Sobre o closing lemma de classe C^r

Bernardo Paschoarelli Veiga Gomes

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 14/02/2006

Assinatura: _____

Sobre o closing lemma de classe C^r

BERNARDO PASCHOARELLI VEIGA GOMES

Orientador: PROF. DR. CARLOS TEOBALDO GUTIERREZ VIDALÓN

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências na área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2006

Aos meus pais
com amor...

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Gutierrez, pela orientação, direcionamento e contribuições para a realização deste trabalho,

Aos meus pais,

Aos funcionários da biblioteca, e demais funcionários do ICMC,

Aos colegas de curso e laboratório,

A FAPESP, pelo auxílio financeiro.

E a todos, que de alguma forma me ajudaram a concluir este trabalho.

Abstract

In this work, we study some partial results related to the C^r -closing lemma, on bidimensional manifolds, for $1 \leq r \leq \infty$. For the torus T^2 , we classify the C^r -vector fields with a non-trivial recurrent point p , in two types, one of which we call the constant type inspired by the terminology of continued fractions. This classification depends on the holonomy map defined by X around p . If $X \in \mathcal{X}^r(T^2)$ has finitely many singularities, and X is not of constant type, we prove the existence of a vector field Y arbitrarily close to X (in the C^r topology) having a periodic trajectory through p . For a bidimensional, compact and orientable manifold M we show that the C^r vector fields on M having a non-trivial wandering point p fall in two types, one of which we call $\mathcal{B}$, and which also depends on the holonomy map around p induced by X . If X has finitely many singularities, and X is of $\mathcal{B}$ -type, we prove the existence of a vector field Y arbitrarily close to X (in the C^r -topology) having a periodic trajectory through p .

Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns resultados parciais relacionados ao closing lemma de classe C^r em variedades bidimensionais para $1 \leq r \leq \infty$. Para o toro T^2 , classificamos os campos vetoriais possuindo um ponto recorrente não-trivial p em dois tipos, um dos quais chamaremos de tipo constante, inspirado na terminologia das frações contínuas. Esta classificação depende da transformação de holonomia induzida por X ao redor de p . Se $X \in \mathcal{X}^r(T^2)$ tem um número finitos de singularidades, e X não é de tipo constante, demonstramos a existência de um campo vetorial Y , arbitrariamente próximo de X (na topologia C^r), tendo uma trajetória periódica por p . Para uma variedade bidimensional, orientável e compacta M , mostramos que os campos vetoriais de classe C^r sobre M tendo um ponto errante não-trivial p se dividem em dois tipos, um dos quais chamaremos de tipo $\mathcal{B}$, e que também depende da transformação de holonomia ao redor de p induzida por X . Se X tem um número finito de singularidades, e é de tipo $\mathcal{B}$, nós mostramos a existência de um campo vetorial Y , arbitrariamente próximo de X (na topologia C^r), tendo uma trajetória periódica por p .

Sumário

Introdução	1
1 Fluxos em superfícies	3
1.1 Closing Lemma e algumas de suas consequências	3
1.2 Transformações de primeiro retorno	4
2 Frações Contínuas, Rotações e IET's	9
2.1 Rotações	9
2.2 IET's	11
2.3 Condições de Minimalidade	13
3 Closing lemma em variedades bidimensionais	15
3.1 Closing lemma no toro T^2	17
3.2 Closing lemma em variedades bidimensionais	24
A Noções básicas da Teoria dos Sistemas Dinâmicos	27
B Noções básicas da Teoria Ergódica	29
Bibliografia	31

Introdução

Esta dissertação visa estudar alguns resultados referentes ao closing lemma de classe C^r em variedades bidimensionais, suaves, compactas e orientáveis, para $1 \leq r \leq \infty$. Segue o enunciado do closing lemma de classe C^r :

Sejam M uma variedade suave e compacta, $1 \leq r \leq \infty$ inteiro, $X \in \mathcal{X}^r(M)$ (resp. $f \in \text{Diff}^r(M)$) e p um ponto não-errante de X (resp. f). Então existe um $Y \in \mathcal{X}^r(M)$ (resp. $g \in \text{Diff}^r(M)$) arbitrariamente próximo de X , (resp. f) na topologia C^r tal que p é ponto periódico de Y (resp. de g).

Este trabalho é estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo discutiremos o enunciado acima e algumas de suas motivações.

No segundo capítulo, apresentaremos alguns conceitos necessários para as demonstrações do terceiro capítulo, como a definição de fração contínua e a sua relação com os retornos próximos de uma rotação irracional. Definiremos também as transformações de intercâmbio de intervalos, analisaremos algumas de suas propriedades básicas e estudaremos a dinâmica do operador de Rauzy.

Por fim, no terceiro capítulo, demonstraremos os principais resultados desta dissertação. Descreveremos um argumento utilizado nos trabalhos de Gutierrez e Pugh, que permite reduzir a demonstração do closing lemma de classe C^r à demonstração de uma proposição auxiliar. Feito isto, aplicaremos os conceitos desenvolvidos no capítulo 2, através de um resultado de Gutierrez, conhecido como teorema da estrutura. Este resultado possibilita classificar os fluxos em T^2 com pontos recorrentes não triviais em fluxos de tipo constante e de tipo não constante. Por meio desta classificação, é possível utilizar o teorema de estrutura para demonstrar o closing lemma de classe C^r para uma classe grande de fluxos do toro, os denominados fluxos de tipo não-constante. Subsequentemente, utilizaremos uma versão mais geral do teorema de estrutura para estender os resultados obtidos para campos no toro T^2 à uma classe grande de fluxos em variedades bidimensionais, suaves e compactas, os chamados fluxos de tipo $\mathcal{B}_k$. Para estes campos, obtemos uma resposta afirmativa ao closing lemma de classe C^r .

Capítulo 1

Fluxos em superfícies

1.1 Closing Lemma e algumas de suas consequências

O closing lemma foi levantado inicialmente no estudo realizado por Peixoto da classificação dos campos estruturalmente estáveis em superfícies compactas, e tem o seguinte enunciado:

Sejam M uma variedade suave e compacta, $r \geq 1$ inteiro, $X \in \mathcal{X}^r(M)$ (resp. $f \in \text{Diff}^r(M)$) e p um ponto não-errante de X (resp. f). Então existe um $Y \in \mathcal{X}^r(M)$ (resp. $g \in \text{Diff}^r(M)$) arbitrariamente próximo de X , (resp. f) na topologia C^r tal que p é ponto periódico de Y (resp. g).

campo X sobre uma superfície orientável hiperbólicas, a seguinte alternativa: ou p é periódico, ou p une duas selas.

Consideraremos agora o caso $r = 0$, cuja demonstração, mesmo para o caso n -dimensional é trivial. Como a trajetória de um ponto não-errante p retorna arbitrariamente próxima de p , podemos conectar um destes pontos próximos de p a p por um arco quase paralelo ao campo. É fácil ver que por uma perturbação localizada, temos um novo campo Y tal que o arco anterior faz parte de uma órbita periódica por p (esta perturbação é definida dentro de uma caixa de fluxo, conceito a ser definido neste capítulo). No entanto, Y em geral não está C^1 -próximo de X .

Em [Pg2], Pugh formulou e demonstrou o closing lemma de classe C^1 . Uma versão mais forte da afirmação acima, conhecida como closing lemma localizado, tem o seguinte enunciado:

(Closing Lemma localizado) *Sejam M uma variedade suave, compacta, $r \geq 1$ um inteiro, $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e p um ponto não-errante de X . Para qualquer vizinhança V de p em M e qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de X em $\mathcal{X}^r(M)$, existe uma perturbação de X , com suporte em V , dada por um*

campo $Y \in \mathcal{V}$, de forma que Y tenha uma órbita fechada por V .

Ainda em [Pg1], Pugh mostrou de fato a versão localizada do closing lemma de classe C^1 .

Como estamos lidando com perturbações, é importante definir precisamente a topologia sobre $\mathcal{X}^r(M)$, que é naturalmente identificado com o espaço $C^r(M, \mathbb{R}^2)$, já que estes dois espaços são homeomorfos. Muniremos $C^r(M, \mathbb{R}^2)$ com uma estrutura de um espaço de Banach, definindo uma norma $\|\cdot\|_r$.

Seja $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$ uma cobertura de M por abertos, onde cada aberto está contido no domínio de uma carta local (x_i, U_i) com $x_i(U_i) = B(2)$ e $x_i(V_i) = B(1)$, onde $B(1)$ e $B(2)$ são, respectivamente, as bolas de raios 1 e 2 e centradas na origem de $\mathbb{R}^2$.

Para $f \in C^r(M, \mathbb{R}^2)$, denotamos $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Definimos

$$\|f\|_r = \max_i \sup_{u \in B(1)} \{\|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\|\}.$$

Observação 1.1.1. Como demonstrado em [S-T], se p for um ponto não-errante e não-recorrente, então γ_p conecta uma ou duas singularidades de X , como na figura 1.1. Além disto, existe um anel aberto U e um ponto $q \in U$ cujo α -limite ou ω -limite contém γ_p . Neste caso é muito fácil produzir uma órbita periódica que intercepta qualquer vizinhança de p para perturbações arbitrariamente C^r -pequenas de X .

Exemplo 1.1.1. Defina um campo X_0 em $\mathbb{R}^2$ por $X(x, y) = (y, -x)$. As órbitas do fluxo gerado por X_0 são círculos centrados na origem, ou a própria origem. Agora defina o campo X como o produto fX_0 , onde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vale zero em $P = (0, 1)$, f assume valores positivos em $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ e f tem norma C^∞ menor do que um dado $\epsilon > 0$. As órbitas de X são as mesmas que as órbitas de X_0 , a menos do círculo C de raio 1. De fato, este círculo contém duas órbitas de X ; o ponto singular P e $C - \{P\}$. É fácil ver que todo ponto q pertencente a $C - \{P\}$ é não-errante, e vale que $\omega(q) = P$. Portanto, q não é um ponto recorrente. O closing lemma de classe C^∞ é válido neste caso: dado $\epsilon > 0$, $f + \frac{\epsilon}{\|X\|}$ assume valores estritamente positivos em C , e portanto todo ponto de $\mathbb{R}^2$ está contido numa órbita periódica de $Y = (f + \frac{\epsilon}{2\|X\|})X_0$, e além disto, $\|X - Y\|_\infty < \epsilon$.

1.2 Transformações de primeiro retorno

A teoria dos sistemas dinâmicos discretos está presente no estudo dos fluxos na análise das transformações de primeiro retorno. Estas são definidas numa vizinhança de uma variedade transversal a uma órbita periódica de um fluxo contínuo X .

Ao longo deste texto, um segmento C denotará a imagem de um mergulho suave de um intervalo fechado em uma variedade M . Segmentos de M , como arcos de trajetória de X , serão denotados como intervalos (fechados, semi-abertos ou abertos) na forma $[p, q]$.

Além disto, M denotará uma variedade bidimensional, suave e compacta, e $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo contínuo sobre M . A semitrajetória positiva (resp., negativa) de p será denotada por $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p)\}_{t \geq 0}$ (resp. $\gamma_p^- = \{\varphi(t, p)\}_{t \leq 0}$), e a trajetória $\gamma_p^+ \cup \gamma_p^-$ de p , por γ_p .

Se $p \in M$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diremos que $\varphi([a, b] \times \{p\})$ é um arco de trajetória por p . O ponto $p \in M$ será dito um ponto regular de φ caso não seja um ponto fixo de φ .

Definição 1.2.1 (Caixa de Fluxo). Seja N uma subvariedade de M disjunta do conjunto dos pontos fixos de ϕ . $N \subset M$ é chamada de caixa de fluxo de X caso existam um retângulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $\theta : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ tais que para todo $s \in [c, d]$, o conjunto $\theta([a, b] \times \{s\})$ seja um arco de trajetória de ϕ por $\theta(s)$. Neste caso também chamaremos θ , ou (N, θ) de caixa de fluxo. Se $x = \theta(0, 0)$, dizemos que N é uma caixa de fluxo por x .

Observação Segue do teorema do fluxo tubular que se p for um ponto regular de ϕ , sempre existe uma caixa de fluxo por p .

Definição 1.2.2. Sejam $C \subset M$ um segmento (ou um círculo) de classe C^1 e $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Seja $I : C \rightarrow M$ a inclusão do segmento na variedade. Diremos que C é transversal a X caso para todo ponto $p \in C$, o conjunto $\{X(p), D_p I(p)\}$ seja uma base do espaço tangente de M em p .

Figura 1.1:

O seguinte lema será utilizado no capítulo 3:

Lema 1.2.1. Seja Σ um intervalo aberto contendo um ponto recorrente não-trivial p de um fluxo contínuo $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Se Σ for transversal a φ , então existe um círculo C transversal a φ , tal que $C \cap \Sigma$ contém um intervalo aberto passando por p .

No caso orientável, a demonstração é a seguinte: construímos duas caixas de fluxo, (N_1, θ_1) e (N_2, θ_2) , a primeira contendo Σ , (utilizando o teorema do fluxo tubular longo), e a segunda contendo o arco de trajetória de ϕ que liga a primeira intersecção de p com Σ , Tp . O círculo transversal é construindo unindo o subintervalo $[p, Tp]$ de Σ com o arco de trajetória que liga p a Tp . O caso não-orientável é mais sutil, e sua demonstração está em [Pe2].

Definição 1.2.3. Seja C uma curva transversal a φ . A transformação de retorno de Poincaré $T : \text{Dom}(T) \rightarrow C$ é definida em $\text{Dom}(T) := \{x \in C \text{ tal que existe } T > 0 \text{ satisfazendo } \varphi(T, x) \in C\}$.

Observação 1.2.1. Segue do teorema do fluxo tubular que $\text{Dom}(T)$ é um subconjunto aberto de C , e T tem a mesma classe de diferenciabilidade que φ . Definindo uma nova transformação de retorno na imagem de uma componente conexa de $\text{Dom}(T)$, vemos que $\text{Dom}(T^i)$ é aberto para todo $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Resultados Parciais

A importância do closing lemma de classe C^r é justificada pelas suas diversas aplicações à Teoria Genérica, e à Teoria da Bifurcação. Alguns teoremas importantes, como o teorema da densidade geral de classe C^1 de Pugh [Pg2], que afirma que em $\mathcal{X}^1(M)$ é genérico que $\overline{\text{Per}(X)} = \{\text{pontos errantes não-triviais}\}$, também estão associado ao closing lemma.

O closing lemma de classe C^1 é utilizado para demonstrar o fato dos campos de Morse-Smale serem densos em $\mathcal{X}^1(M)$, sendo M uma variedade bidimensional, orientável ou não. Uma resposta afirmativa ao closing lemma de classe C^r para $r > 1$ estenderia este resultado para o caso $r > 1$.

Outro resultado relevante é o closing lemma ergódico de classe C^1 de Mañé, que é utilizado para caracterizar os difeomorfismos estruturalmente estáveis em variedades bidimensionais [Man].

Figura 1.2:

Para campos em variedades bidimensionais M como o disco, onde vale o teorema da curva de Jordan, ou mais precisamente, o teorema de Poincaré-Bendixon, o closing lemma é trivialmente satisfeito, pois não existem pontos recorrentes não-triviais. Suponha que exista um ponto ω -recorrente $p \in M$. p é regular, logo existe uma seção transversal ao fluxo Σ que contém p . Seja Tp o primeiro ponto em que o arco da trajetória positiva de p intersecta Σ , e I o subintervalo de Σ determinado por estes dois pontos. Então o arco de trajetória que liga p a Tp unido com I é um círculo topológico, (ver figura 1.2), e pelo teorema da curva de Jordan, M se divide em duas componentes conexas, A e B . Suponha que B contém $\omega(p)$. Como existe uma caixa de fluxo N em p , depois de um tempo $T > 0$, todos os pontos p de $N \cap B$ saem de N , portanto $\{\phi(t, p)\}_{t>T}$ está a uma distância positiva de p , mais especificamente, a uma distância maior ou igual que a distância entre os compactos $B - N$ e $\{p\}$. Isto impede que p seja um ponto recorrente, já que $d(p, \omega(p)) > 0$. Desta forma, chegamos a um absurdo.

Outro resultado nesta direção é um teorema de Marckley [Mar], que mostra que a garrafa de Klein também não apresenta pontos de recorrência não-trivial.

Capítulo 2

Frações Contínuas, Rotações e IET's

2.1 Rotações

O estudo da recorrência é de importância central na teoria de sistemas dinâmicos. Nesta seção estudaremos a recorrência para as rotações irracionais do círculo; isto é; quão frequentemente e quão próximo uma órbita retorna a uma vizinhança de seu ponto inicial. A análise das rotações no círculo tem suas raízes na teoria dos números e envolve tópicos como frações contínuas e condições diofantinas. Além disto, como será visto no próximo capítulo, a transformação de primeiro retorno em um segmento transversal a um campo X no toro é semiconjugada a uma rotação R_θ . Veremos então que se θ satisfizer uma propriedade da teoria dos números, o closing lemma de classe é válido para o campo X .

Se $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, escrevemos $\|x\| = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$.

Definiremos para uma rotação irracional R_α em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma sequência de retorno próximos $\{q_i\}_i \in \mathbb{N}$ como sendo uma sequência de inteiros onde para cada $i \in \mathbb{N}$ valha que $\|R^{q_i}(0)\| \leq \|R^j(0)\|$, para $0 < j < q_i$. Esta sequência existe pelo fato de R_α ser minimal.

Seja $\xi \in \mathbb{R}$. Defina $[x]$ como a parte inteira de um real x e $\text{frac}(x)$ como sua parte fracionária, de forma que $x = [x] + \text{frac}(x)$. Defina também, para x real e não-nulo, $G(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$.

Seja agora $\alpha \in (0, 1)$ irracional. Então para todo n natural, $G^n(\text{frac}(\alpha)) \neq 0$. Portanto podemos definir a sequência $a_0 = [\alpha]$ e $a_n = [G^{n-1}(\text{frac}(\alpha))^{-1}]$.

Simbolicamente, escrevemos

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Para simplificar a notação, escrevemos também $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$. Dizemos então que a_n é o n -ésimo quociente parcial de α , e que a fração reduzida

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n] = a_0 + 1/(a_1 + (1/(a_2 + \dots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n) \dots)))$$

é o enésimo convergente principal de α .

Teorema 2.1.1. (Teorema das Frações Contínuas) Se $\{p_n/q_n\}$ denota a sequência de convergentes principais de α , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Sejam $\{a_n\}$ a sequência de quocientes parciais de α , $\widehat{q_n\alpha} = q_n\alpha - p_n$, e para $\theta \in \mathbb{R}$, seja $I_n + \theta$ o subintervalo compacto de $\mathbb{R}$ com pontos extremos θ e $\theta + q_n\alpha$. Utilizaremos a notação simplificada $I_n + 0 = I_n$.

A proposição abaixo descreve a sequência de retornos próximos da rotação R_α :

Proposição 2.1.1. Se $|q| > 0$ é um inteiro tal que $|q| < q_{n+1}$, então $\|q\alpha\| < \|q_n\alpha\|$. De forma recíproca, se $n \geq 1$, q_{n+1} é o menor inteiro com módulo maior que $|q_n|$ tal que $\|q_n\alpha\| < \|q_{n+1}\alpha\|$.

Proposição 2.1.2. As sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ satisfazem as seguintes relações: (i) $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-1}$ para $n \geq 2$, $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$. (ii) $q_n = a_n q_{n-1} + p_{n-2}$ para $n \geq 2$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$.

Proposição 2.1.3. Se $n \geq 1$, $\|q_n\alpha\| = a_n \|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n\alpha\|$, e se $n \geq 3$:

$$a_n = \left\lceil \frac{\|q_{n-2}\|}{\|q_{n-1}\|} \right\rceil$$

Proposição 2.1.4. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Para todo $n \geq 2$, temos que $q_{n+1} < 2q_n$. Além disto:

(a) Os intervalos módulo 1 $\{R_{j\alpha}(I_n + \theta)\}_{0 \leq j \leq q_n}$, onde j é um inteiro, são dois a dois disjuntos, exceto pelo fato de que

$$(I_n + \theta) \cap \{R_{q_n\alpha}(I_n + \theta)\} = \{\widehat{q_n\alpha} + \theta\};$$

(b) Os números reais θ , $\widehat{q_n\alpha} + \theta$ e $\widehat{2q_n\alpha}$ estão ordenados na reta real da seguinte maneira:

$$\theta < (-1)^n \widehat{q_n\alpha} + \theta < (-1)^n \widehat{2q_n\alpha} + \theta < (-1)^n \widehat{q_{n-2}\alpha} + \theta.$$

A demonstração do seguinte lema está em [Si]:

Lema 2.1.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, os elementos de $\{A_{i,n} \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, [a_n/2]\}\}$ são conjuntos dois a dois disjuntos, onde

$$A_{i,n} = \bigcup_{j=2iq_n}^{(2i+1)q_n} R_{j\alpha}(I_n) = \bigcup_{j=0}^{q_n} R_{j\alpha+2i\widehat{q_n\alpha}}(I_n)$$

Proposição 2.1.5. Seja $\{i_k\}$ uma sequência estritamente crescente de números naturais ímpares. Suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i_k} = \infty$. Dado um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i_k \geq n_0$, então para algum $\theta \in (\theta, \|q_{i_k}\alpha\|)$, $\bigcup_{j=0}^{q_n} R_{j\alpha+\theta}(I_{i_k})$ é disjunto de $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Demonstração Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i_k \geq n_0$, $a_{i_k+1} > 2(m+1)$. Segue do lema anterior que os elementos de $\{A_{j,i_k} | j = 1, 2, \dots, m+1\}$ são conjuntos dois a dois disjuntos. Logo, para algum $\sigma \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, $A_{j,i_k} - \bigcup_{j=0}^{q_{i_k}} R_{j\alpha+\theta}(I_{i_k})$ é disjunto de $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, e portanto, satisfaz as condições da proposição. ■

Definição 2.1.1. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, e $[a_1, a_2, \dots]$ sua expansão em frações contínuas. Dizemos que α é de tipo constante caso exista uma constante $C > 0$ tal que $a_i < C$ para todo i natural. Caso contrário, dizemos que α é de tipo não-constante.

Proposição 2.1.6. O conjunto $C := \{x \in (0, 1) | x \text{ é de tipo constante}\}$ tem medida de Lebesgue nula.

2.2 IET's

As transformações de intercâmbio de intervalos, termo aqui abreviado por IET's; do inglês interval exchange transformations, são as transformações mais simples que preservam medida em um intervalo semi-aberto $[0, 1)$. Além disto, as IET's generalizam as rotações do círculo. A inclusão deste tópico neste texto se justifica pela utilidade das IET's no estudo de transformações de primeiro retorno definidas por fluxos em superfícies compactas.

A seguir definimos uma transformação de intercâmbio de intervalo.

Sejam $I = [0, 1)$, $m > 1$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, satisfazendo $\alpha_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. α é denominado vetor de probabilidade. Adotaremos a notação Δ_m para representar o conjunto de todos os vetores de probabilidade de $\mathbb{R}^m$.

Fixando $\alpha \in \Delta_m$, definimos os números $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$ e os conjuntos $I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i)$, onde $i \in \{1, \dots, m\}$. Para cada $\tau \in S(m)$, definimos $\alpha^\tau = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\tau^{-1}(m)})$. É fácil ver que α^τ é outro vetor de probabilidade. Sejam $\beta_0^\tau = 0$, $\beta_i^\tau = \sum_{j=1}^i \alpha_j^\tau$, e $I_i^\tau = [\beta_{i-1}^\tau, \beta_i^\tau)$. Desta forma, α e τ induzem as partições $\{I_i\}_{i=1}^m$ e $\{I_i^\tau\}_{i=1}^m$ de $[0, 1)$.

Definição 2.2.1. Sejam $\alpha \in \Delta_m$ e $\tau \in S(m)$ permutação. Defina $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ por

$$Tx = x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i)-1}^\tau$$

T é chamada de uma (α, τ) -IET sobre m intervalos.

Observação 2.2.1. É fácil ver que uma rotação é uma IET que age sobre dois intervalos. Isto segue do fato de que se $\theta \in \mathbb{R}$, ao identificarmos o círculo com o intervalo $[0, 1)$, $R_\theta : [0, 1) \leftarrow$ coincide com a IET $T_{\alpha, \pi}$ definida por $\alpha = (\theta, 1 - \theta) \in \mathbb{R}^2$ e $\pi = (12)$.

Observação 2.2.2. Podemos definir uma IET sobre qualquer intervalo semi-aberto $[p, q)$, com $p \leq q$ números reais, da seguinte forma: Na definições acima tome $\alpha \in \mathbb{R}^m$ tal que $\alpha_i > 0$, $\forall i \in 1, \dots, m$ e $\sum_{i=1}^m \alpha_i = p - q$.

A seguir, T denotará uma IET arbitrária, e sem perda de generalidade, consideraremos seu domínio como $[p, q) = [0, 1)$.

Observação 2.2.3. Note que os pontos de descontinuidade de T pertencem ao conjunto $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ e T é contínua em β_i se e somente se $\tau(i+1) = \tau(i) + 1$. Ou seja; T é descontínua em β_i se e somente se $(T\beta_{i-1}, T\beta_i)$ não surge nesta ordem no conjunto ordenado $\{\beta_0^\tau, \dots, \beta_{m-1}^\tau\}$. Dizemos que T está na forma padrão caso as descontinuidades de T sejam somente os β_i 's, ou de forma equivalente, se $\tau(i+1) \neq \tau(i) + 1$ para todo $i \in 1, \dots, m-1$. É fácil ver que qualquer IET pode ser escrita na sua forma padrão como uma IET sobre n intervalos, com $n \leq m$.

Agora exibiremos um exemplo de uma IET sobre 3 intervalos:

Exemplo 2.2.1. Tomando $m = 3$, $\alpha = (0.3; 0.6, 0.1)$ e $\tau = (1, 2, 3) \mapsto (3, 2, 1)$, temos:

$$\begin{cases} I_1 = [0, 0.3) \\ I_2 = [0.3, 0.9) \\ I_3 = [0.9, 1) \\ I_1^\tau = [0.7, 1) \\ I_2^\tau = [0.1, 0.7) \\ I_3^\tau = [0, 0.1) \end{cases}$$

Por fim,

$$T(x) = \begin{cases} x + 0.7, & x \in [0, 0.3) \\ x - 0.2, & x \in [0.3, 0.9) \\ x - 0.9, & x \in [0.9, 1) \end{cases}$$

O gráfico de T está representado abaixo na figura 2.1.

1. T restrita a I_i é uma isometria sobre $I_{\tau(i)-1}^\tau$.
2. T é invertível.
3. T^k é uma IET para todo k inteiro.

Figura 2.1:

2.3 Condições de Minimalidade

O resultado a seguir caracteriza as IET's minimais:

Teorema 2.3.1. (*Oseledets-Keane*) *Seja T uma (α, τ) -IET. Então T é minimal se e somente se T satisfaz as chamadas condições de minimalidade (M1) e (M2):*

M1 *Se F é a união finita de intervalos semi-abertos cujos extremos estão contido no seguinte conjunto: $D^\infty = \bigcup_{n=0}^{m-1} \mathcal{O}(x) \cup \{1\}$ Então $T(F) = F$ implica $T(F) = F$ ou $T(F) = \emptyset$.*

M2 *T não possui órbitas periódicas.*

Considere os seguintes espaços de medida: Δ_m munido da medida de Lebesgue $(m-1)$ -dimensional normalizada $d\mu$ e $S(m)$ munido da medida da contagem normalizada $d\delta$. Ao associarmos um elemento (α, τ) de $\Delta_m \times S(m)$ a uma (α, τ) -IET, identificamos naturalmente o espaço de probabilidade $(\Delta_m \times S(m), d\mu \times d\delta)$ com o conjunto de todas as IET's sobre n -intervalos.

Definição 2.3.1. *Sejam $E : [a, b) \rightarrow [a, b)$ uma IET e $c \in [a, b)$. Defina a IET induzida em $[a, c)$, F da seguinte forma: $\text{Dom}(F) = \{x \in [a, c) : T^N(x) \in [a, c) \text{ para algum } N > 0\}$.*

Definição 2.3.2. *Seja $E : [a, b) \rightarrow [a, b)$ uma IET. Dizemos que $[s, t) \subset [a, b)$ é uma aresta virtual ortogonal de E se E restrita a $[s, t)$ for contínua e $s \geq E(s) \geq E^2(s) = t$. Defina $\mathcal{B}_k$ como o conjunto das IET's $E : [a, b) \rightarrow [a, b)$ que possuam associadas a si uma sequência de pontos $b_n \rightarrow a$, tal que cada IET induzida $E_n : [a, b_n) \rightarrow [a, b_n)$ possui ao menos $\chi + k + 3$ arestas virtuais ortogonais, duas a duas disjuntas. Denotaremos o conjunto $\bigcap_{k \geq 1} \mathcal{B}_k$ por $\mathcal{B}$.*

Lema 2.3.1. *Para todo $m \geq 2$, $\Delta_m \times S(m) - \mathcal{B}$ é um conjunto de medida zero.*

Demonstração

Como foi demonstrado por Veech [Vee] e Masur [Mas], o operador de Rauzy $\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, definido em um conjunto de medida total $\mathcal{M}$ de $\Delta_m \times S(m)$ é ergódico e tem a seguinte propriedade (P):

(P) Dado $E \in \mathcal{M}$, existe uma sequência $\{[0, a_n]\}$ de sub-intervalos de $[0, 1)$, tais que $a_n \rightarrow 0$ e se $\tilde{E}_n : [0, a_n] \rightarrow [0, a_n]$ denotar a IET induzida por E , então a menos de um reescalonamento, $\mathcal{R}^n(E)$ coincide com E . De forma mais precisa, $\mathcal{R}^n(z) = (1/a_n)\tilde{E}(a_n z)$, para todo $z \in [0, 1)$.

Dado $k \geq 0$, seja A_k o conjunto dado por $E \in \Delta_m \times S(m)$ tais que para algum $a \in (16^{-k} - 32^{-k}, 16^{-k} + 32^{-k})$, $E(x) = a + x$, para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Observe que A_k é aberto, e portanto tem medida positiva. Seja $\tilde{B}_k$ o conjunto dado por $E \in \mathcal{M}$ tal que a $\mathcal{R}$ -órbita positiva de E visita A_k infinitas vezes. $\tilde{B}_k$ é $\mathcal{R}$ invariante, $\mathcal{R}$ é ergódico e A_k tem medida positiva, portanto o complemento de $\tilde{B}_k$ tem medida zero. Logo o complemento de $\mathcal{B} = \bigcap_{k \geq 2} \tilde{B}_k$ tem medida zero.

Observe que se uma IET $E \in A_k$, então E tem mais do que k , duas a duas disjuntas, arestas virtuais ortogonais. Portanto, como $\mathcal{R}$ satisfaz (P) acima, e como a $\mathcal{R}$ -órbita positiva de qualquer $E \in \tilde{\mathcal{B}}$ visita A_k um número infinito de vezes, obtemos que $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$. ■

Capítulo 3

Closing lemma em variedades bidimensionais

A partir dos conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores, demonstraremos, baseado nos artigos [Gu3] e [Gu6] de Gutierrez, alguns resultados parciais acerca do closing lemma de classe C^r para uma variedade bidimensional, suave, compacta e orientáveis, que ao longo deste texto, denotaremos por M . A primeira seção consiste da demonstração de um teorema acerca do closing lemma de classe C^r para $M = T^2$, o toro bidimensional. A segunda seção por sua vez, generaliza os resultados da primeira seção para M qualquer.

Antes, porém, se faz necessário demonstrar dois lemas.

Lema 3.0.2 (Lema da homotopia). *Suponha que existe uma sequência $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Diff}^r(M)$ tal que $F_n(p_n) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha também que F_n tende para o difeomorfismo identidade na topologia C^r . Então, cada campo $(F_n)^*(X + t_n X^\perp)$ é de classe C^r e possui uma órbita fechada por p . Além disto, $(F_n)^*(X + t_n X^\perp) \rightarrow X$ na topologia C^r .*

Definição 3.0.3. *Uma Σ -caixa de fluxo para X é um subconjunto compacto $F \subset M$ cujo interior é uma caixa de fluxo para X , e cuja fronteira é um grafo, homeomorfo a figura do "oito", que é a união dos arcos de trajetória $[\bar{a}, \bar{c}]_X$ e $[\bar{a}, \bar{c}]$, (conectando $\bar{a}$ a $\bar{c}$), de X e $X^\perp$, respectivamente. Nos referiremos a $[\bar{a}, \bar{c}]_X$ e $[\bar{a}, \bar{c}]$ como a aresta ortogonal e tangente, respectivamente, de F .*

A figura 2.1 ilustra uma Σ -caixa de fluxo:

Definição 3.0.4. *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $1 \leq r \leq \infty$, e p um ponto recorrente não-trivial de X . Dizemos que X é Σ -fechado em p , caso exista um intervalo $\Sigma = [p, q)$ tangente a $X^\perp$, tal que para qualquer vizinhança V de p , existe uma Σ -caixa de fluxo para X tendo a sua aresta ortogonal contida em $\Sigma \cap V$.*

Figura 3.1:

Lema 3.0.3. *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $1 \leq r \leq \infty$, e $p \in M$ um ponto recorrente não trivial de X . Suponha que X é Σ -fechado em p . Então existem seqüências $t_n \rightarrow 0$, de números reais, e $p_n \rightarrow p$, de pontos de M , tais que $X + t_n X^\perp$ possui uma trajetória fechada por p_n .*

Demonstração

Como X é Σ -fechado em p , existe um intervalo semi-aberto $\Sigma = [p, q)$ tangente a $X^\perp$, tal que dadas vizinhanças $\mathcal{V}$ de X , e V de p , podemos escolher uma Σ -caixa de fluxo de X , $F \subset M$, e $\sigma > 0$, tais que se $[\bar{c}, \bar{a}]_X$ e $[\bar{a}, \bar{c}]$ são as arestas tangente e ortogonal de ∂F , respectivamente, e $\bar{b}$ é o vértice de ∂F . Então:

(b1) $[\bar{a}, \bar{c}] \subset V$ e o fluxo X entra em F através do subintervalo fechado $[\bar{b}, \bar{c}]$ de Σ . Além disto, para todo $t \in [\sigma, \sigma]$, $X(t) := X + tX^\perp \in \mathcal{V}$.

(b2) $X(-\sigma)$ e $X(\sigma)$ possuem um arco de trajetória contido em F , ambos sendo seções transversais globais de $X|_F$.

Continuaremos considerando o caso em que o fluxo de $X^\perp$ vai de $\bar{a}$ para $\bar{c}$. Seja Γ o conjunto de todos os números reais $s \in [0, \sigma]$ tais que para $t \in [0, s]$ existe um arco de trajetória $[\bar{b}, \bar{a}(t)]_{X(t)}$ de $X(t)$, unindo $\bar{b}$ com $\bar{a}(t) \in [\bar{a}, \bar{b}]$. Neste caso, note que o referido arco de trajetória de $\bar{c}\bar{a}$ por $X + X^\perp$ não escapa da Σ -caixa de fluxo, posto que se isto acontecesse, teríamos que para algum μ e $p \in \partial F$, $X(p)$ e $(X + X^\perp)(p)$ seriam tangentes, o que é um absurdo. Segue que $\bar{a}(0) = \bar{a}$, e que $\bar{a}(t)$ depende continuamente de t . Como visto na figura 3.2 abaixo, quando $t \in \Gamma$, estas condições determinam $\bar{a}(t)$ e também que $[\bar{b}, \bar{a}(t)]_{X(t)}$ seja transversal a X . Além disto, por (b2), $\Gamma = [0, \sigma_1]$ é um intervalo fechado, $\bar{a}(\sigma_1) = \bar{b}$, e portanto $X + \sigma_1 X^\perp$ apresenta uma órbita fechada por $\bar{b}$. ■

Das observações acima segue que:

Figura 3.2:

Teorema 3.0.2. *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e $1 \leq r \leq \infty$. Seja p um ponto recorrente não-trivial de X . Suponha que X é Σ -fechado em p . Então existe $Y \in \mathcal{X}^r(M)$ arbitrariamente próximo de X e tendo uma trajetória fechada por p .*

Supondo que o fluxo sobre M possui um número finito de singularidades, digamos $K \in \mathbb{N}$, a existência de Σ -caixas arbitrariamente próximas de p garantem que podemos tomar $(K + 1)$ Σ -caixas em qualquer vizinhança, desta forma garantindo que ao menos uma Σ -caixa contenha uma singularidade. De fato, este argumento será utilizado adiante.

3.1 Closing lemma no toro T^2

Nesta seção mostraremos que o closing lemma de classe C^r é válido no toro T^2 para os fluxos que são de tipo não-constante. Mais adiante definiremos o que é um fluxo de tipo não-constante. O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1 (Teorema A). *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(T^2)$, ($r \geq 2$), contendo $K \in \mathbb{N}$ singularidades. Se X for de tipo não-constante e p for um ponto recorrente não-trivial de T^2 , então existe um campo vetorial Y , de classe C^r , arbitrariamente próximo de X na topologia C^r , tal que Y possui uma trajetória fechada por p .*

Como veremos, o teorema acima é consequência da combinação dos lemas 3.1.1, 3.1.3 e do teorema abaixo, devido a Gutierrez [Gu2], que não demonstraremos aqui, e que está relacionado à suavização de fluxos contínuos em variedades bidimensionais:

Teorema 3.1.2 (Teorema de Estrutura). *Seja $\phi : \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2$ um fluxo contínuo sobre o toro T^2 que possui ao menos uma trajetória recorrente não trivial. Então existe um compacto*

φ -invariante $\Omega \subset T^2$ tal que qualquer trajetória recorrente não-trivial de φ é densa em Ω . Além disto, o conjunto $\mathcal{C}(\Omega) = \{\text{Círculos orientados de } T^2 \text{ que interceptam } \Omega \text{ e são transversais a } \varphi\}$, é não-vazio e satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Considere $T : C \rightarrow C$ como sendo a transformação de primeiro retorno em C com relação a φ , e o conjunto $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido com a orientação positiva usual. Então dado $C \in \mathcal{C}(\Omega)$, existem uma rotação geométrica não-periódica $R(C) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e uma função contínua, monótona, preservando orientação e de grau um, $h : C \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, que semiconjuga T com $R(C)$. Ou seja; para todo $x \in \text{Dom}(T)$, $h \circ T(x) = R(C) \circ h(x)$. Além disto, se $h_1, h_2 : C \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são transformações que possuem as mesmas propriedades de h , então para alguma rotação geométrica $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $h_1 = R_\alpha \circ h_2$.

(b) Se o fluxo ϕ tem n pontos fixos e T e h são como em (a), então existe $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, com $m \leq n$, tal que

$$h^{-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \{x_1, x_2, \dots, x_m\}) \subset \text{Dom}(T).$$

Antes de prosseguir, demonstraremos dois lemas auxiliares e incluiremos uma definição:

Lema 3.1.1. *Sejam X e Y espaços métricos, X compacto, $A \subset X$ aberto e $f : X \rightarrow Y$ função contínua. Então o conjunto $W = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ está contido em } A\}$ é um subconjunto aberto de Y .*

Demonstração

Mostraremos que $Y - W$ é fechado, ou seja; dada uma sequência $\{y_n\} \subset Y - W$ convergindo para algum $y \in Y$, temos que $y \in Y - W$. Pela definição de W existe uma sequência de pontos $\{x_n\}$ em $X - A$ tal que $f(x_n) = y_n$ para todo n . Como X é compacto e A é aberto, $X - A$ também é compacto, o que implica a existência de uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ em $X - A$ tendendo para algum $x \in X - A$. Pela continuidade de f , $\lim_k y_{n_k} = f(x)$. Por sua vez, $\lim_n y_n = y$, o que implica que $f(x) = y$. Já que $x \notin A$, temos que $y \notin W$, como queríamos. ■

Lema 3.1.2. *Seja C uma curva suave e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da orientação induzida pelo intervalo $[0, 1]$. Sendo $f : C \rightarrow Y$ função contínua e monótona, a imagem inversa de um ponto é um subconjunto conexo de C .*

Demonstração

Suponha por absurdo que existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $h^{-1}(\{x\})$ seja a união de dois fechados disjuntos de C , digamos J e K , de forma que, sem perda de generalidade, que $\inf J < \inf K$. A igualdade na expressão anterior não vale pois J e K são conjuntos fechados. Então existe um ponto $P \in C$, entre J e K . Agora, se Q pertence a J , e R pertence a K , segue do fato de h

preservar ordem que $h(Q) \leq h(P)$ e $h(P) \leq h(R)$. Então $x \leq h(P) \leq x \Rightarrow h(P) = x$. Absurdo, pois P foi escolhido de forma que $P \notin h^{-1}(x)$. ■

O teorema de estrutura tem como implicação o teorema a seguir:

Corolário 3.1.1. *Suponha as condições e notação do teorema de estrutura. Dado $C \in \mathcal{C}(\Omega)$, o subconjunto de C formado pelos pontos recorrentes por ambos lados é denso em $C \cap \Omega$.*

Demonstração

Sejam $h : C \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $T : \text{Dom}(T) \rightarrow C$ e $R(C) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como no item (a) do teorema de estrutura.

Se $x \in C \cap \Omega$, pela transversalidade de C existe uma caixa de fluxo θ por x tal que $\theta(\{0\} \times [-1, 1]) = \Omega \cap C$. Como existe um ponto recorrente $q \in M$ com órbita densa em $\Omega \cap C$, existe um ponto $x \in \gamma_q$ no interior da caixa de fluxo θ pertencente a um arco de trajetória de q . Por definição, θ é homeomorfismo, portanto, $x = \theta(\tau, \xi)$, para algum $(\tau, \xi) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pela definição de caixa de fluxo, $p' := \theta(0, \xi)$ pertence a $\gamma_q \cap C$. Sem perda de generalidade, suporemos que p' é ω -recorrente. Pelo lema A.0.1, p' também é um ponto recorrente não-trivial.

Defina $A_0 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $A_i = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} | h^{-1}(x) \text{ está contido em } \text{Dom}(T^i)\}$, para $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Para um $i \in \mathbb{Z}$ qualquer, $\text{Dom}(T^i)$ é um aberto de C , fato que combinado com o lema 3.1.1 implica que A_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Agora, fixe $i \in \mathbb{Z}$. Então $p := T^i(p')$ e toda a sua órbita positiva pertencem a $\text{Dom}(T^i)$.

O próximo passo consiste em demonstrar que A_i é denso em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, existe uma subsequência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ da $R(C)$ -órbita positiva de $h(p)$ tal que $\lim_n x_n = x_0$. Defina agora p_n como sendo um ponto de $\gamma \cap C$ que satisfaz $h(p_n) = h(q) = x_n$. Suponha que q seja outro ponto que satisfaz estas mesmas propriedades. Então $q \in \gamma_{p_n} \Rightarrow q = T^k(p_n)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $h(T^k(p_n)) = h(p_n) \Rightarrow R^k(C) \circ h(p_n) = h(p_n)$. Como $R(C)$ é aperiódica, $k = 0$, o que implica $q = p_n$.

Denote por J_n a componente conexa de p_n em $\text{Dom}(T^i)$. p_n é ponto recorrente não-trivial, logo pelo argumento acima, h é injetora sobre $J_n \cap \gamma_p$. Portanto $h(J_n)$ é um conjunto conexo e infinito, ou seja; um intervalo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desta forma, os intervalos que são levados em pontos por h contêm somente pontos errantes.

Pelo lema 3.1.2, $h^{-1}(x)$ é um ponto, ou senão, um intervalo de $\mathcal{C}$. Como imagens inversas de pontos distintos são conjuntos disjuntos, e além disto, uma curva pode conter no máximo uma quantidade enumerável de intervalos abertos, temos que existe no máximo uma quantidade enumerável de pontos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cuja imagem inversa é um intervalo. Desta forma, o conjunto $\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \mathcal{U}$, é enumerável, onde $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} | h^{-1}(x) \text{ é um conjunto unitário}\}$. Agora, tome um ponto $y_n \in \mathcal{U} \cap h(J_n) \cap B(p_n, 1/n)$. Desta forma, $h(q_n)$ é unitário e $h^{-1}(q_n) \in J_n \subset \text{Dom}(T_i)$,

isto é, $q_n \in A_i$. Além disto, $\lim_n y_n = \lim_n x_n = x_0$, o que mostra que A_i é denso. Defina $\beta = \mathcal{U} \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} A_i)$. Pelo teorema da categoria de Baire, β também é denso em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Seja $I \cap \gamma \cap C$ um aberto de $\gamma \cap C$, onde I é um intervalo de C . Mostraremos que existe um ponto recorrente por ambos lados em $I \cap \gamma \cap C$. Por argumentos anteriores, $h(I)$ contém um intervalo aberto J , e portanto um elemento $y \in \beta \cap I$. A $R(C)$ -órbita positiva de y intercepta cada componente conexa de $J - \{x\}$ uma quantidade infinita de vezes. Como h preserva ordem, a T -órbita positiva de $h^{-1}(y)$ também intercepta cada componente conexa de $J - \{x\}$ uma quantidade infinita de vezes.

O mesmo argumento pode ser repetido para a $R(C)$ -órbita negativa de y . Portanto, $h^{-1}(y)$ é um ponto recorrente por ambos lados. ■

Observação 3.1.1. Não demonstraremos este fato, cuja demonstração está em [Gu4], mas uma das conseqüências do teorema de estrutura é o seguinte: Se φ possui uma órbita recorrente não-trivial γ e se $C \in \mathcal{C}(\Omega)$, então γ é densa em C , ou $\overline{C \cap \gamma}$ é um conjunto de Cantor.

Definição 3.1.1. Seja M uma variedade munida com a orientação usual e uma métrica suave Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dados $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $1 \leq r \leq \infty$, definimos $X^\perp \in \mathcal{X}^r(M)$ como o campo que satisfaz as seguintes propriedades:

a $\langle X, X \rangle = \langle X^\perp, X^\perp \rangle$, e

b Sempre que $p \in M$ for um ponto regular de X , o par ordenado $(X(p), X^\perp(p))$ é uma base ortogonal positiva de $T_p(M)$ (fixada uma orientação de M).

Sejam $\phi : \mathbb{R} \times T^2 \rightarrow T^2$ um fluxo contínuo sobre T^2 e Σ um segmento aberto, orientado e transversal a ϕ . Diremos que Σ é ϕ -positivo, (respectivamente, ϕ -negativo), se para tempo crescente, o fluxo ϕ atravessa Σ como na figura abaixo. Seja C um círculo transversal a ϕ . Diremos que C é ϕ -positivo, (respectivamente, ϕ -negativo), caso cada subintervalo de C , com a orientação induzida, seja ϕ -positivo, (respectivamente, ϕ -negativo).

Teorema 3.1.3. Suponha as condições do teorema de estrutura (3.2). Dados dois círculos C e $\tilde{C}$ em $\mathcal{C}(\Omega)$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_{i+n} = \tilde{a}_{i+m}$, onde $\{a_k\}$ e $\{\tilde{a}_k\}$ denotam as seqüências dos quocientes parciais dos números de rotação α e $\tilde{\alpha}$, de $R(C)$ e $R(\tilde{C})$, respectivamente. Além disto, $m - n$ é um inteiro par se e somente se C e $\tilde{C}$ são simultaneamente ϕ -positivos ou ϕ -negativos.

Demonstração

Introduziremos a seguinte notação: Se $z \in T^2$ e $w = X_t(z)$, para algum $t \in (0, \infty)$, $\Gamma(z, w)$ denotará o arco de trajetória de X começa em z e termina em w . Quando $p \in M$ e $q \in \varphi(\tau, p)$, para algum $\tau > 0$, o arco de trajetória conectando p com q será denotado $\Gamma(p, q)$.

Pelo corolário 3.1.1, existe um ponto recorrente por ambos lados $p \in \Omega \cap C$. Denote por $T : C \rightarrow C$, (respectivamente, por $\tilde{T} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$), a transformação de Poincaré induzida por φ , e por Σ_n , (respectivamente, por $\tilde{\Sigma}_n$), com $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, o subintervalo aberto de C , (respectivamente), de $\tilde{C}$, que possui como pontos extremos $T^{-q_n}(p)$ e $T^{q_n}(p)$, e que contém p . Sejam $\{q_n\}$, (resp. $\{\tilde{q}_n\}$), a sequência dos denominadores dos convergentes principais de α , (resp. $\tilde{\alpha}$). Pelo teorema de estrutura, podemos assumir que $h(p) = 0$, apenas alterando a semiconjugação por meio de uma composição com a rotação $R_{-h(p)}$. Da proposição 2.1.1, segue que:

(1) $\|R_\alpha^{q_{n+1}}(h(p)) - h(p)\| < \|R_\alpha^j(h(p)) - h(p)\|$, para $0 < j < q_{n+1}$. Isto implica que $R_\alpha^j(h(p)) \notin [-R_\alpha^{q_n}(h(p)), R_\alpha^{q_n}(h(p))]$, para $0 < j < q_{n+1}$. Pelo fato de h preservar ordem, segue que; $T^j(p) \notin \Sigma_{q_n}$, para $0 < j < q_{n+1}$ ¹. Como $\Gamma(p, T^{q_{n+1}}(p)) \cap \Sigma_{q_n} \subset \{p, T(p), \dots, T^{q_n}(p), T^{q_{n+1}}(p)\}$, $\Gamma(p, T^{q_{n+1}}(p)) \cap \Sigma_{q_n} = \{p, T^{q_{n+1}}(p)\}$. De forma recíproca, temos que se $m \in \mathbb{N}$ for grande o suficiente e $\Gamma(p, T^m(p)) \cap \Sigma_{q_m} = \{p\}$, então m é igual a algum q_m .

Observe também que:

(2) Se C e $\tilde{C}$ são homotópicas, e a homotopia preserva as orientações de Σ e $\tilde{\Sigma}$, então $R(C) = R(\tilde{C})$.

Sejam q o primeiro ponto de γ_p^+ que intersecta $\tilde{C}$, e B a caixa de fluxo cujo interior contém $\Gamma(p, q)$. Podemos utilizar uma homotopia com suporte em B para transformar $\tilde{C}$ em um novo círculo, ainda denotado por $\tilde{C}$, mas agora satisfazendo:

(3) $C \cap \tilde{C}$ contém um intervalo Σ que contém p . Sem perda de generalidade, por (1), podemos supor que vale (2). Seja m tal que $\Sigma_m \subset C \cap \tilde{C}$. Por (1), podemos concluir que $pT^m(p) \cap \Sigma_{\tilde{q}_m} = \{p\}$, então m é igual a algum q_n . Logo $q_n = q_m$. Desta forma, como $\Gamma(p, T^{q_{n+1}}(p)) \cap \Sigma_{q_n} = \{p, T_{q_{n+1}}(p)\}$ e $\Gamma(p, T^{\tilde{q}_{n+1}}(p)) \cap \Sigma_{\tilde{q}_n} = \{p, T^{\tilde{q}_{n+1}}(p)\}$, temos que $T^{q_{n+1}}(p) = T^{\tilde{q}_{n+1}}(p) \Rightarrow n + 1 = m + 1$. De forma indutiva, $n + i = m + i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para $j, l \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{U}_j(\Sigma_l)$ e $\tilde{\mathcal{U}}_j(\tilde{\Sigma}_l)$ como as cardinalidades dos conjuntos $\Gamma(p, T^{q_j}(p)) \cap \Sigma_l$, e $\Gamma(p, T^{\tilde{q}_j}(p)) \cap \Sigma_l$, respectivamente. Por 2.1.3, e pelo fato de $R(C)$ e $R(\tilde{C})$ serem unicamente ergódicas, podemos aplicar o teorema ergódico de Birkhoff para concluir que para os naturais n e m acima, e para todo $i \in \mathbb{N}$, vale que:

$$a_{n+1} = \left[\frac{2q_{n+i-2}\alpha}{2q_{n+i-1}\alpha} \right] = \left[\frac{h(\Sigma_{q_{n+i-2}})}{h(\Sigma_{q_{n+i-1}})} \right] = \left[\lim_j \frac{\mathcal{U}_{q_{n+i+j}}(\Sigma_{q_{n+i-2}})}{\mathcal{U}_{q_{n+i+j}}(\Sigma_{q_{n+i-1}})} \right] =$$

¹Note que $-R_\alpha^j(h(p)) = R_\alpha^{-j(h(p))}$

$$= \left[\lim_j \frac{\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{q}_{m+i+j}}(\tilde{\Sigma}_{\tilde{q}_{m+i-2}})}{\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{q}_{m+i+j}}(\tilde{\Sigma}_{\tilde{q}_{m+i-1}})} \right] = \left[\frac{2\tilde{q}_{n+i-2\alpha}}{2\tilde{q}_{n+i-1\alpha}} \right] = \tilde{a}_{m+i}.$$

Utilizando (3) e o item (b) de 2.1.4, podemos concluir que se $q_n - q_m$ for par, então $T^{q_n}(p)$ e $T^{q_m}(p)$ estão na mesma componente conexa de $C - \{p\}$. Logo $m - n$ é par se, e somente se as orientações de Σ , induzidas pelas orientações de C e $\tilde{C}$ são as mesmas. ■

É imediato pela parte final do teorema acima que

Corolário 3.1.2. *Sejam φ e $\mathcal{C}(\Omega)$ como no teorema de estrutura. A propriedade de $R(C)$ ser de tipo constante, (respectivamente, não-constante), onde $C \in \mathcal{C}(\Omega)$, não depende de C em particular, mas sim de φ .*

O corolário acima justifica a definição a seguir:

Definição 3.1.2. *Sejam φ e $\mathcal{C}(\Omega)$ como no teorema de estrutura. Diremos que ϕ é de tipo constante (respectivamente, não constante), caso exista algum $C \in (\Omega)$ tal que $R(C)$ seja de tipo constante (respectivamente, não constante).*

Iniciamos agora a demonstração do teorema A.

(1) Suporemos que o ponto não-errante em questão é não-trivial: pois caso sua órbita fosse periódica, poderíamos tomar $X = Y$ no closing lemma. Como visto anteriormente, basta demonstrar o caso em que p é recorrente não trivial. Assim, supondo as condições do teorema A, podemos tomar o ponto p como recorrente não-trivial e X como sendo de tipo não-constante. Fixando uma orientação para T^2 , tome um intervalo suave, X -positivo e aberto Σ , passando por p . Ver figura 5.2.

Utilizando o lema 1.2.1 e o fato de que X não é de tipo constante, podemos supor que a orientação de T^2 foi escolhida de forma que:

(2) Se h e $R(C)$ são as transformações referidas no item (a) do teorema de estrutura e α é o número de rotação de $R(C)$, então existe um subsequência $\{a_{i_k}\}$ de $\{a_i\}$, a sequência de quocientes parciais de α , tal que todo sufixo i_k é um número ímpar. Também vale que $\lim_k a_{i_k} = \infty$. Seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança de X em $\mathcal{X}^r(T^2)$. Suponha que Σ tenha sido tomado tangente² a γ_p em p , e de forma que, para algum $\epsilon > 0$:

(3) Existe uma função contínua estritamente crescente $\sigma : [0, \epsilon) \rightarrow C$, satisfazendo $\sigma(0) = p$, e tal que para todo $\mu \in [0, \epsilon)$, $X + \mu X^\perp \in \mathcal{V}$. Além disto, os segmentos $\sigma((0, \mu))$ e $\sigma((\mu, \epsilon))$, com a orientação induzida por C são respectivamente $X + \mu X^\perp$ -positivos, e $X + \mu X^\perp$ -negativos, como na figura 3.1:

²Esta construção é feita por meio de uma caixa de fluxo como a do exemplo da observação ??.

Como p é um ponto recorrente por ambos lados, $h(\sigma[0, \epsilon))$ contém um intervalo I . Pelo corolário 3.1.1, podemos tomar um ponto recorrente por ambos lados $q \in h^{-1}(I) \cap \sigma(0, \epsilon)$. Novamente, podemos supor $h(q) = 0$ e que existe um subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que

$$(4) \quad \{x_1, \dots, x_m\} \subset \text{Dom}(T).$$

Sejam $\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tais que o intervalo $[\theta, \theta + r]$ esteja propriamente contido em $h[0, \epsilon)$. Tome $n \in \mathbb{N}$ ímpar tal que $\widehat{q_{n-1}\alpha} < r$. Portanto Segue de (2) e das proposições 2.1.4 e 2.1.5, que $R_\theta([0, \widehat{q_n\alpha}])$ e $R_\theta([\widehat{q_n\alpha}, \widehat{2q_n\alpha}])$ estão contidos em $h(\sigma[0, \epsilon))$.

$$(5) \quad \text{Além disto, } \bigcup_{j=0}^{q_n} R_{j\alpha+\theta}([0, \widehat{q_n\alpha}]) \text{ é disjunto de } \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Sob estas condições, o item (b) da proposição 2.1.4 implica que se $p_1 \in h^{-1}(\theta)$, $p_2 \in h^{-1}(\widehat{q_n\alpha} + \theta)$ e $p_3 \in h^{-1}(\widehat{2q_n\alpha} + \theta)$. Como n é ímpar:

$$\widehat{2q_n\alpha} + \theta > \widehat{q_n\alpha} + \theta > \theta,$$

De forma que

$$\sigma^{-1}(p_3) < \sigma^{-1}(p_2) < \sigma^{-1}(p_1).$$

Por (4) e (5), podemos supor que:

$$(6) \quad T^{q_n}(p_1) = p_2, T^{q_n}(p_2) = p_3, \text{ e que } T^{q_n}(\overline{p_1 p_2}) = \overline{p_2 p_3}.$$

Se $x, y \in \sigma([0, \epsilon))$, $\overline{xy}$, denotará o subintervalo de $\sigma([0, \epsilon))$ com a orientação induzida.

O conjunto $B = \bigcup_{x \in \overline{p_1 p_2}} \Gamma(x, T^{q_n}x)$ pode ser pensado como uma caixa de fluxo com os seus dois intervalos colados em p . Em outras palavras, B é uma Σ -caixa de fluxo.

Mostraremos agora que existe um $\mu_0 \in (0, \epsilon)$ tal que $X + \mu_0 X^\perp$ exibe uma órbita fechada por p_2 . Dado $\mu \in (0, \sigma^{-1}(p_2))$, denote por $A_\mu \subset \text{int}(B)$ o arco de trajetória aberto e orientado de $X + \mu_0 X^\perp$ que começa em p , e termina no ponto $x(\mu)$ na fronteira de B . As seguintes propriedades são satisfeitas: (7.1) Para todo $\mu \in (0, \sigma^{-1}(p_2))$, $\overline{p_2 p_1}$ é um segmento $(X + \mu X^\perp)$ -positivo e $\Gamma(p_2, p_3)$ e $\Gamma(p_1, p_2)$ são segmentos $(X + \mu X^\perp)$ -negativos.

$$(7.2) \quad \text{Para todo } \mu \in [0, \sigma^{-1}(p_3)], \overline{p_3 p_2} \text{ é um segmento } (X + \mu X^\perp)\text{-positivo.}$$

$$(7.3) \quad \text{Para todo } \mu \in (\sigma^{-1}(p_3), \sigma^{-1}(p_2)), \overline{p_3 \sigma(\mu)} \text{ é um segmento } (X + \mu X^\perp)\text{-negativo e } \overline{\sigma(\mu) p_2} \text{ é um segmento } (X + \mu X^\perp)\text{-positivo.}$$

Das propriedades acima, segue que A_μ está bem definido, e que $x(\mu)$ é uma função contínua, monótona e estritamente crescente, de $\mu \in (0, \sigma^{-1}(p_2))$ e que para algum $\mu_0 \in (0, \sigma^{-1}(p_2))$, $x(\mu_0) = p_2$. Desta forma, o teorema A está demonstrado. ■

3.2 Closing lemma em variedades bidimensionais

Ao longo desta seção M denotará uma variedade suave, orientável, compacta, bidimensional e χ , sua característica de Euler.

O objetivo desta seção é demonstrar um teorema análogo ao Teorema A, tratando, porém, do caso mais geral em que M é qualquer variedade bidimensional, compacta e orientável. Veremos que o comportamento assintótico de um ponto recorrente não-trivial p , de um campo vetorial $X \in \mathcal{X}^r(M)$, depende do comportamento assintótico da trajetória γ_p . Este itinerário é representado por uma IET, digamos $E = E(p) = E((p), [p, q))$, que é semiconjugada a uma transformação de primeiro retorno T definida em um intervalo semi-aberto $[p, q)$ transversal ao fluxo. Na seção anterior, as IET's consideradas são aquelas que agem irreduzivelmente sobre apenas dois intervalos: as rotações. Enunciaremos o fato de que o fato de $E(p, [p, q))$ pertencer ao conjunto $\mathcal{B}$ definido no capítulo 2 não depende do segmento transversal escolhido, mas sim do fluxo. Quando E pertencer a $\mathcal{B}$, então será possível encontrar Σ -caixas de fluxo arbitrariamente próximas de p , onde campos arbitrariamente próximos de X possuem uma órbita fechada.

Teorema 3.2.1 (Teorema B). *Para algum conjunto $\mathcal{B}$ de medida total no conjunto das IET's vale a seguinte afirmação: Seja X um campo vetorial de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, com um número finito de singularidades sobre uma superfície compacta orientável M . Dado um ponto recorrente não-trivial $p \in M$ de X , a transformação de primeiro retorno ao redor de p é semi-conjugada a uma IET $E : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$. Se $E \in \mathcal{B}$, então existe um campo vetorial Y , de classe C^r , arbitrariamente próximo de X na topologia C^r , tal que Y possui uma trajetória fechada por p .*

Notas

(a) O conjunto $\mathcal{B}$ está definido na seção 2.3.

(b) O teorema acima garante a validade do closing lemma de classe C^r para uma classe de fluxos, mas não nos dá informações sobre o "tamanho" ou densidade desta classe de fluxos em $\mathcal{X}^r(M)$. Novamente, apresentaremos um teorema de estrutura devido Gutierrez, que introduzirá as IET's citadas no capítulo 2, no contexto do estudo de fluxos:

Teorema 3.2.2 (Teorema de Estrutura). *Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Existe uma quantidade finita de trajetórias $\gamma_{p_1}, \gamma_{p_2}, \dots, \gamma_{p_l}$ de X tais que se γ_p é qualquer trajetória recorrente não-trivial, então $\bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_{p_i}$, para algum $i = 1, 2, \dots, l$. Suponha que X tem exatamente $K \in \mathbb{N}$ singularidades (o caso $K = 0$ é permitido). Seja p um ponto recorrente não-trivial de X . Tome um intervalo semi-aberto $[p, q) \subset M$ transversal a X , tal que p é um ponto de acumulação de $\gamma_p \cap (p, q)$. Denote por $P_X : [p, q) \rightarrow [p, q)$ a transformação de primeiro retorno induzida por X . Se $[p, q)$ for pequeno o suficiente, ele pode ser associado com $(p, [p, q))$, uma IET $E = E_{(p, [p, q))} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, e uma*

transformação contínua, monótona e sobrejetiva $h : [p, q] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(p) = 0$, h restrita a uma dada órbita de P_X é injetiva, e para todo $x \in \text{Dom}(P_X)$, $E \circ h(x) = h \circ P(x)$. Além disto;

(a1) Existe um subconjunto $S \subset [0, 1]$ de no máximo $\chi + K + 2$ elementos tal que se A for uma componente conexa de $[0, 1] - S$, então $h^{-1}(A)$ está contido em $\text{DOM}(T)$;

(a2) Seja $\bar{p} \in \gamma_p$ um ponto recorrente não-trivial de X e $(\bar{p}, [\bar{p}, \bar{q}])$ um par satisfazendo as mesmas condições que $(p, [p, q])$ acima. Então a propriedade da IET $E_{(\bar{p}, [\bar{p}, \bar{q}])}$ pertencer a $\mathcal{B}_k$ não depende de $(\bar{p}, [\bar{p}, \bar{q}])$, mas sim de X .

Sob as condições do teorema acima, e se $E \in \mathcal{B}_k$, qualquer ponto recorrente não-trivial de γ_p é denominado ponto de tipo $\mathcal{B}_k$. O teorema B é uma combinação do teorema de estrutura, do fato de $\mathcal{B}$ ter medida total no espaço das IET's (lema 2.3.1), e do teorema abaixo:

Teorema 3.2.3. *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $1 \leq \infty$, tendo $K \geq 0$ singularidades. Seja $p \in M$ um ponto recorrente não-trivial de tipo $\mathcal{B}_k$. Então existe um $Y \in \mathcal{X}^r(M)$, arbitrariamente próximo de X , possuindo uma trajetória fechada passando por p .*

Demonstração

Este teorema é enunciado da seguinte forma: seja $p \in M$ ponto recorrente não-trivial de tipo $\mathcal{B}_k$ de $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $1 \leq r \leq \infty$. Suponha que X tenha $K \geq 0$ singularidades. Então existe um $Y \in \mathcal{X}^r(M)$ arbitrariamente próximo de X , tendo uma trajetória fechada passando por p .

Pelo teorema 3.0.2, é suficiente mostrar que X é Σ -fechado em p . Sejam $\Sigma = [p, q]$, $T : [p, q] \rightarrow [p, q]$, $E : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h : [p, q] \rightarrow [0, 1]$, como no teorema de estrutura. No lema 2.3.1, o fato de que $\lim_n a_n = 0$, nos permite tomar n grande o suficiente, de forma que $h^{-1}([0, a_n])$ esteja arbitrariamente próximo de p . Defina $b = a_n$. Então:

Como $E \in \mathcal{B}_k$, dada uma vizinhança V de p , existem $b \in (0, 1)$ e uma IET $E_V : [0, b] \rightarrow [0, b]$ tais que (d) E_V tem ao menos $\chi + K + 3$ arestas virtuais ortogonais contidas em $[0, b]$, e além disto, o intervalo $h^{-1}([0, b])$ está contido em V . Seja $T_V : \Sigma_V \rightarrow \Sigma_V$ a transformação de primeiro retorno induzida por T . Como X tem K singularidades, (d) e o teorema de estrutura implicam que E_V possui uma aresta virtual ortogonal $[a, E_V(a)] \subset [0, b]$ tal que para algum $a \in \text{Dom}(T|_{\Sigma_V})$, $[\bar{a}, T_V(\bar{a})] = h^{-1}([a, E(a)]) \subset \text{Dom}(T|_{\Sigma_V})$. Portanto, existe uma Σ -caixa de fluxo limitada por $[\bar{a}, T_V^2 \bar{a}] \cup [\bar{a}, T_V^2(\bar{a})]_X$. Como V foi escolhido de forma arbitrária, isto mostra que X é Σ -fechado em p . ■

Apêndice A

Noções básicas da Teoria dos Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é uma construção que sugere uma ordenação temporal sobre o espaço, onde o tempo é representado por um elemento de um grupo aditivo $G = \mathbb{Z}$, ou $G = \mathbb{R}$. Como veremos, os fluxos definidos por campos vetoriais e as iterados de uma IET definem sistemas dinâmicos.

Definição A.0.1. *Sejam X um espaço topológico e $\phi : G \times X \rightarrow X$ uma transformação tal que*

1. $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s), \forall x \in X \text{ e } \forall s, t \in G.$
2. $\phi(x, 0) = x, \forall x \in X.$

Dizemos que o par ordenado (X, ϕ) é um sistema dinâmico sobre X .

Observação A.0.1. *A definição acima pode ser estendida para o caso em que G é apenas um grupo topológico, como por exemplo, um grupo de Lie. Desta forma, substituímos o 0 na definição acima pelo elemento neutro $e \in G$. Aqui consideraremos os seguintes casos:*

- $G = \mathbb{R}$: *diremos que ϕ é um fluxo sobre X e que (X, ϕ) é um sistema dinâmico contínuo.*
- $G = \mathbb{Z}$: *diremos que (X, ϕ) é um sistema dinâmico discreto.*

Os sistemas discretos aqui citados serão aqueles definidos por iterações de uma transformação invertível $T : X \rightarrow X$ da seguinte forma: $\phi(x, k) = T^k(x), \forall x \in X \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}$. É fácil ver que ϕ definida desta forma satisfaz as propriedades necessárias para que (X, ϕ) seja um sistema dinâmico discreto, que será denotado por (X, T) para simplificar a notação.

Exemplo Sejam M uma variedade suave e compacta de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo vetorial de classe C^1 . Então pelo teorema de existência e unicidade, para todo $x \in M$ existe uma solução global $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ da equação $\dot{x} = X(x)$. A função $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dada

por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é um fluxo, e portanto (M, φ) é um sistema dinâmico. Para $t \in \mathbb{R}$ fixo, φ define um sistema dinâmico discreto (X, f) da seguinte forma: $f(k, x) = \varphi(tk, x)$, para k inteiro e x em X .

Definição A.0.2. O conjunto $\{(x, t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset X$ é chamado de órbita de x , e aqui será denotado por $\mathcal{O}(x)$. Se existe $T \in G$ tal que $(x, t + T) = x$, dizemos que x e sua órbita são T -periódicos. O menor T tal que x é T -periódico é chamado de período de x . Se o período de x for 1, dizemos que x é ponto fixo. Nesta caso $\mathcal{O}(x) = \{x\}$.

Definição A.0.3. Para todo $x \in X$, definimos os seguintes subconjuntos (possivelmente vazios) de X : $\alpha(x) = \{x \in Z \text{ tal que } \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ satisfazendo } \lim_n t_n = -\infty \text{ e } \lim_n (t_n, x) = x\}$

Definição A.0.4. Dizemos que um ponto $p \in X$ é não-errante caso para toda vizinhança V de p , $\exists T = T(V) \in G$, $T > 0$ tal que $\{(\{x\} \times V)\} \cap V \neq \emptyset$.

Definição A.0.5. Dizemos que um ponto $p \in M$ é recorrente é errante caso $x \in \alpha(x)$ ou $x \in \omega(x)$.

Observação A.0.2. Se X for um espaço topológico primeiro contável, um ponto $p \in X$ é não-errante caso $\exists p_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X e t_n sequência de números reais tal que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tais que $(p, t_n) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$. Segue que se pudermos tomar $p_n = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então p é ponto recorrente.

Proposição A.0.1. Sejam M uma variedade compacta e suave, $X \in \chi^r(M)$, $r \geq 1$ um campo vetorial e o fluxo gerado por este campo. Se $\Omega(X)$ é o conjunto dos pontos não-errantes de , então $\Omega(X)$ é um compacto não-vazio e contém o conjunto dos ponto recorrentes, que por sua vez contém $\text{Per}(X)$, o conjunto dos pontos periódicos de .

Lema A.0.1. Se $p \in M$ é ponto recorrente não-trivial, então qualquer ponto em γ_p também é.

Demonstração Basta mostrar que p é recorrente, já que ele não é ponto periódico por estar na órbita de um ponto não-periódico de um fluxo. Suponha que p é recorrente. Então $p \in \omega(p)$, sem perda de generalidade, pois se $p \in \alpha(X)$, então $p \in \omega(-X)$.

Por sua vez, como $x \in \gamma_p$, x é da forma $\varphi(t, p)$, para algum t real. $p \in \omega(p)$ implica que existe uma seqüência $\{t_n\}$ tal que $\lim_n t_n = +\infty$ e que satisfaz $\lim_n \varphi(t_n, p) = p$. Pela continuidade de φ_t , $x = \varphi(t, p) = \varphi(t, \lim_n \varphi(t_n, p)) = \lim_n \varphi(t, \varphi(t_n, p)) = \lim_n \varphi(t_n, \varphi(t, p)) = \lim_n \varphi(t_n, x)$. Logo $x \in \omega(x)$, e portanto p é ponto recorrente não-trivial. ■

Definição A.0.6. Uma transformação $T : X \rightarrow X$ invertível é dita minimal se para todo $x \in X$, sua órbita $\mathcal{O}(x)$ seja densa em X .

Apêndice B

Noções básicas da Teoria Ergódica

Nesta apêndice reunimos alguns fatos básicos da teoria ergódica que são utilizados no texto. Utilizaremos as letras $(X, \mathcal{U}, d\mu_1), (Y, \mathcal{V}, d\mu_2)$ para denotar σ -álgebras.

Definição B.0.7. Dizemos que uma transformação $f : X \rightarrow Y$ é mensurável caso $f^{-1}(V)$ pertença a $\mathcal{U}$ para todo $V \in \mathcal{V}$.

Definição B.0.8. Dizemos que uma transformação $f : X \rightarrow Y$ preserva medida caso $\mu_1(T^{-1}(V)) = \mu_2(V)$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Se $X=Y$, dizemos que uma medida μ é f -invariante caso $\mu_1(T^{-1}(U)) = \mu_1(U)$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Definição B.0.9. Dizemos que uma transformação $f : X \rightarrow X$ que preserva medida é ergódica caso $T^{-1}(U) = U$ se e somente se $U = X$ ou $U = \emptyset$.

Lema B.0.2. Se existe exatamente uma medida f -invariante, então esta medida é ergódica, e é chamada de unicamente ergódica.

Teorema B.0.4 (Teorema Ergódico de Birkhoff). Se $T : (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$ é uma transformação ergódica que preserva medida num espaço de probabilidade (M, μ) . Se $A \in M$ for um conjunto mensurável, então para todo $x \in M$ a menos de um conjunto de medida zero,

$$\mu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \{j \in \{0, 1, \dots, N-1\} | T^j(x) \in A\}$$

Se X for um espaço métrico e T for unicamente ergódica, então a convergência acima vale uniformemente e em toda a parte.

Referências Bibliográficas

- [Gu1] Gutierrez C. 1978 *Smooth non-orientable non-trivial recurrences on two-manifolds*, J. Diff. Eqns., 3, 388-95.
- [Gu2] Gutierrez C. 1987 *A counter-example to a C^2 -closing lemma*, Erg. Theor. Dyn. Sys., 7, 509-30.
- [Gu3] Gutierrez C. 1986 *On the C^r -closing lemma for flows on the torus T^2* , Erg. Theor. Dyn. Sys., 6, 45-56 .
- [Gu4] Gutierrez C. 1986, *Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences*, Erg. Theor. Dyn. Sys., 6, 17-44.
- [Gu5] Gutierrez C. 1978, *Structural stability for flows on the torus with a cross-cap*, Trans. Amer. Math. Soc., 241, 311-20.
- [Gu6] Gutierrez C. 2000, *On C^r -closing for flows on two-manifolds*, Nonlinearity, 241, 1883-88.
- [Man] Mañé R. 1982, *An ergodic closing lemma*, Ann. of Math, 116, 503-41.
- [Mar] Markley N. 1969 *The Poincaré-Bendixon theorem for the Klein bottle*, Trans. Am. Math. Soc., 135, 159-65.
- [Mas] Masur H. 1982, *interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math., 115, 169-200.
- [Pe1] Peixoto M. 1987, *Acceptance speech for the TWAS award in mathematics*, Proc. of the Second General Conference Organized by the Third World Academy of Sciences, 1, 606.
- [Pe2] Peixoto M. 1962, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology, 1, 101-20.
- [Pg1] Pugh C. 1967 *The Closing Lemma*, Am. J. Math., 89, 956-1009.
- [Pg2] Pugh C. 1967 *An improved closing lemma and a general density theorem*, Am. J. Math., 89, 1010-21.

- [Sl] Slater N. B. 1967, *Gaps and steps of the sequence $n\theta \bmod 1$* , *Proc.Camb.Phil.Soc.*, 63, 1115 – 123.
- [S-T] Schwatz A. J. Thomas E. S. 1970, *The depth of the center 2-manifolds*, *Global Anal. Pure Math.*, 14, Amer. Math. Soc.: Providence, R.I., 253-64.
- [Vee] Veech W. 1982, *Gauss measure for transformations on the space of interval exchange maps*, *Ann. Math.*, 115, 201-42.