1\} \subset \mathbb{C}^5. \end{aligned}$$

Agora, projetando $\mathbb{C}^5$ *sobre o espaço* $\mathbb{C}^3$, *com coordenadas z, u e v, o conjunto imagem*

$$\{(z,u,v) : u^2+v^2=1\},$$

é uma variedade isomorfa a V. *Isto é um cilindro em* $\mathbb{C}^3$ *(ver (3.2)). Temos explodido o vértice de um cone* $V(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{C}^3$, *produzindo uma variedade* $B \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2$, *a qual contém um aberto denso, isomorfo a um cilindro. Sobre estas identificações, a imagem inversa do ponto* $(0,0,0) \in V(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{C}^3$, *é o círculo* $\{z=0,\ u^2+v^2=1\}$ *sobre o cilindro.*

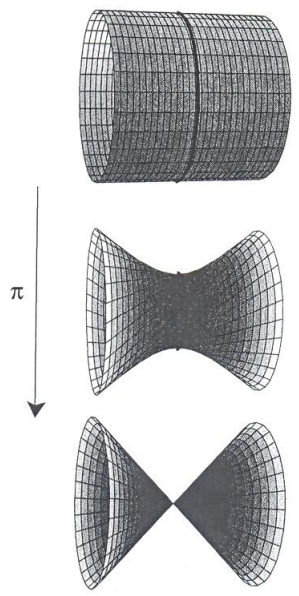

Figura 3.2: Explosão do cone

Capítulo

4

Ciclos e Classe de Chern de um Fibrado em Retas

Objetivando o bom entendimento do próximo capítulo, relembramos algumas noções elementares da Teoria de Interseção. Se a Geometria Algébrica baseia-se no estudo de um sistema de equações polinomiais, a Teoria da Interseção se encarrega do número de soluções desse sistema. Vemos neste capítulo por exemplo, outra demonstração do Teorema de Bézout [29], o qual afirma que duas curvas planas projetivas (de graus m,n) sem componentes em comum, se intersectam em mn pontos (contados com multiplicidade). No capítulo 5, em (5.3.1), expressa-se os números Segre, como números de interseção. Daí a importância dos elementos da teoria de interseção. Sugerimos como referências básicas [29] e [9].

4.1 Ciclos de Esquemas

Definição 4.1.1. *Seja X um esquema. O grupo dos ciclos de dimensão k, ou k-ciclos em X, é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades (irredutíveis e fechadas) de dimensão k de X. Denotado por C_kX. Ou seja, um k-ciclo $z \in C_kX$ é escrito unicamente como uma combinação linear, a coeficientes inteiros $z = \sum_V n_V\ [V]$ (soma formal), onde V percorre a coleção de todas as subvariedades de X com dimensão k e $n_V = 0$, exceto para um número finito de V's. Generalizamos esse conceito, para o obter o grupo dos ciclos de X:*

$$C_*X := \bigoplus_k C_kX,$$

onde $k \in \{0, 1, ..., \dim X\}$

Definição 4.1.2. *Definimos o* ***suporte de um ciclo*** $z \in C_k X$, *por*

$$| z | = \bigcup_{n_V \neq 0} V.$$

Exemplo 4.1.3. 1. *Se X é uma variedade de dimensão n, temos que $C_n X = \mathbb{Z}\, X$.*

2. *Note que se X for a reta afim $\mathbb{A}^1$, sobre o corpo K, as subvariedades de X são os pontos $a \in K$, que correspondem a ideais maximais da forma $(t-a) \subset K[t]$. Dessa forma, obtemos que $C_0\mathbb{A}^1$ é naturalmente isomorfo a $K[t]^*/K^*$ ($K^* = grupo\ multiplicativo$). Com efeito, dado $f \in K[t]^*$, polinômio da forma $f = ap_1^{i_1} \cdots p_s^{i_s}$, onde p_j é mônico irredutível e $a \in K^*$, fazemos corresponder o ciclo $\sum_j i_j Z(p_j)$, onde $Z(p_j) =$ zeros do polinômio p_j. É fácil verificar que o núcleo desse homomorfismo é K^*.*

Definição 4.1.4. *Seja V uma variedade e $W \subset V$ uma subvariedade. Definimos o* ***anel local de*** *V,* ***ao longo de*** *W*

$$\mathscr{O}_{W,V} \;=\; \{(f,\, U) :\, U \subset\, V\ aberto,\, U \cap W \neq \emptyset,\ f \in \mathscr{O}(U)\}/\sim,$$

onde

$$(f,\, U) \sim (f',\, U') \Leftrightarrow$$

existe $Z \subset X$ aberto, com $Z \subset U \cap U'$,tal que $f_{|Z} \;=\; f'_{|Z}$.

Definição 4.1.5. *Seja $X = X_1 \cup ... \cup X_m$ a decomposição de X em componentes irredutíveis (reduzidas) do esquema X. Definimos o ciclo fundamental de X, como sendo:*

$$[X] = \sum m_i [X_i],$$

onde $m_i = \ell(\mathscr{O}_{X_i,X})$ ($comprimento\ do\ anel\ local\ de\ X,\ ao\ longo\ de\ X_i$).

Observação 4.1.6. *Lembre que $\mathscr{O}_{X_i,X}$ é Artiniano. Então, $m_i > 0$, $m_i \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 4.1.7. 1. *Sejam $F,\ G$ curvas planas projetivas, sem componentes em comum. Seja $Z = F \bigcap G$. Para cada ponto P em Z, o anel local $\mathscr{O}_{Z,P}$ tem comprimento finito, denotado*

por $i(P,F\cap G)$ (chamado índice de interseção de F,G em P). Temos então, que $i(P,F\cap G)=\dim_k \mathscr{O}_{Z,P}$. O teorema de Bezóut, que iremos demonstrar mais adiante, utilizando os conceitos de ciclos, afirma que $\sum_P i(P,F\cap G)=d^oF\cdot d^oG$, onde $d^oF=$ grau da curva F.

2. *Seja t uma constante e Z_t o subesquema de $\mathbb{A}^4$, definido pelo ideal $I_t=(x,y)\bigcap(z,w)+(x-z-t,y-w)$. Note que I_t é a interseção do plano $x=z+t$, $y=w$ com a união de mais dois planos passando pela origem. Ou seja, $[Z_t]=(0,0,-t,0)+(t,0,0,0)$, para $t\neq 0$ e $[Z_0]=3(0,0,0,0)$.*

Definição 4.1.8. *Seja V uma variedade e $r\in K(V)$ uma função racional não-nula. Definimos a* ***ordem de*** *r, ao longo de uma variedade $W\subset V$ de codimensão 1, como sendo:*

$$ord_W(r):=ord_W^V(r):=\ell(\mathscr{O}_{W,V}/(a))-\ell(\mathscr{O}_{W,V}/(b)), \tag{4.1}$$

onde $r=a/b$, com $a,b\in\mathscr{O}_{W,V}$.

A boa definição de ord_W^V, se deve ao seguinte:

Lema 4.1.9. *Seja A um anel de dimensão de Krull 1. Para cada $a,b\in A$ não-divisores de zero, temos que:*

$$\ell(A/(ab))=\ell(A/(a))+\ell(A/(b)).$$

Demonstração: Basta considerar a seguinte sequência exata natural:

$$A/(b)\xrightarrow{\sim}(a)/(ab)\hookrightarrow A/(ab)\to A/(a)$$

■

Pelo fato de $\dim\mathscr{O}_{W,V}=\dim V-\dim W=1$ (ver [13, p.22]), obtemos

$$ord_W(r_1r_2)=ord_W(r_1)+ord_W(r_2)\ ,\ r_1,r_2\in K(V). \tag{4.2}$$

Definição 4.1.10. *O* ***ciclo associado à função racional*** *$r\in K(V)$ é definido por*

$$[r]:=[r]_W:=\sum_W ord_W(r)W\in C_{\dim V-1}V,$$

onde W percorre a coleção das subvariedades de codimensão 1 de V.

Observação 4.1.11. *É importante verificar que $ord_W(r)$ é igual a zero, exceto para um número finito de W's: Seja $U \subset V$ aberto afim, com $r = a/b$, a, b regulares em U. Segue daí, que o conjunto $\{W : W \bigcap U \neq \emptyset$ e $ord_W(r) \neq 0\} \subseteq \{W : W \bigcap U$ é componente do esquema de zeros de $a \cdot b\}$. Como o número de componentes é finito, e V admite uma cobertura afim finita, concluímos que $[r]$ está bem definido.*

Definição 4.1.12. *Seja X um esquema. O grupo dos k-ciclos racionalmente equivalentes a zero, é o subgrupo R_kX de C_kX, gerado pelos ciclos associados a funções racionais de subvariedades de X, com dimensão $k+1$. Assim, podemos definir*

$$A_*X = \bigoplus A_kX = \bigoplus C_kX/R_kX = C_*X/R_*X,$$

chamado ***grupo de Chow de*** *X.*

Dois ciclos são ditos ***racionalmente equivalentes****, quando representam a mesma classe, módulo R_*X.*

Definição 4.1.13. *Seja $f : V \to W$ um morfismo dominante de variedades (irredutíveis). Dessa forma, o homomorfismo induzido $f^* : K(W) \to K(V)$ é injetivo (ver [24, p.38]), e assim, definimos o grau de f como o inteiro*

$$d^o f = \begin{cases} 0 & , se \quad \dim W < \dim V \\ [K(V) : K(W)] & , se \quad \dim W = \dim V \end{cases}$$

Se $\dim V = \dim W$, $K(V)$ e $K(W)$ são extensões finitamente geradas, com o mesmo grau de transcendência sobre o corpo de base, e portanto, $d^o f$ é finito.

Seja então, $p : X \to Y$ um morfismo próprio de esquemas. Em particular, se V é uma subvariedade (fechada) de X, então $p(V)$ é fechada em Y.

Definição 4.1.14. *Seja $V \subseteq X$ uma subvariedade (fechada, irredutível) e $f : V \to p(V)$ o induzido por p. Definimos $p_*[V] := d^o f \cdot [p(V)]$ em C_*Y. Por linearidade, estendemos ao homomorfismo* ***imagem direta*** *$p_* : C_*X \to C_*Y$.*

Observação 4.1.15. *$p_*(C_kX) \subseteq C_kY$, $\forall k$.*

Definição 4.1.16. *Dizemos que um esquema X é* ***completo sobre um corpo*** *K, se o morfismo estrutural sobre* $\mathrm{Spec}(K)$*, for próprio.*

Exemplo 4.1.17. *Se $Y = \mathrm{Spec}(K)$ (K corpo), então $C_*Y = C_0Y \cong \mathbb{Z}$. Se X é um esquema completo sobre K; para cada ponto (fechado) Q em X, temos $p_*([Q]) = [K(Q) : K(p(Q))] = [K(Q) : K]$. Pela observação passada, segue que $p_*(C_kX) = 0$, para $k > 0$.*

Teorema 4.1.18. *Seja $p : X \to Y$ um morfismo próprio. Então, o homomorfismo imagem direta $p_* : C_*X \to C_*Y$, é tal que $p_*(R_*X) \subseteq R_*Y$.*

Definição 4.1.19. *Seja $p : X \to Y$ um morfismo próprio. O homomorfismo imagem direta, induz um homomorfismo de grupos quocientes, denotado pelo mesmo símbolo $p_* : A_*X \to A_*Y$.*

Observação 4.1.20. *O último homomorfismo só está bem definido devido ao teorema anterior.*

Definição 4.1.21. *Seja $Y = \mathrm{Spec}(K)$; identificamos $A_*Y = \mathbb{Z}$. Neste caso, o homomorfismo $p_* : A_*X \to \mathbb{Z}$, é também denotado por $\int_X$ ou $\int$. Explicitamente, para cada ciclo z em A_*X, temos*

$$\int z := p_*(z) = \sum m_i[K(P_i) : K],$$

onde $\sum m_i[P_i]$ é a componente homogênea de dimensão zero em z, isto é, os pontos P_i (fechados) de X (ver exemplo (4.1.17)). O inteiro $\int z$ é chamado o ***grau do ciclo*** *z. Em outras palavras, o grau de um ciclo é soma das multiplicidades das componentes de dimensão nula.*

Observação 4.1.22. *Segue da observação (4.1.15), que se $p : X \to Y$ é um morfismo de esquemas próprios sobre K, então*

$$\int_X z = \int_Y p_*z \ ,$$

para cada $z \in A_*X$.

Proposição 4.1.23. *(Teorema de Béuzout para Curvas projetivas) Sejam F, G curvas planas projetivas, sem componentes em comum, com graus m e n respectivamente. Então,*

$$\sum_P i(P, F \cap G) = d^oF \cdot d^oG.$$

Demonstração: Seja L uma forma linear que não divide G. Podemos reduzir o teorema ao caso em que G é irredutível. Tomemos $r = F/L^m \in K(G)$. Pelo o fato de termos $[r] = 0$ em A_*G,

$$\int_G [r] = 0. \tag{4.3}$$

Agora, calculemos explicitamente o ciclo $[r] = \sum_P^G ord(r)P$, tomando uma forma linear H não-nula em P, e escrevendo $r = (F/H^m)/(L/H)^m$. Por aditividade, obtemos

$$ord_P^G(r) = ord_P^G(F/H^m) - m \cdot ord_P^G(L/H).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} ord_P^G(F/H^m) &= \ell(\mathscr{O}_{G,P}/F) - \ell(\mathscr{O}_{G,P}/H^m) \\ &= i(P, F \cap G) - i(P, F \cap H^m) \\ &= i(P, F \cap G). \end{aligned}$$

Assim,

$$0 = \int_G [r] = \sum_P (i(P, F \cap G) - m\, i(P, L \cap G)). \tag{4.4}$$

Utilizando o mesmo argumento, segue que

$$\sum_P i(P, L \cap G) = n \sum_P i(P, L \cap L_2) = n, \tag{4.5}$$

onde $n = d^o G$ e L_2 é uma forma linear prima com L. Substituindo (4.5) em (4.4), segue a fórmula desejada. ■

4.2 Imagem Inversa

Dado um morfismo $f : X \to Y$ de esquemas, existe um homomorfismo induzido $C_*Y \longrightarrow C_*X$, chamado imagem inversa.

Definição 4.2.1. *Seja $V \subset Y$ uma subvariedade. Definimos o* ***ciclo imagem de*** *V por f, pela fórmula*

$$f^*V := f^*([V]) := [f^{-1}(V)] \in C_*X.$$

Por linearidade, estendemos ao homomorfismo ***imagem inversa***

$$f^* : C_*Y \longrightarrow C_*X.$$

Exemplo 4.2.2. *Sejam X e Y variedades sobre um corpo algebricamente fechado, onde* $\dim X = n$*. Assim, $X \times Y$ é uma variedade. Tomemos a projeção $p : X \times Y \longrightarrow Y$. Para cada subvariedade $V \subset Y$, $p^*V = X \times V$. Se $r \in K(Y)^*$ e p^*r denota a sua imagem em $K(X \times Y)$, é fácil verificar que o ciclos $p^*[r]$ e $[p^*r]$ são iguais. Segue daí que p^* induz um homomorfismo $A_kY \longrightarrow A_{k+n}(X \times Y)$.*

4.3 Divisor de Cartier e seu ciclo associado de Weil

Definição 4.3.1. *Seja X um esquema. Um* ***divisor de Cartier*** *D em X é uma cobertura aberta afim $\{U_i\}$ de X, junto com funções racionais correspondentes $\{f_i\}$, tais que:*

1. $f_i \not\equiv 0, \forall i$;
2. *f_i é invertível em $K[U_i]$;*
3. *f_i/f_j e f_j/f_i são ambas regulares sobre $U_i \cap U_j$.*

Denota-se um divisor de Cartier por $D = (U_i, f_i)$. Cada f_i, é dito uma ***equação local*** *de D em U_i. Seja $D' = (V_j,\ f_j)$ outro divisor de Cartier de X. D e D' definem o mesmo divisor, se f_i/g_j e g_j/f_i são regulares sobre $U_{ij} = U_i \cap V_j$. Definimos também, o divisor de Cartier $-D := (U_i, 1/f_i)$.*

Definição 4.3.2. *Um divisor de Cartier $D = (U_i,\ f_i)$, é dito principal, se $f_i = f_j$ em U_{ij}, $\forall i, j$.*

Definição 4.3.3. *Se $D = (U_i,\ f_i)$ e $D' = (V_j,\ g_j)$ são dois divisores de Cartier sobre X, o* ***divisor soma*** *$D + D'$, é o definido pelo sistema de funções $\{f_i g_j\}$, com respeito à cobertura $X = \bigcup(U_i \cap V_j)$.*

Definição 4.3.4. *O suporte $|\ D\ |$ de D, é definido pelo subconjunto*

$$|\ D\ | = \{x \in X :\ \text{se } x \in U_i \text{ e } f_i = a_i/b_i \text{ com } a_i, b_i \in K[U_i],\ \text{então } a_i(x) = 0 \text{ ou } b_i(x) = 0\}$$

de X.

Definição 4.3.5. *Seja D um divisor de Cartier em X. Dado um morfismo dominante $f : X' \to X$, de variedades X e X', definimos um divisor de Cartier em X', chamado* ***imagem inversa*** *de D, e denotado por f^*D ou $\widetilde{D}$. Sua cobertura por abertos, é dada pelas imagens inversas dos abertos da cobertura de X. Suas equações locais, são obtidas aplicando $f^* : K(X) \to K(X')$ às equações locais de D.*

Exemplo 4.3.6.

1. *Obteremos um divisor de Cartier para $\mathbb{P}^n$: Seja $F(x_0, ..., x_n)$ um polinômio homogêneo de grau m, e U_i o aberto canônico definido pelo complementar do hiperplano $x_i = 0$. Tomemos $f_i := x_i^{-m} F(x_0, ..., x_n)$. Como $\mathbb{P}^n = \bigcup_0^n U_i$, obtemos o divisor de Cartier (U_i, f_i) para $\mathbb{P}^n$.*

2. *Sejam X uma curva e $P_1, ..., P_n$ pontos não-singulares de X. Seja t_i uniformizante local em P_i, e U_i aberto em X, onde t_i é regular, anula-se apenas em P_i, e tal que $P_j \in U_i$, para $i \neq j$. Então, $(U_i, t_i^{m_i})$ define um divisor de Cartier em X, associado ao ciclo $\sum m_i P_i$.*

Definição 4.3.7. *Seja $D = (f_i, U_i)$ um divisor de Cartier em X. O* ***ciclo (de Weil) associado a*** *D, é definido por*

$$[D] := \sum ord_V(D)V,$$

onde a soma percorre todas as subvariedades de codimensão 1, e

$$ord_V(D) := ord_{V_i}(f_i),$$

com $V_i := U_i \cap V$.

Observação 4.3.8. *É importante lembrar que o segundo membro da última equação, só foi definido, quando X (e portanto cada U_i) é uma variedade, embora a fórmula (4.1) também se aplique a esse caso (verifique).*

Exercício 4.3.9. *Verifique que $ord_V(D)$ está bem definida, é aditiva, e que $ord_V(D) \neq 0$, somente para um número finito de $V's$.*

4.4 Fibrados

Intuitivamente, um fibrado vetorial sobre X, é um morfismo de esquemas $L \to X$, onde L é localmente um produto de X com $\mathbb{C}^n$, e a aplicação $L \to X$, é localmente a projeção natural

$X \times \mathbb{C}^n \to X$. Quando $n = 1$, L é chamado de fibrado em reta.

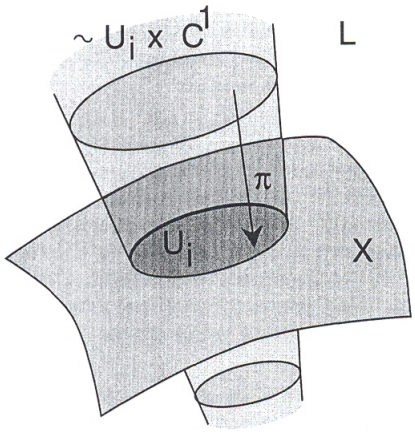

Figura 4.1: Fibrado Vetorial de posto 1

Definição 4.4.1. *Um **fibrado vetorial** L de posto r sobre um esquema X, é um esquema L, equipado com um morfismo $\pi : L \to X$, satisfazendo as seguintes condições: Existem uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de X e isomorfismos φ_i de $\pi^{-1}(U_i)$ sobre $U_i \times \mathbb{A}^r$ (com respeito a U_i) , tais que com respeito a U_{ij}, as composições*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : & U_{ij} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & U_{ij} \times \mathbb{C}^n \\ & (x, v) & \mapsto & (x, (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)), \end{array}$$

sejam lineares, ou seja, dadas por um morfismo $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r, K)$, chamado de função de transição. Estas funções de transição satisfazem: $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$, $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$ e $g_{ii} = 1$. Reciprocamente, quaisquer funções de transição g_{ij}, determinam um fibrado vetorial. Se $V \subset X$ é uma subvariedade; denotamos por $L_{|V}$, o fibrado vetorial induzido $\pi^{-1}(V)$.

Seja $L \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial sobre X, de posto r e $x \in X$. A fibra de π sobre x, é denotada por L_x. Fixando algum U_i contendo x, o isomorfismo φ_i induz um isomorfismo de esquemas de L_x com $\mathbb{C}^n$. Através desse isomorfismo, podemos transferir a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{C}^n$, para o espaço vetorial L_x. Usando a definição de fibrado vetorial, é fácil verificar que o espaço vetorial L_x independe da escolha do aberto U_i e do isomorfismo φ_i. Assim, podemos pensar no fibrado vetorial $L \xrightarrow{\pi} X$, como uma família de espaços vetoriais L_x, parametrizada pelos pontos de X.

Definição 4.4.2. *Um **fibrado em retas**, é um fibrado vetorial L de posto* 1.

Definição 4.4.3. *Seja $D = (f_i, U_i)$ um divisor de Cartier em X. O **fibrado em retas associado a** D, denotado por $L(D)$, é o fibrado definido pelas funções de transição $f_{ij} := f_i f_j^{-1}$ em U_{ij}. Ou seja, $L(D)$ é o esquema sobre X, obtido por colagem, a partir da união disjunta $\bigcup(U_i \times \mathbb{A}^1)$, módulo a relação de equivalência: $(x,v) \in U_i \times \mathbb{A}^1$ e $(y,w) \in U_j \times \mathbb{A}^1$, são equivalentes, se $x = y \in U_{ij}$ e $v = f_{ij}(x)w$, onde $\pi : (\bigcup(U_i \times \mathbb{A}^1))/\sim \longrightarrow X$ é a projeção sobre a segunda coordenada. É claro que esta projeção está bem definida.*

Definição 4.4.4. *O **fibrado em retas tautológico sobre uma variedade projetiva** $X \subseteq \mathbb{P}^n$, é definido como sendo o conjunto*

$$L = \{(\ell, x) : \ell \in X \text{ e } x \in \ell\} \subseteq X \times \mathbb{A}^{n+1},$$

junto com a projeção natural sobre o primeiro fator.

Exercício 4.4.5. *Verifique que a projeção $L \to X$, satisfaz a definição de um fibrado em retas.*

Exemplo 4.4.6. 1. *O fibrado tautológico sobre $\mathbb{P}^n$, é o subconjunto*

$$L = \{(x,v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1} : v \in x\}$$

de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1}$, junto com a aplicação projeção sobre o fator projetivo.

Seja U_i o aberto canônico de $\mathbb{P}^n$ e considere as funções locais

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & L_{|U_i} & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{A}^1 \\ & (x,v) & \longmapsto & (x, v_i), \end{array}$$

onde $(x,v) = ((x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n), (x_0 v_i, \ldots, x_n v_i))$ e $v = v_i(x_0, \ldots, 1, \ldots, x_n)$. Além disso,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i^{-1} : & U_i \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & L_{|U_i} \\ & (x,c) & \longmapsto & (x; \frac{x_0 c}{x_i}, \ldots, \frac{x_n c}{x_i}). \end{array}$$

É fácil verificar que

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: & U_{ij} \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & U_{ij} \times \mathbb{A}^1 \\ & (x,c) & \longmapsto & (x,(x_i/x_j)c). \end{array}$$

Assim, as funções de transição do fibrado L são x_i/x_j em U_{ij}.

2. *As **potências tensoriais** $L^{\otimes m}$ $(m \in \mathbb{Z})$, são dadas por $(U_i,(x_i/x_j)^m)$. Note que, por comparativa ao exemplo (4.4.6), se F é uma hipersuperfície de grau m, o fibrado em retas associado $L(F)$, tem funções de transição $(x_i^{-m}F)/(x_j^{-m}F) = (x_i/x_j)^{-m}$. Denotamos $L^{\otimes -m}$, por $\mathscr{O}(m)$ $(m \in \mathbb{Z})$. E a potência $L^{\otimes -1}$, por L^{-1}. Sabemos que todo fibrado em retas sobre $\mathbb{P}^n$, é isomorfo a $\mathscr{O}(m)$, para algum m. O cálculo em (1), mostra que $L(F) = \mathscr{O}(m)$, onde F denota uma hipersuperfície de grau m em $\mathbb{P}^n$. Verifique que L^{-1} é o dual de L.*

Notação 4.4.7. *Dado um fibrado em retas L, denotamos por L^{-1} ou $L^{\vee}$, o seu dual.*

Seja $X \xrightarrow{f} Y$ um morfismo de esquemas e $L \xrightarrow{\pi} Y$ um fibrado vetorial sobre Y, de posto n. Existe um caminho natural, para construir um fibrado vetorial sobre X, induzido por π.

Primeiramente, definimos o **fibrado produto** $X \times_Y L$, por

$$X \times_Y L = \{(x,v) : f(x) = \pi(v)\} \subset X \times L,$$

junto com as projeções naturais. O fibrado produto, possui a estrutura de um esquema.

Definição 4.4.8. *Seja $X \xrightarrow{f} Y$ um morfismo de esquemas e $L \xrightarrow{\pi} Y$ um fibrado vetorial sobre Y, de posto n. Definimos o **fibrado induzido sobre** X, denotado por f^*L, como sendo $X \times_Y L$, junto com a aplicação natural sobre X. Verifique que o fibrado induzido, também possui posto n.*

Proposição 4.4.9. *Seja $L \longrightarrow X$ um fibrado em retas sobre a variedade X. Existe um divisor de Cartier D em X, tal que $L(D) \cong L$ (ver [29, p.46]).*

Proposição 4.4.10. *Sejam D_1, D_2 divisores de Cartier. Se $L(D_1)$ e $L(D_2)$ são isomorfos, então os ciclos associados $[D_1]$ e $[D_2]$, são racionalmente equivalentes (ver [29, p.49]).*

Observação 4.4.11. *Dizemos que dois divisores de Cartier são **linearmente equivalentes**, se sua diferença é um divisor de Cartier principal. De acordo com a proposição acima, equivalência linear de divisores, implica equivalência racional dos ciclos associados. Mas a recíproca não ocorre.*

Exemplo 4.4.12. *Seja X a curva plana projetiva definida por $zy^2 = x^3$. Para todo ponto $P \in X$, existe $r \in K(X)$, tal que $[r] = P - \mathbf{0}$, com $\mathbf{0} := (0:0:1)$. Seja D um divisor de Cartier, com equação local $f_1 = x/(x-y)$ em $U_1 := X - \{\mathbf{0}\}$ e $f_2 = 1$ em $U_2 = X - \{(1:1:1), (0:1:0)\}$. Note que D não é principal, no entanto, $[D] = (0:1:0) - (1:1:1) \in R_0X$ (ver [13, p.142]).*

4.5 Operador Classe de Chern de um Fibrado em Retas

Como referência para esta seção, citamos [9] e [29].

Definição 4.5.1. *Seja $L \to X$ um fibrado em retas e V uma subvariedade de X. Pela proposição (4.4.9), existe um divisor de Cartier C de V, tal que $L(C) \cong L_{|V}$. Definimos*

$$c_1(L) \cap V := [C] \text{ em } A_*V.$$

Isto está bem definido, devido à proposição (4.4.10).

Definição 4.5.2. *Definimos o **operador 1ª classe de Chern** $c_1(L)$, a partir da composição com o homomorfismo natural $A_*V_i \hookrightarrow A_*X$:*

$$c_1(L) : C_*X \to A_*X$$

$$z = \sum m_i V_i \to c_1(L) \cap z := \sum m_i C_1(L) \cap V_i.$$

Observação 4.5.3. *Segue da proposição (4.4.10), que se L e L' são fibrados em retas isomorfos, então $c_1(L) = c_1(L')$.*

Definição 4.5.4. *Seja D um divisor de Cartier em X e V uma subvariedade de dimensão k. Definimos a **classe de interseção de** V com D, pela fórmula*

$$D \cdot V = c_1(L(D)) \cap V \text{ em } A_{k-1}(V \cap |D|).$$

Por linearidade, estendemos essa definição, a um k-ciclo $z = \sum n_i V_i$:

$$D \cdot z = \sum n_i \, (D \cdot V_i) \text{ em } A_{k-1}(|z| \cap |D|).$$

Sejam D e D' divisores de Cartier sobre uma variedade X, com divisores associados $[D]$ e $[D']$. Definimos a ***classe interseção de divisores de Cartier****, como sendo*

$$D \cdot D' := D \cdot [D'] = [D] \cdot D'$$

em $A_{n-2}(\mid D \mid \cap \mid D' \mid)$. A segunda igualdade, é demonstrada em [9, p.35].

Observação 4.5.5. *Se $V \not\subset \mid D \mid$, as equações locais de D, restringem-se às equações locais do divisor de Cartier i^*D, onde $i : V \hookrightarrow X$. Segue daí, que a classe $D \cdot V$, é representada por um ciclo bem definido, com suporte contido em $V \cap \mid D \mid$.*

Exemplo 4.5.6. *Seja $H \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano e $V \subset \mathbb{P}^n$ uma subvariedade de dimensão k. Dessa forma,*

$$H \cdot V \ = \ [H' \cap V] \text{ em } A_{k-1}(V \cap H),$$

onde H' denota um hiperplano que não contêm V. É claro que $\mid H \mid = H$.

Proposição 4.5.7. *(a) (Comutatividade) Se L e L' são fibrados em retas sobre X, z um k-ciclo sobre X, então*

$$c_1(L) \cap (c_1(L') \cap z) = c_1(L') \cap (c_1(L) \cap z).$$

(b) (Fórmula de Projeção) Se $f : X \to Y$ é um morfismo próprio, L um fibrado em retas sobre Y, e z um k-ciclo sobre X, então

$$f_*(c_1(f^*L) \cap z) = c_1(L) \cap f_*(z)$$

em $A_{k-1}Y$.

Demonstração: Ver [9, Prop. 2.5, p.41].

Capítulo

5

Números de Segre

Neste capítulo está fundamentado um dos principais objetivos de nosso trabalho. Aqui, estudamos variedades polares, ciclos de Segre e os números de Segre, e vemos a caracterização destes últimos, como números de interseção; o que mostra a utilização da teoria de interseção como uma ferramenta útil no cálculo desses números. A principal referência é o trabalho de Gaffney [10]. É importante citar os trabalhos pioneiros de Teissier [27] e Massey [19]. Neste último, são definidos pela primeira vez, os conceitos de variedade polar, e números de Segre, mas para o caso em que I é o ideal Jacobiano de uma hipersuperfície.

5.1 Variedades Polares, Ciclos Segre e Números de Segre

Sejam $(X,0) \subseteq (\mathbb{C}^N,0)$ um espaço analítico fechado e reduzido de dimensão pura n e $I \subset \mathscr{O}_{X,0}$ um ideal, que define um subespaço nunca-denso de $(X,0)$. Considere a explosão B de X, ao longo de I:

$$B = \mathrm{Bl}_I X \xrightarrow{b} X,$$

onde $D = b^{-1}(V(I))$ é o seu divisor excepcional. Como $\mathscr{O}_{X,0}$ é Noetheriano, I é finitamente gerado, por digamos, $f_1, ..., f_M$. Então a explosão B é igual ao fecho em $X \times \mathbb{P}^{M-1}$, do gráfico da aplicação

$$X - V(I) \to \mathbb{P}^{M-1}$$

$$x \mapsto (f_1(x) : ... : f_M(x)).$$

Tomando a restrição a B da projeção sobre o segundo fator do produto $X \times \mathbb{P}^{M-1}$, induzimos uma aplicação $p : B \to \mathbb{P}^{M-1}$.

Definição 5.1.1. *Se $H \subset \mathbb{P}^{M-1}$ é um hiperplano, tal que $B \not\subset X \times H$, a sua imagem por $p^* : \mathbb{C}[\mathbb{P}^{M-1}] \to \mathbb{C}[B]$, gera um divisor de Cartier sobre B, que chamamos* ***hiperplano sobre*** *B.*

Definição 5.1.2. *Seja V um subespaço reduzido de B, de dimensão pura k, tal que, nenhum de seus componentes esteja contido em D. Um hiperplano H de B, é* ***geral com respeito a*** *V, se $H \cap V$ é reduzido de dimensão $k-1$ e nenhum de seus componentes está contido em D.*

Observação 5.1.3. *Note que a interseção $H \cap V$ acima é igual a transformação estrita por b, de sua imagem b($H \cap V$) em X. De fato, no complementar de D, a aplicação b é um isomorfismo, ou seja, $H \cap (V-D) = (H \cap V) - D = b^{-1}(b(H \cap V) - V(I))$, e por hipótese, o fecho de $H \cap (V-D)$ é $H \cap V$.*

Usando o lema de transversalidade de Kleiman (ver [17]), podemos mostrar que existe um subconjunto aberto de Zariski, do conjunto de todos os hiperplanos de B, que são gerais com respeito a V.

Observação 5.1.4. *Considere um hiperplano H sobre B, induzido por um hiperplano $H' = V(F)$ de $\mathbb{P}^{M-1}$. O polinômio F que define H' faz corresponder, por meio de composição com p, uma combinação linear $\boldsymbol{g}$ de geradores de I. Suponhamos que H seja geral com respeito a B. Utilizando o argumento acima, obtemos que $b(H \cap (B-D)) = b(H \cap B) - V(I) = V(\boldsymbol{g}) - V(I)$; e isso mostra que o fecho topológico de $V(\boldsymbol{g}) - V(I)$ em X, é igual a imagem $b(H \cap B)$. Esta observação irá permitir uma nova construção de variedades polares e dos ciclos de Segre, no lema (5.1.12).*

Definição 5.1.5. *Seja Y um subespaço reduzido de X, de dimensão pura m (todas as suas componentes dimensão m), no qual nenhuma das componentes está contida em $V(I)$. Considere uma m-upla $\boldsymbol{g} = (g_1, ..., g_m)$ de combinações lineares de geradores de I. Uma tal m-upla é dita* ***genérica*** *quando todos os coeficientes nas combinações lineares estão fora de algum conjunto algébrico fechado próprio, do conjunto dos coeficientes da m-upla. Suponhamos que $\boldsymbol{g}$ seja* ***geral com respeito a*** *Y, ou seja, cada hiperplano H_i de B, correspondente a g_i, é geral com respeito a $H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap \mathrm{Bl}_I Y$. Definimos as* ***variedades polares*** *e os* ***ciclos de Segre*** *de I sobre Y, com respeito a $\boldsymbol{g}$, como segue:*

$$P_0^{\boldsymbol{g}}(I,Y) := Y,\ P_k^{\boldsymbol{g}}(I,Y) := b(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap \mathrm{Bl}_I Y),$$

$$\Lambda_k^{\boldsymbol{g}}(I,Y) := b_*(H_1 \cdots H_{k-1} \cdot D \cdot \mathrm{Bl}_I Y),$$

onde $b_* : C_*B \to C_*X$ *é a imagem direta de* b.

As variedades polares são reduzidas, já que a aplicação b é própria, e por suposição, H_k é geral com respeito a $H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1} \cap \mathrm{Bl}_I Y$. Veja que a codimensão de $P_k^{\mathbf{g}}(I,Y)$ e $\Lambda_k^{\mathbf{g}}(I,Y)$ em Y é k, se eles são não-vazios. De fato, $\dim \mathrm{Bl}_I Y = m$ e $\dim\,(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap \mathrm{Bl}_I Y) = m-k$; donde segue o resultado para variedades polares. Para os ciclos de Segre, notemos que a dimensão do ciclo $H_1 \cdots H_k \cdot D \cdot \mathrm{Bl}_I Y$ é $m-k$. Utilizando o fato de $p_*(C_k B) \subseteq C_k Y$, segue o resultado.

Seja I' o ideal induzido por I em $\mathscr{O}_{Y,0}$ e $\mathbf{g}'$ o seu conjunto de geradores obtidos pela restrição dos elementos de $\mathbf{g}$ a Y. Então a explosão de Y ao longo de I' é isomorfa à transformação estrita de Y por b, e o divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_I Y$ é a interseção da explosão de Y, com o divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_I X$. Dessa forma, as seguintes igualdades são obtidas, para $k = 1, \ldots, m-1$.

$$P_k^{\mathbf{g}}(I,Y) = P_k^{\mathbf{g'}}(I',Y), \tag{5.1}$$

$$\Lambda_k^{\mathbf{g}}(I,Y) = \Lambda_k^{\mathbf{g'}}(I',Y), \tag{5.2}$$

Se $\mathbf{g}$ é formado por combinações lineares genéricas de geradores de I, e omitimos $\mathbf{g}$ na notação para variedades polares e ciclos de Segre, esta notação torna-se imprecisa, na medida em que é possível encontrar diferentes m-uplas genéricas que gerem diferentes variedades polares e ciclos de Segre. No entanto, sua multiplicidade em 0, não depende da escolha de combinações lineares genéricas. Veremos que as variedades polares e os ciclos de Segre genéricos são dados pela fórmula de interseção, ou seja, independem da escolha de $\mathbf{g}$ genérica.

Definição 5.1.6. *Seja* $X^r \subseteq \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico. Definimos a multiplicidade de* X*, no ponto* $0 \in X$*, como sendo*

$$\mathrm{mult}_0(X) = \min_{\left\{\begin{array}{l} L^{n-r} \text{ subesp. linear, tal que} \\ \{0\} = \text{ uma comp. de } X \cap L \end{array}\right\}} i(0; X \cap L).$$

Para maiores detalhes, quanto à última definição e suas propriedades recomendamos [21, Capítulo 5].

Exemplo 5.1.7. *Seja* $X^2 = V(x^2+y^3-yxz) \subset \mathbb{C}^3$. *Para* $L^1 = V(x,y)$,

$$\begin{aligned} i(0, V(x^2+y^3-yxz) \cap V(x,z)) &= i(0, V(x,y^3,z)) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Agora, tomando $L^1 = V(y,z)$, *temos*

$$\begin{aligned} i(0, V(x^2+y^3-yxz) \cap V(y,z)) &= i(0, V(x^2,y,z)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donde,

$$\mathrm{mult}_0(X) = 2.$$

Exemplo 5.1.8. *Seja* $X^1 = V(x^2-y^3,z) \subset \mathbb{C}^3$. *Tomemos* $L^2 = V(y)$; *e então*

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_0(X) &= i(0, X^1 \cap L^2) \\ &= i(0, X^1 \cap V(y)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1.9. *Seja* $X^1 = V(x^2-y^3) \subset \mathbb{C}^3$ *e tomemos* $L^1 = V(y,z)$. *Logo,*

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_0(X) &= i(0, X^1 \cap L^1) \\ &= i(0, X^1 \cap V(y,z)) \\ &= i(0, V(x^2)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Definição 5.1.10. *Definimos então, a* ***multiplicidade polar*** *de* (I,Y), *para* $k = 0,\ldots,m-1$, *como sendo*

$$m_k(I,Y) := \mathrm{mult}_0 P_k(I,Y),$$

e para $k = 1,\ldots,m$, *os* ***números de Segre*** *de* (I,Y):

$$e_k(I,Y) := \mathrm{mult}_0 \Lambda_k(I,Y),$$

onde a multiplicidade de um ciclo $S = \sum a_i V_i$ em 0 é definida por

$$\mathrm{mult}_0 S \;=\; \sum a_i \mathrm{mult}_0 V_i.$$

Observação 5.1.11. *Pela definição de uma m-upla geral $\boldsymbol{g}$ de combinações lineares de geradores de I, não necessariamente ela é genérica. Então, pela continuidade (à direita) da multiplicidade, temos, para $k \;=\; 1,\ldots,m-1$,*

$$m_k(I,Y) \leq \mathrm{mult}_0 P_k^{\boldsymbol{g}}(I,Y). \tag{5.3}$$

O seguinte lema dará uma construção alternativa para variedades polares e ciclos de Segre.

Lema 5.1.12. *Suponhamos que $\boldsymbol{g} = (g_1,\ldots,g_m)$ seja uma m-upla genérica de combinações lineares de geradores de I. Para $k = 1,\ldots,m-1$, a variedade polar k-codimensional $P_k^{\boldsymbol{g}}(I,X)$ de I sobre Y é igual ao fecho de*

$$V(g_k\,|_{P_{k-1}^{\boldsymbol{g}}(I,Y)}) - V(I)$$

em Y. Além disso, obtemos as seguintes igualdades para os ciclos de Segre:

$$\begin{aligned}
\Lambda_k^{\boldsymbol{g}}(I,Y) &= [V(g_k\,|_{P_{k-1}^{\boldsymbol{g}}(I,Y)})] - [P_k^{\boldsymbol{g}}(I,Y)] \\
\Lambda_m^{\boldsymbol{g}}(I,Y) &= [V(g_m\,|_{P_{m-1}^{\boldsymbol{g}}(I,Y)})].
\end{aligned}$$

Demonstração: A primeira afirmação segue diretamente da definição de variedades polares e da observação (5.1.4).

Para a segunda afirmação, utilizamos (5.1) e (5.2), para obtermos

$$\Lambda_k^{\mathbf{g}}(I,Y) = \Lambda_1^{\mathbf{g}}(I, P_{k-1}^{\mathbf{g}}(I,Y)). \tag{5.4}$$

Assim, podemos substituir X por $P_{k-1}(I,Y)$ e I, pelo ideal induzido por I, no anel local de $P_{k-1}(I,Y)$ em 0. Dessa forma, podemos supor que $k = 1$ e $X = Y$. Devido a (5.4), $\Lambda_1^{\mathbf{g}}(I,X) = \Lambda_2^{\mathbf{g}}(I,X)$, e se $V(I)$ é de codimensão maior que um, $P_1^{\mathbf{g}}(I,X) = V(g_1)$, e então $\Lambda_1^{\mathbf{g}}(I,X) = \emptyset$. Assim, suponhamos que $V(I)$ possua codimensão um. Logo, $V(I) = V(g_1)$, pelo fato de ambos terem a mesma dimensão, e $V(I) \subseteq V(g_1)$.

Por definição, o ciclo de Segre de I sobre X, de dimensão um, é igual ao morfismo imagem direta, do ciclo associado ao divisor excepcional da explosão de X sobre I. Seu conjunto subjacente, é igual ao conjunto formado pelas componentes subjacentes, do conjunto subjacente de $V(I)$, de codimensão um. Agora só nos resta mostrar que a multiplicidade de uma tal componente W, de dimensão um no ciclo $[V(g_1)]$, é igual à multiplicidade de W em $\Lambda_1(I,X)$.

Com efeito, a primeira multiplicidade é, por definição, dada pela multiplicidade do ideal $(g_1)\mathscr{O}_{W,X}$. Por outro lado, a multiplicidade W em $\Lambda_1(I,X)$ é igual à multiplicidade do ideal $I\mathscr{O}_{W,X}$ (ver [9, Exemplo 4.3.4, p.81]). Como os geradores de I são genéricos, as duas multiplicidades em questão são iguais, pelo teorema de Samuel (ver [9, Exemplo 4.3.5(a), p.81]).

■

A seguinte igualdade, segue diretamente da equação (5.4).

$$e_k(I,Y) = e_1(I, P_{k-1}(I,Y)). \tag{5.5}$$

Observação 5.1.13. *O lema mostra que variedades polares e ciclos de Segre genéricos não sofrem mudança quando substituímos I por uma redução. Por exemplo, o ideal gerado por n combinações genéricas de I. Além disso, o lema é uma ferramenta eficaz no cálculo dos ciclos de Segre e números de Segre.*

Exemplo 5.1.14. *Seja I é um ideal principal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, gerado por f. Então, $\Lambda_1(I,X) = [V(I)]$, e o restante dos ciclos de Segre são vazios. Portanto, $e_1(I,X)$ é igual a multiplicidade de $V(f)$ em* 0.

Exemplo 5.1.15. *As variedades polares, os ciclos de Segre e os números de Segre, já haviam sido definidos para o caso em que $X = (\mathbb{C}^{n+1},0)$ e I o ideal Jacobiano (gerado pelas derivadas parciais) de uma função analítica*

$$f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0).$$

Seja

$$\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_0}\right)$$

e suponhamos que $\boldsymbol{g}$ seja uma $(n+1)$-upla geral de combinações lineares dos geradores de I.

O k-ésimo ciclo de Segre $\Lambda_k^{\boldsymbol{g}}(I,X)$ *é o* $(n+1-k)$*-ésimo ciclo de Lê* $\Lambda_{f,\boldsymbol{z}}^{n+1-k}$*, com respeito às coordenadas* $\boldsymbol{z}=(z_0,\ldots,z_n)$ *(ver* [19]*). Sua multiplicidade* $e_k(I,X)$*, é o número de Lê* $\lambda_{f,\boldsymbol{z}}^{n+1-k}$ *, k-codimensional de* f *em 0, com respeito a* $\boldsymbol{z}$ *.*

Exemplo 5.1.16. *Seja* $X=(\mathbb{C}^3,0)$ *e* $f:(\mathbb{C}^3,0)\to(\mathbb{C},0)$*, tal que* $f(t,x,y)=y^2-x^3-tx^2$*, onde* $J(f)$ *denota o ideal Jacobiano* $(2y,-3x^2-2tx,-x^2)$*. Note que* $V(J(f))=V(-x^2,-3x^2-2tx,2y)=V(x,y)$*.*

As variedades polares de X *sobre* $J(f)$*, são*

$$\begin{aligned}
P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_1\mid_{P_0^{\boldsymbol{g}}(I,X)})-V(I)}\\
&= \overline{V(-2y)-V(x,y)}\\
&= V(y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_2\mid_{P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X)})-V(I)}\\
&= \overline{V(-3x^2-2tx_{|V(y)})-V(x,y)}\\
&= \overline{V(x(-3x-2t),y)-V(x,y)}\\
&= \overline{V(-3x-2t,y)-V(x,y)}\\
&= V(-3x-2t,y).
\end{aligned}$$

Calculemos os ciclos de Segre:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(g_1\mid_{P_0^{\boldsymbol{g}}(I,X)})]-[P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X)]\\
&= [V(2y)]-[V(y)]\\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(g_2\mid_{P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X)})]-[P_2^{\boldsymbol{g}}(I,X)]\\
&= [V(-3x^2-2tx,2y)]-[V(-3x-2t,y)]\\
&= ([V(x,y)]+[V(-3x-2t,y)])-[V(-3x-2t,y)]\\
&= [V(x,y)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_3^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(g_3\mid_{P_2^{\boldsymbol{g}}(I,X)})]-[V(-x^2,-3x-2t,y)]\\
&= [V(x^2,t,y)]\\
&= 2[V(t,x,y)]\\
&= 2[0].
\end{aligned}$$

Agora, obtemos os números de Segre:

$$\begin{aligned}
e_2(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(x,y)\\
&= i(0,V(y,x)\cap V(t))\\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$e_3(I,X) = 2.$$

Exemplo 5.1.17. *Seja $X=\mathbb{C}^5$, fixemos as coordenadas (u,v,w,x,y) e*

$$I=(2y,-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2),-2wx^2,-2wx^2,-2vx^2,-2ux^2)\subset \mathscr{O}_{5,0}.$$

É fácil verificar que $V(I)=V(x,y)$ e $\dim V(I)=3$. Encontremos as variedades polares:

$$\begin{aligned}
P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_1\mid_{P_0^{\boldsymbol{g}}(I,X)}-V(I))}\\
&= \overline{V(2y\mid_{\mathbb{C}^5})-V(x,y)}\\
&= V(y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_2\mid_{P_1^{\boldsymbol{g}}(I,X)}-V(I))}\\
&= \overline{V(-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2)\mid_{V(y)})-V(x,y))}\\
&= \overline{V(-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2),y)-V(x,y)}\\
&= \overline{V(x,y)\cup V(-3x-2(u^2+v^2+w^2),y)-V(x,y)}\\
&= \overline{V(-3x-2(u^2+v^2+w^2),y)-V(x,y)}\\
&= V(-3x-2(u^2+v^2+w^2),y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_3\,|_{P_2^{\boldsymbol{g}}(I,X)} - V(I))} \\
&= \overline{V(-2wx^2, -3x-2(u^2+v^2+w^2), y) - V(x,y)} \\
&= \overline{V(-x^2,y) \cup V(w, -3x-2(u^2+v^2+w^2), y) - V(x,y)} \\
&= \overline{V(w, -3x-2(u^2+v^2), y) - V(x,y)} = V(w, -3x-2(u^2+v^2), y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= \overline{V(g_4\,|_{P_3^{\boldsymbol{g}}(I,X)} - V(I))} \\
&= \overline{V(-2vx^2, -3x-2(u^2+v^2), w, y) - V(x,y)} \\
&= V(-3x-2u^2, v, w, y).
\end{aligned}$$

Agora, os ciclos de Segre:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(2y\,|_{\mathbb{C}^5})] - [V(y)] \\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2), y)] - [V(-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2), y)] \\
&= ([V(x,y)] + [V(-3x-2(u^2+v^2+w^2), y)]) - [V(-3x^2-2x(u^2+v^2+w^2), y)] \\
&= [V(x,y)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_3^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(-2wx^2, -3x-2(u^2+v^2+w^2), y)] - [V(-3x-2(u^2+v^2), y, w)] \\
&= [V(x^2, -2(u^2+v^2+w^2), y)] \\
&= 2[V(u^2+v^2+w^2, x, y)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_4^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(-2vx^2, -3x-2(u^2+v^2), w, y)] - [V(-3x-2u^2, v, w, y)] \\
&= [V(-2x^2, -3x-2(u^2+v^2), w, y)] + [v, -3x-2(u^2+v^2), w, y] - [V(-3x-2u^2, v, w, y)] \\
&= 2[V(x, u^2+v^2, w, y)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_5^{\boldsymbol{g}}(I,X) &= [V(-ux^2,-3x-2u^2,v,w,y)] \\
&= [V(-ux,-3x-2u^2,v,w,y)]+[V(x,-3x-2u^2,v,w,y)] \\
&= [V(u,-3x-2u^2,v,w,y)]+[V(x,-3x-2u^2,v,w,y)]-[V(x,u^2,v,w,y)] \\
&= [V(u,x,v,w,y)]+[V(x,u^2,v,w,y)]+[V(x,u^2,v,w,y)] \\
&= 5[V(x,u,v,w,y)] \\
&= 5[0].
\end{aligned}$$

Finalmente, calculemos as multiplicidades polares e os números de Segre:

$$\begin{aligned}
m_1(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(y) \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(-3x-2(u^2+v^2+w^2),y) \\
&= i(0,V(-3x-2(u^2+v^2+w^2),y)\cap V(x,u,v)) \\
&= i(0,V(-2w^2)) \\
&= 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(-3x-2(u^2+v^2),w,y) \\
&= i(0,V(-3x-2(u^2+v^2),w,y)\cap V(x,u)) \\
&= i(0,V(-2v^2,w,y)) = i(0,V(v^2,w,y)) \\
&= 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(-3x-2u^2,v,w,y) \\
&= i(0,V(-3x-2u^2,v,w,y)\cap V(u)) \\
&= i(0,V(x,v,w,y)) \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2(I,X) &= \mathrm{mult}_0 V(x,y) \\
&= i(0,V(x,y)\cap V(u,v,w)) \\
&= i(0,0) \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3(I,X) &= 2\mathrm{mult}_0 V(u^2+v^2+w^2,x,y) \\ &= i(0,V(u^2+v^2+w^2,x,y)\cap V(u,v)) \\ &= 2i(0,V(w^2,x,y)) \\ &= 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4(I,X) &= 2\mathrm{mult}_0 V(u^2+v^2,w,x,y) \\ &= 2i(0,V(u^2+v^2,w,x,y)\cap V(u)) \\ &= 2i(0,V(v^2,w,x,y)) \\ &= 4; \end{aligned}$$

$$e_5(I,X) = 5.$$

5.2 Teoria da interseção

Revisaremos nesta seção algumas definições e propriedades básicas do livro de Fulton [9]. Também utilizamos como fonte, o livro de Israel Vainsencher [29].

Seja $X \subseteq (\mathbb{C}^N,0)$ um germe analítico reduzido de dimensão pura n contendo 0, $I \subseteq \mathscr{O}_{X,0}$ um ideal e $\mathrm{m} \subset \mathscr{O}_{X,0}$ o ideal maximal. Seja $\Lambda_k(\mathrm{m}I,X)$ um ciclo de Segre k-codimensional de $\mathrm{m}I$ e $e_k(\mathrm{m}I,X)$ sua multiplicidade em 0. A principal ferramenta para estudar estes ciclos de Segre é o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D \subset B = \mathrm{Bl}_{\mathrm{m}I}X & \xrightarrow{\widetilde{b_1}} & B_2 = \mathrm{Bl}_I X \supset D_2 \\ \widetilde{b_2}\downarrow & & \downarrow b_2 \\ D_1 \subset B_1 = \mathrm{Bl}_{\mathrm{m}}X & \xrightarrow{b_1} & X \end{array}$$

Os divisores excepcionais das explosões B_1 e B_2 são, respectivamente, D_1 e D_2. O divisor excepcional da explosão $b : \mathrm{Bl}_{\mathrm{m}I}X \to X$, é denotado por D.

Denotamos a primeira classe de Chern do fibrado em retas tautológico sobre as explosões B_1, B_2 e B por

$$h_1 = c_1(\mathscr{O}_{B_1}(1)),\ h_2 = c_1(\mathscr{O}_{B_2}(1))\ e\ h = c_1(\mathscr{O}_B(1)).$$

Observação 5.2.1. *Pelo que já foi visto no capítulo 3, uma classe de Chern, digamos o operador h_1, aplica uma variedade irredutível $V \subseteq B_1 \subset (X \times \mathbb{P}^n)$, na classe de equivalência racional do*

divisor de Cartier, cujo fibrado associado é isomorfo a $\mathscr{O}_{B_1}(1)_{|V}$. *Esse divisor de Cartier é* $V \cap H$, *onde* H *é dito um* ***hiperplano genérico de*** B_1, *isto é,* $H = (X \times H') \cap B_1$, *com* H' *sendo um hiperplano genérico de* $\mathbb{P}^n$. *O fibrado em retas associado ao divisor* H, *é isomorfo ao fibrado em retas tautológico sobre* B_1. *(A confirmação disto, segue do lema de transversalidade de Kleiman, que implica que* H *intersecta* V *transversalmente e a interseção é reduzida de dimensão* $\dim V - 1$.*) Por linearidade, estendemos a um ciclo qualquer em* $C_* B_1$.

Por analogia ao exemplo (4.4.6), o fibrado em retas associado a D_i sobre B_i, é o dual de $\mathscr{O}_{B_i}(1)$. Assim, o operador $c_1(L(D_i))$, é igual à operação $-h_i$ (ver [9, prop. 2.5, (e), p.41]). Então, operar um ciclo sobre $-h_i$, é o mesmo que intersectá-lo com D_i. Ou seja, se S é um ciclo sobre B_i, $(-h_i)(S) = D_i \cdot S$. Dizemos que (o fibrado em retas associado a) D_i é o dual de $\mathscr{O}_{B_i}(1)$.

Para $i = 1, 2$, denotaremos por $\widetilde{h_1}$, o morfismo induzido por h_i em B, e $\widetilde{D_i}$ o divisor de Cartier induzido por D_i em B. Então, as seguintes igualdades de divisores de Cartier são obtidas (ver [16, 2.7]):

$$D = \widetilde{D}_1 + \widetilde{D}_2, \; h = \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2. \tag{5.6}$$

Dado um ciclo S sobre B, denotamos por S^{X-0}, o ciclo formado pelas componentes, que não se encontram na fibra $b^{-1}(0)$.

Proposição 5.2.2. *Se* H *é um hiperplano genérico sobre* B,

$$H \cap S^{X-0} = (H \cap S)^{X-0}, \tag{5.7}$$

onde S *é um ciclo sobre* B.

Demonstração: Com efeito, supomos que $H \cap S^{X-0}$ seja não-vazio. Pelo lema de transversalidade de Kleiman, podemos supor que H intersecta toda componente do ciclo S^{X-0} transversalmente. Assim,

$$\dim H \cap S^{X-0} = \dim S^{X-0} \; - \; 1 \geq \dim S^{X-0} \cap b^{-1}(0) > \dim H \cap S^{X-0} \cap b^{-1}(0).$$

A primeira igualdade e a segunda desigualdade, seguem pela transversalidade de H. E a primeira

desigualdade, diretamente da definição de S^{X-0}. Pelo fato de

$$\dim H \cap S^{X-0} > \dim H \cap S^{X-0} \cap b^{-1}(0),$$

podemos concluir que as componentes do ciclo $H \cap S^{X-0}$ não se encontram na fibra $b^{-1}(0)$; o que implica (5.7). Segue daí que a equação (5.7) é válida para hiperplanos genéricos nas representações de $\widetilde{h}_1$ e $\widetilde{h}_2$. ■

Denotamos por S^0, a parte de S formada pelos componentes que se encontram na fibra $b^{-1}(0)$.

Corolário 5.2.3. *Seja S um ciclo sobre B. A equação (5.7), é equivalente a*

$$H \cap S^0 = (H \cap S)^0. \tag{5.8}$$

Usamos a mesma notação de um divisor de Cartier D, para o seu divisor de Weil associado. Também escrevemos D^0, para a parte de seu divisor de Weil associado, formado pelas componentes que encontram-se em $b^{-1}(0)$. O ciclo D^{X-0}, é definido analogamente.

No capítulo 4, definimos o grau de um ciclo S, denotado por $\int S$. Ele é a soma das multiplicidades das componentes de dimensão nula. Para um ciclo S na fibra de B sobre 0, o grau de S depende somente da classe de equivalência racional de S desta fibra. Para ciclos fora desta fibra, o grau não é invariante da equivalência racional.

5.3 Fórmulas de Interseção

Teorema 5.3.1. *(Fórmulas de interseção) Podemos expressar a multiplicidade dos ciclos Segre em 0, como número de interseções:*

$$e_k(\mathfrak{m}I, X) = \int \widetilde{h}_1^{n-k-1} h^{k-1} D^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1,\ k = 1, \ldots, n-1, \tag{5.9}$$

$$e_n(\mathfrak{m}I, X) = \int h^{n-1} D^0, \tag{5.10}$$

$$e_k(I, X) = \int \widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{h}_2^{k-1} \widetilde{D}_2^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1,\ k = 1, \ldots, n-1, \tag{5.11}$$

$$e_n(I,X) = \int h_2^{n-1} D_2^0. \tag{5.12}$$

Demonstração: A seguinte fórmula, é uma generalização da fórmula de multiplicidade polar de Lê e Teissier (ver [28, (5.5.1)]):

$$m_k(I,X) = \int \widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{h}_2^k \widetilde{D}_1. \tag{5.13}$$

Eles consideraram o caso especial do ideal Jacobiano, mas sua prova é trabalhada também no início de nosso trabalho. Uma outra alternativa é verificar a fórmula por argumentos similares.

Define-se a explosão $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}} S$ de um ciclo $S = \sum n_i V_i$ sobre X, como sendo o ciclo $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}} S = \sum n_i \mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}} V_i$.

Para provar a primeira fórmula considere

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}} \Lambda_k(\mathfrak{m}I, X) &= \mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}}(b_*(H_1 \cdots H_{k-1} \cdot D \cdot \mathrm{Bl}_I X)) \\
&= \mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}}(b_*(H_1 \cdots H_{k-1} \cdot D)) \\
&= \mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}}(b_*(D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1})) \\
&= \widetilde{b}_{2*}((D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1})^{X-0}) \\
&= \widetilde{b}_{2*}(D^{X-0} \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}),
\end{aligned}$$

onde os H_i são hiperplanos genéricos de B. A última igualdade segue pelo mesmo argumento que levou à conclusão de (5.7). Agora,

$$\begin{aligned}
e_k(\mathfrak{m}I, X) &= \int h_1^{n-k-1} \mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}} \Lambda_k(\mathfrak{m}I, X) \cdot D_1 \\
&= \int h_1^{n-k-1} \widetilde{b}_{2*}(D^{X-0} \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}) \widetilde{b}_{2*}(\widetilde{D}_1) \\
&= \int h_1^{n-k-1} \widetilde{b}_{2*}((D^{X-0} \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}) \cdot \widetilde{D}_1) \\
&= \int \widetilde{b}_{2*}(h_1^{n-k-1}(D^{X-0} \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}) \cdot \widetilde{D}_1) \\
&= \int \widetilde{h}_1^{n-k-1}(D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{k-1}) \cdot \widetilde{D}_1 \\
&= \int \widetilde{h}_1^{n-k-1} h^{k-1} D^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1.
\end{aligned}$$

A primeira igualdade é uma fórmula de interseção bem conhecida para a multiplicidade de um ciclo. (De fato, isso é apenas uma translação da definição de Samuel para a multiplicidade de um ideal sobre a geometria.) As igualdades seguintes seguem da fórmula de projeção (4.5.7, (b)) e

da observação (4.1.22). A fórmula desejada foi obtida por passagem à equivalência racional. A segunda fórmula, segue diretamente da definição de $e_n(\mathfrak{m}I, X)$ e da igualdade (5.8). A prova das duas próximas fórmulas, decorre analogamente. ■

Lema 5.3.2. *Para $k = 1, \ldots, n-1$, seja L_{n-k} um subespaço linear genérico (n-k)-dimensional de $\mathbb{C}^N$. Considere a explosão $\mathrm{Bl}_I(X \cap L_{n-k})$ com divisor excepcional $D_{2,n-k}$. Então, seu divisor de Cartier induzido $\widetilde{D}_{2,n-k}$ em $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}I}(X \cap L_{n-k})$, satisfaz às seguintes relações sobre equivalência racional:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^0_{2,n-k} &= \widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}^0_2 \\
&= \widetilde{h}_1^{n-k-1}\widetilde{h}_2\widetilde{D}_1 + \widetilde{h}_1^{n-k-1}\widetilde{D}_2^{X-0}\widetilde{D}_1
\end{aligned}$$

$$\widetilde{D}^{X-0}_{2,n-k} = \widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}_2^{X-0}.$$

Demonstração: Iremos mostrar as relações para o caso $k = n-1$. O caso geral, segue por indução. Agora,

$$\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}I}(X \cap L_1) \cong \mathrm{Bl}_{b_1^*I}(H \cap B_1) \cong (\widetilde{b}_2^{-1}H) \cap B,$$

onde H é o hiperplano sobre B_1 induzido pelo o hiperplano em $\mathbb{P}^{N-1}$ correspondendo a L_1 e $b_1^* : \mathscr{O}_{X,0} \to \mathscr{O}_{B_1,0}$. Note que o segundo isomorfismo segue das propriedades do morfismo induzido de um fibrado em retas. Passando à equivalência racional, obtemos a segunda relação. Para a primeira relação, consideramos

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^0_{2,1} &= \widetilde{h}_1\widetilde{D}^0_2 \\
&= \widetilde{h}_1(\widetilde{D}_2 - \widetilde{D}_2^{X-0}) \\
&= \widetilde{h}_1 \cdot (\widetilde{D}_2) - \widetilde{h}_1(\widetilde{D}_2^{X-0}) \\
&= (-\widetilde{D}_1) \cdot \widetilde{D}_2 + \widetilde{D}_1 \cdot \widetilde{D}_2^{X-0} = \widetilde{D}_1 \cdot (-\widetilde{D}_2) + \widetilde{D}_1 \cdot \widetilde{D}_2^{X-0} \\
&= \widetilde{h}_2\widetilde{D}_1 + \widetilde{D}_2^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1.
\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue das propriedades de $\widetilde{h}_1$, e as restantes, usando dualidade.

■

5.4 Seções de Hiperplanos e Números de Segre

Agora que já expressamos os números de Segre como número de interseções, veremos através das fórmulas de expansão, como expressar os números de Segre do produto de um ideal I com o ideal maximal, em termos dos números de Segre de I e suas multiplicidades polares. Veremos também que a maior parte dos números de Segre não varia quando intersectamos o conjunto X, por um subespaço linear.

Proposição 5.4.1. *Seja L_{n-k} um subespaço linear $(n-k)$-codimensional de $\mathbb{C}^N$. Então, existem as seguintes relações de números Segre de (I,X) e de $(I,X\cap L_{n-k})$:*

$$e_i(I,X\cap L_{n-k}) = e_i(I,X),\ \textit{para } i=1,...,k-1, \tag{5.14}$$

$$e_k(I,X\cap L_{n-k}) = m_k(I,X)+e_k(I,X) \tag{5.15}$$

Demonstração: Seja $D_{1,n-k}$ o divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}}(X\cap L_{n-k})$ e $\widetilde{D}_{1,n-k}$ o seu divisor Cartier induzido em $\mathrm{Bl}_{\mathfrak{m}I}(X\cap L_{n-k})$. Por analogia ao lema (5.3.2), obtemos que $\widetilde{D}_{1,n-k} = \widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}_1$. Para a primeira relação, utilizamos o lema (5.3.2) acima e a fórmula de interserção (5.11):

$$\begin{aligned}
e_i(I,X\cap L_{n-k}) &= \int \widetilde{h}_1^{k-i-1}\widetilde{h}_2^{i-1}\widetilde{D}_{2,n-k}^{X-0}\widetilde{D}_{1,n-k}\\
&= \int \widetilde{h}_1^{k-i-1}\widetilde{h}_2^{i-1}\widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}_2^{X-0}\widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}_1\\
&= \int \widetilde{h}_1^{k-i-1}\widetilde{h}_2^{i-1}\widetilde{h}_1^{n-k}\widetilde{D}_2^{X-0}\widetilde{D}_1\\
&= \int \widetilde{h}_1^{n-i-1}\widetilde{h}_2^{i-1}\widetilde{D}_2^{X-0}\widetilde{D}_1\\
&= e_i(I,X).
\end{aligned}$$

Para a segunda relação, utilizamos o fato da imagem direta de $\widetilde{D}_{2,n-k}^0$ ser igual a $D_{2,n-k}^0$. Assim, podemos usar a fórmula de projeção (4.5.7, (b)), a observação (4.1.22) e o lema (5.3.2),

para calcular $e_k(I, X \cap L_{n-k})$ sobre B:

$$\begin{aligned}
e_k(I, X \cap L_{n-k}) &= \int h_2^{k-1} D^0_{2,n-k} \\
&= \int h_2^{k-1} \widetilde{b}_{2*} \widetilde{D}^0_{2,n-k} \\
&= \int \widetilde{b}_{2*}(\widetilde{h}_2^{k-1} \widetilde{D}^0_{2,n-k}) \\
&= \int \widetilde{h}_2^{k-1} \widetilde{D}^0_{2,n-k} \\
&= \int \widetilde{h}_2^{k-1} (\widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{h}_2 \widetilde{D}_1 + \widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{D}_2^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1) \\
&= \int \widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{h}_2^{k} \widetilde{D}_1 + \widetilde{h}_1^{n-k-1} \widetilde{h}_2^{k-1} \widetilde{D}_2^{X-0} \cdot \widetilde{D}_1.
\end{aligned}$$

A fórmula desejada segue diretamente da fórmula para multiplicidade polar (5.13) e a fórmula (5.11). ■

Teorema 5.4.2. *(Fórmulas de expansão) Temos as seguintes fórmulas de expansão:*

$$e_n(\mathfrak{m}I, X) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} m_i(I, X) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} e_i(I, X), \tag{5.16}$$

$$e_k(\mathfrak{m}I, X) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} e_i(I, X). \tag{5.17}$$

Demonstração:

Usando as igualdades (5.6), espandimos $h = \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2$ em (5.9), para obtermos

$$e_k(\mathfrak{m}I, X) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \int \widetilde{h}_1^{n-i-2} \widetilde{h}_2^{i} \widetilde{D}_2^{X-0} \widetilde{D}_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} e_{i+1}(I, X).$$

O que implica a segunda fórmula. Para a primeira fórmula, espandimos $h = \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2$ e $D^0 = \widetilde{D}_1 + \widetilde{D}_2^0$ em (5.9), e usamos a fórmula de multiplicidade polar (5.13):

$$\begin{aligned} e_n(\mathfrak{m}I,X) &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\int \widetilde{h}_1^{n-i-1}\widetilde{h}_2^{i}(\widetilde{D}_1+\widetilde{D}_2^0) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(m_i(I,X)+\int \widetilde{h}_1^{n-i-1}\widetilde{h}_2^{i}\widetilde{D}_2^0\ ). \end{aligned}$$

Devido a (5.3.2) e (5.15); para i menor que $n-1$, o grau de $\widetilde{h}_1^{n-i-1}\widetilde{h}_2^{i}\widetilde{D}_2^0$ é igual a

$$e_{i+1}(I,X)+m_{i+1}(I,X).$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_n(\mathfrak{m}I,X) &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}m_i(I,X)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}(e_i(I,X)+m_i(I,X))+e_n(I,X) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}m_i(I,X)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}m_i(I,X)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}(e_i(I,X))+e_n(I,X) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}m_i(I,X)+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}e_i(I,X). \end{aligned}$$

Lembre-se que $P_n(I,X)=\emptyset$ e $m_n(I,X)=0$. ■

Capítulo

6

Números de Segre e Multiplicidade Generalizada de Hilbert-Samuel

Neste capítulo final, vemos a construção de uma sequência de multiplicidades $c_0(I,A)$, $\ldots$, $c_d(I,A)$, de um anel Noetheriano local A, que generaliza a multiplicidade de Hilbert-Samuel. Essa sequência é construída, tomando-se o anel bigraduado $G_{\mathfrak{m}}(G_I(A))$, onde $G_I(A)$ é o anel graduado associado de A, com respeito a I. Devido a isto, é necessário uma teoria preliminar sobre as funções de Hilbert, aplicada a anéis bigraduados. Para finalizar, enunciamos um resultado, que permite encontrar os números de Segre de forma algébrica, a saber, em termos das multiplicidades generalizadas de Hilbert-Samuel (sequência de Aquilles-Manaresi).

Definição 6.0.3. *Um **anel bigraduado** é um anel $A = \oplus_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}$, tal que*

(i) os A_{ij} são subgrupos aditivos de A;

(ii) $A_{ij}A_{kl} \subseteq A_{i+k,j+l}$ para i,j,k,l inteiros não-negativos.

(iii) A é uma A_0-álgebra finitamente gerada por elementos de A_{01} e A_{10}.

Exemplo 6.0.4. *O anel de polinômios $A = A_{00}[x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_m]$, a variáveis $x_0,\ldots,x_n$ e $y_0,\ldots,y_m$, é um anel bigraduado, onde A_{ij} é o grupo aditivo de polinômios homogêneos de grau i, nas primeiras variáveis e homogêneos de grau j nas segundas.*

Definição 6.0.5. *Seja $A = \oplus_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}$ um anel bigraduado de dimensão d, tal que A_{00} seja Artiniano. A **função de Hilbert de** A, é definida como sendo*

$$h(i,j) := h_A(i,j) := \ell_{A_{00}}(A_{ij}).$$

Para i e j suficientemente grande, a função $h(i,j)$ é um polinômio

$$p(i,j) = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq d-2}} a_{kl}\binom{i}{k}\binom{j}{l}$$

com $a_{kl} \in \mathbb{Z}$ e $a_{k,d-2-k} \geq 0$ (ver [30, Teo. 7, p.757 e Teo. 11, p.759]).

Seja

$$h^{(1,0)}(i,j) := \sum_{u=0}^{i} h(u,j)$$

e

$$h^{(1,1)}(i,j) := \sum_{v=0}^{j} h^{(1,0)}(i,v) = \sum_{v=0}^{j}\sum_{u=0}^{i} h(u,v).$$

É claro que, para i, j suficientemente grandes, $h^{(1,0)}$ e $h^{(1,1)}$ serão polinômios a coeficientes inteiros, de grau no máximo $d-1$ e exatamente d, respectivamente. Ou seja,

$$p_A^{(1,0)}(i,j) = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq d-1}} a_{kl}^{(1,0)}\binom{i}{k}\binom{j}{l}$$

com $a_{k+1,l}^{(1,0)} = a_{k,l}$, para $k,l \geq 0, k+l \leq d-2$ e

$$p_A^{(1,1)}(i,j) = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq d}} a_{kl}^{(1,1)}\binom{i}{k}\binom{j}{l}$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{a_{k,d-k}^{(1,1)}}{(d-k)!k!} j^{d-k} i^k + (\text{termos de menor grau}).$$

com $a_{k+1,l+1}^{(1,1)} = a_{k,l}$, para $k,l \geq 0, k+l \leq d-2$.

Definição 6.0.6. *Definimos o símbolo*

$$c_k := c_k(A) := a_{k,d-k}^{(1,1)},$$

para $k = 0,\ldots,d$.

Seja $(A,\mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d, $I \subset A$ um ideal próprio e $G := G_I(A)$ o anel graduado de A, com respeito a I. Já é conhecido que $\dim G = \dim A$. Tomemos $R = G_{\mathfrak{m}}(G_I(A))$. Então $R = \oplus_{i,j=0}^{\infty} R_{ij}$, onde

$$R_{ij} = (\mathfrak{m}^i I^j + I^{j+1})/(\mathfrak{m}^{i+1} I^j + I^{j+1}),$$

é um anel bigraduado, com dimensão de krull d, e $R_{00} = A/\mathfrak{m}$, que é um corpo (Artiniano).

Definição 6.0.7. *Definimos as* ***multiplicidades generalizadas de Hilbert-Samuel****, por*

$$c_k := c_k(I,A) := c_k\big(G_{\mathfrak{m}}(G_I(A))\big) \quad (0 \leq k \leq d).$$

Também chamadas de ***sequência de multiplicidades de Achilles-Manaresi****. Denotamos por $c(I,A)$, a sequência $c(I,A) = (c_0(I,A), \ldots, c_d(I,A))$.*

Exemplo 6.0.8.

1. *Seja $A = k[x,y,z]$ o anel de polinômios de três variáveis sobre um corpo k, e $\mathfrak{m} = (x,y,z)$ o ideal maximal. Para um ideal I de A, tomemos $I = (x^4z^2, y^2z^4)$ e $J = (x^4z^2, y^2z^4, x^2yz^3)$. Observe que $JI = J^2$. Isto é, I é uma redução de J. Uma das implicações do teorema de Rees [22], já demonstrada por Ciupercă [4], fala-nos que $c(I,A) = c(J,A)$. De fato, pode-se mostrar que $c(I,A) = c(J,A) = (0,24,2,0)$.*

2. *Seja $A = k[x,y]$ o anel de polinômios de duas variáveis sobre o corpo k, e $\mathfrak{m} = (x,y)$ o ideal maximal. Sejam $I = (x^5y^3, x^2y^7)$ e $J = (x^5y^3, x^2y^7, x^6y)$ ideais de A. Mostra-se que $c(J,A) = (29,5,0)$ e $c(I,A) = (40,3,0)$. Segue então, pelo teorema de Rees, que nenhum dos ideais é redução do outro.*

O fato de (6.0.7) ser uma generalização da multiplicidade de Hilbert-Samuel, discutida no Capítulo 1, deve-se à seguinte proposição.

Proposição 6.0.9. *Seja $(A,\mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d e $I \subset A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário próprio. Então, $c_0(I,A) = e(I,A)$ e $c_1(I,A) = \ldots = c_d(I,A) = 0$.*

Demonstração: Como $h(i,j) = \ell_{A/\mathfrak{m}}\left(\frac{\mathfrak{m}^i I^j + I^{j+1}}{\mathfrak{m}^{i+1} I^j + I^{j+1}}\right)$,

$$\begin{aligned} h^{(1,0)}(i,j) &= \sum_{u=0}^{i} h(u,j) \\ &= \sum_{u=0}^{i} \ell_{A/\mathfrak{m}}\left(\frac{\mathfrak{m}^u I^j + I^{j+1}}{\mathfrak{m}^{u+1} I^j + I^{j+1}}\right) \\ &= \ell_{A/\mathfrak{m}}\left(\bigoplus_{u=0}^{i} \frac{\mathfrak{m}^u I^j + I^{j+1}}{\mathfrak{m}^{u+1} I^j + I^{j+1}}\right) \\ &= \ell\left(\frac{I^j + I^{j+1}}{\mathfrak{m} I^{i+1} + I^{j+1}}\right) \\ &= \ell\left(\frac{I^j}{\mathfrak{m} I^{i+1} + I^{j+1}}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h^{(1,1)}(i,j) &= \sum_{v=0}^{j} h^{(1,0)}(i,v) \\ &= \sum_{v=0}^{j} \ell\left(\frac{I^v}{\mathfrak{m}^{i+1} I^v + I^{v+1}}\right). \end{aligned}$$

Pelo fato de I ser $\mathfrak{m}$-primário, existe i, tal que

$$m^{i+1} I^v \subseteq I^v,$$

para todo v. Assim,

$$h^{(1,1)}(i,j) = \sum_{v=0}^{j} \ell(I^v/I^{v+1}) = \ell(A/I^j).$$

Então, para i, j suficientemente grande,

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{c_k(I,A)}{(d-k)!d!} j^{d-k} i^k + (\text{termos de menor grau}) = \frac{e(I,A)}{d!} j^d + (\text{termos de menor grau}).$$

Comparando os coeficientes, segue o resultado desejado.

Para finalizar, enuncia-se um resultado onde os números de Segre são obtidos através da sequência de Aquilles-Manaresi. Portanto, do teorema (6.0.9), resulta que esses números são generalizações da multiplicidade de Hilbert-Samuel.

Teorema 6.0.10. *(Ver [2, Teo. 2]) Seja $X \subseteq (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe analítico reduzido de dimensão pura n contendo 0, $I \subseteq \mathscr{O}_{X,0}$ um ideal e $\mathfrak{m} \subset \mathscr{O}_{X,0}$ o ideal maximal. Os números de Segre podem*

ser obtidos por meio das multiplicidades generalizadas de Hilbert-Samuel:

$$e_k(I,X) = c_{n-k}\big(G_{\mathfrak{m}}(G_I(\mathscr{O}_{X,0}))\big), \ \textit{para } k = 1,\ldots,n$$

$$e \quad c_n\big(G_{\mathfrak{m}}(G_I(\mathscr{O}_{X,0}))\big) = 0.$$

Referências Bibliográficas

[1] M. Achilles, R. e Manaresi. *Multiplicities of a bigraded ring and intersection theory*. Math. Ann., **309**(4):573–591, 1997.

[2] R. Achilles and S. Rams. *Intersection numbers, Segre numbers and generalized Samuel multiplicities*. Arch. Math. (Basel), **77**(5):391–398, 2001.

[3] I. G. Atiyah, M. F. e Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[4] C. Ciupercă. *A numerical characterization of the S_2-ification of a Rees algebra*. J. Pure Appl. Algebra, **178**(1):25–48, 2003.

[5] R. Bedregal e V. H. J. Pérez. *Some properties of the multiplicity sequence for arbitrary ideals.* Aceito em Rock Month. J. Math.2008.

[6] D. Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. *With a view toward algebraic geometry.*

[7] J. Eisenbud, D. e Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] W. Fulton. *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. *An introduction to algebraic geometry*, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.

[9] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[10] R. Gaffney, T. e Gassler. *Segre numbers and hypersurface singularities.* J. Algebraic Geom., **8**(4):695–736, 1999.

[11] T. Gaffney and D. Massey. *Trends in equisingularity theory*. In Singularity theory (Liverpool, 1996), volume **263** of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages xix–xx, 207–248. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[12] R. C. Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. III*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. Homological theory.

[13] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[14] D. Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.

[15] S. Kleiman and A. Thorup. *A geometric theory of the Buchsbaum-Rim multiplicity. J. Algebra*, **167**(1):168–231, 1994.

[16] S. Kleiman and A. Thorup. *Mixed Buchsbaum-Rim multiplicities.* Amer. J. Math., **118**(3):529–569, 1996.

[17] S. L. Kleiman. *The transversality of a general translate*. Compositio Math., **28**,287–297, 1974.

[18] E. Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the German by Michael Ackerman, With a preface by David Mumford.

[19] D. B. Massey. *Lê cycles and hypersurface singularities*, volume **1615** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[20] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume **8** of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[21] D. Mumford. *Algebraic geometry. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.

[22] D. Rees. *A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals.* Proc. Cambridge Philos. Soc., **57**,8–17, 1961.

[23] M. Sebastiani. *Introdução à geometria analítica complexa*. Rio de Janeiro, IMPA, 2004.

[24] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.

[25] Lauri e Kekäläinen P. Smith, K. E. e Kahanpää and W. Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

[26] B. Teissier. *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney.* In *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972)*, pages 285–362. Astérisque, Nos. **7** et **8**. Soc. Math. France, Paris, 1973.

[27] B. Teissier. *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney.* In Algebraic geometry (La Rábida, 1981), volume **961** of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–491. Springer, Berlin, 1982.

[28] L. D. Tráng and B. Teissier. *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières.* Ann. of Math. (2), **114**(3):457–491, 1981.

[29] I. Vainsencher. *Equivariant intersection theory and Bott's residue Formula*. SBM, XVI Escola de Algebra, UnB 2000, Rio de Janeiro.

[30] B. L. van der Waerden. *On hilbert's function, series of composition of ideals and a generalisation of the theorem of beuzout.* Proc. Roy. Acad. Amsterdam, **31**,749–770, 1929.

Lista de Notações

A: anel.

I: ideal.

$\sqrt{I}$: ideal radical de I.

$e(M)$: multiplicidade de um A-módulo M.

$e(I,M)$: multiplicidade de Hilbert-Samuel do A-módulo M, com respeito ao ideal I.

$(A,\mathfrak{m})$: anel local A, junto com seu ideal maximal $\mathfrak{m}$.

$G_I(M)$: módulo graduado associado ao A-módulo M, sobre o ideal I.

$G_I(A)$: anel graduado associado ao anel A, sobre o ideal I.

$\chi_M^I(n)$: função de Hilbert-Samuel do A-módulo M, com respeito ao ideal I.

$\ell_A(M)$: comprimento do A-módulo M.

(X,x): germe de um conjunto X em x.

$\mathscr{O}_{n,a}$: anel dos germes de funções em a.

$\mathscr{O}_{X,0}$: anel local do conjunto analítico X em 0.

$\mathscr{F}$: feixe

$\mathscr{F}(U)$: seção do feixe $\mathscr{F}$, sobre o aberto U.

$\mathscr{F}_p$: talo do feixe $\mathscr{F}$.

$f_*\mathscr{F}$: feixe imagem direta de uma função contínua f.

$(X,\mathscr{O}_X)$: espaço anelado (par consistindo do espaço topológico X e o feixe de anéis $\mathscr{O}_X$ sobre X).

$\mathrm{Bl}_I X$: explosão de X, ao longo do ideal I.

$\dim M$: dimensão do A-módulo M.

C_*X: grupo dos ciclos de X.

R_*X: subgrupo de C_*X, gerado pelos ciclos associados a funções racionais de subvariedades de X.

$\mathscr{O}_{V,X}$: anel local de X, ao longo da subvariedade V.

$ord_W(r)$: ordem da função racional r, ao longo da subvariedade W.

$\int z$: grau do ciclo z.

$\mathrm{Spec}(A)$: espectro do anel A.

$\mid D \mid$: suporte do divisor de Cartier D.

f^*D ou $\widetilde{D}$: divisor de Cartier induzido por um morfismo dominante f.

$ord_V D$: ordem do divisor de Cartier D, ao longo de uma subvariedade V.

$L(D)$: fibrado em retas, associado ao divisor D.

$L^{\oplus m}$: potênciais tensoriais.

$L^{\vee}$: dual de L.

f^*L: fibrado produto, ou fibrado induzido por um morfismo f.

$c_1(L)$: operador classe de Chern de um fibrado em retas L.

A_*X: grupo de Chow de X.

$P_k^{\mathbf{g}}(I,Y)$: k-ésima variedade polar do ideal I, sobre o subespaço Y.

$\Lambda_k^{\mathbf{g}}(I,Y)$: k-ésima ciclo Segre do ideal I, sobre o subespaço Y.

$m_k(I,Y)$: k-ésima multiplicidade polar do ideal I, sobre o subespaço Y.

$e_k(I,Y)$: k-ésimo número de Segre do ideal I, sobre o subespaço Y.

$\mathscr{O}_B(1)$: fibrado em retas tautológico, sobre a explosão B.

b_*: imagem inversa do homomorfismo b.

b^*: imagem direta do homomorfismo b.

$c_k(I,A)$: k-ésima multiplicidade generalizada de Hilbert-Samuel.

Índice Remissivo

analítico
conjunto, 11
subconjunto, 11
anel
bigraduado, 57
dos germes de funções, 11
graduado, 1
graduado associado a um anel, 6

Cartier
classe de interseção de um divisor de, 37
divisor de, 31
divisor imagem inversa, 32
Chern
operador de, 36
Chow
grupo de, 28
ciclo
associado, 32
associado à uma função racional, 27
grau de, 29
imagem, 30
Segre, 40, 43
classe de interseção, 36

divisor
excepcional, 23, 39
soma, 31

elemento homogêneo, 2
equação local, 31
espaço
anelado, 19
anelado localmente, 19
espectro, 19
esquema, 20
afim, 20
completo, 29
explosão
ao longo de um ideal, 22
sobre um ponto, 22

fórmula
de projeção, 37
de expansão, 55
de interseção, 51
feixe, 17
das funções regulares, 18
fibrado
em retas, 34
em retas associado, 34
induzido, 35

produto, 35
tautológico, 34
vetorial, 33

germe
analítico, 14
componentes de um, 16
de uma função, 11
dos zeros de um ideal, 13
irredutível, 15
redutível, 15

Hilbert
função de, 4, 7
polinômio de, 6
teorema dos zeros de, 15

hiperplano
geral, 40
de uma explosão, 40
genérico, 50
seções de um, 54

homomorfismo
imagem direta, 28
imagem inversa, 31

ideal
analítico, 14
do germe, 13
maximal graduado, 2
primo associado, 1

isomorfismo
de um espaço anelado, 20
de um feixe, 18

módulo
I-filtração de um, 9
filtração de um, 9
filtração estável de um, 9
graduado, 2
graduado associado a um, 7

morfismo
de espaços anelados localmente, 19
de um espaço anelado, 19
de um esquema, 20
de um feixe, 18
próprio, 20

multiplicidade
de um conjunto analítico, 41
polar, 42
generalizada de Hilbert-Samuel, 59
Hilbert-Samuel, 8
módulo, 6

números de Segre, 42

ordem de uma função racional, 27

suporte
de um ciclo, 26
de um divisor, 31

tipo polinomial, 4

variedades polares, 40, 43