Tipos de homotopia dos grupos de gauge dos fibrados
linhas quaterniônicos sobre esferas

Mario Henrique Andrade Claudio

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 22/04/2008

Assinatura: _____

Tipos de homotopia dos grupos de gauge dos fibrados linhas quaterniônicos sobre esferas¹

Mario Henrique Andrade Claudio

Orientador: *Prof. Dr. Mauro Flavio Spreafico*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências -
Área: Matemática.

USP - São Carlos
Abril/2008

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

*Aos meus pais,
Luiz Antonio e Ursulina,
com carinho...*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me iluminar e me dar força nos momentos mais difíceis, me guiando ao final de mais uma etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Mauro Flavio Spreafico, pela orientação, me ajudando nos momentos em que precisei. Agradeço pela paciência, incentivo e pelo exemplo de profissional que mostrou ser durante esses anos.

Aos meus pais e minhas irmãs, que sempre me incentivaram a buscar novos caminhos e idéias, não me deixando esquecer que o ser humano é um conjunto de seus conhecimentos e das ações que pratica. Obrigado por todo amor que dedicaram a mim. Amo vocês!

A toda minha família, que sempre acreditou em mim e por todo carinho e amizade.

Ao Prof. Oziride Manzoli Neto, pela amizade em todos esses anos de minha vida acadêmica e pelas sugestões no trabalho. Agradeço, também a todos os professores que participaram de minha formação pela amizade e incentivo constante.

Aos meus amigos, que depois de todos esses anos a quantidade é grande para listar todos aqui, mas no coração todos estão bem guardados. Agradeço pela ajuda, vinda em momentos em que vocês nem imaginavam, pelas risadas, pelas conversas e por todos os outros bons momentos que passamos juntos.

Aos funcionários do ICMC e a todos os que colaboraram para a realização deste trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Muito obrigado!

Abstract

Let p be a principal S^3 -bundle over a sphere S^n , with $n \geq 4$. The subject of this work is to calculate the homotopy type of the gauge group $\mathcal{G}_p$ of these bundles p , extending the result determined by A. Kono [25] when $n = 4$. We present explicit formulas for the boundary operator in the homotopy exact sequence associated with the evaluation map $ev : m(S^n, BS^3) \rightarrow BS^3$, translating that problem into calculations involving homotopy groups of sphere. We calculate all the classical cases, namely those that can be dealt with using the information in the book of H. Toda [46], determining the homotopy type of the gauge group of these bundles for each $n \leq 25$.

Resumo

Seja p um S^3 -fibrado principal sobre uma esfera S^n , com $n \geq 4$. O objetivo deste trabalho é calcular os tipos de homotopia do grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ desses fibrados p , estendendo o resultado determinado por A. Kono [25] quando $n = 4$. Apresentamos fórmulas explícitas para o operador bordo na seqüência exata de homotopia associada com a aplicação avaliação $ev : m(S^n, BS^3) \rightarrow BS^3$, traduzindo o problema nos cálculos envolvendo grupos de homotopia de esferas. Calculamos todos os casos clássicos, ou seja, aqueles que podem ser avaliados usando as informações encontradas no livro de H. Toda [46], determinando o tipo de homotopia do grupo de gauge desses fibrados para cada $n \leq 25$.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 O espaço de aplicações contínuas	3
1.2 Fibrações e co-fibrações	6
1.3 Seqüências exatas de homotopia	9
1.4 Alguns lemas	11
2 Fibrados e grupos de gauge	17
2.1 Grupos topológicos e ações	17
2.2 Fibrados	22
2.2.1 Definição global de um fibrado principal	22
2.2.2 Fibrados associados	22
2.2.3 Definição local de fibrados	23
2.2.4 Equivalência de fibrados	25
2.2.5 Seções e trivialidade	26
2.2.6 Fibrado <i>pull back</i> induzido	26
2.2.7 Somando fibrados	27
2.2.8 Exemplos de fibrados	28
2.3 Classificação de homotopia de G -fibrados principais	29
2.4 Grupos de gauge	31
2.4.1 A homotopia do grupo de gauge	35
2.5 O espaço dos laços sobre o espaço classificante de um grupo topológico . .	38
2.6 Apêndice do capítulo 2	42
3 Métodos de composição dos grupos de homotopia de esferas	47
3.1 O produto de Whitehead	48
3.2 A seqüência exata ΣHP	49
3.3 As componentes primárias de $\pi_{2+k}(S^2)$ e $\pi_{3+k}(S^3)$ com $1 \leq k \leq 19$	53
4 Tipo de homotopia dos grupos de gauge dos S^3-fibrados sobre esferas	67
4.1 A imagem do homomorfismo ev_j	69
4.2 Alguns resultados sobre os grupos de homotopia das fibras	75
4.3 Os tipos de homotopia dos grupos de gauge	79

4.3.1	Os casos $5 \leq n \leq 12$, $n = 16, 17, 18, 23, 24, 25$	79
4.3.2	Os casos $n = 14, 19, 20, 22$	84
4.3.3	O caso de S^{13}	87
4.3.4	O caso de S^{21}	119
4.4	Apêndice do capítulo 4	130
Trocando a esfera S^n pelo espaço projetivo quaterniônico		135
Referências Bibliográficas		141
Tabela de símbolos		145
Índice Remissivo		146

Introdução

Dado um G -fibrado principal, $p : P \rightarrow B$, sobre um complexo finito B , onde G é um grupo de Lie compacto, definimos o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ de p como o grupo das aplicações G -eqüivariantes de P cobrindo a identidade. Quando B e G são conexos, um estudo foi feito por M. C. Crabb e W. Sutherland em [9], onde provaram que o número de tipos de homotopia de $\mathcal{G}_p$ é finito. Além disso, resultados explícitos foram dados por A. Kono e H. Hamanaka, que estudaram em uma série de trabalhos o caso em que $B = S^4$ e $G = SU(n)$. Esses fibrados $P_{n,k}$ estão classificados pela classe de Chern $c_2(P_{n,k}) = k$, e foi provado em [25] que $\mathcal{G}_{P_{2,k}} \sim \mathcal{G}_{P_{2,k'}}$ se, e somente se, $(12, k) = (12, k')$ (aqui (m, n) denota o máximo divisor comum entre n e m), e existem seis tipos de homotopia. Foi provado em [14] que $\mathcal{G}_{P_{3,k}} \sim \mathcal{G}_{P_{3,k'}}$ se, e somente se, $(24, k) = (24, k')$. Recentemente, os mesmos autores estudaram o caso $B = S^6$ e $G = SU(3)$. Esses fibrados estão classificados pela classe de Chern $c_3(P_k) = k$, e provaram em [15] que $\mathcal{G}_{P_k} \sim \mathcal{G}_{P_{k'}}$ se, e somente se, $(120, k) = (120, k')$.

Seguindo essa linha de investigação, estudamos o caso dos $SU(2)$ -fibrados principais sobre uma esfera S^n . Nosso objetivo consiste em generalizar o método introduzido em [25] com $n = 4$ para um n maior. Em particular, apresentamos fórmulas explícitas para o operador bordo na seqüência exata de homotopia associada com a aplicação avaliação $ev : m(S^n, BS^3) \rightarrow BS^3$, traduzindo o problema para cálculos envolvendo grupos de homotopia de esferas, e resolvendo até o ponto em que as informações sobre esses grupos estejam disponíveis. Apresentamos o resultado para todos os casos clássicos, ou seja, aqueles que podem ser avaliados usando as informações encontradas no livro de H. Toda [46].

O trabalho será apresentado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos todo o material básico necessário no desenvolvimento do trabalho, recordando rapidamente os seguintes itens: o espaço das aplicações contínuas, *pull back* e *push out*, fibrações e co-fibrações, seqüências exatas de homotopia e alguns lemas sobre equivalência de homotopia.

No Capítulo 2, recordamos as definições (global e local) de fibrados, fibrados principais, fibrados associados, fibrado *pull back* induzido, somando fibrados e também vemos a classificação de homotopia de G -fibrados principais, a definição dos grupos de gauge e sua homotopia, e ainda o espaço dos laços sobre o espaço classificante de um grupo topológico.

No Capítulo 3, fazemos um pequeno resumo dos resultados apresentados no livro de H. Toda [46], vendo a definição de decomposição secundária, a seqüência exata ΣHP e

as componentes primárias dos grupos de homotopia das esferas, S^2 e S^3 em especial, e também uma breve apresentação dos resultados sobre o produto de Whitehead.

Finalmente, no Capítulo 4, calculamos os tipos de homotopia dos grupos de gauge dos fibrados linhas quaterniônicos sobre esferas, iniciando com o cálculo explícito do homomorfismo avaliação ev_j , seguido da seção em que vemos alguns resultados sobre os grupos de homotopia das fibras. Em duas outras seções, temos também os casos de S^{13} e S^{21} , que por não apresentarem o mesmo comportamento dos outros casos, merecem uma atenção especial e são trabalhados com mais detalhes. Fechamos o capítulo com uma proposição reunindo todo os resultados obtidos (com uma tabela contendo os grupos de homotopia dos grupos envolvidos).

Finalizamos o trabalho discutindo a idéia de se considerar o espaço projetivo quaterniônico, HP^2 , ao invés da esfera S^n , como uma proposta de trabalho futuro.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre teoria de homotopia, os quais serão necessários para o desenvolvimento dos resultados dos capítulos posteriores. Uma discussão mais completa desses resultados, incluindo provas e aplicações, pode ser encontrada em várias referências, dentre elas [10], [23],[37] e [47].

1.1 O espaço de aplicações contínuas

Seja Top a categoria dos espaços topológicos e das funções contínuas. Os *objetos* e *morfismos* de tal categoria serão chamados de espaços e aplicações contínuas, respectivamente. Do mesmo modo, Top_0 representa a categoria dos espaços baseados e aplicações contínuas baseadas. Um espaço baseado será denotado junto com seu ponto base como um par, (X, x_0) . Em ambas as categorias, o símbolo $\cong$ denota homeomorfismo.

Dados $X, Y \in Top$, seja $m(X, Y)$ o espaço das funções de todas as aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ com a topologia compacto-aberta. Recordemos que para $X, Y \in Top$, os conjuntos $W_{K,U} = \{f \in m(X, Y) | f(K) \subset U\}$, onde $K \subset X$ é compacto e $U \subset Y$ é aberto, formam uma sub-base para a topologia compacto-aberta de $m(X, Y)$.

Os dois próximos resultados podem ser encontrados em [37].

Teorema 1.1.1. *Seja $X \in Top$ um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, se $m(X, Y)$ possui a topologia compacto-aberta, a função*

$$ev : m(X, Y) \times X \rightarrow Y$$

definida por $ev(f, x) = f(x)$, para todo $x \in X$ e $f \in m(X, Y)$, é contínua.

A função ev acima é chamada *função avaliação*.

Teorema 1.1.2. *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto e $m(X, Y)$ com a topologia compacto-aberta. Para um espaço arbitrário $Z \in Top$, uma função*

$$f : X \times Z \rightarrow Y$$

é contínua se, e somente se, a função

$$\tilde{f} : Z \rightarrow m(X, Y)$$

definida por $\tilde{f}(z)(x) = f(x, z)$, para todo $(x, z) \in X \times Z$, é contínua.

Este último resultado é conhecido como a *Lei exponencial* e dizemos que as aplicações contínuas f e $\tilde{f}$ são *adjuntas* segundo a Lei exponencial.

Agora, se $(X, x_0), (Y, y_0) \in Top_0$, consideremos $m_0(X, Y)$ o espaço de todas as aplicações contínuas $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ com a topologia compacto-aberta.

Um exemplo bastante conhecido de um espaço de funções baseadas é obtido considerando (X, x_0) como a esfera unitária unidimensional S^1 de $\mathbb{R}^2$, com ponto base $e_0 = (0, 1)$. O espaço $m_0(S^1, Y)$ é normalmente denotado por ΩY e é chamando o *espaço dos laços* associado a (Y, y_0) . Podemos ver ΩY como o espaço de todas as aplicações contínuas $\alpha : I \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = y_0$, onde I é o intervalo unitário $[0, 1]$.

Um importante espaço associado aos espaços (X, x_0) e (Y, y_0) é o *produto smash* $X \wedge Y$ definido como segue: considere o espaço $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$, chamado *produto wedge* de X e Y , considerado como um subespaço do produto $X \times Y$, então $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$. Denotamos os pontos de $X \wedge Y$ por $x \wedge y$, com $x \in X$ e $y \in Y$; em particular, $X \wedge Y$ é um espaço baseado com ponto base $x_0 \wedge y_0$. Observemos que no caso $(X, x_0) = (S^1, e_0)$ e (Y, y_0) arbitrário, o espaço $S^1 \wedge Y = \Sigma Y$ é chamado *suspensão* de (Y, y_0) . Podemos utilizar também o intervalo I , ao invés de S^1 , para definir ΣY ; de fato, considere S^1 como o conjunto de todos os números complexos $e^{2\pi it}$, parametrizado por $t \in I$, e estabelecemos um homeomorfismo

$$\Sigma Y \cong (I \times Y)/(I \times \{y_0\} \cup \partial I \times Y)$$

onde $\partial I = \{0, 1\}$. Sempre que considerarmos ΣY desta forma, denotaremos seus elementos por $[t, y]$, entendendo que $[t, y]$ representa a classe de (t, y) módulo $I \times \{y_0\} \cup \partial I \times Y$. O ponto base de ΣY é denotado por $*$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [37]

Teorema 1.1.3. *Para todo $(X, x_0), (Y, y_0) \in Top_0$, existe uma bijeção*

$$\Phi : m_0(\Sigma X, Y) \rightarrow m_0(X, \Omega Y);$$

se X é Hausdorff, então Φ é contínua.

Ainda por [37], para $X, Y, Z \in Top$, temos:

- (i) se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto e Y, Z são espaços arbitrários, então $m(X \times Z, Y) \cong m(Z, m(X, Y))$;
- (ii) se X e Y são espaços de Hausdorff compactos, então $m_0(X \wedge Y, Z) \cong m_0(X, m_0(Y, Z))$;
- (iii) se X, Y, Z são espaços baseados e X é Hausdorff, então $m_0(X, Y \times Z) \cong m_0(X, Y) \times m_0(X, Z)$.

Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são *homotópicas*, notação $f \sim g$, se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$, chamada *homotopia*, tal que $F(x, 0) = f(x)$ e

$F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Homotopia de aplicações é uma relação de equivalência, e denotamos por $Htop$ a categoria cujos objetos são espaços topológicos e morfismos são as classes de equivalência de aplicações homotópicas.

Particionemos agora o conjunto $m(X, Y)$ em classes de equivalência de homotopias chamadas *classes de homotopias livres*. O conjunto de todas essas classes será denotado por $[X, Y]$.

Para o caso de $m_0(X, Y)$ as classes serão definidas pela relação de *homotopia baseada* da seguinte forma: $f, g \in m_0(X, Y)$ são *homotópicas baseadas* se existe uma aplicação contínua

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que, para todo $x \in X, t \in I, H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x)$ e $H(x_0, t) = y_0$. Homotopia baseada é uma relação de equivalência e as classes de equivalência em $m_0(X, Y)$ serão chamadas de *classes de homotopias baseadas*. O conjunto dessas classes será denotado por $[X, Y]_0$.

Por [37] temos

Teorema 1.1.4. *Para todo $(X, x_0), (Y, y_0) \in Top_0$, a função*

$$\Phi : m_0(\Sigma X, Y) \rightarrow m_0(X, \Omega Y)$$

definida no Teorema 1.1.3 induz uma bijeção

$$\bar{\Phi} : [\Sigma X, Y]_0 \rightarrow [X, \Omega Y]_0.$$

Ainda em [37], para todo $(X, x_0), (Y, y_0) \in Top_0$, podemos encontrar:

- (i) $[X, \Omega Y]_0$ é um grupo;
- (ii) $[\Sigma X, Y]_0$ é um grupo;
- (iii) a bijeção $\bar{\Phi}$ é um isomorfismo de grupos.

Consideremos agora o espaço baseado X como sendo a esfera unitária n -dimensional S^n , para $n \geq 0$, e adotemos a notação

$$[S^n, Y]_0 = \pi_n(Y, y_0)$$

para todo $(Y, y_0) \in Top_0$ e todo $n \geq 0$.

Temos que para todo $(Y, y_0) \in Top_0$ e para todo $n \geq 1$, $\pi_n(Y, y_0)$ é um grupo e para todo $n \geq 2$, $\pi_n(Y, y_0)$ é um grupo comutativo.

O grupo $\pi_n(Y, y_0)$ é o n -ésimo grupo de homotopia de (Y, y_0) . O conjunto baseado $[S^0, Y]_0 = \pi_0(Y, y_0)$ é apenas o conjunto de todas as componentes conexas por caminhos de Y . Em alguns casos $\pi_0(Y, y_0)$ tem uma estrutura de grupo, mas não o consideraremos como um grupo de homotopia. Observe que os grupos de homotopia de espaços contráteis e de espaços discretos são todos triviais.

1.2 Fibrações e co-fibrações

Daqui por diante, quando falarmos em aplicações, já estaremos considerando que essas são contínuas. Consideremos agora a notação (E, p, B) para $E, B \in Top$ e $p : E \rightarrow B$ uma aplicação. Os espaços E e B são chamados de *fonte* e *meta* de p , respectivamente.

Dados (Y, g, B) e (A, f, B) , um *pull back* de g e f em Top é definido por $(X, \bar{f}, Y)$ e $(X, \bar{g}, A)$ tais que $g\bar{f} = f\bar{g}$ e satisfazendo:

propriedade universal: dados (Z, h, Y) e (Z, k, A) tais que $gh = fk$, existe uma *única* $\ell : Z \rightarrow X$ tal que $\bar{f}\ell = h$ e $\bar{g}\ell = k$.

Essa situação é descrita pelo seguinte diagrama comutativo:

Assumindo por um momento que os espaços *pull back* existam em Top , então a propriedade universal nos mostra que, para (Y, g, B) e (A, f, B) , o espaço X desse modo criado é único a menos de homeomorfismo. O espaço $X = A_g \square_f Y = \{(a, y) \in A \times Y \mid f(a) = g(y)\}$ é chamado o *espaço pull back*.

Olhando para a noção dual de *pull back*, dados (A, f, B) e (A, g, Y) , um *push out* de f e g em Top , é um par, digamos $(Y, \bar{f}, X)$ e $(B, \bar{g}, X)$ tal que $\bar{f}g = \bar{g}f$ e satisfazendo:

propriedade universal: dados (B, k, Z) e (Y, h, Z) tais que $k\bar{f} = h\bar{g}$, existe uma *única* $\ell : X \rightarrow Z$ tal que $\ell\bar{f} = h$ e $\ell\bar{g} = k$.

Ilustramos a situação no seguinte diagrama comutativo:

A categoria de espaços topológicos e aplicações, possuem *push outs* e o *espaço push out* de f e g é $X = B_g \sqcup_f Y$ (ou qualquer espaço homeomorfo a ele), o qual é o conjunto de todas as classes de equivalência da soma topológica $B \sqcup Y$ segundo a relação de equivalência gerada por

$$b\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists a \in A \mid b = f(a), y = g(a).$$

Temos duas leis de composição interessantes:

- *lei de composição horizontal*: dados $A \subset Y$ fechado, (A, f, B) e (B, g, C) , temos

$$C \sqcup_g (B \sqcup_f Y) \cong C \sqcup_{gf} Y;$$

- *lei de composição vertical*: dados $A \subset Y$ fechado, $Y \subset Y'$ fechado e (A, f, B) , temos

$$(B \sqcup_f Y) \sqcup_{\bar{f}} Y' \cong B \sqcup_f Y'.$$

Agora, para todo $B \in Top$, seja $B^I = m(I, B)$ o espaço de todos os *caminhos* em B . Considere a aplicação avaliação $ev_0 : B^I \rightarrow B$ obtida avaliando cada caminho em B no ponto $0 \in [0, 1]$. Dado (E, p, B) e considerando (B^I, ev_0, B) formamos o espaço *pull back*

$$B^I \sqcap E = B_p^I \sqcap_{ev_0} E.$$

Considere as aplicações $p^I : E^I \rightarrow B^I$ e $e\hat{v}_0 : E^I \rightarrow E$ definidas por $p^I(\lambda) = p\lambda$ e $e\hat{v}_0(\lambda) = \lambda(0)$, para todo $\lambda \in E^I$. Note que $pe\hat{v}_0 = ev_0 p^I$. Então a propriedade universal do *pull back* nos leva a uma única aplicação $\pi : E^I \rightarrow B^I \sqcap E$ tal que $\bar{p}\pi = p^I$ e $e\bar{v}_0\pi = e\hat{v}_0$ e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E^I & & & & \\ & \searrow \pi & & \searrow e\hat{v}_0 & \\ & B^I \sqcap E & \xrightarrow{ev_0} & E & \\ & \downarrow \bar{p} & & \downarrow p & \\ & B^I & \xrightarrow{ev_0} & B & \end{array}$$

Se existe uma aplicação $\Gamma : B^I \sqcap E \rightarrow E^I$ tal que $\pi\Gamma = 1_{B^I \sqcap E}$, dizemos que Γ é uma *função levantamento* de (E, p, B) .

O seguinte resultado pode ser encontrado em [37]:

Teorema 1.2.1. *Dado (E, p, B) com $E, B \in Top$ e p uma aplicação, temos as seguintes equivalências:*

- (1) *Para todo (A, g, E) e toda homotopia $H : A \times I \rightarrow B$ tal que $H(-, 0) = pg$, existe uma homotopia $G : A \times I \rightarrow E$ tal que $G(-, 0) = g$ e $pG = H$;*
- (2) *para todo (D, q, A) , todo par de aplicações (g, h) para o qual temos o diagrama comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

e toda homotopia $H : A \times I \rightarrow B$ de h existe uma homotopia $G : D \times I \rightarrow E$ de g tal que $pG = H(q \times 1_I)$;

(3) existe uma função levantamento Γ para (E, p, B) .

Se (E, p, B) satisfaz as condições equivalentes do teorema acima, dizemos que é uma *fibração*. Sendo (E, p, B) uma fibração, dado $b \in B$, o subespaço $p^{-1}(b) = E_b$ de E é a *fibra* de p sobre b .

Temos também em [37] os seguintes resultados:

Teorema 1.2.2. *Seja (E, p, B) uma fibração com B conexo por caminhos. Então todas as fibras de p têm o mesmo tipo de homotopia e p é sobrejetiva.*

Teorema 1.2.3. *Toda aplicação $f : X \rightarrow Y$ pode ser fatorada como uma equivalência de homotopia seguida por uma fibração.*

Consideremos agora um espaço $X \in Top$ e um subespaço $A \subset X$, dizemos que A é um *retrato de deformação forte* de X se existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(x, 0) = x, x \in X$$

$$H(x, 1) \in A, x \in X$$

$$H(a, t) = a, (a, t) \in A \times I.$$

A homotopia H é um *retrato de deformação forte* de X sobre A . A aplicação $r = H(-, 1) : X \rightarrow A$ é uma *retração* e A é um *retrato* de X . Assim, um retrato A de X com retração $r : X \rightarrow A$ é um retrato de deformação forte de X se

$$X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i} X$$

é A -homotópico relativo a 1_X .

Por [37] temos:

Teorema 1.2.4. *Seja A um subespaço fechado de X . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *para quaisquer duas aplicações $f : X \times \{0\} \rightarrow Z$ e $G : A \times I \rightarrow Z$ a qual coincide quando restrita a $A \times \{0\}$ existe uma aplicação $F : X \times I \rightarrow Z$ tal que F restrita a $X \times \{0\}$ é f e F restrita a $A \times I$ é G ;*
- (2) *o espaço $\hat{X} = X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato de $X \times I$;*
- (3) *$\hat{X}$ é um retrato de deformação forte de $X \times I$.*

Dizemos que (A, i, X) , com $A \subset X$ fechado e i a aplicação inclusão, é uma *co-fibração* se satisfaz qualquer uma das condições equivalentes do teorema anterior.

Um exemplo de co-fibração bastante conhecido é (Y, i, CY) , onde $(Y, y_0) \in Top_0$ e $CY = (I \times Y)/(I \times \{y_0\} \cup \{0\} \times Y)$ é o *cone* de (Y, y_0) . O cone CY está intimamente relacionado a suspensão de Y : de fato, $\Sigma Y = CY/Y$.

A co-fibração (Y, i, CY) dá origem a uma outra importante cofibração, dessa vez relacionada a uma aplicação baseada $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$; estamos nos referindo a *co-fibração mapping cone* da aplicação baseada f :

$$(Z, \bar{i}, Z \sqcup_f CY).$$

O espaço $Z \sqcup_f CY$ é conhecido como *mapping cone* da aplicação f e é denotado por C_f .

Teorema 1.2.5. *Toda aplicação $f : A \rightarrow B$ pode ser fatorada como uma co-fibração seguida por uma equivalência de homotopia.*

Temos, também, por [23] pág. 184:

Proposição 1.2.6. *Seja $u : A \rightarrow X$ uma co-fibração fechada, onde X é um espaço regular localmente compacto. Então*

$$u^* : m(X, E) \rightarrow m(A, E)$$

é uma fibração para todos os espaços E .

1.3 Seqüências exatas de homotopia

Começemos relembando o caso co-variante. Para uma aplicação $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ temos que (PZ, ev_1, Z) é uma fibração, onde $PZ = m_0(I, B)$ é o *espaço dos caminhos baseados* e ev_1 é a aplicação avaliação no valor 1. Sua fibra sobre z_0 é o espaço dos laços ΩZ (laço baseados em z_0). Consideremos agora o espaço *pull back* $L_f = Y \sqcap PZ$ de ev_1 e f ; $(L_f, e\bar{v}_1, Y)$ é também uma fibração e sua fibra sobre y_0 é ΩZ . Desse modo obtemos uma seqüência de espaços topológicos e aplicações

$$\Omega Z \xrightarrow{j} L_f \xrightarrow{e\bar{v}_1} Y \xrightarrow{f} Z$$

na qual j é a inclusão de ΩZ em L_f . Na verdade, por iterações dessas aplicações obtemos uma seqüência de espaços e aplicações a qual se estende indefinidamente à esquerda:

$$\cdots \xrightarrow{\Omega^{n+1}f} \Omega^{n+1}Z \xrightarrow{\Omega^n j} \Omega^n L_f \xrightarrow{\Omega^n e\bar{v}_1} \Omega^n Y \xrightarrow{\Omega^n f} \cdots$$

$$\Omega^n Z \xrightarrow{\Omega^{n-1}j} \cdots \xrightarrow{j} L_f \xrightarrow{e\bar{v}_1} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Esta é a *seqüência exata longa de espaços e aplicações* associada à f .

Por [37] temos os seguintes resultados:

Teorema 1.3.1. *Para todo $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) \in Top_0$ e toda aplicação $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, a seqüência de conjuntos baseados e grupos*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\Omega^{n+1}f} [X, \Omega^{n+1}Z]_0 &\xrightarrow{\Omega^n j_*} [X, \Omega^n L_f]_0 \xrightarrow{\Omega^n e\bar{v}_1*} [X, \Omega^n Y]_0 \xrightarrow{\Omega^n f_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{j_*} [X, L_f]_0 &\xrightarrow{e\bar{v}_1*} [X, Y]_0 \xrightarrow{f_*} [X, Z]_0 \end{aligned}$$

induzida pela seqüência exata longa de espaços e aplicações associada à f , é exata.

Lema 1.3.2. *Seja (E, p, B) uma fibração com fibra F sobre $b_0 \in B$. Então os espaços L_p e F têm o mesmo tipo de homotopia.*

Teorema 1.3.3. *Sejam (E, p, B) uma fibração com fibra F sobre $b_0 \in B$ e $e_0 \in F$ visto como ponto-base para F e E . Então, para todo $(X, x_0) \in Top_0$, a seguinte seqüência de conjuntos baseados e grupos é exata:*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\Omega^{n+1}p_*} [X, \Omega^{n+1}B]_0 &\xrightarrow{\Omega^n j_*} [X, \Omega^n F]_0 \xrightarrow{\Omega^n i_*} [X, \Omega^n E]_0 \xrightarrow{\Omega^n p_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{j_*} [X, F]_0 &\xrightarrow{i_*} [X, E]_0 \xrightarrow{p_*} [X, B]_0. \end{aligned}$$

Agora especificamos (X, x_0) como sendo a 0-esfera unitária baseada (S^0, e_0) . Recordemos que $\pi_0(Y, y_0)$ é o conjunto de todas as componentes conexas por caminhos de Y . Então pelo teorema anterior temos o seguinte:

Teorema 1.3.4. *Sejam (E, p, B) uma fibração com fibra $F = p^{-1}(b_0)$ e $e_0 \in F$ o ponto base para F e E . Então, a seguinte seqüência de conjuntos baseados e grupos*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{p_*(n+1)} \pi_{n+1}(B, b_0) &\xrightarrow{j_*(n)} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*(n)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*(n)} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{j_*(0)} \pi_0(F, e_0) &\xrightarrow{i_*(0)} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*(0)} \pi_0(B, b_0). \end{aligned}$$

é exata.

Para o caso contravariante, seja $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ uma aplicação que preserva ponto base e seja $(Z, \bar{i}, C_f)$ sua co-fibração *mapping cone*. Agora considere a aplicação constante $c_{z_0} : Z \rightarrow \{z_0\}$ e, usando a lei de composição horizontal e a relação entre ΣY e CY , temos:

$$\{z_0\} \sqcup_{c_{z_0}} C_f \cong \{z_0\} \sqcup_{c_{z_0}f} CY \cong \Sigma Y.$$

Então construímos uma seqüência infinita de espaços e aplicações por sucessivas iterações:

$$Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{\bar{i}} C_f \xrightarrow{c_{z_0}} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Z \xrightarrow{\Sigma \bar{i}} \cdots$$

Fixado $(X, x_0) \in Top_0$, a aplicação baseada f induz uma função que preserva ponto-base

$$f^* : [Z, X]_0 \rightarrow [Y, X]_0$$

e um homomorfismo de grupos

$$\Sigma f^* : [\Sigma Z, X]_0 \rightarrow [\Sigma Y, X]_0.$$

Teorema 1.3.5. *Para todo $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) \in Top_0$ e toda aplicação $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, a seqüência de conjuntos baseados e grupos*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\Sigma^{n+1}f^*} [\Sigma^{n+1}Y, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n c_{z_0}^*} [\Sigma^n C_f, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n \bar{i}^*} [\Sigma^n Z, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n f^*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{c_{z_0}^*} [C_f, X]_0 \xrightarrow{\bar{i}^*} [Z, X]_0 \xrightarrow{f^*} [Y, X]_0 \end{aligned}$$

é exata.

Lema 1.3.6. *Seja (Y, j, Z) uma co-fibração, então os espaços C_j e Z/Y têm o mesmo tipo de homotopia.*

Deste último lema, e para manter uma coerência entre os resultados nos conceitos duais de fibração e co-fibração, dado (Y, i, Z) uma cofibração, o espaço quociente Z/Y será chamado de *co-fibra* de (Y, i, Z) . Temos também o seguinte resultado:

Teorema 1.3.7. *Sejam $(X, x_0) \in Top_0$ e (Y, j, Z) uma co-fibração. Para todo ponto base $y_0 \in Y \subset Z$, a seqüência de conjuntos baseados e grupos*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\Sigma^{n+1}j^*} [\Sigma^{n+1}Y, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n c_{y_0}^*} [\Sigma^n Z/Y, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n \bar{i}^*} [\Sigma^n Z, X]_0 \xrightarrow{\Sigma^n j^*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{c_{y_0}^*} [Z/Y, X]_0 \xrightarrow{\bar{i}^*} [Z, X]_0 \xrightarrow{j^*} [Y, X]_0 \end{aligned}$$

é exata.

Chamamos a seqüência do Teorema 1.3.7 de *seqüência exata da co-fibração (Y, j, Z)* .

1.4 Alguns lemas

Todos os espaços considerados no que segue serão conexos por caminhos e com ponto-base se o contrário não for especificado.

Recordemos que a *fibração mapping track* ou *fibração mapping path* associada a uma aplicação dada $f : X \rightarrow Y$, é a fibração $p_f : P_f = X \cap_{\epsilon_0} Y^I \rightarrow Y$ definida como a diagonal de um diagrama *pull back*

$$\begin{array}{ccc}
P_f = X \sqcap_{\epsilon_0} Y^I & \xrightarrow{\bar{f}} & Y^I \\
\downarrow \bar{\epsilon}_0 & \searrow p_f & \downarrow \epsilon_0 \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

por $p_f(x, \lambda) = \lambda(1)$ [37] pág. 45, no qual o espaço $P_f = X \sqcap_{\epsilon_0} Y^I$ é chamado *mapping track* de f ou *espaço mapping path* [10] 6.17.

Lema 1.4.1. *A aplicação $\bar{\epsilon}_0$ é uma equivalência de homotopia de X e P_f com inversa $s : X \rightarrow P_f$, $s : x \mapsto (x, c_{f(x)})$ sobre Y , isto é, tal que $p_f s = f$.*

Demonstração: [37] 2.2.7, [10] 6.18. ■

A fibra de p_f , $F_f = p_f^{-1}(y_0)$ é chamada a *fibra de homotopia* de f . Uma caracterização desse espaço será dada no Lema 1.4.3 mais a frente.

Lema 1.4.2. *Se f é uma fibração com fibra F , a equivalência de homotopia s é uma equivalência de fibra de homotopia, isto é, $F \sim F_f$.*

Demonstração: [10] 6.18. ■

A prova do próximo lema pode ser feita de um modo alternativo, como em [10] 6.39, 6.40, usando diretamente a construção do *mapping track*. Seguimos aqui o caminho escolhido por [37].

Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação baseada. Considere f uma fibração com fibra $F = f^{-1}(y_0)$ sobre o ponto base y_0 e inclusão $i : F \rightarrow X$. Seja PY o espaço dos caminhos baseados $\{\lambda \in Y^I : \lambda(0) = y_0\}$. O espaço *pull back* $L_f = X \sqcap PY$ definido pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc}
L_f = X \sqcap PY & \xrightarrow{\bar{f}} & PY \\
\downarrow \bar{\epsilon}_1 & & \downarrow ev_1 \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

será chamado *espaço baseado mapping track* de f e é o espaço total da fibração $\bar{ev}_1 : L_f \rightarrow X$, cuja fibra sobre x_0 pode ser facilmente reconhecida como o espaço dos laços baseados em y_0 , isto é, $\bar{ev}_1^{-1}(x_0) = \Omega Y$ (isso é verdade apenas se a aplicação f for baseada!) [37] 2.2.2. Também, como f é uma fibração, por [37] 3.1.3, a aplicação $h : F \rightarrow L_f$, $h : x \mapsto (x, c_{y_0})$ é uma equivalência de homotopia e $F \sim L_f$.

Lema 1.4.3. *A fibra do mapping track é o espaço baseado mapping track (a menos de homotopia).*

Demonstração:

$$\begin{aligned} p_f^{-1}(y_0) &= \{(x, \lambda) \in X \sqcap_{ev_0} Y^I : \lambda(1) = y_0\} = \\ &= \{(x, \lambda) \in X \times Y^I : \lambda(0) = y_0, \lambda(1) = f(x)\} = X \sqcap PY = L_f. \end{aligned}$$

■

E mais, consideremos novamente a construção do espaço baseado *mapping track* para a aplicação $\bar{e}v_1$. Obtemos o espaço baseado *mapping track* $L_{\bar{e}v_1}$ com a aplicação $\bar{e}_1$ definida pelo diagrama *pull back*

$$\begin{array}{ccc} L_{\bar{e}v_1} = L_f \sqcap PX & \longrightarrow & PX \\ \downarrow \bar{e}_1 & & \downarrow e_1 \\ L_f & \xrightarrow{\bar{e}v_1} & X \end{array}$$

Por [37] 2.2.2, $\bar{e}_1$ é uma fibração e procedendo como acima, sua fibra sobre o ponto base $\bar{e}_1^{-1}(c_{x_0}) = \Omega X$ (onde os laços em X são baseados em x_0). Também, como $\bar{e}v_1$ é na verdade uma fibração com fibra ΩY , a aplicação $g : \Omega Y \rightarrow L_{\bar{e}v_1}$, $g : \lambda \mapsto ((x_0, \lambda), c_{x_0})$, é uma equivalência de homotopia, isto é, $L_{\bar{e}v_1} \sim \Omega Y$ por [37] 3.13.

Podemos resumir essa construção no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & F & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow h & & \nearrow \bar{e}v_1 & & \\ & & L_f & & & & \\ \Omega Y & \xrightarrow{j} & L_f & & & & \\ \uparrow \Omega f & & \downarrow g & & \nearrow \bar{e}_1 & & \\ \Omega X & \xrightarrow{k} & L_{\bar{e}v_1} & & & & \end{array}$$

no qual $j : \Omega Y \rightarrow L_f$, $j : \beta \mapsto (x_0, \beta)$, e $k : \Omega X \rightarrow L_{\bar{e}_1}$, $k : \alpha \mapsto ((x_0, c_{y_0}), \alpha)$ são as inclusões de fibras, e temos que os dois triângulos da direita comutam, $\bar{e}_1 g = j$ e $\bar{e}_1 h = i$. Ainda, podemos provar que o triângulo da esquerda é também comutativo a menos de homotopia, ou seja, $g\Omega f \sim k$. Fazemos isso usando a seguinte homotopia

$$H : \Omega X \times I \rightarrow L_{\bar{e}_1},$$

$$H : (\alpha, s) \mapsto ((x_0, f\alpha(st)), \alpha(1 + st - t)).$$

De fato, a imagem do ponto base está no caminho $\gamma_s(t) = ((x_0, f\alpha(st)), \alpha(1 + ts - t))$ que sempre pertence a $L_{\bar{e}_1}$ já que, no ponto inicial $t = 0$, $\gamma_s(0) = ((x_0, c_{y_0}), c_{x_0})$, no ponto final $t = 1$, $\gamma_s(1) = ((x_0, f\alpha(s)), \alpha(s))$. Também,

$$H(\alpha, 1)(t) = ((x_0, f\alpha(t)), c_{x_0}) = g\Omega f,$$

$$H(\alpha, 0)(t) = ((x_0, c_{y_0}), \alpha^{-1}(t)) = k\beta,$$

sendo $\beta : \Omega X \rightarrow \Omega X$ o laço inverso $\beta : \alpha \mapsto \alpha^{-1}$ e é uma auto-equivalência de homotopia. Assim, $g\Omega f \sim_H k\beta \sim k$.

Provamos o seguinte lema [10] 6.40, [37] 3.1.

Lema 1.4.4. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma fibração com fibra F . Então quaisquer duas aplicações consecutivas na seqüência*

$$\cdots \longrightarrow \Omega F \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \longrightarrow F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

têm o tipo de homotopia de uma fibração precedida pela inclusão de sua fibra.

Veja [47] pág. 166 para as definições de simplicidade e prova do seguinte lema:

Lema 1.4.5. *Seja Y um espaço simples. Então, cada auto-equivalência de homotopia s de Y pode ser considerada baseada (como uma aplicação, já que Y é conexo por caminhos) e baseada como homotopia, ou seja, as homotopias $ss^{-1} \sim 1 \sim s^{-1}s$ preservam ponto-base.*

Lema 1.4.6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $\sigma : Y \rightarrow Y$ uma auto-equivalência de homotopia baseada com inversa τ . Então, as fibras de homotopia F_f e $F_{\sigma f}$ são equivalentemente homotópicas.*

Demonstração: Pela construção $P_f \sim P_{\sigma f}$, já que são ambos homotópicos a X . Mais precisamente, uma equivalência de homotopia é $s'\bar{e}_0$, com inversa $s\bar{e}'_0$, veja Lema 1.4.1. Mas isso pode não preservar fibra em geral, pois f não é uma fibração, veja Lema 1.4.2. Explicitemos a prova. Recordemos que $F_f = L_f$, Lema 1.4.3. Considere as aplicações

$$\sigma' : L_f \rightarrow L_{\sigma f},$$

$$\sigma' : (x, \lambda) \mapsto (x, \sigma\lambda),$$

que é bem definida, já que $\sigma f(x) = \sigma\lambda(1)$, e

$$\tau' : L_{\sigma f} \rightarrow L_{\tau\sigma f},$$

$$\tau' : (x, \lambda) \mapsto (x, \tau\lambda),$$

que, analogamente, é bem definida. E a aplicação

$$h : L_{\tau\sigma f} \rightarrow L_f,$$

$$h : (x, \lambda) \mapsto (x, \lambda + \mu_{f(x)}),$$

em que

$$\mu_{f(x)}(t) = H(f(x), t),$$

com $H : Y \times I \rightarrow Y$ sendo a homotopia baseada tal que $H(y, 0) = \tau\sigma(y)$, $H(y, 1) = y$, $H(y_0, t) = y_0$.

Observe que $\mu_{f(x)}(0) = \tau\sigma f(x) = \lambda(1)$, e assim o caminho pode ser adicionado. Também, $\lambda(0) = y_0$ e $\mu_{f(x)}(1) = f(x)$, e assim h está bem definida. Mostramos que $h\tau'$ é uma inversa à esquerda de σ' , isto é, $h\tau'\sigma' \sim 1_{L_f}$, pela homotopia

$$G : L_f \times I \rightarrow L_f,$$

$$G((x, \lambda), s)(t) = \begin{cases} (x, H(\lambda(\frac{2s}{1+t}), t)), & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ (x, \mu_{f(x)}(\frac{2s}{1+t} - 1 + \frac{2ts}{1+t})), & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Podemos verificar que G está bem definida e obter a equivalência de homotopia necessária. ■

Fibrados e grupos de gauge

O principal objetivo deste capítulo é apresentar a definição de um fibrado e de seu grupo de gauge e mostrar as principais propriedades desses objetos. Para esse propósito, introduziremos primeiro alguns fatos gerais sobre propriedades algébricas e topológicas de grupos contínuos e suas ações sobre espaços. Mais detalhes sobre as categorias que aparecem no texto, ver Apêndice no final do capítulo.

2.1 Grupos topológicos e ações

Definição 2.1.1. Dizemos que um espaço topológico G é um grupo topológico com multiplicação $\tau : G \times G \rightarrow G$ se τ satisfaz as propriedades da lei multiplicativa de um grupo abstrato e a função $(g, h) \mapsto \tau(g, h^{-1})$ é contínua.

Explicitamente, isso significa que G é um grupo abstrato com multiplicação

$$\tau : G \times G \rightarrow G$$

$$\tau : (g, h) \rightarrow gh := \tau(g, h),$$

satisfazendo as propriedades de grupo

- associativa: $g(hk) = (gh)k$,
- unidade: $\exists u \in G | gu = ug = g$,
- inverso: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G | g^{-1}g = gg^{-1} = u$,

que G é um espaço topológico (na categoria oportuna), e mais, a função τ é uma função contínua, e também a função inversa que envia g em g^{-1} .

Definição 2.1.2. Um grupo topológico G age à direita de um espaço X se existe uma aplicação, chamada ação à direita, $\phi : X \times G \rightarrow X$ tal que $\phi(\phi \times 1_G) = \phi(1_X \times \tau)$ e, para todo $x \in X$, $\phi(x, u) = x$.

Explicitamente

$$\phi : X \times G \rightarrow X,$$

$$\phi : (x, g) \mapsto xg = \phi(x, g),$$

e

$$\phi(x, gh) = \phi(\phi(x, g), h), \phi(x, u) = x.$$

Ações à esquerda são definidas simetricamente. Em particular, note que $(x, g) \mapsto xg$ é uma ação à direita e $(g, x) \mapsto xg^{-1}$ é uma ação à esquerda.

Sob essas condições, o par (X, ϕ) é chamado um G -espaço à direita/esquerda (também *grupo de transformação*).

A *translação à direita por g* , $R_g : X \rightarrow X, x \mapsto xg$, é um homeomorfismo de X com inversa $R_{g^{-1}}$. A aplicação $g \mapsto R_g$ é um homomorfismo de G em $\text{Homeo}(X)$, o grupo dos homeomorfismos de X .

Definição 2.1.3. A ação ϕ de um grupo G sobre um espaço X é chamada efetiva se o núcleo de $g \mapsto L_g$ é trivial, e livre se $xg = x$ implica $g = u$.

Exemplo 2.1.4. Seja H um subgrupo de G . O grupo multiplicação $G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ é uma ação livre à direita de H sobre G . Existe uma ação à esquerda similar. Também a ação adjunta $ad : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto h^{-1}gh$ é uma importante ação à direita de G sobre o próprio G . O espaço é usualmente denotado por $Ad(G)$.

A ação de G sobre um G -espaço X determina uma relação de equivalência R sobre $X : xRx'$ se, e somente se, existe um $g \in G$ tal que $x' = xg$, o qual é consistente com a ação no sentido que, para todo $g \in G$, xRx' implica $(xg)R(x'g)$. Observemos que $k(\text{Top})$ é a categoria dos espaços cujos subconjuntos compactamente fechados são fechados, chamados k -espaços (ver mais detalhes no Apêndice) e recorde que, dada uma relação de equivalência R sobre $X \in k(\text{Top})$, já que X/R tem a topologia final induzida pela aplicação quociente $p : X \rightarrow X/R$, então $X/R \in k(\text{Top})$ ([13] pág. 242). Isso não é totalmente verdade em $WHk(\text{Top})$, categoria dos k -espaços Hausdorff fraco, como vemos no seguinte resultado:

Lema 2.1.5. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma proclusão em $k(\text{Top})$. Se X é Hausdorff fraco, então Y é Hausdorff fraco se, e somente se, $(f \times f)^{-1}\Delta_Y$ é fechado em $X \times X$.

A classe de equivalência de $x \in X$ é chamada a *órbita* xG por x .

Definição 2.1.6. O k -espaço quociente X/R , também denotado por X/G , é chamado espaço das órbitas. A aplicação quociente é chamada *projeção canônica* e denotada por $p_X : X \rightarrow X/G, p_X : x \mapsto xG$.

Uma ação de G sobre X é chamada *transitiva* se X/G consiste de uma única órbita.

Exemplo 2.1.7. O espaço das órbitas da ação à direita $G \times H \rightarrow G$ do Exemplo 2.1.4 é G/H , o espaço das classes laterais à direita gH . A função

$$\begin{aligned} G \times G/H &\rightarrow G/H, \\ (g, kH) &\mapsto gkH \end{aligned}$$

é contínua e, logo, a G -ação à esquerda sobre G/H . Qualquer G -espaço G/H com essa ação é chamado um *espaço homogêneo*.

Para cada $x \in X$, o conjunto $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ é um subgrupo de G , o qual é chamado de *grupo de isotropia de x em X* .

Definição 2.1.8. *Suponha que X e Y sejam G espaços. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada G -equivariante ou uma G -aplicação se $f(xg) = f(x)g$ para todo $x \in X, g \in G$.*

Uma G -aplicação $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação quociente entre espaços de órbitas, o que pode ser representado pelo seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p_X \downarrow & & \downarrow p_Y \\ X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G \end{array}$$

no qual as aplicações verticais são as aplicações quocientes da Definição 2.1.6.

A categoria de G -espaços e G -aplicações é denotada por Top_G . Os isomorfismos nessa categoria são chamados G -homeomorfismos.

Definição 2.1.9. *Seja $\phi : X \times G \rightarrow X$ uma ação livre. Considere $X^* = \{(x, xg) \mid x \in X, g \in G\}$ (como um subespaço de $X \times X$) e defina a função*

$$\tau_X : X^* \rightarrow G,$$

$$\tau_X : (x, xg) \mapsto g.$$

Chamamos τ_X a função translação do G -espaço X .

A função translação satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\tau(x, x) = u_G$;
- (2) $\tau(x, x')\tau(x', x) = u_G$;
- (3) $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$;
- (4) $x\tau(x, x') = x'$.

A G -ação é chamada *principal* se τ é uma função contínua. Devemos também dizer que um G -espaço livre com uma ação principal é um G -espaço *principal*.

Ação principal é um tópico fundamental na definição de fibrados principais.

Exemplo 2.1.10. Considere $\mathbb{Z}/2$ agindo sobre S^n como no Exemplo 2.1.18 mais a frente. Então, $(S^n)^*$ é o subespaço de $(x, \pm x) \in S^n \times S^n$ e a função translação é $\tau(x, \pm x) = \pm 1$, a qual é contínua.

Relembremos que uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é *própria* se, para cada espaço Z , a aplicação $f \times 1 : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ é fechada. Uma G -ação sobre um espaço X é *própria* se a aplicação $\theta : X \times G \rightarrow X \times X, \theta : (x, g) \mapsto (x, xg)$ é uma aplicação própria.

Proposição 2.1.11. *Considere G agindo livremente sobre X . Então τ_X é contínua se, e somente se, a ação de G é própria.*

A seguinte proposição é bastante usada quando tratamos de equivalências de fibrados.

Proposição 2.1.12. *Sejam X e Y G -espaços livres, $f : X \rightarrow Y$ uma G -aplicação e considere o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G \end{array}$$

onde $f/G : X/G \rightarrow Y/G$ é um homeomorfismo e p e q são as aplicações quocientes (p_X e p_Y). Suponha que τ_Y seja contínua. Então f é um G -homeomorfismo.

Demonstração: Como f/G é homeomorfismo então f é bijetiva sobre as órbitas. Vejamos que é bijetiva sobre as fibras.

Para verificarmos que é injetiva sobre a fibra de x , considere x e x' nesta fibra tal que $f(x) = f(x')$. Temos $x' = xg$ e então $f(x) = f(x') = f(xg) = f(x)g$. Como a ação é livre, $g = u$, isto é, $x = x'$.

Vejamos que é sobrejetiva sobre a fibra de $y \in Y$. Como f/G é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f/G(p(x)) = q(y)$, isto é, pela comutatividade $q(f(x)) = q(y)$, ou seja, y e $f(x)$ estão na mesma fibra, logo $f(x) = yg$ ou $f(x)g^{-1} = y$ ou $f(xg^{-1}) = y$ para algum $g \in G$. Assim, f é uma bijeção contínua.

Resta mostrar que a função inversa é contínua: sejam $f(x) = y$, U uma vizinhança aberta de x e escolha vizinhanças abertas V de x e N de u tal que $VN \subset U$. Como τ_Y é contínua, existe uma vizinhança aberta W de y tal que $\tau_Y((W \times W) \cap Y^*) \subset N$. Já que f é contínua, $V_1 = V \cap f^{-1}(W)$ é uma vizinhança aberta de x e $f(V_1) \subset W$. O conjunto $p(V_1)$ é uma vizinhança aberta de $p(x)$ pois p é uma aplicação aberta. Seja $W_1 = W \cap q^{-1}(p(V_1))$. Então W_1 é uma vizinhança aberta de y e $q(W_1) = p(V_1)$, $f(V_1) \subset W_1$. Para $z \in W_1$, escolha $u \in V_1$ tal que $q(z) = p(u)$. Então, $f(u) \in W$ e $z \in W$. Qualquer $g \in G$ com $f(u)g = z$ está contido em N e logo $z = f(u)g = f(ug)$ com $f^{-1}(z) = ug \in V_1N \subset U$. Consequentemente, $f^{-1}(W_1) \subset U$ e assim mostramos a continuidade de f^{-1} em z . ■

Definição 2.1.13. *Um G -espaço X é chamado localmente trivial se cada ponto xG do espaço de órbita X/G tem uma vizinhança aberta V tal que $p^{-1}(V)$ é G -homeomorfa a $V \times G$ (onde $p : X \rightarrow X/G$ é a projeção canônica da Definição 2.1.6).*

No próximo lema veremos uma propriedade fundamental de espaços com uma G -aplicação tomando valores em G , bastante usada em trivialidade local de espaço homogêneos (ou trivialidade de fibrados).

Lema 2.1.14. *Seja X um G -espaço e seja $f : X \rightarrow G$ uma G -aplicação. Então $X \cong f^{-1}(u) \times G$.*

Demonstração: Defina $\phi : f^{-1}(u) \times G \rightarrow X$ como $(x, g) \mapsto xg$. É imediato verificar $f\phi = pr_2$, a projeção natural $f^{-1}(u) \times G \rightarrow G$, e que ϕ é bijetiva. Além do mais, a aplicação $\psi : X \rightarrow f^{-1}(u) \times G, x \mapsto (x(f(x))^{-1}, f(x))$ é uma inversa contínua de ϕ . ■

Corolário 2.1.15. *Se X é um G -espaço livre e $f : X \rightarrow G$ é uma G -aplicação, então $X \cong X/G \times G$.*

Note que o Lema 2.1.5 implica a seguinte relação de separabilidade em Top (fraca separabilidade em $k(Top)$) do espaço de órbitas e do fecho de $X^* : X/G$ é Hausdorff se, e somente se, X^* é fechado em $X \times_c X$.

Como uma aplicação do lema 2.1.14, apresentamos uma condição suficiente para trivialidade local de um G -espaço principal.

Proposição 2.1.16. *Seja X um G -espaço principal com uma G -ação $\phi : X \times G \rightarrow X$. Suponha que exista um ponto $x_0 \in X$ tal que (X, x_0G) é uma G -co-fibração fechada. Então, a aplicação quociente $q : X \rightarrow X/G$ é localmente trivial.*

Demonstração: Seja $\tau : X^* \rightarrow G$ a aplicação translação definida por ϕ . Para todo $x \in X$, considere a restrição de τ ao subespaço $\{(x, xg) | g \in G\} \subset X^*$ a qual é um G -homeomorfismo com G ; então xG e x_0G são G -homeomorfos como subespaços de X e então (X, xG) é uma G -co-fibração fechada. Seja $u_x : X \rightarrow I$ e $h_x : X \times I \rightarrow X$ as aplicações que definem (X, xG) como um G -NDR. Considere a G -aplicação $f : U_x \rightarrow G$ definida por $f(x) = h(x, 1)$ para todo $x \in U_x$. Corolário 2.1.15 nos mostra que U_x é G -homeomorfo a $U_x/G \times G$. ■

Essa proposição tem uma importante consequência: Seja H um subgrupo fechado de $G \in TopGr$. Se (G, H) é uma G -co-fibração fechada, então $q : G \rightarrow G/H$ é localmente trivial. Esse é o caso de um subgrupo fechado de um grupo de Lie (grupos de Lie são CW-complexos, veja [28]).

Trivialidade local e ações triviais estão, de fato, estritamente relacionadas:

Proposição 2.1.17. *Seja X um G -espaço livre. Suponha que X seja localmente trivial. Então τ_X é contínua.*

Demonstração: Seja U uma vizinhança G -equivariante de $x \in X$ a qual admite uma trivialização $\psi : V \times G \rightarrow U$. A pré-imagem de $(U \times U) \cap X^*$ segundo $\psi \times \psi$ é $\{(v, g, v, h) | v \in V, g, h \in G\}$ e $\tau_X(\psi \times \psi)$ é a aplicação $(v, g, v, h) \mapsto g^{-1}h$, que é contínua. ■

Exemplo 2.1.18. Espaço projetivo real. Seja $\mathbb{Z}/2$ o conjunto com dois elementos $\{0, 1\}$ e a multiplicação de grupo: $0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$. Esse é um grupo abeliano topológico com a topologia discreta (ele pode ser descrito também multiplicativamente pelo conjunto $\{\pm 1\}$). Considere $\mathbb{Z}/2$ agindo sobre $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ por

$$(z, x_0, \dots, x_n) \mapsto (-1)^z(x_0, \dots, x_n),$$

(a ação antipodal). Então o espaço de órbitas dessa ação livre é chamado espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ de dimensão n . Conceitualmente, $\mathbb{R}P^n$ é a variedade dos subespaços de dimensão 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$, também denotado por $P(\mathbb{R}^{n+1})$.

2.2 Fibrados

Agora que temos a teoria necessária para caracterizar um fibrado, podemos introduzir as seguintes definições:

2.2.1 Definição global de um fibrado principal

Definição 2.2.1. Um G -fibrado principal consiste de uma G ação livre à direita $E \times G \rightarrow E$ e uma aplicação sobrejetiva $p : E \rightarrow B$ tal que:

- (1) $p(eg) = p(e)g$,
- (2) para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta V de b em B e um G -homeomorfismo $\phi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ tal que

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times G \\ & \searrow p \quad \swarrow pr_1 & \\ & V & \end{array}$$

é comutativo.

O espaço E na definição acima é chamado *espaço total* do fibrado, B o *espaço base* e ϕ a *trivialização* sobre V .

A relação entre G -fibrados principais e G -espaços livres localmente triviais é clara:

Proposição 2.2.2. (E, p, B, G) é um G -fibrado principal se, e somente se, E é um G espaço localmente trivial e $B \cong E/G$.

2.2.2 Fibrados associados

Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal dado. Seja F um espaço com uma G ação efetiva à esquerda. Então podemos produzir um novo fibrado como segue. Considere G agindo sobre o produto $E \times F$ por $(x, y)g = (xg, g^{-1}y)$, defina $E \times_G F = (E \times F)/G$ e

$$p_F : E \times_G F \rightarrow B = E/G,$$

$$[(x, y)] \mapsto p(x).$$

$(E \times_G F, p_F, B, G, F)$ é chamado *fibrado com fibra F e grupo G sobre B associado a p* .

Fibrados com fibra $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ são chamados de fibrados vetoriais real, complexo e quaterniônico, respectivamente. Quando $n = 1$, são chamados fibrados linhas.

2.2.3 Definição local de fibrados

A definição dada acima para um G -fibrado principal é uma definição global. O espaço total tem uma ação expressa por uma função definida globalmente e a função translação está bem definida sobre o espaço todo (mesmo se não muito concreto). A existência de uma trivialização local está de alguma forma oculta. Existe uma definição equivalente de um G -fibrado principal, que considera o ponto de vista contrário, isto é, local e baseado sobre a introdução de um conjunto de funções locais. Essa é uma definição bastante usada em várias situações, abstratas e aplicadas, e em particular quando uma expressão explícita para essas funções locais está efetivamente disponível. Como essa definição aplica facilmente a uma classe grande de fibrados, preferimos apresentá-la no seguinte modo:

Definição 2.2.3. Um fibrado ξ é uma *quintupla* (E, p, B, F, G) satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) E, B, F são espaços topológicos, $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação e G é um grupo topológico agindo efetivamente à esquerda sobre F , isto é, $G \subseteq \text{Homeo}(F)$;
- (2) B é coberto por uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ e para todo $i \in J$ existe um homeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$ sobre U_i (tal que $p\phi_i = pr_1$, onde $pr_1 : U_i \times F \rightarrow U_i$ é a projeção na primeira coordenada);
- (3) para todo $b \in U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e todo $y \in F$, $\phi_i^{-1}\phi_j(b, y) = (b, g_{ij}(b)y)$ e a função $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ é contínua.

O espaço E é o *espaço total* do fibrado ξ , B é o *espaço base*, F é a *fibra* e G é o grupo estrutural. Finalmente, as aplicações g_{ij} são suas *funções transitivas*. Um fibrado com grupo estrutural G é também chamado um G -fibrado.

As funções-transição são os ingredientes chave para trabalhar com fibrados. A seguinte formulação de funções-transição é bastante usada: para todo $b \in U_{ij}$, defina

$$\phi_{i,b} : \{b\} \times F \rightarrow p^{-1}(b),$$

$$\phi_{i,b}(y) = \phi_i(b, y);$$

então para todo $y \in F$, $g_{ij}(b)y = \phi_{i,b}^{-1}\phi_{j,b}(y)$.

É fácil verificar que as funções-transição satisfazem as seguintes condições:

- (FT1) $\forall b \in U_i, g_{ii}(b) = u$,
- (FT2) $\forall b \in U_{ij}, (g_{ij}(b))^{-1} = g_{ji}(b)$,

(FT3) $\forall b \in U_{ijk}, g_{ki}(b) = g_{kj}(b)g_{ji}(b)$; a última condição pode ser escrita de um modo co-cíclico:

$$g_{ij}(b)g_{jk}(b)g_{ki}(b) = u,$$

para todo $i, j, k \in J$ e para todo $b \in U_{ijk}$.

A importância das funções-transição está também na seguinte proposição, cuja prova pode ser encontrada em [18].

Proposição 2.2.4. *Seja G um grupo topológico o qual age efetivamente à esquerda num espaço F . Seja B um espaço com uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in J}$ e, para todo $i, j \in J$ para o qual $U_{ij} \neq \emptyset$, temos aplicações $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ as quais satisfazem as condições FT1, FT2, FT3. Então existe um fibrado $\xi = (E, p, B, F, G)$ com funções-transição g_{ij} .*

Em particular, o resultado acima nos permite construir um G -fibrado com fibra G fora de qualquer G -fibrado ξ dado: apenas observe que G age sobre si mesmo por multiplicação. Tal G -fibrado com fibra G é o G -fibrado *principal* associado a ξ . Podemos agora mostrar que as duas definições dadas para um G -fibrado principal na verdade coincidem.

Proposição 2.2.5. *O G -fibrado principal (E, p, B, F, G) mostrado na Definição 2.2.3 é um G -fibrado principal (E, p, B, G) como na Definição 2.2.1 e a recíproca é verdadeira.*

Demonstração: Por um lado, devemos mostrar que

- (1) E é um G -espaço principal;
- (2) B é homeomorfo ao espaço de órbitas E/G ;
- (3) o homeomorfismo local $\phi_i : U_i \times G \rightarrow p^{-1}(U_i)$ sobre os conjuntos abertos U_i são G -equivariantes.

Podemos proceder como segue. A ação de G sobre E é dada por: se $x = \phi^{-1}(p(x), g_i)$ e $g \in G, xg = \phi_i(p(x), g_i g)$. A função translação $\tau : E^* \rightarrow G$ é então dada localmente como segue: se $x \in p^{-1}(U_i)$, defina $\sigma_i(x) = pr_2 \phi^{-1}(x) \in G$. Agora, defina $\tau_i(x, x') = (\sigma_i(x))^{-1} \sigma_i(x')$, para todo $(x, x') \in p^{-1}(U_i)^*$. Claramente, se x também pertence a $p^{-1}(U_j)$, então $\tau_i(x, x') = \tau_j(x, x')$. Assim a função global τ é contínua.

Falta provar que τ satisfaz a condição $x\tau(x, x') = x'$, para todo $(x, x') \in E$. De fato,

$$x\tau_i(x, x') = \phi_i(p(x), \sigma_i(x)\tau_i(x, x')) = \phi_i(p(x), \sigma_i(x')) = x'.$$

Reciprocamente, seja E um G -espaço livre localmente trivial. Então, E tem uma função translação contínua pela Proposição 2.1.17 e para provar que $\xi = (E, p, B, F, G)$ é um G -fibrado principal é suficiente definir as funções transição. Considere as funções $\sigma_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow G$ definidas como anteriormente e definamos

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G,$$

por $g_{ij}(p(x)) = \sigma_i(x)(\sigma_j(x))^{-1}$. ■

O estudo é mais simples quando consideramos a categoria dos G -fibrados principais, logo, em geral usaremos resultados para fibrados principais; tais resultados serão traduzidos imediatamente para os fibrados associados usando a construção acima.

Os objetos da categoria $Princ_G(B)$ são G -fibrados principais sobre o espaço B . Um morfismo $f \in Princ_G(\xi, \xi')$ é uma aplicação G -equivariante $f : E \rightarrow E'$ a qual comuta com as projeções p e p' . Na verdade, qualquer morfismo f será um G -homeomorfismo de E em E' pela Proposição 2.1.12, e conseqüentemente um isomorfismo em $Princ_G(B)$.

2.2.4 Equivalência de fibrados

Usando a definição global 2.2.1, é imediato introduzir a noção natural de equivalência de fibrados: isto é, isomorfismos na categoria $Princ_G(B)$. G -fibrados principais isomorfos são também chamados *equivalentes* e essa é obviamente uma relação de equivalência. O mais interessante é como isso é traduzido na definição local, através das funções transição.

Proposição 2.2.6. *Sejam ξ e ξ' dois G -fibrados com a mesma base B e fibra F . E mais, suponha que ambos os fibrados sejam localmente triviais sobre a mesma cobertura aberta de B (isso é sempre possível simplesmente intersectando as coberturas abertas originais de ambos fibrados). Então ξ e ξ' são equivalentes se, e somente se, para todo $i \in J$, existe uma aplicação $\rho_i : U_i \rightarrow G$ tal que*

$$g'_{ij}(b) = (\rho_j(b))^{-1} g_{ij}(b) \rho_i(b),$$

para todo $b \in U_{ij}$.

Demonstração: Suponha que os fibrados sejam isomorfos e seja $f : E \rightarrow E'$ o G -homeomorfismo sobre B . Para cada $i \in J$ defina

$$\rho_i : U_i \rightarrow G,$$

por $\phi_i^{-1}(b, y) = (b, \rho_i(b)y)$. Então,

$$(b, \rho_j(b)g_{ji}(b)y) = (b, g'_{ij}(b)\rho_j(b)y),$$

isto é, $g'_{ji}(b) = \rho_i(b)\rho_j(b)^{-1}$ e as funções transição satisfazem a condição estabelecida na tese. Reciprocamente, suponha que as condições acima sejam verdadeiras, então construímos o homeomorfismo f através das aplicações ρ_i como segue. Seja

$$f_{ij}(x) = \phi'_i(b, \rho_i(b)^{-1}g_{ij}(b)y),$$

com $x = \phi(b, y)$. Para obter uma função globalmente definida, precisamos $f_{ij} = f_{kj} = f_{kh}$ sobre as intersecções $U_i \cap U_k$ e $U_j \cap U_h$. Mas

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &= \phi'_k(b, \rho_k(b)^{-1}g_{kh}(b)y') = \phi'_k(b, \rho_k(b)^{-1}g_{kh}(b)g_{hj}(b)y) = \\ &= \phi'_k(b, \rho_k(b)^{-1}g_{kj}(b)\rho_j(b)y) = f_{kj}(x) = \phi'_i(b, g'_{ik}(b)\rho_k(b)^{-1}g_{kj}(b)y) = \end{aligned}$$

$$= \phi'_i(b, \rho_i(b)^{-1} g_{ij}(b) \rho_j(b) y) = f_{ij}(x),$$

como desejado (ver também [18] 7.2.5, 7.2.7). ■

Introduzimos a notação $\xi \cong \xi'$ para indicar que ξ e ξ' são equivalentes. Temos que dois G -fibrados são equivalentes se, e somente se, seus G -fibrados principais associados são equivalentes. No que segue, se nada contrário for explicitado, falaremos sobre fibrados querendo dizer classes de equivalência de fibrados, isto é, trabalharemos na categoria $P_G(B)$ das classes de equivalência dos G -fibrados principais.

2.2.5 Seções e trivialidade

A noção de trivialidade para fibrados é bem natural: o *G -fibrado principal trivial* é o espaço produto $B \times G$ (o fibrado trivial com fibra F é $B \times F$), ou qualquer fibrado equivalente a ele.

A condição local para trivialidade é que as funções transição satisfazem a seguinte propriedade: para cada conjunto U_i na cobertura aberta de B existem funções

$$\rho_i : U_i \rightarrow G,$$

tal que

$$g_{ij}(b) = \rho_i(b)^{-1} \rho_j(b),$$

para cada $b \in U_i \cap U_j$ (onde ρ_i são as funções locais de uma equivalência como em 2.4).

Um critério bastante usado para estabelecer trivialidade de um fibrado utiliza a noção de seção.

Definição 2.2.7. *Uma seção para um fibrado dado $p : E \rightarrow B$ (principal ou não) é uma inversa à esquerda da projeção, a saber, uma aplicação $s : B \rightarrow E$ tal que $ps = 1_B$.*

Denotaremos por $\Gamma(B, E)$ o conjunto de seções de um fibrado $p : E \rightarrow B$, ou o espaço associado com a topologia oportuna, como veremos mais a frente.

Para a prova da seguinte proposição ver [18] 4.8.

Proposição 2.2.8. *Um G -fibrado principal tem uma seção se, e somente se, ele é o fibrado trivial (a menos de equivalência de fibrados).*

2.2.6 Fibrado *pull back* induzido

Agora, consideramos uma ferramenta bastante usada para produzir fibrados de um fibrado dado e uma aplicação dada em seu espaço base.

Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal e $f : A \rightarrow B$ uma aplicação dada. Seja Y o espaço *pull back* do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

O que quer dizer, Y é o subespaço $\{(a, x) \in A \times E \mid f(a) = p(x)\}$ de $A \times E$. Então Y possui a G -ação induzida. Se p é trivial sobre $V \subseteq B$, então $\bar{p}$ é trivial sobre $f^{-1}(V)$. Consequentemente, $(Y, \bar{p}, A, G)$ é um G -fibrado principal. Ele é chamado o *fibrado induzido por f de p* e a notação $f^{-1}(p)$ (ou $f^{-1}(\xi)$, se ξ é o fibrado p) é também usada.

Reciprocamente, assuma um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ A & \xrightarrow{g=\hat{f}} & B \end{array}$$

dado, com G -fibrados principais p e q e uma G -aplicação f . Então, $g = \hat{f} : X/G \cong A \rightarrow Y/G \cong B$, a *aplicação quociente induzida de f* , e a aplicação f é chamada uma *aplicação fibrada*. Seja $g^{-1}(q)$ o fibrado sobre A induzido por g de q . A propriedade universal do *pull back* produz uma aplicação $X \rightarrow g^{-1}(Y)$ (o espaço total de $g^{-1}(q)$) sobre A , a qual, pela Proposição 2.1.12, é um G -homeomorfismo. Logo, temos:

Proposição 2.2.9. *Dados dois G -fibrados principais $p : X \rightarrow A$ e $q : Y \rightarrow B$ e uma aplicação fibrada $f : X \rightarrow Y$, então o fibrado p é canonicamente isomorfo ao fibrado induzido $\hat{f}^{-1}(q)$.*

2.2.7 Somando fibrados

O conceito de soma de Whitney de fibrados vetoriais se generaliza a G -fibrados principais como segue. Seja $\{\xi_k\}_{k=1,\dots,n}$ o conjunto de G_k -fibrados principais sobre B . Suponha que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ seja uma cobertura aberta de B sobre a qual os ξ_k s são todos localmente triviais. Finalmente, seja $\{g_{ij}^k\}_{i,j \in J}$ o conjunto de funções transição de ξ_k . As funções transição

$$\bigoplus_{k=1}^n g_{ij}^k : U_{ij} \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n G_k$$

definem um $\bigoplus_{k=1}^n G_k$ -fibrado principal sobre B o qual denotamos por $\bigoplus_{k=1}^n \xi_k$ e chamamos *soma* de $\xi_1, \dots, \xi_n$.

No caso de $k = 2$, temos o fibrado *pull back* da aplicação diagonal $\Delta : B \rightarrow B \times B$, obtido do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & E \times E' \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \times p' \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B \end{array}$$

Já que a fibra é $\bar{p}^{-1}(b) = p^{-1}(b) \times p'^{-1}(b)$, o produto das fibras, é também chamado *produto de fibras*.

2.2.8 Exemplos de fibrados

Exemplo 2.2.10. Provavelmente o exemplo mais fácil de um fibrado é a *Faixa de Möbius*. Ela pode ser descrita como segue. A ação de $\mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$ sobre S^1 , $(x, \pm 1) \mapsto \pm x$, é livre e principal. Então, temos o $\mathbb{Z}/2$ -fibrado principal $\xi = (S^1, p, \mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}/2)$, com projeção $p(x) = [\pm x]$. Agora, como $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, o espaço total desse fibrado é o bordo da Faixa de Möbius e o fibrado associado com fibra o intervalo unitário, é exatamente a Faixa de Möbius.

Exemplo 2.2.11. Pelo Exemplo 2.1.10, a projeção $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ define um $\mathbb{Z}/2$ -fibrado principal.

Exemplo 2.2.12. Fibrados tangente e normal à esfera. O fibrado tangente à S^n , denotado por $\tau(S^n) = (TS^n, p, S^n, \mathbb{R}^n, O_n(\mathbb{R}))$, e o fibrado normal por $\nu(S^n) = (NS^n, q, S^n, \mathbb{R}^n, O_n(\mathbb{R}))$ são os fibrados vetoriais cujos espaços totais podem ser descritos como os seguintes subespaços do espaço produto $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$

$$TS^n = \{(b, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle b, x \rangle = 0\},$$

$$NS^n = \{(b, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x = \alpha b, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Um elemento (b, x) de TS^n é chamado um vetor tangente à S^n em b e um elemento de NS^n e chamado vetor normal à S^n em b . As fibras $p^{-1}(b)$ e $q^{-1}(b)$ são espaços vetoriais de dimensão n e 1, respectivamente. Uma seção de $\tau(S^n)$ é chamada um campo vetorial tangente sobre S^n e uma seção de $\nu(S^n)$ um campo vetorial normal sobre S^n .

Exemplo 2.2.13. Para cada $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$, existem duas funções lineares: a projeção sobre b

$$\begin{aligned} \pi_b : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \pi_b : x &\mapsto \frac{\langle x, b \rangle}{\langle b, b \rangle}, \end{aligned}$$

e a aplicação normal

$$\nu_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\nu_b : x \mapsto x - \frac{\langle x, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b,$$

tal que $x = \nu_b(x) + \pi_b(x)x$ e $\langle b, \nu_b(x) \rangle = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Agora considere os dois fibrados $\tau(S^n)$ e $\nu(S^n)$ definidos no exemplo anterior. Podemos provar que a soma dos dois é trivial, mais precisamente considere $\theta_n(B)$ o fibrado vetorial trivial de posto n sobre B , com espaço total $B \times \mathbb{R}^n$. Então

$$\tau(S^n) \oplus \nu(S^n) \cong \theta_{n+1}(S^n).$$

Para isso, usamos o morfismo

$$u : E(\tau(S^n) \oplus \nu(S^n)) \rightarrow B \times \mathbb{R}^{n+1},$$

$$u : ((b, x), (b, x')) \mapsto (b, x + x'),$$

no qual usamos o fato que o espaço total da soma é o subespaço de $TS^n \times NS^n$.

Isso ocorre sobre a base S^n e tem uma inversa

$$v : (b, x) \mapsto ((b, \nu_b(x)), (b, \pi_b(x)b)).$$

Os elementos de TS^n são chamados *vetores tangentes sobre S^n* , a fibra sobre $x \in S^n$ é $p^{-1}(x) = TS^n_x$, o espaço vetorial de todos os vetores tangentes à S^n em x .

Como a matriz Jacobiana é ortogonal, as funções-transição tomam valores no grupo ortogonal e, logo, $\tau(S^n)$ é um $O_n(\mathbb{R})$ -fibrado e seu fibrado principal associado é um $O_n(\mathbb{R})$ -fibrado principal.

Uma seção $s : S^n \rightarrow \tau(S^n)$ é chamada um *campo vetorial sobre S^n* .

2.3 Classificação de homotopia de G -fibrados principais

O objetivo desta seção é mostrar como o processo de classificar fibrados é feito na teoria de homotopia. Não é possível afirmar um resultado completamente geral, mas nos restringimos a alguns tipos de fibrados (fibrados vetoriais podem ser uma possível escolha). A escolha mais geral é provavelmente tratar dos fibrados enumeráveis e isso conduz ao Teorema Fundamental de Classificação 2.3.2. abaixo.

Precisamos primeiro introduzir o conceito de fibrado enumerável e também algumas noções de teoria de homotopia relacionadas a fibrados. Não provaremos o Teorema de Classificação, tentaremos dar as ferramentas principais e suas propriedades sem provas, com o único propósito de dar uma idéia de como esse procedimento de classificar objetos funciona.

Primeiro recorde que, se X é um espaço de Hausdorff, uma família $\{u_i\}_{i \in J}$ de aplicações $u_i : X \rightarrow I$ é chamada uma *partição da unidade sobre X* se:

- (1) os suportes das u_i formam uma cobertura fechada de vizinhanças finitas de X ,
- (2) $\sum_{i \in J} u_i(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Uma cobertura aberta $\{u_i\}_{i \in J}$ de um espaço topológico B é *enumerável* se existe uma partição da unidade (localmente finita) $\{u_i\}_{i \in J}$ tal que $\overline{u_i^{-1}((0, 1])} \subseteq U_i$ para cada $i \in J$.

Um resultado padrão é que um espaço de Hausdorff B é paracompacto se, e somente, cada cobertura aberta é enumerável.

Um G -fibrado principal ξ sobre um espaço B é *enumerável* se é localmente trivial sobre uma cobertura aberta enumerável de B .

Observe que cada G -fibrado principal sobre um espaço paracompacto é enumerável.

Recorde que $Htop$ denota a categoria cujos objetos são espaços topológicos e os morfismos são classes de equivalência de aplicações homotópicas.

Para cada espaço B existe um funtor contravariante

$$[-, B] : Htop \rightarrow Set,$$

para a categoria de conjuntos, o qual transforma um espaço X no conjunto de classes de equivalência das aplicações homotópicas $[X, B]$, e morfismos $f \in Htop(X, Y)$ na função

$$f^* : [X, B] \rightarrow [Y, B],$$

$$f^* : [h] \mapsto [hf].$$

A seguinte proposição é fundamental quando falamos de fibrados e sua prova pode ser encontrada em [18] 4.9.9:

Proposição 2.3.1. *Sejam $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal enumerável e $f, g : A \rightarrow B$ aplicações dadas. Então, $f \sim g$ implica $f^{-1}(p) \cong g^{-1}(p)$.*

Essa proposição nos permite introduzir o funtor contravariante

$$NP_G : Htop \rightarrow Set,$$

para a categoria dos conjuntos, o qual transforma um espaço B no conjunto $NP_G(B)$ (o fato que fibrados são caracterizados pelas funções-transição garante que $NP_G(B)$ é, de fato, um conjunto) de todas as classes de equivalência dos G -fibrados principais enumeráveis sobre B e o morfismo $[f] \in HTop(A, B)$ na função

$$NP_G([f]) : NP_G(B) \rightarrow NP_G(B),$$

$$NP_G([f]) : \xi \mapsto f^{-1}(\xi).$$

Agora, seja $\tilde{\xi} = (\tilde{E}, \tilde{p}, \tilde{B}, G)$ um G -fibrado principal enumerável fixado. Podemos ver que existe uma transformação natural

$$\mathcal{T} : [-, \tilde{B}] \rightarrow NP_G$$

tal que, para todo $B \in HTop$,

$$\mathcal{T}(B) : [B, \tilde{B}] \mapsto NP_G(B), \quad [f] \mapsto f^{-1}(\tilde{\xi}).$$

Podemos enunciar agora o seguinte **Teorema de Classificação**:

Teorema 2.3.2. *Se $\tilde{E}$ é contrátil, os funtores NP_G e $[-, \tilde{B}]$ de $HTop$ em Set são naturalmente equivalentes.*

Demonstração: Ver [18] 4.10, 4.12. ■

Um G -fibrado principal enumerável com espaço total contrátil é chamado *G -fibrado universal*. O espaço base de um G -fibrado universal é o *espaço classificante* de G . Existem vários modos para construir um espaço classificante e essas construções são todas functoriais. A construção de Milgram-Steenrod de um fibrado universal $\xi_G = (EG, p_G, BG, G)$, para qualquer grupo topológico G , está descrita em [39]. A construção original foi feita por Milnor [18] 4.11.

Pelo Teorema 2.3.2 temos que, quando um G -fibrado universal é dado, para cada espaço B existe uma bijeção entre os conjuntos

$$\mathcal{T} : [B, \tilde{B}] \cong NP_G(B).$$

Essa é a classificação de homotopia do G -fibrados principais enumeráveis.

Isso significa que, quando um certo fibrado é suficientemente trivial segundo o ponto de vista homotópico, então ele pode ser usado para classificar todos os fibrados do mesmo tipo. A necessidade de contratibilidade pode ser enfraquecida quando desejamos classificar fibrados, a menos de alguma dimensão fixada. De fato, temos o seguinte:

Proposição 2.3.3. *Se $\tilde{E}$ é n -conexo (isto é, os n primeiros grupos de homotopia são triviais), então os funtores NP_G e $[-, \tilde{B}]$ são naturalmente equivalentes na categoria de CW -complexos de dimensão no máximo n .*

Um G -fibrado principal com espaço total n -conexo é chamado *n -fibrado universal* (para tais fibrados não é necessário ser enumerável, já que todo CW -complexo de dimensão finita é paracompacto). Veja também [33] II.6 e [6].

A maioria dos fibrados encontrados neste capítulo têm uma base paracompacta. Assim, eles são enumeráveis e, a menos que tenhamos enumerabilidade por diferentes razões, não faremos referência explicitamente a enumerabilidade e assumiremos que os fibrados principais são enumeráveis.

2.4 Grupos de gauge

Mais referências para esta seção estão em [38] e [18].

O grupo de gauge de um fibrado principal é simplesmente seu grupo de automorfismos com a topologia vinda da topologia do espaço de aplicações (a topologia compacto aberta).

Definição 2.4.1. *Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal. O grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ é o subespaço dos G -homeomorfismos de E sobre B .*

Explicitamente, $\mathcal{G}_p$ é o conjunto das aplicações $u \in m(E, E)$, i. e., $u : E \rightarrow E$, tal que

$$pu = p,$$

e

$$u(xg) = u(x)g,$$

para todo $g \in G, x \in E$. De fato, G -equivariância sobre B garante que $u \in \text{Homeo}(E)$ pela Proposição 2.1.12.

Isso significa que a multiplicação natural no conjunto $\mathcal{G}_p$, a saber, composição de aplicações, tem uma inversa e como é associativa e tem a aplicação identidade como unidade natural, temos para $\mathcal{G}_p$ a estrutura natural de um grupo abstrato.

Por outro lado, $\mathcal{G}_p$ é um subconjunto do conjunto $m(E, E)$, que pode ser considerado um espaço usando a topologia compacto aberta e, assim, $\mathcal{G}_p$ pode ser visto como um subespaço com a topologia induzida. Uma questão que surge é: as estruturas algébricas e topológicas são compatíveis, ou seja, $\mathcal{G}_p$ é um grupo topológico? Sabemos que a composição é contínua, mas há a questão referente à continuidade de $u \mapsto u^{-1}$. É verdade que $\mathcal{G}_p$ é um grupo topológico, mas é necessário um pouco mais de trabalho para provar.

Por completamento, mostramos aqui uma situação um pouco geral quando isso é verdade ([11] 1.1.22).

Proposição 2.4.2. *Se X é um espaço de Hausdorff compacto, então $\text{Homeo}(X)$ é um grupo topológico na topologia compacto aberta.*

Para provar o mesmo resultado de uma maneira geral, necessário quando estudamos grupos de gauge, primeiro precisamos introduzir algumas formulações diferentes para o próprio grupo de gauge.

Formulação 1

Recorde que, para um grupo topológico G , denotamos por $Ad(G)$ o G -espaço à direita G com G -ação adjunta à direita dada por $ad : (x, g) \mapsto g^{-1}xg$ (veja Exemplo 2.1.4). Também, G é um G -grupo, já que a estrutura de grupo topológico sobre G é preservada pela G -ação à direita.

Para X e Y dois G -espaços à direita, denotamos por $m_G(X, Y)$ o subespaço das G -aplicações, isto é, $f \in m(X, Y)$ satisfazendo

$$f(xg) = f(x)g,$$

para todo $g \in G, x \in X$. Em particular, $\mathcal{G}_p$ é um subespaço de $m_G(E, E)$.

Considere o conjunto $m_G(E, Ad(G))$ e dê a ele a topologia herdada de $m(E, Ad(G))$, e a multiplicação

$$(f, g) \mapsto fg, \quad fg(x) = f(x)g(x),$$

para todo $x \in X$, o que quer dizer que a aplicação produto é definida como o produto das imagens usando a multiplicação em $Ad(G)$. Isso faz de $m(E, Ad(G))$ um grupo topológico.

Agora, considere a função

$$\alpha : \mathcal{G}_p \rightarrow m(E, Ad(G)),$$

$$\alpha : u \mapsto \phi_u$$

na qual $\phi_u(x) = \tau(x, u(x))$. A aplicação α é uma bijeção contínua. E mais, a função

$$\beta : m(E, Ad(G)) \rightarrow \mathcal{G}_p,$$

$$\beta : \phi \rightarrow u_\phi,$$

sendo $u_\phi(x) = x\phi(x)$, é uma inversa contínua para α , e logo, estabelecemos um homeomorfismo $\mathcal{G}_p \cong m(E, Ad(G))$. Como em G a inversão $g \rightarrow g^{-1}$ é contínua, em $m(E, Ad(G))$ temos que a inversão também é contínua, logo $m(E, Ad(G))$ é também grupo topológico.

Usando essa descrição pode-se provar o seguinte:

Proposição 2.4.3. *Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal. Se p é trivial ou se G é abeliano, então $\mathcal{G}_p$ é isomorfo, como um grupo topológico, a $m(B, G)$.*

Demonstração: ([18] 2.1.7) No primeiro caso, $m_G(B \times G, Ad(G)) = m(B, G)$ já que $f(b, g)$ com $f(b, gh) = b^{-1}f(b, g)h$ é da forma $f(b, g) = g^{-1}f(b, u)g$ para todo $g \in G$ e $b \in B$. No segundo caso, $m_G(E, Ad(G)) = m(B, G)$ pois $f(xg) = f(x)$, já que G é abeliano. ■

Formulação 2

A próxima formulação para o grupo de gauge está em termos das seções de um fibrado. Dado um G -fibrado principal $p : E \rightarrow B$, considere o fibrado associado $E \times_G Ad(G)$. Esse é um fibrado de grupos, já que a estrutura de grupo sobre $Ad(G)$ é G -equivariante, e o espaço das seções $\Gamma(B, E \times_G Ad(G))$ é um grupo topológico em que multiplicamos seções usando o produto em $Ad(G)$.

Existe um modo importante para descrever seções de um fibrado. A saber, existe uma função

$$\mu : m(E, Ad(G)) \rightarrow \Gamma(B, E \times_G Ad(G)),$$

$$\mu : u \mapsto s_u,$$

sendo $s_u(b) = (x, u(x))G$, para $x \in F_b$, um elemento arbitrário da fibra F_b sobre $b \in B$. A aplicação μ é uma bijeção, e logo, temos a terceira descrição do grupo de gauge.

Formulação 3

A última descrição é uma descrição local, em termos das funções-transição. Essa descrição é particularmente importante na teoria de gauge e aplicações à física. Assuma

que o G -fibrado $\xi, p : E \rightarrow B$, é localmente trivial sobre a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ de B e tem funções transição g_{ij} .

Começamos definindo o *grupo de gauge local* de p associado a cobertura aberta $\mathcal{U}$ como o grupo topológico

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i \in J} m(U_i, G)$$

dotado com a topologia produto. Agora, para todo $i \in J$ defina ξ_i a restrição de ξ a U_i . Como ξ_i é trivial, o grupo de gauge $\mathcal{G}_{\xi_i}$ é homeomorfo ao grupo topológico $m(U_i, G)$, via função

$$\begin{aligned} \vartheta_i : \mathcal{G}_{\xi_i} &\rightarrow m(U_i, G), \\ \vartheta_i : f_i &\mapsto \vartheta_i(f_i), \end{aligned}$$

em que $\vartheta_i(f_i)(b) = (\phi_{i,b}^{-1} f_{i,b} \phi_{i,b})(u)$, para toda $f_i \in \mathcal{G}_{\xi_i}$ e todo $b \in U_i$ e sendo $f_{i,b}$ a restrição de f_i à fibra $p^{-1}(b)$.

Agora, definamos a aplicação

$$\begin{aligned} r_i : \mathcal{G}_\xi &\rightarrow \mathcal{G}_{\xi_i}, \\ r_i : f &\mapsto f|_{(p^{-1}(U_i))}. \end{aligned}$$

Lema 2.4.4. *A função*

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathcal{G}_\xi &\rightarrow \mathcal{L}(p), \\ \vartheta : f &\mapsto \{\vartheta_i r_i(f)\}_{i \in J}, \end{aligned}$$

é um mergulho de grupos topológicos.

Identificando $\mathcal{G}_p$ com $\vartheta(\mathcal{G}_\xi) \subset \mathcal{L}(p)$ podemos caracterizar $\mathcal{G}_p$ usando as funções transição de ξ :

Proposição 2.4.5. *O grupo $\mathcal{G}_p$ coincide com o subgrupo*

$$\{\{f_i\}_{i \in J} \in \mathcal{L}(p) \mid f_j = g_{ij}^{-1} f_i g_{ij} \text{ sobre } U_{ij}\}.$$

As provas do Lema e da Proposição acima podem ser encontrados em [34].

Como conseqüências do teorema anterior, podemos ver mais uma vez que se G é abeliano, o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ coincide com $m(B, G)$.

Podemos ver que se $\xi \cong \xi'$, então $\mathcal{G}_\xi \cong \mathcal{G}_{\xi'}$. De fato, seja $\ell : E \rightarrow E'$ um homeomorfismo G -eqüivariante sobre B . Então

$$Ad_\ell : \mathcal{G}_\xi \rightarrow \mathcal{G}_{\xi'},$$

$$Ad_\ell : f \mapsto \ell^{-1} f \ell$$

é um isomorfismo. Assim, faz sentido falar sobre o grupo de gauge de um fibrado querendo dizer uma classe de equivalência de fibrados. No entanto, observe que o contrário não é verdade: o $\mathbb{Z}$ -fibrado trivial $S^1 \times \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ e a aplicação fibrado exponencial $e^{2\pi i} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ não são equivalentes, mas têm grupos de gauge homeomorfos.

Observação 2.4.6. Para qualquer conjunto finito de G -fibrados principais sobre um espaço dado B , podemos selecionar um único grupo de gauge local comum de tal modo que os teoremas de mergulho acima continuam verdadeiros para os grupos de gauge de todos os fibrados envolvidos.

Fechamos essa seção apresentando dois resultados: sobre os grupos de gauge de uma soma de fibrados e sobre o centro do grupo de gauge.

Primeiro, considere a soma de fibrados principais, como descrito na seção 2.7.

Proposição 2.4.7. *Para qualquer conjunto de G_k -fibrados principais $\xi_1, \dots, \xi_n$ sobre B ,*

$$\mathcal{G}_{\bigoplus_{k=1}^n \xi_k} \cong \bigoplus_{k=1}^n \mathcal{G}_{\xi_k}.$$

Agora, considere o centro do grupo de gauge de um G -fibrado principal $\xi = (E, p, B, G)$. Para continuar nossa análise, precisamos introduzir a seguinte condição:

[C1] $\eta : \mathcal{G}_\xi \rightarrow G$, $\eta : f \mapsto f|_{p^{-1}(b_0)(u_g)}$, é uma sobrejeção para todo $b_0 \in B$.

Então, considere o homeomorfismo

$$m_G(E, \text{Ad}(G)) \rightarrow \mathcal{G}_\xi$$

introduzido na formulação 2. Por outro lado, observamos que essa aplicação preserva o centro e assim

$$Zm_G(E, \text{Ad}(G)) \cong Z\mathcal{G}_\xi.$$

Por outro lado, $u \in Zm_G(E, \text{Ad}(G))$ se, e somente se, $f(x)u(x) = u(x)f(x)$ para toda $f \in m_G(E, \text{Ad}(G))$ e para todo $x \in E$. Assim, se [C1] está satisfeita, $u \in Zm_G(E, Z\text{Ad}(G)) \cong m(B, ZG)$ já que ZG é abeliano. Logo, temos o seguinte homeomorfismo:

Proposição 2.4.8.

$$Z\mathcal{G}_\xi \cong m(B, ZG).$$

2.4.1 A homotopia do grupo de gauge

Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal e $p_G : EG \rightarrow BG$ um G -fibrado universal. O objetivo desta seção é apresentar alguma informação sobre o tipo de homotopia do grupo de gauge de p . Para isso, mostraremos como introduzir um espaço classificante para o grupo de gauge. Desse espaço classificante e seu fibrado universal, informações sobre o tipo de homotopia do grupo de gauge podem ser deduzidas por métodos-padrão da teoria de homotopia. Mais precisamente, apresentaremos duas possíveis abordagens para o problema de introduzir um espaço classificante para o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$.

Formulação 1

Recorde que $m_G(E, EG)$ é o subespaço das aplicações G -equivariantes em $m(E, EG)$. Agora, o Teorema de Classificação 2.3.2 implica que existe uma aplicação $f : B \rightarrow BG$ tal que p é (equivalente a) o fibrado *pull back* $f^{-1}(p_G)$ induzido pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(EG) & \xrightarrow{\bar{f}} & EG \\ \downarrow \bar{p}_G & & \downarrow p_G \\ B & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

Seja $m(B, BG; f)$ a componente conexa de $m(B, BG)$ a qual contém a aplicação f . Como $g^{-1}(p_G) = f^{-1}(p_G)$ para toda $g \sim f$, todas as aplicações em $m(B, BG; f)$ definem o mesmo fibrado p pelo *pull back*.

Seja

$$\begin{aligned} q : m(E, EG) &\rightarrow m(B, BG), \\ q : w &\mapsto w/G, \end{aligned}$$

a aplicação quociente que associa a cada $w \in m(E, EG)$ a classe de equivalência de w , $w/G \in m(B, BG)$.

Sabemos que o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ é um grupo topológico. E mais, age pela direita sobre o espaço $m_G(E, EG)$ pela composição de morfismos de fibrados, a saber:

$$\begin{aligned} \phi : m_G(E, EG) \times \mathcal{G}_p &\rightarrow m_G(E, EG), \\ \phi : (w, u) &\mapsto wu, \end{aligned}$$

e é uma ação contínua. Também, se $w, w' \in m_G(E, EG)$ com $q(w) = q(w')$, então temos $\tau(w, w') = w^{-1}w' \in \mathcal{G}_p$ com $w\tau(w, w') = w'$, a qual é uma função translação. Essa função

$$\tau : (m_G(E, EG))^* \rightarrow \mathcal{G}_p,$$

é contínua (funções composição e inversa). Provamos então o seguinte:

Proposição 2.4.9. *Sejam $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal e $p_G : EG \rightarrow BG$ um G -fibrado universal. Então, o espaço $m_G(E, EG)$ é um $\mathcal{G}_p$ -espaço principal, com projeção $q : m_G(E, EG) \rightarrow m(B, BG; f)$. O fibrado q é chamado fibrado principal padrão para o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$.*

Observe que não é garantida a trivialidade local.

O interesse nessa definição segue de (veja [18] 4.3.4, 4.3.5):

Proposição 2.4.10. *Se o espaço total de $p : E \rightarrow B$ é localmente compacto, então o fibrado principal padrão para $\mathcal{G}_p$ é contrátil e, conseqüentemente, o espaço classificante para o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ é $m(B, BG; f)$, sendo o fibrado universal o fibrado principal padrão.*

Formulação 2

A segunda abordagem é mais utilizada para estudar o tipo de homotopia do grupo de gauge.

Seja G um grupo topológico e seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal sobre B . Sejam B_G o espaço classificante de G , e $p_G : EG \rightarrow BG$ o fibrado universal. Seja f a aplicação classificante para p , isto é, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f'} & EG \\ p \downarrow & & \downarrow p_G \\ B & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

comuta (a menos de isomorfismo).

Considere o grupo G com a G -ação à esquerda $ad_g(g') = g^{-1}g'g$. Esse é o G -grupo à esquerda $Ad(G)$ e dá origem a dois fibrados $q : E \times_G Ad(G) \rightarrow B$, $q_G : EG \times_G Ad(G) \rightarrow BG$. Se B é paracompacto, esses fibrados são fibrações.

E mais, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E \times_G Ad(G) & \xrightarrow{f' \times 1} & EG \times_G Ad(G) \\ q \downarrow & & \downarrow q_G \\ B & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

e novamente é um *pull back* a menos de isomorfismo de fibrados.

Se B é localmente compacto $q_{G*} : m(B, EG \times_G Ad(G)) \rightarrow m(B, BG)$ é uma fibração e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} m(B, E \times_G Ad(G)) & \xrightarrow{f'_*} & m(B, EG \times_G Ad(G)) \\ q_* \downarrow & & \downarrow q_{G*} \\ m(B, B) & \xrightarrow{f_*} & m(B, BG) \end{array}$$

é um *pull back* (novamente, a menos de isomorfismo). Logo, q_* é uma fibração e sua fibra sobre $\{1_B\}$ é, na verdade, o grupo de gauge de p . De fato,

$$q_*^{-1}(1_B) = \{s \in m(B, E \times_G Ad(G)) | qs = 1_B\} = \Gamma(B, E \times_G Ad(G)).$$

Isso significa que as fibras sobre todas as funções nas componentes conexas por caminhos de f têm o mesmo tipo de homotopia de $\mathcal{G}(p)$, como esperado. Mas, como todas as

aplicações em tais componentes conexas por caminhos são homotópicas, temos que isso significa que essas fibras são isomorfas.

Já que é um diagrama *pull back*, temos também que a fibra de q_{G*} é o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ e assim, obtemos a fibração

$$\mathcal{G}_p \rightarrow m(B, EG \times_G Ad(G)) \rightarrow m(B, BG),$$

segundo suposições adequadas sobre B e G . O tipo de suposições necessárias para obter resultados mais úteis têm sido estudado por vários autores. Um cenário bem geral está descrito nos trabalhos de Booth, Heat, Morgan e Piccinini (veja, por exemplo, [5]). Traduzimos aqui alguns de seus resultados na linguagem de fibrados.

Proposição 2.4.11. *Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal classificado por uma aplicação $f : B \rightarrow BG$. Então, o grupo de gauge $\mathcal{G}_p$ tem o mesmo tipo de homotopia do espaço dos laços $\Omega m(B, BG; f)$. E mais, essa é uma equivalência de H -espaços.*

Proposição 2.4.12. *Seja $p : E \rightarrow B$ um G -fibrado principal classificado por uma aplicação $f : B \rightarrow BG$. Suponha que B tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito e que G é um CW-complexo. Então, o espaço classificante para o grupo de gauge $B\mathcal{G}_p$ tem o mesmo tipo de homotopia do espaço das aplicações $m(B, BG; f)$.*

Demonstração: [38] 2.3. ■

2.5 O espaço dos laços sobre o espaço classificante de um grupo topológico

Seja G um grupo topológico conexo compacto. Seja $p_G : EG \rightarrow BG$ seu fibrado universal como construído em [38]. Obtemos uma equivalência de H -espaços $\Omega BG \sim_H G$.

Lema 2.5.1. $G \sim L_{p_G}$.

Demonstração: O espaço $L = L_{p_G}$ é definido como o *pull back* do seguinte diagrama [37]

$$\begin{array}{ccc} L = EG \sqcap PBG & \xrightarrow{\bar{p}_G} & PBG \\ \downarrow \bar{\epsilon}_1 & & \downarrow \epsilon_1 \\ EG & \xrightarrow{p_G} & BG \end{array}$$

no qual $PBG = \{\lambda \in m(I, BG) \mid \lambda(0) = b_0\}$, b_0 é o ponto base de BG e

$$\epsilon_1 : \lambda \mapsto \lambda(1),$$

e, então, $L = \{(y, \gamma) \in EG \times PBG \mid \epsilon_1(\gamma) = \gamma(1) = p_G(y)\}$.

Considere a aplicação

$$h : G \rightarrow L,$$

$$h : g \mapsto ((g, 1), c_{b_0});$$

e está bem definida já que $p_G(g, 1) = [(g, 1)] = b_0 = \epsilon_1(c_{b_0}) = c_{b_0}(1)$.

Considere a homotopia

$$H : L \times I \rightarrow BG,$$

$$H : ((y, \gamma), t) \mapsto \gamma(1 - t).$$

Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} L \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{\epsilon}_1} & EG \\ \downarrow j & & \downarrow p_G \\ L \times I & \xrightarrow{H} & BG \end{array}$$

comuta, já que $H((y, \gamma), 0) = \gamma(1) = \epsilon_1(\gamma)$. Logo, existe uma homotopia

$$\hat{H} : L \times I \rightarrow EG,$$

tal que $p_G \hat{H} = H$ e $\hat{H}|_{L \times \{0\}} = \bar{\epsilon}_1$. Agora, $p_G \hat{H}((y, \gamma), 1) = H((y, \gamma), 1) = \gamma(0) = b_0$ (já que $\gamma \in PBG$). Assim, $\hat{H}((y, \gamma), 1) \in p_G^{-1}(b_0) = G$. Definimos

$$k : L \rightarrow G,$$

$$k : (y, \gamma) \mapsto \hat{H}((y, \gamma), 1).$$

Podemos provar que $hk \sim_F 1_L$ e $kh \sim_K 1_G$, sendo

$$F : L \times I \rightarrow L,$$

$$F : ((y, \gamma), t) \mapsto ((\hat{H}((y, \gamma), 1), 1 - t), \gamma_t),$$

em que $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$;

$$K : G \times I \rightarrow G,$$

$$K : (g, t) \mapsto \hat{H}((g, 1), c_{b_0}, t).$$

■

Lema 2.5.2. $L \sim \Omega BG$.

Demonstração: Consideremos as duas aplicações

$$f_1 : L = EG + PBG \rightarrow \Omega BG,$$

$$f_1 : (y, \gamma) \mapsto \gamma + p_G \lambda_y^{-1},$$

tendo-se $y = (g_1, t_1) \cdots (g_n, t_n)(g, 1)$, definimos o caminho

$$\lambda_y(t) = (g_1, t_1 t) \cdots (g_n, t_n t)(g, t).$$

Então, $\lambda_y(0) = y_0$, $\lambda_y(1) = y$, o que implica $p_G(\lambda_y(1)) = p_G(y) = \gamma(1)$, isto é, o caminho $p_G \lambda_y$ termina onde o caminho γ termina. Como $\lambda^{-1}(s) = \lambda(1 - s)$, temos

$$(\gamma + p_G \lambda_y^{-1})(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ p_G \lambda^{-1}(2t - 1) = p_G \lambda(2 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$f_2 : \Omega BG \rightarrow L,$$

$$f_2 : \alpha \mapsto (y_0, \alpha).$$

Agora,

$$f_1 f_2 : \alpha \mapsto (y_0, \alpha) \mapsto \alpha + p_G \lambda_{y_0}^{-1} = \alpha + c_{b_0};$$

Primeiro, provamos que $f_1 f_2 \sim_{H_1} 1_{\Omega BG}$, em que

$$H_1 : \Omega BG \times I \rightarrow \Omega BG,$$

$$H_1 : (\alpha, s) \mapsto \alpha_s,$$

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ b_0 & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

De fato, $H_1(\alpha, 0) = \alpha_0 = \alpha + c_{b_0}$ e $H_1(\alpha, 1) = \alpha_1 = \alpha$ já que:

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ b_0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq t \leq 1, \\ b_0 & 1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Podemos verificar também que $\alpha_s \in \Omega BG$, ou seja, $\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = b_0$. Isso segue da definição de α_s .

Continuando,

$$f_2 f_1 : (y, \gamma) \mapsto \gamma + p_G \lambda_y^{-1} \mapsto (y_0, \gamma + p_G \lambda_y^{-1}),$$

e provamos que $f_2 f_1 \sim_{H_2} 1_L$,

$$H_2 : L \times I \rightarrow L,$$

$$H_2 : ((y, \gamma), s) \mapsto \left(\lambda_y \left(\frac{2s}{s+1} \right), \lambda_s \right),$$

sendo

$$\lambda_s(t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ p_G \lambda_y^{-1}\left(\left(\frac{2t}{s+1} - 1\right)\right) = p_G \lambda_y\left(2 - \frac{2t}{s+1}\right) & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases},$$

o que está bem definido já que em $t = \frac{s+1}{2}$ temos $\gamma(1)$.

De fato, $H_2((y, \gamma), 0) = \lambda_0 = \gamma + p_G \lambda_y^{-1}$ e $H_2((y, \gamma), 1) = \lambda_1 = (y, \gamma)$ já que:

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ p_G \lambda_y^{-1}(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq 1, \\ p_G \lambda_y^{-1}(t-1) = p_G(\lambda_y^{-1}(0)) = p_G(\lambda_y(1)) = p_G(y) = \gamma(1) & 1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nos resta verificar que $H_2((y, \gamma), s) \in L$ para todo s , o que significa

$$p_G \lambda_y \left(\frac{2s}{2+1} \right) = \epsilon_1(\lambda_s) = \lambda_s(1)$$

e, de fato,

$$\lambda_s(1) = p_G \lambda_y \left(2 - \frac{2}{s+1} \right) = p_G \lambda_y \left(\frac{2s}{s+1} \right).$$

■

Resumindo, provamos que a aplicação

$$f = f_1 h : G \rightarrow \Omega BG,$$

$$f : g \mapsto ((g, 1), c_{b_0}) \mapsto c_{b_0} + p_G \lambda_{(g,1)}^{-1} = c_{b_0} + [(g, t)]$$

é uma equivalência de homotopia de G em ΩBG .

2.6 Apêndice do capítulo 2

Faremos aqui uma breve recordação de algumas noções básicas sobre categorias e funtores, e apresentaremos algumas definições necessárias para a compreensão da categoria dos k -espaços Hausdorff fraco.

Definição 2.6.1. *A categoria $\mathcal{C}$ consiste em*

- *um conjunto de objetos: $X, Y, Z, \dots$;*
- *um conjunto de morfismos: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, \dots$;*
- *uma lei de composição de morfismos: dados quaisquer dois morfismos, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, existe um morfismo $fg : X \rightarrow Z$, satisfazendo as seguintes regras:*
 - *associatividade: para cada morfismo, f, g, h temos $f(gh) = (fg)h$;*
 - *unidade: para cada objeto X , existe um morfismo identidade $1_X : X \rightarrow X$, tal que para qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$, $f1_X = 1_Y f = f$.*

Definição 2.6.2. *Um funtor covariante entre duas categorias $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma lei que associa a cada objeto X e a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, um objeto $\mathcal{F}(X)$ e um morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ em $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes regras:*

- $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$,
- $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

A partir dessas definições vamos descrever as categorias que foram necessárias para desenvolver este capítulo, e apresentar algumas das importantes propriedades relacionadas a elas. Começamos com uma lista parcial de categorias que devemos usar.

Set - categoria dos conjuntos e funções entre conjuntos;

Gr - categoria dos grupos e homomorfismos de grupo;

Top - categoria de todos os espaços topológicos (chamados apenas de *espaços*) e funções contínuas (chamadas *aplicações*);

CW - categoria dos CW -complexos e aplicações (não necessariamente celular);

HTop - categoria dos espaços e classes de homotopia de aplicações. Essa é a *categoria de homotopia associada a Top*;

Se considerarmos apenas os objetos baseados nas categorias acima (isto é, cada objeto é considerado junto com um elemento distinguido: um *ponto base*) e considerarmos apenas os morfismos que levam pontos base em pontos base, então temos subcategorias Set_0, Gr_0, Top_0, CW_0 ; para $HTop$, obtemos $HTop_0$ por homotopias baseadas.

Uma questão de notação: para qualquer categoria $\mathcal{C}$, denotamos por $\mathcal{C}(X, Y)$ o conjunto de todos os morfismos de um objeto X em um objeto Y de $\mathcal{C}$.

Podemos combinar algumas dessas categorias, por exemplo, podemos considerar a categoria $TopGr$ de grupos topológicos, seus morfismos são homomorfismos de grupos contínuos.

Em particular, falaremos mais da categoria $wHk(Top)$ dos k -espaços Hausdorff fraco, a qual é usada por razões técnicas e que precisa de algumas explicações. De fato, $wHk(Top)$ contém todos os espaços ‘bons’ que tratamos neste trabalho - como as variedades suaves - e logo, numa primeira leitura, àqueles que não são familiares com k -espaços Hausdorff fraco

podem simplesmente ignorar sua definição e admitir que estão trabalhando em espaços ‘bons’.

Definimos k -espaços Hausdorff fraco como segue: seja X um espaço dado. Um subconjunto $A \subset X$ é *compactamente fechado* se, para todo espaço de Hausdorff compacto K e toda aplicação $f : K \rightarrow X$, $f^{-1}(A) \subset K$ é fechado em K . O espaço X é chamado um k -espaço se todos os seus subconjuntos compactamente fechado são fechados. Agora defina um funtor $k : Top \rightarrow Top$ associando a cada $X \in Top$ o espaço $k(X)$ com o mesmo conjunto latente que X mas com a topologia considerando como conjuntos fechados os conjuntos compactamente fechados com respeito a topologia de X . Quanto aos morfismos, observamos que Y é um k -espaço, então uma função $f : Y \rightarrow X$ é uma aplicação se, e somente se, $f : Y \rightarrow k(X)$ é contínua. Assim, para qualquer morfismo $f \in Top(Y, X)$, simplesmente consideramos $k(f) = f : k(Y) \rightarrow k(X)$. O funtor k é chamado *k-ificação* e sua imagem $k(Top)$ é toda uma subcategoria de Top . A categoria $k(Top)$ é completa e co-completa, com o produto de k -espaços dados por

$$X \times Y = k(X \times_c Y)$$

sendo $X \times_c Y$ o produto cartesiano usual em Top . Um k -espaço X é chamado *Hausdorff fraco* sempre que a diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ é fechada em $X \times X$. A categoria $wHk(Top)$ é toda subcategoria de Top determinada por todos os k -espaços Hausdorff fraco e aplicações. Existe uma caracterização bastante usada de k -espaços Hausdorff fracos: se X é um k -espaço, então X é Hausdorff fraco se, e somente se, para toda aplicação $f : K \rightarrow X$, com K compacto e Hausdorff, $f(K)$ é fechado e Hausdorff compacto.

Vejamos agora as principais propriedades de $wHk(Top)$. Para começar, observamos que a caracterização acima de k -espaços Hausdorff fraco implica que esses espaços têm a propriedade de separação T_1 . Eles não são necessariamente Hausdorff assim como a propriedade de Δ ser fechada em $k(Top)$ não é tão forte quanto ser fechada em Top (existem exemplos de k -espaços que não são Hausdorff fraco: Tychonoff plank é um exemplo, veja [13] Apêndice 1).

Agora, $wHk(Top)$ é fechado segundo a formação de subespaços, produto finito e co-produtos e quociente por subespaços fechados. A categoria $wHk(Top)$ tem espaço de aplicações (definido por $Y^X = k(m(X, Y))$, com $m(X, Y)$ dotado da topologia compacto aberta) e isso satisfaz a lei exponencial

$$(Z^X)^Y \cong Z^{X \times Y}.$$

Finalmente, $wHk(Top)$ é fechado segundo a formação de espaços adjuntos: dado que A é um subespaço fechado de X , para qualquer aplicação $f : A \rightarrow B$, o espaço $B \sqcup_f X$ obtido como um *push out* do diagrama $X \leftarrow A \rightarrow B$ é também um objeto de $wHk(Top)$.

Como fizemos antes, podemos combinar a categoria Gr com $wHk(Top)$ e obter a categoria $wHk(Top)Gr$ de grupos topológicos Hausdorff fraco.

Um espaço $X \in Top$ tem a *topologia inicial* induzida por uma aplicação $i : X \rightarrow Y$ se, e somente se, para todo $Z \in Top$, $f \in Top(Z, X)$ temos $f \in Top(Z, Y)$. Dualmente, um espaço X tem a *topologia final* induzida por uma aplicação $p : Y \rightarrow X$ se, e somente se,

para todo espaço $Z \in Top$, $g \in Top(X, Z)$ temos $gp \in Top(Y, Z)$. Se X tem a topologia inicial induzida por $i : X \rightarrow Y$ em Top e i é injetiva, dizemos que i é uma *inclusão*, então $U \subset X$ é aberto se, e somente se, $i(U) \subset i(X)$ é aberto (observando também que uma injeção de Top é fechada se, e somente se, é uma inclusão fechada). Se X tem a topologia final induzida por $p : Y \rightarrow X$ e p é sobrejetiva, dizemos que p é uma *proclusão*. Então $U \subset X$ é aberto se, e somente se, $p^{-1}(U) \subset Y$ é aberto. A composição de duas inclusões (respectivamente proclusões) é uma inclusão (respectivamente proclusão). E mais, um produto finito de inclusões em Top é uma inclusão ([4] 1.4.1). A propriedade correspondente para proclusões não é verdade em Top , mas é em $wHk(Top)$:

Lema 2.6.3. *Suponha que $f : X \rightarrow Y$ e $f' : X' \rightarrow Y'$ sejam proclusões em $wHk(Top)$. Então $f \times f' : X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ é uma proclusão em $wHk(Top)$.*

Demonstração: Como o funtor $X \times -$ preserva co-limites [13] o espaço $X \times Y'$ tem a topologia final com respeito a $1_X \times f'$. Um argumento similar aplicado a $- \times Y'$ mostra que $X' \times Y'$ tem a topologia final com respeito a $f \times f'$. ■

Temos também a seguinte propriedade do funtor k :

Lema 2.6.4. *O funtor k -ificação $k : Top \rightarrow Top$ preserva inclusões.*

Demonstração: Seja $i \in Top(X, Y)$ uma inclusão. Claramente, ki é injetiva. Agora, mostraremos que, dado qualquer $Z \in k(Top)$, uma função $g : Z \rightarrow k(X)$ é contínua se, e somente se, kig é contínua. De fato, kig é contínua se, e somente se, $ig : Z \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $g : Z \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $g : Z \rightarrow k(X)$ é contínua. ■

Recordamos agora a definição e as principais propriedades da seqüência expandida de espaços em $wHk(Top)$. Para mais detalhes, ver [13]. Uma *seqüência expandida* de espaços em $wHk(Top)$ é uma seqüência $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ de espaços em $wHk(Top)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é um subespaço fechado de X_{n+1} . O *espaço união* da seqüência expandida é o conjunto $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ dotado com a topologia final com respeito a família de inclusões $X_n \subset X$. A família de espaços $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ é também chamada uma *filtração* de X . Uma aplicação f entre dois espaço filtrados X e Y é dita *filtrada* se existe uma seqüência de aplicações $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ a qual é compatível com as filtrações, isto é, se $f_{n+1}|_{X_n} = f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, uma seqüência compatível de aplicações induz uma aplicação (a *aplicação união*) entre espaços união.

As propriedades principais do espaço união de uma seqüência expandida são devido ao fato de que a topologia do espaço união é coerente com a determinada pela família $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ e cada X_n é um subconjunto fechado de X . Em particular, isso implica que $wHk(Top)$ é fechado segundo a formação de espaços união de seqüências expandidas. E mais, se todas as inclusões $X_n \subset X_{n+1}$ são co-fibrações fechadas, então as inclusões $X_n \subset X$ também são co-fibrações fechadas.

Os seguintes lemas mostram como o processo de considerar a aplicação união de uma seqüência compatível entre espaços filtrados preserva inclusões fechadas, proclusões e co-fibrações fechadas.

Lema 2.6.5. *Sejam $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ e $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ espaços filtrados, e seja $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ uma sequência compatível de inclusões fechadas (respectivamente proclussões). Então, a aplicação união f é uma inclusão fechada (respectivamente proclusão).*

Demonstração: Começamos com inclusões fechadas. Como f é injetiva, temos apenas que provar que f é fechada. Seja C fechado em X . Então $f(C) \cap Y_n = f_n(C \cap X_n)$ é fechado em Y_n , e logo, em Y . Segue que $f(C)$ é fechado em Y .

Vejam agora as proclussões. Vemos que f é sobrejetiva. Nos resta mostrar que Y tem a topologia final co-induzida por f . Se $V \subseteq Y$ é tal que $f^{-1}(V)$ é aberto em X , então $f^{-1}(V) \cap X_n$ é aberto em X_n , para cada n . Agora considere $V_n = V \cap Y_n$ e observe que $f^{-1}(V) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(V_n)$ e

$$f^{-1}(V) \cap X_n = f_n^{-1}(V_n)$$

é aberto em X_n . Como cada f_n é uma proclusão, V_n é aberto em Y_n para cada n e assim, V é aberto em Y . ■

Para a preservação de co-fibrações, precisamos de uma suposição a mais sobre as aplicações envolvidas:

Lema 2.6.6. *Sejam $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ e $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ espaços filtrados, e seja $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ uma sequência compatível de co-fibrações fechadas. Suponha também que todas as inclusões $X_n \subset X_{n+1}$ e $Y_n \subset Y_{n+1}$ sejam co-fibrações fechadas. Então a aplicação união $f : X \rightarrow Y$ é uma co-fibração fechada.*

A prova segue na mesma linha de [13] A.5.5 (o requisito de normalidade não é necessário).

Métodos de composição dos grupos de homotopia de esferas

Um dos principais problemas em teoria de homotopia é determinar os grupos de homotopia de esferas, já que essa é a primeira dificuldade fundamental nos cálculos dos grupos de homotopia de poliedros e espaços topológicos. Faremos um estudo dos grupos de esferas baseados em [46], onde a teoria mais detalhada e provas dos resultados apresentados podem ser encontrados.

Um exemplo de grupos não triviais aparece em [16], no qual temos o homomorfismo de Hopf H de $\pi_{2n-1}(S^n)$ no grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$. Se n é par, então a imagem $H(\pi_{2n-1}(S^n))$ do homomorfismo de Hopf contém $2\mathbb{Z}$, em particular, se $n = 2, 4$ ou 8 então H é sobrejetiva e a aplicação de fibra de Hopf $h : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ tem invariante de Hopf 1, isto é, $H(h) = 1$.

O primeiro exemplo de um grupo finito não trivial foi feito por Freudenthal em [12]: $\pi_{n+1}(S^n) \approx \mathbb{Z}/2$ para $n \geq 3$. Em [12], o homomorfismo suspensão de Freudenthal

$$\Sigma : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

foi definido e teve um importante papel. O grupo $\pi_3(S^2)$ é cíclico infinito e é gerado pela classe η_2 da aplicação de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. O gerador do grupo $\pi_{n+1}(S^n)$ é $\eta_n = \Sigma^{n-2}\eta_2$, onde Σ^{n-2} é a $(n-2)$ iteração do homomorfismo suspensão Σ . O homomorfismo Σ é um isomorfismo se $i < 2n-1$ e disso obtemos o conceito de grupo estável

$$G_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(S^n)$$

o qual é isomorfo a $\pi_{n+k}(S^n)$ se $n > k+1$.

A segunda seqüência de grupos $\pi_{n+2}(S^n) \approx \mathbb{Z}/2, n \geq 2$, foi determinada por G. Whitehead [48], e o gerador de $\pi_{n+2}(S^n)$ é a composição $\eta_n \circ \eta_{n+1}$. Em geral, o operador composição

$$\circ : \pi_j(S^i) \times \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_j(S^n)$$

está definido simplesmente considerando a classe de homotopia da composição $g \circ f : S^j \rightarrow S^i \rightarrow S^n$ das aplicações f e g .

Vemos nesses exemplos, junto com o isomorfismo

$$\pi_{i-1}(S^{n-1}) + \pi_i(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_i(S^n), \quad n = 2, 4, 8$$

dados pela correspondência $(\alpha, \beta) \mapsto \Sigma\alpha + \gamma\beta$ em que γ é o homomorfismo induzido da aplicação de fibra de Hopf h (ver [43]), que o homomorfismo suspensão e o operador composição são ferramentas fundamentais para calcular os geradores dos grupos de homotopia das esferas.

3.1 O produto de Whitehead

Antes de continuarmos nossos cálculos sobre os grupos de homotopia das esferas, recordemos alguns conceitos básicos do produto de Whitehead. Para maiores detalhes e provas dos resultados ver [47] Cap. X pág. 472.

Sejam $\alpha \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X)$, representados pelas aplicações $f : (E_1, \dot{E}_1) \rightarrow (X, *)$, $g : (E_2, \dot{E}_2) \rightarrow (X, *)$, sendo E_1, E_2 células orientadas de dimensão $p+1, q+1$, respectivamente. Então, $E_1 \times E_2$ é uma célula orientada pelo produto das orientações dadas de E_1 e de E_2 . O ponto-base de $E_1 \times E_2$ é o ponto $(*, *)$. O bordo $S = (E_1 \times E_2)^\cdot = E_1 \times \dot{E}_2 \cup \dot{E}_1 \times E_2$ é então uma $(p+q+1)$ -esfera orientada, e a aplicação $h : (S, *) \rightarrow (X, *)$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x), & (x \in E_1, y \in \dot{E}_2), \\ g(y), & (x \in \dot{E}_1, y \in E_2), \end{cases} \quad (3.1)$$

representa um elemento $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$ que depende apenas das classes de homotopia α, β de f, g respectivamente.

Se $p = q = 0$, então $(I \times I)^\cdot$ é o bordo do quadrado unitário $I \times I$ no plano $\mathbb{R}^2$, com orientação horária, e com a origem como ponto base. As aplicações f, g são laços representando α, β e temos $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1(X)$. A notação $[\alpha, \beta]$ para o produto de Whitehead sugere a notação para comutador de dois elementos em um grupo.

Já em [10], Davis e Kirk apresentam a definição do produto de Whitehead da seguinte forma:

Definição 3.1.1. *Seja $a : S^{k+n-1} \rightarrow S^k \vee S^n$ a aplicação de colagem da $(k+n)$ -célula de $S^k \times S^n$. Dada $\alpha = [f] \in \pi_k(X)$ e $\beta = [g] \in \pi_n(X)$, defina o produto de Whitehead $[\alpha, \beta] \in \pi_{k+n-1}(X)$ como a (classe de homotopia da) composição*

$$S^{k+n-1} \xrightarrow{a} S^k \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

Uma aplicação $h : S^p \times S^q \rightarrow X$ é dita ter o *tipo* (α, β) se, e somente se, $h|_{S^p \times \{*\}}$ representa $\alpha \in \pi_p(X)$ e $h|_{\{*\} \times S^q}$ representa $\beta \in \pi_q(X)$. Uma importante propriedade do produto de Whitehead é:

Teorema 3.1.2. *Sejam $\alpha \in \pi_p(X), \beta \in \pi_q(X)$. Então existe uma aplicação de $S^p \times S^q$ em X do tipo (α, β) se, e somente se, $[\alpha, \beta] = 0$.*

Corolário 3.1.3. *Se X é um H -espaço, então $[\alpha, \beta] = 0$ para todo $\alpha \in \pi_p(X), \beta \in \pi_q(X)$.*

Outra propriedade do produto de Whitehead é a ‘bilinearidade’, isto é, para todo $l, k \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$[l\alpha, k\beta] = lk[\alpha, \beta].$$

Temos, ainda, os seguintes resultados:

Teorema 3.1.4. *Se $\alpha \in \pi_p(X), \beta \in \pi_q(X), \gamma \in \pi_m(S^p), \delta \in \pi_n(S^q)$, e se $[\alpha, \beta] = 0$, então $[\alpha \circ \gamma, \beta \circ \delta] = 0$.*

Teorema 3.1.5. *Sejam $\alpha \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X), \gamma \in \pi_m(S^p), \delta \in \pi_n(S^q)$. Então*

$$[\alpha \circ \Sigma\gamma, \beta \circ \Sigma\delta] = [\alpha, \beta] \circ \Sigma(\gamma \wedge \delta).$$

Observemos que o produto *smash* $\gamma \wedge \delta \in \pi_{m+n}(S^{p+q})$ pelo funtor definido em [47] pág. 480.

Teorema 3.1.6. *Se $\alpha \in \pi_p(X), \beta \in \pi_q(X)$, então $\Sigma[\alpha, \beta] = 0$.*

Também podemos encontrar em [47] pág. 536, informações sobre o produto de Whitehead que envolve apenas um elemento $\beta \in \pi_{r+1}(X)$.

Teorema 3.1.7. *Seja $\beta \in \pi_{r+1}(X)$. Se r é par, $2[\beta, \beta] = 0$ e todos os produtos de Whitehead em β , com 3 ou mais repetições, são zero. Se r é ímpar, $3[[\beta, \beta], \beta] = 0$ e todos os produtos em β com 4 ou mais repetições, se anulam.*

Em [47] pág. 549, temos que o núcleo do homomorfismo suspensão $\Sigma : \pi_q(S^n) \rightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1})$ é gerado por todos os produtos de Whitehead $[\alpha, \beta]$ com $\alpha \in \pi_r(S^n), \beta \in \pi_s(S^n)$ e $r + s = q + 1$, se $q \leq 3n - 3$.

Para finalizarmos esta seção, podemos observar que em [1] foi demonstrado que S^p tem estrutura de H -espaço se, e somente se, $p = 1, 3, 7$. Nestes casos, a aplicação $f : S^p \times S^p \rightarrow S^p$ é a multiplicação dos complexos, dos quatérnios e dos octônios de norma igual a 1, respectivamente (ver também [8]).

Proposição 3.1.8. *Se p é um número ímpar $p \neq 1, 3, 7$, ou seja, S^p não é um H -espaço, então $[\gamma, \gamma]$ é um elemento de ordem 2 de $\pi_{2p-1}(S^p)$, sendo γ um gerador de $\pi_p(S^p) \cong \mathbb{Z}$.*

3.2 A seqüência exata ΣHP

Denotemos por $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ a classe de homotopia da aplicação identidade de S^n . Observe que, $\iota_n \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \iota_p$ para $\alpha \in \pi_p(S^n)$.

Em [20] podemos encontrar o conceito de produto reduzido de S^m e alguns resultados necessários. Denotemos por $(S^m)_\infty$ o produto reduzido de S^m . $(S^m)_\infty$ é um semi-grupo livre com o conjunto $S^m - e_0$ de geradores e a unidade e_0 . Cada ponto de $(S^m)_\infty$ é representado por um produto $x_1 \dots x_t$ de $x_1, \dots, x_t \in S^m$. Fixado um inteiro positivo t , $(S^m)_t$ denota o conjunto de todos os elementos $x_1 \dots x_t$. Então a topologia de $(S^m)_t$ é dada

do produto $S^m \times \dots \times S^m$ de t -vezes S^m segundo a identificação: $S^m \times \dots \times S^m \rightarrow (S^m)_t$ de $(x_1, \dots, x_t) \mapsto x_1 \dots x_t$. $(S^m)_t - (S^m)_{t-1}$ é uma tm -célula aberta. Com a topologia fraca, $(S^m)_\infty$ é um CW -complexo e $(S^m)_t$ é seu tm -esqueleto. Identificamos $(S^m)_1$, com S^m de maneira natural.

Considere uma aplicação $f : (S^q, e_0) \rightarrow (S^m, e_0)$, então um aplicação $(f)_t : (S^q)_t \rightarrow (S^m)_t$ ($t = 1, 2, \dots, \infty$) é dada pela fórmula $(f)_t(y_1 \dots y_t) = f(y_1) \dots f(y_t)$. Naturalmente, $(f)_s = (f)_t|_{(S^q)_s}$ para $s \leq t$.

A injeção canônica $i : S^m \rightarrow \Omega(S^{m+1})$ é estendida a todo $(S^m)_\infty$ de tal modo que $x_1 \dots x_t$ é aplicado a um laço em S^{m+1} , o qual é representado por uma soma dos laços $i(x_1), \dots, i(x_t)$. A aplicação resultante é injetiva, denotada por $i : (S^m)_\infty \rightarrow \Omega(S^{m+1})$ e chamada, também, por uma injeção canônica.

O seguinte diagrama é homotopicamente comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (S^q)_\infty & \xrightarrow{i} & \Omega(S^{q+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S^m)_\infty & \xrightarrow{i} & \Omega(S^{m+1}) \end{array}$$

Um resultado sobre espaços de produtos reduzidos, é que a injeção canônica induz um isomorfismo de grupos de homotopia: $i_q : \pi_q((S^m)_\infty) \rightarrow \pi_q(\Omega(S^{m+1}))$ para todo q .

Temos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. $i_* : [K, (S^m)_\infty]_0 \rightarrow [K, \Omega(S^{m+1})]_0$ é injetiva para um complexo celular finito arbitrário (ou, mais geral, um CW -complexo) K .

Definamos uma aplicação injetiva Ω_1 por

$$\Omega_1 = i_*^{-1} \circ \bar{\Phi} : [\Sigma K, S^{m+1}]_0 \rightarrow [K, (S^m)_\infty]_0$$

lembrando que $\bar{\Phi}$ está definida no Teorema 1.1.4.

Em particular, temos o isomorfismo $\Omega_1 : \pi_{k+1}(S^{m+1}) \approx \pi_k((S^m)_\infty)$ para todo k .

Para a injeção $i' : S^m \rightarrow (S^m)_\infty$, o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} [K, S^m]_0 & \xrightarrow{\Sigma} & [\Sigma K, S^{m+1}]_0 \\ & \searrow i'_* & \downarrow \Omega_1 \\ & & [K, (S^m)_\infty]_0 \end{array} \quad (3.2)$$

Consideremos, agora, a aplicação $h'_m : ((S^m)_2, S^m) \rightarrow (S^{2m}, e_0)$ dada por $h'_m(x, y) = \phi_{m,m}(x, y)$, $x, y \in S^m$, em que $\phi_{m,m}$ é a aplicação que identifica $S^m \wedge S^m$ com S^{2m} definida em [46] 1.3 pág. 6. Seja

$$h_m : ((S^m)_\infty, S^m) \rightarrow ((S^{2m})_\infty, e_0)$$

a extensão combinatorial (veja [20]) de h'_m . Podemos assim , definir o invariante de Hopf generalizado, por

$$H = \Omega_1^{-1} \circ h_{m*} \circ \Omega_1 : [\Sigma K, S^{m+1}]_0 \rightarrow [\Sigma K, S^{2m+1}]_0.$$

Em particular, temos homomorfismos $H : \pi_{i+1}(S^{m+1}) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{2m+1})$.

Proposição 3.2.2. *Sejam K e L complexos celulares finitos. Considere elementos $\alpha \in [\Sigma K, S^{m+1}]_0, \beta \in [L, K]_0, \gamma \in \pi_m(S^r)$, então*

$$H(\alpha \circ \Sigma\beta) = H(\alpha) \circ \Sigma\beta$$

e

$$H(\Sigma\gamma \circ \alpha) = \Sigma(\gamma \wedge \gamma) \circ H(\alpha).$$

Observemos que a discussão sobre $(S^m)_\infty$ e os resultados sobre o invariante de Hopf generalizado são verdadeiros para complexos celulares finitos.

Teorema 3.2.3. *(James [21], Toda [44]) Seja p um primo e $m > 1$. Seja $h : (S^m)_\infty \rightarrow (S^{pm})_\infty$ uma aplicação que leva $(S^m)_{p-1}$ em e_0 e a célula e^{pm} homeomorficamente sobre $S^{pm} - e_0$. Se m é ímpar e $p = 2$, então $h_i : \pi_i((S^m)_\infty, S^m) \rightarrow \pi_i((S^{2m})_\infty)$ são isomorfismos para todo i . Se m é par, então $h_i : \pi_i((S^m)_\infty, (S^m)_{p-1}) \rightarrow \pi_i((S^{pm})_\infty)$ são isomorfismos para $i < (p+1)m - 1$ e isomorfismos de componentes p -primárias para todo i .*

A aplicação $h_m : ((S^m)_\infty, S^m) \rightarrow ((S^{2m})_\infty, e_0)$, $m > 1$, satisfaz a condição do teorema acima. Assim,

$$h_{m_i} : \pi_i((S^m)_\infty, S^m) \rightarrow \pi_i((S^{2m})_\infty)$$

são isomorfismos para todo i se m é ímpar e $i < 3m - 1$ e isomorfismos das componentes 2-primária para todo i se m é par.

Agora, consideremos a seqüência exata do par $((S^m)_\infty, S^m)$:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^m) \longrightarrow \pi_i((S^m)_\infty) \longrightarrow \pi_i((S^m)_\infty, S^m) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^m) \longrightarrow \cdots$$

Definamos o homomorfismo P por

$$P = \partial \circ h_{m_i}^{-1} \circ \Omega_1 : \pi_{i+1}(S^{2m+1}) \rightarrow \pi_{i-1}(S^m) / \partial(\text{Nuch}_{m_i}),$$

em que $\partial(\text{Nuch}_{m_i})$ é trivial se m é ímpar ou se $i < 3m - 1$ e é finito e não tem 2-torção se m é par.

Também definimos um homomorfismo P^{-1} por

$$P^{-1} = \Omega_1^{-1} \circ h_{m*} \circ \partial^{-1} : \pi_{i-1}(S^m) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{2m+1}) / H\pi_{i+1}(S^{m+1}),$$

em que $H\pi_{i+1}(S^{m+1})$ é o núcleo da aplicação P acima.

Da comutatividade de (3.2) e das definições de H e P , temos uma seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^m) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{i+1}(S^{m+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2m+1}) \xrightarrow{P} \pi_{i-1}(S^m) \xrightarrow{\Sigma} \cdots \quad (3.3)$$

para m ímpar ou $i < 3m - 1$. Podemos considerar que a seqüência acima é uma seqüência exata das componentes 2-primárias no caso em que m é par e $i \geq 3m - 1$.

Proposição 3.2.4. $P(\alpha) \circ \beta \subset P(\alpha \circ \Sigma^2 \beta)$ para $\alpha \in \pi_{i+1}(S^{2m+1})$ e $\beta \in \pi_{j-1}(S^{i-1})$. Em particular, $P(\Sigma^2 \gamma) \ni \pm[\iota_m, \iota_m] \circ \gamma$ em que $[\ , \]$ indica o produto de Whitehead. Os símbolos $\subset$ e $\ni$ podem ser trocados por $=$ se m for ímpar, $j < 3m - 1$ ou se os elementos na relação estão nas componentes 2-primária.

Temos que $H[\iota_n, \iota_n] = \pm 2\iota_{2n-1}$ para n par. Então segue da proposição acima:

Proposição 3.2.5. $H(P(\iota_{2n+1})) = \pm 2\iota_{2n-1}$ para n par.

Temos também por Serre [40] que $\pi_i(S^n)$ é finito exceto para os casos que $i = n$ e quando n é par e $i = 2n - 1$.

Denotamos a componente p -primária do grupo $\pi_i(S^n)$ por $\pi_i(S^n; p)$, p primo.

Definamos um subgrupo π_i^n de $\pi_i(S^n)$.

$$\pi_i^n = \begin{cases} \pi_n(S^n), & \text{se } i = n, \\ \Sigma^{-1}(\pi_{2n}(S^{n+1}; 2)), & \text{se } i = 2n - 1, \\ \pi_i(S^n; 2), & \text{se } i \neq n, 2n - 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

O grupo π_{2n-1}^n é dado como segue.

Lema 3.2.6. Se n é ímpar, então $\pi_{2n-1}^n = \pi_{2n-1}(S^n; 2)$. Se n é par e se $[\iota_{n-1}, \iota_{n-1}] \neq 0$, então π_{2n-1}^n é a soma direta de $\pi_{2n-1}(S^n; 2)$ e o grupo cíclico infinito $P(\pi_{2n+1}(S^{2n+1}))$. Se n é par e se $[\iota_{n-1}, \iota_{n-1}] = 0$, então π_{2n-1}^n é a soma direta de $\pi_{2n-1}(S^n; 2)$ e um grupo cíclico infinito gerado por um elemento α tal que $H(\alpha) = \iota_{2n-1}$ e $\Sigma\alpha \in \pi_{2n}^{n+1} = \pi_{2n}(S^{n+1}; 2)$. Em todos os casos $[\iota_n, \iota_n]$ está contido em π_{2n-1}^n .

A seguinte seqüência exata é a principal ferramenta para calcular as componentes 2-primárias dos grupos de homotopia $\pi_{n+k}(S^n)$:

Proposição 3.2.7. A seguinte seqüência é exata:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i^n \xrightarrow{\Sigma} \pi_{i+1}^{n+1} \xrightarrow{H} \pi_{i+1}^{2n+1} \xrightarrow{P} \pi_{i-1}^n \xrightarrow{\Sigma} \pi_i^{n+1} \longrightarrow \cdots \quad (3.5)$$

Lembramos que as provas dos resultados apresentados neste capítulo, junto com uma exposição mais completa, podem ser encontrados em Toda [46].

Sejam p um primo e $(G_k; p)$ a componente p -primária de grupo estável G_k . Pela exatidão da seqüência (3.5) temos que $\Sigma^{m-n} : \pi_{n+k}^n \rightarrow \pi_{m+k}^m$, $m \geq n$, e $\Sigma^\infty : \pi_{n+k}^n \rightarrow (G_k; 2)$ são isomorfismos para $n \geq k + 2$.

Quando $p = 2$ temos que se $n \geq 1$, $\alpha \in \pi_{k+n}(S^m; 2)$, $\gamma \in \pi_i(S^j; 2)$. Então

$$\alpha \circ \Sigma^n \pi_j(S^k) = \alpha \circ \Sigma^n \pi_j^k \subset \pi_{j+n}^m$$

e

$$\pi_j(S^k) \circ \gamma = \pi_j^k \circ \gamma \subset \pi_i^k.$$

Sabemos também que, para $n = 2, 4, 8$, existe a aplicação de Hopf $h : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ de uma fibra S^{n-1} e que

$$\Sigma + h_i : \pi_{i-1}(S^{n-1}) \oplus \pi_i(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_i(S^n)$$

é um isomorfismo para todo i (ver [43]). O isomorfismo ainda continua se trocarmos h por outra aplicação com invariante de Hopf igual a ± 1 , pois os isomorfismos acima são induzidos pela aplicação $i \cdot \Omega h : S^{n-1} \times \Omega(S^{2n-1}) \rightarrow \Omega(S^n)$, com ‘ $\cdot$ ’ denotando a multiplicação-laço em $\Omega(S^n)$. Essa aplicação induz os isomorfismos dos grupos de co-homologia, de homologia e homotopia. E disso, temos:

Proposição 3.2.8. *Seja α um elemento de π_{2n-1}^n tal que $H(\alpha) = \iota_{2n-1}$ ou $-\iota_{2n-1}$, então a correspondência $(\beta, \gamma) \mapsto \Sigma\beta + \alpha \circ \gamma$ produz isomorfismos de $\pi_{i-1}^{n-1} \oplus \pi_i^{2n-1}$ sobre π_i^n para todo i . Em particular $\Sigma : \pi_{i-1}^{n-1} \rightarrow \pi_i^n$ é um isomorfismo para todo i .*

Na qual aplicamos:

Lema 3.2.9. *Seja $n = 2, 4$ ou 8 . $\Sigma : \pi_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_i(S^n)$ é um isomorfismo para todo i . $r\iota_n \circ \beta = r\beta$ para um inteiro arbitrário r e para $\beta \in \pi_{i-1}(S^{n-1})$.*

Temos ainda que se n é par e se $P(\iota_{2n-1}) = [\iota_{n-1}, \iota_{n-1}] \neq 0$, então $\pi_{2n-1}^n = \Sigma\pi_{2n-2}^{n-1} \oplus P\pi_{2n+2}^{2n+1} \approx \Sigma\pi_{2n-2}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}$ e $\pi_{2n}^{n+1} = \Sigma^2\pi_{2n-2}^{n-1} \approx \Sigma\pi_{2n-2}^{n-1}$. Se $P(\iota_{2n-1}) = [\iota_{n-1}, \iota_{n-1}] = 0$, então $\Sigma^2 : \pi_{2n-2}^{n-1} \rightarrow \pi_{2n}^{n+1}$ é um isomorfismo e $\pi_{2n}^{n+1}/\Sigma^2\pi_{2n-2}^{n-1} \approx \mathbb{Z}/2$. Um elemento α de π_{2n-1}^n é aplicado em $\Sigma\pi_{2n-2}^{n-1}$ por Σ se, e somente se, $H(\alpha) \in 2\pi_{2n-1}^{2n-1}$.

E temos também $\pi_m^n \circ \pi_k^m \subset \pi_k^n$.

3.3 As componentes primárias de $\pi_{2+k}(S^2)$ e $\pi_{3+k}(S^3)$ com $1 \leq k \leq 19$

Para um número primo p , a componente p -primária de um grupo abeliano é definida como o subgrupo consistindo dos elementos de ordem p^r , $r = 1, 2, \dots$. Se temos um grupo de torção, então ele é a soma direta de suas componentes p -primárias para todo p . Assim, para calcular um certo grupo de torção é apenas necessário calcular todas as suas componentes p -primárias.

Iniciaremos com os cálculos para as componentes 2-primária de $\pi_{2+k}(S^2)$ e $\pi_{3+k}(S^3)$. À medida em que as componentes forem sendo calculadas, enunciaremos os resultados

de Toda [46] para resultados mais gerais, ou seja, para dimensões maiores que 3. Algumas relações bastante usadas neste e no próximo capítulo estão listadas no Apêndice do Capítulo 4. Assim, para não nos tornarmos repetitivos, apenas indicamos que a relação se encontra no Apêndice. Já no final da seção, apresentaremos alguns resultados para as componentes p -primárias, com p ímpar.

Temos, por Hu ([17] pág. 319 e 320), os seguintes resultados que nos mostram a importância de encontrar as componentes p -primárias dos grupos de homotopia de S^3 .

Corolário 3.3.1. *Se $n \geq 3$ é um inteiro ímpar, p um número primo, e $m < n + 4p - 6$, então as componentes p -primárias de $\pi_m(S^n)$ e $\pi_{m-n+3}(S^3)$ são isomorfas.*

Corolário 3.3.2. *Se $n \geq 3$ é um inteiro ímpar, p um número primo, então a componente p -primária de $\pi_m(S^n)$ é 0 se $m < n + 2p - 3$ e é $\mathbb{Z}/p$ se $m = n + 2p - 3$.*

Aqui, faremos os cálculos utilizando a seqüência ΣHP . Antes disso, definiremos composição secundária. Para uma tripla (α, β, γ) de elementos de $\pi_{k+n}(S^m) \times \pi_j(S^k) \times \pi_i(S^j)$, tendo como composições que se anulam $\alpha \circ \Sigma^n \beta = 0$ e $\beta \circ \gamma = 0$, a composição secundária

$$\{\alpha, \Sigma^n \beta, \Sigma^n \gamma\}_n \subset \pi_{i+n+1}(S^m)$$

está definida. Ela é a classe lateral do subgrupo $\alpha \circ \Sigma^n \pi_{i+1}(S^k) + \pi_{j+n+1}(S^m) \circ \Sigma_{n+1} \gamma$ de $\pi_{i+n+1}(S^m)$. A composição secundária é representada por uma composição $f \circ \Sigma^n g : S^{i+n+1} \rightarrow \Sigma^n K \rightarrow S^m$ da n -ésima suspensão $\Sigma^n g$ de uma aplicação $g : S^{i+1} \rightarrow K$ e de uma aplicação $f : \Sigma^n K \rightarrow S^n$ tal que $K = S^n \sqcup e^{j+1}$ é um complexo celular tendo β como a classe da aplicação de colagem de e^{j+1} . A restrição de f sobre $\Sigma^n S^k = S^{n+k}$ representa α e g aplica o hemisfério superior de S^{i+1} em K como a suspensão de um representante de γ e o hemisfério inferior de S^{i+1} em S^k .

Voltando agora ao cálculo dos grupos de homotopia, recordemos que $\pi_i^1 = 0$ para $i > 1$, $\pi_i^n = 0$ para $i < n$ e $\pi_n^n \approx \mathbb{Z}$. Disso, segue que $\pi_2^1 = 0$. Pela Proposição 3.2.8 temos que $H : \pi_3^2 \rightarrow \pi_3^3$ é um isomorfismo. Seja $\eta_2 \in \pi_3^2$ a classe tal que $H(\eta_2) = \iota_3$, então η_2 gera $\pi_3^2 \approx \mathbb{Z}$. Denotemos por $\eta_n = \Sigma^{n-2} \eta_2$ para $n \geq 2$ e $\eta = \Sigma^\infty \eta_2$.

Pela Proposição 3.2.5, $H(P(\iota_5)) = \pm H[\iota_2, \iota_2] = \pm 2\iota_3$. Assim, $P(\iota_5) = \pm 2\eta_3$, já que $H : \pi_3^2 \rightarrow \pi_3^3$ é um isomorfismo.

Considere a seqüência exata

$$\pi_5^5 \xrightarrow{P} \pi_3^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_4^3 \longrightarrow \pi_5^4 = 0.$$

Então Σ é sobrejetiva e seu núcleo é gerado por $2\eta_2$. Logo, $\pi_4^3 = [\eta_3] \approx \mathbb{Z}/2$.

Proposição 3.3.3. $\pi_3^2 = [\eta_2] \approx \mathbb{Z}$, $\pi_{n+1}^n = [\eta_n] \approx \mathbb{Z}/2$ para $n \geq 3$ e $(G_1, 2) = [\eta] \approx \mathbb{Z}/2$. Temos as relações $H(\eta_2) = \iota_3$ e $P(\iota_5) = \pm 2\eta_3$.

Denotemos $\eta_n^2 = \eta_n \circ \eta_{n+1}$ e, do fato que a composição $\alpha \rightarrow \eta_2 \circ \alpha$ define um isomorfismo $\pi_i^3 \approx \pi_i^2$ para $i \geq 3$, segue $\pi_4^2 = [\eta_2^2] \approx \mathbb{Z}/2$.

Considere a seqüência exata de (3.5)

$$\pi_6^3 \xrightarrow{H} \pi_6^5 \xrightarrow{P} \pi_4^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_5^3 \xrightarrow{H} \pi_5^5 \xrightarrow{P} \pi_3^2.$$

Pela Proposição 3.3.3, $P : \pi_5^5 \rightarrow \pi_3^2$ é um isomorfismo. Então $H(\pi_5^3) = 0$ e Σ é sobrejetiva. Pela relação (3) do Apêndice, e pela Proposição 3.3.3, $H : \pi_6^3 \rightarrow \pi_6^5$ é sobrejetiva. Então $P(\pi_6^5) = 0$ e Σ é um isomorfismo. Assim, temos que $\Sigma : \pi_4^2 \rightarrow \pi_5^3$ é um isomorfismo e temos que $\pi_5^3 = [\eta_3^2] \approx \mathbb{Z}/2$.

Proposição 3.3.4. $\pi_{n+2}^n = [\eta_n^2] \approx \mathbb{Z}/2$ para $n \geq 2$. $(G_2; 2) = [\eta^2] \approx \mathbb{Z}/2$.

Dessa proposição e da relação (2) do Apêndice, temos que $\pi_5^2 = [\eta_2 \circ \eta_3^2] = [\eta_2^3] \approx \mathbb{Z}/2$.

Um resultado bastante utilizado para determinarmos os geradores dos grupos é o seguinte ([46] pág. 40)

Lema 3.3.5. *Assuma que $2\alpha = 0$ para um elemento $\alpha \in \pi_i(S^3)$, então para um elemento arbitrário $\beta \in \{\eta_3, \epsilon\iota_4, \Sigma\alpha\}_1$, as relações $H(\beta) = \Sigma^2\alpha$ e $2\beta = \eta_3 \circ \Sigma\alpha \circ \eta_{i+1}$ valem. O elemento β pertence a π_{i+2}^3 . $P(\Sigma^2\alpha) = 0$.*

Temos que η_3 satisfaz o Lema acima e, para um elemento ν' de $\{\eta_3, 2\iota_4, \eta_4\}_1$, obtemos a relação (3) do Apêndice.

Considere a seqüência exata de (3.5)

$$\pi_7^3 \xrightarrow{H} \pi_7^5 \xrightarrow{P} \pi_5^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_6^3 \xrightarrow{H} \pi_6^5 \xrightarrow{P} \pi_4^2.$$

Pela Proposição 3.2.2 e pela relação (3) do Apêndice do Capítulo 4, $H(\nu' \circ \eta_6) = (\nu') \circ \eta_6 = \eta_5 \circ \eta_6 = \eta_5^2$. Então segue da Proposição 3.3.4, que $H : \pi_7^3 \rightarrow \pi_7^5$ é sobrejetiva e assim Σ é um isomorfismo. Com isso, $\eta_3^3 = \Sigma\eta_2^3$ é de ordem 2. Segue da relação (3) do Apêndice do Capítulo 4 que ν' é de ordem 4. Como $\pi_6^5 = [\eta_5] \approx \mathbb{Z}/2$, ν' é um gerador de π_6^3 . Assim, $\pi_6^3 = [\nu'] \approx \mathbb{Z}/4$.

Seja ν_4 a classe da aplicação de Hopf $h_4 : S^7 \rightarrow S^4$. Então ν_4 é um elemento de ordem infinita que gera o somando de ordem infinita $\pi_7 = \mathbb{Z}[\nu_4] \oplus \mathbb{Z}/12[\Sigma\xi]$ ([17] 16.3 pág. 329). Consideremos também $\nu_n = \Sigma^{n-4}\nu_4$.

Proposição 3.3.6. $\pi_5^2 = [\eta_2^3] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_6^3 = [\nu'] \approx \mathbb{Z}/4,$$

$$\pi_7^4 = [\nu_4] \oplus [\Sigma\nu'] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4,$$

$$\pi_{n+3}^n = [\nu_n] \approx \mathbb{Z}/8 \text{ para } n \geq 5,$$

$$(G_3; 2) = [\nu] \approx \mathbb{Z}/8.$$

Dessa proposição e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4, temos $\pi_6^2 = [\eta_2 \circ \nu'] \approx \mathbb{Z}/4$.

Da relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, $\Sigma\pi_6^2 = [\Sigma(\eta_2 \circ \nu')] = 0$, então temos uma seqüência exata $0 \longrightarrow \pi_7^3 \xrightarrow{H} \pi_7^5$ de (3.5). Pela relação (6) do Apêndice do Capítulo 4 e pela Proposição 3.3.4, temos que H é um isomorfismo e $\pi_7^3 = [\nu' \circ \eta_6] \approx \mathbb{Z}/2$.

Proposição 3.3.7. $\pi_6^2 = [\eta_2 \circ \nu'] \approx \mathbb{Z}/4$,

$$\pi_7^3 = [\nu' \circ \eta_6] \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_8^4 = [\nu_4 \circ \eta_7] \oplus [\Sigma \nu' \circ \eta_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_9^5 = [\nu_5 \circ \eta_8] \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+4}^n = 0 \text{ para } n \geq 6,$$

$$(G_4; 2) = 0.$$

Dessa proposição e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4, temos $\pi_7^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6] \approx \mathbb{Z}/2$.

Pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, $\Sigma \pi_7^2 = [\sigma(\eta_2 \circ \nu') \circ \eta_7] = 0$. Segue da exatidão de (3.5) que a seqüência $0 \longrightarrow \pi_8^3 \xrightarrow{H} \pi_8^5 \xrightarrow{P} \pi_6^2$ é exata. Pelas relações (5) e (8) do Apêndice do Capítulo 4 e pela Proposição 3.3.6, temos que o núcleo de P é gerado por $4\nu_5 = \eta_5^3$. Pela Proposição 3.2.2 e pela relação (3) do Apêndice do Capítulo 4,

$$H(\nu' \circ \eta_6^2) = H(\nu') \circ \eta_6^2 = \eta_5 \circ \eta_6^2 = \eta_5^3.$$

Segue da exatidão da seqüência acima $\pi_8^3 = [\nu' \circ \eta_6^2] \approx \mathbb{Z}/2$.

Proposição 3.3.8. $\pi_7^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_8^3 = [\nu' \circ \eta_6^2] \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_9^4 = [\nu_4 \circ \eta_7^2] \oplus [\Sigma \nu' \circ \eta_7^2] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{10}^5 = [\nu_5 \circ \eta_8^2] \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{11}^6 = [P(\nu_{13})] \approx \mathbb{Z},$$

$$\pi_{n+5}^n = (G_5; 2) = 0 \text{ para } n \geq 7.$$

Dessa proposição e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4 temos $\pi_8^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6^2] \approx \mathbb{Z}/2$.

Pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, $\Sigma \pi_8^2 = [\Sigma(\eta_2 \circ \nu') \circ \eta_6^2] = 0$. Temos também $\Sigma \pi_7^2 = 0$ na Proposição 3.3.8. Segue da exatidão da seqüência (3.5) que a seqüência

$$0 \longrightarrow \pi_9^3 \xrightarrow{H} \pi_9^5 \xrightarrow{P} \pi_7^2 \longrightarrow 0$$

é exata. Pela Proposições 3.3.7 e 3.3.8, temos que P é um isomorfismo. Então segue que $\pi_9^3 = 0$.

Denotemos $\nu_n^2 = \nu_n \circ \nu_{n+3}$ para $n \geq 4$ e $\nu^2 = \nu \circ \nu$.

Proposição 3.3.9. $\pi_8^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6^2] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_9^3 = 0,$$

$$\pi_{10}^4 = [\nu_4^2] \approx \mathbb{Z}/8,$$

$$\pi_{n+6}^n = [\nu_n^2] \approx \mathbb{Z}/2, \text{ para } n \geq 5,$$

$$(G_6; 2) = [\nu^2] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Dessa proposição e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4 temos que $\pi_9^2 = 0$.

Segue de (3.5) que a seqüência

$$0 = \pi_9^2 \longrightarrow \pi_{10}^3 \xrightarrow{H} \pi_{10}^5 \xrightarrow{P} \pi_8^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_9^3 = 0$$

é exata. Pelas Proposições 3.3.8 e 3.3.9, vemos que P é um isomorfismo. Segue que $\pi_{10}^3 = 0$.

O Lema 5.13 ([46] pág. 48), nos diz que σ''' é o gerador de $\pi_{12}^5 \approx \mathbb{Z}/2$, e temos também:

Lema 3.3.10. *Existem elementos $\sigma_8 \in \pi_{15}^8$, $\sigma' \in \pi_{14}^7$ e $\sigma'' \in \pi_{13}^6$ tais que $H(\sigma_8) = \iota_{15}$, $2\Sigma\sigma_8 = \Sigma^2\sigma''$, $H(\sigma') = \eta_{13}$, $2\sigma' = \Sigma\sigma''$, $H(\sigma'') = \eta_{11}^2$, $2\sigma'' = \Sigma\sigma'''$.*

E com isso,

Proposição 3.3.11. $\pi_9^2 = \pi_{10}^3 = \pi_{11}^4 = 0$,

$$\pi_{12}^5 = [\sigma'''] \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{13}^6 = [\sigma''] \approx \mathbb{Z}/4,$$

$$\pi_{14}^7 = [\sigma'] \approx \mathbb{Z}/8,$$

$$\pi_{15}^8 = [\sigma_8] \oplus [\Sigma\sigma'] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8,$$

$$\pi_{n+7}^n = [\sigma_n] \approx \mathbb{Z}/16, \text{ para } n \geq 9,$$

$$(G_7; 2) = [\sigma] \approx \mathbb{Z}/16.$$

Consideremos agora os elementos:

- $\epsilon_3 \in \pi_{11}^3$, com $\epsilon_n = \Sigma^{n-3}\epsilon_3$ para $n \geq 3$ e $\epsilon = \Sigma^\infty\epsilon_3$.

Temos o seguinte Lema:

Lema 3.3.12. $H(\epsilon_3) = \nu_5^2$ e $2\epsilon_n = 2\epsilon = 0$, $n \geq 3$.

- $\bar{\nu}_6 \in \pi_{14}^6/[P(\nu_{13})]$, com $\bar{\nu}_n = \Sigma^{n-6}\bar{\nu}_6$ para $n \geq 6$ e $\bar{\nu} = \Sigma^\infty\bar{\nu}_6$.
- $\mu_3 \in \pi_{12}^3$, com $H(\mu_3) = \sigma'''$, $\mu_n = \Sigma^{n-3}\mu_3$ e $\mu = \Sigma^\infty\mu_3$.
- $\epsilon' \in \pi_{13}^3$.

Temos o seguinte Lema:

Lema 3.3.13. $H(\epsilon') = \epsilon_5$, $2\epsilon' = \eta_3^2 \circ \epsilon_5$ e $\Sigma^2\epsilon'$ é divisível por 2.

- $\zeta_5 \in \pi_{16}^5/(\nu_5 \circ \Sigma\pi_{15}^7)$, com $\zeta_n = \Sigma^{n-5}\zeta_5$ para $n \geq 5$ e $\zeta = \Sigma^\infty\zeta_5$.

Assim, temos primeiro que $\pi_{10}^2 = 0$ pela relação (2) do Apêndice do Capítulo 4 e pela Proposição 3.3.11. Na seqüência exata

$$0 = \pi_{10}^2 \longrightarrow \pi_{11}^3 \xrightarrow{H} \pi_{11}^5$$

de (3.5), $H(\epsilon_3) = \nu_5^2$ pelo Lema 3.3.12, e essa imagem gera π_{11}^5 pela Proposição 3.3.9. Segue então $\pi_{11}^3 = [\epsilon_3] \approx \mathbb{Z}/2$ e assim $\pi_{11}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon_3] \approx \mathbb{Z}/2$ pela relação (2) do Apêndice do Capítulo 4.

Consideremos agora a seqüência exata

$$\pi_{13}^5 \xrightarrow{P} \pi_{11}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{12}^3 \xrightarrow{H} \pi_{12}^5 \longrightarrow \pi_{10}^2 = 0$$

de (3.5). Pelo Lema 3.3.5, $P\pi_{13}^5 = [P(\epsilon_5)] = [P(\Sigma^2\epsilon_3)] = 0$ já que $2\epsilon_3 = 0$. Segue que Σ é um isomorfismo. Pela Proposição 3.3.11 e pela relação (10) do Apêndice do Capítulo 4, temos que H é sobrejetiva e $\pi_{12}^3 = [\mu_3] \oplus [\eta_3 \circ \epsilon_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Teorema 3.3.14. $\pi_{10}^2 = 0$,

$$\pi_{n+8}^n = [\epsilon_n] \approx \mathbb{Z}/2, \text{ para } n = 3, 4, 5,$$

$$\pi_{14}^6 = [\bar{\nu}_6] \oplus [\epsilon_6] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{15}^7 = [\sigma' \circ \eta_{14}] \oplus [\bar{\nu}_7] \oplus [\epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{16}^8 = [\sigma_8 \circ \eta_{15}] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \eta_{15}] \oplus [\bar{\nu}_8] \oplus [\epsilon_8] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{17}^9 = [\sigma_9 \circ \eta_{16}] \oplus [\bar{\nu}_9] \oplus [\epsilon_9] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+8}^n = [\bar{\nu}_n] \oplus [\epsilon_n] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \text{ para } n \geq 10,$$

$$(G_8; 2) = [\bar{\nu}] \oplus [\epsilon] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.15. $\pi_{11}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon_3] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_{12}^3 = [\mu_3] \oplus [\eta_3 \circ \epsilon_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+9}^n = [\nu_n^3] \oplus [\mu_n] \oplus [\eta_n \circ \epsilon_{n+1}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \text{ para } n = 4, 5, 6,$$

$$\pi_{16}^7 = [\sigma' \circ \eta_{14}^2] \oplus [\nu_7^3] \oplus [\mu_7] \oplus [\eta_7 \circ \epsilon_8] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{17}^8 = [\sigma_8 \circ \eta_{15}^2] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \eta_{15}^2] \oplus [\nu_8^3] \oplus [\mu_8] \oplus [\eta_8 \circ \epsilon_9] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{18}^9 = [\sigma_9 \circ \eta_{16}^2] \oplus [\nu_9^3] \oplus [\mu_9] \oplus [\eta_9 \circ \epsilon_{10}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{19}^{10} = [\Delta(\iota_{21})] \oplus [\nu_{10}^3] \oplus [\mu_{10}] \oplus [\eta_{10} \circ \epsilon_{11}] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+9}^n = [\nu_n^3] \oplus [\mu_n] \oplus [\eta_n \circ \epsilon_{n+1}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \text{ para } n \geq 11,$$

$$(G_9; 2) = [\nu^3] \oplus [\mu] \oplus [\eta \circ \epsilon] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Aplicando o Lema 3.3.5 ao elemento μ_3 , temos um elemento $\mu' \in \pi_{14}^3$, tal que $H(\mu') = \Sigma^2 \mu_3 = \mu_5$ e $2\mu' = \eta_3 \circ \mu_4 \circ \eta_{13}$.

Desse último teorema e pela relação (2) do Apêndice do Capítulo 4, temos $\pi_{12}^2 = [\eta_2 \circ \mu_3] \oplus [\eta_2^2 \circ \epsilon_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

A imagem de H nas relações (12) e (13) do Apêndice do Capítulo 4, geram π_{14}^5 , pelo Teorema 3.3.15. Assim, na sequência exata

$$\pi_{14}^3 \xrightarrow{H} \pi_{14}^5 \xrightarrow{P} \pi_{12}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{13}^3 \xrightarrow{H} \pi_{13}^5$$

de (3.5), o homomorfismo $H : \pi_{14}^3 \rightarrow \pi_{14}^5$ é sobrejetivo. Então temos que Σ é um isomorfismo. Pelo Lema 3.3.13 e pelo Teorema 3.3.14 tem-se $H : \pi_{13}^3 \rightarrow \pi_{13}^5$ sobrejetivo e o grupo π_{13}^3 é de ordem 8 e gerado por ϵ' , $\eta_3^2 \circ \epsilon_5 = 2\epsilon'$ e $\eta_3 \circ \mu_4$. Assim, $\pi_{13}^3 = [\epsilon'] \oplus [\eta_3 \circ \mu_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Teorema 3.3.16. $\pi_{12}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon_4] \oplus [\eta_2 \circ \mu_3] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_{13}^3 = [\epsilon'] \oplus [\eta_3 \circ \mu_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{14}^4 = [\nu_4 \circ \sigma'] \oplus [\Sigma \epsilon'] \oplus [\eta_4 \circ \mu_5] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+10}^n = [\nu_n \circ \sigma_{n+3}] \oplus [\eta_n \circ \mu_{n+1}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2, \text{ para } n = 5, 6, 7,$$

$$\pi_{18}^8 = [\sigma_8 \circ \nu_{15}] \oplus [\nu_8 \circ \sigma_{11}] \oplus [\eta_8 \circ \mu_9] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{19}^9 = [\sigma_9 \circ \nu_{16}] \oplus [\eta_9 \circ \mu_{10}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{20}^{10} = [\sigma_{10} \circ \nu_{17}] \oplus [\eta_{10} \circ \mu_{11}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{21}^{11} = [\sigma_{11} \circ \nu_{18}] \oplus [\eta_{11} \circ \mu_{12}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{n+10}^n = [\eta_n \circ \mu_{n+1}] \approx \mathbb{Z}/2, \text{ para } n \geq 12,$$

$$(G_{10}; 2) = [\eta \circ \mu] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.17. $\pi_{13}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon'] \oplus [\eta_2^2 \circ \mu_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{14}^3 = [\mu'] \oplus [\epsilon_3 \circ \nu_{11}] \oplus [\nu' \circ \epsilon_6] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{15}^4 = [\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14}] \oplus [\nu_4 \circ \bar{\nu}_7] \oplus [\nu_4 \circ \epsilon_7] \oplus [\Sigma\mu'] \oplus [\epsilon_4 \circ \nu_{12}] \oplus [\Sigma\nu' \circ \epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{16}^5 = [\zeta_5] \oplus [\nu_5 \circ \bar{\nu}_8] \oplus [\nu_5 \circ \epsilon_8] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{17}^6 = [\zeta_6] \oplus [\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{n+11}^n = [\zeta_n] \oplus [\bar{\nu}_n \circ \nu_{n+8}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$, para $n = 7, 8, 9$,
 $\pi_{n+11}^n = [\zeta_n] \approx \mathbb{Z}/8$, para $n = 10, 11$ e para $n \geq 13$,
 $\pi_{23}^{12} = [P(\iota_{25})] \oplus [\zeta_{12}] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8$,
 $(G_{11}; 2) = [\zeta] \approx \mathbb{Z}/8$.

Desse último teorema, e pelas relações (2) e (16) do Apêndice do Capítulo 4, temos

$$\begin{aligned} \pi_{14}^2 &= [\eta_2 \circ \mu'] \oplus [\eta_2 \circ \epsilon_3 \circ \nu_{11}] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \epsilon_6] \\ &= [\eta_2 \circ \mu'] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\nu}_6] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \epsilon_6] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, $\Sigma(\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\nu}_6) = \Sigma(\eta_2 \circ \nu' \circ \epsilon_6) = 0$. Pela Proposição 3.2.4 e pelo Lema 3.3.5, $P(2\zeta_5) = P(\pm\Sigma\mu') = P(\iota_5) \circ (\pm\mu') = 2(\eta_2 \circ \mu')$. Assim, $P(\zeta_5) = \pm(\eta_2 \circ \mu') \bmod [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\nu}_6] + [\eta_2 \circ \nu' \circ \epsilon_6]$ e $\Sigma(\eta_2 \circ \mu') = 0$. Então $\Sigma\pi_{14}^2 = 0$ e temos da exatidão de (3.5) que as seguintes seqüências são exatas.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \pi_{15}^3 &\xrightarrow{H} \pi_{15}^5 \xrightarrow{P} \pi_{13}^2 \\ \pi_{17}^5 &\xrightarrow{P} \pi_{15}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{16}^3 \xrightarrow{H} \pi_{16}^5 \xrightarrow{P} \pi_{14}^2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Pela relação (15) e pelo Teorema 3.3.17, a imagem de $\nu_5 \circ \sigma_8$ segundo P é um elemento de ordem 4 em π_{13}^2 . Como $\pi_{15}^5 = [\nu_5 \circ \sigma_8] \oplus [\eta_5 \circ \mu_6] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$, pelo Teorema 3.3.16, o núcleo de $P : \pi_{15}^5 \rightarrow \pi_{13}^2$ tem no máximo 4 elementos. Pela Proposição 3.2.2, e pelas relações (3) e (14) do Apêndice do Capítulo 4, temos

$$H(\nu' \circ \mu_6) = \eta_5 \circ \mu_6 \text{ e } H(\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7) = \eta_5^2 \epsilon_7 = 4(\nu_5 \circ \sigma_8).$$

Esses elementos geram o núcleo do homomorfismo P e segue da exatidão da primeira seqüência dada acima que

$$\pi_{15}^3 = [\nu' \circ \mu_6] \oplus [\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

Pela relação (2) do Apêndice do Capítulo 4,

$$\pi_{15}^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \mu_6] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Temos, pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4 que

$$\Sigma\pi_{15}^2 = [\Sigma(\eta_2 \circ \nu) \circ \mu_7] \oplus [\Sigma(\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_7 \circ \epsilon_8)] = 0.$$

Segue da exatidão da segunda seqüência dada acima que $P : \pi_{17}^5 \rightarrow \pi_{15}^2$ é sobrejetiva, e o grupo π_{16}^3 é isomorfo ao núcleo de $P : \pi_{16}^5 \rightarrow \pi_{14}^2$ o qual é um homomorfismo sobrejetor.

Como $\pi_{16}^5 \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, pelo Teorema 3.3.17, então o núcleo de P tem apenas 2 elementos 0 e $4\zeta_5$. Pela Proposição 3.2.2, e pelas relações (3) e (17) do Apêndice do Capítulo 4,

$$H(\nu' \circ \eta_6 \mu_7) = \eta_5^2 \circ \mu_7 = 4\zeta_5.$$

E assim,

$$\pi_{16}^3 = [\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.18. $\pi_{14}^2 = [\eta_2 \circ \mu'] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\nu}_6] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \epsilon_6] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{15}^3 = [\nu' \circ \mu_6] \oplus [\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{16}^4 = [\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14}^2] \oplus [\nu_4^4] \oplus [\nu_4 \circ \mu_7] \oplus [\nu_4 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8] \oplus [\Sigma \nu' \circ \mu_7] \oplus [\Sigma \nu' \circ \eta_7 \circ \epsilon_8] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{17}^5 = [\nu_5^4] \oplus [\nu_5 \circ \mu_8] \oplus [\nu_5 \circ \eta_8 \circ \epsilon_9] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{18}^6 = [P(\sigma_{13})] \approx \mathbb{Z}/16$,
 $\pi_{n+12}^n = 0$, para $n = 7, 8, 9$,
 $\pi_{22}^{10} = [P(\nu_{21})] \approx \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{23}^{11} = [\theta'] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{24}^{12} = [\theta] \oplus [\Sigma \theta'] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{25}^{13} = [\Sigma \theta] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{n+12}^n = (G_{12}; 2) = 0$ para $n \geq 14$.

Teorema 3.3.19. $\pi_{15}^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \mu_6] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{16}^3 = [\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{17}^4 = [\nu_4^2 \circ \sigma_8] \oplus [\nu_4 \circ \eta_7 \circ \mu_8] \oplus [\Sigma \nu' \circ \eta_7 \circ \mu_8] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{18}^5 = [\nu_5 \circ \sigma_8 \circ \nu_5] \oplus [\nu_5 \circ \eta_8 \circ \mu_9] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{n+13}^n = [\nu_n \circ \sigma_{n+3} \circ \nu_{n+10}] \approx \mathbb{Z}/2$, para $n = 6, 7$,
 $\pi_{21}^8 = [\sigma_8 \circ \nu_{15}^2] \oplus [\nu_8 \circ \sigma_{11} \circ \nu_{18}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{n+13}^n = [\sigma_n \circ \nu_{n+7}^2] \approx \mathbb{Z}/2$, para $n = 9, 10$,
 $\pi_{24}^{11} = [\theta' \circ \eta_{23}] \oplus [\sigma_{11} \circ \nu_{18}^2] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{25}^{12} = [\theta \circ \eta_{24}] \oplus [\Sigma \theta' \circ \eta_{24}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{26}^{13} = [\Sigma \theta \circ \eta_{25}] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{27}^{14} = [P(\iota_{29})] \approx \mathbb{Z}$,
 $\pi_{n+13}^n = (G_{13}; 2) = 0$ para $n \geq 15$.

Os geradores θ e θ' foram introduzidos no Lema 7.5 ([46] pág. 74).

Desse teorema e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4, temos $\pi_{16}^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_6] \approx \mathbb{Z}/2$.

Pela Proposição 3.2.4 e pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, temos:

$$P(\nu_5 \circ \eta_8 \circ \mu_9) = \eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \text{ e } \Sigma \pi_{16}^2 = 0.$$

Segue da exatidão da sequência (3.5) que $H : \pi_{17}^3 \rightarrow \pi_{17}^5$ aplica π_{17}^3 isomorficamente no núcleo de $P : \pi_{17}^5 \rightarrow \pi_{15}^2$ a qual é sobrejetiva, como vimos na prova anterior. Pelos Teoremas 3.3.18 e 3.3.19, os grupos π_{17}^5 e π_{15}^2 têm 8 e 4 elementos, respectivamente. Assim, o núcleo de P é isomorfo a $\mathbb{Z}/2$. Pela Proposição 3.2.2 e Lema 3.3.12,

$$H(\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2) = H(\epsilon_3) \circ \nu_{11}^2 = \nu_5^4,$$

e $\nu_5^4 \neq 0$ pelo Teorema 3.3.18. Conseqüentemente, obtemos

$$\pi_{17}^3 = [\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Temos os elementos $\kappa_7 \in \pi_{21}^7$, $\bar{\epsilon}_3 \in \pi_{18}^3$, com $\kappa_n = \Sigma^{n-7}\kappa_7$ para $n \geq 7$ e $\kappa = \Sigma^\infty \kappa_7$, $\bar{\epsilon}_n = \Sigma^{n-3}\bar{\epsilon}_3$ para $n \geq 3$ e $\bar{\epsilon} = \Sigma^\infty \bar{\epsilon}_3$. Podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 3.3.20. $\pi_{16}^2 = [\eta_2 \circ \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_6] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{17}^3 = [\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2] \approx \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{18}^4 = [\epsilon_4 \circ \nu_{12}^2] \oplus [\nu_4 \circ \zeta_7] \oplus [\nu_4 \circ \bar{\nu}_7 \circ \nu_{15}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{19}^5 = [\nu_5 \circ \zeta_8] \oplus [\nu_5 \circ \bar{\nu}_8 \circ \nu_{16}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{20}^6 = [\sigma'' \circ \sigma_{13}] \oplus [\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}^2] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{21}^7 = [\sigma' \circ \sigma_{14}] \oplus [\kappa_7] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{22}^8 = [\sigma_8^2] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \sigma_{15}] \oplus [\kappa_8] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{23}^9 = [\sigma_9^2] \oplus [\kappa_9] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{n+14}^n = [\sigma_n^2] \oplus [\kappa_n] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2$, para $n = 10, 11, 13$,
 $\pi_{26}^{12} = [\sigma_{12}^2] \oplus [\kappa_{12}] \oplus [P(\nu_{25})] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$,
 $\pi_{28}^{14} = [\sigma_{14}^2] \oplus [\kappa_{14}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{29}^{15} = [\sigma_{15}^2] \oplus [\kappa_{15}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{n+14}^n = [\sigma_n^2] \oplus [\kappa_n] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, para $n \geq 16$,
 $(G_{14}; 2) = [\sigma^2] \oplus [\kappa] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ onde $\sigma_n^2 = \sigma_n \circ \sigma_{n+7}$ e $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$.

Desse Teorema e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4,

$$\pi_{17}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon_3 \circ \nu_{11}^2] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Das relações (8) e (16) do Apêndice do Capítulo 4,

$$\Sigma(\eta_2 \circ \epsilon_3 \circ \nu_{11}^2) = \Sigma(\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}) = 0.$$

Assim, $\Sigma\pi_{17}^2 = 0$. Segue da exatidão da seqüência (3.5) que as seguintes seqüências são exatas.

$$\begin{aligned} \pi_{19}^5 &\xrightarrow{P} \pi_{17}^2 \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \pi_{18}^3 \xrightarrow{H} \pi_{18}^5 \xrightarrow{P} \pi_{16}^2. \end{aligned}$$

Da prova anterior, temos que $P(\nu_5 \circ \eta_8 \circ \mu_9) \neq 0$. Como $\pi_{18}^5 = [\nu_5 \circ \eta_8 \circ \mu_9] \oplus [\nu_5 \circ \sigma_8 \circ \nu_{15}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, pelo Teorema 3.3.19, então a imagem $H\pi_{18}^3$ tem no máximo 2 elementos. Pela relação (18) do Apêndice, $H(\bar{\epsilon}_3) \neq 0$. Temos assim,

$$\pi_{18}^3 = [\bar{\epsilon}_3] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Temos elementos $\rho^{IV} \in \pi_{20}^5$, $\rho''' \in \pi_{21}^6$, $\rho'' \in \pi_{22}^7$ e $\rho' \in \pi_{24}^9$ tais que

$$H(\rho^{IV}) = \eta_9^2 \circ \mu_{11} = 4\zeta_9, \quad H(\rho''') = \eta_{11} \circ \mu_{12} \text{ e}$$

$$H(\rho'') \equiv \mu_{13} \text{ mod } [\nu_{13}^3] + [\eta_{13} \circ \epsilon_{14}] \text{ e } H(\rho') = 8\sigma_{17}.$$

Teorema 3.3.21. $\pi_{17}^2 = [\eta_2 \circ \epsilon_3 \circ \nu_{11}^2] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_{n+15}^n = [\bar{\epsilon}_n] \approx \mathbb{Z}/2 \text{ para } n = 3, 4,$$

$$\pi_{20}^5 = [\rho^{IV}] \oplus [\bar{\epsilon}_5] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{21}^6 = [\rho'''] \oplus [\bar{\epsilon}_6] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{22}^7 = [\rho''] \oplus [\sigma' \circ \bar{\nu}_{14}] \oplus [\sigma' \circ \epsilon_{14}] \oplus [\bar{\epsilon}_7] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{23}^8 = [\sigma_8 \circ \bar{\nu}_{15}] \oplus [\sigma_8 \circ \epsilon_{15}] \oplus [\Sigma \rho''] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \bar{\nu}_{15}] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \epsilon_{15}] \oplus [\bar{\epsilon}_8] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{24}^9 = [\rho'] \oplus [\sigma_9 \circ \bar{\nu}_{16}] \oplus [\sigma_9 \circ \epsilon_{16}] \oplus [\bar{\epsilon}_9] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{25}^{10} = [\Sigma \rho'] \oplus [\sigma_{10} \circ \bar{\nu}_{17}] \oplus [\bar{\epsilon}_{10}] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{26}^{11} = [\Sigma^2 \rho'] \oplus [\bar{\epsilon}_{11}] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{27}^{12} = [\Sigma^3 \rho'] \oplus [\bar{\epsilon}_{12}] \approx \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

Desse Teorema e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4,

$$\pi_{18}^2 = [\eta_2 \circ \bar{\epsilon}_3] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Pela relação (20) do Apêndice do Capítulo 4, $P(\rho^{IV}) = PH(\bar{\mu}_3) = 0$. Pelo Lema 3.3.5, $P(\bar{\epsilon}_5) = P(\Sigma^2 \bar{\epsilon}_3) = 0$. Segue de (3.5), que a seguinte seqüência

$$0 \longrightarrow \pi_{18}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{19}^3 \xrightarrow{H} \pi_{19}^5 \xrightarrow{P} \pi_{17}^2$$

é exata. O último homomorfismo P é sobrejetivo pela prova anterior. Como $\pi_{19}^5 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ e π_{17}^2 (Teoremas 3.3.20 e 3.3.21), então $H\pi_{19}^3 \approx \mathbb{Z}/2$. Pela Proposição 3.2.2, relação (10) do Apêndice do Capítulo 4, Lema 3.3.10 e Teorema 3.3.20,

$$\Sigma H(\mu_3 \circ \sigma_{12}) = \Sigma H(\mu_3) \circ \Sigma \sigma_{12} = \Sigma \sigma''' \circ \sigma_{13} = 2\sigma'' \circ \sigma_{13} \neq 0.$$

Assim, $H(\mu_3 \circ \sigma_{12}) \neq 0$. Obviamente $2(\mu_3 \circ \sigma_{12}) = 2\mu_3 \circ \sigma_{12} = 0$. Conseqüentemente, temos da seqüência exata acima que

$$\pi_{19}^3 = [\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus [\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.22. $\pi_{18}^2 = [\eta_2 \circ \bar{\epsilon}_3] \approx \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_{n+16}^n = [\mu_n \circ \sigma_{n+9}] \oplus [\eta_n \circ \bar{\epsilon}_{n+1}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ para } n = 3, 5,$$

$$\pi_{20}^4 = [\nu_4^2 \circ \sigma_{10} \circ \nu_{17}] \oplus [\mu_4 \circ \sigma_{13}] \oplus [\eta_4 \circ \bar{\epsilon}_5] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{22}^6 = [\zeta'] \oplus [\mu_6 \circ \sigma_{15}] \oplus [\eta_5 \circ \bar{\epsilon}_7] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{23}^7 = [\sigma' \circ \mu_{14}] \oplus [\Sigma \zeta'] \oplus [\mu_7 \circ \sigma_{16}] \oplus [\eta_7 \circ \bar{\epsilon}_8] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{24}^8 = [\sigma_8 \circ \nu_{15}^3] \oplus [\sigma_8 \circ \mu_{15}] \oplus [\sigma_8 \circ \eta_{15} \circ \epsilon_{16}] \oplus [\Sigma \sigma' \circ \mu_{15}] \oplus [\Sigma^2 \zeta'] \oplus [\mu_8 \circ \sigma_{17}] \oplus [\eta_8 \circ \bar{\epsilon}_9] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{25}^9 = [\sigma_9 \circ \nu_{16}^3] \oplus [\sigma_9 \circ \mu_{16}] \oplus [\sigma_9 \circ \eta_{16} \circ \epsilon_{17}] \oplus [\mu_9 \circ \sigma_{18}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

Temos ainda alguns elementos:

- $\bar{\mu}_3 \in \pi_{20}^3$ e $\bar{\mu}_n = \Sigma^{n-3} \bar{\mu}_3$ para $n \geq 3$ e $\bar{\mu} = \Sigma^\infty \bar{\mu}_3$.

- $\bar{\epsilon}' \in \pi_{20}^3$.
- $\bar{\zeta} \in \pi_{23}^5$, e $\bar{\zeta}_n = \Sigma^{n-5}\bar{\zeta}_5$ para $n \geq 5$ e $\bar{\zeta} = \Sigma^\infty\bar{\zeta}_5$.
- $\bar{\sigma}_6 \in \pi_{25}^6$ e $\bar{\sigma}_n = \Sigma^{n-6}\bar{\sigma}_6$ para $n \geq 6$ e $\bar{\sigma} = \Sigma^\infty\bar{\sigma}_6$.

Desse último Teorema e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4,

$$\pi_{19}^2 = [\eta_2 \circ \mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus [\eta_2^2 \circ \bar{\epsilon}_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Considere a sequência exata

$$\pi_{21}^5 \xrightarrow{P} \pi_{19}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{20}^3 \xrightarrow{H} \pi_{20}^5$$

de (3.5). Pelo Lema 3.3.5, temos que $P(\mu_5 \circ \sigma_{14}) = \Delta(\eta_5 \circ \bar{\epsilon}_6) = 0$. Como $\mu_5 \circ \sigma_{14}$ e $\eta_5 \circ \bar{\epsilon}_6$ geram π_{21}^5 (Teorema 3.3.22), então P é trivial e Σ é um isomorfismo. Pelo Teorema 3.3.21, $\pi_{20}^5 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Assim π_{20}^3 tem no máximo 16 elementos. Pela relação (20) do Apêndice do Capítulo 4, $\bar{\mu}_3$ é um elemento de ordem 2 que não está contido em π_{19}^2 , já que $H(\bar{\mu}_3) \neq 0$. Pela relação (21) do Apêndice do Capítulo 4, $\bar{\epsilon}'$ é um elemento de ordem 4 que não está contido em $\Sigma\pi_{19}^2 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Então é uma consequência algébrica que

$$\pi_{20}^3 = [\bar{\epsilon}'] \oplus [\bar{\mu}_3] \oplus [\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.23. $\pi_{19}^2 = [\eta_2 \circ \mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus [\eta_2^2 \circ \bar{\epsilon}_4] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,

$$\pi_{20}^3 = [\bar{\epsilon}'] \oplus [\bar{\mu}_3] \oplus [\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{21}^4 = [\nu_4 \circ \sigma' \circ \sigma_{14}] \oplus [\nu_4 \circ \kappa_7] \oplus [\Sigma\bar{\epsilon}'] \oplus [\eta_4 \circ \mu_5 \circ \sigma_{14}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{22}^5 = [\nu_5 \circ \kappa_8] \oplus [\bar{\mu}_5] \oplus [\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{23}^6 = [\Delta(\Sigma\theta)] \oplus [\nu_6 \circ \kappa_9] \oplus [\bar{\mu}_6] \oplus [\eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{24}^7 = [\sigma' \circ \eta_{14} \circ \mu_{15}] \oplus [\nu_7 \circ \kappa_{10}] \oplus [\bar{\mu}_7] \oplus [\eta_7 \circ \mu_8 \circ \sigma_{17}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{25}^8 = [\sigma_8 \circ \eta_{15} \circ \mu_{16}] \oplus [\Sigma\sigma' \circ \eta_{15} \circ \mu_{16}] \oplus [\nu_8 \circ \kappa_{11}] \oplus [\bar{\mu}_8] \oplus [\eta_8 \circ \mu_9 \circ \sigma_{18}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{26}^9 = [\sigma_9 \circ \eta_{16} \circ \mu_{17}] \oplus [\nu_9 \circ \kappa_{12}] \oplus [\bar{\mu}_9] \oplus [\eta_8 \circ \mu_{10} \circ \sigma_{19}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

Desse resultado e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4

$$\pi_{20}^2 = [\eta_2 \circ \bar{\epsilon}'] \oplus [\eta_2 \circ \bar{\mu}_3] \oplus [\eta_2^2 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Considere a sequência exata

$$\pi_{22}^5 \xrightarrow{P} \pi_{20}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{21}^3 \xrightarrow{H} \pi_{21}^5$$

de (3.5). Pelo Lema 3.3.5, $P(\bar{\mu}_5) = \Delta(\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}) = 0$. Como $\Sigma^2\bar{\epsilon}' = \Sigma^2\nu' \circ \kappa_8 = 2\nu_5 \circ \nu_5 \circ \kappa_8$, pela relação (21) do Apêndice do Capítulo 4, então segue da relação (8) do Apêndice do Capítulo 4 que $\Sigma(\eta_2 \circ \bar{\epsilon}') = 0$. Como $\pi_{22}^5 = [\nu_5 \circ \kappa_8] \oplus [\bar{\mu}_5] \oplus [\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, pelo Teorema 3.3.23, segue que $\Delta(\nu_5 \circ \kappa_8) = \pm(\eta_2 \circ \bar{\epsilon}')$ e o núcleo de $P : \pi_{22}^5 \rightarrow \pi_{20}^2$ é $[\bar{\mu}_5] \oplus [\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Então,

$$\pi_{20}^2 = [\eta_2 \circ \bar{\epsilon}'] \oplus [\eta_2 \circ \bar{\mu}_3] \oplus [\eta_2^2 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{21}^5 = [\mu_5 \circ \sigma_{14}] \oplus [\eta_5 \circ \bar{\epsilon}_6] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

pelo Teorema 3.3.22. Temos $H(\mu' \circ \sigma_{14}) = \mu_5 \circ \sigma_{14}$ pela Proposição 3.2.2 e pela relação (12) do Apêndice do Capítulo 4 e $H(\nu' \circ \bar{\epsilon}_6) = \eta_5 \circ \bar{\epsilon}_6$ pela Proposição 3.2.2 e pela relação (3) do Apêndice do Capítulo 4. Ainda, $2\mu' \circ \sigma_{14} = \eta_3^2 \circ \mu_5 \circ \sigma_{14}$ pela relação (12) do Apêndice do Capítulo 4 e $2(\nu' \circ \bar{\epsilon}_6) = \nu' \circ 2\bar{\epsilon}_6 = 0$. Então segue da exatidão da seqüência acima que

$$\pi_{21}^3 = [\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus [\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus [\eta_3 \circ \bar{\mu}_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.24. $\pi_{20}^2 = [\eta_2 \circ \bar{\epsilon}'] \oplus [\eta_2 \circ \bar{\mu}_3] \oplus [\eta_2^2 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{21}^3 = [\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus [\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus [\eta_3 \circ \bar{\mu}_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{22}^4 = [\nu_4 \circ \rho''] \oplus [\nu_4 \circ \sigma' \circ \bar{\nu}_{14}] \oplus [\nu_4 \circ \sigma' \circ \epsilon_{14}] \oplus [\nu_4 \circ \bar{\epsilon}_7] \oplus [\Sigma\mu' \circ \sigma_{15}] \oplus [\Sigma\nu' \circ \bar{\epsilon}_7] \oplus [\nu_4 \circ \bar{\mu}_5] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{23}^5 = [\zeta_5 \circ \sigma_{16}] \oplus [\nu_5 \circ \bar{\epsilon}_8] \oplus [\nu_5 \circ \bar{\mu}_6] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{24}^6 = [P(\Sigma\theta) \circ \eta_{23}] \oplus [\zeta_6 \circ \sigma_{17}] \oplus [\eta_6 \circ \bar{\mu}_7] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{25}^7 = [\zeta_7 \circ \sigma_{18}] \oplus [\eta_7 \circ \bar{\mu}_8] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{26}^8 = [\sigma_8 \circ \zeta_{15}] \oplus [\zeta_8 \circ \sigma_9] \oplus [\eta_8 \circ \bar{\mu}_9] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{27}^9 = [\sigma_9 \circ \zeta_{16}] \oplus [\eta_9 \circ \bar{\mu}_{10}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,

Desse Teorema e da relação (2) do Apêndice do Capítulo 4 temos

$$\pi_{21}^2 = [\eta_2 \circ \mu' \circ \sigma_{14}] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus [\eta_2^2 \circ \bar{\mu}_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Considere a seqüência exata

$$\pi_{23}^5 \xrightarrow{P} \pi_{21}^2 \xrightarrow{\Sigma} \pi_{22}^3 \xrightarrow{H} \pi_{22}^5 \xrightarrow{P} \pi_{20}^2$$

de (3.5). Pelo Lema 3.3.5, $P(\eta_5 \circ \bar{\mu}_6) = 0$ e $2P(\zeta_5 \circ \sigma_{16}) = P(\pm \Sigma^2 \bar{\mu}' \circ \sigma_{16}) = 2(\eta_2 \circ \mu' \circ \sigma_{14})$. Segue que

$$P(\zeta_5 \circ \sigma_{16}) = \pm(\eta_2 \circ \mu' \circ \sigma_{15}) \bmod [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\epsilon}_6] + [\eta_2^2 \circ \bar{\mu}_4].$$

Pela Proposição 3.2.4 e pela relação (8) do Apêndice do Capítulo 4, $P(\nu_5 \circ \bar{\epsilon}_8) = (\eta_2 \circ \mu' \circ \bar{\epsilon}_6)$. Como π_{23}^5 é gerado pelos elementos $\zeta_5 \circ \sigma_{16}$, $\nu_5 \circ \bar{\epsilon}_8$ e $\eta_5 \circ \bar{\mu}_6$, pelo Teorema 3.3.24, então segue da exatidão da seqüência acima que

$$\Sigma\pi_{21}^2 = [\eta_3^2 \circ \bar{\mu}_5] \approx \mathbb{Z}/2.$$

Pela Proposição 3.2.2 e pela relação (3) do Apêndice do Capítulo 4,

$$H(\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}) = H(\nu') \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} = \eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}.$$

Pela relação (22) do Apêndice do Capítulo 4,

$$H(\bar{\mu}') \equiv \mu_5 \bmod \Sigma^3 \pi_{19}^2.$$

Pelo Teorema 3.3.23 e por sua prova, temos que

$$\Sigma^3 \pi_{19}^2 = [\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] + [4\nu_5 \circ \kappa_8] = [\eta_5 \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}].$$

Então segue da exatidão da seqüência acima e da prova do Teorema anterior que as duas H -imagens geram $H\pi_{22}^3 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Pela relação (22) do Apêndice do Capítulo 4, $2\bar{\mu}' = \eta_3^2 \circ \bar{\mu}_5$. Obviamente, $2\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} = \nu' \circ 2\mu_6 \circ \sigma_{15} = 0$. Logo, concluímos da seqüência exata acima que

$$\pi_{22}^3 = [\bar{\mu}'] \oplus [\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Teorema 3.3.25. $\pi_{21}^2 = [\eta_2 \circ \mu' \circ \sigma_{14}] \oplus [\eta_2 \circ \nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus [\eta_2^2 \circ \bar{\mu}_4] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{22}^3 = [\bar{\mu}'] \oplus [\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}] \approx \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{23}^4 = [\nu_4 \circ \sigma' \circ \mu_{14}] \oplus [\nu_4 \circ \Sigma\zeta'] \oplus [\nu_4 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}] \oplus [\nu_4 \circ \eta_7 \circ \bar{\epsilon}_8] \oplus [\Sigma\bar{\mu}'] \oplus [\Sigma\nu' \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}] \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{24}^5 = [\bar{\zeta}_5] \oplus [\nu_5 \circ \mu_8 \circ \sigma_{17}] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$,
 $\pi_{25}^6 = [\bar{\zeta}_6] \oplus [\bar{\sigma}_6] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/32$,
 $\pi_{n+19}^n = [\bar{\zeta}_n] \oplus [\bar{\sigma}_n] \approx \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$, para $n = 7, 8, 9$.

Ainda seguindo Toda [46], vejamos as componentes p -primárias, com p ímpar. Para isso, recordemos o isomorfismo de Serre [41]:

$$\pi_{i-1}(S^{2m-1}; p) + \pi_i(S^{4m-1}; p) \approx \pi_i(S^{2m}; p)$$

o qual é dado pela correspondência $(\alpha, \beta) \rightarrow \Sigma\alpha + [\iota_{2m}, \iota_{2m}] \circ \beta$. Assim, quando a esfera possuir dimensão par, o cálculo será feito por esse isomorfismo.

Agora, considerando a seqüência exata de homotopia associada ao par $(\Omega^2(S^{n+2}), S^n)$, temos a seguinte seqüência exata:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^n) \xrightarrow{\Sigma^2} \pi_{i+2}(S^{n+2}) \longrightarrow \pi_i(\Omega^2(S^{n+2}), S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^n) \longrightarrow \cdots$$

Como os grupos $\pi_i(S^n)$ são finitos, exceto $\pi_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$, e como $\Sigma^2 : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+2}(S^{n+2})$ são isomorfismos, então a seqüência exata induz a seguinte seqüência exata (n ímpar):

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^n; p) \xrightarrow{\Sigma^2} \pi_{i+2}(S^{n+2}; p) \longrightarrow \pi_i(\Omega^2(S^{n+2}), S^n; p) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^n; p) \longrightarrow \cdots$$

A seguinte Proposição e o Corolário estão provados em [44].

Proposição 3.3.26. *Sejam n ímpar e p um número primo ímpar. Então existe uma seqüência exata*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{i+2}(S^{p(n+1)+1}; p) &\xrightarrow{P} \pi_i(S^{p(n+1)-1}; p) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_{i-1}(\Omega^2(S^{n+2}), S^n; p) &\longrightarrow \pi_{i+1}(S^{p(n+1)+1}; p) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

para $i \geq p(n+1) - 1$ tal que $\Delta \circ \Sigma^2 = f_p$ para uma aplicação $f_p : S^{p(n+1)-1} \rightarrow S^{p(n+1)-1}$ de grau p .

Corolário 3.3.27. *Sejam n ímpar e p um número primo ímpar. Então temos um isomorfismo*

$$\pi_{i-1}(\Omega^2(S^{n+2}), S^n; p) \approx \pi_i(S_f, S^{p(n+1)-1})$$

para $i \leq p^2(n+1) - 2$, onde S_f é o mapping cylinder de f_p .

Para o caso $n = 1$, temos o seguinte:

Proposição 3.3.28. *Seja p um número primo ímpar. Então existe uma seqüência exata*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{i+2}(S^{2p+1}; p) &\xrightarrow{P} \pi_i(S^{2p-1}; p) \xrightarrow{G} \\ &\xrightarrow{G} \pi_{i+1}(S^3; p) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2p+1}; p) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

para $i \geq 2p - 1$ tal que $P \circ \Sigma^2 = f_{p*}$ e $G(\beta) = \alpha_0 \circ \Sigma\beta$ para um gerador arbitrário α_0 de $\pi_{2p}(S^3; p) \approx \mathbb{Z}/p$.

Recordemos os seguintes resultados para grupos estáveis. Do Teorema 4.15 de [45], temos:

$$(G_{2i(p-1)-1}; p) \approx \mathbb{Z}/p \text{ para } i = 1, 2, \dots, p-1 \text{ e } (G_k; p) = 0$$

de outro modo para $k < 2p(p-1) - 2$. Seja α_1 um gerador de $(G_{2p-3}; p)$. Então as composições secundárias

$$\alpha_{i+1} = \langle \alpha_1, p\iota, \alpha_i \rangle$$

forneem geradores de $(G_{2(i+1)(p-1)-1}; p)$, $i+1 < p$, indutivamente.

Teorema 3.3.29. *Seja p um primo ímpar.*

$$\pi_{2m+1+2i(p-1)-2}(S^{2m+1}; p) \approx \mathbb{Z}/p \text{ para } 1 \leq m < i, \text{ e } i = 2, \dots, p-1,$$

$$\pi_{2m+1+2i(p-1)-1}(S^{2m+1}; p) \approx \mathbb{Z}/p \text{ para } m \geq 1, \text{ e } i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1}; p) = 0 \text{ para } k < 2p(p-1) - 2.$$

Lema 3.3.30. *Existe uma seqüência $\{\alpha_i(3; p)\}$ de elementos $\alpha_i(3; p) \in \pi_{2i(p-1)+2}(S^3; p)$ tal que $\alpha_1(3; p)$ é um gerador de $\pi_{2p}(S^3; p)$, $p\alpha_i(3; p) = 0$ e*

$$\alpha_{i+1}(3; p) \in \{\alpha_i(3; p), p\iota_{2i(p-1)+2}, \Sigma^{2i(p-1)-1}\alpha_1(3; p)\}_1.$$

Denotemos

$$\alpha_i(n; p) = \Sigma^{n-3}\alpha_i(3; p) \text{ para } n \geq 3 \text{ e } \alpha_i = \Sigma^\infty \alpha_i(3; p).$$

E temos assim, a seguinte proposição:

Proposição 3.3.31. $\pi_{2m+2i(p-1)}(S^{2m+1}; p) = [\alpha_i(2m+1; p)] \approx \mathbb{Z}/p$, para $1 \leq i < p$ e $m \geq 1$.

$$\pi_{2i(p-1)+1}(S^{2m+1}; p) = [\alpha_i(3) \circ \alpha_{i-1}(2p; p)] \approx \mathbb{Z}/p, \text{ para } 2 \leq i < p.$$

No Apêndice do Capítulo 4 podemos encontrar uma tabela com os grupos de homotopia de S^3 calculados por Toda [46].

Tipo de homotopia dos grupos de gauge dos S^3 -fibrados sobre esferas

Tendo estabelecido as ferramentas e os resultados básicos nos capítulos anteriores, podemos agora começar os cálculos do tipo de homotopia dos grupos de gauge dos S^3 -fibrados sobre a esfera.

Consideremos então o conjunto $Princ_{S^3}(S^n)$ dos S^3 -fibrados principais ξ sobre a esfera S^n , com $n \geq 1$. Tais fibrados são classificados pelas classes de homotopia de aplicações, ou seja, pelos conjuntos

$$[S^n, BS^3] = [S^n, BS^3]_0 \approx \pi_n(BS^3) \approx \pi_{n-1}(S^3).$$

Por exemplo: $Princ_{S^3}(S^n) = \{0\}$, o fibrado trivial, se $n \leq 3$, $Princ_{S^3}(S^4) \approx \mathbb{Z}$, $Princ_{S^3}(S^5) \approx \mathbb{Z}/2$, $Princ_{S^3}(S^8) \approx \mathbb{Z}/12$. Devido a isso, assumiremos $n \geq 4$ daqui por diante.

Considere f classificando ξ_f . Denotaremos por $\mathcal{G}_f$ o grupo de gauge do fibrado ξ_f . Então, temos as equivalências de homotopia (veja [38]):

$$\mathcal{G}_f \sim \Omega_f m(S^n, BS^3; f),$$

$$B\mathcal{G}_f \sim m(S^n, BS^3; f).$$

Consideremos agora a fibração avaliação

$$ev_f : m(S^n, BS^3; f) \rightarrow BS^3,$$

com $ev_f(g) = g(x_0)$, para qualquer $g \in m(S^n, BS^3; f)$ e $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o ponto-base de S^n . Pelo Lema 4.4.1 no Apêndice, temos as seqüências de fibrações e inclusões de fibras (a menos de homotopia)

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathcal{G}_f \xrightarrow{\Omega_{ev_f}} \Omega_f BS^3 \sim S^3 \longrightarrow m_0(S^n, BS^3; f) \sim \Omega_f^{n-1} S^3 \longrightarrow \\ \longrightarrow m(S^n, BS^3; f) \xrightarrow{ev_f} BS^3. \end{aligned}$$

Assim, conseguimos três fibrações

$$\mathcal{G}_f \longrightarrow S^3 \longrightarrow \Omega_f^{n-1} S^3$$

$$S^3 \longrightarrow \Omega_f^{n-1} S^3 \longrightarrow m(S^n, BS^3; f)$$

$$\Omega_f^{n-1} S^3 \longrightarrow m(S^n, BS^3; f) \xrightarrow{ev_f} BS^3.$$

O ponto principal é que, enquanto o tipo de homotopia das componentes conexas do espaço das aplicações livres depende da aplicação f e, logo, do fibrado ξ_f , todas as componentes conexas do espaço das aplicações baseadas têm o mesmo tipo de homotopia [38], isto é, o tipo de $\Omega_0^{n-1} S^3$.

Em particular, isso significa que na primeira fibração podemos considerar S^3 e $\Omega_0^{n-1} S^3$ fixados, obtendo a fibração

$$\mathcal{G}_f \longrightarrow S^3 \longrightarrow \Omega_0^{n-1} S^3,$$

na qual $\mathcal{G}_f$ é a fibra (de homotopia) de uma aplicação $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1} S^3$. Assim, os possíveis diferentes tipos de $\mathcal{G}_f$ são dados pelas possíveis diferentes aplicações $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1} S^3$. Na verdade, se $h \sim g : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1} S^3$, então $F_h \sim F_g$, isto é, as duas fibras de homotopia são homotopicamente equivalentes ([47] ex. 6 pág. 44, Teorema 1.7.30 pág. 42). Aqui, um certo cuidado é necessário. Na verdade estamos interessados nas equivalências de homotopia livre, ou seja, nos elementos

$$[h] \in [S^3, \Omega_0^{n-1} S^3] \approx [S^3, \Omega_0^{n-1} S^3]_0 / \pi_1(\Omega_0^{n-1} S^3) \approx \pi_{n+2}(S^3) / \pi_n(S^3).$$

Por ainda não conhecermos a ação de $\pi_1(\Omega_0^{n-1} S^3)$, iniciaremos por uma procura em distingüir as classes baseadas, afim de saber quem é $\pi_{n+2}(S^3)$. No que segue, faremos identificações que, de fato, darão as classes livres. Observando que as classes livres não podem ser mais que as classes baseadas, calcularemos primeiro as baseadas. Veremos, dessa forma, quantas das classes baseadas apresentam grupos de gauge diferentes. Mas isso será feito trabalhando diretamente sobre os grupos de homotopia dos grupos de gauge e, conseqüentemente, substituirá o problema de classes livres ou baseadas.

Assim, estamos interessados nas possíveis classes das aplicações $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1} S^3$, isto é, em $\pi_{n+2}(S^3)$. A saber, os diferentes tipos de homotopia dos grupos de gauge estão certamente contidos no conjunto $\pi_{n+2}(S^3)$ (de fato, se $F_g \approx F_h$ então $g \approx h$). Concluímos listando esses grupos juntamente com os grupos $\pi_{n-1}(S^3)$, cujas ordens indicam o número de diferentes fibrados sobre S^n .

	fibrados ξ_f	grupos de gauge $\mathcal{G}_f$		fibrados ξ_f	grupos de gauge $\mathcal{G}_f$
n	$\pi_{n-1}(S^3)$	$\pi_{n+2}(S^3)$	n	$\pi_{n-1}(S^3)$	$\pi_{n+2}(S^3)$
5	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	16	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/30$
6	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	17	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6$
7	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/3$	18	$\mathbb{Z}/30$	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$
8	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/15$	19	$\mathbb{Z}/30$	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$
9	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	20	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/132$
10	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	21	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	$(\mathbb{Z}/2)^2$
11	$\mathbb{Z}/15$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$	22	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$
12	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/84$	23	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/132$	$\mathbb{Z}/210$
13	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	24	$(\mathbb{Z}/2)^2$	
14	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/6$	25	$\mathbb{Z}/2$	
15	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/84$	$\mathbb{Z}/30$			

Tabela 1.

4.1 A imagem do homomorfismo ev_j

Nesta seção, apresentaremos uma fórmula para calcular a imagem do homomorfismo¹ ev_j induzido na homotopia pela aplicação avaliação

$$ev_f : m(S^n, BS^3; f) \rightarrow BS^3.$$

Para isso, será melhor reduzir os cálculos ao grupo de homotopia de S^4 ao invés de S^3 . De fato, embora exista o isomorfismo $\pi_m(S^3) \approx \pi_{m+1}(BS^3)$, este não se comporta bem com relação às operações de homotopia. Assim, usaremos o seguinte fato, onde $j : S^4 \rightarrow BS^3$ é a inclusão do 1-esqueleto $\mathbb{H}P^1 = S^4$ em $\mathbb{H}P^\infty = BS^3$ (veja [27]):

Lema 4.1.1. *Qualquer aplicação de uma esfera em BS^3 se fatora (a menos de homotopia) pela inclusão $j : S^4 \rightarrow BS^3$.*

Demonstração: Isso significa que o homomorfismo $j_n : \pi_n(S^4) \rightarrow \pi_n(BS^3)$ tem uma inversa à direita ψ , a qual é definida como a composição do homomorfismo suspensão com o homomorfismo bordo, aparecendo na seqüência de homotopia associada a fibração universal para BS^3 . Temos o diagrama (sempre assumindo que $n \geq 4$):

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(S^3) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_n(S^4) \\ \partial \uparrow & \swarrow j_n & \\ \pi_n(BS^3) & & \end{array}$$

e $j_n\psi = 1$, onde $\psi = \Sigma\partial$. Logo, j_n é sobrejetiva e ψ é injetiva.

¹Omitiremos a indicação com relação à aplicação f quando tratarmos do homomorfismo induzido na homotopia pela aplicação avaliação para não carregar demais a notação.

Se $n = 4$, Σ é um isomorfismo, o que implica em j_4 ser um isomorfismo também e, conseqüentemente, $\pi_4(BS^3) \approx \mathbb{Z}[j_4(\iota_4) = \partial^{-1}(\iota_3)]$. ■

Lema 4.1.2. *Para todo $k > 1$, todo $n \geq 4$ e $[f] \in \pi_n(BS^3)$, temos a seguinte seqüência exata longa:*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(BS^3) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_{k+n}(BS^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_k} \pi_k(BS^3) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k+n-1}(BS^3) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

e

$$\text{Im } ev_k = \ker \partial_k = \{[u] \in \pi_k(BS^3) \mid [[u], [f]] = 0 \in \pi_{n+k-1}(BS^3)\}.$$

Demonstração: Considere a fibração avaliação introduzida no início deste capítulo,

$$\Omega_0^{n-1}S^3 \longrightarrow m(S^n, BS^3; f) \xrightarrow{ev} BS^3,$$

e a seqüência exata longa de homotopia associada

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(m(S^n, BS^3; f)) \xrightarrow{ev_{(k+1)}} \pi_{k+1}(BS^3) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \\ \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_k(\Omega_0^{n-1}S^3) \longrightarrow \pi_k(m(S^n, BS^3; f)) \xrightarrow{ev_k} \pi_k(BS^3) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Recordando que $m(S^n, BS^3; f) \sim B\mathcal{G}_f$, temos a seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(BS^3) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_{k+n-1}(S^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_k(B\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_k} \pi_k(BS^3) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k+n-2}(S^3) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

e como $\pi_{k-1}(S^3) \approx \pi_k(BS^3)$ pelo Lema 4.4.1, temos a seqüência enunciada na tese, na qual o homomorfismo ∂_k é a composição $\partial^{-1}\partial_k$, mas será denotado pela mesma notação de ∂_k , já que ∂ é um isomorfismo.

Agora, ev_k é o homomorfismo induzido na homotopia pela aplicação:

$$\Omega^k ev_f : m_0(S^k, m(S^n, BS^3; f)) \rightarrow m_0(S^k, BS^3).$$

Note que

$$\begin{aligned} m_0(X, m(Y, Z; f)) &= \{h : X \rightarrow m(Y, Z; f) : h(x_0) = f\} = \\ &= \{ad(h) : X \times Y \rightarrow Z : ad(h)(x_0, y) = f\} = \{g : X \times Y \rightarrow Z : g|_{\{x_0\} \times Y} = f\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$m_0(S^k, m(S^n, BS^3; f)) = \{g : S^k \times S^n \rightarrow BS^3 : g|_{\{x_0\} \times S^n} = f\}$$

e

$$\Omega^k ev_f : g \mapsto g(\cdot, y_0),$$

(de fato, $ad(h) \mapsto ad(h)(\cdot, y_0)$ tal que $h(x)(y) \mapsto h(x)(y_0)$).

Assim, uma aplicação $u \in m_0(S^k, BS^3)$ está na imagem de $\Omega^k ev_f$ se, e somente se, existe uma aplicação $g : S^k \times S^n \rightarrow BS^3$ tal que $g|_{\{x_0\} \times S^n} = f$ e $g|_{S^k \times \{y_0\}} = u$. Como $S^k \times S^n$ é o *push out* do *wedge* com uma $(n+k)$ -célula, temos a inclusão co-fibra $i : S^k \vee S^n = \{x_0\} \times S^n \cup S^k \times \{y_0\} \rightarrow S^k \times S^n$ e g existe se, e somente se, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} S^k \vee S^n & \xrightarrow{u \vee f} & BS^3 \vee BS^3 \\ \downarrow i & & \downarrow \nabla \\ S^k \times S^n & \xrightarrow{g} & BS^3 \end{array}$$

Mas isso significa que g é uma extensão de $\nabla(u \vee f)$, e como $S^k \times S^n = (S^k \vee S^n) \sqcup_a e^{n+k}$ ([10] 10.11 pág. 319), sendo a a aplicação de colagem da borda de célula $a : S^{n+k-1} \rightarrow S^k \vee S^n$, temos o diagrama *push out*

$$\begin{array}{ccc} S^{n+k-1} & \xrightarrow{\quad} & e^{n+k} \\ \downarrow a & & \downarrow \\ S^k \vee S^n & \xrightarrow{\quad} & S^k \times S^n \\ & \searrow \nabla(u \vee f) & \downarrow g \\ & & BS^3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow c_0 \\ \end{array}$$

Com isso, a aplicação g existe se, e somente se, $\nabla(u \vee f)a \sim c_0$. Mas $\nabla(u \vee f)a = [[u], [f]]$ ([10] 10.47 pág. 319), e assim, precisamos calcular o produto de Whitehead

$$[\ , \] : \pi_k(BS^3) \times \pi_n(BS^3) \rightarrow \pi_{n+k-1}(BS^3),$$

definido por

$$[[u], [f]] : S^{n+k-1} \xrightarrow{a} S^k \vee S^n \xrightarrow{\nabla(u \vee f)} BS^3.$$

Portanto,

$$\text{Im} ev_k = \{[u] \in \pi_k(BS^3) \mid [[u], [f]] = 0 \in \pi_{n+k-1}(BS^3)\}.$$

■

Corolário 4.1.3.

$$\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im} \partial_4$$

e

$$\text{Im} \partial_4 \approx \mathbb{Z}/\text{Im} ev_4.$$

Demonstração: Considere $k = 3$. Na seqüência apresentada no Lema 4.1.2, temos a seqüência exata

$$\pi_3(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_4} \pi_3(S^3) \approx \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_4} \pi_{n+2}(S^3) \longrightarrow \pi_2(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_3} \pi_2(S^3) = 0.$$

Assim,

$$\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im}\partial_4$$

e

$$\text{Im}\partial_4 \approx \mathbb{Z}/\text{Im}ev_4.$$

■

Reduzimos os cálculos nos grupos de homotopia de S^4 usando o Lema 4.1.1.

Lema 4.1.4. Para todos os $k, n \geq 4$, $\omega = [u] \in \pi_k(BS^3)$, $\beta_f = [f] \in \pi_n(BS^3)$,

$$[[u], [f]] = [\omega, \beta_f] = \pm j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \omega \circ \Sigma^k \partial \beta_f) = \pm j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \beta_f \circ \Sigma^n \partial \omega),$$

em $\pi_{n+k-1}(BS^3) \approx j_{n+k-1}(\pi_{n+k-1}(S^4))$.

Demonstração: Como j_n é uma aplicação sobrejetiva, pelo Lema 4.1.1, podemos estudar o problema equivalente para

$$\begin{aligned} [,] : (j_k(\pi_k(S^4)) = \pi_k(BS^3)) \times (j_n(\pi_n(S^4)) = \pi_n(BS^3)) &\rightarrow \\ &\rightarrow j_{n+k-1}(\pi_{n+k-1}(S^4)) = \pi_{n+k-1}(BS^3). \end{aligned}$$

Para todo $\omega = [u] \in \pi_k(BS^3)$, existe $\omega' = \Sigma \partial \omega$ em $\pi_k(S^4)$ tal que $\omega = j_k(\omega')$. Analogamente, como $\beta_f = [f] \in \pi_n(BS^3)$, existe algum elemento $\beta'_f = \Sigma \partial \beta_f \in \pi_n(S^4)$ tal que $\beta_f = [f] = j_n(\beta)$.

Logo,

$$\begin{aligned} [[u], [f]] &= [\omega, \beta_f] = [j_k(\omega'), j_n(\beta'_f)] = j_{n+k-1}([\omega', \beta'_f]) = \\ &= j_{n+k-1}([\iota_4 \circ \Sigma \partial \omega, \iota_4 \circ \Sigma \partial \beta_f]) = j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma(\partial \omega \wedge \partial \beta_f)), \end{aligned}$$

por [47] Cap. X 8.18, em $\pi_{n+k-1}(BS^3)$.

Agora, já que $\partial \omega \in \pi_{k-1}(S^3)$ e $\partial \beta_f \in \pi_{n-1}(S^3)$, se $k, n \geq 4$, por [47] Cap. X 8.12

$$\partial \omega \wedge \partial \beta_f = \pm \Sigma^3 \partial \omega \circ \Sigma^{3+k-1-3} \partial \beta_f$$

e pela relação (1) do Apêndice temos

$$\pm \Sigma^3 \partial \omega \circ \Sigma^{3+k-1-3} \partial \beta_f = \Sigma^3 \partial \beta_f \circ \Sigma^{3+n-1-3} \partial \omega,$$

em $\pi_{n+k-2}(S^6)$.

Assim, nossa equação será

$$[[u], [f]] = [\omega, \beta_f] = \pm j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \omega \circ \Sigma^k \partial \beta_f) = j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \beta_f \circ \Sigma^n \partial \omega),$$

em $\pi_{n+k-1}(BS^3) \approx j_{n+k-1}(\pi_{n+k-1}(S^4))$. ■

Podemos simplificar a equação ainda mais, trabalhando com o produto de Whitehead. Algum cuidado é necessário, veja Apêndice no final do capítulo.

Lema 4.1.5. *Para todo $\psi \in \pi_n(S^6)$,*

$$j_{n+1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi) = j_{n+1}\Sigma(\xi \circ \psi),$$

em $\pi_{n+1}(BS^3) \approx j_{n+1}(\pi_{n+1}(S^4))$, com $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12[\xi]$ e j_{n+1} é injetiva sobre esses elementos.

Demonstração: Considere

$$j_7([\iota_4, \iota_4]) = [j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)].$$

Por [17] 16.4 pág. 330,

$$[\iota_4, \iota_4] = 2\nu_4 - \Sigma\xi.$$

Logo

$$[j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)] = 2j_7(\nu_4) + j_7(\Sigma\xi).$$

Agora, ν_4 está no núcleo de j_7 pelo Lema 4.4.1 do Apêndice no final do capítulo. Obtemos com isso

$$j_{n+1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi) = j_{n+1}((2\nu_4 - \Sigma\xi) \circ \Sigma\psi) = j_{n+1}(\Sigma\xi \circ \Sigma\psi) = j_{n+1}\Sigma(\xi \circ \psi),$$

e pelo mesmo Lema sabemos que j_{n+1} é injetiva sobre esses elementos. ■

Corolário 4.1.6. *Para todo $k, n \geq 4$, $\omega = [u] \in \pi_k(BS^3)$, $\beta_f = [f] \in \pi_n(BS^3)$,*

$$[\omega, \beta_f] = \pm j_{n+k-1}(\Sigma\xi \circ \Sigma^4\partial\omega \circ \Sigma^k\partial\beta_f) = j_{n+k-1}(\Sigma\xi \circ \Sigma^4\partial\beta_f \circ \Sigma^n\partial\omega),$$

em $\pi_{n+k-1}(BS^3) = j_{n+k-1}(\pi_{n+k-1}(S^4))$, com $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12[\xi]$ e j_{n+k-1} é injetiva sobre esses elementos.

Demonstração: Pelo Lema 4.1.4 temos

$$[\omega, \beta_f] = \pm j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4\partial\omega \circ \Sigma^k\partial\beta_f)$$

e observemos também que

$$\Sigma^4\partial\omega \circ \Sigma^k\partial\beta_f = \Sigma(\Sigma^3\partial\omega \circ \Sigma^{k-1}\partial\beta_f) = \Sigma\psi,$$

para algum $\psi \in \pi_{n+k-2}(S^6)$.

Assim, pelo Lema 4.1.5,

$$j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4\partial\omega \circ \Sigma^k\partial\beta_f) = j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi) =$$

$$j_{n+k-1}(\Sigma\xi \circ \Sigma\psi) = j_{n+k-1}(\Sigma\xi \circ \Sigma^4\partial\omega \circ \Sigma^k\partial\beta_f).$$

A segunda igualdade segue da relação (1) do Apêndice. ■

Lema 4.1.7. Para todo $\psi \in \pi_n(S^6; p)$, com $p \neq 2$,

$$j_{n+1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi) = 0$$

em $\pi_{n+1}(BS^3) \approx j_{n+1}(\pi_{n+1}(S^4))$.

Demonstração: Se ψ tem ordem p^k , então

$$p^k[\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi = 0 \in \pi_{n+1}(S^4)$$

e conseqüentemente

$$[\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi \in \pi_{n+1}(S^4; p) \approx \pi_n(S^3; p) \oplus \pi_{n+1}(S^7; p),$$

com o isomorfismo acima dado em [46] pág. 172 por

$$\pi_n(S^3; p) \oplus \pi_{n+1}(S^7; p) \rightarrow \pi_{n+1}(S^4; p),$$

$$(x, y) \mapsto \Sigma x + [\iota_4, \iota_4] \circ y.$$

Isso mostra que $[\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma\psi \in [\iota_4, \iota_4] \circ \pi_{n+1}(S^7)$ e, assim, pertence ao núcleo de j_{n+1} , por razões análogas à prova do Lema 4.4.1 no Apêndice deste capítulo. ■

A partir das informações obtidas com os lemas anteriores obtemos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.8. Sejam $f \in m(S^n, BS^3; f)$, $n \geq 5$, $\beta_f = [f] \in \pi_n(BS^3)$, $\partial\beta_f \in \pi_{n-1}(S^3)$. Decomponha² $\partial\beta_f = \partial\beta_f(2) + \partial\beta_f(p) \in \pi_{n-1}(S^3; 2) + \sum_{p \neq 2} \pi_{n-1}(S^3; p)$. Sejam $\omega = [u] \in \pi_k(BS^3)$, $k > 4$, $\partial\omega \in \pi_{k-1}(S^3)$, $\partial\omega = \partial\omega(2) + \partial\omega(p) \in \pi_{k-1}(S^3; 2) + \sum_{p \neq 2} \pi_{k-1}(S^3; p)$. Então temos a seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(BS^3) &\xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_{k+n}(BS^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{G}_f) &\xrightarrow{ev_k} \pi_k(BS^3) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k+n-1}(BS^3) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_k = \text{Nuc } \partial_k &= \{ \omega \in \pi_k(BS^3) \mid \nu' \circ \Sigma^3 \partial\omega(2) \circ \Sigma^{k-1} \partial\beta_f(2) = \\ &= \nu' \circ \Sigma^3 \partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{n-1} \partial\omega(2) = 0 \in \pi_{n+k-2}(S^3; 2) \}, \end{aligned}$$

com $\pi_6(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu']$.

O mesmo pode ser lido em termos dos grupos de homotopia de S^3 como segue:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_k(S^3) &\xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_{k+n-1}(S^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{G}_f) &\xrightarrow{ev_k} \pi_{k-1}(S^3) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k+n-2}(S^3) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_k = \text{Nuc } \partial_k &= \{ \partial\omega \in \pi_{k-1}(S^3) \mid \nu' \circ \Sigma^3 \partial\omega(2) \circ \Sigma^{k-1} \partial\beta_f(2) = \\ &= \nu' \circ \Sigma^3 \partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{n-1} \partial\omega(2) = 0 \in \pi_{n+k-2}(S^3; 2) \}. \end{aligned}$$

²Isso pode ser feito porque sabemos que os grupos de homotopia de S^3 , em dimensão grande, são finitos.

Demonstração: A equação do Lema 4.1.2 torna-se

$$0 = [[u], [f]] = [\omega, \beta_f] = j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \omega \circ \Sigma^k \partial \beta_f),$$

pelo Lema 4.1.4, e com isso

$$\begin{aligned} 0 &= j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \omega(2) \circ \Sigma^k \partial \beta_f(2)) + \sum_{p \neq 2} j_{n+k-1}([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \partial \omega(p) \circ \Sigma^k \partial \beta_f(p)) = \\ &= j_{n+k-1} \Sigma(\nu' \circ \Sigma^3 \partial \omega(2) \circ \Sigma^{k-1} \partial \beta_f(2)), \end{aligned}$$

em $\pi_{n+k-1}(BS^3) \approx j_{n+k-1}(\pi_{n+k-1}(S^4))$ pelos Lemas 4.1.5 e 4.1.7. Pelo Lema 4.1.5, j_{n+k-1} é injetiva sobre esses elementos e a tese segue. Note que a equação pode ser considerada como

$$\Sigma \nu' \circ \Sigma^4 \partial \omega(2) \circ \Sigma^k \partial \beta_f(2) = 0,$$

em $\Sigma(\pi_{n+k-2}(S^3; 2)) \subseteq \pi_{n+k-1}(S^4; 2)$, ou como enunciado no Lema 4.1.2. ■

Quando $k = 4$, temos isomorfismos $\pi_3(S^3) \approx \pi_4(BS^3) \approx \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$, com gerador de ordem infinita. Com as modificações, o resultado fica da seguinte forma:

Proposição 4.1.9. *Sejam $f \in m(S^n, BS^3; f)$, $n \geq 5$, $\beta_f = [f] \in \pi_n(BS^3)$, $\partial \beta_f \in \pi_{n-1}(S^3)$. Decomponha $\partial \beta_f = \partial \beta_f(2) + \partial \beta_f(p) \in \pi_{n-1}(S^3; 2) + \sum_{p \neq 2} \pi_{n-1}(S^3; p)$. Então*

$$\text{Im } ev_4 = \text{Nuc } \partial_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) = 0 \in \pi_{n+2}(S^3; 2)\},$$

com $\pi_6(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu']$.

Demonstração: Da Proposição 4.1.8 segue que

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_4 &= \{m j_4(\iota_4) \in \pi_4(BS^3) \approx \mathbb{Z}[j_4(\iota_4)], m \in \mathbb{Z} \mid \\ &\mid m \Sigma \nu' \circ \Sigma^4 \partial \beta_f(2) = 0 \in \Sigma(\pi_{n+2}(S^3; 2)) \subseteq \pi_{n+3}(S^4)\}. \end{aligned}$$
■

Lema 4.1.10. $\pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{n+2}(S^3)$.

Demonstração: Como $[f] = [c_0]$ no caso presente, todos os elementos $n \iota_4$ pertencem à imagem de ev_4 , pelo Lema 4.1.2, então $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$. A tese segue do Corolário 4.1.3. ■

4.2 Alguns resultados sobre os grupos de homotopia das fibras

A segunda parte do problema é estabelecer quantos diferentes tipos de homotopia temos para o grupo de gauge $\mathcal{G}_f$. Ele é um subconjunto do conjunto das fibras de homotopia aparecendo nas fibrações

$$F_h \xrightarrow{i} S^3 \xrightarrow{h} \Omega_0^{n-1} S^3,$$

sendo h qualquer aplicação em qualquer uma das classes $[h] \in \pi_3(\Omega_0^{n-1}S^3) \approx \pi_{n+2}(S^3)$. Assim, nosso objetivo é enumerar os elementos do conjunto

$$\{[F_h], h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3\}.$$

Como duas aplicações na mesma classe têm o mesmo tipo, isto é, $h \sim h'$ implica $F_h \sim F_{h'}$, podemos considerar o conjunto equivalente

$$\{[F_h], [h] \in \pi_{n+2}(S^3)\},$$

o qual é isomorfo ao conjunto das classes dos elementos de $\pi_{n+2}(S^3)$ e, assim, considerando apenas o representante de um subconjunto de $\pi_{n+2}(S^3)$ ³.

Uma maneira para distinguir os diferentes tipos para F_h é encontrar alguns diferentes grupos de homotopia. Se temos suficientes valores diferentes para esses grupos de homotopia para cobrir todos os elementos em $\pi_{n+2}(S^3)$, então o trabalho está feito. Começaremos considerando $\pi_2(F_h)$.

Lema 4.2.1. *Seja $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3$ e considere a fibração*

$$F_h \rightarrow S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3.$$

O homomorfismo induzido por h na seqüência de homotopia

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_k(F_h) \xrightarrow{i_k} \pi_k(S^3) \xrightarrow{h_k} \pi_{k+n-1}(S^3) \xrightarrow{\partial_k}$$

é dado como segue:

$$h_k(\zeta) = \beta \circ \Sigma^{n-1}\zeta,$$

sendo $\beta = [ad(h)] \in \pi_{n+2}(S^3)$ e $\zeta = [f] \in \pi_k(S^3)$.

Demonstração: Considere $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3$. Então,

$$h_k : \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(\Omega_0^{n-1}S^3),$$

$$h_k : [f] \mapsto [hf].$$

Os isomorfismos adjuntos são

$$ad : m_0(S^3, \Omega_0^{n-1}S^3) \rightarrow m_0(S^3 \wedge S^{n-1}, S^3),$$

$$ad : h \mapsto \tilde{h},$$

com $\tilde{h}(x \wedge y) = h(x)(y)$ e

$$ad : m_0(S^k, \Omega_0^{n-1}S^3) \rightarrow m_0(S^k \wedge S^{n-1}, S^3),$$

³Na verdade, perdemos algo considerando as classes baseadas e não as classes livres, mas conhecemos o conjunto das classes baseadas, $\pi_{n+2}(S^3)$, enquanto, em geral, não conhecemos o conjunto das classes livres.

$$ad : (hf) \mapsto \widetilde{h}f.$$

Agora

$$\widetilde{h}f(z \wedge y) = hf(z)(y) = h(f(z))(y) = \widetilde{h}(f(z) \wedge y).$$

Então,

$$ad(hf) = ad(h)(f \wedge 1).$$

Assim, se $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3$, $ad(h) : S^3 \wedge S^{n-1} \rightarrow S^3$, isto é, $[ad(h)] \in \pi_{n+2}(S^3)$. Para cada $[f] \in \pi_k(S^3)$, $[hf] \in \pi_k(\Omega_0^{n-1}S^3)$ e $[ad(hf)] = [ad(h)(f \wedge 1)] \in \pi_{k+n-1}(S^3)$.

Então,

$$h_k : \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_{k+n-1}(S^3),$$

$$h_k : [f] \mapsto [ad(hf)] = [ad(h)] \circ ([f] \wedge \iota_{n-1}) = [ad(h)] \circ \Sigma^{n-1}[f].$$

Em diagramas,

$$S^k \xrightarrow{f} S^3 \xrightarrow{h} \Omega_0^{n-1}S^3,$$

$$S^k \wedge S^{n-1} \xrightarrow{f \wedge 1} S^3 \wedge S^{n-1} \xrightarrow{ad(h)} S^3.$$

Se denotarmos por β as classes de $ad(h)$ e por ζ as de f , temos

$$h_k(\zeta) = \beta \circ \Sigma^{n-1}\zeta.$$

■

Lema 4.2.2. Para todo $[h] \in \pi_{n+2}(S^3)$,

$$\pi_2(F_h) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im } h_3,$$

sendo h_3 o homomorfismo induzido por h na seqüência de homotopia da fibração induzida por $h : S^3 \rightarrow \Omega_0^{n-1}S^3$,

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{h_3} \pi_{n+2}(S^3) \xrightarrow{\partial_3} \pi_2(F_h) \xrightarrow{i_2} 0$$

e $h_3 \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \pi_{n+2}(S^3)) \approx \pi_{n+2}(S^3)$.

Demonstração: Recorde que começamos com a fibração

$$F_h \xrightarrow{i} S^3 \xrightarrow{h} \Omega_0^{n-1}S^3,$$

sendo h qualquer aplicação em qualquer uma das classes $[h] \in \pi_3(\Omega_0^{n-1}S^3) \approx \pi_{n+2}(S^3)$. Considerando a seqüência exata de homotopia associada à h

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_3(F_h) \xrightarrow{i_3} \pi_3(S^3) \approx \mathbb{Z} \xrightarrow{h_3} \pi_3(\Omega_0^{n-1}S^3) \xrightarrow{\partial_3} \\ \xrightarrow{\partial_3} \pi_2(F_h) \xrightarrow{i_2} \pi_2(S^3) = 0 \xrightarrow{h_2} \pi_2(\Omega_0^{n-1}S^3) \xrightarrow{\partial_2} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow_{\partial_2} \pi_1(F_h) \longrightarrow \pi_1(S^3) = 0 \longrightarrow_{h_1} \cdots$$

obtemos a sequência exata

$$\mathbb{Z} \longrightarrow_{h_3} \pi_{n+2}(S^3) \longrightarrow_{\partial_3} \pi_2(F_h) \longrightarrow_{i_2} 0,$$

o que implica

$$\pi_2(F_h) \approx \text{Im } \partial_3 \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Nuc } \partial_3 \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im } h_3.$$

■

Lema 4.2.3. *Seja $h = c_0$ a aplicação trivial. Então $\pi_2(F_{h=c_0}) \approx \pi_{n+2}(S^3)$.*

Demonstração: Se $h = c_0$ é aplicação trivial, então $h_3 = (c_0)_3 = 0$ é o homomorfismo trivial e $\text{Im } h_3 = 0$. Então, $\pi_2(F_h) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im } h_3 \approx \pi_{n+2}(S^3)$. ■

Lema 4.2.4. *Para todo $n > 4$, $\pi_2(F_h) \approx \pi_2(F_{c_0}) \approx \pi_{n+2}(S^3)$ se, e somente se, $h \sim c_0$.*

Demonstração: Recordemos que todos os grupos envolvidos são grupos abelianos finitos. Como $\pi_2(F_h) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im } h_3$, se $\pi_2(F_{c_0}) \approx \pi_{n+2}(S^3)$, então $\text{Im } h_3 = 0$.

Agora, $h_3 \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \pi_{n+2}(S^3))$. Considere $h_3(1) \in \text{Im } h_3$. Já que $h_3(1) \neq 0$ sempre que $h_3 \neq 0$, segue que $\text{Im } h_3 \neq 0$ para todo $h_3 \neq 0$. Logo, se $\text{Im } h_3 = 0$, temos $h_3 = 0$. Também, como $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \pi_{n+2}(S^3)) \approx \pi_{n+2}(S^3)$, $h_3 = 0$ se, e somente se, $[h] = 0$ em $\pi_{n+2}(S^3)$. E como existe uma homotopia baseada, certamente $h \sim c_0$ livremente, como desejado. ■

Lema 4.2.5. $\pi_j(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_j(S^3) \oplus \pi_{j+n}(S^3)$.

Demonstração: Como S^3 é um grupo, $m(S^n, S^3) = m_0(S^n, S^3) \times S^3$ (veja [24]). E como $\mathcal{G}_{c_0} \sim m(S^n, S^3)$, o resultado segue. ■

Lema 4.2.6. $\mathcal{G}_{c_0} \sim F_{c_0}$.

Demonstração: Considere a fibração

$$F_{c_0} \longrightarrow S^3 \xrightarrow{c_0} \Omega_0^{n-1} S^3.$$

Como c_0 induz o homomorfismo trivial, obtemos a sequência exata de homotopia para todo j ,

$$0 \longrightarrow \pi_{j+n}(S^3) \longrightarrow \pi_j(F_{c_0}) \longrightarrow \pi_j(S^3) \longrightarrow 0$$

e, assim, os dois espaços possuem todos os grupos de homotopia isomorfos. Por outro lado, sabemos que $\mathcal{G}_{c_0}$ deve ser homotópico a F_h para alguma h e provamos no Lema 4.2.4 que a única F_h com π_2 igual a de F_{c_0} é, na verdade, a própria F_{c_0} , e isso completa a prova. ■

Lema 4.2.7. Se $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0})(\approx \pi_{n+2}(S^3))$, então $\mathcal{G}_f \sim \mathcal{G}_{c_0}(\sim m(S^2, S^3))$.

Demonstração: Necessariamente, $\mathcal{G}_f \sim \mathcal{G}_h$ para alguma $[h] \in \pi_{n+2}(S^3)$. Logo, $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_2(F_h) \approx \pi_{n+2}(S^3)$ e, pelo Lema 4.2.4, temos $F_h \sim F_{c_0} \sim \mathcal{G}_{c_0}$. ■

Exemplo 4.2.8. Consideremos $n = 2$ e $k = 14$. Temos a seguinte sequência exata

$$\xrightarrow{\partial_{15}} \pi_{14}(F_h) \xrightarrow{i_{14}} \pi_{14}(S^3) \xrightarrow{h_{14}} \pi_{15}(S^3) \xrightarrow{\partial_{14}}$$

com $h_{14}(\zeta) = ad(h) \circ \Sigma\zeta$ e obtemos $\pi_2(F_h) \approx \pi_{n+2}(S^3)/\text{Im } h_3$ e $h_3 \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \pi_{n+2}(S^3))$. Também, $ad(h) \in \pi_{16}(S^3) = \mathbb{Z}/2[a = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7] \oplus \mathbb{Z}/3[\beta]$, e calculamos $\pi_2(F_h) \approx \pi_{16}(S^3)/\text{Im } h_3$. Como h_3 aplica $m_{\mathbb{Z}}$ em $mad(h)$, obtemos

$ad(h)$	$\text{Im } h_3$
0	0
a	$\mathbb{Z}/2[a]$
β	$\mathbb{Z}/3[\beta]$
$2\beta = -\beta$	$\mathbb{Z}/3[\beta]$
$a + \beta$	$\mathbb{Z}/6$
$a + 2\beta = a - \beta$	$\mathbb{Z}/6$

Logo, existe no máximo 6 tipos. Na verdade, as duas fibras $F_{\pm\beta}$ e $F_{a\pm\beta}$ também têm o mesmo tipo. Podemos usar a equivalência de homotopia determinada sobre $\Omega^{13}(S^3)$ pelo laço inverso, e observe que isso pode ser identificado com a inversão do primo 3. Então existem exatamente 4 tipos diferentes.

4.3 Os tipos de homotopia dos grupos de gauge

Para calcular quantos tipos diferentes de homotopia existem dos grupos de gauge de todos os S^3 -fibrados principais sobre S^n , começamos calculando o π_2 desses grupos e, caso essa análise não seja suficiente, continuamos os cálculos sobre grupos de homotopia em níveis maiores (como será necessário para os casos $n = 13, 21$).

4.3.1 Os casos $5 \leq n \leq 12$, $n = 16, 17, 18, 23, 24, 25$

Proposição 4.3.1. Para cada n fixado com $n = 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25$, o tipo de homotopia do grupo de gauge de todos os S^3 -fibrados principais sobre S^n é o mesmo, mais ainda, é o mesmo do fibrado trivial, a saber $m(S^n, S^3) \sim \Omega_0^n S^3 \times S^3$.

Demonstração: Para calcular o π_2 desses grupos de gauge precisamos encontrar $\text{Im } ev_4$, segundo o Corolário 4.1.3 (usamos também a Tabela 1 apresentada no início do capítulo), e observe também que, pela Proposição 4.1.9, precisamos considerar apenas a 2-componente dos grupos de homotopia de S^3 . Feito isso, veremos que em todos esses casos $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$. Então $\text{Im } \partial_4 = 0$ e $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{n+2}(S^3) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0})$.

Caso $n = 7$. Temos que os fibrados sobre S^7 são classificados pelas classes

$$\partial\beta_f \in \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12[\xi].$$

Então, pela Tabela 1 do início do capítulo, temos 12 fibrados $f_k = k\xi$ sobre S^7 (número de fibrados dado pela ordem do grupo), e assim teremos no máximo 12 diferentes tipos de homotopia para os grupos de gauge. Como precisamos calcular inicialmente $\text{Im } ev_4$, para posteriormente calcularmos o π_2 do grupo de gauge (Corolário 4.1.3), utilizamos a Proposição 4.1.9 e por ela vemos que basta considerarmos a 2-componente de $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12[\xi]$ (decompondo ξ sobre as 2, 3-componentes, temos $\xi = 3\nu' + 4\alpha_1(3; 3)$). Assim, precisamos encontrar para quais valores de $m \in \mathbb{Z}$ a igualdade

$$m\Sigma\nu' \circ \Sigma^4\nu' = 0$$

é verdadeira. Mas, observemos que

$$\Sigma\nu' \circ \Sigma^4\nu' = \Sigma(\nu' \circ 2\nu_6) = 0,$$

por [46] 5.4 pág. 41 e pág. 51 (o elemento $\nu' \circ \nu_6$ tem ordem 4 e pertence a $\pi_9(S^3)$, o qual não possui elementos de ordem par).

Assim, $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$ para toda f , e com isso $\text{Im } \partial_4 = 0$ e $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_9(S^3) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0})$, sendo o último isomorfismo dado pelo Lema 4.1.10 e temos, pelo Lema 4.2.7, que $\mathcal{G}_f \sim \mathcal{G}_{c_0}$ para toda f .

Caso $n = 8$. Analogamente ao que fizemos no caso anterior, consideremos

$$\partial\beta_f \in \pi_7(S^3) = \mathbb{Z}/2[\xi \circ \eta_6].$$

Então temos 2 fibrados $f_0 = c_0$ e $\partial[f_1] = \xi \circ \eta_6$. Pela Proposição 4.1.9, precisamos considerar apenas

$$\Sigma\nu' \circ \Sigma^4(\nu' \circ \eta_6).$$

Do fato de que $\nu' \circ \eta_6 = \eta_3 \circ \nu_4$, por [46] 5.9 pág. 44, obtemos

$$\Sigma\nu' \circ \Sigma^4(\eta_3 \circ \nu_4) = \Sigma\nu' \circ \eta_7 \circ \nu_8 = 0,$$

já que $\eta_7 \circ \nu_8 = 0$, por [46] 5.9 pág. 44. Assim, $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$ para toda f e com isso $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{10}(S^3)$ para toda f .

Caso $n = 9$.

$$\partial\beta_f \in \pi_8(S^3) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6^2].$$

Então temos 2 fibrados $f_0 = c_0$ e $\partial[f_1] = \xi \circ \eta_6^2$. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$), precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7).$$

Recordemos que $\nu' \circ \eta_6 = \eta_3 \circ \nu_4$ ([46] 5.9 pág. 44), e obtemos

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \nu_4 \circ \eta_7) = \nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \eta_{10} = 0,$$

como $\eta_6 \circ \nu_7 = 0$ por [46] 5.9 pág. 44. Assim, $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$ para toda f e com isso $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{11}(S^3)$, para toda f .

Casos $n = 10, 11$.

Já que

$$\partial\beta_f \in \pi_9(S^3) \approx \mathbb{Z}/3 \text{ ou } \pi_{10}(S^3) \approx \mathbb{Z}/15,$$

temos que a 2-componente $\partial\beta_f(2) = 0$. Assim, pela Proposição 4.1.9 obtemos $\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$ para toda f e com isso $\pi_2(\mathcal{G}_f) \approx \pi_{12}(S^3)$ ou $\pi_{13}(S^3)$ para toda f , respectivamente quando $n = 10, 11$.

Caso $n = 15$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{14}(S^3) \approx \mathbb{Z}/84 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{14}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu'] \oplus \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \epsilon_6].$$

Então temos 336 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3 \mu' = \nu' \circ 2\zeta_6 = 0,$$

pois $\nu' \circ \zeta_6 \in \pi_{17}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/2$ e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\epsilon_3 \circ \nu_4) = \nu' \circ \epsilon_6 \circ \nu_7 \stackrel{(1)}{=} 4\nu' \circ \nu_6 \circ \epsilon_9 = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$. Usando o mesmo argumento e a relação (5) do Apêndice deste capítulo,

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \epsilon_6) = \nu' \circ 2\nu_6 \circ \epsilon_9 = 0,$$

em $\pi_{17}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]$. Assim, temos $\text{Im } ev_4([f_{[\mu']}])^5 = \text{Im } ev_4([f_{[\epsilon_3 \circ \nu_4]}]) = \text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \epsilon_6]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\mu']}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\epsilon_3 \circ \nu_4]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \epsilon_6]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{17}(S^3).$$

Caso $n = 16$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{15}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7].$$

Então temos 4 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \mu_6) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \mu_9 = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$. Usando o mesmo argumento e a relação (5),

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7) = \nu' \circ 2\nu_6 \circ \eta_9 \circ \epsilon_{10} = 0,$$

⁴Os números indicados nas igualdades se referem as relações que podem ser encontradas no Apêndice deste capítulo.

⁵Como temos diferentes fibrados, indicaremos as classes para que não ocorram confusões.

em $\pi_{18}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\bar{\epsilon}_3]$. Temos assim, $\text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \mu_6]}]) = \text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \mu_6]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{18}(S^3).$$

Caso $n = 17$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{16}(S^3) \approx \mathbb{Z}/6,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{16}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/6[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7].$$

Então temos 6 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \eta_9 \circ \mu_{10} = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{19}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4]$. Temos assim, $\text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{19}(S^3).$$

Caso $n = 18$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{17}(S^3) \approx \mathbb{Z}/30,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{17}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2].$$

Então temos 30 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2) \stackrel{(16)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \bar{\nu}_9 \circ \nu_{17} = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}]$. Temos assim $\text{Im } ev_4([f_{[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{20}(S^3).$$

Caso $n = 23$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{22}(S^3) \approx \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{22}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\mu}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}].$$

Então temos 264 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\mu}') \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ 2\bar{\zeta}_6 = 0$$

pois $\nu' \circ \bar{\zeta}_6 \in \pi_{25}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/2$ e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \mu_9 \circ \sigma_{18} = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{25}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \kappa_{11}]$. Então temos $\text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}]}]) = \text{Im } ev_4([f_{[\bar{\mu}']}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\bar{\mu}']}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{25}(S^3).$$

Caso $n = 24$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{23}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}].$$

Então temos 4 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \bar{\mu}_6) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \bar{\mu}_9 = 0$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \eta_9 \circ \mu_{10} \circ \sigma_{19} = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{26}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\alpha}]$. Então temos $\text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \bar{\mu}_6]}]) = \text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \bar{\mu}_6]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{26}(S^3).$$

Caso $n = 25$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{24}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{24}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7].$$

Então temos 2 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \eta_9 \circ \bar{\mu}_{10} = 0$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{27}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\delta_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3 \circ \sigma_{20}] \oplus \mathbb{Z}/2[\epsilon' \circ \kappa_{13}]$. Então temos $\text{Im } ev_4([f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{27}(S^3).$$

■

Proposição 4.3.2. *Para $n = 5, 6$ e 12 , os dois S^3 -fibrados principais sobre S^n têm grupos de gauge com diferentes tipos de homotopia.*

Demonstração: Usamos agora a Proposição 4.1.9 e o Lema 4.1.2. Para esses casos, consideramos apenas os fibrados não triviais, devido ao Lema 4.1.10.

Caso $n = 5$. Como

$$\beta_f \in \pi_5(BS^3) = \mathbb{Z}/2[j_*(\eta_4)] \approx \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2[\eta_3],$$

considere

$$\partial\beta_f \in \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2[\eta_3].$$

Temos então 2 fibrados $f_0 = c_0$ e $\partial[f_1] = \eta_3$. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3 \eta_3 = \nu' \circ \eta_6,$$

em $\pi_7(S^3) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6]$ (todos os grupos são de ordem 2). Temos, precisamente, um dos geradores e como ele tem ordem 2, $\text{Im} ev_4([f_1]) = 2\mathbb{Z}$, $\text{Im} \partial_4 = \mathbb{Z}/\text{Im} ev_4([f_1]) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e assim $\pi_2(\mathcal{G}_{f_1}) \approx \pi_7(S^3)/(\mathbb{Z}/2) \approx (\mathbb{Z}/2)/(\mathbb{Z}/2) \approx 0$.

Caso $n = 6$.

$$\partial\beta_f \in \pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2[\eta_3^2].$$

Temos 2 fibrados $f_0 = c_0$ e $\partial[f_1] = \eta_3^2$. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3 \eta_3^2 = \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7,$$

em $\pi_8(S^3) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6^2]$. Então temos um dos geradores e, como ele tem ordem 2, $\text{Im} ev_4([f_1]) = 2\mathbb{Z}$, $\text{Im} \partial_4 = \mathbb{Z}/2$. Logo, $\pi_2(\mathcal{G}_{f_1}) \approx \pi_8(S^3)/(\mathbb{Z}/2) = 0$.

Caso $n = 12$.

$$\partial\beta_f \in \pi_{11}(S^3) \approx \pi_{11}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3].$$

Então temos 2 fibrados $f_0 = c_0$ e $\partial[f_1] = \epsilon_3$. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3 \epsilon_3,$$

em $\pi_{14}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu'] \oplus \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \epsilon_6]$. Então temos, precisamente, um dos geradores e, como ele tem ordem 2, obtemos $\text{Im} ev_4([f_1]) = 2\mathbb{Z}$, $\text{Im} \partial_4 = \mathbb{Z}/2$, e assim $\pi_2(\mathcal{G}_{f_1}; 2) \approx \pi_{14}(S^3; 2)/(\mathbb{Z}/2)$, o qual não é isomorfo a $\pi_{14}(S^3; 2)$. ■

4.3.2 Os casos $n = 14, 19, 20, 22$

Proposição 4.3.3. *Sobre S^{14} existem vinte e quatro S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n,k}$ de $\pi_{13}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \eta_3 \circ \mu_4] \oplus \mathbb{Z}/4[y = \epsilon'] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{13}]$. Os grupos de gauge de $\partial f_{m,n,k} = mx + ny + k\alpha_{13}$ e $\partial f'_{m',n',k'} = m'x + n'y + k'\alpha_{13}$ têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, $m = m' \bmod 2$ ($m, n, k, m', n', k' \in \mathbb{Z}$).*

Demonstração: Temos que os fibrados sobre S^{14} são classificados pelas classes

$$\partial\beta_f \in \pi_{13}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12.$$

Então, pela Tabela 1 do início do capítulo, temos vinte e quatro fibrados sobre S^{14} (número de fibrados dado pela ordem do grupo), e assim teremos no máximo vinte e quatro diferentes tipos de homotopia para os grupos de gauge. Como precisamos calcular inicialmente $\text{Im } ev_4$ para posteriormente calcularmos o π_2 do grupo de gauge (Corolário 4.1.3), utilizamos a Proposição 4.1.9 e por ela vemos que basta considerarmos a 2-componente de $\pi_{13}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$, ou seja, o grupo

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{13}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4] \oplus \mathbb{Z}/4[\epsilon'].$$

Assim, precisamos encontrar para quais valores de $m \in \mathbb{Z}$ as igualdades

$$m\Sigma\nu' \circ \Sigma^4\epsilon' = 0$$

e

$$m\Sigma\nu' \circ \Sigma^4(\eta_3 \circ \mu_4) = 0$$

são verdadeiras. Mas, observemos que

$$\nu' \circ \Sigma^3\epsilon' \stackrel{(14)}{=} \nu' \circ \Sigma(\nu_5 \circ \sigma_8) = \nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 = 0,$$

já que, por [46] pág. 51, o elemento $\nu' \circ \nu_6$ tem ordem 4 e pertence a $\pi_9(S^3)$, o qual não possui elementos de ordem par (ou seja, $\pi_9(S^3; 2) = \pi_9^3 = 0$) e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7,$$

em $\pi_{16}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]$. Então temos, precisamente, um dos geradores e, consequentemente, $\text{Im } ev_4([f_{0,n,k}]) = \mathbb{Z}$ e $\text{Im } ev_4([f_{1,n,k}]) = 2\mathbb{Z}$.

Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{0,n,k}}) \approx \pi_{16}(S^3) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}),$$

sendo o último isomorfismo dado pelo Lema 4.1.10 e temos, pelo Lema 4.2.7, que $\mathcal{G}_{f_{0,n,k}} \sim \mathcal{G}_{c_0}$ e

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{1,n,k}}) \approx \pi_{16}(S^3)/\mathbb{Z}/2.$$

■

Proposição 4.3.4. *Sobre S^{19} existem trinta S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n}$ de $\pi_{18}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \bar{\epsilon}_3] \oplus \mathbb{Z}/15[\alpha_{18}]$. Os grupos de gauge de $f_{m,n} = mx + n\alpha_{18}$ e $\partial f'_{m',n'} = m'x + n'\alpha_{18}$ têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, $m = m' \bmod 2$ ($m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$).*

Demonstração:

$$\partial\beta_f \in \pi_{18}(S^3) \approx \mathbb{Z}/30,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{18}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\bar{\epsilon}_3].$$

Então temos trinta fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\epsilon}_3) = \nu' \circ \bar{\epsilon}_6$$

em $\pi_{21}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\mu}_4]$. Então temos precisamente um dos geradores e, como ele tem ordem 2, segue $\text{Im } ev_4([f_{1,n}]) = 2\mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{1,n}}) \approx \pi_{21}(S^3)/\mathbb{Z}/2$$

e

$$\pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{21}(S^3).$$

■

Proposição 4.3.5. *Sobre S^{20} existem doze S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n,k}$ de $\pi_{19}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4] \oplus \mathbb{Z}/2[y = \mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{19}]$. Os grupos de gauge de $f_{m,n,k} = mx + ny + k\alpha_{19}$ e $f'_{m',n',k'} = m'x + n'y + k'\alpha_{19}$ têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, $n = n' \bmod 2$ ($m, n, k, m', n', k' \in \mathbb{Z}$).*

Demonstração:

$$\partial\beta_f \in \pi_{19}(S^3) \approx \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{19}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4].$$

Então temos doze fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3 \circ \sigma_{12}) = \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\epsilon}_7 \stackrel{(23)}{=} \nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \nu_{16}^2 = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, em $\pi_{22}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\mu}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}]$. Então temos, precisamente, um dos geradores e como ele tem ordem 2, segue $\text{Im } ev_4([f_{1,n,k}]) = 2\mathbb{Z}$ e $\text{Im } ev_4([f_{0,n,k}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{1,n,k}}) \approx \pi_{22}(S^3)/\mathbb{Z}/2$$

e

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{0,n,k}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{22}(S^3).$$

■

Proposição 4.3.6. *Sobre S^{22} existem quarenta e oito S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n,l,k}$ de $\pi_{21}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[y = \eta_3 \circ \bar{\mu}_4] \oplus \mathbb{Z}/4[z = \mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{21}]$. Os grupos de gauge de $\partial f_{m,n,l,k} = mx + ny + lz + k\alpha_{21}$ e $\partial f'_{m',n',l',k'} = m'x + n'y + l'z + k'\alpha_{21}$ têm o mesmo tipo de homotopia se, e somente se, $n = n' \bmod 2$ ($m, n, l, k, m', n', l', k' \in \mathbb{Z}$).*

Demonstração:

$$\partial\beta_f \in \pi_{21}(S^3) \approx \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{21}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\mu}_4].$$

Então temos quarenta e oito fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu' \circ \sigma_{14}) \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 2\zeta_6 \circ \sigma_{17} = 0$$

pois $\nu' \circ \zeta_6 \circ \sigma_{17} \in \pi_{24}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/2$ e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\nu' \circ \bar{\epsilon}_6) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \bar{\epsilon}_9 = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \bar{\mu}_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7$$

em $\pi_{24}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]$. Então temos, precisamente, um dos geradores e, como ele tem ordem 2, segue $\text{Im } ev_4([f_{n,1,l,k}]) = 2\mathbb{Z}$ e $\text{Im } ev_4([f_{n,0,l,k}]) = \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{n,1,l,k}}) \approx \pi_{23}(S^3)/\mathbb{Z}/2$$

e

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{n,0,l,k}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{24}(S^3).$$

■

4.3.3 O caso de S^{13}

O caso de S^{13} , assim como o de S^{21} que veremos na próxima seção, é um pouco mais delicado, uma vez que não temos informações suficientes sobre os grupos de homotopia de S^3 . Vejamos o porquê, começando com o seguinte Lema:

Lema 4.3.7. *Sobre S^{13} existem quatro S^3 -fibrados principais, sendo o tipo de homotopia do grupo de gauge do fibrado trivial diferente do tipo de homotopia dos grupos de gauge dos demais fibrados.*

Demonstração: Do fato que

$$\partial\beta_f \in \pi_{12}(S^3) = \mathbb{Z}/2[\mu_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4],$$

temos então quatro fibrados sobre S^{13} , $[f_{(0,0)}] = [c_0]$, $\partial[f_{(1,0)}] = \mu_3$, $\partial[f_{(0,1)}] = \eta_3 \circ \epsilon_4$, $\partial[f_{(1,1)}] = \mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4$. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3 \mu_3 = \nu' \circ \mu_6$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7,$$

em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7]$. Então temos, precisamente, os geradores de $\pi_{15}(S^3; 2)$ e, conseqüentemente, $\text{Im } ev_4([f_{(i,j)}]_{(i,j) \neq (0,0)}) = 2\mathbb{Z}$, $\text{Im } \partial_4 = \mathbb{Z}/2$ e $\pi_2(\mathcal{G}_{f_{(i,j)} \neq (0,0)}) \approx \mathbb{Z}/2$ enquanto $\pi_2(\mathcal{G}_{f_{(0,0)}}) \approx \pi_{15}(S^3) = \pi_{15}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. ■

Esse resultado ainda não nos dá informação suficiente para sabermos quantos tipos de homotopias diferentes têm os grupos de gauge dos fibrados sobre S^3 , pois nada podemos dizer sobre os três fibrados não triviais ($\partial[f_{(1,0)}] = \mu_3$, $\partial[f_{(0,1)}] = \eta_3 \circ \epsilon_4$, $\partial[f_{(1,1)}] = \mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4$). Para obtermos informações sobre eles, continuamos calculando os grupos de homotopia dos grupos de gauge desses fibrados e obtemos os seguintes lemas:

Lema 4.3.8. *Para $n = 3, 4$ temos $\pi_n(\mathcal{G}_{f_{(0,1)}}) \not\approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,0)}}) \approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,1)}})$, e com isso o tipo de homotopia do grupo de gauge do fibrado $\partial[f_{(0,1)}] = \eta_3 \circ \epsilon_4$ é diferente do demais.*

Demonstração: Caso $\pi_3(\mathcal{G}_f)$. Consideremos a sequência do Lema 4.1.2 com $k = 4$:

$$\begin{aligned} \pi_4(S^3) &\xrightarrow{\partial_5} \pi_{16}(S^3) \longrightarrow \pi_3(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_4} \pi_3(S^3) \xrightarrow{\partial_4} \pi_{15}(S^3), \\ \mathbb{Z}/2 &\xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\phi} \pi_3(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_4} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Temos que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_5 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim,

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/6)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/6 \text{ ou } \mathbb{Z}/3.$$

Agora, sendo um grupo abeliano finitamente gerado $A = \pi_3(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, no qual T é o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$. Então sabemos, pelos cálculos do lema anterior, que

$$\text{Im } ev_4 = 2\mathbb{Z} \text{ e } \text{Im } \partial_4 = \mathbb{Z}/2.$$

Logo,

$$2\mathbb{Z} = \text{Im } ev_4 = A/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi$$

implica que $m = 1$ e $T = \mathbb{Z}/3$ ou $T = \mathbb{Z}/6$.

Para decidir qual é o caso, considere que

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/6)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_5 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2$$

e

$$\text{Im } \partial_5 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_5.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_5$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 5$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{16}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_4(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3].$$

Calculemos então $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as duas possibilidades,

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) = \nu' \circ \mu_6,$$

ambos em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{12} \partial \omega = (n \bmod 2) \eta_{15},$$

obtemos elementos de $\pi_{16}(S^3; 2)$.

O primeiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \eta_{15} &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} = \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \\ &= \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 = 0, \end{aligned}$$

no qual aplicamos a relação (1) do Apêndice do final do capítulo,

$$\epsilon_6 \circ \eta_{14} = \Sigma^3 \epsilon_3 \circ \Sigma^{3+8} \eta_3 = \Sigma^3 \eta_3 \circ \Sigma^{3+1} \epsilon_3,$$

com $\epsilon_3 \in \pi_{11}(S^3)$, $\eta_3 \in \pi_4(S^3)$; e por 7.10 de [46] pág. 67

$$\eta_n^2 \circ \epsilon_{n+2} = 4(\nu_n \circ \sigma_{n+3}),$$

para $n \geq 5$.

O segundo é:

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) \circ \eta_{15} = \nu' \circ \mu_6 \circ \eta_{15} = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7,$$

que é exatamente o gerador.

Recordemos que denotamos as três aplicações não triviais por $f_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 1$. Logo,

$$\text{Im } ev_5([f_{1,0}]) = 0,$$

$$\begin{aligned}\text{Im } ev_5([f_{0,1}]) &= \pi_4(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2, \\ \text{Im } ev_5([f_{1,1}]) &= 0.\end{aligned}$$

Caso $\pi_4(\mathcal{G}_f)$. Consideremos a sequência no Lema 4.1.2 com $k = 5$:

$$\begin{aligned}\pi_5(S^3) &\xrightarrow{\partial_6} \pi_{17}(S^3) \longrightarrow \pi_4(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_5} \pi_4(S^3) \xrightarrow{\partial_5} \pi_{16}(S^3), \\ \mathbb{Z}/2 &\xrightarrow{\partial_6} \mathbb{Z}/30 \xrightarrow{\phi} \pi_4(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_5} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}/6.\end{aligned}$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_6 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/30)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/30 \text{ ou } \mathbb{Z}/15.$$

Agora, como grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_4(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, onde T é o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recordemos que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3, \partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4, \partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos feitos na Seção 4.3.3, temos que

$$\text{Im } ev_5([f_{1,0}]) = 0,$$

$$\text{Im } ev_5([f_{0,1}]) = \mathbb{Z}/2,$$

$$\text{Im } ev_5([f_{1,1}]) = 0,$$

Então

$$0 = \text{Im } ev_5([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_5([f_{1,1}]) = A/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/30$ ou $T = \mathbb{Z}/15$, e

$$\mathbb{Z}/2 = \text{Im } ev_5([f_{0,1}]) = A/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/60$ ou $T = \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/30$.

Para decidirmos qual é o caso, consideremos

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/30)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_6 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2$$

e

$$\text{Im } \partial_6 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_6.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_6$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 6$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{17}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]$, sendo

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial\omega(2) \in \pi_5(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3^2].$$

Calculando $\nu' \circ \Sigma^3 \partial\beta_f(2)$ para as duas possibilidades,

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) = \nu' \circ \mu_6,$$

ambos em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{12} \partial\omega = (n \bmod 2) \eta_{15}^2,$$

obtemos elementos de $\pi_{17}(S^3; 2)$.

O primeiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \eta_{15}^2 &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \eta_{16} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \eta_{16} \\ &\stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \eta_{16} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \eta_{16} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_6([f_{0,1}]) &= \mathbb{Z}/2, \\ \text{Im } \partial_6 &= 0, \\ \text{Im } \phi &= \mathbb{Z}/30, \\ T &= \mathbb{Z}/60 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ \pi_4(\mathcal{G}_f) &\approx \mathbb{Z}/60 \text{ ou } \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

O segundo:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) \circ \eta_{15}^2 &= \nu' \circ \mu_6 \circ \eta_{15} \circ \eta_{16} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \eta_{16} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \mu_8 \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 4\zeta_6 = 4\nu' \circ \zeta_6 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_6([f_{1,0}]) &= \text{Im } ev_6([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2, \\ \text{Im } \partial_6 &= 0, \\ \text{Im } \phi &= \mathbb{Z}/30, \\ T &= \mathbb{Z}/30, \\ \pi_4(\mathcal{G}_f) &\approx \mathbb{Z}/30. \end{aligned}$$

■

Lema 4.3.9. Para $5 \leq n \leq 9$ temos $\pi_n(\mathcal{G}_{f_{(0,1)}}) \approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,0)}}) \approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,1)}})$.

Demonstração: Caso $\pi_5(\mathcal{G}_f)$. Considerando a sequência no Lema 4.1.2 (com $k = 6$),

$$\pi_6(S^3) \xrightarrow{\partial_7} \pi_{18}(S^3) \longrightarrow \pi_5(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_6} \pi_5(S^3) \xrightarrow{\partial_6} \pi_{17}(S^3),$$

$$\mathbb{Z}/12 \xrightarrow{\partial_7} \mathbb{Z}/30 \xrightarrow{\phi} \pi_5(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_6} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_6} \mathbb{Z}/30.$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_7 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/3 \text{ ou } \mathbb{Z}/6,$$

assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/30)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/30 \text{ ou } \mathbb{Z}/15 \text{ ou } \mathbb{Z}/10 \text{ ou } \mathbb{Z}/5.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_5(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recorde que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3, \partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4, \partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos do caso anterior, temos

$$\text{Im } ev_6([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_6([f_{0,1}]) = \text{Im } ev_6([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2,$$

Então

$$\mathbb{Z}/2 = \text{Im } ev_6 = A/\text{Nuc } ev_6 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_6 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/60$ ou $T = \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/30$ ou $T = \mathbb{Z}/10 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/20$ ou $T = \mathbb{Z}/10$.

Para decidir qual é o caso, consideremos que

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/30)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_7 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/3 \text{ ou } \mathbb{Z}/6$$

e

$$\text{Im } \partial_7 = (\mathbb{Z}/12)/\text{Im } ev_7.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_7$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 7$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{18}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\bar{\epsilon}_3]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_6(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu'].$$

Calculando então $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as duas possibilidades,

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) = \nu' \circ \mu_6,$$

ambos em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{12}\partial\omega = (n \bmod 4)\Sigma^{12}(\nu'),$$

obtemos elementos de $\pi_{18}(S^3; 2)$.

O primeiro:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu') &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \stackrel{(1)}{=} 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Im } ev_7([f_{0,1}]) = \mathbb{Z}/12,$$

$$\text{Im } \partial_7 = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/30,$$

$$T = \mathbb{Z}/60 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_5(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}/60 \text{ ou } \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

O segundo é:

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) \circ \Sigma^{12}(\nu') \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) = \nu' \circ 2\mu_6 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \stackrel{(10)}{=} 0.$$

Portanto,

$$\text{Im } ev_7([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_7([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/12,$$

$$\text{Im } \partial_7 = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/30,$$

$$T = \mathbb{Z}/60 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_5(\mathcal{G}_f) = \mathbb{Z}/60 \text{ ou } \mathbb{Z}/30 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Caso $\pi_6(\mathcal{G}_f)$. Consideremos a seqüência no Lema 4.1.2 (com $k = 7$),

$$\pi_7(S^3) \xrightarrow{\partial_8} \pi_{19}(S^3) \longrightarrow \pi_6(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_7} \pi_6(S^3) \xrightarrow{\partial_7} \pi_{18}(S^3),$$

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_8} \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\phi} \pi_6(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_7} \mathbb{Z}/12 \xrightarrow{\partial_7} \mathbb{Z}/30.$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_8 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/6.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_6(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recordemos que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3, \partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4, \partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos feitos no caso anterior, temos

$$\text{Im } ev_7([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_7([f_{0,1}]) = \text{Im } ev_7([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/12,$$

Então

$$\mathbb{Z}/12 = \text{Im } ev_7 = A/\text{Nuc } ev_7 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_7 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/24$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6$ ou $T = \mathbb{Z}/72$.

Para decidirmos qual é o caso, consideremos

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_8 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2$$

e

$$\text{Im } \partial_8 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_8.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_8$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 8$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{19}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_7(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6].$$

Calculando $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as duas possibilidades

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) = \nu' \circ \mu_6,$$

ambos em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{12} \partial \omega = (n \bmod 2) \Sigma^{12}(\nu') \circ \eta_{18},$$

obtemos elementos de $\pi_{19}(S^3; 2)$.

O primeiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6) &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) \circ \eta_{18} \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \circ \eta_{18} \stackrel{(1)}{=} 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_8([f_{0,1}]) &= \mathbb{Z}/2, \\ \text{Im } \partial_8 &= 0, \\ \text{Im } \phi &= \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ T &= \mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/6 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ \pi_6(\mathcal{G}_f) &\approx \mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/6 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

O segundo:

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6) \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) \circ \eta_{18} = \nu' \circ 2\mu_6 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \circ \eta_{18} \stackrel{(10)}{=} 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Im } ev_8([f_{1,0}]) &= \text{Im } ev_8([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2, \\ \text{Im } \partial_8 &= 0, \\ \text{Im } \phi &= \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ T &= \mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/6 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ \pi_6(\mathcal{G}_f) &\approx \mathbb{Z}/72 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/6 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Caso $\pi_7(\mathcal{G}_f)$. Considerando a seqüência no Lema 4.1.2 (com $k = 8$),

$$\begin{aligned} \pi_8(S^3) &\xrightarrow{\partial_9} \pi_{20}(S^3) \longrightarrow \pi_7(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_8} \pi_7(S^3) \xrightarrow{\partial_8} \pi_{19}(S^3), \\ \mathbb{Z}/2 &\xrightarrow{\partial_9} \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2\phi \longrightarrow \pi_7(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_8} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_8} \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

É claro que

$$\text{Nuc}\phi = \text{Im}\partial_9 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim

$$\text{Im}\phi = (\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc}\phi = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_7(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recordemos que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3, \partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4, \partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos feitos no caso anterior, temos

$$\text{Im } ev_8([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_8([f_{0,1}]) = \text{Im } ev_8([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2,$$

Então

$$\mathbb{Z}/2 = \text{Im } ev_8 = A/\text{Nuc } ev_8 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_8 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Para decidirmos qual é o caso, consideremos

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_9 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2$$

e

$$\text{Im } \partial_9 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_9.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_9$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 9$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_8(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6^2].$$

Calculando então $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as duas possibilidades

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) = \nu' \circ \mu_6,$$

ambos em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{12} \partial \omega = (n \bmod 2) \Sigma^{12}(\nu') \circ \eta_{18}^2,$$

obtemos elementos de $\pi_{19}(S^3; 2)$.

O primeiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6^2) &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) \circ \eta_{18}^2 \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \circ \eta_{18}^2 \stackrel{(1)}{=} 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18}^2 \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Im } ev_9([f_{0,1}]) = \mathbb{Z}/2,$$

$$\text{Im } \partial_9 = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ \pi_7(\mathcal{G}_f) = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

O segundo:

$$\nu' \circ \Sigma^3(\mu_3) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6^2) \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \Sigma^{10}(2\Sigma\nu_4) \circ \eta_{18}^2 = \nu' \circ 2\mu_6 \circ \Sigma^{11}\nu_4 \circ \eta_{18}^2 \stackrel{(10)}{=} 0.$$

Portanto,

$$\text{Im } ev_9([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_9([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2,$$

$$\text{Im } \partial_9 = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \\ \pi_7(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Caso $\pi_8(\mathcal{G}_f)$. Considerando a sequência no Lema 4.1.2 (com $k = 9$),

$$\pi_9(S^3) \xrightarrow{\partial_{10}} \pi_{21}(S^3) \longrightarrow \pi_8(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_9} \pi_8(S^3) \xrightarrow{\partial_9} \pi_{20}(S^3),$$

$$\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{\partial_{10}} \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\phi} \pi_8(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_9} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_9} \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_{10} = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/3.$$

Assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_8(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recordemos que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3$, $\partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4$, $\partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos feitos no caso anterior, temos

$$\text{Im } ev_9([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_9([f_{0,1}]) = \text{Im } ev_9([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/2.$$

Então

$$\mathbb{Z}/2 = \text{Im } ev_9 = A/\text{Nuc } ev_9 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_9 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Para decidirmos qual é o caso, consideremos que

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_{10} = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/3$$

e

$$\text{Im } \partial_{10} = (\mathbb{Z}/3)/\text{Im } ev_{10}.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_{10}$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 10$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{21}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\mu}_4]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_9(S^3; 2) = 0.$$

Disso, temos que para qualquer f

$$\text{Im } ev_{10} = \mathbb{Z}/3,$$

$$\text{Im } \partial_{10} = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$T = \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_8(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Caso $\pi_9(\mathcal{G}_f)$. Considerando a sequência no Lema 4.1.2 (com $k = 10$),

$$\pi_{10}(S^3) \xrightarrow{\partial_{11}} \pi_{22}(S^3) \longrightarrow \pi_9(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_{10}} \pi_9(S^3) \xrightarrow{\partial_{10}} \pi_{21}(S^3),$$

$$\mathbb{Z}/15 \xrightarrow{\partial_{11}} \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\phi} \pi_9(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_{10}} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{\partial_{10}} \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_{11} = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/3.$$

Assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/44 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_9(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$ (recordemos que $\partial[f_{1,0}] = \mu_3, \partial[f_{0,1}] = \eta_3 \circ \epsilon_4, \partial[f_{1,1}] = \mu_3 \oplus \eta_3 \circ \epsilon_4$). Dos cálculos feitos no caso anterior, temos

$$\text{Im } ev_{10}([f_{1,0}]) = \text{Im } ev_{10}([f_{0,1}]) = \text{Im } ev_{10}([f_{1,1}]) = \mathbb{Z}/3.$$

Então

$$\mathbb{Z}/3 = \text{Im } ev_{10} = A/\text{Nuc } ev_{10} = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_{10} = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/396 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/6$ ou $T = \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $T = \mathbb{Z}/44 \oplus \mathbb{Z}/6$.

Para decidir qual é o caso, consideremos o seguinte

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_{11} = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/3$$

e

$$\text{Im } \partial_{10} = (\mathbb{Z}/15)/\text{Im } ev_{11}.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_{11}$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 11$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{22}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\mu}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \sigma_{15}]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\mu_3]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_{10}(S^3; 2) = 0.$$

Disso, temos que para qualquer f

$$\text{Im } ev_{11} = \mathbb{Z}/15,$$

$$\text{Im } \partial_{11} = 0,$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$T = \mathbb{Z}/392 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } T = \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/6,$$

$$\pi_9(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}/392 \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ ou } \mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/6.$$

■

Observação 4.3.10. Podemos ver pelas provas dos Lemas acima que

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

para qualquer um dos $\partial \omega(2)$ usados (notação da Proposição 4.1.8). Continuando os cálculos, agora só para essa composição, esperamos encontrar pelo menos um caso no qual ela seja diferente de zero. Caso isso ocorra, poderemos ter então $\pi_n(G_{f_{(1,0)}}) \not\approx \pi_n(G_{f_{(1,1)}})$, para algum n .

Usando a Proposição 4.1.8 em cada uma dessas composições, consideremos cada caso (recordando que o número indicado em cada igualdade se refere a relação encontrada no Apêndice deste capítulo):

Caso $k = 12$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{23}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{11}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3]$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\epsilon_3) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \epsilon_{15} \stackrel{(11)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \epsilon_{15} \\ &\stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \eta_{14} \circ \epsilon_{15} \stackrel{(14)}{=} \epsilon' \circ 4(\nu_3 \circ \sigma_{16}) = 4\epsilon' \circ \nu_3 \circ \sigma_{16} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 13$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{24}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \mu_3$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\mu_3) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \mu_{15} \stackrel{(11)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \mu_{15} \\ &\stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \eta_{14} \circ \mu_{15} \stackrel{(17)}{=} \epsilon' \circ 4(\zeta_{13}) = 4\epsilon' \circ \zeta_{13} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \eta_3 \circ \epsilon_4$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\eta_3 \circ \epsilon_4) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \epsilon_{16} \stackrel{(11)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \epsilon_{16} \\ &\stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \epsilon_{16} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \epsilon_{16} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 14$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{25}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{13}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\epsilon'] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \epsilon'$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\epsilon') &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}(\epsilon') \stackrel{(14)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{10}(2\nu_5 \circ \sigma_8) \\ &= \nu' \circ 2\eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \nu_{15} \circ \sigma_{18} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \eta_3 \circ \mu_4$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\eta_3 \circ \mu_4) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \mu_{16} \stackrel{(11)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \mu_{16} \\ &\stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \mu_{16} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \mu_{16} = 0. \end{aligned}$$

⁶Recorde que os números que seguem nas igualdades se referem as relações apresentadas no Apêndice deste capítulo.

Caso $k = 15$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{26}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{14}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu'] \oplus \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \epsilon_6]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \mu'$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\mu') &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}(\mu') \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{10}(2\zeta_5) \\ &= \nu' \circ 2\eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \zeta_{15} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \epsilon_3 \circ \nu_{11}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\epsilon_3 \circ \nu_{11}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \epsilon_{15} \circ \nu_{23} \stackrel{(11)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \epsilon_{15} \circ \nu_{23} \\ &\stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \eta_{14} \circ \epsilon_{15} \circ \nu_{23} \stackrel{(14)}{=} \epsilon' \circ 4(\nu_{13} \circ \sigma_{16}) \circ \nu_{23} = 4\epsilon' \circ \nu_{13} \circ \sigma_{16} \circ \nu_{23} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \epsilon_6$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \epsilon_6) &\stackrel{(16)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}(\epsilon' \circ \eta_{13}) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}\epsilon' \circ \eta_{25} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \Sigma^{13}\epsilon' \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \Sigma^{13}\epsilon' \stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \Sigma^{13}\epsilon' \\ &= 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \Sigma^{13}\epsilon' = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 16$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{27}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \mu_6$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \mu_6) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}\nu' \circ \mu_{18} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4\nu' \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}\nu' \circ \eta_{18} \circ \epsilon_{19} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4\nu' \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \epsilon_{19} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \epsilon_{19} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \epsilon_{19} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 17$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{28}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{16}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]$.

Compondo com $\partial\omega(2) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}\nu' \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4\nu' \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 18$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{12}\partial\omega(2) = 0$$

em $\pi_{29}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{17}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]$.

Compondo com $\partial\omega(2) = \epsilon_3 \circ \nu_{11}^2$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \epsilon_{15} \circ \nu_{23}^2 = \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \epsilon_{15} \circ \nu_{23} \circ \nu_{26} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \nu_{15} \circ \epsilon_{18} \circ \nu_{26} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \epsilon_{18} \circ \nu_{26} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 19$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{12}\partial\omega(2) = 0$$

em $\pi_{30}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{18}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\bar{\epsilon}_3]$.

Compondo com $\partial\omega(2) = \bar{\epsilon}_3$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\bar{\epsilon}_3) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \bar{\epsilon}_{15} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \bar{\epsilon}_{15} \\ &\stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \eta_{14} \circ \bar{\epsilon}_{15} \stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \nu_{14} \circ \sigma_{17} \circ \nu_{24}^2 \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 20$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{12}\partial\omega(2) = 0$$

em $\pi_{31}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{19}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4]$.

Compondo com $\partial\omega(2) = \mu_3 \circ \sigma_{12}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\mu_3 \circ \sigma_{12}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \mu_{15} \circ \sigma_{24} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \mu_{15} \circ \sigma_{24} \\ &\stackrel{(17)}{=} \epsilon' \circ 4\zeta_{13} \circ \sigma_{24} = 4\epsilon' \circ \zeta_{13} \circ \sigma_{24} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial\omega(2) = \eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \bar{\epsilon}_{16} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \bar{\epsilon}_{16} \\ &\stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \bar{\epsilon}_{16} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \bar{\epsilon}_{16} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 21$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{32}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \bar{\epsilon}'$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\bar{\epsilon}') &\stackrel{(21)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \nu' \circ \kappa_{18} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4 \nu' \circ \epsilon_{10} \circ \kappa_{18} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\Sigma^3 \nu_4 \circ \epsilon_{10} \circ \kappa_{18} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \kappa_{18} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \bar{\mu}_3$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\bar{\mu}_3) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \bar{\mu}_{15} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \epsilon_6 \circ \eta_{14} \circ \bar{\mu}_{15} \\ &\stackrel{(16)}{=} \epsilon' \circ \eta_{13} \circ \eta_{14} \circ \bar{\mu}_{15} \stackrel{(22)}{=} \epsilon' \circ \Sigma^{10}(\eta_3^2 \circ \bar{\mu}_{15}) = \epsilon' \circ \Sigma^{10}(2\bar{\mu}') \\ &\stackrel{(22)}{=} 2\epsilon' \circ \Sigma^8(\Sigma^2 \bar{\mu}') = 2\epsilon' \circ \Sigma^8(2\bar{\zeta}_5) = 4\epsilon' \circ \bar{\zeta}_{13} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \mu_{16} \circ \sigma_{25} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \mu_{16} \circ \sigma_{25} \stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \mu_{16} \circ \sigma_{25} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \mu_{16} \circ \sigma_{25} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 22$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{33}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{21}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\mu}_4]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \mu' \circ \sigma_{14}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\mu' \circ \sigma_{14}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \mu' \circ \sigma_{26} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \sigma_{15} \circ \Sigma^{19} \mu' \stackrel{(19)}{=} 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \bar{\epsilon}_6$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \bar{\epsilon}_6) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \nu' \circ \bar{\epsilon}_{18} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4 \nu' \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\epsilon}_{18} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\epsilon}_{18} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\epsilon}_{18} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \eta_3 \circ \bar{\mu}_4$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\eta_3 \circ \bar{\mu}_4) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \eta_{15} \circ \bar{\mu}_{16} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \epsilon_8 \circ \bar{\mu}_{16} \\ &\stackrel{(14)}{=} \nu' \circ 4(\nu_6 \circ \sigma_9) \circ \bar{\mu}_{16} = 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \bar{\mu}_{16} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 23$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{34}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{22}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\mu}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}]$.

Compondo com $\partial \omega(2) = \bar{\mu}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\bar{\mu}') &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \bar{\mu}' \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \sigma_{10}(2\bar{\zeta}_5) \\ &= \nu' \circ 2\eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \bar{\zeta}_{15} = 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \nu' \circ \mu_{18} \circ \sigma_{27} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4 \nu' \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} \circ \sigma_{27} \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} \circ \sigma_{27} \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \mu_{18} \circ \sigma_{27} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 24$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{35}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]$ (este grupo pode ser encontrado em [32]).

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \bar{\mu}_6$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \bar{\mu}_6) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \nu' \circ \bar{\mu}_{18} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4 \nu' \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\mu}_{18} \\ &\stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\mu}_{18} = 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \bar{\mu}_{18} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Compondo com $\partial \omega(2) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12} \nu' \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \circ \sigma_{28} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4 \nu' \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \circ \sigma_{28} \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \circ \sigma_{28} \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \mu_{19} \circ \sigma_{28} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 25$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{12} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{36}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{24}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]$ (este grupo pode ser encontrado em [30]).

Compondo com $\partial\omega(2) = \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \Sigma^{12}\nu' \circ \eta_{18} \circ \bar{\mu}_{19} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \Sigma^4\nu' \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \bar{\mu}_{19} \stackrel{(4)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ 2\nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \bar{\mu}_{19} \\ &= 2\nu' \circ \eta_6 \circ \nu_7 \circ \epsilon_{10} \circ \eta_{18} \circ \bar{\mu}_{19} \stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 26$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{12}\partial\omega(2) = 0$$

em $\pi_{37}(S^3; 2)$. Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{25}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \kappa_{11}]$ (este grupo pode ser encontrado em [30]).

Compondo com $\partial\omega(2) = \epsilon_3 \circ \kappa_{11}$

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4) \circ \Sigma^{12}(\epsilon_3 \circ \kappa_{11}) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7 \circ \epsilon_{15} \circ \kappa_{23} \stackrel{(23)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \bar{\epsilon}_8 \circ \kappa_{23} \\ &\stackrel{(21)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3^2 \circ \bar{\epsilon}_5) \circ \kappa_{23} = \nu' \circ \Sigma^3(2\epsilon') \circ \kappa_{23} = 2\nu' \circ \Sigma(\Sigma^2\epsilon') \circ \kappa_{23} \\ &= 4\nu' \circ \nu_6 \circ \sigma_9 \circ \kappa_{23} \stackrel{(14)}{=} 0. \end{aligned}$$

As informações que temos quanto aos grupos de homotopia de S^3 nos permitem fazer o cálculo dessas composições até esse ponto, porém o que temos já nos faz suspeitar que os grupos de gauge $\mathcal{G}_{f_{(1,0)}}, \mathcal{G}_{f_{(1,1)}}$ têm o mesmo tipo. Na proposição que segue, vemos que é exatamente isso que ocorre.

Proposição 4.3.11. *Os fibrados $\partial[f_{(1,0)}] = \mu_3$ e $\partial[f_{(1,1)}] = \mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4$ possuem grupos de gauge com o mesmo tipo de homotopia (logo, $\pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,0)}}) \approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,1)}})$ para qualquer valor de n).*

Demonstração: Consideremos os grupos de gauge dos dois fibrados classificados pela classe das duas aplicações

$$f_{(1,0)}, f_{(1,1)} : S^{13} \rightarrow BS^3.$$

Sabemos que $\pi_k(\mathcal{G}_{f_{(1,0)}}) \approx \pi_k(\mathcal{G}_{f_{(1,1)}})$, para todo $k \leq 26$. Sabemos também que os grupos de gauge desses dois fibrados podem apenas ser homotópos as fibras de homotopia F_f e F_g das duas aplicações

$$f, g : S^3 \rightarrow \Omega_0^{12}S^3,$$

tais que as aplicações adjuntas obtidas aplicando a lei exponencial

$$ad : m_0(S^3, \Omega_0^{12}S^3) \rightarrow m_0(S^{15}, S^3)$$

estão nas classes

$$ad(f) \in \nu' \circ \mu_6 \in \pi_{15}(S^3; 2)$$

e

$$ad(g) \in \nu' \circ (\mu_6 + \eta_6 \circ \epsilon_7) \in \pi_{15}(S^3; 2).$$

Provemos que $F_f \sim F_g$, mostrando a existência de uma auto-equivalência de homotopia s de $\Omega_0^{12}S^3$ tal que $g \sim sf$. A prova será dividida em vários passos.

Passo 0. Recordemos $\eta_6 \circ \epsilon_7 = \Sigma^3(\eta_3 \circ \epsilon_4)$ e $\mu_6 = \Sigma^3\mu_3$, por [46] pág. 39, 51, 56.

Passo 1. É melhor considerar o problema antes da restrição à componente da aplicação constante. A saber, consideremos as duas aplicações

$$f, g : S^3 \rightarrow \Omega_0^{12}S^3,$$

obtidas compondo com as equivalências de homotopia oportunas entre as componentes do espaço dos laços.

Passo 2. Mostremos que a imagem de f e g estão contidas em um subespaço de $\Omega_0^{12}S^3$ definido como segue (onde identificamos os representantes com as classes):

$$\Lambda^{12}S^3 = \{h_x \in \Omega_0^{12}S^3 \mid h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \alpha)(x \wedge _), x \in S^3, \alpha \in \Omega_0^{12}S^3\}.$$

De fato, se $h \in \text{Im}f$, então

$$\exists x \in S^3 \mid h = h_x = f(x),$$

e, para todo $y \in S^{12}$,

$$h_x : S^3 \wedge S^{12} \xrightarrow{\iota_3 \wedge \alpha} S^3 \wedge S^3 \xrightarrow{\nu'} S^3$$

e

$$h_x(y) = f(x)(y) = ad(f)(x \wedge y) = \nu' \circ \mu_6(x \wedge y) = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \mu_3)(x \wedge y),$$

e a tese segue. O mesmo argumento funciona para g . O possível α é, por conseguinte, μ_3 ou $\mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4$. No próximo passo introduziremos alguma informação sobre essas duas classes.

Logo, podemos reduzir o problema considerando as duas aplicações:

$$f, g : S^3 \rightarrow \Lambda^{12}S^3$$

e precisamos encontrar uma auto-equivalência de homotopia de $\Lambda^{12}S^3$.

Passo 3. Recordemos a construção das classes μ_3 e ϵ_3 . Construimos um espaço K pelo *push out*

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \longrightarrow & CS^5 \\ 8\iota_5 \downarrow & & \downarrow \\ S^5 & \longrightarrow & K = S^5 \sqcup_{8\iota_5} CS^5 \end{array}$$

Também, $\Sigma(A \sqcup_{\alpha} CB) = \Sigma A \sqcup_{\Sigma\alpha} C\Sigma B$. Do fato que $\nu' \circ 8\iota_6 = 8\nu' = 0$, temos uma extensão $\tilde{\nu}'$ como no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^6 & \xrightarrow{\quad} & CS^6 \\
 8\iota_6 \downarrow & & \downarrow \\
 S^6 & \xrightarrow{\quad} & \Sigma K = \Sigma S^5 \sqcup_{8\Sigma\iota_5} C\Sigma S^5 \\
 & \searrow \nu' & \downarrow \tilde{\nu}' \\
 & & S^3
 \end{array}$$

Como $\nu' \circ \nu_6 = 0$ [46] (Prop. 5.11 pág. 46), temos uma co-extensão $\tilde{\nu}_6$

$$\begin{array}{ccc}
 S^9 & & \\
 \downarrow \nu_6 & & \\
 S^6 & \xrightarrow{\quad} & CS^6 \\
 \nu' \downarrow & & \downarrow \\
 S^3 & \xrightarrow{\quad} & S^3 \sqcup_{\nu'} CS^6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S^{10} \\
 \swarrow \tilde{\nu}_6
 \end{array}$$

O elemento ϵ_3 é o único elemento da composição secundária

$$\{\epsilon_3\} = \{\eta_3, \Sigma\nu', \Sigma\nu_6\}_1 \subseteq \pi_{11}(S^3; 2),$$

que é definido pelo diagrama abaixo, já que $\eta_3 \circ \Sigma\nu' = \nu' \circ \nu_6 = 0$ ([46] Lema 5.7 pág. 43 e Prop. 5.11 pág. 46).

$$\begin{array}{ccc}
 S^{10} & & \\
 \downarrow \nu_7 & & \\
 S^7 & \xrightarrow{\quad} & CS^7 \\
 \Sigma\nu' \downarrow & & \downarrow \\
 S^4 & \xrightarrow{\quad} & L = S^4 \sqcup_{\Sigma\nu'} CS^7 \\
 & \searrow \eta_3 & \downarrow \bar{\eta}_3^L \\
 & & S^3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S^{11} \\
 \swarrow \Sigma\tilde{\nu}_6
 \end{array}$$

Logo, é uma composição

$$\epsilon_3 = \bar{\eta}_3^L \circ \Sigma\tilde{\nu}_6.$$

Agora, do fato que $8\iota_5 \circ \nu_5 = 0$, temos uma co-extensão $\tilde{\nu}_5$

$$\begin{array}{ccc}
 S^8 & & \\
 \downarrow \nu_5 & & \\
 S^5 & \xrightarrow{\quad} & CS^5 \\
 8\iota_5 \downarrow & & \downarrow \\
 S^5 & \xrightarrow{\quad} & K = S^5 \sqcup_{\iota_5} CS^5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 S^9 \\
 \swarrow \tilde{\nu}_5
 \end{array}$$

Como $\eta_3 \circ \Sigma \bar{\nu}' = \bar{\nu}' \circ \Sigma \tilde{\nu}_5 = 0$ ([46] pág. 55, 56), podemos construir a composição secundária

$$\{\eta_3, \Sigma \bar{\nu}', \Sigma^2 \tilde{\nu}_5\}_1 \subseteq \pi_{12}(S^3; 2),$$

com o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S^{11} & & & & \\ \downarrow \Sigma^2 \tilde{\nu}_5 & & & & \\ \Sigma^2 K & \xrightarrow{\quad} & C\Sigma^2 K & & \\ \downarrow \Sigma \bar{\nu}' & & \downarrow & \swarrow \Sigma \widetilde{\Sigma \tilde{\nu}_5} & S^{12} \\ S^4 & \xrightarrow{\quad} & M = S^4 \sqcup_{\Sigma \bar{\nu}'} C\Sigma^2 K & & \\ & \searrow \eta_3 & \downarrow \bar{\eta}_3^M & & \\ & & S^3 & & \end{array}$$

e

$$\mu_3 \in \{\eta_3, \Sigma \bar{\nu}', \Sigma^2 \tilde{\nu}_5\}_1 \subseteq \pi_{12}(S^3; 2),$$

é uma composição

$$\mu_3 = \bar{\eta}_3^M \circ \Sigma \tilde{\gamma},$$

denotando por $\Sigma \tilde{\gamma}$ o elemento $\Sigma \widetilde{\Sigma \tilde{\nu}_5}$.

Observe que o complexo L é um subcomplexo de M , e denotamos a inclusão por $j : L \rightarrow M$.

Passo 4. Usando as construções descritas no *Passo 3*, e observando que

$$\epsilon_3 \circ \eta_{11} = \bar{\eta}_3^L \circ \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11} = \bar{\eta}_3^M \circ j_* \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11},$$

vemos que as aplicações α aparecendo na decomposição das aplicações h , introduzidas no *Passo 2* nas imagens de f e g , são da seguinte forma: $\alpha = \mu_3 = \bar{\eta}_3^M \circ \Sigma \tilde{\gamma}$ ou $\alpha = \mu_3 + \epsilon_3 \circ \eta_{11} = \bar{\eta}_3^M \circ \Sigma \tilde{\gamma} + \bar{\eta}_3^M \circ j_* \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11} = \bar{\eta}_3^M \circ (\Sigma \tilde{\gamma} + j_* \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11})$, e isso significa que todas as aplicações na imagem de f e g têm a forma:

$$\begin{aligned} h_x &= \nu' \circ (\iota_3 \wedge \mu_3)(x \wedge _) = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M \circ \Sigma \tilde{\gamma})(x \wedge _) \\ &= \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \Sigma \tilde{\gamma})(x \wedge _), \\ h_x &= \nu' \circ (\iota_3 \wedge (\mu_3 + \epsilon_3 \circ \eta_{11}))(x \wedge _) = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M \circ (\Sigma \tilde{\gamma} + j_* \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11}))(x \wedge _) \\ &= \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge (\Sigma \tilde{\gamma} + j_* \Sigma \tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11}))(x \wedge _). \end{aligned}$$

Assim, todas essas aplicações se fatoram através do espaço M como segue:

$$h_x : x \wedge S^{12} \xrightarrow{\iota_3 \wedge \Sigma \tilde{\gamma}} x \wedge M \xrightarrow{\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M} x \wedge S^3 \xrightarrow{\nu'} S^3,$$

para algum $\Sigma \tilde{\gamma}$ como descrito acima, $x \in S^3$.

Denotamos por $L^{12}S^3$ o espaço

$$L^{12}S^3 = \{h_x \in \Omega^{12}S^3 \mid h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \Sigma \tilde{\gamma})(x \wedge _), x \in S^3, \Sigma \tilde{\gamma} \in \Omega^{12}M\}.$$

Vimos que

$$f, g : S^3 \rightarrow L^{12}S^3,$$

e assim precisamos encontrar uma auto-equivalência de homotopia s de $L^{12}S^3$, tal que $g = sf$.

Mais precisamente, denotando por $\Sigma\tilde{\gamma}_1 = \Sigma\widetilde{\Sigma\tilde{\nu}_5}$ e por $\Sigma\gamma_2 = j_*\Sigma\tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11}$ em $\Omega^{12}(M)$, temos

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= \bigcup_{x \in S^3} \{h_x \in \Omega^{12}S^3 \mid h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \Sigma\tilde{\gamma}_1)(x \wedge _)\}, \\ \text{Im}g &= \bigcup_{x \in S^3} \{h_x \in \Omega^{12}S^3 \mid h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge (\Sigma\tilde{\gamma}_1 + \Sigma\gamma_2))(x \wedge _)\}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, as aplicações f e g agem como segue

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \Sigma\tilde{\gamma}_1)(x \wedge _), \\ g : x &\mapsto h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge (\Sigma\tilde{\gamma}_1 + \Sigma\gamma_2))(x \wedge _). \end{aligned}$$

Observação 4.3.12. Uma forma mais explícita dessas aplicações é possível recordando que $\nu'(x \wedge y) = xyx^{-1}$, na componente da identidade de Ω^3S^3 .

Passo 5. *Cálculos da Homologia.* Encontremos algumas informações sobre a topologia dos espaços K , L e M , definidos no *Passo 3*. Recordemos as definições $K = S^5 \sqcup_{8\iota_5} CS^5$, $L = S^4 \sqcup_{\Sigma\nu'} CS^7$, $M = S^4 \sqcup_{\Sigma\nu'} C\Sigma^2K$, com $\Sigma^2K = S^7 \sqcup_{8\iota_7} CS^7$. Assim, Σ^2K é um complexo com uma célula em dimensões 0, 7 e 8, L é um complexo com uma célula em dimensões 0, 4 e 8, e M é um complexo com 4-esqueleto S^4 e uma célula em dimensão 9. Agora, S^7 é um retrato de deformação de um conjunto aberto em Σ^2K . Apenas considere um pequeno colar no cone colado, então (veja por exemplo [35] ex. 2, pág. 230), $H_p(\Sigma^2K, S^7; \mathbb{Z}) \approx H_p(\Sigma^2K/S^7; \mathbb{Z})$. Temos $\Sigma^2K/S^7 \sim S^8$ (use, por exemplo, a seqüência de Puppe). Logo,

$$H_p(\Sigma^2K, S^7; \mathbb{Z}) \approx H_p(\Sigma^2K/S^7; \mathbb{Z}) \approx H_q(S^8; \mathbb{Z}).$$

Pelo mesmo argumento,

$$\begin{aligned} H_p(L, S^4; \mathbb{Z}) &\approx H_p(L/S^4; \mathbb{Z}) \approx H_q(S^8; \mathbb{Z}), \\ H_p(M, S^4; \mathbb{Z}) &\approx H_p(M/S^4; \mathbb{Z}) \approx H_q(\Sigma^3K; \mathbb{Z}) \approx H_{q-1}(\Sigma^2K; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Agora, uma análise direta da construção geométrica mostra que $M/L \sim S^9$ e, como podemos obter o primeiro quociente considerando o quociente $M/S^4 \sim \Sigma\Sigma^2K$, e então considerando o quociente com o subcomplexo CS^7 contido na base da suspensão, aplicamos o mesmo argumento usado acima e obtemos

$$H_p(M, L; \mathbb{Z}) \approx H_p(M/L; \mathbb{Z}) \approx H_q(S^9; \mathbb{Z}).$$

Calculamos, primeiro, os grupos de homologia e homotopia de Σ^2K . Da seqüência exata de homologia do par, $i : S^7 \rightarrow \Sigma^2K$ (todos os coeficientes em $\mathbb{Z}$), temos

$$H_q(S^7) \xrightarrow{i_*} H_q(\Sigma^2 K) \longrightarrow H_q(\Sigma^2 K, S^7) \approx H_q(S^8) \xrightarrow{\partial} H_q(S^7).$$

Para $0 < q < 7$,

$$0 \xrightarrow{i_*} H_q(\Sigma^2 K) \longrightarrow 0,$$

e assim $H_q(\Sigma^2 K) = H_q(\Sigma^2 K, S^7) = 0$.

$$H_8(S^7) \xrightarrow{i_*} H_8(\Sigma^2 K) \longrightarrow H_8(\Sigma^2 K, S^7) \approx H_8(S^8) \xrightarrow{\partial} H_7(S^7) \xrightarrow{i_*} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{i_*} H_7(\Sigma^2 K) \longrightarrow H_7(\Sigma^2 K, S^7) \longrightarrow H_6(S^7),$$

como ∂ é a multiplicação por 8

$$0 \xrightarrow{i_*} H_8(\Sigma^2 K) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{8} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} H_7(\Sigma^2 K) \longrightarrow 0.$$

Logo, os únicos grupos de homologia não triviais são

$$H_7(\Sigma^2 K) \approx \mathbb{Z}/8,$$

$$H_8(\Sigma^2 K, S^7) \approx \mathbb{Z}.$$

Segue de Hurewicz ([47] (7.8) e (7.10) pág. 180) que

$$\pi_7(\Sigma^2 K) \approx \mathbb{Z}/8,$$

$$\pi_8(\Sigma^2 K, S^7) \approx \mathbb{Z}.$$

Calculemos, agora, os grupos de homologia e homotopia de L . Consideraremos a seqüência de homologia do par $i : S^4 \rightarrow L$ e recordemos que $H_q(L, S^4; \mathbb{Z}) \approx H_q(S^8; \mathbb{Z})$.

$$H_q(S^4) \xrightarrow{i_*} H_q(L) \longrightarrow H_q(L, S^4) \approx H_q(S^8) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^4).$$

Para $0 < q < 4$, $H_q(L) \approx H_q(L, S^4) = 0$.

Para $q = 4$, $H_4(L) \approx \mathbb{Z}$, $H_4(L, S^4) = 0$.

Para $q = 5, 6, 7$, $H_q(L) = 0$, $H_q(L, S^4) = 0$.

$$\begin{aligned} H_9(S^4) &\xrightarrow{i_*} H_9(L) \longrightarrow H_9(L, S^4) \approx H_9(S^8) \xrightarrow{\partial} \\ &\xrightarrow{\partial} H_8(S^4) \xrightarrow{i_*} H_8(L) \longrightarrow H_8(L, S^4) \approx H_8(S^8) \longrightarrow H_7(S^4), \end{aligned}$$

obtendo

$$0 \xrightarrow{i_*} H_9(L) \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{i_*} H_8(L) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Assim, $H_8(L) \approx H_8(L, S^4) \approx \mathbb{Z}$ e os grupos em dimensões maiores são nulos. Novamente, pelo Teorema de Hurewicz

$$\pi_4(L) \approx H_4(L) \approx \mathbb{Z},$$

$$\pi_8(L, S^4) \approx H_8(L, S^4) \approx \mathbb{Z}.$$

Também precisamos algumas informações sobre a co-homologia. Pelo Teorema dos coeficientes universais ([35] 53.1):

$$H^q(M) \approx \text{Hom}(H_q(M), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(M), \mathbb{Z})$$

Então

$$\begin{aligned} H^q(L) &= 0, \quad 0 < q < 4, \\ H^4(L) &\approx \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}, \\ H^5(L) &\approx \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0, \\ H^q(L) &= 0, \quad q = 6, 7, \\ H^8(L) &\approx \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}, \\ H^9(L) &\approx \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Logo, se $h : L \rightarrow L$ é uma aplicação, o homomorfismo induzido h^* é um homomorfismo de anel na co-homologia. A saber, se $H^4(L) = \mathbb{Z}[x]$, com um gerador fixado x , então $h^*(x^2) = (h^*(x))^2$. Mas observe que x^2 não é um gerador de $H^8(L)$. De fato, se y é tal gerador, temos a relação $x^2 = H(\Sigma\nu')y$, sendo $H(f)$ o invariante de Hopf de f (veja [7]). Agora, $H(\Sigma\nu') = 0$, já que $H\Sigma = 0$ ([46] [17]).

Continuando, calculemos os grupos de M . Consideremos a seqüência de homologia do par (M, S^4) e seja $i : S^4 \rightarrow M$ a inclusão. Recordemos que $H_q(M, S^4; \mathbb{Z}) \approx H_{q-1}(\Sigma^2 K; \mathbb{Z})$.

$$H_q(S^4) \xrightarrow{i_*} H_q(M) \longrightarrow H_q(M, S^4) \approx H_{q-1}(\Sigma^2 K) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^4).$$

Para $0 < q < 4$, $H_q(M) \approx H_q(M, S^4) = 0$.

Para $q = 4$, $H_4(M) \approx \mathbb{Z}$, $H_4(M, S^4) = 0$.

Para $q = 5, 6, 7$ $H_q(M) = 0$, $H_q(M, S^4) = 0$.

$$\begin{aligned} H_9(S^4) &\xrightarrow{i_*} H_9(M) \longrightarrow H_9(M, S^4) \approx H_8(\Sigma^2 K) \xrightarrow{\partial} \\ &\xrightarrow{\partial} H_8(S^4) \xrightarrow{i_*} H_8(M) \longrightarrow H_8(M, S^4) \approx H_7(\Sigma^2 K) \longrightarrow H_8(S^4), \end{aligned}$$

obtendo

$$0 \xrightarrow{i_*} H_9(M) \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{i_*} H_8(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/8 \longrightarrow 0.$$

Assim, $H_8(M) \approx H_8(M, S^4) \approx \mathbb{Z}/8$, e os grupos maiores são nulos. Pelo Teorema de Hurewicz

$$\pi_4(M) \approx H_4(M) \approx \mathbb{Z},$$

$$\pi_8(M, S^4) \approx H_8(M, S^4) \approx \mathbb{Z}/8.$$

Passo 6. Consideraremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \\ & & \downarrow \sigma & & \\ A & \xrightarrow{a'} & B & \xrightarrow{b'} & C, \end{array}$$

no qual σ é uma equivalência de homotopia. Suponha que $f = ba$, $g = b'a'$ e $a' = \sigma a$. O espaço-produto $m_0(A, B) \times m_0(B, C)$ é um subespaço do espaço das aplicações baseadas $m_0(A, C)$ e coincide com o subespaço das aplicações que se fatoram através de B , o qual denotamos por $m_0(A, B, C)$. A equivalência σ define duas equivalências:

$$\sigma_{\#} : m_0(A, B) \rightarrow m_0(A, B), \quad \sigma_{\#}(a) = \sigma a,$$

$$\sigma^{\#} : m_0(B, C) \rightarrow m_0(B, C), \quad \sigma^{\#}(b') = b'\sigma.$$

A primeira define uma equivalência

$$\sigma_{\#} : m_0(A, B, C) \rightarrow m_0(A, B, C), \quad \sigma_{\#}(f = ab) = b\sigma a,$$

para cada b fixado; a segunda define uma equivalência

$$\sigma^{\#} : m_0(A, B, C) \rightarrow m_0(A, B, C), \quad \sigma^{\#}(f = ab) = b\sigma a,$$

para cada a fixado.

Passo 7. Calculemos alguns grupos de homotopia de K , $\Sigma^3 K$ e M . Pelo Teorema de suspensão de Freudenthal ([47] VII.7.13), como $\Sigma^2 K$ é $(7-1)$ -conexo, $\Sigma : \pi_q(K) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma K)$ é um isomorfismo para $q < (10-1) = 9$. Então $\Sigma^3 K$ é $(8-1)$ -conexo.

Seja $i : S^4 \rightarrow M$ a inclusão e $\kappa : M \rightarrow M/S^4$ a projeção. O par (M, S^4) é $(8-1)$ -conexo já que $M/S^4 \sim \Sigma^3 K$ (veja os cálculos da homologia no *Passo 5*). Logo, $\pi_q(M, S^4) \approx \pi_q(\Sigma^3 K)$, para $q < (8+4-1) = 11$, por Blackers-Massey ([47] VII.7.12), com o isomorfismo induzido pela projeção. Usando a seqüência de homotopia do par com $q < 11$:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_q(M, S^4) & \longrightarrow & \pi_{q-1}(S^4) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{q-1}(M) & \longrightarrow & \pi_{q-1}(M, S^4) & \longrightarrow \\ & \searrow \kappa_* & \downarrow = & & & \searrow \kappa_* & \downarrow = & & \\ & & \pi_q(\Sigma^3 K) & & & & \pi_{q-1}(\Sigma^3 K) & & \end{array}$$

obtemos

$$\longrightarrow \pi_q(\Sigma^3 K) \longrightarrow \pi_{q-1}(S^4) \xrightarrow{i_*} \pi_{q-1}(M) \xrightarrow{\kappa_*} \pi_{q-1}(\Sigma^3 K) \longrightarrow$$

Com $q = 5$ e $q = 6$, isso mostra que $\pi_4(M) = \mathbb{Z}[i_*(\iota_4)]$, $\pi_5(M) = \mathbb{Z}[i_*(\eta_4)]$.

Passo 8. Pelo *Passo 6*, para encontrar uma equivalência do espaço $L^{12}S^3$ definido no final do *Passo 4*, é suficiente encontrar uma equivalência σ de M , já que disso temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
S^3 \wedge S^{12} & \xrightarrow{\iota_3 \wedge \Sigma \tilde{\gamma}} & S^3 \wedge M & \xrightarrow{\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M} & S^3 \wedge S^3 \xrightarrow{\nu'} S^3 \\
& & \downarrow \iota_3 \wedge \sigma & & \\
& & S^3 \wedge M & &
\end{array}$$

o qual permite aplicar a construção feita no *Passo 6*.

Construímos uma auto-equivalência de M . Consideremos a seqüência de Puppe do *push out*:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^2 K & \longrightarrow & C\Sigma^2 K & & & & \\
\downarrow \Sigma \bar{\nu}' & & \downarrow & & & & \\
S^4 & \xrightarrow{i} & M = S^4 \sqcup_{\Sigma \bar{\nu}'} C\Sigma^2 K & \xrightarrow{\kappa} & \Sigma^3 K & \xrightarrow{\Sigma^2 \bar{\nu}'} & S^5
\end{array}$$

Obtendo a seqüência co-exata dos conjuntos e grupos (veja [42] pág. 366):

$$\longrightarrow \pi_5(M) \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} [\Sigma^3 K, M]_0 \xrightarrow{\kappa^*} [M, M]_0 \xrightarrow{i^*} \pi_4(M) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*} [\Sigma^2 K, M]_0.$$

Vimos que $\pi_4(M) \approx \mathbb{Z}$, e é gerado pela classe da inclusão $[i]$. Também, pela definição do *push out*, $i\Sigma \bar{\nu}' \sim 0$. Como $\Sigma \bar{\nu}'$ é uma suspensão, $(\Sigma \bar{\nu}')^*(k[i]) = k(\Sigma \bar{\nu}')^*([i])$, logo deduzimos que o homomorfismo $(\Sigma \bar{\nu}')^*$ é o trivial (já que ele aplica o gerador em 0). Assim,

$$\longrightarrow \pi_5(M) \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} [\Sigma^3 K, M]_0 \xrightarrow{p^*} [M, M]_0 \xrightarrow{i^*} \pi_4(M) \longrightarrow 0.$$

Aplicando a mesma construção com S^4 e $\Sigma^3 K$, respectivamente, obtemos o diagrama comutativo (as linhas verticais não são necessariamente exatas):

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow \pi_5(S^4) & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, S^4]_0 & \xrightarrow{\kappa^*} & [M, S^4]_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi_4(S^4) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*} \\
\downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\
\longrightarrow \pi_5(M) & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, M]_0 & \xrightarrow{\kappa^*} & [M, M]_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi_4(M) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*} 0 \\
\downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* \\
\longrightarrow \pi_5(\Sigma^3 K) & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, \Sigma^3 K]_0 & \xrightarrow{\kappa^*} & [M, \Sigma^3 K]_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi_4(\Sigma^3 K) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*}
\end{array}$$

Temos mais informações desse diagrama que não serão necessárias. Usando os cálculos do *Passo 7*, o diagrama se torna

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow \pi_5(S^4) & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, S^4]_0 & \xrightarrow{\kappa^*} & [M, S^4]_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi_4(S^4) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*} \\
\downarrow = & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow = \\
\longrightarrow \pi_5(M) & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, M]_0 & \xrightarrow{\kappa^*} & [M, M]_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi_4(M) \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*} 0 \\
\downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* & & \downarrow \kappa_* \\
\longrightarrow 0 & \xrightarrow{(\Sigma^2 \bar{\nu}')^*} & [\Sigma^3 K, \Sigma^3 K]_0 & \xrightarrow{=} & [M, \Sigma^3 K]_0 & \xrightarrow{i^*} & 0 \xrightarrow{(\Sigma \bar{\nu}')^*}
\end{array}$$

Também, como $i^* : [M, M]_0 \rightarrow \pi_4(M)$ é sobrejetiva, para cada aplicação $ki_4 \in \pi_4(M)$, existe uma aplicação $\sigma_k \in [M, M]_0$, na qual $k \in \mathbb{Z}$ vem do fato de que as aplicações ki_4 são

enumeradas pela composição de uma auto-aplicação $k\iota_4$ com a inclusão $i : S^4 \rightarrow M$, isto é, $ki_4 = i_*(k\iota_4) = ki_*\iota_4$. Em particular, $\sigma_1 = 1$ é a identidade, sendo uma auto-equivalência de homotopia. Mas também $\sigma = \sigma_{-1}$ é uma auto-equivalência.

Podemos produzir auto-equivalências de homotopia de M usando a abordagem feita em [36]. Temos homomorfismos

$$\lambda : x \mapsto 1^x$$

e

$$\pi : x \rightarrow 1 + k_*(x),$$

fazendo o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma^3 K, M]_0 & \xrightarrow{\lambda} & [M, M]_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \kappa_* \\ [\Sigma^3 K, \Sigma^3 K]_0 & \xrightarrow{=} & [M, \Sigma^3 K]_0 \end{array}$$

Aqui $1^x = \nabla(1 \vee x)\Delta$ é aplicação definida pela co-ação de Hilton,

$$1^x : M \xrightarrow{\theta} M \vee \Sigma^3 K \xrightarrow{1 \vee x} M \vee M \xrightarrow{\nabla} M.$$

Sabemos por [36] que $\lambda\pi^{-1}(1)$ é um subgrupo do grupo das auto-equivalências de M .

Construímos uma aplicação $x : \Sigma^3 K \rightarrow M$, tal que $\pi(x) = 1$. Isso significa que $\lambda(x) = 1^x$ é uma auto-equivalência de M .

Consideremos o *push out*

$$\begin{array}{ccc} S^8 & \longrightarrow & CS^8 \\ 8\iota_8 \downarrow & & \downarrow \\ S^8 & \longrightarrow & \Sigma^3 K = S^8 \sqcup_{8\iota_8} CS^8 \end{array}$$

Como $\nu_5 \circ 8\iota_8 = 0$, temos extensões $\bar{\nu}_5$ de ν_5 como segue

$$\begin{array}{ccc} S^8 & \longrightarrow & CS^8 \\ 8\iota_8 \downarrow & & \downarrow \\ S^8 & \longrightarrow & \Sigma^3 K \\ & \searrow \nu_5 & \downarrow \bar{\nu}_5 \\ & & S^5 \end{array}$$

Já que $\Sigma^3 K/S^8 = S^9$, do *push out*

$$\begin{array}{ccccc} S^8 & \longrightarrow & CS^8 & & \\ 8\iota_8 \downarrow & & \downarrow & & \\ S^8 & \longrightarrow & \Sigma^3 K & \xrightarrow{p} & S^9 \\ & \searrow \nu_5 & \downarrow \bar{\nu}_5 & & \\ & & S^5 & & \end{array}$$

obtemos a seqüência de Puppe

$$\pi_9(S^5) \xrightarrow{8} \pi_9(S^5) \xrightarrow{p^*} [\Sigma^3 K, S^5]_0 \xrightarrow{j^*} \pi_8(S^5) \xrightarrow{8} \pi_8(S^5),$$

com o homomorfismo bordo sendo a multiplicação por 8, pela construção. Do fato que $\pi_9(S^5) = \mathbb{Z}/2[\nu_5 \circ \eta_8]$, $\pi_8(S^5) = \mathbb{Z}/8[\nu_5]$, temos a seqüência exata de grupos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2[\nu_5 \circ \eta_8] \xrightarrow{p^*} [\Sigma^3 K, S^5]_0 \xrightarrow{j^*} \mathbb{Z}/8[\nu_5] \longrightarrow 0.$$

Isso significa que existem duas extensões de ν_5 , ambas não triviais e relacionadas pela co-ação de Hilton, a saber, se denotarmos uma por $\bar{\nu}_5$, a outra será $\bar{\nu}_5^{\nu_5 \circ \eta_8}$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S^8 & \longrightarrow & CS^8 & & \\ \downarrow 8\iota_8 & & \downarrow & & \\ S^8 & \longrightarrow & \Sigma^3 K & \xrightarrow{p} & S^9 \\ & \searrow \eta_4 \circ \nu_5 & \downarrow \overline{\eta_4 \circ \nu_5} & & \\ & & S^4 & & \end{array}$$

Aplicando novamente a construção de Puppe com S^4 ao invés de S^5 , obtemos

$$\pi_9(S^4) \xrightarrow{8} \pi_9(S^4) \xrightarrow{p^*} [\Sigma^3 K, S^4]_0 \xrightarrow{j^*} \pi_8(S^4) \xrightarrow{8} \pi_8(S^4),$$

com o homomorfismo bordo sendo a multiplicação por 8, pela construção. Como $\pi_9(S^4) = \mathbb{Z}/2[\nu_4 \circ \eta_7^2, \Sigma\nu' \circ \eta_7^2]$, $\pi_8(S^4) = \mathbb{Z}/2[\nu_4 \circ \eta_7, \Sigma\nu' \circ \eta_7 = \eta_4 \circ \nu_5]$, temos a seqüência exata de grupos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2[\nu_4 \circ \eta_7^2, \Sigma\nu' \circ \eta_7^2] \xrightarrow{p^*} [\Sigma^3 K, S^4]_0 \xrightarrow{j^*} \mathbb{Z}/2[\nu_4 \circ \eta_7, \eta_4 \circ \nu_5] \longrightarrow 0,$$

mostrando que $\overline{\eta_4 \circ \nu_5}$ é um dos quatro elementos de $[\Sigma^3 K, S^4]_0$ que são aplicados em $\eta_4 \circ \nu_5$, e logo, não é trivial.

Seja $x = i_*(\overline{\eta_4 \circ \nu_5})$, obtido de um desses elementos,

$$x : \Sigma^3 K \xrightarrow{\overline{\eta_4 \circ \nu_5}} S^4 \xrightarrow{i} M.$$

Agora, $k_*(x) = k_*i_*(\overline{\eta_4 \circ \nu_5}) = 0$, já que $ki \sim c_0$. Assim, $\pi(x) = 1$ e $\lambda(x)$ é uma auto-equivalência de homotopia de M . Denote por $\sigma = \lambda(x) = 1^x$ a auto-equivalência de homotopia de M .

Observe que x pode ser trivial em princípio, mas seguirá do próximo cálculo que isso não é possível.

Passo 9. Mostremos que

$$\{\eta_3, \Sigma\nu', \Sigma^2\tilde{\nu}_5\}_1 = \{\mu_3, \mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4\} \subseteq \pi_{12}(S^3; 2).$$

Pela definição,

$$\{\eta_3, \Sigma \bar{\nu}', \Sigma^2 \tilde{\nu}_5\}_1 \in \pi_{12}(S^3; 2)/G$$

é uma classe lateral do subgrupo

$$G = [\Sigma^3 K, S^3] \circ \Sigma^3 \tilde{\nu}_5 + \eta_3 \circ \pi_{12}(S^3).$$

Por [46] (6.4) pág. 56, $[\Sigma^3 K, S^3] \circ \Sigma^3 \tilde{\nu}_5 = 0$. Logo

$$G = \eta_3 \circ \pi_{12}(S^3).$$

Então,

$$\pi_{12}(S^3; 2)/G = \mathbb{Z}/2[\mu_3, \eta_3 \circ \epsilon_4]/\mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4].$$

Denotemos $x = \mu_3$, $y = \eta_3 \circ \epsilon_4$. Logo, as classes laterais de $\{0, y\}$ em $\{0, x, y, x + y\}$ são

$$\begin{aligned} 0 + \{0, y\} &= \{0, y\}, \\ x + \{0, y\} &= \{x, x + y\}, \\ y + \{0, y\} &= \{y, 0\}, \\ x + y + \{0, y\} &= \{x + y, x\} \end{aligned}$$

e assim,

$$\pi_{12}(S^3; 2)/G = \mathbb{Z}/2[x, y]/\mathbb{Z}/2[y] = \{\{0, y\}, \{x, x + y\}\}.$$

Sabemos que $\mu_3 = x \in \{\eta_3, \Sigma \bar{\nu}', \Sigma^2 \tilde{\nu}_5\}_1$, e segue

$$\{\eta_3, \Sigma \bar{\nu}', \Sigma^2 \tilde{\nu}_5\}_1 = \{\mu_3, \mu_3 + \eta_3 \circ \epsilon_4\} \subseteq \pi_{12}(S^3; 2),$$

como desejado.

Passo 10. Recordemos toda a situação descrita no final do *Passo 4* (veja também o começo do *Passo 8*). Temos duas aplicações

$$f, g : S^3 \rightarrow L^{12}S^3,$$

e precisamos de uma equivalência de homotopia s de $L^{12}S^3$ tal que $g \sim sf$. Pela definição,

$$L^{12}S^3 = \bigcup_{x \in S^3} \{h_x \in \Omega^{12}S^3 \mid h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \tilde{\gamma})(x \wedge _), \Sigma \tilde{\gamma} \in \Omega^{12}M\},$$

e logo, esse é um subespaço do espaço $m_0(S^{12}, M, S^3)$. Assim, podemos considerar as duas aplicações

$$f, g : S^3 \rightarrow m_0(S^{12}, M, S^3),$$

e precisamos de uma equivalência de homotopia s de $m_0(S^{12}, M, S^3)$ tal que $g \sim sf$. Usando o diagrama (como descrito no começo do *Passo 8*)

$$\begin{array}{ccc} S^{12} & \xrightarrow{\Sigma \tilde{\gamma}} & M \xrightarrow{\bar{\eta}_3^M} S^3 \\ & & \downarrow \sigma \\ & & M \end{array}$$

sendo σ uma equivalência de homotopia, e a construção feita no *Passo 6*, a aplicação

$$\begin{aligned}\sigma_{\#} &: m_0(S^{12}, M, S^3) \rightarrow m_0(S^{12}, M, S^3), \\ \sigma_{\#} &: \bar{\eta}_3^M \circ f \mapsto \bar{\eta}_3^M \circ \sigma_* f\end{aligned}$$

é uma equivalência de homotopia. Recordando a forma explícita das aplicações f e g dadas no final do *Passo 4*,

$$\begin{aligned}f : x &\mapsto h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge \Sigma \tilde{\gamma}_1)(x \wedge _), \\ g : x &\mapsto h_x = \nu' \circ (\iota_3 \wedge \bar{\eta}_3^M) \circ (\iota_3 \wedge (\Sigma \tilde{\gamma}_1 + \Sigma \gamma_2))(x \wedge _).\end{aligned}$$

Para mostrar que $\sigma_{\#} f = g$, precisamos mostrar que $\sigma_* \Sigma \tilde{\gamma}_1 = \Sigma \tilde{\gamma}_1 + \Sigma \gamma_2$, com $\tilde{\gamma}_1 = \widetilde{\Sigma \tilde{\nu}_5}$ e $\gamma_2 = j_* \tilde{\nu}_5 \circ \eta_{10}$ ($\sigma_{\#}(\mu_3) = \bar{\eta}_3^M \circ \sigma_*(\Sigma \tilde{\gamma}_1)$).

Primeiro, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.13. *Considere o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} W & & & & \\ \gamma \downarrow & & & & \\ X & \longrightarrow & CX & & \Sigma W \\ \beta \downarrow & & \downarrow & \nwarrow \tilde{\gamma} & \downarrow \tilde{\gamma} + \Sigma \gamma \\ Y & \longrightarrow & C_{\beta} & \xrightarrow{\theta} & C_{\beta} \vee \Sigma X \end{array}$$

com $\beta \gamma = 0$, $\tilde{\gamma}$ é uma co-extensão de γ e θ é a aplicação de identificação. Então, o triângulo da direita comuta, a saber $\theta \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} + \Sigma \gamma$.

Demonstração: Assuma que $\beta \circ \gamma \sim_B 0 : W \rightarrow Y$, por alguma homotopia nula $B : CW \rightarrow Y$. Então, uma co-extensão é definida como

$$\tilde{\gamma}(\langle w, t \rangle) = \begin{cases} \langle \gamma(w), 1 - 2t \rangle, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ B(w, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Assim, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma W & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C_{\beta} & \xrightarrow{\theta} & C_{\beta} \vee \Sigma X \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \Sigma W & \xrightarrow{\nu} & \Sigma W \vee \Sigma W & \xrightarrow{\tilde{\gamma} \vee \Sigma \gamma} & C_{\beta} \vee \Sigma X \end{array}$$

que comuta. ■

Pelo Lema 4.3.13, e como $\tilde{\gamma}_1 = \widetilde{\Sigma \tilde{\nu}_5}$,

$$\theta \Sigma \tilde{\gamma}_1 = (\Sigma \tilde{\gamma}_1 \vee \Sigma^3 \tilde{\nu}_5) \nu = \Sigma \tilde{\gamma}_1 + \Sigma^3 \tilde{\nu}_5.$$

Pela definição (veja o *Passo 8*), $\sigma_*(\Sigma\tilde{\gamma}_1) = \nabla(1 \vee x)\theta\Sigma\tilde{\gamma}_1$. Logo,

$$\sigma_*(\Sigma\tilde{\gamma}_1) = \nabla(1 \vee x)(\Sigma\tilde{\gamma}_1 \vee \Sigma^3\tilde{\nu}_5)\nu = \nabla(\Sigma\tilde{\gamma}_1 \vee x \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5)\nu = \Sigma\tilde{\gamma}_1 + x \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5,$$

em $\pi_{12}(M)$. Assim, queremos mostrar que

$$x \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \Sigma\gamma_2 = j_*\Sigma\tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11}.$$

Na verdade, recordando o início do *Passo 4*, o elemento à direita é a co-extensão que, compondo com a extensão $\bar{\eta}_3^M$, obtemos

$$\bar{\eta}_3^M \circ j_*\Sigma\tilde{\nu}_6 \circ \eta_{11} = \epsilon_3 \circ \eta_{11}.$$

Logo, o que queremos é mostrar que

$$\bar{\eta}_3^M \circ x \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \epsilon_3 \circ \eta_{11}.$$

Note que $\epsilon_3 \circ \eta_{11} = \eta_3 \circ \epsilon_4$. Recordando a definição de x ,

$$\bar{\eta}_3^M \circ x \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \bar{\eta}_3^M \circ i_*(\overline{\eta_4 \circ \nu_5}) \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \eta_3 \circ \overline{\eta_4 \circ \nu_5} \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5.$$

Mostramos que $\overline{\eta_4 \circ \nu_5} \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \epsilon_4$.

Pela definição e por [46]:

$$\Sigma\epsilon_3 = \Sigma\{\eta_3, \Sigma\nu', \nu_7\}_1 \subseteq -\{\eta_4, \Sigma^2\nu', \nu_8\}_2.$$

Agora, $\{\eta_4, \Sigma^2\nu', \nu_8\}_2$ é um subconjunto de $\pi_{12}(S^4)$, e mais precisamente

$$\{\eta_4, \Sigma^2\nu', \nu_8\}_2 \subset \pi_{12}(S^4)/(\pi_9(S^4) \circ \nu_9 + \eta_4 \circ \Sigma^2\pi_{10}(S^3)).$$

Mas, $\pi_{10}(S^3, 2) = 0$ e $\pi_9(S^4) = \mathbb{Z}/2[\nu_4 \circ \eta_7^2, \Sigma\nu' \circ \eta_7^2]$, e $\eta_8 \circ \nu_9 = 0$ (por [46] (5.9)). Assim, $\{\eta_4, \Sigma^2\nu', \nu_8\}_2$ é classe lateral do grupo trivial na 2-componente e, logo, é um único elemento da 2-componente.

Então,

$$\Sigma\epsilon_3 = \Sigma\{\eta_3, \Sigma\nu', \nu_7\}_1 = -\{\eta_4, \Sigma^2\nu', \nu_8\}_2 = -\{\eta_4, 2\nu_5, \nu_8\}_2,$$

por [46] Proposição 1.3. Agora, por [46] Proposição 1.2 (iii) e (iv),

$$\{\eta_4, 2\nu_5, \nu_8\}_2 \supseteq \{\eta_4 \circ \nu_5, 2\nu_8, \nu_8\}_2 \supseteq \{\eta_4 \circ \nu_5, 2\nu_8, \nu_8\}_3$$

e, pela definição, $\{\eta_4 \circ \nu_5, 2\nu_8, \nu_8\}_3$ é o conjunto das composições $\overline{\eta_4 \circ \nu_5} \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5$. Como esse conjunto contém um único elemento, segue que

$$\overline{\eta_4 \circ \nu_5} \circ \Sigma^3\tilde{\nu}_5 = \epsilon_4,$$

como desejado. ■

Diante de tais resultados, enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 4.3.14. *Existem quatro S^3 -fibrados principais sobre S^{13} e três tipos diferentes de homotopia dos grupos de gauge desses fibrados.*

Demonstração: O resultado segue dos Lemas 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9, da Proposição 4.3.11 e da Observação 4.3.10. ■

4.3.4 O caso de S^{21}

Este caso também merece atenção particular, pois seu comportamento é análogo ao caso de S^{13} . Iniciamos com o seguinte resultado:

Lema 4.3.15. *Sobre S^{21} existem quarenta e oito S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n,k,l}$ de $\pi_{20}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[y = \eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \oplus \mathbb{Z}/4[z = \bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{20}]$. O tipo de homotopia do grupo de gauge do fibrado trivial é igual ao do fibrado $f_{\bar{\epsilon}'}$ e é diferente dos tipos de homotopia dos grupos de gauge dos demais fibrados.*

Demonstração: Sabemos que

$$\partial\beta_f \in \pi_{20}(S^3) \approx \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

$$\partial\beta_f(2) \in \pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}].$$

Então temos 48 fibrados. Pela Proposição 4.1.9 (com $k = 4$) precisamos considerar apenas

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\epsilon}') \stackrel{(21)}{=} \nu' \circ \Sigma^2(\Sigma\nu' \circ \kappa_7) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ 2\nu_6 \circ \kappa_9 = 0,$$

já que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$, e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\mu}_3) = \nu' \circ \bar{\mu}_6$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}$$

em $\pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]$. Então temos, precisamente, cada um dos geradores e como eles têm ordem 2, segue $\text{Im } ev_4([f_{\bar{\mu}_3}]) = \text{Im } ev_4([f_{\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}}]) = 2\mathbb{Z}$ e $\text{Im } ev_4([f_{\bar{\epsilon}'}]) = \mathbb{Z}$. Com isso, temos

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{\bar{\mu}_3}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{f_{\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}}}) \approx \pi_{23}(S^3)/\mathbb{Z}/2$$

e

$$\pi_2(\mathcal{G}_{f_{\bar{\epsilon}'}}) \approx \pi_2(\mathcal{G}_{c_0}) \approx \pi_{23}(S^3).$$

Pelo Lema 4.2.7 temos que $\mathcal{G}_{f_{\bar{\epsilon}'}} \sim \mathcal{G}_{c_0}$. ■

Com as informações que temos dos grupos de homotopia de S^3 conseguimos calcular apenas π_3 e π_4 dos grupos de gauge dos fibrados envolvidos. Esses cálculos nos permitem distinguir mais um tipo diferente de grupo de gauge, como podemos ver na seguinte proposição:

Proposição 4.3.16. *Para $n = 3, 4$, temos $\pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,1,k,l)}}) \approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(1,0,k,l)}}) \not\approx \pi_n(\mathcal{G}_{f_{(0,1,k,l)}})$, sendo $\partial f_{m,n,k,l} \in \pi_{20}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[y = \eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \oplus \mathbb{Z}/4[z = \bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{20}]$ os elementos que classificam os fibrados sobre S^{21} .*

Demonstração: Caso $\pi_3(\mathcal{G}_f)$. Consideremos a seqüência no Lema 4.1.2 (com $k = 4$):

$$\pi_4(S^3) \xrightarrow{\partial_5} \pi_{24}(S^3) \longrightarrow \pi_3(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_4} \pi_3(S^3) \xrightarrow{\partial_4} \pi_{23}(S^3),$$

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\phi} \pi_3(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_4} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

É claro que

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_5 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi = \mathbb{Z}/2 \text{ ou } 0.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_3(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$. Então sabemos pelos cálculos do Lema anterior que

$$\text{Im } ev_4 = 2\mathbb{Z}$$

para o caso $(m, n, k, l) \neq (0, 0, k', l')$, e

$$\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}$$

para o caso $(0, 0, k, l)$.

Logo

$$2\mathbb{Z} = \text{Im } ev_4 = A/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 1$ e $T = \mathbb{Z}/2$ ou $T = 0$ e

$$\mathbb{Z} = \text{Im } ev_4 = A/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_4 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi,$$

implica que $m = 1$ e $T = \mathbb{Z}/2$ ou $T = 0$.

Para decidir qual é o caso, consideremos que

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/2)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_5 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2,$$

e

$$\text{Im } \partial_5 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_5.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_5$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 5$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{24}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}]$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_4(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3].$$

Então calculemos $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as três possibilidades

$$\nu' \circ \Sigma^3 \bar{\epsilon}' = 0,$$

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\mu}_3) = \nu' \circ \bar{\mu}_6$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16},$$

em $\pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{20} \partial \omega = (n \bmod 2) \eta_{23},$$

obtemos elementos de $\pi_{24}(S^3; 2)$. O primeiro é 0, o segundo é:

$$\nu' \circ \bar{\mu}_6 \circ \eta_{23} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7,$$

o qual é o gerador de $\pi_{24}(S^3; 2)$.

O terceiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \eta_{23} &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \eta_{16} \circ \sigma_{17} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \mu_8 \circ \sigma_{17} \\ &\stackrel{(12)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(2\mu') \circ \sigma_{17} \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 2\Sigma(2\zeta_5) \circ \sigma_{17} = 4\nu' \circ \zeta_6 \circ \sigma_{17} = 0. \end{aligned}$$

Recordemos que denotamos as três aplicações não triviais por $f_{m,n,k,l}$, $0 \leq m, n \leq 1$. Logo,

$$\text{Im } ev_5([f_{1,0,k,l}]) = 0,$$

$$\text{Im } ev_5([f_{0,1,k,l}]) = \mathbb{Z}/2,$$

$$\text{Im } ev_5([f_{1,1,k,l}]) = 0.$$

$$\pi_3(\mathcal{G}_{f_{(1,1,k,l),(1,0,k,l)}}) \approx \mathbb{Z},$$

e

$$\pi_3(\mathcal{G}_{f_{(0,1,k,l)}}) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Caso $\pi_4(\mathcal{G}_f)$. Consideremos a sequência no lema 4.1.2 (com $k = 5$):

$$\begin{aligned} \pi_5(S^3) &\xrightarrow{\partial_6} \pi_{25}(S^3) \longrightarrow \pi_4(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_5} \pi_4(S^3) \xrightarrow{\partial_5} \pi_{24}(S^3), \\ \mathbb{Z}/2 &\xrightarrow{\partial_6} \mathbb{Z}/210 \xrightarrow{\phi} \pi_4(\mathcal{G}_f) \xrightarrow{ev_5} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Temos que

$$\text{Nuc} \phi = \text{Im} \partial_6 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2.$$

Assim

$$\text{Im} \phi = (\mathbb{Z}/210)/\text{Nuc} \phi = \mathbb{Z}/210 \text{ ou } \mathbb{Z}/105.$$

Agora, como um grupo abeliano finitamente gerado, $A = \pi_4(\mathcal{G}_f) \approx \mathbb{Z}^m \oplus T$, sendo T o subgrupo de torção. Seja $f \neq c_0$. Então sabemos pelos cálculos acima que

$$\text{Im } ev_4 = 0$$

para os casos $(1, 0, k, l)$ e $(1, 1, k, l)$, e

$$\text{Im } ev_4 = \mathbb{Z}/2$$

para o caso $(0, 1, k, l)$.

Logo,

$$0 = \text{Im } ev_5 = A/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/210$ ou $T = \mathbb{Z}/105$, e

$$\mathbb{Z}/2 = \text{Im } ev_5 = A/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Nuc } ev_5 = (\mathbb{Z}^m \oplus T)/\text{Im } \phi$$

implica que $m = 0$ e $T = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/210$ ou $T = \mathbb{Z}/210$.

Para decidir qual é o caso, consideremos que

$$\text{Im } \phi = (\mathbb{Z}/210)/\text{Nuc } \phi,$$

$$\text{Nuc } \phi = \text{Im } \partial_6 = 0 \text{ ou } \mathbb{Z}/2,$$

e

$$\text{Im } \partial_6 = (\mathbb{Z}/2)/\text{Im } ev_6.$$

Precisamos calcular $\text{Im } ev_6$. Pela Proposição 4.1.8 (com $k = 6$), precisamos resolver a equação

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0$$

em $\pi_{25}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \kappa_{11}]$, com

$$\partial \beta_f(2) \in \pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\epsilon'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}],$$

e

$$\partial \omega(2) \in \pi_5(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\eta_3^2].$$

Então calculemos $\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2)$ para as três possibilidades

$$\nu' \circ \Sigma^3 \epsilon' = 0,$$

$$\nu' \circ \Sigma^3(\bar{\mu}_3) = \nu' \circ \bar{\mu}_6$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16},$$

em $\pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]$.

Compondo com o possível

$$\Sigma^{20}\partial\omega = (n \bmod 2)\eta_{23}^2,$$

obtemos elementos de $\pi_{25}(S^3; 2)$. O primeiro é 0, o segundo é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \bar{\mu}_6 \circ \eta_{23}^2 &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7 \circ \eta_{24} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \bar{\mu}_8 \\ &\stackrel{(22)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(2\bar{\mu}') \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ 2\Sigma(2\bar{\zeta}_5) = 4\nu' \circ \bar{\zeta}_6 = 0. \end{aligned}$$

O terceiro é:

$$\begin{aligned} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \eta_{23}^2 &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \eta_{16} \circ \sigma_{17} \circ \eta_{24} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \mu_8 \circ \sigma_{17} \circ \eta_{24} \\ &\stackrel{(12)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(2\mu') \circ \sigma_{17} \circ \eta_{24} \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 2\Sigma(2\zeta_5) \circ \sigma_{17} \circ \eta_{24} = 4\nu' \circ \zeta_6 \circ \sigma_{17} \circ \eta_{24} = 0. \end{aligned}$$

Recordemos que denotamos as três aplicações não triviais por $f_{m,n,k,l}$, $0 \leq m, n \leq 1$. Logo,

$$\text{Im } ev_6([f_{m,n,k,l}]) = \mathbb{Z}/2.$$

$$\pi_4(\mathcal{G}_{f_{(1,1,k,l),(1,0,k,l)}}) \approx \mathbb{Z}/210,$$

e

$$\pi_4(\mathcal{G}_{f_{(0,1,k,l)}}) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/210.$$

■

Observação 4.3.17. Podemos ver, pela prova do Lema e dos cálculos feitos acima, que

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}\partial\omega(2) = 0$$

para qualquer um dos $\partial\omega(2)$ usados (notação da Proposição 4.1.8). Continuando os cálculos, agora só para essa composição, esperamos encontrar pelo menos um caso no qual ela seja diferente de zero. Caso isso ocorra, poderemos ter então $\pi_n(G_{f_{(1,0,k,l)}}) \not\approx \pi_n(G_{f_{(1,1,k,l)}})$, para algum n .

Usando a Proposição 4.1.8 em cada uma dessas composições, consideremos cada caso:

Caso $k = 6$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20}\partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_6(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu']$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu') &= \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \\ &= \nu' \circ \eta_6 \circ 2\mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \nu_{23} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 7$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_7(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu' \circ \eta_6]$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26} \\ &= \nu' \circ \eta_6 \circ 2\mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \nu_{23} \circ \eta_{26} = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 8$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_8(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\nu' \circ \eta_6^2]$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6^2) &= \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26}^2 \\ &= \nu' \circ \eta_6 \circ 2\mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \nu_{23} \circ \eta_{26}^2 = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 9$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_9(S^3; 2) = 0$.

Caso $k = 10$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{10}(S^3; 2) = 0$.

Caso $k = 11$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{11}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\epsilon_3) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \stackrel{(19)}{=} 0.$$

Caso $k = 12$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{12}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \epsilon_4]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\mu_3) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \mu_{23} \stackrel{(24)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \eta_{16} \circ \rho_{17}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \mu_8 \circ \rho_{17} \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 4\zeta_6 \circ \rho_{17} = 4\nu' \circ \zeta_6 \circ \rho_{17} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\eta_3 \circ \epsilon_4) &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \circ \eta_{31} \\ &= \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \circ \eta_{31} \stackrel{(19)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 13$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{13}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\epsilon'] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4]$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\epsilon') &= \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\Sigma^{18}(\nu_5 \circ \sigma_8) \\ &= \nu' \circ \eta_6 \circ 2\mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{18}(\nu_5 \circ \sigma_8) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\eta_3 \circ \mu_4) &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \eta_{22} \circ \eta_{23} \circ \mu_{24} \\ &\stackrel{(12)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \Sigma^{19}(2\mu') = \nu' \circ 2\mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \Sigma^{19}\mu' = 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 14$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{14}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu'] \oplus \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_4] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \epsilon_6]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\mu') \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{18}(2\zeta_5) = \nu' \circ \eta_6 \circ 2\mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{18}\zeta_5 = 0,$$

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\epsilon_3 \circ \nu_4) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \circ \nu_{24} \stackrel{(19)}{=} 0$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \epsilon_6) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \epsilon_{26} \stackrel{(5)}{=} 0.$$

Caso $k = 15$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{15}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \mu_6) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \mu_{26} \stackrel{(5)}{=} 0$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6 \circ \epsilon_7) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26} \circ \epsilon_{27} \stackrel{(5)}{=} 0.$$

Caso $k = 16$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{16}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26} \circ \mu_{27} \stackrel{(5)}{=} 0.$$

Caso $k = 17$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{17}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\epsilon_3 \circ \nu_{11}^2) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \circ \nu_{31}^2 \stackrel{(19)}{=} 0.$$

Caso $k = 18$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{18}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\bar{\epsilon}_3]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\bar{\epsilon}_3) \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \eta_{22} \circ \bar{\epsilon}_{23} \stackrel{(23)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \epsilon_{22} \circ \epsilon_{30} \stackrel{(19)}{=} 0.$$

Caso $k = 19$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{19}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\mu_3 \circ \sigma_{12}] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4]$.

Compondo

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\mu_3 \circ \sigma_{12}) &\stackrel{(24)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \eta_{16} \circ \rho_{17} \circ \sigma_{32} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \mu_8 \circ \rho_{17} \circ \sigma_{32} \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ 4\zeta_6 \circ \rho_{17} \circ \sigma_{32} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\eta_3 \circ \bar{\epsilon}_4) &\stackrel{(23)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \bar{\epsilon}_{23} \circ \eta_{24} \\ &\stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \eta_{22} \circ \bar{\epsilon}_{23} \circ \eta_{24} \stackrel{(23)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \epsilon_{22} \circ \epsilon_{30} \circ \eta_{24} \stackrel{(19)}{=} 0. \end{aligned}$$

Caso $k = 20$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial \beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial \omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial \omega(2)$ está em $\pi_{20}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}]$.

Compondo

$$\begin{aligned}
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\bar{\epsilon}') \stackrel{(21)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{20}\nu' \circ \Sigma^{19}\kappa_7 \\
& \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \kappa_{26} = 0, \\
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\bar{\mu}_3) \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \bar{\mu}_{16} \circ \sigma_{33} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7 \circ \mu_{24} \circ \sigma_{33} \\
& \stackrel{(24)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7 \circ \eta_{24} \circ \rho_{25} \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \eta_7 \circ \bar{\mu}_8 \circ \rho_{25} = \nu' \circ \eta_6^2 \circ \bar{\mu}_8 \circ \rho_{25} \\
& = \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3^2 \circ \bar{\mu}_5) \circ \rho_{25} \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ \Sigma^3(2\bar{\mu}') \circ \rho_{25} = 2\nu' \circ \Sigma(\Sigma^2\bar{\mu}') \circ \rho_{25} \\
& \stackrel{(22)}{=} 2\nu' \circ \Sigma(2\bar{\zeta}_5) \circ \rho_{25} = 4\nu' \circ \bar{\zeta}_6 \circ \rho_{25} = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \eta_{22}^2 \circ \mu_{24} \circ \sigma_{33} \\
& \stackrel{(12)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \Sigma^{19}(2\mu') \circ \sigma_{33} = 0.
\end{aligned}$$

Caso $k = 21$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20}\partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{21}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\mu' \circ \sigma_{14}] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\epsilon}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\eta_3 \circ \bar{\mu}_4]$.

Compondo

$$\begin{aligned}
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\mu' \circ \sigma_{14}) \stackrel{(17)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{18}(2\zeta_5) \circ \sigma_{34} = 0, \\
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \bar{\epsilon}_6) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \bar{\epsilon}_{26} = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\eta_3 \circ \bar{\mu}_4) \stackrel{(1)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \eta_{22} \circ \eta_{23} \circ \bar{\mu}_{24} \\
& \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15} \circ \Sigma^{19}(2\bar{\mu}') = 0.
\end{aligned}$$

Caso $k = 22$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20}\partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{22}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/4[\bar{\mu}'] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\bar{\mu}') \stackrel{(22)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \Sigma^{18}(2\bar{\zeta}_5) = 0$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \mu_6 \circ \sigma_{15}) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \mu_{26} \circ \sigma_{35} = 0.$$

Caso $k = 23$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3\partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20}\partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{23}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \bar{\mu}_6] \oplus \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \bar{\mu}_6) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \bar{\mu}_{26} = 0$$

e

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16}) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26} \circ \mu_{27} \circ \sigma_{36} = 0.$$

Caso $k = 24$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{24}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\nu' \circ \eta_6 \circ \bar{\mu}_7) \stackrel{(5)}{=} \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ 2\nu_{23} \circ \eta_{26} \circ \bar{\mu}_{27} = 0.$$

Caso $k = 25$. Temos

$$\nu' \circ \Sigma^3 \partial\beta_f(2) \circ \Sigma^{20} \partial\omega(2) = 0.$$

Aqui, $\partial\omega(2)$ está em $\pi_{25}(S^3; 2) = \mathbb{Z}/2[\epsilon_3 \circ \kappa_{11}]$.

Compondo

$$\nu' \circ \Sigma^3(\eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}) \circ \Sigma^{20}(\epsilon_3 \circ \kappa_{11}) = \nu' \circ \eta_6 \circ \mu_7 \circ \sigma_{16} \circ \epsilon_{23} \circ \kappa_{31} \stackrel{(19)}{=} 0.$$

Infelizmente, não encontramos mais informações na literatura sobre os geradores dos grupos envolvidos. Sendo assim, formulamos a seguinte conjectura quanto aos tipos de homotopia dos grupos de gauge dos S^3 -fibrados principais sobre S^{21} :

Conjectura 4.3.18. *Sobre S^{21} existem quarenta e oito S^3 -fibrados principais, classificados pelos elementos $\partial f_{m,n,k,l}$ de $\pi_{20}(S^3) = \mathbb{Z}/2[x = \bar{\mu}_3] \oplus \mathbb{Z}/2[y = \eta_3 \circ \mu_4 \circ \sigma_{13}] \oplus \mathbb{Z}/4[z = \bar{\epsilon}'] \oplus \mathbb{Z}/3[\alpha_{20}]$. Os grupos de gauge são de três tipos de homotopia: um de $f_{0,0,l,k}$, outro de $f_{1,n,l,k}$, e mais outro de $f_{0,1,l,k}$ ($m, n, l, k \in \mathbb{Z}$).*

Finalizamos aqui, reunindo todos esses resultados na seguinte proposição:

Proposição 4.3.19. *A seguinte tabela reúne o número dos S^3 -fibrados principais sobre a esfera S^n , o número máximo de grupos de gauge (não homotópicos) desses fibrados, e o número de diferentes π_2 desses grupos de gauge (= número de diferentes tipos de homotopia):*

n	$\pi_{n-1}(S^3)$	= fibrados, ξ_f	$\pi_{n+2}(S^3)$	= grupos de gauge, $\mathcal{G}_f$	$\pi_2(\mathcal{G}_f)$
4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/12$	12	6
5	$\mathbb{Z}/2$	2	$\mathbb{Z}/2$	2	2
6	$\mathbb{Z}/2$	2	$\mathbb{Z}/2$	2	2
7	$\mathbb{Z}/12$	12	$\mathbb{Z}/3$	3	1
8	$\mathbb{Z}/2$	2	$\mathbb{Z}/15$	15	1
9	$\mathbb{Z}/2$	2	$\mathbb{Z}/2$	2	1
10	$\mathbb{Z}/3$	3	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	1
11	$\mathbb{Z}/15$	15	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$	24	1
12	$\mathbb{Z}/2$	2	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/84$	336	2
13	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	2
14	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/12$	24	$\mathbb{Z}/6$	6	2
15	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/84$	336	$\mathbb{Z}/30$	30	1
16	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	$\mathbb{Z}/30$	30	1
17	$\mathbb{Z}/6$	6	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6$	12	1
18	$\mathbb{Z}/30$	30	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	48	1
19	$\mathbb{Z}/30$	30	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	48	2
20	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6$	12	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/132$	264	2
21	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	48	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	2
22	$(\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/12$	48	$\mathbb{Z}/2$	2	2
23	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/132$	264	$\mathbb{Z}/210$	210	1
24	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	$\pi_{26}^3 \approx \mathbb{Z}/4$	$4x$	1
25	$\mathbb{Z}/2$	2	$\pi_{27}^3 \approx (\mathbb{Z}/2)^3$	$8x$	1

E nos casos de S^{13} e S^{21} temos três tipos diferentes para os grupos de gauge.

Demonstração: O resultado segue da Tabela 1, apresentada no início deste capítulo, de [25] quando $n = 4$, das Proposições 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.14 e da Conjectura 4.3.18. ■

4.4 Apêndice do capítulo 4

Apresentamos aqui algumas relações úteis para o nosso trabalho que podem ser encontradas em Toda [46].

1. pág. 25 (Prop. 3.1) Seja $\alpha \in \pi_{p+k}(S^p)$, $\beta \in \pi_{q+h}(S^q)$, então $\Sigma^q \alpha \circ \Sigma^{p+k} \beta = \pm \Sigma^p \beta \circ \Sigma^{q+h} \alpha$.
2. pág. 39 (5.2) A composição com η_2 : $\alpha \rightarrow \eta_2 \circ \alpha$ define um isomorfismo $\pi_i^3 \approx \pi_i^2$ para $i \geq 3$.
3. pág. 40 (5.3) $\nu' \in \pi_6^3$, $H(\nu') = \eta_5$ e $2\nu' = \eta_3 \circ \eta_4 \circ \eta_5$.
4. pág. 41 (Lema 5.4) $\nu_4 \in \pi_7^4$, $H(\nu_4) = \iota_7$ e $2\Sigma\nu_4 = \Sigma^2\nu'$.
5. pág. 42 (5.5) $2\nu_n = \Sigma^{n-3}\nu'$, $4\nu_n = \eta_n^3$ e $4\nu = \eta^3$, para $n \geq 5$.
6. pág. 43 (5.7) $H(\nu' \circ \eta_6) = \eta_5^2$.
7. pág. 43 (5.8) $P(\iota_9) = \pm(2\nu_4 - \Sigma\nu') = \pm[\iota_4, \iota_4]$.
8. pág. 43 (Lema 5.7) Se $\Sigma^2\alpha \in 2\iota_5 \circ \pi_{i+2}(S^5)$ para um elemento $\alpha \in \pi_i(S^3)$, então $\Sigma(\eta_2 \circ \alpha) = 0$. Em particular $\Sigma(\eta_2 \circ \nu') = 0$ e $P(\nu_5) = \pm(\eta_2 \circ \nu')$.
9. pág. 44 (5.9) $\eta_3 \circ \nu_4 = \nu' \circ \eta_6$, $\eta_n \circ \nu_{n+1} = 0$, para $n \geq 5$ e $\nu_n \circ \eta_{n+3} = 0$, para $n \geq 6$.
10. pág. 56 (Lema 6.5) $H(\mu_3) = \sigma'''$, $2\mu_n = 2\mu = 0$, para $n \geq 3$.
11. pág. 64 (7.5) $\epsilon_n \circ \eta_{n+8} = \eta_n \circ \epsilon_{n+1}$, $n \geq 3$.
12. pág. 66 (7.7) $H(\mu') = \mu_5$ e $2\mu' = \eta_3^2 \circ \mu_5$.
13. pág. 66 (7.8) $H(\nu' \circ \epsilon_6) = H(\nu') \circ \epsilon_6 = \eta_5 \circ \epsilon_6$ e $H(\epsilon_3 \circ \nu_{11}) = H(\epsilon_3) \circ \nu_{11} = \nu_5^2 \circ \nu_{11} = \nu_5^3$.
14. pág. 67 (7.10) $2(\nu_5 \circ \sigma_8) = \pm \Sigma^2 \epsilon'$ e $\eta_n^2 \circ \epsilon_{n+2} = 4(\nu_n \circ \sigma_{n+3})$, para $n \geq 5$.
15. pág. 68 (7.11) $P(\nu_5 \circ \sigma_8) \equiv \pm(\eta_2 \circ \epsilon') \bmod \eta_2^2 \circ \mu_4$ e $\Sigma\pi_{12}^2 = [\eta_3^2 \circ \mu_5] \approx \mathbb{Z}/2$.
16. pág. 68 (7.12) $\epsilon_3 \circ \nu_{11} = \nu' \circ \bar{\nu}_6$ e $\epsilon' \circ \eta_{13} = \nu' \circ \epsilon_6$.
17. pág. 69 (7.14) $2\zeta_5 = \pm \Sigma^2 \mu'$ e $\eta_n^2 \circ \mu_{n+2} = 4\zeta_n$, para $n \geq 5$.
18. pág. 97 (Lema 10.2) $H(\bar{\epsilon}) \equiv \nu_5 \circ \sigma_8 \circ \nu_{15} \bmod \nu_5 \circ \eta_8 \circ \mu_9$ e $2\bar{\epsilon}_n = 2\bar{\epsilon} = 0$ para $n \geq 3$.
19. pág. 107 (Lema 10.7) $\epsilon_n \circ \sigma_{n+8} = 0$, para $n \geq 3$, $\sigma_n \circ \epsilon_{n+7} = 0$, para $n \geq 11$ e $\bar{\nu}_n \circ \sigma_{n+8} = 0$, para $n \geq 6$.
20. pág. 136 (Lema 12.2) $H(\bar{\mu}_3) = \rho^{IV}$ e $2\bar{\mu}_n = 2\bar{\mu} = 0$, para $n \geq 3$.
21. pág. 136 (Lema 12.3) $2\epsilon' = \eta_3^2 \circ \bar{\epsilon}_5$, e $\Sigma\epsilon' = \Sigma\nu' \circ \kappa_7$.

22. pág. 137 (Lema 12.4) $H(\bar{\mu}') \equiv \bar{\mu}_5 \text{mod} \Sigma^3 \pi_{19}^2$, $H(\bar{\zeta}_5) = 8\rho'$, $2\bar{\mu}' = \eta_3^2 \circ \bar{\mu}_5$, e $2\bar{\zeta}_5 = \Sigma^2 \bar{\mu}'$.
23. pág. 143 (Lema 12.10) $\nu_n \circ \sigma_{n+3} \circ \nu_{n+10}^2 = \eta_n \circ \bar{\epsilon}_{n+1}$, para $n \geq 5$ e $\epsilon_n \circ \epsilon_{n+8} = \epsilon_n \circ \bar{\nu}_{n+8} = \eta_n \circ \bar{\epsilon}_{n+1} = \bar{\epsilon}_n \circ \eta_{n+15}$, para $n \geq 3$.
24. pág. 161 (Prop. 12.20) $\sigma_n \circ \mu_{n+7} = \mu_n \circ \sigma_{n+9} = \eta_n \circ \rho_{n+1} = \rho_n \circ \eta_{n+16}$, para $n \geq 13$ e $\eta_{12} \circ \rho_{13} = \sigma_{12} \circ \mu_{19}$.

Aqui apresentamos os grupos de homotopia de S^3 calculados por Toda [46].

k	$\pi_{k+3}(S^3)$	k	$\pi_{k+3}(S^3)$
1	$\mathbb{Z}/2$	11	$\mathbb{Z}/84 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
2	$\mathbb{Z}/2$	12	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
3	$\mathbb{Z}/12$	13	$\mathbb{Z}/6$
4	$\mathbb{Z}/2$	14	$\mathbb{Z}/30$
5	$\mathbb{Z}/2$	15	$\mathbb{Z}/30$
6	$\mathbb{Z}/3$	16	$\mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2$
7	$\mathbb{Z}/15$	17	$\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
8	$\mathbb{Z}/2$	18	$\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
9	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	19	$\mathbb{Z}/132 \oplus \mathbb{Z}/2$
10	$\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/2$		

Em [32] Mimura e Toda continuam os cálculos dos grupos de homotopia das esferas e obtêm

$$\pi_{23}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Já em [29] e [30] Mimura vai um pouco além e obtêm

$$\pi_{24}(S^3) \approx \mathbb{Z}/2,$$

$$\pi_{25}(S^3) \approx \mathbb{Z}/210.$$

Em 1975, Mimura, Mori e Oda [31] determinaram as 2-componentes dos grupos de homotopia das esferas $\pi_{n+i}(S^n)$, com $n \geq 2$ e $i = 23, 24$. Assim, temos

$$\pi_{26}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/4,$$

$$\pi_{27}(S^3; 2) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Quanto ao produto de Whitehead, encontramos em [3] III.1 as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} [\iota_n, \iota_n] &= 0 & n &= 1, 3, 7, \\ 2[\iota_n, \iota_n] &= 0, & n &\text{ ímpar}, \\ [\iota_n, \iota_n] &\text{ ordem infinita} & n &\text{ par}. \end{aligned}$$

Também, em [17] pág. 330, podemos encontrar

$$[\iota_4, \iota_4] = 2\nu_4 + \Sigma\xi,$$

com

$$\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12[\xi]$$

e

$$\pi_7(S^4) = \mathbb{Z}/12[\Sigma\xi] \oplus \mathbb{Z}[\nu_4].$$

Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(S^3) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_n(S^4) \\ \uparrow \partial & \nearrow j_n & \\ \pi_n(BS^3) & & \end{array}$$

e $j_n\psi = 1$, com $\psi = \Sigma\partial$. Logo, j_n é sobrejetiva e ψ é injetiva.

Se $n = 4$, Σ é um isomorfismo e, com isso, j_4 é um isomorfismo. Assim, $\pi_4(BS^3) = \mathbb{Z}[j_4(\iota_4) = \partial^{-1}(\iota_3)]$.

Queremos calcular

$$j_7([\iota_4, \iota_4]) = [j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)].$$

Usando a relação acima,

$$[j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)] = 2j_7(\nu_4) + j_7(\Sigma\xi).$$

Agora, temos o isomorfismo de Serre

$$\pi_6(S^3) \oplus \pi_7(S^7) \rightarrow \pi_7(S^4),$$

$$(a, b) \mapsto \Sigma a + \nu_4 \circ b.$$

Como $\pi_7(S^7) = \mathbb{Z}[\iota_7]$, $b = n\iota_7$, então $\nu_4 \circ b = \nu_4 \circ (n\iota_7) = n\nu_4 \circ \iota_7$, já que ι_7 é uma suspensão.

Como a decomposição acima é uma soma direta, segue que $\nu_4 \in \text{Nuc } j_7$. Então

$$[j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)] = j_7(\Sigma\xi) = \partial^{-1}(\xi).$$

Devemos ter cuidado e observar que

$$\partial([j_4(\iota_4), j_4(\iota_4)]) \neq [\partial j_4(\iota_4), \partial j_4(\iota_4)] = [\iota_3, \iota_3] = 0.$$

De fato, em geral

$$\partial[x, y] \neq [\partial(x), \partial(y)],$$

já que ∂ não é induzida por uma aplicação.

Lema 4.4.1. *Nuc $j_n = \nu_4 \circ \pi_n(S^7)$ e a restrição de j_n é injetiva sobre $\Sigma\pi_{n-1}(S^3)$ em $\pi_n(S^4)$. Em particular, $j_n(\nu_4 \circ y) = 0$.*

Demonstração: Pelo isomorfismo de Serre,

$$\pi_n(S^4) = \Sigma\pi_{n-1}(S^3) \oplus \nu_4 \circ \pi_n(S^7).$$

Por outro lado, do diagrama de homomorfismos de grupos abelianos

$$\pi_n(BS^3) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S^3) \xrightarrow{\Sigma} \pi_n(S^4) \xrightarrow{j_n} \pi_n(BS^3)$$

cuja composição é a identidade, $j_n\Sigma\partial = 1$, segue que

$$\pi_n(S^4) = \text{Nuc}j_n \oplus \text{Im}\Sigma\partial = \Sigma\pi_{n-1}(S^3) \oplus \text{Nuc}j_n.$$

Como a decomposição é uma soma direta, o resultado segue. ■

Trocando a esfera S^n pelo espaço projetivo quaterniônico

Consideremos aqui os fibrados principais sobre o espaço projetivo quaterniônico.

Assim como no caso de S^n , uma pergunta natural é saber quantos fibrados linhas quaterniônicos existem sobre o espaço $\mathbb{H}P^2$. Essa pergunta foi respondida em [27], no qual podemos encontrar o seguinte resultado:

Teorema 4.4.2. $[\mathbb{H}P^2, BS^3] = R_{2,+} \times P(2) \cup R_{2,-} \times Q(2)$, onde $R_2 = \{n \in \mathbb{Z} | n = 0, 1, 9, 16 \pmod{24}\}$.

Aqui, $+/-$ denotam subconjuntos par/ímpar de um subconjunto de números inteiros e $P(2), Q(2)$ são conjuntos de cardinalidade 1, 2, respectivamente.

Como no caso da esfera, assumimos f como a aplicação que classifica o fibrado sobre $\mathbb{H}P^2$ e denotamos por $\mathcal{G}_f$ o grupo de gauge desse fibrado. Temos as equivalências de homotopia [39]:

$$\mathcal{G}_f \sim \Omega m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f),$$

$$B\mathcal{G}_f \sim m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f).$$

Consideremos a fibração avaliação

$$ev : m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \rightarrow BS^3,$$

com $ev(g) = g(x_0)$, para todo $g \in m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f)$ e x_0 é o ponto-base de $\mathbb{H}P^2$. A seqüência de fibrações e inclusões de fibra (a menos de homotopia) fica:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathcal{G}(f) &\xrightarrow{\Omega ev} \Omega_f BS^3 \sim S^3 \longrightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \longrightarrow \\ &\longrightarrow m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \xrightarrow{ev} BS^3. \end{aligned}$$

Assim, temos três fibrações

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &\longrightarrow S^3 \longrightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \\ S^3 &\longrightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \longrightarrow m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \\ m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) &\longrightarrow m(\mathbb{H}P^2, BS^3; f) \xrightarrow{ev} BS^3. \end{aligned}$$

Considerando a primeira fibração, vemos que $\mathcal{G}_f$ é a fibra de homotopia de uma aplicação $h : S^3 \rightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f)$. Isso significa que os diferentes tipos de $\mathcal{G}_f$ são dados por diferentes aplicações $h : S^3 \rightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f)$.

Assim, estamos interessados nas possíveis classes de homotopia de aplicações $h : S^3 \rightarrow m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f)$, isto é, em $\pi_3(m_0(\mathbb{H}P^2, BS^3; f))$ já que, certamente, os diferentes tipos de homotopia dos grupos de gauge estão contidos nesse conjunto.

Para calcular tal grupo, seguimos a idéia desenvolvida em [27]: consideremos a inclusão natural $i_{n-1} : \mathbb{H}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$, a qual induz à fibração (veja [23])

$$(i_{n-1})_\# : m_0(\mathbb{H}P^n, BS^3) \rightarrow m_0(\mathbb{H}P^{n-1}, BS^3)$$

com $(i_{n-1})_\#(f) = f \circ i_{n-1}$ para todo $f \in m_0(\mathbb{H}P^n, BS^3)$. Seja f_λ com grau λ . Denotemos por $m_n(f_\lambda) = m_0(\mathbb{H}P^n, BS^3; f_\lambda)$ a componente de f_λ e $M_n(f_\lambda) = \bigcup_g (m_n(f_\lambda))$, sendo que g percorre todas as aplicações em $m_0(\mathbb{H}P^n, BS^3)$ com grau λ .

Se p_n é a restrição de $(i_{n-1})_\#$ a $M_n(f_\lambda)$, então sua fibra $F_n(f_\lambda)$ sobre $f_\lambda i_{n-1}$, com ponto base f_λ , tem o tipo de homotopia de $\Omega^{4n} BS^3$, e temos a seqüência exata

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n,q+1}} \pi_q(F_n(f_\lambda)) \xrightarrow{j_{n,q}} \pi_q(M_n(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{n,q}} \pi_q(M_{n-1}(f_\lambda i_{n-1})) \xrightarrow{\partial_{n,q}} \cdots \quad (4.1)$$

As seqüências com índices $n-1$ e n podem ser compostas do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \pi_q(F_{n-1}(f_\lambda i_{n-1})) & & & & \\ & & \downarrow j_{n-1,q} & \searrow d_{n,q} & & & \\ \cdots & \xrightarrow{j_{n,q}} & \pi_q(M_n(f_\lambda)) & \xrightarrow{p_{n,q}} & \pi_q(M_{n-1}(f_\lambda i_{n-1})) & \xrightarrow{\partial_{n,q}} & \pi_{q-1}(F_n(f_\lambda)) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \vdots & & & & \end{array}$$

Aqui, uma descrição explícita do homomorfismo $d_{n,q} = \partial_{n,q} j_{n-1,q}$ pode ser obtida usando a construção de James [22], como em [19]:

$$\begin{aligned} d_{n,q} : \pi_q(F_{n-1}(f_\lambda i_{n-1})) &\approx \pi_{4n+q-4}(BS^3) \rightarrow \pi_{q-1}(F_n(f_\lambda)) \approx \pi_{4n+q-1}(BS^3), \\ d_{n,q} : \zeta &\mapsto \pm(n-1)\zeta \circ j_*(\nu_{4n+q-4}) \pm \lambda[\gamma, \zeta], \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo $\gamma = [j]$ a classe da inclusão $j : S^4 \rightarrow BS^3$. Em particular, o homomorfismo

$$j_{1,q} : \pi_q(F_1(f_\lambda)) \approx \pi_{q+4}(BS^3) \rightarrow \pi_q(M_1(f_\lambda))$$

é sempre um isomorfismo, já que $M_0(f_\lambda i_0)$ é apenas um ponto.

Quando $n = 2$, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(F_1(f_\lambda)) & \xrightarrow{d_{2,q}} & \pi_{q-1}(F_2(f_\lambda)) \\ & \searrow j_{1,q} \quad \nearrow \partial_{2,q} & \\ & \pi_q(M_1(f_\lambda i_1)) & \end{array}$$

e, como $j_{1,q}$ é um isomorfismo, identificamos $d_{2,q}$ com $\partial_{2,q}$. Assim, podemos calcular o homomorfismo bordo

$$\partial_{2,q} = d_{2,q} : \pi_q(F_1(f_\lambda)) \approx \pi_{q+4}(BS^3) \rightarrow \pi_1(F_2(f_\lambda)) \approx \pi_{q+7}(BS^3),$$

$$\partial_{2,q}(\zeta) = \pm \zeta \circ j_*(\nu_{q+4}) \pm \lambda[\gamma, \zeta] = \pm \zeta \circ j_*(\nu_{q+4}) \pm \lambda[j_*(\iota_4), \zeta].$$

Usando a composição $S^4 \xrightarrow{id} S^4 \xrightarrow{j_1} BS^3$, obtemos $j_{1*}(\iota_4) = \gamma$.

Consideremos a parte final da seqüência exata de homotopia:

$$\begin{aligned} & \cdots \longrightarrow \pi_4(M_1(f_\lambda i_1)) \approx \pi_8(BS^3) \xrightarrow{\partial_{2,4}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,4}} \pi_3(F_2(f_\lambda)) \approx \pi_{11}(BS^3) \xrightarrow{j_{2,3}} \pi_3(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,3}} \pi_3(M_1(f_\lambda i_1)) \approx \pi_7(BS^3) \xrightarrow{\partial_{2,3}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,3}} \pi_2(F_2(f_\lambda)) \approx \pi_{10}(BS^3) \xrightarrow{j_{2,2}} \pi_2(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,2}} \pi_2(M_1(f_\lambda i_1)) \approx \pi_6(BS^3) \xrightarrow{\partial_{2,2}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,2}} \pi_1(F_2(f_\lambda)) \approx \pi_9(BS^3) \xrightarrow{j_{2,1}} \pi_1(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,1}} \pi_1(M_1(f_\lambda i_1)) \approx \pi_5(BS^3) \xrightarrow{\partial_{2,1}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,1}} \pi_0(F_2(f_\lambda)) \approx \pi_8(BS^3) \xrightarrow{j_{2,0}} \pi_0(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,0}} \pi_0(M_1(f_\lambda i_1)). \end{aligned}$$

Disso, obtemos a seqüência

$$\begin{aligned} & \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/2[j_8(\Sigma\nu' \circ \eta_7)] \xrightarrow{\partial_{2,4}} \mathbb{Z}/15[j_{11}(\Sigma z)] \xrightarrow{j_{2,3}} \\ & \xrightarrow{j_{2,3}} \pi_3(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,3}} \mathbb{Z}/12[j_7(\Sigma\xi)] \xrightarrow{\partial_{2,3}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,3}} \mathbb{Z}/3[j_{10}(\Sigma(\alpha_1(3;3) \circ \alpha_1(6;3)))] \xrightarrow{j_{2,2}} \pi_2(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,2}} \mathbb{Z}/2[j_6(\eta_4^2)] \xrightarrow{\partial_{2,2}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,2}} \mathbb{Z}/2[j_9(\Sigma\nu' \circ \eta_7^2)] \xrightarrow{j_{2,1}} \pi_1(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,1}} \mathbb{Z}/2[j_5(\eta_4)] \xrightarrow{\partial_{2,1}} \\ & \xrightarrow{\partial_{2,1}} \mathbb{Z}/2[j_8(\Sigma\nu' \circ \eta_7)] \xrightarrow{j_{2,0}} \pi_0(M_2(f_\lambda)) \xrightarrow{p_{2,0}} 0. \end{aligned}$$

com o seguinte homomorfismo fazendo a conexão

$$d_{2,1} = \partial_{2,1} : \mathbb{Z}/2[j_5(\eta_4)] \rightarrow \mathbb{Z}/2[j_8(\Sigma\nu' \circ \eta_7)]$$

$$\partial_{2,1}(\zeta) = \zeta \circ j_8(\nu_5) + \lambda \circ [j_4(\iota_4), \zeta],$$

que, usando [46] 5.9 pág. 44

$$\eta_3 \circ \nu_4 = \nu' \circ \eta_6,$$

e

$$\eta_4 \circ \nu_5 = \Sigma(\eta_3 \circ \nu_4) = \Sigma(\nu' \circ \eta_6) = \Sigma\nu' \circ \eta_7.$$

Temos

$$\partial_{2,1}(j_5(\eta_4)) = ((\lambda + 1) \bmod 2) j_8(\Sigma \nu' \circ \eta_7),$$

e

$$d_{2,2} = \partial_{2,2} : \mathbb{Z}/2[j_6(\eta_4^2)] \rightarrow \mathbb{Z}/2[j_9(\Sigma \nu' \circ \eta_7^2)]$$

$$\partial_{2,2}(\zeta) = \zeta \circ j_9(\nu_6) + \lambda \circ [j_4(\iota_4), \zeta],$$

que, usando [46] 5.9 pág. 44, nos dá

$$\eta_4^2 \circ \nu_6 = \eta_4 \circ \eta_5 \circ \nu_6 = 0,$$

e, por [47] Capítulo X 8.18 pág. 484, temos

$$\begin{aligned} [j_4(\iota_4), j_6(\eta_4^2)] &= j_9([\iota_4, \Sigma(\eta_3 \circ \eta_4)]) = j_9([\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4(\eta_3 \circ \eta_4)) = \\ &= j_9((2\nu_4 \pm \Sigma \nu') \circ \eta_7 \circ \eta_8) = j_9(\Sigma \nu' \circ \eta_7 \circ \eta_8), \end{aligned}$$

e obtemos

$$\partial_{2,2}(j_6(\eta_4^2)) = \lambda j_9(\Sigma \nu' \circ \eta_7^2).$$

Também,

$$d_{2,3} = \partial_{2,3} : \mathbb{Z}/12[j_7(\Sigma \xi)] \rightarrow \mathbb{Z}/3[j_{10}(\Sigma(\alpha_1(3;3) \circ \alpha_1(6;3)))]$$

$$\partial_{2,3}(\zeta) = \zeta \circ j_{10}(\nu_7) + \lambda \circ [j_4(\iota_4), \zeta],$$

$$\partial_{2,3}(j_7(\Sigma \xi)) = j_7(\Sigma \xi) \circ j_{10}(\nu_7) + \lambda[j_4(\iota_4), j_7(\Sigma \xi)].$$

Por [46] 4.7 e usando o fato que $\nu' \circ \nu_6 \in \pi_9^3 = 0$ ([46] pág. 46),

$$\Sigma \xi \circ \nu_7 = \Sigma(\xi \circ \nu_6) = \Sigma(\nu' \circ \nu_6) = 0,$$

e por [47] Capítulo X 8.18 pág. 484,

$$[\iota_4, \Sigma \xi] = [\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \xi = [\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4 \nu' =$$

$$(2\nu_4 \pm \Sigma \nu') \circ \Sigma^4 \nu' = 2\nu_4 \circ \Sigma^4 \nu',$$

já que $\Sigma \nu' \circ \Sigma^4 \nu' = \Sigma(\nu' \circ \Sigma^3 \nu')$ e $\nu' \circ \Sigma^3 \nu' \in \pi_9^3 = 0$.

Então, temos

$$\begin{aligned} \partial_{2,3}(j_7(\Sigma \xi)) &= j_7(\Sigma \xi) \circ j_{10}(\nu_7) + \lambda[j_4(\iota_4), j_7(\Sigma \xi)] = \\ &= \lambda j_{10}(2\nu_4 \circ \Sigma^4 \nu') = 0, \end{aligned}$$

pois $\nu_4 \in \text{Nuc } j_{10}$.

Agora,

$$d_{2,4} = \partial_{2,4} : \mathbb{Z}/2[j_8(\Sigma \nu' \circ \eta_7)] \rightarrow \mathbb{Z}/15[j_{11}(\Sigma z)]$$

$$\partial_{2,4}(\zeta) = \zeta \circ j_{11}(\nu_8) + \lambda \circ [j_4(\iota_4), \zeta],$$

$$\partial_{2,4}(j_8(\Sigma \nu' \circ \eta_7)) = j_8(\Sigma \nu' \circ \eta_7) \circ j_{11}(\nu_8) + \lambda[j_4(\iota_4), j_8(\Sigma \nu' \circ \eta_7)] = 0,$$

já que, usando [46] 5.9 pág. 44

$$\Sigma \nu' \circ \eta_7 \circ \nu_8 = 0,$$

e por [47] Capítulo X 8.18 pág. 484 e [46] 4.7 pág. 36

$$[\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^3(\Sigma \nu' \circ \eta_7) = [\iota_4, \iota_4] \circ \Sigma^4(\nu' \circ \eta_6) \in \pi_{11}^4 = 0.$$

Podemos afirmar o seguinte

1. se λ é par, então $\partial_{2,1}$ é injetiva e assim é um isomorfismo. Então $\text{Nuc } j_{2,0} = \text{Im } \partial_{2,1} = \mathbb{Z}/2$ e, como $j_{2,0}$ é sobrejetiva, já que $p_{2,0}$ é trivial, isso significa que $\pi_0(M_2(f_\lambda)) = 0$.
2. se λ é ímpar, então $\partial_{2,1}$ é trivial e, logo, $\text{Nuc } j_{2,0} = 0$. Assim $j_{2,0}$ é injetiva e $\text{Im } j_{2,0} = \text{Nuc } p_{2,0} = \mathbb{Z}/2$, mas como $p_{2,0}$ é trivial, isso implica $\pi_0(M_2(f_\lambda)) \approx \mathbb{Z}/2$.
3. se λ é par, então $\partial_{2,1}$ é injetiva, logo $\text{Nuc } \partial_{2,1} = 0 = \text{Im } p_{2,1}$ e $p_{2,1}$ é trivial e $\pi_1(M_2(f_\lambda)) = \text{Nuc } p_{2,1} = \text{Im } j_{2,1}$. Mas, com λ par, $\partial_{2,2}$ é trivial e, logo, $\text{Nuc } j_{2,1} = 0$ e $\pi_1(M_2(f_\lambda)) = \text{Im } j_{2,1} \approx \mathbb{Z}/2$.
4. se λ é ímpar, então $\partial_{2,1}$ é trivial e $\text{Nuc } \partial_{2,1} = \mathbb{Z}/2 = \text{Im } p_{2,1}$. Por outro lado, $\partial_{2,2}$ é injetiva, então $\text{Nuc } j_{2,1} = \mathbb{Z}/2 = \text{Im } \partial_{2,2}$, e isso implica que $j_{2,1}$ é trivial, $\text{Nuc } p_{2,1} = \text{Im } j_{2,1} = 0$, e com isso $\pi_1(M_2(f_\lambda)) = \text{Im } p_{2,1}/\text{Nuc } p_{2,1} \approx \mathbb{Z}/2$.
5. se λ é par, $\partial_{2,2}$ é trivial. Logo, $\text{Im } p_{2,2} = \mathbb{Z}/2$. Como $\partial_{2,3} = 0$, temos que $j_{2,2}$ é injetiva, e disso $\text{Im } j_{2,2} = \mathbb{Z}/3 = \text{Nuc } p_{2,2}$. Assim, $\pi_2(M_2(f_\lambda))/\text{Nuc } p_{2,2} = \text{Im } p_{2,2} = 0$ e isso implica que $\pi_2(M_2(f_\lambda)) \approx \mathbb{Z}/6$.
6. se λ é ímpar, $\partial_{2,2}$ é injetiva. Logo, $\text{Im } p_{2,2} = 0$. Já que $\partial_{2,3} = 0$, temos que $j_{2,2}$ é injetiva, e assim $\text{Im } j_{2,2} = \mathbb{Z}/3 = \text{Nuc } p_{2,2}$. Com isso, $\pi_2(M_2(f_\lambda))/\text{Nuc } p_{2,2} = \text{Im } p_{2,2} \approx \mathbb{Z}/2$ e isso implica $\pi_2(M_2(f_\lambda)) \approx \mathbb{Z}/3$.
7. como $\partial_{2,4} = 0$ e $\partial_{2,3} = 0$, temos que $j_{2,3}$ é injetiva e, logo, $\text{Im } j_{2,3} = \mathbb{Z}/15 = \text{Nuc } p_{2,3}$, e $\text{Im } p_{2,3} = \text{Nuc } \partial_{2,3} = \mathbb{Z}/12$. Assim, $\pi_3(M_2(f_\lambda))/\text{Nuc } p_{2,3} = \text{Im } p_{2,3} \approx \mathbb{Z}/12$, o que implica $\pi_3(M_2(f_\lambda)) \approx \mathbb{Z}/15 \oplus \mathbb{Z}/12$.

Portanto, pelo item 7, temos que os diferentes tipos de homotopia dos grupos de gauge serão, no máximo, de 180 tipos.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, J.F., *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. (2) 72 (1960), 20-104.
- [2] Atiyah, M.F.; Bott, R., *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London A 308 (1982) 523-615.
- [3] Baus, H.J., *Commutator calculus and groups of homotopy classes*, LNM 50 (1981).
- [4] Bourbaki, N., *Topologie générale II*, Hermann et Co., Paris 1961.
- [5] Booth, P.; Heath, P.; Morgan, C.; Piccinini, R., *H-spaces of self-equivalences of fibrations and bundles*, Proc. London Math. Soc. 49 (1984) 111-127.
- [6] Bott, R.; Tu, L. W., *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [7] Bredon, G. E., *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics ; 139, New York : Springer, 1993.
- [8] Cartan, H., *Suspension et invariant de Hopf*, Exposé 5, Séminaire H. Cartan, 11e. année, 1958/59. *Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires*. École Normale Supérieure, Paris, 1959.
- [9] Crabb, M.C.; Sutherland, W.A., *Counting homotopy types of gauge groups*, Proc. London Math. Soc. 81 (2000) 747-768.
- [10] Davis, J.F.; Kirk, P., *Lecture notes in algebraic topology*, American Mathematical Society, 2001.
- [11] Diek, T., *Transformation groups*, W. de Gruyter, Berlin - New York 1987.
- [12] Freudenthal, H., *Über die klassen de sphärenabbildungen*, Comp. Math., 5 (1937).
- [13] Fritsch, R.; Piccinini, R., *Cellular structures in topology*, Cambridge U. Press, Cambridge 1990.
- [14] Hamanaka, H.; Kono, A., *Unstable K^1 -group and homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 136 (2006), no. 1, 149-155.
- [15] Hamanaka, H.; Kono, A., *Homotopy type of gauge groups of $SU(3)$ -bundles over S^6* , Topology and App. 154 (2007) 1377-1380.

- [16] Hopf, H., *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fund. Math. 25 (1935).
- [17] Hu, S-T., *homotopy theory*, Ac. Press (1959).
- [18] Husemoller, D., *Fibre bundles*, McGraw-Hill, 1966.
- [19] Iwase, N.; Maruyama, K.; Oka, S., *A note on $\mathcal{E}(\mathbb{H}P^n)$ for $n \leq 4$* , Math. J. Okayama Univ. 33 (1991) p. 163-176.
- [20] James, I.M., *Reduced product spaces*, Ann. de Math., 62 (1955), 170-197.
- [21] James, I.M., *Suspension triad of a sphere*, Ann. of Math., 63 (1956), 407-429.
- [22] James, I.M., *Note on cup products*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1957) p. 374-383.
- [23] James, I.M., *General topology and homotopy theory*, Springer-Verlag New York, 1984.
- [24] Koh, S.S., *Note on the homotopy properties of the components of the mapping space X^{S^p}* , Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 896-904.
- [25] Kono, A., *A note on the homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 117A (1991), 295-297.
- [26] Kono, A.; Tsukuda, S., *A remark on the homotopy type of certain gauge groups*, J. Math. Kyoto Univ., 36-1 (1996), 115-121.
- [27] Lima Gonçalves, D.; Spreafico, M., *Quaternionic line bundles over quaternionic projective spaces* (2006) to appear in Math. J. Okayama Univ.
- [28] Miller, *The topology of rotation groups*, Annals of Math. 57 (1953), 90-111.
- [29] Mimura, M., *On the generalized Hopf homomorphism and the higher composition, Part I*, J. Math. Kyoto Univ. 4-1 (1964) 171-190.
- [30] Mimura, M., *On the generalized Hopf homomorphism and the higher composition. Part II. $\pi_{n+i}(S^n)$ for $i = 21$ and 22 .*, J. Math. Kyoto Univ. 4-2 (1965) 301-326.
- [31] Mimura, M.; Mori, M.; Oda, N., *Determination of 2-components of the 23 and 24-stems in homotopy groups of spheres*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A. Vol. 29, No. 1, 1975.
- [32] Mimura, M.; Toda, H., *The $(n+20)$ -th homotopy groups of n -spheres*, J. Math. Kyoto Univ. 3-1 (1963) 37-58.
- [33] Mimura, M.; Toda, H., *Topology of Lie groups*, Transl. of Math. Mon. 91 (1978).
- [34] Morgan, C.; Piccinini, R., *Conjugacy classes of groups of bundles automorphisms*, Manuscripta Math. 63 (1989), 233-244.
- [35] Munkres, J.R., *Elements of algebraic topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1984).

- [36] Oka, S.; Sawashita, N.; Sugawara, M., *On the groups of self equivalences of a mapping cone*, Hiroshima Math. J. 4 (1974) 9-28.
- [37] Piccinini, R.A., *Lectures on homotopy theory*. Università Degli Studi di Milano, Milano, Italia.
- [38] Piccinini, R.; Spreafico, M., *Conjugacy classes of gauge groups*, Queen's papers in pure and applied mathematics 111 (1998) Kingston.
- [39] Piccinini, R.; Spreafico, M., *The Milgram-Steenrod construction of classifying spaces for topological groups*, Expo. Math. (1998).
- [40] Serre, J.P., *Homologie singulière de espaces fibrés*, Ann. of Math., 54 (1951), 425-505.
- [41] Serre, J.P., *Groups d'homotopie et groupes abéliens*, Ann. of Math., 58 (1953), 258-294.
- [42] Spanier, E., *Algebraic topology*, Springer-Verlag New York, Inc. 1966.
- [43] Steenrod, N.E., *Topology of fibre bundles*, Princeton.
- [44] Toda, H., *On double suspension E^2* , Jour. of. Inst. Poly. Univ., 7 (1956), 103-145.
- [45] Toda, H., *p -primary components of homotopy groups IV, Compositions and toric constructions* Memoirs. Univ. of Kyoto, 32 (1959), 297-332.
- [46] Toda, H., *Composition methods in the homotopy groups of the spheres*, Ann. of Math. Studies No. 49 Princeton, 1962.
- [47] Whitehead, G., *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag, New York, 1978.
- [48] Whitehead, G., *The $(n+2)^{nd}$ homotopy groups of the n -spheres*, Ann. of Math. Soc., 52 (1950) 245-247.

Tabela de símbolos

S^n	Esfera unitária n -dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$
Top	Categoria dos espaços topológicos e aplicações contínuas
Top_0	Categoria dos espaços baseados e aplicações contínuas baseadas
$HTop$	Categoria dos espaços topológicos e das classes de equivalência de aplicações homotópicas
$\cong$	Homeomorfismo
$\sim$	Homotopia
$\approx$	Isomorfismo
$\wedge$	Produto <i>smash</i>
$\vee$	Produto <i>wedge</i>
Σ	Suspensão
Γ	Função levantamento
H	Aplicação de Hopf
$m(X, Y)$	Espaço das aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ com a topologia compacto-aberta
$m_0(X, Y)$	Espaço das aplicações contínuas baseadas $f : X \rightarrow Y$ com a topologia compacto-aberta
B^I	$= m(I, B)$ Espaço de todos os caminhos em B
PZ	$= m_0(I, B)$ Espaço de todos os caminhos baseados em B
ΩY	Espaço dos laços associados a (Y, y_0)
$[X, Y]$	Conjunto das classes de homotopias livres
$[X, Y]_0$	Conjunto das classes de homotopias baseadas
$\pi_n(Y, y_0)$	n -ésimo grupo de homotopia de (Y, y_0)
π_n^p	Componente p -primária do n -ésimo grupo de homotopia
$X \square Y$	Espaço <i>pull back</i>
$X \sqcup Y$	Espaço <i>push out</i>
$Princ_G(B)$	Conjunto do G -fibrados principais sobre o espaço B
$\mathcal{G}_p$	Grupo de gauge do fibrado p
$\mathcal{G}_f$	Grupo de gauge do fibrado p classificado pela aplicação f

Índice Remissivo

- G -ação principal, 19
- G -aplicação, 19
- G -espaço, 18
 - localmente trivial, 20
 - principal, 19
- G -fibrado, 23
 - principal, 22
 - principal enumerável, 30
 - principal trivial, 26
 - universal, 31
- G -homeomorfismo, 19
- k -espaço, 43
- n -fibrado universal, 31
- push out*, 6
- pull back*, 6
- ação
 - efetiva, 18
 - própria, 19
 - transitiva, 18
- aplicação
 - G -equivariante, 19
 - fibrada, 27
 - quociente induzida, 27
 - retração, 8
- aplicações
 - adjuntas, 4
 - homotópicas, 4
 - homotópicas baseadas, 5
- classes de homotopias
 - baseadas, 5
 - livres, 5
- co-fibra, 11
- co-fibração, 8
 - mapping cone*, 9
- composição secundária, 54
- cone, 8
- espaço
 - base, 22
 - baseado *mapping track*, 12
 - classificante, 31
 - das órbitas, 18
 - dos caminhos, 7
 - dos caminhos baseados, 9
 - dos laços, 4
 - homogêneo, 18
 - retrato, 8
 - total, 22
 - mapping path*, 12
 - mapping track*, 12
 - pull back*, 6
 - push out*, 6
- fibra, 8
 - de homotopia, 12
- fibração, 8
 - mapping path*, 11
 - mapping track*, 11
- fibrado
 - induzido, 27
 - linha, 23
- função
 - avaliação, 3
 - levantamento, 7
 - própria, 19
 - transitiva, 23
 - translação, 19
- grupo
 - de gauge, 31
 - de gauge local, 34
 - de homotopia, 5
 - de isotropia, 19
 - de transformação, 18
 - topológico, 17

homotopia, 4

lei de composição

horizontal, 7

vertical, 7

lei exponencial, 4

produto

de fibras, 28

de Whitehead, 48

smash, 4

wedge, 4

retrato de deformação forte, 8

seqüência exata

de uma co-fibração, 11

longa de espaços e aplicações, 9

subconjunto compactamente fechado, 43

suspensão, 4

translação à direita, 18

trivialização, 22