A equação de Black-Scholes com ação impulsiva

Everaldo de Mello Bonotto

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 27 de Maio de 2008

Assinatura: _____

A equação de Black-Scholes com ação impulsiva

Everaldo de Mello Bonotto

Orientadora: *Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos

Maio/2008

*Aos meus pais,
Heleno e
Maria.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre estar presente em minha vida.

Aos meus pais, que me deram a oportunidade de estudo e graças a eles pude conquistar mais uma etapa em minha vida. À minhas irmãs que sempre estiveram incentivando-me e torcendo por mim.

Às professoras Eti, Lúcia Spegiorin, Ilza e Adelcira, que sempre acreditaram em mim e sempre me ajudaram para meu egresso da universidade.

Aos meus amigos e professores do curso de graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela UNESP de Presidente Prudente. Não posso deixar de citar os professores José Roberto, Biroca, Suetônio, Marcelo Messias e Maria Raquel que sempre me ajudaram e me apoiaram a continuar os estudos, e, os alunos Angela, Rodrigo e Taciana que são meus verdadeiros amigos que fiz na graduação. Em especial à Profa. Dra. Monica Fürkotter, pela sua orientação, amizade e incentivos.

Aos professores do ICMC pelo ensino de qualidade e aos funcionários do ICMC pelo excelente trabalho que é desenvolvido neste instituto.

Aos meus amigos de minha turma de doutorado Aldicio, Andréa, Juliano, Nivaldo, Sandro e Thiago, pelo companherismo e pelos estudos em grupo. Em especial aos amigos que sempre

estiveram presentes em minha caminhada nos momentos de diversão: Ana Carla, Daniela, Esdras, Fernando, Graziela, José Paulo, Michele, Nivalda, Sadao, Ricardo, Sandra, Sandro e Tatiane.

Nivaldo e Suelen, obrigado pela amizade sincera que temos. Passamos por ótimos momentos durante esta temporada em São Carlos.

A todos meus amigos de Derry na Irlanda do Norte. Este último ano de meu doutorado foi muito gratificante. Tive a oportunidade de conhecer uma nova cultura e valiosas amizades como os amigos Aaron, Amy Rawle, Brandon Kastner, Chichi, Daiana Webster, Emmet Colton, Erin Smith, Francis Ward, Kai-Yu Tseng, Karla Muñoz, Kevin e Laura Fowler, meus amigos da igreja Cornerstone: Abdul, Claire Collins, Claire, Jasper, Jessica, Kirstin, Mappi, Mawusi, Nadege, Stephen Brown e Wendy. Não posso esquecer de citar Vicent, Pauline, Hilda, Cris, Billy e Anna pela amizade e hospitalidade.

Estar longe da família e dos amigos é uma situação difícil de se lidar. No entanto, agradeço a família Graham: Bernie, David, Michael e Richard que me adotaram como um integrante da família e me proporcionaram uma excelente estadia na Irlanda do Norte.

Ao meu supervisor, o prof Dr. Patrick Muldowney da University of Ulster, Irlanda do Norte. Pat Muldowney e sua esposa Marie foram grandes amigos e agradeço a eles por tudo o que eles fizeram por mim.

Sou extremamente grato à minha orientadora, a professora Dra. Márcia Federson, que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Amizade, paciência e disposição são poucas das qualidades que ela possui. Com certeza não teria trabalhado em diferentes áreas simultaneamente com um outro orientador! Obrigado por tudo e por ter aceitado a me orientar.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Resumo

Impulsos são perturbações abruptas que ocorrem em curto espaço de tempo e podem ser consideradas instantâneas. E os mercados financeiros estão sujeitos a choques bruscos como mudanças de governos, quebra de empresas, entre outros. Assim, é natural considerarmos a ação de tais eventos na precificação de ativos financeiros. Nosso objetivo neste trabalho é obtermos uma formulação para a equação diferencial parcial de Black-Scholes com ação impulsiva de modo que os impulsos representem estes choques. Utilizaremos a teoria de integração não-absoluta em espaço de funções para obtenção desta formulação.

Abstract

Impulses describe the evolution of systems where the continuous development of a process is interrupted by abrupt changes of state. Financial markets are subject to extreme events or shocks as government changes, companies collapse, etc. Thus it seems natural to consider the action of these events in the valuation of derivative securities. The aim of this work is to obtain a formulation for the Black-Scholes equation with impulse action where the impulses can represent these shocks. We use the non-absolute integration theory in functional spaces to obtain such formulation.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Fundamentos do mercado financeiro	7
1.2 Mercado de derivativos	11
1.3 Opções	12
1.3.1 O problema para apreçamento de uma opção de compra Européia	14
1.4 O Modelo de Black-Scholes	15
1.4.1 Conceitos da Teoria de Probabilidades	15
1.4.2 O processo de Wiener ou movimento browniano	18
1.4.3 O Lema de Itô	19
1.4.4 Hipóteses do modelo de Black-Scholes	20
1.4.5 Obtenção da equação diferencial de Black-Scholes	21
1.4.6 A fórmula do preço de uma opção de compra européia	23

2	Integração em Espaços de Funções	27
2.1	Introdução	27
2.2	A integral de Henstock em espaços de funções	29
2.3	Propriedades da Integral	36
2.4	A integral de Wiener	41
3	Integral de Wiener para um processo com impulsos	47
3.1	Introdução	47
3.2	A Função volume para um processo com impulsos	48
4	Uma equação diferencial do tipo Schrödinger com impulsos	65
4.1	Introdução	65
4.2	Uma equação de difusão para um processo impulsivo	66
4.3	Exemplo	77
5	A equação de Black-Scholes com ação impulsiva	79
5.1	Introdução	79
5.2	A função distribuição de probabilidades para um processo impulsivo	81
5.3	A equação de Black-Scholes com impulsos	85
5.4	Exemplo	94
5.5	Considerações finais	96
	Referências Bibliográficas	99

Introdução

Um ativo financeiro é uma reivindicação por algum pagamento e pode ter a forma física de um pedaço de papel no qual é escrito um contrato legal que especifique a reivindicação. Tais ativos são negociados freqüentemente: comprados e vendidos. É importante estabelecer o valor monetário, aqui e agora, de um ativo financeiro visto que, se seu valor correto não for conhecido, então ele não pode ser negociado de maneira justa.

Uma nota bancária (dinheiro) também é um pedaço de papel que sinaliza um valor monetário. E seu valor está escrito sobre ela. Isto também acontece com um cheque. Por outro lado, o valor monetário de um conjunto de ações de uma empresa pode ser estimado através do número total de ações emitidas pela empresa e do valor total da empresa dado por seu balancete. Este valor é determinado pelo mercado de ações e é reportado diariamente em jornais.

Mas existem outros tipos de ativos financeiros cujos valores são mais difíceis de serem determinados. Este é o caso, por exemplo, de contratos futuros e de opções. Os contratos futuros e as opções são fundamentais no entendimento de derivativos, ou seja, ativos cujos valores dependem do valor de outros ativos.

A partir dos trabalhos de F. Black e M. Scholes ([5]) e R. C. Merton ([23]), ganhadores do Prêmio Nobel de Ecônomoia em 1997, começou-se a entender a estimativa para o valor de opções. O modelo conhecido como equação de Black-Scholes para apreçamento de opções européias (*eu-*

ropean call options) usa a integral de Lebesgue e o cálculo de Itô para modelar os processos envolvidos.

O contexto de Black-Scholes é bastante flexível. As considerações mais críticas são transações em tempo contínuo e dinâmica contínua de preços de ativos. Quando esta última consideração é satisfeita, o preço dado pela equação de Black-Scholes pode ser justificado como uma aproximação assintótica para o preço “arbitrado” sob uma transação discreta, quando o intervalo da transação tende a zero. Mas preços de ativos são realmente contínuos?

Em geral, assume-se que qualquer contrato escrito será honrado. Em particular, quando um governo ou empresa possui um título, ignora-se a possibilidade de quebra do contrato na maturidade. Entretanto quebras de contrato acontecem. Há alguns anos este fato foi ilustrado, de forma dramática, pelas crises de crédito na Ásia, América Latina e Rússia. Se uma empresa A possui uma quantidade substancial de ativos de débitos da empresa B , então uma quebra de B pode implicar numa queda repentina no preço das ações da empresa A . E como é possível incorporar estes efeitos ou choques de mercado no modelo de Black-Scholes?

Pela sua própria natureza, quebras são imprevisíveis. Se assumirmos que não há qualquer informação que nos ajude a prever os tempos de quebra ou outros choques do mercado, então tais tempos podem ser modelados por uma variável randômica de Poisson. Isto significa que o tempo entre choques é distribuído exponencialmente e o número de choques no tempo t , denotado por N_t , é uma variável randômica de Poisson, com parâmetro λt para algum $\lambda > 0$. Entre os choques, assume-se que o preço de um ativo segue o movimento browniano geométrico (veja [3] e [9]).

Um modelo típico para a evolução do preço de um ativo de risco com choques ou saltos é dado por

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t - \delta dN_t, \quad (1)$$

onde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ e $\{N_t\}_{t \geq 0}$ são independentes e μ , σ e δ são constantes. Aqui, μ é a tendência (*drift*), σ é a volatilidade (*volatility*), $\{W_t\}_{t \geq 0}$ é um movimento browniano geométrico, $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é um martingale e $\{N_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson.

A fim de dar sentido à equação (1), considera-se sua formulação integral. Neste caso, é preciso definir a integral estocástica com respeito a $\{N_t\}_{t \geq 0}$. Escrevendo $\tau(i)$ para o i -ésimo tempo de salto no processo de Poisson, define-se

$$\int_0^t f(u, S_u) dN_u = \sum_{i=1}^n f(\tau(i)^-, S_{\tau(i)^-}).$$

Para tratar de modelos mais gerais, é preciso estender a teoria do cálculo estocástico a fim de se incorporar os processos com saltos. Em [9], isto é feito para a equação (1), onde se usa o cálculo de Itô.

Sabe-se que a equação de Black-Scholes é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rx \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf,$$

onde $f = f(x, t)$ denota o valor de um ativo derivativo dependendo do valor x de um ativo subordinado no tempo t , e r é a taxa de juros livre de risco. Em qualquer tempo no “futuro”, x e f são variáveis randômicas e σ é relacionada com o desvio padrão de x em tempos sucessivos.

O modelo básico de Black-Scholes ([5]) assume que a variável randômica, $x(t)$, possui incrementos de tempo que são estatisticamente independentes um do outro e têm distribuição log-normal tal que $\ln x(t') - \ln x(t'')$ é distribuída de forma normal com média $\mu(t' - t'')$ e variância $\sigma^2(t' - t'')$. Estas considerações implicam a existência de uma medida $\mathbb{P}$ sobre o espaço amostral subordinado, Ω , sobre o qual os processos x e f estão definidos.

Um tratamento (veja [3]) para a estimativa do ativo derivativo, em termos dos valores do ativo subordinado, estabelece a dependência de f sobre x e t como uma esperança: $E(f) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é uma medida sobre Ω para a qual, primeiramente, a tendência μ do processo $\ln x$ é substituída pela taxa de juros livre de risco r e, em segundo lugar, o processo f é um martingale sob a medida $\mathbb{Q}$, dando $f = E(f)$. Este método de análise é conhecido como precificação de risco neutro (livre de risco) e a teoria matemática relacionada ao método envolve o Teorema da Extensão de Kolmogorov, o cálculo de Itô para equações diferenciais estocásticas, o Teorema de Radon-Nikodym e o Teorema de Girsanov. Porém, se usarmos a integral de Henstock em lugar da integral de Lebesgue para calcularmos a esperança, o mesmo resultado pode ser conseguido por métodos elementares. Veja [32], por exemplo.

Em ambas as formulações de Lebesgue e de Henstock, o espaço amostral Ω para o processo de precificação pode ser tomado como sendo $\mathbb{R}_+^{*(t, T]}$, com $x : (t, T] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ no espaço amostral. Nas duas formulações, a consideração básica para o modelo de Black-Scholes descrita acima dá a

seguinte expressão para $\mathbb{P}(I)$,

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^n \exp \left\{ \frac{(\ln x_j - \ln x_{j-1}) - \mu(t_j - t_{j-1})}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})} \right\}^2 \{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})\}^{-1/2} \frac{dx_j}{x_j},$$

onde $I = \{x : u_j \leq x(t_j) < v_j, j = 1, 2, \dots, n\}$, $t = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ e escrevemos x_j para $x(t_j)$. Quando a integração de Lebesgue é usada nesta etapa, o Teorema da Extensão de Kolmogorov é aplicado para podermos estender o domínio de $\mathbb{P}$, além dos intervalos cilíndricos I , a todos os conjuntos mensuráveis do espaço amostral e, quando usamos equações diferenciais estocásticas para representar o processo de precificação, o Teorema de Girsanov produz a mudança de medida necessária para alcançarmos a precificação de risco neutro.

Por outro lado, o uso da integral de Henstock requer, somente, que a medida esteja definida sobre intervalos cilíndricos I . Logo, para se obter a medida $\mathbb{Q}$ necessária para a precificação de risco neutro, tudo que é necessário é um argumento simples dando $\mathbb{Q}(I)$ como segue

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^n \exp \left\{ \frac{(\ln x_j - \ln x_{j-1}) - r(t_j - t_{j-1})}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})} \right\}^2 \{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})\}^{-1/2} \frac{dx_j}{x_j}$$

(veja [29] e [31]). Desta forma, as expressões para $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ diferem, somente, na substituição da tendência, μ , pela taxa de juros livre de risco, r . Um argumento elementar demonstra que a integral de Henstock com respeito a $\mathbb{Q}$ dá uma solução da equação de Black-Scholes, [29]. (Um argumento análogo é usado em [24] e [28] para se obter soluções de Henstock para equação de difusão e para equação de Schrödinger.) Mais do que isto, a taxa de juros livre de risco e a volatilidade não precisam ser contínuas por partes. Basta que sejam contínuas exceto num conjunto de medida de Lebesgue zero ([29], Prop. 11) e isto aproxima melhor a condição real vivida pelo mercado financeiro.

A seguir, descrevemos os tópicos da presente tese e os resultados principais.

No Capítulo 1, apresentamos a teoria base do modelo de Black-Scholes. Na seção 1.1, um breve resumo de alguns conceitos em Finanças é apresentado. Na seção 1.2, descrevemos um mercado de derivativos. Na seção 1.3, definimos um contrato de opções e exemplificamos um contrato de opção de compra e um contrato de opção de venda. Finalizamos com a Seção 1.4, apresentando o modelo de Black-Scholes. Para isso, dividimos a Seção 1.4 em seis subseções: na Subseção 1.4.1 descrevemos alguns conceitos da teoria de probabilidades; um processo de Wiener

é definido em 1.4.2, o Lema de Itô em 1.4.3, as hipóteses do modelo de Black-Scholes em 1.4.4, equação de Black-Scholes em 1.4.5 e, na Subseção 1.4.6, estabelecemos a fórmula do preço de uma opção de compra européia.

No Capítulo 2, apresentamos a ferramenta fundamental que iremos utilizar no modelo de Black-Scholes, isto é, integração em espaço de funções. Na Seção 2.1, fazemos uma introdução sobre a teoria de integração de Henstock. Na Seção 2.2, definimos a integral de Riemann generalizada em um espaço de dimensão infinita. Algumas propriedades da integral de Riemann generalizada em um espaço de funções são feitas na Seção 2.3 e, na Seção 2.4, apresentamos a integral de Wiener.

No Capítulo 3, obtemos a integral de Wiener para um processo com impulsos. Dividimos o capítulo em duas seções. Na Seção 3.1, fizemos uma introdução sobre a teoria a ser apresentada no capítulo e, na Seção 3.2, definimos a função volume para um processo com impulsos e provamos algumas propriedades para esta função.

Dividimos o Capítulo 4 em três seções. Iniciamos a Seção 4.1 com uma introdução. Na Seção 4.2, estabelecemos uma equação diferencial parcial com ação impulsiva cuja solução possui uma representação de Feynman-Kac. Finalizamos o capítulo com a Seção 4.3, apresentando um exemplo sobre a teoria.

No Capítulo 5, a equação de Black-Scholes com ação impulsiva é estabelecida. Iniciamos o capítulo com uma discussão sobre a teoria envolvida no modelo de Black-Scholes feita na Seção 5.1. Na Seção 5.2, apresentamos a função distribuição de probabilidades para um processo com impulsos. Na Seção 5.3, apresentamos o modelo de Black-Scholes com impulsos e finalizamos o capítulo com um exemplo usando a equação obtida.

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos o famoso modelo de Black-Scholes para apreçamento de uma opção de compra européia. Iniciamos apresentando alguns conceitos básicos do mercado financeiro que usaremos no decorrer deste trabalho. Finalizamos o capítulo com o modelo de Black-Scholes, que estabelece um fórmula determinística para o apreçamento de uma opção de compra européia.

1.1 Fundamentos do mercado financeiro

Apresentamos, a seguir, um breve resumo de alguns conceitos em Finanças que iremos utilizar posteriormente. O glosário que apresentamos e o uso dos termos técnicos em Finanças têm como base os glosários de Baxter & Rennie [3], Bernstein [4], Brealey & Myers [6], Downes & Goodman [7], Gélédan & Brémond [11], Pindyck & Rubinfeld [33], Siqueira [34] e o site <http://www.bertolo.pro.br/Adminfin/HTML/Dicionario.htm#commodities>.

Um **ativo** ou **bem** (asset) é algo capaz de produzir fluxo monetário para o proprietário. É qualquer bem com valor comercial ou valor de troca pertencente a uma sociedade, instituição ou pessoa física. Exemplos: imóveis, dinheiro aplicado, ações, jóias, etc.

Valor mobiliário (security) é um instrumento que indica participação em uma companhia (ações), relacionamento de um credor com uma empresa ou entidade governamental (obrigações), ou direitos de propriedades representados por instrumentos como opção, direito de subscrição e bônus de subscrição.

Ação (share) é o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativo de parcela do capital. É o documento que indica ser o seu possuidor o proprietário de certa fração de determinada empresa. As ações representam a menor fração do capital social destas companhias, ou seja, é o resultado da divisão do capital social em partes iguais. Quando emitidas por companhias abertas ou assemelhadas, são negociados em bolsa de valores ou no chamado mercado de balcão. O investidor torna-se, portanto, sócio da empresa da qual adquiriu ações e os poderes a ele atribuídos são limitados pelo tipo de ação que comprou e também pela quantidade de ações que possui.

Mercadorias (commodities) são produtos como cereais, metais e alimentos negociados em uma bolsa de mercadorias ou no mercado à vista.

Dividendo (dividend) é a parcela do lucro da empresa que é distribuída aos acionistas, de acordo com a quantidade de ações possuídas. Normalmente, é resultado dos lucros obtidos por uma empresa.

Rentabilidade ou **retorno** (return) é a medida de ganho financeiro nominal sobre o total do investimento, expressa em termos percentuais. Exemplo: um investimento inicial de R\$ 90,00, que hoje vale R\$ 97,00, gerou um ganho financeiro nominal de R\$ 7,00 e uma rentabilidade de 7%.

Risco (risky) é o grau de incerteza da rentabilidade de um investimento. Exemplo: afirmar que um investimento é de alto risco significa que temos pouca chance de prever, com precisão, a rentabilidade deste investimento. Em contrapartida, esse investimento oferece possibilidade de retorno superior a um investimento conservador. No jargão financeiro, a palavra “risco” está sempre associada à probabilidade de ganhos ou perdas acima ou abaixo da média de mercado. O investidor deve estar atento a essa diferença, porque na linguagem cotidiana a palavra “risco” muitas vezes é

usada para indicar a possibilidade de perda (diminuição) ou manutenção do estado atual, excluindo a possibilidade de ganho (retorno ou crescimento).

Obrigações ou **títulos** (bonds) é o reconhecimento formal, por escrito, de uma dívida, pelo qual uma das partes promete pagar certa importância, em determinada data futura, e mais juros, em datas pré-fixadas, até o vencimento.

Ativo financeiro (financial asset) é qualquer título representativo de parte patrimonial ou dívida. Exemplos: títulos da dívida pública, contratos derivativos, ações, etc.

Derivativo (derivative) são ativos financeiros cujos valores e características de negociação estão amarrados aos ativos que lhes servem de referência (chamados ativos-base). A palavra “derivativo” vem do fato que o preço do ativo é derivado de um outro ativo (ativo-base). Exemplo: opção da Petrobrás, o preço desta opção é derivado do ativo-base “ação da Petrobrás”.

Tendência (drift), que representamos pela letra μ , é a taxa de retorno esperada para um ativo com relação a uma medida de probabilidade.

Volatilidade (volatility), que representamos pela letra σ , é um indicador que mede o risco de um determinado investimento. Quanto maior a volatilidade, maior o risco para o investidor, comparativamente aos demais fundos do segmento em questão. O cálculo deste indicador considera a dispersão para cima ou para baixo da rentabilidade diária em relação à média da rentabilidade em determinado período (desvio padrão). Mede, também, o grau médio de variação das cotações de um título ou fundo de investimento em um determinado período de tempo. Alta volatilidade significa que o valor da cotação apresenta forte variação.

Venda a descoberto (short-selling) é uma modalidade de negociação em que um negociante vende algum ativo ou derivativo financeiro que ele não possui, esperando que seu preço caia, para então comprá-lo, fechando sua posição e auferindo os lucros da transação. Exemplo: João percebe que o preço das ações de uma empresa *A* está muito alto, em R\$ 50,00, e que uma queda na cotação é iminente. João não possui nenhum papel da empresa *A*. Ainda assim, ele resolve vender 1000 papéis. Sua conta na corretora de valores é creditada em $1000 \times \text{R\$ } 50,00 = \text{R\$ } 50.000,00$. Dias depois, a expectativa de João se concretiza e o preço realmente cai, chegando a R\$ 40,00. João, então, compra 1000 papéis. Sua conta é debitada em $1000 \times \text{R\$ } 40,00 = \text{R\$ } 40.000,00$. Com isto, João auferiu um lucro de R\$ 10.000,00.

O risco óbvio de tal operação é que a expectativa não se cumpra e o preço aumente ao invés de cair. Se, em nosso exemplo, o preço de *A* alcançasse os R\$ 60,00, João amargaria um prejuízo de R\$ 10.000,00.

Teoricamente, não há teto para o preço de um ativo ou derivativo. Um negociante poderia amargar um prejuízo infinito em uma operação de venda a descoberto. O lucro, no entanto, é limitado ao valor creditado no momento da venda, sendo que o negociante somente obterá esse lucro quando o preço do ativo chegar a zero.

Arbitragem (arbitrage) é a compra de um valor mobiliário e a sua venda simultânea para a obtenção de lucro sem risco ou a realização de lucro garantido sem incerteza, com uma ou mais transações no mercado. Arbitragem é a obtenção de lucros com diferenças de preço quando o mesmo título, moeda ou mercadoria é negociado em dois ou mais mercados. Exemplo: suponha que dois bancos *A* e *B* estabeleçam a taxa de juros ao ano no valor de 8% e 10% respectivamente. Um arbitrador dever tomar o máximo que puder de empréstimo do banco *A* e depositar todo esse valor no banco *B*, uma vez que o ganho de 2% é certo.

Um mercado que é livre de arbitragem não possui oportunidades de lucros certos. Uma oportunidade de arbitragem poderia ser uma estratégia de negociação autoconfiável que iniciasse com zero e terminasse, numa data futura, com um valor positivo. Um mercado é dito livre de arbitragem se não houver, de modo algum, tais oportunidades de arbitragem ([3], p. 197).

Custo de transação (transaction costs) são custos da compra e venda de um valor mobiliário, que consistem principalmente na comissão de corretagem, margem do investidor ou de uma taxa (como seria, por exemplo, a taxa cobrada por um banco ou por uma corretora para negociar títulos do governo), mas também inclui tributos diretos, tais como a comissão da SEC nos EUA, bem como quaisquer impostos de transferência pelo governo e outros impostos diretos.

Banco ideal é o banco onde as taxas de juros de depósito e empréstimo são iguais e não há taxas de serviço e de transação. As taxas de juros também independem do montante do principal.

Mercado perfeito é um mercado sem custos de transação e leilões; nele todos os acordos são cumpridos; há possibilidade de comprar/vender qualquer montante de cada valor mobiliário; as transações ocorrem continuamente e há a possibilidade da venda a descoberto ilimitada; há ausência de impostos; a liquidação é instantânea, a transação ocorre à vista (sem parcelamento) e

existe um banco ideal constante. No caso das ações, não se considera o dividendo, e dos bonds, o cupom.

Portfólio (portfolio) é um conjunto de títulos e valores mantido por um fundo mútuo ou por um investidor. É uma carteira de títulos, isto é, um conjunto de títulos de rendas fixa e variável, de propriedade de pessoas físicas ou jurídicas.

1.2 Mercado de derivativos

Os mercados de derivativos podem ser caracterizados como inovações financeiras, conforme destaca A. B. C. Galvão [10], uma vez que surgiram como novos produtos para melhorar a repartição do risco individual e a previsibilidade dos preços. Essas duas funções econômicas são importantes e o mercado as tem desempenhado nos últimos anos em decorrência da liquidez obtida.

A repartição do risco é viabilizada pelo *hedge*, operação que possibilita a realização de seguro contra oscilações de preços. A segunda função corresponde à informação que esse mercado fornece aos preços a termo dos ativos-base, ou seja, na previsão que esse mercado faz do mercado à vista.

Assim, pode-se dizer que o mercado de derivativos existe para facilitar a transferência/distribuição do risco entre os agentes econômicos, ao mesmo tempo que, pelas expectativas criadas e graças à lei da oferta e da procura, passa a influir diretamente na formação futura dos preços das mercadorias e ativos financeiros negociados nestes mercados.

Os derivativos auxiliam na gestão do risco do instrumento a que se referem e estão ligados à vida das empresas e bancos, tornando-se instrumentos indispensáveis na moderna gestão financeira.

J. C. Hull [17] define derivativos (também chamados de *contingent claims*) como produtos financeiros que têm seu valor derivado de outro ativo, conhecido como ativo-base. Existem três grupos de derivativos: contrato futuro e a termo, opção e *swap*.

1. **Contrato a termo** (forward contract) é um acordo que estabelece que um ativo será comprado e vendido em uma data futura estabelecida por um preço fixado no presente.

2. **Contrato Futuro** (future contract) é semelhante ao contrato a termo com exceção que contratos futuros são transacionados em bolsas e sujeitos à reavaliação diária do preço de referência.

3. **Opção** (option) são contratos que concedem o direito (não a obrigação) de comprar ou vender determinado ativo em uma data futura especificada, concedido mediante pagamento de uma quantia acordada entre as partes. Se o direito não for exercido depois do período especificado, a opção termina pelo vencimento e o comprador da opção perde a quantia paga para obtenção da opção.

4. **Swap** é o jargão utilizado no mercado financeiro para um contrato de troca, seja ele de moedas, *commodities* ou ativos financeiros. Exemplo: se obtivermos um ativo que rende uma taxa pré-fixada, por meio de um contrato de *swap*, poderemos trocá-lo por um ativo que renda variação cambial mais um coupon.

Na próxima seção, vamos nos concentrar em Opções, que é nosso objeto de estudo.

1.3 Opções

Vimos que um contrato de opção concede o direito (não a obrigação) de comprar ou vender determinado ativo em uma data futura especificada, concedido mediante pagamento de uma quantia acordada entre as partes. A data na qual o contrato da opção expira é chamada de **data de exercício** ou de **maturidade** (exercise date or maturity) e o preço estabelecido nesta data é chamado de **preço de exercício da opção** (strike price).

Existem diferentes tipos de opções, como a opção americana e a européia. A **opção americana** é uma opção que pode ser exercida em qualquer momento até a data final de exercício. Já a **opção européia** é uma opção que pode ser exercida só na maturidade.

Vamos nos concentrar em opções européias, que é o objetivo do trabalho.

Existem dois tipos básicos de opções: **opção de compra** e **opção de venda**.

Opção de Compra (call option) é a opção que assegura a seu titular o direito, mas não obrigação, de comprar um ativo em uma data futura (geralmente 3, 6 ou 9 meses), por um preço estabelecido. Por esse direito o adquirente da opção de compra paga ao vendedor da opção, chamado

lançador, uma comissão denominada **prêmio** (premium), que será perdida se o comprador não exercer a opção até a data concordada. Portanto, o adquirente de uma opção de compra especula, esperando que o preço das ações-objeto suba dentro do período especificado.

Consideremos o seguinte exemplo apresentado por J. C. Hull em [17]: suponhamos que um negociante queira comprar um contrato de opção de compra européia de 100 ações da IBM, cujo preço de exercício é de \$ 100 por ação e a data de maturidade é em dois meses. Suponhamos que o preço ação seja de \$5, isto é, o comprador precisa pagar um prêmio de \$5 por ação. Suponhamos ainda que o preço corrente da ação (stock price) seja de \$98. Como a opção é européia, o comprador poderá exercer a opção somente na data de maturidade. Se na data de maturidade o preço da ação for menor que \$100, claramente o comprador não exercerá a opção, pois não há razão em comprar uma ação por \$100, sendo que o valor de mercado é menor. Nestas circunstâncias, o comprador perde todo o investimento inicial de \$500. Por outro lado, se na data de maturidade o preço da ação for maior que \$100, o comprador exercerá a opção. Suponhamos, por exemplo, que o preço da ação seja de \$115 na maturidade. Exercendo a opção, o comprador irá comprar 100 ações por \$100 cada. Se a ação for vendida imediatamente, o comprador terá um ganho de \$15 por ação, ou seja, \$ 1.500,00 (ignorando custos de transações). Quando o custo inicial da ação é levado em conta, o lucro líquido para o comprador é de \$10 por ação, ou seja, \$1.000,00. Consideremos, agora, a situação em que o preço da ação seja de \$103 na maturidade. O comprador também exercerá a opção, mesmo levando em conta que ele irá perder \$200. Pois antes peder \$200 do que \$500 se a opção não for exercida.

O oposto da opção de compra é a **Opção de Venda** (putt option), que assegura ao comprador o direito de vender um ativo por um preço estabelecido até a data de vencimento. Os adquirentes de opções de venda apostam na queda do preço da ação-objeto. Exemplo (Hull [17]): consideremos um negociante que queira comprar um contrato de opção de venda européia em 100 ações da Exxon cujo preço de exercício é \$70, isto é, ele compra o direito de vender 100 ações da Exxon por \$70 cada. Suponhamos que o preço corrente da ação seja de \$66, a data de maturidade seja em três meses e o preço da opção seja de \$7 (\$7 por ação). Como a opção é européia, o comprador poderá exercer a opção somente na data de maturidade. Se na data de maturidade o preço da ação for menor que \$70, o comprador exercerá a opção. Suponhamos, por exemplo, que o preço da ação seja de \$50 na maturidade. Exercendo a opção, o comprador irá comprar 100 ações por \$50 cada

e, sob os termos da opção de venda, venderá as mesmas ações por \$70, realizando um ganho \$20 por ação, ou seja, \$ 2.000,00 (ignorando custos de transações). Quando o custo inicial da ação é levado em conta, o lucro líquido para o comprador é de \$13 por ação, ou seja, \$1.300,00. Caso o preço da ação seja maior que \$70 na maturidade, o comprador não exercerá a opção, pois a opção não terá valor e o comprador perderá \$7 por ação, ou seja \$700.

1.3.1 O problema para apreçamento de uma opção de compra Européia

Suponhamos que uma companhia tenha, habitualmente, que negociar em um ativo de risco intrínseco, como o petróleo. A companhia pode, por exemplo, saber que em três meses serão necessários milhares de barris de petróleo bruto. O preço do petróleo pode flutuar desordenadamente. Mas, comprando opções de compra européia, com preço de exercício K , a companhia sabe a quantia máxima de dinheiro que irá precisar em três meses para comprar milhares de barris. Podemos pensar na opção como um seguro contra o aumento no preço do petróleo. Seja T a data de maturidade. O problema de apreçamento, agora, é determinar, para T e K dados, quanto a companhia desejaria pagar pelo seguro.

Para este exemplo, existe uma complicação extra, pois custa dinheiro armazenar petróleo. Para simplificar nossa tarefa, vamos primeiramente precificar derivativos baseados nos ativos que podem ser mantidos sem custos adicionais: tipicamente ações da companhia. Igualmente, podemos supor que não exista benefício adicional para manter as ações, isto é, nenhum dividendo é pago.

Suponhamos, então, que a companhia entra em um contrato que dê a ela o direito, mas não a obrigação, de comprar uma unidade do estoque por um preço K em três meses de duração. Quanto a companhia deveria pagar pelo contrato?

Primeiramente, precisamos saber o valor do contrato na data de maturidade. No momento T quando a opção expira (digamos em três meses), denotemos por S_T o preço da ação subjacente na maturidade.

Se $S_T > K$, então a opção será exercida. A opção é, então, dita estar **dentro do preço** (in the money): uma opção que vale S_T pode ser comprada por apenas K . O valor da opção para a companhia é, então, $(S_T - K)$.

Se, por outro lado, $S_T < K$, então será mais barato comprar ações no mercado aberto e assim a opção não será exercida. A opção vale menos e ela é dita estar **fora do preço** (out of money).

Se $S_T = K$, a opção é dita estar **no preço** (at the money).

O valor de uma opção de compra européia, no momento da expiração (payoff), é dado por

$$(S_T - K)_+ := \max\{(S_T - K), 0\}.$$

Na próxima seção, vamos estabelecer o preço adequado para um contrato de opção de compra européia, isto é, o preço justo do prêmio (*premium*), utilizando o modelo de F. Black e M. Scholes.

1.4 O Modelo de Black-Scholes

O modelo matemático desenvolvido por Fischer Black e Myron Scholes no início dos anos 70 foi responsável pelo grande avanço na teoria moderna de precificação de derivativos financeiros. A facilidade de implementação do modelo aliada aos poderosos resultados, tanto na determinação de preços de opções quanto de seus parâmetros de *hedge*, fizeram do modelo de Black-Scholes um dos mais bem sucedidos da Teoria de Finanças. Além disso, o modelo possibilitou que as instituições financeiras usassem o mercado de opções com muito mais frequência e segurança, o que acabou sendo determinante no sucesso e crescimento que este mercado experimentou desde então.

Antes de apresentarmos o modelo de Black-Scholes, precisamos introduzir alguns conceitos da teoria de probabilidades.

1.4.1 Conceitos da Teoria de Probabilidades

Definição 1.1. *Uma medida de probabilidade, ou simplesmente uma probabilidade $\mathbb{P}$, é uma função real de conjuntos, definida em uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto não-vazio Ω , que satisfaz:*

- a) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$ (positividade);
- b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normalidade);
- c) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, se $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$ (σ -aditividade).

As condições a), b) e c) acima são conhecidas como axiomas de Kolmogorov.

Definição 1.2. Um espaço de probabilidade é uma tripla ordenada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde:

- a) Ω é um conjunto arbitrário não-vazio;
- b) $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω ;
- c) $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade.

Na linguagem probabilística, os pontos $\omega \in \Omega$ representam os resultados possíveis de um experimento aleatório, os subconjuntos $A \in \mathcal{F}$ são chamados de **eventos** e a probabilidade $\mathbb{P}$ é uma aplicação que atribui graus de incerteza aos eventos de $\mathcal{F}$.

O conceito de independência, a ser definido a seguir, particulariza a teoria de probabilidade como um ramo distinto na teoria geral de medida.

Definição 1.3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Diremos que os eventos A e B em $\mathcal{F}$ são independentes se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Uma classe de eventos $\varepsilon \subset \mathcal{F}$ será chamada uma classe de eventos independentes se, para toda coleção finita de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ em ε , tivermos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Definição 1.4. Se $\varepsilon_\lambda \subset \mathcal{F}$ for uma classe de eventos, com λ pertencente a um conjunto de índices Λ , diremos que $\{\varepsilon_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de classes independentes se, para cada seleção de $A_\lambda \in \varepsilon_\lambda$, a classe $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ contiver somente eventos independentes.

No que segue, consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\Omega', \mathcal{F}')$ um espaço mensurável.

Definição 1.5. Uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ é $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ mensurável, se

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \text{ para todo } B \in \mathcal{F}'.$$

Definição 1.6. Uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ que é $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ mensurável é chamada um elemento aleatório com valores em Ω' (notação: $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$). Quando $\Omega' = \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, o elemento aleatório X é chamado variável aleatória (vetor aleatório).

Definição 1.7. Seja X uma variável aleatória contínua. A função de densidade de probabilidade de X é uma função $f_X(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f_X(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$;
3. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, temos $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$.

A função distribuição de probabilidade de X é definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y)dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Definimos a média ou o valor esperado de X por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx,$$

e a variância de X por $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

Vamos definir, agora, um tipo especial de distribuição: a distribuição normal.

Definição 1.8. Uma variável aleatória contínua X é dita ter distribuição normal, com parâmetros μ e σ^2 , se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. O valor esperado de X é dado por $\mathbb{E}(X) = \mu$ e a variância $\text{var}(X) = \sigma^2$. Neste caso, escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Na próxima definição, estabeleceremos o conceito de processo estocástico.

Definição 1.9. Um *processo estocástico* é uma estrutura constituída de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, um conjunto não-vazio $\mathbb{T}$ e uma aplicação $X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tais que, para cada $t \in \mathbb{T}$, a função $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma variável aleatória. Em outras palavras, um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexadas por um conjunto $\mathbb{T}$.

Para cada $t \in \mathbb{T}$, X_t ou $X(t)$ denotará a variável aleatória $X(t, \cdot)$, isto é, $X(t, \cdot) = X(t) = X_t$. A coleção de variáveis aleatórias $\{X(t) : t \in \mathbb{T}\}$ também será denotada por X . $\mathbb{T}$ será chamado *espaço de índices ou parâmetros*. Para cada $\omega \in \Omega$, a função $X(\cdot, \omega) : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ será chamada *trajetória, ou realização, ou função amostral* correspondente a ω .

1.4.2 O processo de Wiener ou movimento browniano

Em 1828, o botânico Robert Brown observou um movimento irregular de poléns na água. Hoje, este movimento é chamado de movimento browniano ou processo de Wiener. No início do século 20, aplicações importantes do movimento browniano foram descobertas. A primeira deu-se na teoria de preços de ações flutuantes por L. Bachelier (1900) [1]. A segunda deu-se na investigação de propriedades da densidade de partículas em certa posição e tempo por A. Einstein [8]. Detalhes sobre a teoria de movimento browniano pode ser encontrado em [3], [9], [19] e [21].

A definição formal do movimento browniano é apresentada a seguir.

Definição 1.10. Um movimento browniano ou um processo de Wiener, é um processo estocástico a valores reais $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ ou $\mathbb{T} = [0, T]$ ($T \in \mathbb{R}_+$), definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ e W_t é contínua para todo $t \in \mathbb{T}$;
2. para cada $n \geq 1$ e qualquer tempo $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, as variáveis aleatórias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ são independentes;

3. para $0 \leq s < t$ o incremento $W_t - W_s$ tem distribuição normal (gaussiana) com média zero e variância $\sigma^2(t - s)$, isto é,

$$\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) dx,$$

onde $A \in \Omega$.

O parâmetro σ^2 na definição acima é conhecido como variância. Um processo com $\sigma^2 = 1$ é chamado movimento browniano canônico. A existência do movimento browniano pode ser demonstrada por vários argumentos. Veja, por exemplo, [19].

Definição 1.11. Um processo $\{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ ou $\mathbb{T} = [0, T]$ ($T \in \mathbb{R}_+$), a valores reais positivo é um movimento browniano geométrico, se $\{\ln(W_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ for um movimento browniano.

1.4.3 O Lema de Itô

O preço de uma ação é uma função que depende do preço da ação subjacente e do tempo. Em geral, dizemos que a função preço de qualquer derivativo é uma função que depende do preço do derivativo adjacente e do tempo. Um resultado importante nesta área foi descoberto pelo matemático K. Itô, em 1951, conhecido como o Lema de Itô. Antes de enunciar este resultado, vamos definir o processo de Itô.

Definição 1.12. Sejam a e b funções que dependem das variáveis x e t , isto é, $a = a(x, t)$ e $b = b(x, t)$. Um processo de Itô é representado por

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

onde

- a) $a(x, t)$ é o drift ou tendência instantânea do processo de Itô;
- b) $b^2(x, t)$ é a taxa de variância instantânea do processo;
- c) dz é o incremento de Wiener, isto é, $dz = \epsilon\sqrt{dt}$ onde ϵ é uma variável aleatória que obedece uma distribuição normal $N(0, 1)$.

O processo de Itô apresenta as seguintes propriedades estatísticas:

- $\mathbb{E}(dx) = a(x, t)dt$;
- $\text{var}(dx) = b^2(x, t)dt$.

Lema 1.13 (Lema de Itô). *Suponhamos que a variável x siga um processo de Itô,*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz. \quad (1.1)$$

Seja f uma função que depende do processo x e do tempo, isto é, $f = f(x, t)$. Assumamos que f é uma função de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Então f segue um processo de Itô que satisfaz a seguinte equação estocástica

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dz,$$

onde dz é o mesmo processo de Wiener da equação (1.1).

Na hipótese do Lema de Itô, a taxa de *drift* e a taxa de variância do processo f são dadas por $\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 b^2$ respectivamente.

1.4.4 Hipóteses do modelo de Black-Scholes

Para obtenção do modelo, Fischer Black e Myron Scholes admitiram as seguintes hipóteses:

1. o preço da ação, S , segue um processo estocástico em tempo contínuo,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

onde z é um movimento browniano e o *drift* μ e a volatilidade σ são constantes. (S é um movimento browniano geométrico);

2. a taxa de juros de curto prazo livre de riscos r é conhecida e constante no tempo;
3. a ação não paga dividendos;
4. o mercado é perfeito;
5. é possível vender a ação a descoberto (short-selling);
6. não existem oportunidades de arbitragem sem risco.

1.4.5 Obtenção da equação diferencial de Black-Scholes

Seja $f = f(S, t)$ uma função que designa o preço de uma opção de compra europeia no tempo t para um certo valor de um ativo adjacente S . A fim de obtermos um modelo ausente de arbitragem, uma construção para a equação de Black-Scholes é feita a partir da construção de uma carteira (portfólio) contendo uma opção e uma certa quantidade $\frac{\partial f}{\partial S}$ de ações:

$$\begin{aligned} -1 : & \quad \text{opção} \\ +\frac{\partial f}{\partial S} : & \quad \text{ações.} \end{aligned}$$

Então o valor do portfólio é dado por

$$\Pi := -f + \frac{\partial f}{\partial S} S. \quad (1.2)$$

A variação do valor do portfólio entre os instantes t e $t + dt$ é dada por:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S. \quad (1.3)$$

Como S satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad (1.4)$$

pelo Lema de Itô, Lema 1.13, temos

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad (1.5)$$

As versões discretas das equações (1.4) e (1.5) são

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (1.6)$$

e

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z. \quad (1.7)$$

Substituindo as equações (1.6) e (1.7) na equação (1.3), obtemos

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S} [\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z],$$

ou seja,

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t. \quad (1.8)$$

Como a equação (1.8) não contém o termo Δz , o portfólio é sem risco durante o intervalo de tempo Δt . Assim a carteira é isenta de risco nas condições do modelo. Então, pelo princípio da não-arbitragem, o valor da variação do portfolio deve ser, instantaneamente, o mesmo valor do portfólio multiplicado pela taxa de juros livre de risco r , isto é,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t.$$

Substituindo (1.2) e (1.8) na última equação, obtemos

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t,$$

resultando em

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) é a equação diferencial parcial de Black-Scholes. Ela possui várias soluções dependendo do tipo de derivativo que pode ser definido, com S como a variável subjacente. O derivativo particular que é obtido quando a equação é resolvida depende das condições de fronteiras que são usadas. No caso da opção de compra européia, como vimos na subseção 1.3.1, a condição de contorno é

$$f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

onde T é a maturidade, K é o preço de exercício da opção (strike price) e S_T é o preço da ação subjacente na maturidade. No caso de opção de venda européia, temos

$$f(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Além dessas condições, quando $S = 0$, o valor do contrato se torna $f(0, t) = 0$ para todo $t \in]0, T[$ e $\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{f(S, t)}{S} = 1, t \in]0, T[$.

Podemos observar na equação de Black-Scholes, que o valor esperado do preço da ação não é apresentado explicitamente. O argumento econômico para esse fato é que, em virtude de existir um *hedge* perfeito para a opção, realizado sobre determinada quantidade de ações, nenhum prêmio por risco deve ser concedido ao investidor, mas somente o retorno de um ativo livre de risco.

Um ponto que devemos enfatizar sobre o portfólio utilizado na derivação da equação (1.9) é que ele não é permanentemente sem risco. Ele é sem risco somente para um período de tempo suficientemente pequeno. Como S e t variam, $\frac{\partial f}{\partial S}$ também varia. Para manter o portfólio sem risco, é necessário variar frequentemente as proporções relativas do derivativo e da ação no portfólio.

1.4.6 A fórmula do preço de uma opção de compra européia

Podemos, agora, determinar o valor de uma opção de compra européia via equação diferencial de Black-Scholes. Suponhamos que uma ação esteja sendo comercializada por um preço S . Seja K o preço de exercício da ação, isto é, o direito de comprar a ação pelo preço K na data de maturidade T . Sejam r a taxa de juros livre de risco e σ a volatilidade, ambas constantes. Vamos estabelecer o preço da opção no instante t , onde $0 \leq t \leq T$.

Para resolvermos o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(S, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rf(S, t) = 0, & t \in]0, T[, \quad S \in]0, +\infty[, \\ f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}, \\ f(0, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{f(S, t)}{S} = 1, & t \in]0, T[, \end{cases}$$

vamos transformar a equação de Black-Scholes em uma equação de difusão de calor, que pode ser resolvida utilizando métodos usuais. Para isso, façamos a seguinte mudança de variável

$$x = \ln \left(\frac{S}{K} \right)$$

e

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)$$

e escrevamos

$$f(S, t) = f \left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right) := Kv(x, \tau). \quad (1.10)$$

Como $t \in]0, T[$ e $S \in]0, +\infty[$, então $\tau \in]0, \frac{1}{2} \sigma^2 T[$ e $x \in]-\infty, +\infty[$. Daí, substituindo (1.10) na equação de Black-Scholes, obtemos

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} \right) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} v(x, \tau) = 0. \quad (1.11)$$

Definindo $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$, temos

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + (1 - A_1) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} + A_1 v(x, \tau) = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + (A_1 - 1) \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} - A_1 v(x, \tau).$$

Agora, consideremos a seguinte mudança

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

onde $\alpha = -\frac{1}{2}(A_1 - 1)$ e $\beta = -\frac{1}{4}(A_1 + 1)^2$. Então, obtemos a equação de difusão

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2},$$

cujas condições de fronteiras são:

- $u(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, 0\};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(A_1 - 1)x - \frac{1}{4}(A_1 + 1)^2 \tau\right) u(x, \tau) = 0;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x, \tau)}{\exp\left(\frac{1}{2}(A_1 + 1)x + \frac{1}{4}(A_1 + 1)^2 \tau\right)} = 1.$

Note que, em particular, a segunda condição acima implica que $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0$.

Note, também, que

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sabe-se que a solução da equação de difusão é dada por

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4\tau}\right) ds,$$

que pode ser reescrita como

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + y\sqrt{2\tau}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \quad (1.12)$$

onde

$$u_0(x + y\sqrt{2\tau}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})}, & \text{se } y \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \\ 0, & \text{se } y < -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}. \end{cases}$$

Substituindo esta expressão em (1.12), obtemos

$$u(x, \tau) = I_1(x, \tau) - I_2(x, \tau),$$

onde

$$I_1(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

e

$$I_2(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Analisando estas expressões separadamente, obtemos

$$I_1(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x + \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} N(q_1)$$

e

$$I_2(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x + \frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} N(q_2),$$

onde N é a função gaussiana dada por

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

e

$$q_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1 + 1)\sqrt{2\tau},$$

$$q_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1 - 1)\sqrt{2\tau}.$$

Lembrando que

$$u(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t),$$

$$A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$$

e

$$f(S, t) = Kv(x, \tau),$$

obtemos

$$f(S, t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2),$$

com

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq,$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Assim, acabamos de provar o resultado seguinte.

Teorema 1.14. *O valor de uma opção de compra europeia $f(S, t)$, modelada pela equação de Black-Scholes*

$$\frac{\partial f(S, t)}{\partial t} + rS \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rf(S, t) = 0,$$

com

$$\text{condição final: } f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

$$\text{condição de fronteira: } f(0, t) = 0$$

$$\text{condição assintótica: } f(S, t) \sim S, \text{ quando } S \rightarrow +\infty,$$

é dada por

$$f(S, t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2),$$

onde

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}q^2} dq,$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$q_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Integração em Espaços de Funções

2.1 Introdução

A integral de Riemann generalizada é uma adaptação da integração de Riemann usual. A idéia da integral de Riemann generalizada é apresentada como segue. Temos algum domínio que é particionado por meio de uma coleção finita de conjuntos disjuntos, $\{I\}$, os quais podemos pensar como “intervalos”, onde $|I|$ denota a medida de um intervalo I . “Encolhendo” as partições, podemos estimar a integral de Riemann de uma função $f(x)$, com x pertencente a um domínio, formando as somas de Riemann $\sum f(x)|I|$, com a soma sobre os intervalos I da partição.

Na integração de Riemann usual, em qualquer parcela $f(x)|I|$ da soma de Riemann, a única restrição na escolha do cálculo de f no ponto x é que x deve pertencer ao intervalo I correspondente na partição. A adaptação na integral de Riemann generalizada é fazer uma seleção de cada intervalo I na partição depender da escolha de cada ponto x em $\sum f(x)|I|$. Que diferença isso faz? Isso significa que podemos formar as somas de Riemann de uma maneira que ela seja sen-

sível ao comportamento local do integrando. Por exemplo, se f for uma função que oscila em uma vizinhança particular, assumindo muitos valores suficientemente grandes, positivos e negativos, nesta vizinhança, então podemos forçar os termos locais da soma de Riemann a corresponderem ao comportamento local de f . Assim, neste cenário onde f tem um valor positivo em um ponto x e um valor negativo em um ponto próximo x' , os intervalos da partição I, I' podem ser escolhidos de tal forma que a soma de Riemann $\dots + f(x)|I| + f(x')|I'| + \dots$ “capte” a variação de f . Com isto, produzimos, na soma de Riemann, um efeito de cancelamento na vizinhança de x e x' . Desta maneira, podemos definir uma integral de f , que será igual a integral de Lebesgue de f , sempre que esta última existir. Denominamos esta integral de integral de Riemann generalizada, também conhecida como integral de Henstock ou integral de Henstock-Kurzweil.

Agora, vamos considerar algumas alterações na integral usual de Henstock. Ao invés de usarmos a medida de Lebesgue do intervalo $I, |I|$, podemos utilizar uma função de intervalos cilíndricos $\mu(I)$ e a definição resultante da integral $\int f(x)\mu(I)$ por somas de Riemann continuará válida. Em um caso mais geral, ao invés de integrarmos o produto $f(x)\mu(I)$, podemos integrar funções $h(x, I)$, tomando somas de Riemann $\sum h(x, I)$, onde x depende da partição $\{I\}$ do domínio de integração.

A discussão feita acima pode ser lida de uma maneira a assumir o domínio de integração como um intervalo limitado $[a, b]$ tal que cada intervalo particionado I seja um intervalo real limitado. Entretanto, os argumentos feitos na discussão acima, continuam válidos em um domínio de integração mais geral, como o espaço multi-dimensional $\mathbb{R}^n$, no qual alguns dos intervalos particionados não são limitados ou compactos.

O problema que estudamos neste trabalho requer que consideremos uma função do deslocamento, x_t , no tempo t em algum intervalo $]\tau', \tau[$ e, também, que consideremos a possibilidade de que, em tempos arbitrários $\tau' < t_1 < \dots < t_{n-1} < \tau$, o deslocamento x_{t_j} satisfaz $u_j \leq x_{t_j} \leq v_j$, para $1 \leq j \leq n-1$; ou $x_j \in \overline{I_j}$ (fecho de I_j), onde escrevemos $I_j = [u_j, v_j[$ e $x_j = x_{t_j}$, para cada $j = 1, \dots, n-1$.

Escrevendo

$$x = (x_t)_{t \in]\tau', \tau[} \quad \text{e} \quad I = \{x : x_j \in I_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

vamos considerar somas de Riemann como $\sum f(x)\mu(I)$. A integral correspondente será denotada

por $\int f(x)\mu(I)$. O domínio de integração é o conjunto $\{x\}$, onde cada x é uma aplicação da forma

$$x :]\tau', \tau[\mapsto \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x_t = x(t) \in \mathbb{R}, \quad \text{para} \quad \tau' < t < \tau.$$

Denotamos este domínio por $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$, o qual pode ser visto como o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ por ele mesmo uma quantidade não-enumerável de vezes. Os intervalos particionados I são subconjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$, ou seja, retângulos em $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$.

A idéia da integração de Riemann generalizada em espaços de dimensão finita esboçada acima pode ser adaptada para o caso de dimensão infinita. Isto será explicado em detalhes na seção seguinte.

2.2 A integral de Henstock em espaços de funções

Seja I um intervalo real de uma das seguintes formas:

$$]-\infty, v[, \quad [u, v[\quad \text{ou} \quad [u, +\infty[. \quad (2.1)$$

Uma partição de $\mathbb{R}$ é uma coleção finita de intervalos disjuntos I cuja união é $\mathbb{R}$. Diremos que o intervalo I é **associado** a x , se tivermos

$$x = -\infty, \quad x = u \text{ ou } v, \quad \text{ou} \quad x = +\infty,$$

respectivamente.

Denotemos $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo a união do domínio de integração $\mathbb{R}$ com o conjunto dos pontos associados x do intervalo real I , isto é, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Na integração de Riemann generalizada, a convenção é que o domínio de integração seja o espaço que é particionado por intervalos. Um ponto x não é sempre um elemento do intervalo I ao qual ele é associado. Assim o conjunto dos pontos associados x podem constituir um conjunto que difere do domínio de integração. Em nosso caso, o domínio de integração é $\mathbb{R}$ e o conjunto de pontos associados é $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.1. Seja $\delta : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função positiva definida para $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Se I for associado a x , diremos que o par (x, I) é δ -fino, se

$$v < -\frac{1}{\delta(x)}, \quad v - u < \delta(x), \quad \text{ou} \quad u > \frac{1}{\delta(x)}, \quad (2.2)$$

respectivamente. Chamamos δ de função calibre.

Nesta versão de integral, os pontos associados x de um intervalo I são um de seus próprios vértices. Em outra versão (veja [16]), os pontos associados são escolhidos na união dos intervalos I com seus vértices, isto é, no fecho dos I na topologia dos intervalos abertos. Estas duas versões são equivalentes sempre que o “integrador” (medida ou função de intervalos) for finitamente aditivo, pois se x for um ponto interior do intervalo $[u, v[$, então $f(x)m([u, v]) = f(x)m([u, x]) + f(x)m([x, v])$. Veja [16].

Em outra versão (veja [12]), uma definição equivalente à integral de Lebesgue é construída, se os intervalos associados a um ponto x forem os intervalos I que satisfazem a condição $I \subseteq]x - \delta(x), x + \delta(x)[$. Neste caso, os pontos associados a um intervalo podem estar fora do fecho de I na topologia dos intervalos abertos. Em qualquer caso, porém, o domínio de integração é o espaço que é particionado por intervalos.

Se $N = \{t_1, \dots, t_n\}$ for um conjunto finito, com $\mathbb{R}_{t_j} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}_{t_j} = \overline{\mathbb{R}}$, denotaremos $x = (x(t_1), \dots, x(t_n))$ como sendo qualquer elemento do espaço

$$\prod \{\overline{\mathbb{R}}_{t_j} : t_j \in N\} = \overline{\mathbb{R}}^N.$$

Denotemos $x(t_j)$ por x_j , $1 \leq j \leq n$. Para cada $t_j \in N$, seja $I_j = I(t_j)$ um intervalo da forma (2.1). Então $I = I_1 \times \dots \times I_n$ é um intervalo do espaço $\prod \{\mathbb{R}_{t_j} : t_j \in N\} = \mathbb{R}^N$. Um par (x, I) é dito ser **associado** em $\mathbb{R}^N$, se cada par (x_j, I_j) for associado em $\mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, isto é, se x for o vértice de I em $\overline{\mathbb{R}}^N$. Dada uma função $\delta : \overline{\mathbb{R}}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$, um par associado (x, I) do domínio $\mathbb{R}^N$ é δ -**fino**, se cada par (x_j, I_j) satisfizer uma das condições dadas em (2.2), dependendo do tipo de intervalo I_j (veja (2.1)). Uma coleção finita $\mathcal{E} = \{(x_j, I_j)\}$ de pares associados (x_j, I_j) , onde cada par (x_j, I_j) é associado em $\mathbb{R}^N$, é uma **divisão** de $\mathbb{R}^N$, se os intervalos I_j forem disjuntos com união $\mathbb{R}^N$. Então a divisão será δ -**fina**, se cada par (x_j, I_j) , $1 \leq j \leq n$, for δ -fino. Uma prova da existência de uma divisão δ -fina para uma função calibre δ dada pode ser encontrada em [16], Teorema 4.1.

Seja B um conjunto infinito e seja $\mathcal{F}(B)$ a família dos subconjuntos finitos de B . No que segue, consideraremos o espaço produto $\prod_{t \in B} \mathbb{R}_t$, com $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}$ para cada $t \in B$, isto é, o conjunto de todas as funções definidas em B a valores em $\mathbb{R}$. Preferimos usar, para este produto, a notação $\mathbb{R}^B$ que é usual na teoria de processos estocásticos.

Denotemos por $x = x_B$ um elemento do espaço $\overline{\mathbb{R}}^B$. Sendo

$$N = N_B = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{F}(B),$$

seja $x(N) = x(N_B)$ um ponto $(x_1, \dots, x_n) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$ de $\overline{\mathbb{R}}^N$. Consideremos a projeção

$$P_N : \mathbb{R}^B \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad P_N(x) = (x(t_1), \dots, x(t_n)),$$

e, similarmente, a projeção $\overline{P}_N : \overline{\mathbb{R}}^B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^N$. Então, para cada intervalo $I_1 \times \dots \times I_n$ de $\mathbb{R}^N$, existem intervalos cilíndricos correspondentes $I[N] := P_N^{-1}(I_1 \times \dots \times I_n)$, os quais formam um subconjunto de $\mathbb{R}^B$. É conveniente denotarmos $I_1 \times \dots \times I_n$ por $I(t_1) \times \dots \times I(t_n)$ ou $I(N)$ de forma que $I[N] = I(N) \times \mathbb{R}^{B \setminus N}$. Similarmente, escrevemos

$$\overline{P}_N(x_B) = x(N) \in \overline{\mathbb{R}}^N, \quad \text{para } x = x_B \in \overline{\mathbb{R}}^B.$$

Dados $x \in \overline{\mathbb{R}}^B$ e $I[N] \subset \mathbb{R}^B$, dizemos que $(x, I[N])$ é **associado** em $\mathbb{R}^B$, se o par $(x(N), I(N))$ for associado em $\mathbb{R}^N$. Nosso domínio de integração é $\mathbb{R}^B$ e o conjunto dos pontos associados é $\overline{\mathbb{R}}^B$.

Definição 2.2. Uma coleção finita $\mathcal{E} = \{(x^j, I^j[N]) : x^j \in \overline{\mathbb{R}}^B \text{ e } N \in \mathcal{F}(B)\}$ de pares associados é dita ser uma divisão de $\mathbb{R}^B$, se os intervalos $I^j[N]$ forem disjuntos com união igual a $\mathbb{R}^B$. Denotaremos essa divisão por $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$.

Exemplo 2.3. Seja $N = \{t_1, t_2\} \subset \mathcal{F}(B)$. Sejam $u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_1^4, u_1^5, u_2^1, u_2^2, u_2^3, u_2^4$ e u_2^5 números reais tais que

$$u_1^1 < u_1^2 < u_1^3 < u_1^4 < u_1^5$$

e

$$u_2^1 < u_2^2 < u_2^3 < u_2^4 < u_2^5.$$

Consideremos os intervalos cilíndricos

$$\begin{aligned}
I^1[N] &= [u_1^1, u_1^3[\times [u_2^2, u_2^3[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^2[N] &= [u_1^2, u_1^4[\times [u_2^4, u_2^5[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^3[N] &= [u_1^3, u_1^5[\times [u_2^1, u_2^3[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^4[N] &= [u_1^3, +\infty[\times]0, u_2^1[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^5[N] &= [u_1^5, +\infty[\times [u_2^1, u_2^3[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^6[N] &= [u_1^4, +\infty[\times [u_2^4, +\infty[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^7[N] &= [u_1^2, u_1^4[\times [u_2^5, +\infty[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^8[N] &=]0, u_1^2[\times [u_2^4, +\infty[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^9[N] &=]0, u_1^1[\times [u_2^2, u_2^3[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^{10}[N] &=]0, u_1^3[\times]0, u_2^1[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_1, t_2\}}, \\
I^{11}[\{t_2\}] &= [u_2^3, u_2^4[\times \mathbb{R}_+^{B \setminus \{t_2\}}.
\end{aligned}$$

Temos $\bigcup_{j=1}^{11} I^j[N] = \mathbb{R}_+^B$. Tomando $x^1(N_1) = (u_1^1, u_2^2)$, $x^2(N_2) = (u_1^2, u_2^5)$, $x^3(N_3) = (u_1^5, u_2^1)$, $x^4(N_4) = (u_1^3, u_2^1)$, $x^5(N_5) = (+\infty, u_2^3)$, $x^6(N_6) = (u_1^4, +\infty)$, $x^7(N_7) = (u_1^2, u_2^5)$, $x^8(N_8) = (0, +\infty)$, $x^9(N_9) = (u_1^1, u_2^2)$, $x^{10}(N_{10}) = (u_1^3, 0)$ e $x^{11}(N_{11}) = \{u_2^3\}$, então $\{(x^j, I^j[N_j])\}_{1 \leq j \leq 11}$ é uma divisão de $\mathbb{R}_+^B$, com $N_1 = \dots = N_{10} = N$ e $N_{11} = \{t_2\}$. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1: Divisão de $\mathbb{R}_+^B$.

Divisões de intervalos cilíndricos em $\mathbb{R}^B$ são definidas de forma análoga.

Agora, vamos nos direcionar para a questão de estabelecermos uma função calibre para $\mathbb{R}^B$, isto é, uma regra que determine quais pares ponto-intervalo associados $(x, I[N])$ serão considerados, como elementos de uma divisão, para formarem uma soma de Riemann que aproxime do valor da integral em um espaço de dimensão infinita $\mathbb{R}^B$. Para fazermos isto, definiremos aplicações L_B sobre o conjuntos dos pontos associados $\overline{\mathbb{R}}^B$ do domínio de integração $\mathbb{R}^B$, e aplicações δ_B sobre $\overline{\mathbb{R}}^B \times \mathcal{F}(B)$. Isto nos dará uma classe efetiva de funções calibre.

Definimos

$$\begin{aligned} L_B : \overline{\mathbb{R}}^B &\rightarrow \mathcal{F}(B), & L_B(x) &\in \mathcal{F}(B); \\ \delta_B : \overline{\mathbb{R}}^B \times \mathcal{F}(B) &\rightarrow \mathbb{R}_+^*, & 0 < \delta_B(x, N) &< +\infty. \end{aligned}$$

Uma escolha de L_B e δ_B nos dá um membro representante das funções calibre

$$\gamma_B := (L_B, \delta_B). \quad (2.3)$$

Diremos que um par de ponto-intervalo associados $(x, I[N])$ é γ_B -fino, se tivermos

$$N \supseteq L_B(x) \quad \text{e} \quad (x(N), I(N)) \text{ for } \delta_B\text{-fino em } \mathbb{R}^N.$$

Vamos descrever, a seguir, a motivação para esta regra de formação dos intervalos que serão usados na partição do domínio de integração para as somas de Riemann da integral.

Na integração de Riemann usual, formamos somas de Riemann escolhendo partições cujos intervalos em dimensão finita possuem lados os quais são limitados por uma constante positiva δ . Então fazemos δ sucessivamente pequeno. O mesmo é feito na integração de Riemann generalizada, onde a constante δ é substituída por uma função positiva $\delta(x)$. Em qualquer caso, estamos escolhendo partições sucessivas nas quais as componentes dos intervalos “encolhem” em algum sentido. Para a situação em dimensão infinita, procuramos, de uma forma semelhante, como “encolher” os intervalos cilíndricos $I[N]$ para os quais partições sucessivas serão escolhidas.

No exemplo seguinte, mostramos diferentes maneiras pelas quais um intervalo cilíndrico pode ser um subconjunto de um intervalo cilíndrico maior e, portanto, procuramos estabelecer regras com as quais intervalos de partições sucessivas podem ser feitos sucessivamente pequenos.

Seja B um conjunto infinito de índices. Escolhamos $t_1, t_2 \in B$, $t_1 \neq t_2$, e sejam $\mathbb{R}_{t_1}$ e $\mathbb{R}_{t_2}$ os espaços coordenados correspondentes de $\prod_{t \in B} \mathbb{R}^B$. Sejam $[u_1^2, u_1^3[\subset [u_1^1, u_1^4[\subset \mathbb{R}_{t_1}$, com $u_1^1 < u_1^2 < u_1^3 < u_1^4$. Denotemos

$$I^1 = [u_1^1, u_1^4[\times \prod_{t \in B, t \neq t_1} \mathbb{R}_t = [u_1^1, u_1^4[\times \mathbb{R}^{B \setminus \{t_1\}}.$$

Então o intervalo $I^2 = [u_1^2, u_1^3[\times \mathbb{R}^{B \setminus \{t_1\}}$ é um subintervalo de I^1 no qual o lado correspondente do espaço coordenado “restrito” $\mathbb{R}_{t_1}$ é menor do que o lado correspondente de I^1 . Este tipo de “encolhimento” é familiar em integração de Riemann em dimensão finita. Conseguimos obter isso impondo a condição de que os lados dos intervalos sejam menores do que uma função positiva δ e, então, tomamos δ sucessivamente menor.

Agora, seja $[u_2^1, u_2^2[\subset \mathbb{R}_{t_2}$ e consideremos

$$I^3 = [u_1^2, u_1^3[\times [u_2^1, u_2^2[\times \mathbb{R}^{B \setminus \{t_1, t_2\}}$$

que é um subconjunto de I^2 cujos comprimentos dos lados restritos podem ser os mesmos comprimentos dos lados restritos de I^2 , mas para o qual existe uma coordenada restrita adicional correspondente ao índice t_2 . Assim, podemos “encolher” sem mudar δ , mas requerendo que o intervalo em questão contenha coordenadas restritas adicionais. E podemos fazer isso especificando algum conjunto minimal de coordenadas nas quais o intervalo deve ser restrito. Fazemos este conjunto minimal $L(x)$ depender do ponto associado x do intervalo em questão, exatamente como fazemos com a restrição $\delta(x)$ do comprimento dos lados. O intervalo pode ser restrito na coordenada adicional fora do conjunto minimal. Assim os lados podem ser tão pequenos quanto desejarmos, desde que seus comprimentos sejam limitados por $\delta(x)$. Então podemos obter o “encolhimento” dos intervalos aumentando, sem limite, o tamanho do conjunto minimal, assim como podemos obter um “encolhimento” fazendo decrescer o comprimento de $\delta(x)$ que limita os comprimentos dos lados restritos.

Podemos fazer ambos os procedimentos de encolhimento acima: maior número de coordenadas restritas bem como lados menores. Se B for finito, não poderemos aumentar $L(x)$ sem limite. Neste caso, teremos $L(x) = B$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}^B$. Então a definição de função calibre se reduz ao caso já descrito em dimensão finita.

Definição 2.4. Uma divisão $\mathcal{E} = \{(x, I[N]) : x \in \overline{\mathbb{R}}^B \text{ e } N \in \mathcal{F}(\mathcal{B})\}$ do domínio de integração é γ_B -fina, ou é uma γ_B -divisão, se cada um dos pares $(x, I[N])$ for γ_B -fino. Neste caso, denotamos $\mathcal{E}$ por $\mathcal{E}_{\gamma_B}$.

O espaço $\mathbb{R}^B$ admite uma γ_B -divisão, onde γ_B é dada. Este resultado é enunciado a seguir e uma prova para ele pode ser encontrada em [14], Teorema 1.

Teorema 2.5. Para qualquer conjunto infinito B e para qualquer função calibre γ_B dada, existe uma divisão γ_B -fina de $\mathbb{R}^B$.

Suponhamos que h seja uma função que depende dos pares associados $(x, I[N])$. Às vezes, $h(x, I[N])$ não é definida para um certo ponto $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^B$ (ou $\overline{\mathbb{R}}^B$) como, por exemplo, para aqueles x tais que $x(t) = 0$ ou ∞ , para $t \in N$. Neste caso, podemos tomar $h(x, I[N])$ como sendo zero e esses termos são omitidos da soma de Riemann.

Se E denotar um conjunto elementar (isto é, um intervalo ou uma união finita de intervalos), então a **variação** de h em E será dada por

$$\inf_{\gamma_B} \left\{ \sup_{\mathcal{E}_{\gamma_B}} \{ |h(x, I[N])| \} \right\},$$

onde $\mathcal{E}_{\gamma_B}$ é qualquer γ_B -divisão de E . Em geral, se X for qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^B$, a **variação** de h em $\mathbb{R}^B$ relativa à X será dada por

$$\inf_{\gamma_B} \left\{ \sup_{\mathcal{E}_{\gamma_B}} \{ |h(x, I[N])| 1_X(x) \} \right\}$$

onde $1_X(x)$ é a função característica ou função indicadora de X e $\mathcal{E}_{\gamma_B}$ é qualquer γ_B -divisão de $\mathbb{R}^B$. Diremos que h é de **variação limitada** em X , se sua variação em X for finita. Diremos que h é VBG* (ou h é de **variação limitada generalizada** em $\mathbb{R}^B$), se $\mathbb{R}^B$ for uma união de conjuntos disjuntos X_j , com h sendo de variação limitada em cada X_j , $j = 1, 2, \dots$

A integral de Riemann generalizada de uma função h de um par associado $(x, I[N])$ é definida como segue (veja [24]).

Definição 2.6. A função h é Riemann integrável generalizada sobre $\mathbb{R}^B$, com integral $\alpha = \int_{\mathbb{R}^B} h$, se dado $\epsilon > 0$, existir uma função calibre γ_B tal que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_B}} h(x, I[N]) - \alpha \right| < \epsilon$$

para toda γ_B -divisão $\mathcal{E}_{\gamma_B}$ de $\mathbb{R}^B$.

Às vezes, integramos funções $h(I[N])$ que não dependem dos pontos associados x das variáveis $I[N]$. Em integração de Riemann generalizada, isto deve ser manuzeado com cuidado. Devemos pensar no integrando como $h(I[N]) = h(x, I[N])$ para todo x associado a $I[N]$. Assim, embora a variável x não apareça explicitamente no integrando, os termos $\sum h(I[N])$ da soma de Riemann ainda dependem dos x 's da divisão $\{(x, I[N])\}$ que determina a soma de Riemann.

Duas funções $h_1(x, I[N])$ e $h_2(x, I[N])$ são **variacionalmente equivalentes** em $\mathbb{R}^B$, se $h_1 - h_2$ tiver variação zero em $\mathbb{R}^B$ ([24], página 32). É fácil mostrar que h_1 é variacionalmente equivalente a h_2 , se dado $\epsilon > 0$, existir uma função calibre γ_B tal que, para toda divisão $\mathcal{E}_{\gamma_B}$, tenhamos

$$\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_B}} |h_1(x, I[N]) - h_2(x, I[N])| < \epsilon.$$

Se h_1 for integrável em $X \subseteq \mathbb{R}^B$ e se h_2 for variacionalmente equivalente a h_1 , então h_2 será integrável em X , com $\int_X h_1 = \int_X h_2$ (veja [24], Proposição 18, página 32 para uma prova). Este resultado é importante pois, às vezes, gostaríamos de estabelecer uma propriedade para $\int_X h_1$, e é mais fácil fazermos isto primeiramente para a integral $\int_X h_2$, onde h_2 é “equivalente”, no sentido variacional, a h_1 .

2.3 Propriedades da Integral

Em [24], P. Muldowney faz todo o tratamento teórico da integral de Riemann generalizada em espaços de dimensão infinita. Várias propriedades desta integral são demonstradas em [24]. A seguir, listamos algumas destas propriedades.

Consideremos E um conjunto elementar, isto é, um intervalo ou uma união finita de intervalos em $\mathbb{R}^B$.

Proposição 2.7. *Seja $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Suponhamos que h_1 e h_2 sejam funções Riemann integráveis generalizadas em E , então:*

1. $h_1 + h_2$ é Riemann integrável generalizada em E e $\int_E (h_1 + h_2) = \int_E h_1 + \int_E h_2$;
2. ah_1 é Riemann integrável generalizada em E e $\int_E ah_1 = a \int_E h_1$;
3. Se $h_1 \leq h_2$, então $\int_E h_1 \leq \int_E h_2$.

Demonstração: Sejam α_1 e α_2 respectivamente os valores das integrais de h_1 e h_2 em E .

1. Como h_1 e h_2 são integráveis em E , dado $\epsilon > 0$, existem funções calibres $\gamma_1 = (L_1, \delta_1)$ e $\gamma_2 = (L_2, \delta_2)$ tais que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda γ_1 -divisão $\mathcal{E}_{\gamma_1}$ de E , e

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_2}} h_2(x, I[N]) - \alpha_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda γ_2 -divisão $\mathcal{E}_{\gamma_2}$ de E . Consideremos

$$\gamma = (L, \delta),$$

onde $L = L_1 \cup L_2$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$\left| \left(\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} h_1(x, I[N]) + \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} h_2(x, I[N]) \right) - (\alpha_1 + \alpha_2) \right| < \epsilon.$$

2. Se $a = 0$, o resultado segue. Suponhamos $|a| \neq 0$. Pela integrabilidade de h_1 , dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre $\gamma = (L, \delta)$ tal que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1 \right| < \frac{\epsilon}{2|a|}$$

para toda γ_1 -divisão $\mathcal{E}_{\gamma_1}$ de E . Então, para esta função calibre, temos

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} ah_1(x, I[N]) - a\alpha_1 \right| \leq |a| \left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e o resultado segue.

3. Usando as notações e a função calibre $\gamma = (L, \delta)$ do item 1., temos

$$\alpha_1 - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} h_1(x, I[N]) \leq \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} h_2(x, I[N]) < \alpha_2 + \frac{\epsilon}{2},$$

isto é,

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Portanto $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Com isto, a prova da proposição está completa. ■

O próximo resultado trata do Critério de Cauchy para integrais em espaços de funções.

Proposição 2.8. *A função h será integrável em E no sentido da integral Riemann generalizada se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existir uma função calibre η_ϵ tal que, se $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ forem divisões η_ϵ -finas de E , então teremos*

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \epsilon.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja H a integral de h em E . Dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre $\gamma_\epsilon = (L_\epsilon, \delta_\epsilon)$ tal que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_\epsilon}} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $\bar{\delta}_\epsilon = \frac{\delta_\epsilon}{2}$ e $\eta_\epsilon = (L_\epsilon, \bar{\delta}_\epsilon)$, então para quaisquer divisões $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ η_ϵ -finas de E , valem

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função calibre $\gamma_n = (L_n, \delta_n)$ tal que, se $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ forem divisões γ_n -finas de E , então

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \frac{1}{n}.$$

Podemos supor que $\delta_n(x, N) \geq \delta_{n+1}(x, N)$, para todo $(x, N) \in \overline{E} \times \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário, poderíamos substituir δ_n por $\delta'_n(x, N) = \min\{\delta_1(x, N), \dots, \delta_n(x, N)\}$. Supomos também que $L_{n+1}(x) \supseteq L_n(x)$, com $x \in \overline{E}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{E}_n$ uma divisão γ_n -fina de E . Se $m > n$, então $\mathcal{E}_m$ também será uma divisão γ_n -fina de E . Logo, vale

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_n} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_m} h(x, I[N]) \right| < \frac{1}{n},$$

para $m > n$. Conseqüentemente, a seqüência $\left\{ \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_m} h(x, I[N]) \right\}_{m \geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja H_1 seu limite. Fazendo $m \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_n} h(x, I[N]) - H_1 \right| < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}$ satisfazendo $K > \frac{2}{\epsilon}$. Se $\mathcal{E}$ for uma divisão γ_K -fina, então teremos

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} h(x, I[N]) - H_1 \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_K} h(x, I[N]) \right| + \left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_K} h(x, I[N]) - H_1 \right| < \\
&< \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon.
\end{aligned}$$

e a prova está completa. ■

Proposição 2.9. *Se h for Riemann integrável generalizada em E , então h será Riemann integrável generalizada em P , para cada $P \subseteq E$.*

Demonstração: Como h é integrável em E , dado $\epsilon > 0$, existe uma função calibre $\gamma = (L, \delta)$ tal que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} h(x, I[N]) - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

para toda γ -divisão $\mathcal{E}_\gamma$ de E . Para cada $P \subseteq E$, temos $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma^1 \cup \mathcal{E}_\gamma^2$ tal que $\mathcal{E}_\gamma^1$ é uma divisão de P e $\mathcal{E}_\gamma^2$ é uma divisão de $E \setminus P$. Seja, agora, $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma^3 \cup \mathcal{E}_\gamma^2$ tal que $\mathcal{E}_\gamma^3$ é uma γ -divisão de P . Sejam

$$\alpha = \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma^1} h(x, I[N]),$$

$$\beta = \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma^3} h(x, I[N])$$

e

$$\xi = \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma^2} h(x, I[N]).$$

Então

$$\left| \alpha + \xi - \int_E h \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \beta + \xi - \int_E h \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, vale

$$|\alpha - \beta| < \epsilon,$$

isto é,

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma^1} h(x, I[N]) - \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma^3} h(x, I[N]) \right| < \epsilon,$$

onde $\mathcal{E}_\gamma^1$ e $\mathcal{E}_\gamma^3$ são quaisquer partições de P . Portanto, o resultado segue pela Proposição 2.3.2. ■

O resultado seguinte é uma versão do teorema da convergência dominada de Lebesgue em espaços de funções. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [24], Proposição 33.

Teorema 2.10. *Suponhamos que, para cada par de associados $(x, I[N])$, a sequência $h_j(x, I[N])$, $j = 1, 2, 3, \dots$, seja uma sequência real de funções Riemann integráveis generalizadas em E que é convergente para a função $h(x, I[N])$, quando $j \rightarrow +\infty$. Suponhamos que $g_0(x, I[N])$ seja uma função real positiva definida em I, x, N , que é Riemann integrável generalizada em E . Suponhamos ainda que, dado $\epsilon > 0$, existam uma função calibre γ_1 e um número inteiro $j_0 = j_0(x, I[N]) > 0$ tais que*

$$|h(x, I[N]) - h_j(x, I[N])| < \epsilon g_0(x, I[N]),$$

para quaisquer $j > j_0$ e $(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}$. Se $g_1(x, I[N])$ e $g_2(x, I[N])$ forem funções Riemann integráveis generalizadas em E , e existir uma função calibre γ_2 tal que

$$g_1(x, I[N]) \leq h_j(x, I[N]) \leq g_2(x, I[N]),$$

para cada j e para cada par de associados γ_2 -fins, $(x, I[N])$, então h será integrável no sentido da integral de Riemann generalizada em E e

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_E h_j(x, I[N]) = \int_E h(x, I[N]).$$

2.4 A integral de Wiener

Se $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau$ e x_t for uma função de posição de uma partícula que segue um movimento browniano, então a probabilidade de que esta partícula, com posição inicial zero, seja encontrada em $u_j \leq x_j < v_j$, no tempo t_j , $1 \leq j \leq n-1$, e em ξ , no tempo τ , é

$$w(I) = \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \rho(x_1, t_1) \rho(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \rho(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

onde

$$\rho(x_j - x_{j-1}, t_j - t_{j-1}) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right)$$

para todo $1 \leq j \leq n$, onde $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ e D é o coeficiente de difusão que depende da viscosidade média e das dimensões da partícula, e contém o número de Avogadro.

N. Wiener [35] mostrou que esta função de intervalos, $w(I)$, produz uma medida no espaço C das funções contínuas x definidas em $]0, \tau[$, com $x(0) = 0$ e $x(\tau) = \xi$.

Em [18], M. Kac mostrou que se U for uma função positiva contínua da função de posição e $u(x) = \exp\left(-\int U(x(t))dt\right)$, $x \in C$, então $\int_C u(x)dw$ existirá e $\phi(\xi, \tau) = \int_C u(x)dw$ satisfará uma equação análoga à equação de Schrödinger e à equação de difusão. Este assunto foi tratado em [24] usando integração em espaço de funções.

A seguir, apresentaremos com detalhes este tratamento feito por P. Muldowney em [24].

Consideremos $\mathbb{R}^{]0, \tau[}$ o espaço das funções a valores reais x definidas em $]0, \tau[$, com $x(0) = 0$ e $x(\tau) = \xi$, onde $\xi \in \mathbb{R}$. Sejam $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau$, $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ e $x(t_j) = x_j$, $0 \leq j \leq n$, tal que $x_0 = 0$ e $x_n = \xi$. Definamos $I(t_j) = I_j = [u_j, v_j[$ e $\Delta I_j = v_j - u_j$, $1 \leq j \leq n-1$. Seja $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in I_1 \times \dots \times I_{n-1}$. Definamos, agora, as seguintes funções:

$$w(x, N) = \prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right) \prod_{j=1}^n [2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-1/2},$$

$$w(I, x, N) = w(x, N) \prod_{j=1}^n \Delta I_j$$

e

$$w(I, N) = \int_{I_{n-1}} \dots \int_{I_1} w(y, N) dy_1 \dots dy_{n-1}. \quad (2.4)$$

A prova do lema seguinte é imediata.

Lema 2.11. *Sejam $a, b, u, v \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b > 0$, e consideremos, também, a função $h(\alpha)$ dada por*

$$h(\alpha) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(u-\alpha)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b(\alpha-v)^2}.$$

Então h é Riemann integrável e vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(u-\alpha)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b(\alpha-v)^2} d\alpha = \sqrt{\frac{ab}{\pi(a+b)}} \exp\left(-\frac{ab}{a+b}(u-v)^2\right).$$

Observação 2.1. No Exemplo 2.3, apresentado na Seção 2.2 deste capítulo, o conjunto N para o qual o par associado $(x, I[N])$ pertence à divisão $\mathcal{E}$ não é o mesmo para todos os pares associados. De fato, temos $N = \{t_2\}$ para o par $(x, I^{11}[N])$, enquanto $\{t_1, t_2\}$ é o conjunto N para os demais intervalos, digamos, $I_1, I_2, \dots, I_{10}$. Tomando $M = \cup\{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}\} = \{t_1, t_2\}$, podemos representar a soma de Riemann $\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} w(I, N)$ como $\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} w(I, M)$, onde

$$\begin{aligned} & \sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} w(I, M) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_1 - t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - y_1)^2}{t_2 - t_1}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_3 - y_2)^2}{t_3 - t_2}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3 - t_2)}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

De fato, pelo Lema 2.11, temos

$$\begin{aligned} \int_{I_{11}} w(I, N) &= \int_{u_2^3}^{u_2^4} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - y_0)^2}{t_2 - t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_0)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_3 - y_2)^2}{t_3 - t_2}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3 - t_2)}} dy_2 = \\ &= \int_{u_2^3}^{u_2^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_1 - t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - y_1)^2}{t_2 - t_1}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_3 - y_2)^2}{t_3 - t_2}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3 - t_2)}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Portanto, basta utilizarmos a propriedade de aditividade da integral.

A função $w(I, N)$ dada por (2.4) é Riemann integrável generalizada em todo intervalo elementar $E \subseteq \mathbb{R}^{[0, \tau]}$, como mostra o próximo resultado.

Teorema 2.12. A função de Wiener $w(I, N)$ definida em (2.4) é Riemann integrável generalizada em todo intervalo elementar $E \subseteq \mathbb{R}^{[0, \tau]}$. Em particular, vale

$$\int_{\mathbb{R}^{[0, \tau]}} w(I, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right).$$

Demonstração: Consideremos uma divisão $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$ de $\mathbb{R}^{[0, \tau]}$, onde $N \in \mathcal{F}([0, \tau])$. Então a soma de Riemann da função $w(I, N)$ é dada por

$$\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} w(I, N) = \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} \int_{I_{n-1}} \dots \int_{I_1} w(y, N) dy_1 \dots dy_{n-1}.$$

Seja $M = \cup\{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}\}$ e enumeremos M como $\{t_1, \dots, t_{m-1}\}$, onde $\tau' = t_0$, $\tau = t_m$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m$.

Cada termo de $w(I, N)$ na soma de Riemann pode ser reescrito como $w(I, M)$. Basta inserirmos expressões adicionais “ y_j ” na expressão de $w(y, N)$ e integrarmos de $-\infty$ a $+\infty$ nos y_j ’s extras. Então a soma de Riemann torna-se

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} w(I, M) = \sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} \int_{I_{m-1}} \dots \int_{I_1} w(y, M) dy_1 \dots dy_{m-1},$$

onde M é um conjunto fixo de dimensões. Note que, agora, estamos lidando com uma soma de Riemann de uma integral em dimensão $m - 1$. Assim cada termo na soma de Riemann é uma integral sobre $I[M] \subset \mathbb{R}^{m-1}$ e, pela aditividade finita desta integral em $\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} w(I, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(y, M) dy_1 \dots dy_{m-1}. \quad (2.5)$$

Pelo Lema 2.11, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(y, M) dy_1 \dots dy_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right).$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, para qualquer função calibre γ , se $(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma$, com $L(x) \subseteq N$, então teremos

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} w(I, N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right) \right| < \epsilon.$$

Portanto $\int_{\mathbb{R}^{[0, \tau[}} w(I, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right)$ e a prova está completa. ■

Como consequência da Proposição 37 em [24], as funções $w(I, x, N)$ e $w(I, N)$ são variacionalmente equivalentes.

Suponhamos que U seja uma função a valores reais definida em $\mathbb{R}$. Para $N = \{t_1, \dots, t_{n-1}\} \subseteq]0, \tau[$ e $x \in \mathbb{R}^{[0, \tau[}$, seja

$$U_j = U(x_j) = U(x(t_j)), \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Definamos

$$u(x, N) = \exp\left(-\sum_{j=1}^n U_{j-1}(t_j - t_{j-1})\right)$$

e

$$u(I, N) = \int_{I(N)} u(x, N) w(x, N) dx(N).$$

Para $\eta > 0$, $0 \leq \sigma - \tau < \eta$, $0 \leq |\zeta - \xi| < \eta$, consideremos

$$h(\zeta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma - t_{n-1})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\zeta - x_{n-1})^2}{\sigma - t_{n-1}} - U_{n-1}(\sigma - t_{n-1}) \right),$$

$$W_1(I, x, N) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp \left(-\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}} + U_{j-1}(t_j - t_{j-1}) \right] \right) \Delta I(N)$$

e

$$W_2(I, x, N; \zeta, \sigma) = h(\zeta, \sigma) W_1(I, x, N).$$

Em [24], P. Muldowney provou que $\phi(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{[0, \tau[}} u(I, N)$ é uma representação de Feynman-Kac da solução de

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - U(\xi) \phi,$$

desde que $U \geq 0$ seja contínua em ξ , $W_2(I, x, N; \zeta, \sigma)$ seja Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{[0, \tau[}$ para $0 \leq \sigma - \tau < \eta$, $0 \leq |\zeta - \xi| < \eta$ e a derivada parcial $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ exista.

No próximo capítulo, vamos estender estes resultados para processos com impulsos.

Integral de Wiener para um processo com impulsos

3.1 Introdução

Quando um processo browniano está submetido a condições de impulsos, onde, em momentos de tempos específicos τ_k , o processo sofre saltos de tamanho J_k , obtemos o seguinte processo impulsivo

$$z = \{z_t\} = \{z(t) : t \in]\tau', \tau[], \quad \text{onde} \quad z(t) = x(t) + \sum_{\tau_k \leq t} J_k.$$

Assim, somos levados a considerar a seguinte medida

$$\mu(I) = \int_{I_1} \cdots \int_{I_{n-1}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(z_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}}}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right) dy_1 \cdots dy_{n-1},$$

onde $z_j = y_j + J_j$, se t_j for um dos instantes τ_k , e $z_j = y_j$ caso contrário.

Neste capítulo, consideraremos a função volume $\mu(I)$ para um processo impulsivo $\{z_t\}$ correspondente à função de Wiener $w(y, N)$, provaremos que esta função é integrável no sentido da integral de Riemann generalizada em um espaço de funções e estudaremos algumas propriedades de funções que dependem de um processo com impulsos.

3.2 A Função volume para um processo com impulsos

Seja $\{x_t\}_{t \geq 0}$ um movimento browniano. Suponhamos que, no instante $t_{j-1} > 0$, a função de posição seja $x_{j-1} = x(t_{j-1})$. Assim, para um instante posterior t_j , o incremento $x_j - x_{j-1}$ é dado por uma distribuição normal, com média zero e variância $t_j - t_{j-1}$. Portanto a probabilidade de que $x_j = x(t_j) \in [u_j, v_j[$ será

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \int_{u_j}^{v_j} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right) dy_j.$$

Logo, dado $x(t_0) = \xi'$, a probabilidade conjunta de que $x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n$, onde $I_j = [u_j, v_j[$, $1 \leq j \leq n$, será dada por

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} dy_1 \dots dy_n. \quad (3.1)$$

Assim, em movimento browniano, somos levados a considerar expressões da forma

$$\prod_{j=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}}. \quad (3.2)$$

No que segue, apresentaremos uma versão para as expressões (3.1) e (3.2), quando o movimento browniano estiver sujeito a condições de impulsos em alguns momentos de tempo.

Consideremos o operador impulso $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo uma função contínua. Sejam τ', τ números reais tais que $0 < \tau' < \tau$ e $N = \{t_1, \dots, t_{n-1}\} \subset]\tau', \tau[$, onde $\tau' = t_0$ e $\tau = t_n$. Suponhamos que $\mathcal{I} = \{\tau_1, \dots, \tau_p\} \subset N$, onde $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p$. Então, $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\} = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_p}\}$, onde $i_j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ para $1 \leq j \leq p$. Sejam $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\mathcal{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$, definamos um processo $z \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$ da seguinte forma

$$z(t) = x(t), \quad \text{para } \tau' < t < \tau_1, \quad (3.3)$$

$$z(t) = x(t) + \sum_{\tau_j \leq t} J(x(\tau_j)), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.4)$$

onde $\tau_{p+1} := \tau$. A Figura 3.1, ilustra o comportamento do processo impulsivo $z(t)$, $\tau' < t < \tau$, onde $x \in C(]\tau', \tau[)$, sendo $C(]\tau', \tau[)$ o subconjunto de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$.

Figura 3.1: Processo $z \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$.

Definamos, agora, a função volume para um processo impulsivo. Para isso, definamos, primeiramente, a função para um processo impulsivo correspondente à função de Wiener $w(y, N)$, representada por $g_I(y, N)$ e dada por

$$\prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \prod_{j \in \mathcal{J}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - (y_{j-1} - J(y_j)))^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}}$$

que é igual a

$$\prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \prod_{j \in \mathcal{J}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(J(y_j) + y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}}. \quad (3.5)$$

Definição 3.1. Sejam $I(t_j) = I_j = [u_j, v_j]$, $\Delta I_j = v_j - u_j$, $1 \leq j \leq n-1$ e $I(N) = I_1 \times \dots \times I_{n-1}$. A função volume para um processo com impulsos nos instantes $\tau_1, \dots, \tau_p$ é definida por

$$Q_I(I[N]) = \int_{I(N)} g_I(y, N) dy(N).$$

Seja $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ a valores reais. Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{Z} = \left\{ J \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(J(y_j) + y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right) dy_j = 1, j = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $J(w) = \alpha$, para cada $w \in \mathbb{R}$, então $J \in \mathcal{Z}$. Portanto, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$.

Definição 3.2. *Sejam $J \in \mathcal{Z}$ e z um processo impulsivo dado pelas equações (3.3) – (3.4). Então $Q_{\mathcal{I}}(I[N])$ será uma função distribuição de probabilidades, ou seja, a probabilidade de $x_j \in I_j$, para $1 \leq j \leq n - 1$, com $x(\tau') = \xi'$ e $x(\tau) = \xi$.*

Se (x, I) for um par de associados, onde $I = I[N]$, então definimos

$$G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = Q_{\mathcal{I}}(I[N]).$$

E nosso objetivo, agora, é mostrar que a função $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é integrável no sentido da integral de Riemann generalizada em $\mathbb{R}^{] \tau', \tau[}$. Para provarmos isso, vamos mostrar um resultado auxiliar.

Primeiramente, recordemos a versão do Teorema de Tonelli para integrais de Riemann generalizadas, que será útil no próximo resultado. Veja [36], Teorema 6.6.5, para uma prova deste resultado.

Teorema 3.3. *Seja J um intervalo em $\overline{\mathbb{R}}^n$, com $J = H \times K$, onde H e K pertencem a $\overline{\mathbb{R}}^l$ e a $\overline{\mathbb{R}}^m$ respectivamente, $n = l + m$. Seja f uma função definida em $\overline{\mathbb{R}}^n$. Se as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) *f é mensurável em J ;*

ii) *existe uma função g tal que $|f| \leq g$ em J e*

$$A_1 = \int_H \left(\int_K g(x, y) dy \right) dx < \infty$$

ou

$$A_2 = \int_K \left(\int_H g(x, y) dx \right) dy < \infty,$$

então f será Riemann integrável generalizada em J e

$$\iint_J f = \int_H \left(\int_K f(x, y) dy \right) dx.$$

Temos o seguinte corolário do Teorema de Tonelli ([36], Corollary 6.6.7).

Corolário 3.4. *Se f for uma função mensurável e não-negativa, então*

$$\iint_J f = \int_H \left(\int_K f(x, y) dy \right) dx = \int_K \left(\int_H f(x, y) dx \right) dy.$$

desde que uma das integrais existam.

Agora, consideremos as seguintes funções auxiliares $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \times]\tau', \tau[\longrightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]\tau', \tau[\longrightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, p-1$, definidas por

$$\phi_1(y_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - \tau')}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y_k - \xi')^2}{t_k - \tau'} \right),$$

para $k \in \{1, 2, \dots, i_1 - 1\}$,

$$\phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau - t_{i_p})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi - y_{i_p})^2}{\tau - t_{i_p}} \right)$$

e

$$\Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y_{i_{j+1}-1} - y_{i_j})^2}{t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j}} \right),$$

para $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Analogamente, definamos $\phi_1(J(y_k), t_k)$ para $k \in \mathcal{J}$ substituindo y_k por $J(y_k) + y_k$ na expressão de $\phi_1(y_k, t_k)$, e definamos $\Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$ substituindo $y_{i_{j+1}-1}$ por $J(y_{i_{j+1}}) + y_{i_{j+1}}$ e $t_{i_{j+1}-1}$ por $t_{i_{j+1}}$ na expressão de $\Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1})$, para $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

A seguinte Proposição 3.5 diz que, dado $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, a função $g_{\mathcal{I}}(y, N)$ definida pela equação (3.5) é Riemann integrável generalizada com respeito a y em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Proposição 3.5. *Seja $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\} \subset]\tau', \tau[$ um conjunto fixado, com $t_0 = \tau'$ e $t_n = \tau$. Seja $g_{\mathcal{I}}$ uma função definida como em (3.5), onde $y(\tau') = y(t_0) = \xi'$ e $y(\tau) = y(t_n) = \xi$. Então $g_{\mathcal{I}}$ é Riemann integrável generalizada com respeito a y em $\mathbb{R}^{n-1}$ e*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathcal{I}}(y, N) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) \prod_{j=1}^p dy_{i_j}. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\mathcal{I} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\} = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_p}\}$, com $i_j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ para $1 \leq j \leq p$. Consideremos

$$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, i_1 - 1, i_1, i_1 + 1, \dots, i_p - 1, i_p, i_p + 1, \dots, n - 1, n\}.$$

Com isto, definimos as seguintes funções

$$\psi_j(y_j, y_{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right), \quad j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J},$$

e

$$\varphi_j(y_j, y_{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(J(y_j) + y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right), \quad j \in \mathcal{J}.$$

Pelo Lema 2.11, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(y_1, y_0) \dots \psi_{i_1-1}(y_{i_1-1}, y_{i_1-2}) dy_1 \dots dy_{i_1-2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1-1} - \tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_{i_1-1} - \xi')^2}{t_{i_1-1} - \tau'}\right) = \phi_1(y_{i_1-1}, t_{i_1-1}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i_j+1}(y_{i_j+1}, y_{i_j}) \dots \psi_{i_{j+1}-1}(y_{i_{j+1}-1}, y_{i_{j+1}-2}) dy_{i_j+1} \dots dy_{i_{j+1}-2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_{i_{j+1}-1} - y_{i_j})^2}{t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j}}\right) = \Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$j = 1, 2, \dots, p-1$, e

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i_p+1}(y_{i_p+1}, y_{i_p}) \dots \psi_n(y_n, y_{n-1}) dy_{i_p+1} \dots dy_{n-1} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau - t_{i_p})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi - y_{i_p})^2}{\tau - t_{i_p}}\right) = \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim, tomando $t_{i_p+\ell} := t_{n-1}$, $\ell \in \mathbb{N}$, das equações (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(y, N) \left[\prod_{j=1}^{i_1-2} dy_j \right] \left[\prod_{j=1}^{p-1} dy_{i_j+1} \dots dy_{i_{j+1}-2} \right] \prod_{j=1}^{\ell} dy_{i_p+j} = \\ & = \phi_1(y_{i_1-1}, t_{i_1-1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \varphi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}) \Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}) \right] \varphi_{i_p}(y_{i_p}, y_{i_p-1}) \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pelo Lema 2.11, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(y_{i_1-1}, t_{i_1-1}) \varphi_{i_1}(y_{i_1}, y_{i_1-1}) dy_{i_1-1} = \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) \quad (3.10)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}) \varphi_{i_{j+1}}(y_{i_{j+1}}, y_{i_{j+1}-1}) dy_{i_{j+1}-1} = \\ = \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}), \quad j = 1, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(y, N) \prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}} dy_j = \\ = \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora, definamos funções $f, F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) = \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p})$$

e

$$F(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) = \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) f(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}).$$

Então F é contínua, $|F(y_{i_1}, \dots, y_{i_p})| \leq \frac{f(y_{i_1}, \dots, y_{i_p})}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')}} e$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_{i_1}, \dots, y_{i_p})}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')}} dy_{i_1} \dots dy_{i_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')}}.$$

Pelo Teorema de Tonelli (Teorema 3.3), a função F é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^p$ e a integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} F(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) dy_{i_1} \dots dy_{i_p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$$

é finita. Então, da equação (3.12), segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(y, N) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) dy_{i_1} \dots dy_{i_p} < \infty.$$

Pelo Corolário do Teorema de Tonelli (Corolário 3.4), podemos concluir que $g_{\mathcal{I}}(y, N)$ é integrável com respeito a y em $\mathbb{R}^{n-1}$ e vale

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathcal{I}}(y, N) dy_1 \dots dy_{n-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(y, N) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) \prod_{j=1}^p dy_{i_j}, \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Agora, apresentaremos o resultado que estabelece a integrabilidade de $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ no espaço de funções $\mathbb{R}^{] \tau', \tau[}$.

Teorema 3.6. *A função $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é Riemann integrável generalizada, isto é, a integral*

$$\int_{\mathbb{R}^{] \tau', \tau[}} G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$$

existe.

Demonstração: Consideremos uma divisão $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$ de $\mathbb{R}^{] \tau', \tau[}$, onde cada N escolhido é tal que $\mathcal{I} \subseteq N \in \mathcal{F}(] \tau', \tau[)$. Então a soma de Riemann de $G_{\mathcal{I}}$ é dada por

$$\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} Q_{\mathcal{I}}(I[N]).$$

Seja $M = \cup \{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}\}$ e enumeremos M como $\{t_1, \dots, t_{m-1}\}$, onde $\tau' = t_0$, $\tau = t_m$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m$. Cada termo $Q_{\mathcal{I}}(I[N])$ da soma de Riemann pode ser reescrito como $Q_{\mathcal{I}}(I[M])$; basta inserirmos y_j 's adicionais na expressão de $g_{\mathcal{I}}$, $j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}$, e integrarmos de $-\infty$ a $+\infty$ sobre os y_j 's extras. Então a soma de Riemann torna-se

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} Q_{\mathcal{I}}(I[M]),$$

com M sendo um conjunto fixo de dimensões. Desta maneira, estamos lidando com uma soma de Riemann de uma integral em $m - 1$ dimensões. Logo, cada termo da soma de Riemann é uma

integral sobre $I[M] \subset \mathbb{R}^{m-1}$ e, pela propriedade de aditividade finita desta integral em $\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} Q_{\mathcal{I}}(I[M]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(y, M) dy_1 \dots dy_{m-1}. \quad (3.13)$$

Pela Proposição 3.5, a integral em (3.13) existe e podemos reescrever

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} Q_{\mathcal{I}}(I[M])$$

como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) \prod_{j=1}^p dy_{i_j}. \quad (3.14)$$

Seja β o valor da integral em (3.14). Assim, dado $\epsilon > 0$, para qualquer função calibre γ escolhida tal que $L(x) \supseteq \mathcal{I}$, para todo $(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}$, $\mathcal{I} \subseteq L(x) \subseteq N$ implica que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) - \beta \right| < \epsilon.$$

Portanto $\int_{\mathbb{R}^{|\tau'|, \tau|}} G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = \beta$ e a prova está completa. ■

Mostraremos, a seguir, que as expressões $g_{\mathcal{I}}(x, N) \prod_{j=1}^{n-1} \Delta I_j$ e $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ são variacionalmente equivalentes em $\mathbb{R}^{|\tau'|, \tau|}$. Este resultado será consequência da Proposição 3.7, que apresentamos na sequência.

Definamos a função auxiliar $q_{\mathcal{I}}(I(N))$ por

$$q_{\mathcal{I}}(I(N)) = g_{\mathcal{I}}(x, N) \prod_{j=1}^{n-1} \Delta I_j.$$

Se (x, I) for um par de associados, onde $I = I(N)$, então definimos

$$q_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = q_{\mathcal{I}}(I(N)).$$

Proposição 3.7. *Seja $k(x(N)) = k(x(t_1), \dots, x(t_{n-1}))$ uma função real que depende das variáveis $(x(t_1), \dots, x(t_{n-1}))$. Se k for contínua em cada x_j , $1 \leq j \leq n-1$, então as expressões $k(x(N))q_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ e $\int_{I(N)} k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N)$ serão variacionalmente equivalentes em $\mathbb{R}^{|\tau'|, \tau|}$, sempre que a integral de uma delas existir.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como o operador impulso J é uma função contínua, para $x \in \mathbb{R}^{] \tau', \tau]}$, podemos escolher $L(x)$ e $\delta(x, N)$ tais que, se $N \supseteq L(x) \supseteq \mathcal{I}$, $(I(N), x(N))$ for δ -fina e se $y \in I(N)$, então teremos

$$|k(x(N))g_{\mathcal{I}}(x, N) - k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)| < \frac{\epsilon}{4}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')}g_{\mathcal{I}}(x, I)$$

e

$$g_{\mathcal{I}}(y, N) > \frac{1}{2}g_{\mathcal{I}}(x, N).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left| k(x(N))q_{\mathcal{I}}(x, I[N]) - \int_{I(N)} k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N) \right| = \\ & = \left| k(x(N))g_{\mathcal{I}}(x, N) \prod_{j=1}^{n-1} \Delta I_j - \int_{I(N)} k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N) \right| = \\ & = \left| \int_{I(N)} [k(x(N))g_{\mathcal{I}}(x, N) - k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)] dy(N) \right| \leq \\ & \leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')} \int_{I(N)} g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N). \end{aligned}$$

Assim, podemos escolher uma função calibre γ tal que, para toda divisão $\mathcal{E}_{\gamma}$, vale

$$\begin{aligned} & \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} \left| k(x(N))q_{\mathcal{I}}(x, I[N]) - \int_{I(N)} k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N) \right| \leq \\ & \leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')} \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} \int_{I(N)} g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N) = \\ & = \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \tau')} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N) < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{] \tau', \tau]}} k(x(N))q_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{] \tau', \tau]}} \int_{I(N)} k(y(N))g_{\mathcal{I}}(y, N)dy(N)$$

e a prova está completa. ■

Corolário 3.8. As expressões $q_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ e $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ são variacionalmente equivalentes em $\mathbb{R}^{] \tau', \tau]}$.

Definição 3.9. Dado $\tau' < T_1 < \tau$, definamos o conjunto

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[} : x \text{ é descontínua em } T_1\}.$$

Pretendemos mostrar que $\int_{D_1} G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ existe e é igual a zero. Este resultado será útil no próximo capítulo.

Antes, porém, precisamos estabelecer alguns resultados auxiliares.

Definição 3.10. Seja $M = \{T_1, \dots, T_m\} \subset]\tau', \tau[$. Dizemos que um funcional h que satisfaz $h(x) = h(x(M))$ para todo $x \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$ é um funcional cilíndrico.

Note que h depende somente dos valores das coordenadas de x em $T_1, \dots, T_m$, e podemos tratar isso como uma função de $x(M) \in \mathbb{R}^m$ ou como uma função de $x \in \mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$.

Consideremos o caso particular em que $M = \{T_1, T_2\}$ e $h(x) = h(x(M))$. Definimos $H_{\mathcal{I}}(I[N])$ como sendo o valor da integral

$$\int_{I(N)} h(x(M)) g_{\mathcal{I}}(x, N) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Se $\tau_i < T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, $\tau_0 = \tau'$ e $\tau_{p+1} = \tau$, definamos

$$\begin{aligned} H_1(x, M) = h(x(M)) & \left(\prod_{j=1}^i \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_1} - x_{\tau_i})^2}{T_1 - \tau_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1 - \tau_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{T_1})^2}{T_2 - T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_{i+1}} + J(x_{\tau_{i+1}}) - x_{T_2})^2}{\tau_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_{i+1} - T_2)}} \times \\ & \times \left(\prod_{j=i+2}^p \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau} - x_{\tau_p})^2}{\tau - \tau_p}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_p)}} \end{aligned}$$

e, se $T_1 = \tau_i$ e $T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, definamos

$$H_2(x, M) = h(x(M)) \prod_{j=1}^i \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{\tau_i})^2}{T_2 - \tau_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - \tau_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_{i+1}} + J(x_{\tau_{i+1}}) - x_{T_2})^2}{\tau_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_{i+1} - T_2)}} \times \\ & \times \prod_{j=i+2}^p \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau} - x_{\tau_p})^2}{\tau - \tau_p}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_p)}}. \end{aligned}$$

O próximo teorema estabelece condições sobre $H_1(x, M)$ e $H_2(x, M)$ para que a função $H_{\mathcal{I}}(I[N])$ seja Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$.

Teorema 3.11. *Suponhamos que h , uma função de $x(M) = (x(T_1), x(T_2)) \in \mathbb{R}^2$, seja positiva e contínua em quase toda parte.*

1. *Se $\tau_i < T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ e $H_1(x, M)$ for Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{p+2}$ com respeito às variáveis $x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_i}, x_{T_1}, x_{T_2}, x_{\tau_{i+1}}, \dots, x_{\tau_p}$, então $H_{\mathcal{I}}(I[N])$ será Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$, e*

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+2}} H_1(x, M) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p}.$$

2. *Se $T_1 = \tau_i$ e $T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ e $H_2(x, M)$ for Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{p+1}$ com respeito às variáveis $x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_i}, x_{T_2}, x_{\tau_{i+1}}, \dots, x_{\tau_p}$, então $H_{\mathcal{I}}(I[N])$ será Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$, e*

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} H_2(x, M) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p}.$$

Demonstração: Provemos o item 1. Seja $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$ uma divisão de $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$, onde cada N é tal que $\mathcal{I} \subseteq N \in \mathcal{F}(\tau', \tau]$. Seja

$$H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \int_{I(N)} h(x(M)) g_{\mathcal{I}}(x, N) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Tomemos $\mathcal{O} = \cup\{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}\}$ e enumeremos $\mathcal{O}$ como $\{t_1, \dots, t_{r-1}\}$, onde $\tau' = t_0$, $\tau = t_r$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r$. Como na prova do Teorema 3.6, cada termo $H_{\mathcal{I}}(I[N])$ da soma de Riemann pode ser reescrito como $H_{\mathcal{I}}(I[\mathcal{O}])$. Assim, pela aditividade finita da integral, a soma de

Riemann torna-se

$$\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}} H_{\mathcal{I}}(I[\mathcal{O}]) = \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}} \int_{I(\mathcal{O})} h(x(M)) g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}} \int_{I(\mathcal{O})} h(x(M)) g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h(x(M)) g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} = \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, M) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p}, \end{aligned}$$

onde a passagem $(*)$ segue do Lema 2.11 e Corolário 3.4.

Seja β o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, M) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p}.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher uma função calibre γ tal que, para toda divisão $\mathcal{E}_\gamma$, tenhamos

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} H_{\mathcal{I}}(I[N]) - \beta \right| < \epsilon.$$

Portanto $\int_{\mathbb{R}^{] \tau', \tau[}} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \beta$.

Analogamente, prova-se o item 2. ■

Definição 3.12. *Seja $\tau' < T_1 < \tau$ e seja $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^{] \tau', \tau[} : x \text{ é descontínua em } T_1\}$. Dado T_2 tal que $\tau' < T_2 < \tau$, $T_2 \neq T_1$, definimos*

$$X^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{] \tau', \tau[} : \limsup_{T_2 \rightarrow T_1} |x(T_2) - x(T_1)|^2 \geq 1 \right\},$$

$$X^j = \left\{ x \in \mathbb{R}^{] \tau', \tau[} : \frac{1}{j} \leq \limsup_{T_2 \rightarrow T_1} |x(T_2) - x(T_1)|^2 \leq \frac{1}{j-1} \right\},$$

$j = 2, 3, \dots$

Lema 3.13. *Sendo $D^r = \bigcup_{j=1}^r X^j$, temos $D_1 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} D^r$.*

Provaremos, a seguir, que $G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é Riemann integrável generalizada em D^r , com integral igual a zero e, então, concluiremos que esta função é Riemann integrável generalizada em D_1 , com integral igual a zero.

Lema 3.14. Para $r = 1, 2, 3, \dots$, $\int_{D^r} G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ existe e é igual a zero.

Demonstração: Suponhamos que $T_1 \notin \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_i < T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, $\tau_0 = \tau'$ e $\tau_{p+1} = \tau$. Note que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_{T_2} - x_{T_1})^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{T_1})^2}{T_2 - T_1}\right) dx_{T_1} = \\ & = \frac{2(T_2 - T_1)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp(-u^2) du = \frac{2(T_2 - T_1)}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \\ & = \frac{2(T_2 - T_1)}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = T_2 - T_1 = |T_2 - T_1|. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_{T_2} - x_{T_1}|^2}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}} \prod_{j=2}^i \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_1} - x_{\tau_i})^2}{T_1 - \tau_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1 - \tau_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{T_1})^2}{T_2 - T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_{i+1}} + J(x_{\tau_{i+1}}) - x_{T_2})^2}{\tau_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_{i+1} - T_2)}} \prod_{j=i+2}^p \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(J(x_{\tau_j}) + x_{\tau_j} - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau} - x_{\tau_p})^2}{\tau - \tau_p}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_p)}} dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p} = \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}}. \end{aligned}$$

Seja ς o valor desta última integral. Consideremos $h(x(M)) = (x_{T_2} - x_{T_1})^2$ na expressão de $H_1(x, M)$. Então, pelo item 1. do Teorema 3.11, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}] \tau', \tau[} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{T_2} - x_{T_1}|^2 \prod_{j=1}^i \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_1} - x_{\tau_i})^2}{T_1 - \tau_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1 - \tau_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{T_1})^2}{T_2 - T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \times \\
& \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_{i+1}} + J(x_{\tau_{i+1}}) - x_{T_2})^2}{\tau_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_{i+1} - T_2)}} \prod_{j=i+2}^p \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \times \\
& \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau} - x_{\tau_p})^2}{\tau - \tau_p}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_p)}} dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p} \\
& \leq \varsigma = \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}} ,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do Teorema de Tonelli (Teorema 3.3).

Dados $\epsilon > 0$ e $j \in \mathbb{N}$, podemos escolher T_2 e uma divisão $\mathcal{E}_\gamma$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{j} & > \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma} H_{\mathcal{I}}(I[N]) \stackrel{(*)}{=} \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}_\gamma} \int_{I(\mathcal{O})} (x_{T_2} - x_{T_1})^2 g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} \geq \\
& \geq \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}_\gamma} \chi(X^j, x) \int_{I(\mathcal{O})} (x_{T_2} - x_{T_1})^2 g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} \geq \\
& \geq \frac{1}{j} \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}_\gamma} \chi(X^j, x) \int_{I(\mathcal{O})} g_{\mathcal{I}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} = \\
& = \frac{1}{j} \sum_{(x, I[\mathcal{O}]) \in \mathcal{E}_\gamma} \chi(X^j, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[\mathcal{O}]).
\end{aligned}$$

O símbolo $\mathcal{O}$ na passagem $(*)$ é dado por $\mathcal{O} = \cup\{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma\}$. Como ϵ é arbitrário,

$\int_{\mathbb{R}^{|\tau'|, \tau|}} \chi(X^j, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots$. Então, pela propriedade de aditividade

finita da integral, $\int_{\mathbb{R}^{|\tau'|, \tau|}} \chi(D^r, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = 0$.

Se $T_1 \in \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$, então $T_1 = \tau_i$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Consideremos $T_1 < T_2 < \tau_{i+1}$.

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_{T_2} - x_{\tau_i}|^2}{\sqrt{2\pi(T_2 - \tau_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{\tau_i})^2}{T_2 - \tau_i}\right) dx_{\tau_i} = |T_2 - T_1|$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_{T_2} - x_{T_1}|^2}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}} \prod_{j=2}^i \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{T_2} - x_{\tau_i})^2}{T_2 - \tau_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - \tau_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(J(x_{\tau_{i+1}}) + x_{\tau_{i+1}} - x_{T_2})^2}{\tau_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_{i+1} - T_2)}} \times \\
& \times \prod_{j=i+2}^p \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau_j} + J(x_{\tau_j}) - x_{\tau_{j-1}})^2}{\tau_j - \tau_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_j - \tau_{j-1})}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{\tau} - x_{\tau_p})^2}{\tau - \tau_p}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_p)}} \times \\
& \times dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p} = \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau)}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} H_{\mathcal{I}}(I[N]) \leq \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}},$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} H_{\mathcal{I}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} H_2(x, M) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_i} dx_{T_2} dx_{\tau_{i+1}} \dots dx_{\tau_p}$$

com $h(x(M)) = (x_{T_2} - x_{T_1})^2$ na expressão de $H_2(x, M)$. O resto da prova segue por um argumento análogo. ■

Teorema 3.15. *A integral $\int_{D_1} G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ existe e é igual a zero.*

Demonstração: Note que $D_1 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} D^r$ e $D^r \subset D^{r+1}$. Para cada par de associados $(x, I[N])$, definamos

$$f_k(x, I[N]) = \chi(D^k, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[N]), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Dado $x \in D_1$, existe um inteiro positivo k_0 tal que $x \in D^k$, para $k \geq k_0$. Assim $\chi(D^k, x) = \chi(D_1, x)$, para $k \geq k_0$. Consequentemente, para cada par de associados $(x, I[N])$, teremos

$$f_k(x, I[N]) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(x, I[N]),$$

onde $f_0(x, I[N]) = \chi(D^1, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[N])$. Note que

$$|f_0(x, I[N])| \leq G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) \quad \text{e} \quad |f_k(x, I[N])| \leq G_{\mathcal{I}}(x, I[N]), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 > 0$ tal que

$$|f_0(x, I[N]) - f_k(x, I[N])| < \epsilon G_{\mathcal{I}}(x, I[N]),$$

para $k > k_1$ e para todo par de associados $(x, I[N])$. Pelo Teorema 3.6, $G_I(x, I[N])$ é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$. Pelo Teorema 2.10, f_0 é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[$ e vale

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} f_0(x, I[N]) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} f_k(x, I[N]).$$

Daí, usando o Lema 3.14, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau[} \chi(D^1, x) G_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = 0,$$

o que termina a demonstração. ■

Uma equação diferencial do tipo Schrödinger com impulsos

4.1 Introdução

Neste capítulo, investigaremos sistemas nos quais um processo impulsivo

$$z = \{z_t\} = \{z(t) : t \in]\tau', \tau[\}, \quad \text{onde} \quad z(t) = x(t) + \sum_{\tau_i \leq t} J_i,$$

está sujeito a uma força externa que produz uma manifestação adicional no processo em questão. Representaremos esta força externa pela função potencial V , que depende da função de posição $z(t)$ em qualquer momento de tempo t .

Uma função de estado, $\phi(\xi, \tau)$, que descreve a evolução desde sistema, com $\xi := x(\tau)$, é freqüentemente obtida como uma solução de uma equação de difusão parabólica apropriada e, às

vezes, esta solução possui uma representação do tipo Feynman-Kac

$$\phi(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{[\tau', \tau[}} f(x) \mu(I).$$

Investigaremos um método para determinarmos a função $\phi(\xi, \tau)$ e mostraremos como as discontinuidades de ϕ estão relacionadas com os impulsos do processo z .

Nossa investigação é restrita a uma função impulso J , que é determinística e depende da função de posição $z(t)$. Os impulsos ocorrem em tempos pré-fixados τ_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Finalizaremos este capítulo apresentando um exemplo que ilustra a teoria em questão, exibindo o valor explícito de ϕ quando os impulsos e a função V são constantes.

4.2 Uma equação de difusão para um processo impulsivo

Iniciaremos esta seção apresentando o conceito de solução para uma equação diferencial parcial com impulsos. Tais conceitos, que apresentamos a seguir, foram inspirados nos conceitos apresentados por J. Luo em [22].

Suponhamos que $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < \tau$ sejam números dados e $\tau \in]0, +\infty[$. Definamos

$$\Delta = \mathbb{R} \times [0, \tau],$$

$$\Gamma_k = \{(\psi, t) : \psi \in \mathbb{R}, t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[\}, \quad 0 \leq k \leq p-1,$$

$$\bar{\Gamma}_k = \{(\psi, t) : \psi \in \mathbb{R}, t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[\}, \quad 0 \leq k \leq p-1,$$

$$\Gamma_p = \{(\psi, t) : \psi \in \mathbb{R}, t \in]\tau_p, \tau[\},$$

$$\bar{\Gamma}_p = \{(\psi, t) : \psi \in \mathbb{R}, t \in [\tau_p, \tau[\},$$

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^p \Gamma_k \quad \text{e} \quad \bar{\Gamma} = \bigcup_{k=0}^p \bar{\Gamma}_k.$$

Representemos por $\mathcal{K}(\Delta, \mathbb{R})$ a classe das funções $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- i) as funções $u|_{\Gamma_k}$, $k = 0, 1, \dots, p$ são contínuas.
- ii) para cada k , $k = 1, \dots, p$, o limite $\lim_{(\nu, t) \rightarrow (\psi, \tau_k^-)} u(\nu, t) = u(\psi, \tau_k^-)$, $\psi \in \mathbb{R}$, existe.
- iii) para cada k , $k = 1, \dots, p$, o limite $\lim_{(\nu, t) \rightarrow (\psi, \tau_k^+)} u(\nu, t) = u(\psi, \tau_k^+)$, $\psi \in \mathbb{R}$, existe.

Consideremos a seguinte equação diferencial parcial do tipo Schrödinger definida para todo $(\psi, t) \in \Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\psi, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} u(\psi, t) + V(\psi) u(\psi, t) = 0, \quad (4.1)$$

e sujeita à condição de impulso

$$u(\psi, \tau_k) - u(\psi, \tau_k^-) = \mathbb{I}(\psi, \tau_k, u(\psi, \tau_k)), \quad (4.2)$$

para $k = 1, 2, \dots, p$, onde $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais.

Definição 4.1. Diremos que uma função $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema (4.1) – (4.2) se as seguintes condições estiverem satisfeitas

- i) $u \in \mathcal{K}(\Delta, \mathbb{R})$;
- ii) as derivadas $u_t(\psi, t)$, $u_{\psi\psi}(\psi, t)$ existem para cada $(\psi, t) \in \Gamma$;
- iii) u satisfaz (4.1) em Γ e satisfaz (4.2) em cada τ_k , $k = 1, 2, \dots, p$.

Consideremos $U_{\mathcal{I}}$ como sendo uma função com valores reais definida em $\mathbb{R}$ que admite derivada de segunda ordem.

Dados $s \in]\tau', \tau[$ e $\varsigma \in \mathbb{R}$, seja $N^{(\sigma)} = \{t_1, \dots, t_{r-1}\}$, onde $t_0 = \tau'$ e $t_r = s$. Definamos

$$v_{\mathcal{I}}(N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s) = \int_{I(N^{(s)})} g_{\mathcal{I}}(y, N^{(s)}) e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')} dy(N^{(s)})$$

e

$$q_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}) = g_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}) \prod_{j=1}^{r-1} \Delta I_j.$$

Lembremos que $I(N^{(s)}) = [u_1, v_1[\times \dots \times [u_{r-1}, v_{r-1}[$ e $\Delta I_j = v_j - u_j$, $1 \leq j \leq r-1$.

Assim, definamos a função

$$W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s) = q_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)})e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')}.$$

Se $W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$ for Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau'}, s[$, então definiremos

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, s[} W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s).$$

Notemos que o domínio de integração é $\mathbb{R}]^{\tau'}, s[$ ao invés de $\mathbb{R}]^{\tau'}, \tau'[$ e os elementos $x, N^{(s)}$ e $I^{(s)}$ são tomados em $\mathbb{R}]^{\tau'}, s[$.

Pela prova que P. Muldowney fez na Proposição 41, [24], podemos concluir que as expressões $W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$, $v_{\mathcal{I}}(N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$ e $e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')}G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}])$ são variacionalmente equivalentes em $\mathbb{R}]^{\tau'}, s[$. Portanto, temos o resultado seguinte.

Proposição 4.2. *As seguintes igualdades são válidas*

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, s[} v_{\mathcal{I}}(N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s) = \int_{\mathbb{R}]^{\tau'}, s[} e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')}G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}]),$$

sempre que uma das integrais existir.

Consideremos a seguinte equação diferencial do tipo Schrödinger em Γ

$$\frac{\partial}{\partial s}u(\varsigma, s) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2}u(\varsigma, s) + V(\varsigma)u(\varsigma, s) = 0, \quad (4.3)$$

onde $V(\varsigma) = -\frac{1}{2}\left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma)\right]$, sujeita à condição de impulso

$$u(\xi_k, \tau_k) - u(\xi_k, \tau_k^-) = \mathbb{I}(\xi_k, \tau_k, u(\xi_k, \tau_k)), \quad (4.4)$$

onde $x(\tau_k) = \xi_k$ para cada $k = 1, 2, \dots, p$, e

$$\mathbb{I}(\xi_1, \tau_1, u(\xi_1, \tau_1)) = A_1,$$

com

$$A_1 = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_{i_1}+J(x_{i_1})-\xi')^2}{\tau_1-\tau'} - U_{\mathcal{I}}(\xi_1)(\tau_1-\tau')\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_1-\tau')}} - \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_{i_1}-\xi')^2}{\tau_1-\tau'} - U_{\mathcal{I}}(\xi_1)(\tau_1-\tau')\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_1-\tau')}}$$

e

$$\mathbb{I}(\xi_k, \tau_k, u(\xi_k, \tau_k)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} A \times B dx_{i_1} \dots dx_{i_{k-1}}, \quad \text{if } 2 \leq k \leq p$$

com

$$A = \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}} \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right),$$

e

$$B = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_k} + J(x_{i_k}) - x_{i_{k-1}})^2}{t_{i_k} - t_{i_{k-1}}} - U_{\mathcal{I}}(\xi_k)(\tau_k - \tau') \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_k} - t_{i_{k-1}})}} +$$

$$- \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_k} - x_{i_{k-1}})^2}{t_{i_k} - t_{i_{k-1}}} - U_{\mathcal{I}}(\xi_k)(\tau_k - \tau') \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_k} - t_{i_{k-1}})}}.$$

Nosso objetivo é provar que a função $\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ é solução do problema (4.3) – (4.4), para $\tau' < s < \tau$ e $\varsigma \in \mathbb{R}$.

Antes, porém, vamos provar a integrabilidade da função $W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$ e estudar a continuidade da função $\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$.

Proposição 4.3. *Sejam $\tau' < s < \tau$ e $x(s) = \varsigma$. Então a função $W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$ é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}]^{\tau', s[$ e*

$$\int_{\mathbb{R}]^{\tau', s[} W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s) =$$

$$= e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{r(s)+1} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}} \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}},$$

onde $t_{i_0} = t_0 = \tau'$, $r(s) = \max \{j : j \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ e } t_{i_j} < s\}$ e $t_{i_{r(s)+1}} = s$.

Demonstração: Como $U_{\mathcal{I}}$ é contínua em ς , dado $\epsilon > 0$, o Teorema 3.15 nos diz que, para $x \in \mathbb{R}]^{\tau', s[$ contínuo em s , podemos escolher $L(x)$ de maneira que

$$N^{(s)} = \{t_1, \dots, t_{r-1}\} \supseteq L(x) \supseteq \mathcal{I}$$

implica na seguinte desigualdade

$$\left| e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')} - e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')} \right| < \frac{\epsilon}{\varphi(\varsigma, s)},$$

onde

$$\varphi(\varsigma, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{r(s)+1} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}} \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}.$$

Pela Proposição 3.5, $0 < \varphi(\varsigma, s) < +\infty$, para todo $s \in]\tau', \tau[$ e todo $\varsigma \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.6, temos

$$\int_{\mathbb{R}] \tau', s[} G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}]) = \varphi(\varsigma, s).$$

Então podemos escolher uma função calibre γ tal que, para cada divisão γ -fina, $\mathcal{E}_\gamma$, vale

$$\left| \sum_{(x, I[N^{(s)}]) \in \mathcal{E}_\gamma} \left[e^{-U_{\mathcal{I}}(x_{r-1})(s-\tau')} G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}]) - e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')} G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}]) \right] \right| < \\ < \frac{\epsilon}{\varphi(\varsigma, s)} \sum_{(x, I[N^{(s)}]) \in \mathcal{E}_\gamma} G_{\mathcal{I}}(x, I[N^{(s)}]) < \frac{\epsilon}{\varphi(\varsigma, s)} (\epsilon + \varphi(\varsigma, s)),$$

donde obtemos o resultado. ■

Como consequência da Proposição 4.3, temos o resultado seguinte.

Corolário 4.4. *A função $\phi_{\mathcal{I}}$ satisfaz a condição dada em (4.4).*

A seguir, mostraremos um resultado que determina a continuidade da função $\phi_{\mathcal{I}}$ nos intervalos onde não há impulsos.

Proposição 4.5. *Sejam $s \in]\tau', \tau[\setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ e $\varsigma \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|s_1 - s| < \delta$ e $|\varsigma_1 - \varsigma| < \delta$, então $|\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma_1, s_1) - \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)| < \epsilon$.*

Demonstração: Seja $s \in]\tau', \tau[\setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_k < s < \tau_{k+1}$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, onde $\tau_0 = t_0 = \tau'$ e $\tau_{p+1} = \tau$. Então existe um $\delta > 0$ tal que $]s - \delta, s + \delta[\subset]\tau_k, \tau_{k+1}[$. Pela Proposição 4.3, vale

$$\phi_{\mathcal{I}}(\psi, \beta) = e^{-U_{\mathcal{I}}(\psi)(\beta-\tau')} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{k+1} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$

para todo $\beta \in]s - \delta, s + \delta[$ e para todo $\psi \in \mathbb{R}$, onde $t_{i_0} = \tau'$, $t_{i_{k+1}} = \beta$, $x(\tau') = \xi'$, $x(\beta) = \psi$ e $J(x_{i_{k+1}}) = 0$. Dado $\beta \in]s - \delta, s + \delta[$, $\beta \neq s$, consideremos as seguintes expressões

$$\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - x_{i_k})^2}{s - t_{i_k}}\right)}{\sqrt{2\pi(s - t_{i_k})}}$$

e

$$\omega_{\mathcal{I}}(\psi, \beta) = e^{-U_{\mathcal{I}}(\psi)(\beta - \tau')} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\psi - x_{i_k})^2}{\beta - t_{i_k}}\right)}{\sqrt{2\pi(\beta - t_{i_k})}}.$$

Como $U_{\mathcal{I}}$ é contínua, então $\omega_{\mathcal{I}}(\psi, \beta) \rightarrow \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ quando $\psi \rightarrow \varsigma$ e $\beta \rightarrow s$. Note que $\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) > 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$, tal que

$$|\omega_{\mathcal{I}}(\psi, \beta) - \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)| < \epsilon \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s).$$

sempre que $0 < |\psi - \varsigma| < \delta_1$ e $0 < |\beta - s| < \delta_1$. Pelo teorema da convergência dominada (Teorema 2.10), obtemos

$$\phi_{\mathcal{I}}(\psi, \beta) \rightarrow \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s),$$

quando $\psi \rightarrow \varsigma$ e $\beta \rightarrow s$. Portanto o resultado está provado. ■

O próximo resultado diz que $\phi_{\mathcal{I}}$ admite limites laterais nos pontos $\tau_1, \dots, \tau_p$.

Teorema 4.6. *Sejam $x(\tau_k) = \xi_k$, para $k = 1, 2, \dots, p$. Então os limites*

$$\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^+)} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) \quad e \quad \lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^-)} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$$

existem para cada $k = 1, 2, \dots, p$.

Demonstração: Seja $s = \tau_k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que, $\tau_{k-1} < s - \delta < s + \delta < \tau_{k+1}$. Pela Proposição 4.3, temos

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, \tau_k + \delta) &= e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(\tau_k + \delta - \tau')} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - \xi_k)^2}{\delta}\right)}{\sqrt{2\pi\delta}} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\left(\prod_{j=1}^k \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - \xi_k)^2}{\delta}\right)}{\sqrt{2\pi\delta}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - t_{i_0})}} \right) \left(\prod_{j=2}^k \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - \xi_k)^2}{\delta}\right)}{\sqrt{2\pi\delta}}.$$

Definamos α como sendo o lado direito da desigualdade acima. Então a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$$

existe e seu valor é igual a $\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - t_{i_0})}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}}.$ Assim,

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, \tau_k + \delta) \leq \frac{e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(\tau_k + \delta - \tau')}}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}}.$$

Portanto o limite $\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^+)} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ existe.

Notemos, agora, que

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, \tau_k - \delta) &= e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(\tau_k - \delta - \tau')} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - \xi_{k-1})^2}{(\tau_k - \delta - \tau_{k-1})}\right)}{\sqrt{2\pi(\tau_k - \delta - \tau_{k-1})}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{k-1}}. \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos acima, obtemos

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, \tau_k - \delta) \leq \frac{e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(\tau_k - \delta - \tau')}}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \delta - \tau')}} \quad \text{se } k = 1$$

e

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, \tau_k - \delta) \leq \frac{e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(\tau_k - \delta - \tau')}}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}} \quad \text{se } k = 2, 3, \dots, p.$$

Assim, o limite $\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^-)} \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ também existe. ■

Na prova da Proposição 4.5, definimos $\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ por

$$\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')} \left(\prod_{j=1}^{r(s)} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - x_{i_{r(s)}})^2}{s - t_{i_{r(s)}}}\right)}{\sqrt{2\pi(s - t_{i_{r(s)}})}},$$

para $\tau' < s < \tau$ tal que $s \neq \tau_j$, para cada $j = 1, 2, \dots, p$, $\varsigma \in \mathbb{R}$. Notemos, também, que

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}$$

As derivadas parciais $\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s}$ e $\frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2}$ são dadas a seguir:

$$\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} = -U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) - \frac{1}{2(s - t_{i_{r(s)}})} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right)^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s),$$

$$\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma} = -\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) - \frac{(\varsigma - x_{i_{r(s)}})}{s - t_{i_{r(s)}}} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2} = & \left[-\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') + [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 + 2\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \right] \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) + \\ & - \frac{1}{s - t_{i_{r(s)}}} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) + \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right)^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2} = \rho(\varsigma, s) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s), \quad (4.5)$$

$$\text{onde } \rho(\varsigma, s) = \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right].$$

O próximo resultado diz que $\rho(\varsigma, s) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ é Riemann integrável generalizada.

Proposição 4.7. *Sejam $\tau' < s < \tau$, com $s \neq \tau_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, p$, e $x(s) = \varsigma$. Então a função $\rho(\varsigma, s) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ é Riemann integrável generalizada e*

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varsigma, s) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right] \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s). \end{aligned}$$

Demonstração: É suficiente provarmos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = 0.$$

De fato. Notemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - x_{i_{r(s)}})^2}{s - t_{i_{r(s)}}} \right)}{\sqrt{2\pi(s - t_{i_{r(s)}})}} dx_{i_{r(s)}} = 0.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \kappa(\varsigma, s) &= e^{-U_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s-\tau')} \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \left(\prod_{j=1}^{r(s)-1} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + J(x_{i_j}) - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}} \right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_{r(s)}} - t_{i_{r(s)-1}})}} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\varsigma - x_{i_{r(s)}})^2}{s - t_{i_{r(s)}}} \right)}{\sqrt{2\pi(s - t_{i_{r(s)}})}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini ([36], Teorema 6.6.3), obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = 0.$$

Como

$$0 \leq \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) \leq \kappa(\varsigma, s) \quad \text{ou} \quad \kappa(\varsigma, s) \leq \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) \leq 0,$$

segue do Teorema de Tonelli (Teorema 3.3) que $\left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ é Riemann integrável generalizada e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varsigma - x_{i_{r(s)}}}{s - t_{i_{r(s)}}} \right) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = 0.$$

Portanto temos o resultado desejado. ■

Pela Proposição 4.7, a expressão $\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2}$ na equação (4.5) é Riemann integrável generalizada e

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2} \right) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right] \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s). \end{aligned}$$

Agora, o problema é mostrarmos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}$$

de onde concluiremos que

$$\frac{\partial \phi_{\mathcal{I}}}{\partial s}(\varsigma, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{I}}}{\partial \varsigma^2}(\varsigma, s) - \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right] \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = 0$$

para cada $(\varsigma, s) \in \Gamma$. Para provarmos isso, introduziremos algumas notações adicionais a seguir.

Consideremos $f(\varsigma, s)$, e definamos

$$D_{abc}f(\varsigma, s) = \frac{1}{a}f_a(\varsigma, s) - \frac{1}{2bc}f_{bc}(\varsigma, s),$$

onde

$$f_a(\varsigma, s) = f(\varsigma, s + a) - f(\varsigma, s)$$

e

$$f_{bc}(\varsigma, s) = f(\varsigma + b + c, s) - f(\varsigma + b, s) - f(\varsigma + c, s) + f(\varsigma, s)$$

para a, b, c números reais não-nulos quaisquer. Então

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}f(\varsigma, s)$$

existirá e será igual a

$$\frac{\partial f}{\partial s}(\varsigma, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varsigma^2}(\varsigma, s)$$

se, e somente se, as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial \varsigma^2}$$

existirem.

No caso em que $f = \omega_{\mathcal{I}}$, as derivadas $\frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s}, \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2}$ existem. Então

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \frac{\partial \omega_{\mathcal{I}}}{\partial s}(\varsigma, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_{\mathcal{I}}}{\partial \varsigma^2}(\varsigma, s) = \rho(\varsigma, s)\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s). \quad (4.6)$$

Pela Proposição 4.7, o limite $\lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)$ é Riemann integrável generalizado e

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right] \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Daí, se provarmos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\ & = \lim_{a,b,c \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{abc}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}, \end{aligned}$$

então concluiremos que $\frac{\partial \phi_{\mathcal{I}}}{\partial s}$ e $\frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{I}}}{\partial \varsigma^2}$ existem.

O próximo teorema mostra a existência das derivadas $\frac{\partial \phi_{\mathcal{I}}}{\partial s}$ e $\frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{I}}}{\partial \varsigma^2}$.

Teorema 4.8. *Sejam $\tau' < s < \tau$, onde $s \neq \tau_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, p$, e $x(s) = \varsigma$. Então as derivadas parciais $\frac{\partial \phi_{\mathcal{I}}}{\partial s}(\varsigma, s)$ e $\frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{I}}}{\partial \varsigma^2}(\varsigma, s)$ existem para cada $(\varsigma, s) \in \Gamma$.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela equação (4.6), podemos escolher $\mu > 0$ tal que se $0 < |\alpha| < \mu$, $0 < |\beta| < \mu$ e $0 < |\gamma| < \mu$, então

$$|D_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) - \rho(\varsigma, s)\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)| < \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)\epsilon.$$

Dados x, N, I , escolhamos α_0, β_0 e γ_0 satisfazendo $0 < \alpha_0 < \mu$, $0 < \beta_0 < \mu$ e $0 < \gamma_0 < \mu$ e tais que

$$\sup_{\substack{0 < |\alpha| < \alpha_0 \\ 0 < |\beta| < \beta_0 \\ 0 < |\gamma| < \gamma_0}} |D_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) - \rho(\varsigma, s)\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)| < \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s).$$

Como $0 < |\alpha| < \alpha_0$, $0 < |\beta| < \beta_0$ e $0 < |\gamma| < \gamma_0$, então

$$-\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) \leq D_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) - \rho(\varsigma, s)\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) \leq \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s).$$

Daí, pelo teorema da convergência dominada (Teorema 2.10), obtemos

$$\lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varsigma, s) \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right] \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \\
&\stackrel{(4.7)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} D_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}}.
\end{aligned}$$

E, como

$$\lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \frac{\partial \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s)}{\partial \varsigma^2},$$

o teorema está provado. ■

Assim, concluímos o resultado seguinte.

Teorema 4.9. *A função*

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \int_{\mathbb{R}] \tau', s[} W_{\mathcal{I}}(x, N^{(s)}, I^{(s)}; \varsigma, s)$$

satisfaz a equação diferencial do tipo Schrödinger em Γ

$$\frac{\partial}{\partial s} u(\varsigma, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2} u(\varsigma, s) + V(\varsigma) u(\varsigma, s) = 0,$$

onde $V(\varsigma) = -\frac{1}{2} \left[\ddot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau') - [\dot{U}_{\mathcal{I}}(\varsigma)(s - \tau')]^2 - 2U_{\mathcal{I}}(\varsigma) \right]$, sujeita à condição de impulso

$$u(\xi_k, \tau_k) - u(\xi_k, \tau_k^-) = \mathbb{I}(\xi_k, \tau_k, u(\xi_k, \tau_k)),$$

onde $x(\tau_k) = \xi_k$ e $\mathbb{I}(\xi_k, \tau_k, u(\xi_k, \tau_k))$ é dado em (4.4), $k = 1, 2, \dots, p$.

4.3 Exemplo

Vamos apresentar o valor explícito da função $\phi_{\mathcal{I}}$, quando os impulsos são independentes da função de posição $x(t)$ e a função $V_{\mathcal{I}}(t) = \beta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Consideremos o operador impulso $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(x(\tau_j)) = \alpha_j$, $1 \leq j \leq p$. Sejam $s \in]\tau', \tau[$, $\varsigma \in \mathbb{R}$ e $N^{(s)} = \{t_1, \dots, t_{r-1}\}$, com $t_0 = \tau'$ e $t_r = s$.

Consideremos a função auxiliar $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varrho(x(t)) = \begin{cases} x(t), & \text{se } t \neq \tau_j \text{ para todo } j = 1, \dots, p, \\ x(t) + J(x(t)), & \text{se } t = \tau_j \text{ para algum } j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Então

$$\omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = e^{-\beta(s-\tau')} \left(\prod_{j=1}^{r(s)} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_{i_j} + \alpha_j - x_{i_{j-1}})^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varrho(\varsigma) - x_{i_{r(s)}})^2}{s - t_{i_{r(s)}}}\right)}{\sqrt{2\pi(s - t_{i_{r(s)}})}}.$$

Pelo Lemma 2.11, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) dx_{i_1} \dots dx_{i_{r(s)}} = \\ & = \frac{e^{-\beta(s-\tau')}}{\sqrt{2\pi(s-\tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varrho(\varsigma) - \xi' + \alpha_1 + \dots + \alpha_{r(s)})^2}{s - \tau'}\right). \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema 4.9, concluímos que

$$\phi_{\mathcal{I}}(\varsigma, s) = \frac{e^{-\beta(s-\tau')}}{\sqrt{2\pi(s-\tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\varrho(\varsigma) - \xi' + \sum_{s \geq \tau_j} \alpha_j\right)^2}{s - \tau'}\right)$$

é solução da equação diferencial parcial do tipo Schrödinger em Γ

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(\tau, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\tau, \xi) + \beta u(\tau, \xi) = 0,$$

sujeita à condição de impulso

$$\begin{aligned} & u(\xi_1, \tau_1) - u(\xi_1, \tau_1^-) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_1 - \tau')}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \xi' + \alpha_1)^2}{\tau_1 - \tau'}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \xi')^2}{\tau_1 - \tau'}\right) \right]. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & u(\xi_k, \tau_k) - u(\xi_k, \tau_k^-) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_k - \tau')}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\xi_k - \xi' + \sum_{i=1}^k \alpha_i\right)^2}{\tau_k - \tau'}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\xi_k - \xi' + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right)^2}{\tau_k - \tau'}\right) \right], \end{aligned}$$

para cada $k = 2, \dots, p$.

A equação de Black-Scholes com ação impulsiva

5.1 Introdução

No modelo de Black-Scholes (veja [5]), o preço de um ativo econômico é uma função randômica temporal e é considerado um movimento browniano geométrico. Isto implica que, se o valor x_{j-1} ocorrer no tempo t_{j-1} , então a probabilidade de que em t_j o processo tenha valor x_j , $u_j \leq x_j < v_j$, é dada por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} \exp \left(-\frac{(\ln x_j - \ln x_{j-1})^2}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})} \right) dx_j,$$

onde A_j é o fator normalizador $\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Quando precificamos um ativo derivativo, tal como uma opção de compra européia (veja [3]), cujo valor depende do movimento do valor do ativo adjacente, a probabilidade envolvida é dada

por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_j - \ln x_{j-1} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right] dx_j,$$

onde σ é a volatilidade e μ é a tendência (*drift rate*) do movimento browniano.

De um modo geral, a probabilidade de que, no tempo t_j , o preço do ativo subjacente seja x_j , onde $u_j \leq x_j < v_j$ e $1 \leq j \leq n$, é dada pela integral

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^n B_j dx_1 \dots dx_n,$$

onde

$$B_j = \frac{1}{x_j A_j} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_j - \ln x_{j-1} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right]$$

e $A_j = \sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}$, $1 \leq j \leq n$.

A teoria de apreçamento requer que o espaço amostral para os eventos ocorridos seja estendido usando o Teorema de Kolmogorov para uma sigma álgebra de conjuntos mensuráveis em um espaço amostral de dimensão infinita, cujos elementos representativos são funções contínuas, requer que o processo envolvido seja representando por uma equação diferencial estocástica apropriada, que uma medida adequada para o espaço amostral seja encontrada por meio dos teoremas de Girsanov e Radon-Nikodym e requer, também, que o valor do ativo derivativo seja determinado por meio de um valor esperado (esperança) usando a integral de Lebesgue.

Em [29], P. Muldowney considerou uma opção de compra européia, cuja dependência do valor do ativo subjacente tem uma forma bastante simples, e obteve um valor esperado estatístico dado por uma integral em n dimensões, com respeito a probabilidade definida pela integral n -dimensional acima. Assim, P. Muldowney obteve um resultado similar ao resultado conhecido pelo modelo contínuo usando a integral de Henstock em lugar da integral de Lebesgue. Além disso, o valor esperado satisfaz a clássica equação diferencial parcial de Black-Scholes (veja [3], p. 91).

Neste capítulo, estenderemos o trabalho feito por P. Muldowney em [29], para um processo sujeito a uma ação impulsiva em tempos pré-determinados. Utilizaremos a teoria moderna de integração não-absoluta baseada na teoria de integração de Riemann generalizada de Henstock e Kurzweil.

5.2 A função distribuição de probabilidades para um processo impulsivo

Seja $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ o operador impulso que consideraremos uma função contínua. Sejam τ', τ números reais tais que $0 < \tau' < \tau$ e $N = \{t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\} \subset]\tau', \tau]$, onde $\tau' = t_0$ e $\tau = t_n$, e consideremos o conjunto $\mathcal{I} = \{\tau_1, \dots, \tau_p\} \subset N$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p$.

Denotaremos o espaço de funções $\mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$ como sendo o espaço de todas as funções definidas em $] \tau', \tau]$ com valores em $\mathbb{R}_+^*$.

Seja $\sigma \in \mathbb{R}_+$ uma constante positiva. Dado $y \in \mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$, assumamos que o preço do ativo adjacente seja dado por uma distribuição log-normal com volatilidade σ . Seja ϱ a função definida no exemplo da Seção 4.3 do Capítulo 4. Definamos $h_{\mathcal{I}}(y, N)$ por

$$h_{\mathcal{I}}(y, N) = \prod_{j=1}^n \frac{\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(\ln \varrho(y_j) - \ln y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}} \right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}. \quad (5.1)$$

e a função $K_{\mathcal{I}}(x, N, I; \xi, \tau')$, por

$$K_{\mathcal{I}}(x, N, I; \xi, \tau') = \int_{I(N)} h_{\mathcal{I}}(x, N) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} = \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} h_{\mathcal{I}}(x, N) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n},$$

onde $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$, com $t_0 = \tau'$, $t_n = \tau$ e $x(\tau') = \xi > 0$. Notemos que $I(N) = [u_1, v_1[\times \dots \times [u_n, v_n[$.

Sejam x, N e I associados, isto é, $(x, I[N])$ é um par de associados. Então definimos no espaço de dimensão infinita $\mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$ a função

$$K_{\mathcal{I}}(x, I[N]) := K_{\mathcal{I}}(x, N, I; \xi, \tau').$$

Para provarmos que $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ representa uma função distribuição de probabilidade, precisamos impor alguma condição sobre o operador de impulso J . Assim, para $y \in \mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$, consideremos o conjunto de operadores de impulsos

$$\mathcal{L} = \left\{ J \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\ln J(y_{i_j}) + \ln y_{i_j} - \ln y_{i_{j-1}}]^2}{t_{i_j} - t_{i_{j-1}}}}}{y_{i_j} \sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \right) dy_{i_j} = 1, j = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Note que $\mathcal{L} \neq \emptyset$, tendo em vista que uma função constante pertence a este conjunto. Assumiremos, neste capítulo, que o operador de impulso $J \in \mathcal{L}$.

Nosso interesse, agora, é verificar se a função $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é integrável no sentido da integral de Riemann generalizada em $\mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$.

Recordemos algumas funções auxiliares que foram apresentadas no Capítulo 3, a saber, $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \times] \tau', \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times] \tau', \tau] \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, p-1$, definidas por

$$\phi_1(y_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - \tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y_k - \xi)^2}{t_k - \tau'}\right),$$

para $k \in \{1, 2, \dots, i_1 - 1\}$,

$$\phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - t_{i_p})}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y_n - y_{i_p})^2}{\tau - t_{i_p}}\right)$$

e

$$\Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j})}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y_{i_{j+1}-1} - y_{i_j})^2}{t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j}}\right),$$

para $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Como fizemos anteriormente, definimos $\phi_1(J(y_k), t_k)$ para $k \in \mathcal{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, substituindo y_k por $J(y_k) + y_k$ na expressão de $\phi_1(y_k, t_k)$, e definimos $\Phi_j(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$, substituindo $y_{i_{j+1}-1}$ por $J(y_{i_{j+1}}) + y_{i_{j+1}}$ e $t_{i_{j+1}-1}$ por $t_{i_{j+1}}$ na expressão de $\Phi_j(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1})$, para $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Proposição 5.1. *Seja $N = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset] \tau', \tau]$, com $t_0 = \tau'$ e $t_n = \tau$. Seja $h_{\mathcal{I}}(y, N)$ dada por (5.1), onde $y(\tau') = y(t_0) = \xi$. Então a função $h_{\mathcal{I}}(y, N)$ é Riemann integrável generalizada com respeito a y em $\mathbb{R}_+^n$ e*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} h_{\mathcal{I}}(y, N) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} = 1.$$

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $x_j = \ln y_j$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} h_{\mathcal{I}}(y, N) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathcal{I}}(x, N) dx_1 \dots dx_n,$$

onde $x_0 := \ln \xi$ e a função impulso na expressão de $g_{\mathcal{I}}$ é dada pela composição $J' = \ln \circ J \circ \exp$. Pela Proposição 3.5, $g_{\mathcal{I}}(x, N)$ é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{n-1}$ e

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathcal{I}}(x, N) dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(J'(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) \prod_{j=1}^p dy_{i_j}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p}) dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(x_n - y_{i_p})^2}{\tau - t_{i_p}}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - t_{i_p})}} dx_n = 1,$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} g_{\mathcal{I}}(x, N) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(J'(y_{i_1}), t_{i_1}) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right] \prod_{j=1}^p dy_{i_j}. \end{aligned}$$

Como $J \in \mathcal{L}$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} h_{\mathcal{I}}(y, N) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_n}{y_n} = 1$$

e temos o resultado. ■

Agora, podemos obter a integrabilidade de $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ no espaço de dimensão infinita $\mathbb{R}_+^{[\tau', \tau]}$.

Teorema 5.2. *A função $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}_+^{[\tau', \tau]}$, isto é, a integral*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{[\tau', \tau]}} K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$$

existe e vale 1.

Demonstração: Consideremos uma divisão $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$ de $\mathbb{R}_+^{[\tau', \tau]}$, onde cada N escolhido é tal que $\mathcal{I} \subseteq N \in \mathcal{F}([\tau', \tau])$. Então a soma de Riemann de $K_{\mathcal{I}}$ é dada por

$$\sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}} K_{\mathcal{I}}(x, I[N]).$$

Seja $M = \cup\{N : (x, I[N]) \in \mathcal{E}\}$ e enumeremos M como $\{t_1, \dots, t_m\}$, onde $\tau' = t_0$, $\tau = t_m$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m$. Cada termo $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ da soma de Riemann pode ser reescrito como

$K_{\mathcal{I}}(x, I[M])$; basta inserirmos $\ln y_j$'s adicionais na expressão de $h_{\mathcal{I}}$, $j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}$, e integrarmos de 0 a $+\infty$ sobre os y_j 's extras. Então a soma de Riemann torna-se

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathcal{I}}(x, I[M]),$$

com M sendo um conjunto fixo de dimensões. Desta maneira, estamos lidando com uma soma de Riemann de uma integral em m dimensões. Logo, cada termo da soma de Riemann é uma integral sobre $I[M] \subset \mathbb{R}^m$ e, pela propriedade de aditividade finita desta integral em $\mathbb{R}^m$, temos

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathcal{I}}(x, I[M]) = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} h_{\mathcal{I}}(y, M) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_m}{y_m}. \quad (5.2)$$

Pela Proposição 5.1, a integral (5.2) existe e seu valor é igual a 1. Assim

$$\sum_{(x, I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathcal{I}}(x, I[M]) = 1.$$

Então dado $\epsilon > 0$, para qualquer função calibre γ , escolhida tal que $L(x) \supseteq \mathcal{I}$, para todo $(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}$, $\mathcal{I} \subseteq L(x) \subseteq N$ implica que

$$\left| \sum_{(x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma}} K_{\mathcal{I}}(x, I[N]) - 1 \right| < \epsilon.$$

Portanto $\int_{\mathbb{R}^{|\mathcal{T}'|}} K_{\mathcal{I}}(x, I[N]) = 1$ e a prova está completa. ■

Assim, $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ é uma função distribuição de probabilidades, ou seja, se um ativo financeiro tiver valor $x(t_{j-1}) := x_{j-1}$ no momento de tempo t_{j-1} , então a função $K_{\mathcal{I}}(x, N, I; \xi, \tau')$ nos dará a probabilidade de que, no tempo t_j , o preço tenha um valor $x_j = x(t_j)$ entre u_j e v_j .

Como consequência do Corolário 3.8 (veja também a Proposição 3.7), obtemos o resultado a seguir.

Proposição 5.3. *As funções $h_{\mathcal{I}}(x, N) \prod_{j=1}^n \frac{\Delta I_j}{x_j}$ e $K_{\mathcal{I}}(x, I[N])$ são variacionalmente equivalentes.*

5.3 A equação de Black-Scholes com impulsos

Sejam σ e μ respectivamente a volatilidade e a tendência para um processo de Wiener $x(t)$. Consideremos μ uma constante real. Dado $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, com $t_0 = \tau'$ e $t_n = \tau$, P. Muldowney ([29]) define $g_{\mu\sigma}(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$\prod_{j=1}^n \left[\frac{\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_j - \{\ln(x_{j-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})\}}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}} \right].$$

e a função $Q_{\mu\sigma}(I[N])$ por

$$Q_{\mu\sigma}(I[N]) = \int_{I(N)} g_{\mu\sigma}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j}.$$

Em uma aproximação usual, usando o cálculo de Itô e a integração de Lebesgue, $Q_{\mu\sigma}(I[N])$ pode ser vista como uma pré-medida que é usada para gerar uma medida de probabilidade $P_{Q_{\mu\sigma}}$ sobre um espaço amostral Ω , e que pode determinar o valor esperado de funcionais h definidos no espaço amostral Ω .

Consideremos $h(x)$ como sendo a função desconto $e^{-r(T-t)} \max\{x(T) - K, 0\}$, $r > 0$. Pela fórmula de Black-Scholes, o preço de uma opção de compra do tipo européia no tempo t , com preço de exercício K na maturidade T , é dada pelo valor esperado $E(h) = \int_{C([\tau', \tau])} h dP_{Q_{\mu\sigma}}$, desde que μ seja tomado como sendo a taxa de juros livre de riscos r . O espaço $C([\tau', \tau])$ na integral denota o espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}^{[\tau', \tau]}$.

Entretanto, usando a integral de Riemann generalizada de Henstock, P. Muldowney, em [29], deduz a fórmula de precificação diretamente da pré-medida $Q_{\mu\sigma}(I[N])$, calculando a integral $\int_{C([\tau', \tau])} h(x) Q_{\mu\sigma}(I[N])$ como uma integral de Henstock. O cálculo de Itô não é usado nesta aproximação, e, a menos de alguns detalhes técnicos apresentados em [29], o resultado segue diretamente da definição da integral de Henstock [15]. Veja também [14] e [24].

Estenderemos este resultado a seguir. Consideraremos um processo qualquer definido em um espaço da forma $\mathbb{R}^{[\tau', \tau]}$ sujeito a uma ação impulsiva. Primeiramente, estabeleceremos a função distribuição de probabilidades para um processo com impulsos em um espaço de funções que utilizaremos na equação de Black-Scholes.

Dado $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, com $t_0 = \tau'$ e $t_n = \tau$, definamos a função $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$\prod_{j=1}^n \frac{\left[\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln \varrho(x_j) - \{\ln(x_{j-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})\}}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right) \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}.$$

Definimos a distribuição de probabilidades de $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N]) = \int_{I(N)} \mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j}.$$

Notemos que a função $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma)$ é igual a

$$\prod_{j=1}^n \frac{\left[\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\ln \varrho(x_j) - \{\ln(x_{j-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})\}]^2}{t_j - t_{j-1}} \right) \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}.$$

Sejam x_{k-1}, x_k, x_{k+1} números reais estritamente positivos e $t_{k-1} < t_k < t_{k+1}$. Pelo Lema 2.11, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \prod_{j=k}^{k+1} \frac{\left[\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\ln x_j - \{\ln(x_{j-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})\}]^2}{t_j - t_{j-1}} \right) \right]}{x_k \sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}} dx_k = \\ & = \frac{\left[\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\ln x_{k+1} - \{\ln(x_{k-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{k+1} - t_{k-1})\}]^2}{t_{k+1} - t_{k-1}} \right) \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{k+1} - t_{k-1})}}. \end{aligned}$$

Desta maneira, podemos concluir, como fizemos na Proposição 5.1, que

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j} = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}_1(\xi, \tau') \left(\prod_{j=1}^{p-1} \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \right) \times \\ & \quad \times \bar{\phi}_2(y_{i_p}, t_{i_p}) \left(\prod_{j=1}^p dy_{i_j} \right) dy_{\tau}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $J' = \ln \circ J \circ \exp$,

$$\bar{\phi}_1(\xi, \tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_1} - \tau')}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(y_{i_1}) + y_{i_1} - \ln \xi' - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i_1} - \tau')]^2}{t_{i_1} - \tau'} \right),$$

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_{j+1}} - t_{i_j})}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(y_{i_{j+1}}) + y_{i_{j+1}} - y_{i_j} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i_{j+1}} - t_{i_j})]^2}{t_{i_{j+1}} - t_{i_j}} \right) \end{aligned}$$

e

$$\bar{\phi}_2(y_{i_p}, t_{i_p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - t_{i_p})}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[y_\tau - y_{i_p} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t_{i_p})]^2}{\tau - t_{i_p}} \right).$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}_2(y_{i_p}, t_{i_p}) dy_\tau = 1$ e $J \in \mathcal{L}$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{dx_j}{x_j} = 1.$$

Analogamente, como fizemos na prova do Teorema 5.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}} Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N]) = 1.$$

Novamente pelo Corolário 3.8, obtemos o resultado a seguir.

Proposição 5.4. *As funções $\mathcal{H}_{\mathcal{I}}^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{\Delta I_j}{x_j}$ e $Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N])$ são variacionalmente equivalentes em $\mathbb{R}_+^{] \tau', \tau]}$.*

Como apresentado no Capítulo 1, uma opção de compra européia assegura a seu titular o direito, mas não obrigação, de comprar um ativo em uma data futura T (maturidade), por um preço estabelecido K (preço de exercício da opção).

Vamos estabelecer o preço de uma opção de compra em um tempo $t < T$, admitindo que entre t e T hajam momentos de impulsos nos instantes $\tau_1, \dots, \tau_p$, com $t < \tau_1 < \dots < \tau_p < T$.

Então, consideremos $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, com $t_0 = t$, $t_n = T$ e $x(t_0) = x(t) = \xi > 0$. Definamos o funcional cilíndrico $h(x) = h(x(t_{n-1}))$ por

$$e^{-r(T-t)} \max\{x_{n-1} - K, 0\}$$

e a função

$$f(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}_+^{] t, T]}} h(x) Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N])$$

sempre que a integral existir.

Apresentamos a existência de $f(\xi, t)$ na seguinte proposição, cuja prova segue da equação (5.3) e da idéia da prova da Proposição 4.3.

Proposição 5.5. *Seja $h(y_T, t) = e^{-r(T-t)} \max\{e^{y_T} - K, 0\}$ e $\mu(\xi, t)$ dada por*

$$h(y_T, t) \bar{\phi}_1(\xi, t) \prod_{j=1}^p \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}),$$

onde $\bar{\Phi}_p(y_{i_p}, J'(y_{i_{p+1}}), t_{i_p}, t_{i_{p+1}}) := \bar{\phi}_2(y_{i_p}, t_{i_p})$. Se $\mu(\xi, t)$ for Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{p+1}$, então $h(x(t_{n-1}))Q_T^{\mu\sigma}(I[N])$ será Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}_+^{[t, T]}$ e $f(\xi, t)$ será dada por

$$f(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, t) \left(\prod_{j=1}^p dy_{i_j} \right) dy_T.$$

O resultado seguinte diz que $f(\xi, t)$ é contínua para $\xi > 0$ e $t \neq \tau_j, j = 1, \dots, p$. A prova deste fato segue da Proposição 5.5 e da demonstração feita na Proposição 4.5.

Proposição 5.6. *Sejam $s \in]\tau', \tau[\setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ e $\xi > 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|s_1 - s| < \delta$ e $|\xi_1 - \xi| < \delta$, então $|f(\xi_1, s_1) - f(\xi, s)| < \epsilon$.*

Para que o preço de uma ação não tenda ao infinito em momentos de tempo suficientemente próximos de um tempo em que o mercado de ações sofre uma queda, vamos impor mais uma condição sobre a função impulso J . Assim, diremos que a função $J \in \mathcal{L}$, satisfaz a condição C , se para cada $k = 1, 2, \dots, p$, o limite

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(\xi_{i_k}) + \xi_{i_k} - \varsigma - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta]^2}{\delta}\right)}{\sqrt{2\pi\delta}} \times \\ & \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(\xi_{i_{k+1}}) + \xi_{i_{k+1}} - \xi_{i_k} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i_{k+1}} - t_{i_k})]^2}{t_{i_{k+1}} - t_{i_k}}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_{k+1}} - t_{i_k})}} dx_{i_k} \end{aligned}$$

existir, com $\varsigma \in \mathbb{R}$ e $J' = \ln \circ J \circ \exp$, e seu valor será uma função $\kappa(x_{i_{k+1}})$ tal que a função

$$\kappa(x_{i_{k+1}}) \prod_{j=k+1}^{p-1} \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}) \bar{\phi}_2(y_{i_p}, t_{i_p})$$

é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}^{p-k+1}$.

Se a função $J' = \ln \circ J \circ \exp$ independer da função de posição $x(t)$, isto é, se $J'(x(t)) = f(t)$, onde f é uma função real definida em $\mathbb{R}$, segue pelo Lema 2.11 que $J \in \mathcal{L}$ e J satisfaz a condição C .

Com a condição C estabelecida acima, temos que a função $f(\xi, t)$ admite os limites laterais em $\tau_j, j = 1, 2, \dots, p$, como mostra o resultado seguinte.

Teorema 5.7. *Seja $x(\tau_k) = \xi_k, k = 1, 2, \dots, p$. Se $J \in \mathcal{L}$ satisfizer a condição C , então os limites*

$$\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^+)} f(\varsigma, s) \quad \text{e} \quad \lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^-)} f(\varsigma, s)$$

existirão e $\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^+)} f(\varsigma, s) = f(\xi_k, \tau_k)$, para cada $k = 1, 2, \dots, p$.

Demonstração: Seja τ_k arbitrário, onde $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Consideremos as seqüências reais $\{t_\ell\}_{\ell \geq 1}$ e $\{\varsigma_\ell\}_{\ell \geq 1}$ tais que

$$t_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \tau_k \quad \text{e} \quad \varsigma_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \xi_k,$$

com $t_\ell > \tau_k$ para cada $\ell = 1, 2, \dots$. Assim, existe $\ell_0 > 0$ tal que $t_\ell < \tau_{k+1}$, para todo $\ell > \ell_0$. Denotemos $\tau_{p+1} = t_{i_{p+1}} = \tau$ e $J'(y_{i_{p+1}}) = 0$.

Pela Proposição 5.5, se $\ell > \ell_0$, então

$$\mu(\xi_k, \tau_k) = h(y_T, \tau_k) \bar{\phi}_1(\xi_k, \tau_k) \prod_{j=k+1}^p \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$$

e

$$\mu(\varsigma_\ell, t_\ell) = h(y_T, t_\ell) \bar{\phi}_1(\varsigma_\ell, t_\ell) \prod_{j=k+1}^p \bar{\Phi}_j(y_{i_j}, J'(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}),$$

onde

$$h(y_T, \tau_k) \bar{\phi}_1(\xi_k, \tau_k) = \max\{e^{y_T} - K, 0\} \times \\ \times \frac{e^{-r(T-\tau_k)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau_{k+1} - \tau_k)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(y_{i_{k+1}}) + y_{i_{k+1}} - \ln \xi_k - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau_{k+1} - \tau_k)]^2}{\tau_{k+1} - \tau_k}\right)$$

e

$$h(y_T, t_\ell) \bar{\phi}_1(\varsigma_\ell, t_\ell) = \max\{e^{y_T} - K, 0\} \times \\ \times \frac{e^{-r(T-t_\ell)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau_{k+1} - t_\ell)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[J'(y_{i_{k+1}}) + y_{i_{k+1}} - \ln \varsigma_\ell - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau_{k+1} - t_\ell)]^2}{\tau_{k+1} - t_\ell}\right).$$

Então,

$$\mu(\varsigma_\ell, t_\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \mu(\xi_k, \tau_k).$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\ell_1 > 0$, com $\ell_1 > \ell_0$, tal que

$$|\mu(\varsigma_\ell, t_\ell) - \mu(\xi_k, \tau_k)| < \epsilon \mu(\xi_k, \tau_k),$$

para todo $\ell > \ell_1$. Daí, pelo teorema da convergência dominada (Teorema 2.10), concluímos o resultado, isto é,

$$\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^+)} f(\varsigma, s) = f(\xi_k, \tau_k).$$

A existência do limite $\lim_{(\varsigma, s) \rightarrow (\xi_k, \tau_k^-)} f(\varsigma, s)$, segue da condição C e do teorema da convergência dominada (Teorema 2.10). ■

Sendo $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, com $t_0 = t$, $t_n = T$ e $t_1 < \tau_1$, denotaremos $w(\xi, t)$ como sendo a seguinte expressão

$$\frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \right)^2 (t_1 - t) - r(T - t) \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_1 - t)}},$$

Então,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w}{2(t_1 - t)} - \frac{w}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} \right)^2 + w \left(\frac{\mu(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma^2} - \frac{\frac{\sigma^2}{2}(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma^2} \right) + rw,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{w}{\xi\sigma^2} \left[\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{w}{\xi^2\sigma^4} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} \right)^2 - \frac{2\mu w}{\xi^2\sigma^4} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} \right) + \frac{w}{\xi^2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} \right) + \\ &+ \frac{w}{\xi^2\sigma^4} \mu \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{w}{2\xi^2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{w}{\xi^2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} \right) + \\ &+ \frac{w}{\xi^2\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{w}{\xi^2\sigma^2(t_1 - t)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = rw. \quad (5.4)$$

Agora, denotemos $w' = \max\{x(T) - K, 0\} \times w''$, onde

$$w'' = \prod_{j=2}^n \frac{\left[\exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln \varrho(x_j) - \{\ln(x_{j-1}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})\}}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}) \right) \right]}{[2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})]^{1/2}} \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{\Delta I_j}{x_j}.$$

Notemos que

$$ww' = h(x)\mathcal{H}_T^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{\Delta I_j}{x_j}.$$

porém, vamos continuar representando $h(x)\mathcal{H}_T^1(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^n \frac{\Delta I_j}{x_j}$ por ww' .

Como w' independe de ξ e t , então multiplicando a equação (5.4) por w' , obtemos

$$\frac{\partial w'w}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial w'w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} = rw'w.$$

Como $h(x(t_{n-1}))Q_T^{\mu\sigma}(I[N])$ é Riemann integrável generalizada em $\mathbb{R}_+^{[t, T]}$ e

$$\int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} h(x(t_{n-1}))Q_{\mu\sigma}^{\mathcal{J}}(I[N]) = f(\xi, t),$$

segue da Proposição 5.4 que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} \left(\frac{\partial w'w}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial w'w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} \right) = rf(\xi, t).$$

De mesma forma que fizemos no capítulo 4, vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} \frac{\partial w'w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} ww', \quad \int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} \frac{\partial w'w}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} ww'$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\mathbb{R}_+^{[t, T]}} ww'.$$

Para isso, definamos

$$D_{abc}f(\xi, t) = \frac{1}{a}f_a(\xi, t) + \mu\xi \frac{1}{b}f_b(\xi, t) + \frac{1}{2bc}\sigma^2\xi^2 f_{bc}(\xi, t),$$

onde

$$f_a(\xi, t) = f(\xi, t+a) - f(\xi, t),$$

$$f_b(\xi, t) = f(\xi + b, t) - f(\xi, t)$$

e

$$f_{bc}(\xi, t) = f(\xi + b + c, t) - f(\xi + b, t) - f(\xi + c, t) + f(\xi, t)$$

para a, b, c números reais não-nulos quaisquer. Então

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}f(\xi, t)$$

existirá e será igual a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\xi, t) + \mu\xi \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi, t)$$

se, e somente se, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ existirem.

Como as derivadas $\frac{\partial ww'}{\partial t}$, $\frac{\partial ww'}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial^2 ww'}{\partial \xi^2}$ existem, então

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}ww' = \frac{\partial ww'}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial ww'}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2} \frac{\partial^2 ww'}{\partial \xi^2} = rww'. \quad (5.5)$$

Como ww' é Riemann integrável generalizada, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}[t, T]} \lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}ww' = rf(\xi, t),$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a,b,c \rightarrow 0} D_{abc}ww' dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = rf(\xi, t) \quad (5.6)$$

Dado $\epsilon > 0$, pela equação (5.5), podemos escolher $\mu > 0$ tal que se $0 < |\alpha| < \mu$, $0 < |\beta| < \mu$ e $0 < |\gamma| < \mu$, então

$$|D_{\alpha\beta\gamma}ww' - rww'| < Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N])\epsilon.$$

Dados x, N, I , escolhamos α_0, β_0 e γ_0 satisfazendo $0 < \alpha_0 < \mu$, $0 < \beta_0 < \mu$ e $0 < \gamma_0 < \mu$ tais que

$$\sup_{\substack{0 < |\alpha| < \alpha_0 \\ 0 < |\beta| < \beta_0 \\ 0 < |\gamma| < \gamma_0}} |D_{\alpha\beta\gamma}ww' - rww'| < Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N]).$$

Como $0 < |\alpha| < \alpha_0$, $0 < |\beta| < \beta_0$ e $0 < |\gamma| < \gamma_0$, então

$$-Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N]) \leq D_{\alpha\beta\gamma}ww' - rww' \leq Q_{\mathcal{I}}^{\mu\sigma}(I[N]).$$

A função $Q_T^{\mu\sigma}(I[N])$ é Riemann integrável generalizada com valor da integral igual a 1, como apresentamos no início desta seção. Daí, pelo teorema da convergência dominada (Teorema 2.10), obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma} w w' dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} r w w' dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = r f(\xi, t) = \\ (5.6) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} D_{\alpha\beta\gamma} w w' dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T. \end{aligned}$$

E, como

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma} w w' dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = \\ & = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, t) + \mu \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi, t). \end{aligned}$$

concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = r f.$$

Pela definição de solução de uma equação diferencial parcial com impulsos (Definição 4.2.1), acabamos de provar o resultado seguinte.

Teorema 5.8. *A função $f = f(\xi, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial em Γ*

$$\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial t} + \mu \xi \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 f(\xi, t)}{\partial \xi^2} = r f(\xi, t) \quad (5.7)$$

sujeita à condição de impulso

$$f(\xi_k, \tau_k) - f(\xi_k, \tau_k^-) := f(\xi_k, \tau_k) - \lim_{s \rightarrow \tau_k^-} f(\xi_k, s),$$

para cada $k = 1, 2, \dots, p$, e com condição de fronteira

$$f(\xi_T, T) = \max\{\xi_T - K, 0\}.$$

Tomamos μ como sendo uma variável arbitrária. Em particular, quando $\mu = r$ e r é a taxa de juros livre de riscos, então a equação diferencial parcial (5.7) se reduz à equação de Black-Scholes. Vejamos como aplicar esta equação no seguinte exemplo.

5.4 Exemplo

Suponhamos que uma ação esteja sendo comercializada por um preço S e seja $t = 0$ o tempo correspondente. Seja K o preço de exercício da ação, ou seja, o direito de comprar a ação pelo preço K na data de maturidade T . Sejam r a taxa de juros livre de risco e σ a volatilidade, ambas constantes. Suponhamos que entre $t = 0$ e $t = T$, digamos $\tau_1, \dots, \tau_p$, com $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p < T$, haja choques do mercado de ações. Seja $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ o operador impulso, que representa os choques do mercado, tal que

$$J(x(\tau_j)) = \alpha_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, p$.

Vamos determinar o valor de uma opção de compra européia no tempo $t = 0$, via equação diferencial de Black-Scholes com impulsos.

Pelo Lema 2.11, temos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, t) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} = \\ & = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \max\{e^{x_T} - K, 0\} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[x_T - \ln \xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sum_{j=1}^p \alpha_j \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(\xi, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \max\{e^{x_T} - K, 0\} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(x_T - \ln \xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sum_{j=1}^p \alpha_j \right)^2 \right) dx_T = \\ & = \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} (e^{x_T} - K) \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(x_T - \ln \xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sum_{j=1}^p \alpha_j \right)^2 \right) dx_T. \end{aligned}$$

Tomemos $A = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - \sum_{j=1}^p \alpha_j$ e $B = \sqrt{\sigma^2 T}$. Assim, fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = -\frac{x_T - \ln \xi - A}{B},$$

obtemos

$$f(\xi, 0) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a (\xi e^{-Bu+A} - K) e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

onde $a = \frac{\ln(\frac{\xi}{K}) + A}{B}$.

Como

$$\int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}u^2 - Bu + A} du = e^{A + \frac{1}{2}B^2} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}[u+B]^2} du = e^{A + \frac{1}{2}B^2} \int_{-\infty}^{a+B} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

e lembrando que $A = (r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sum_{j=1}^p \alpha_j$ e $B = \sqrt{\sigma^2 T}$, obtemos

$$f(\xi, 0) = \xi \exp\left(-\sum_{j=1}^p \alpha_j\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right) - K e^{-rT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right), \quad (5.8)$$

onde

$$a = \frac{\ln(\xi/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sum_{j=1}^p \alpha_j}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Portanto $f(\xi, 0)$, obtida na equação (5.8), nos dá o valor de uma opção de compra européia.

Notemos que, quando $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, p$, obtemos a clássica fórmula de Black-Scholes para o apreamento para uma opção de compra.

Notemos, também, que o valor da opção de compra européia no tempo t , $0 \leq t < T$, digamos $f(\xi, t)$, é dado por

$$\xi \exp\left(-\sum_{t \geq \tau_j} \alpha_j\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b+\sigma\sqrt{(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{1}{2}u^2} du\right)$$

onde

$$b = \frac{\ln(\xi/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \sum_{t \geq \tau_j} \alpha_j}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

A função $f(\xi, t)$ é solução da equação diferencial parcial com impulsos dada pelo Teorema 5.8, onde μ é substituído por r .

5.5 Considerações finais

A hipótese básica da teoria de Black-Scholes para o apreçamento de um ativo é que, como uma variável randômica, o preço de um ativo, em qualquer tempo particular no futuro, segue uma distribuição log-normal. Com isto, o valor real de mercado é obtido como um “consenso” do mercado em consequência das inúmeras transações que são realizadas.

Em Física, pensamos na pressão atmosférica como sendo um macro-fenômeno, medido por um macro-instrumento (o barômetro, por exemplo), que é o efeito final de incontáveis impactos das moléculas de gás atmosférico no instrumento medidor. É razoável assumirmos que os impactos das moléculas de gás no medidor possuem uma certa quantidade de energia e que a energia entre as moléculas ocorrem em menores proporções. Portanto, mesmo antes da medida real ser tomada, pode-se estimar o valor da pressão atmosférica, em circunstâncias de tempo não excepcionais, com uma probabilidade pequena de que a pressão, quando medida, seja diferente do valor estimado.

Em analogia com o mercado financeiro, o preço do mercado de um ativo corresponde à pressão atmosférica. Os impactos moleculares correspondem às transações dos indivíduos com o ativo, com a condição de contorno de que o conjunto dos eventos que contribuem para o resultado líquido são em pequena escala e não excepcionais.

Todavia, em mercados financeiros, assim como acontece com o fenômeno tempo, eventos excepcionais e extremos ocorrem e em larga escala. Às vezes, tais eventos podem ser representados por eventos impulsivos os quais podem ser resultados de decisões políticas, guerras ou desastres naturais. Ou, eles podem ser fenômenos atípicos de mercados, como a recente crise das hipotecas nos EUA.

Neste contexto, ao considerarmos a teoria de apreçamento de uma opção do tipo européia, sujeita a choques do mercado, através do tratamento pela teoria de integração não-absoluta em espaços de funções, surgem alguns outros problemas que pretendemos tratar num futuro próximo:

- O estudo do operador de impulso J , para a obtenção de um preço justo da opção de compra européia sujeita a choques do mercado;

- A construção do modelo de Black-Scholes sujeita a choques em tempo desconhecido (tempo variável);
- A investigação do modelo de Black-Scholes quando as variáveis r (taxa de juros livre de riscos) e σ (volatilidade) forem funções randômicas no tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 17, (1900), 21-86.
- [2] R. G. Bartle, A modern theory of integration, *American Mathematical Society*, 2001.
- [3] M. Baxter e A. Rennie, Financial Calculus: an introduction to derivative pricing, *Cambridge University Press*, 1998.
- [4] P. L. Bernstein, Desafio aos deuses: a fascinante história do risco, *Campus, Rio de Janeiro*, 2a edição, 1997.
- [5] F. Black e M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, (1973), 637-659.
- [6] A. B. Brealey e S. C. Myers, Princípios de finanças empresariais, *McGraw-Hill, Lisboa*, 5a. edição, 1998.
- [7] J. Downes e J. E. Goodman, Dicionário de termos financeiros e de investimento, *Nobel, São Paulo*, 1993.
- [8] A. Einstein, Investigations on the Theory of the Brownian movement, *Dover, New York*, 1959.
- [9] A. Etheridge, A course in Financial Calculus, *Cambridge University Press*, 2002.

- [10] A. B. C. Galvão, Relação entre Mercado Futuro e Mercado à Vista: volatilidade e casualidade no mercado de ações e câmbio no Brasil, *Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre*, Dissertação de Mestrado em Economia, 1997. 117f.
- [11] A. Gélédan e J. Brémont, Dicionário econômico e social, *Livros Horizonte, Lisboa*, 1988.
- [12] R. Gordon, The Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock Integrals, *American Mathematical Society*, 1994.
- [13] M. R. L. Grossinho, Métodos numéricos em finanças, livro em andamento.
- [14] R. Henstock, P. Muldowney e V. A. Skvortsov, Partitioning infinite-dimensional spaces for generalized Riemann integration, *Bull. London Math. Soc.*, 38, (2006), 795-803.
- [15] R. Henstock, The General Theory of Integration, *Clarendon Press, Oxford*, 1991.
- [16] R. Henstock, Lectures on the theory of integration, *World Scientific, Singapore*, 1988.
- [17] J. C. Hull, Options, Futures and other Derivatives, *Prentice Hall*, 3a edição, 1997.
- [18] M. Kač, Probability and related topics in the Physical Sciences, Interscience, *New York*, 1957.
- [19] I. Karatzas e S. E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, *Graduate texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 113, 1991.
- [20] V. Lakshmikanthan, D. D. Bainov e P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, *Modern Applied Math.*, 6, *World Scientific*, 1989.
- [21] D. Lamberton e B. Lapeyre, Introduction to stochastic calculus applied to finance, *Chapman & Hall/CRC*, 2000.
- [22] J. Luo, Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulses, *Appl. Math. Comput*, 133(2-3), 309-318, 2002.
- [23] R. C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 4, (1973), 141-183.
- [24] P. Muldowney, A general theory of integration in function spaces, *Pitman Research Notes in Mathematics*, no. 153, Longman, (1987).

- [25] P. Muldowney, The infinite dimensional Henstock integral and problems of Black-Scholes expectation, *J. Appl. Anal.* 8, (2002), no. 1, 1-21.
- [26] P. Muldowney, Introduction to Feynman integration, *Journal of Mathematical Study*, 27(1), (1994), 127-132.
- [27] P. Muldowney, Topics in probability using generalised Riemann integration, *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 99A(1), (1999), 39-50.
- [28] P. Muldowney, Feynman's path integrals and Henstock's non-absolute integration, *Journal of Applied Analysis*, 6(1), (2000), 1-24.
- [29] P. Muldowney, The Henstock integral and the Black-Scholes theory of derivative asset pricing, *Real Analysis Exchange*, 26(1), (2001), 117-132.
- [30] P. Muldowney, Lebesgue integrability implies generalized Riemann integrability in $\mathbb{R}^{[0,1]}$, *Real Analysis Exchange*, 27(1), (2001/2002), 223-234.
- [31] P. Muldowney, Financial valuation and the Henstock integral, *Seminário Brasileiro de Análise*, 60, (2000), 79-108.
- [32] P. Muldowney, Integration in probability theory: sample spaces for derivative asset pricing. *Rev. Bull. Calcutta Math. Soc.* 10, (2002), no. 1-2, 73-76.
- [33] R. S. Pindyck e D. L. Rubinfeld, Microeconomia, *Makron Books*, 3a edição, 1994.
- [34] J. O. Siqueira, Determinação entrópica do preço racional da opção européia simples ordinária sobre ação e bond: uma aplicação da teoria da informação em finanças em condição de incerteza, Tese de doutorado. Universidade de São Paulo, 1999.
- [35] N. Wiener, Generalised harmonic analysis, *Acta Math.*, 55, (1930), 117-258.
- [36] L. P. Yee e R. Vyborny, The integral: An easy approach after Kurzweil and Henstock, *Australian Mathematical Society*, Lecture Series 14, Cambridge University Press, 2000.