Fundamentalidade no Espaço
das Funções Contínuas
Definidas em Esferas

CLAUDEMIR PINHEIRO DE OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de “Mestre em Ciências - Área: Matemática”.

USP - São Carlos
junho/1996

*Aos meus pais e a minha amada
esposa Luciane pelos momentos
de compreensão e incentivos in-
dispensáveis.*

*“Olhando para o formoso horizonte, vejo com prazer a natureza que Deus fez ...
A água cristalina que contorna os montes, sinto um frio que a brisa traz...
Tudo aqui é silencioso - parece que há paz.
Mas, nem aqui posso esquecer do homem que se destrói,
Que mata o seu irmão para subir, que em bombas e doenças se desfaz.
Me pergunto baixinho - para onde foi a paz?
Ainda está aqui em meus ouvidos a retinir...
O choro de uma criança morta, inocente...
O barulho dos canhões matando gente,
O barulho de um acidente que tanta desgraça traz,
Será que do mundo se esqueceu a paz?
Olho para o lado oposto e não posso cegar-me a desfigurados rostos,
Desnutridos, marginalizados, tratados como animais.
Meu coração se escusa, minha consciência acusa, não faço nada pela paz!...
Ainda aqui não posso deixar de pensar na guerra fria entre países,
Nos tantos gastos em armas, no irmão que chora pela paz,
Olho para o horizonte pra ver se atrás do monte não se esconde a paz.
Não!... Olhando para a natureza tão tranquila,
Não posso imaginar que de fome definha um irmão,
Ninguém o quer, nem para trabalhar.
O magnata não se contenta, ele quer mais.
Será que ele sabe o que é ter paz?
Comecei a levantar os olhos e vi que por detrás do monte,
Lá no imenso horizonte estava a paz.
Corri ao seu encontro, mas cansei e parei.
Comecei a ouvir o que a paz tinha a dizer:
Não volto para o seu mundo, pois tenho medo de morrer!
Tenho medo que o homem me mate e perca de vez a paz...!”*

Agradecimentos¹

Acima de tudo agradeço a Deus que sempre me iluminou, mostrando-me os caminhos a serem seguidos para que eu pudesse superar os obstáculos e conquistar os meus objetivos e, ainda porque sem Ele tudo estaria por fazer.

Ao professor Valdir Antonio Menegatto pela orientação, dedicação, paciência e amizade dedicadas, antes e no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais Alcides Pedro de Oliveira e Sinézia Pinheiro de Oliveira, pela vida e carinho dispensados.

Aos meus irmãos que de uma forma carinhosa procuraram incentivar-me.

Aos amigos que me proporcionaram momentos alegres dando-me a certeza que nunca estive só na caminhada e pelo apoio nos momentos difíceis desta etapa.

Às secretárias Laura e Beth pela simpatia, atenção e eficiência com que sempre me atenderam.

À EFEI - Escola Federal de Engenharia de Itajubá, pela oportunidade proporcionada, dando-me condições para mais este empreendimento importante de minha vida.

¹Este trabalho teve suporte financeiro do PICD-CAPES.

ABSTRACT

Let S^m be the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$ together with its geodesic distance d_m . We show how positive definite and conditionally negative definite functions on S^m can be used to carry out uniform approximation to continuous functions defined on S^m . Precisely, we start with either a positive definite function or a certain composition of positive definite and conditionally negative definite functions, say f , and we find conditions on f in such a way that any real continuous function defined on S^m can be uniformly approximated by linear combinations of functions of the form

$$x \in S^m \mapsto f[d_m(x, y)], \quad y \in S^m.$$

This method of approximation is motivated by the so-called radial basis method to interpolation of data over S^m ([3]).

Resumo

Seja S^m a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$ junto com sua distância geodésica d_m . Nós mostramos como funções positivas definidas e condicionalmente negativas definidas em S^m podem ser utilizadas para produzir aproximações uniformes de funções contínuas definidas em S^m . Precisamente, começando com uma função positiva definida ou determinada composição de funções positivas definidas e condicionalmente negativas definidas, digamos f , encontramos condições sobre f de modo que qualquer função contínua definida em S^m possa ser uniformemente aproximada por uma combinação linear de funções da forma

$$x \in S^m \mapsto f[d_m(x, y)], \quad y \in S^m.$$

Este método de aproximação é motivado pelo conhecido “método de interpolação de dados em S^m usando bases de funções radiais” ([3]).

Índice

1	Introdução	1
2	Noções Preliminares	5
2.1	O Teorema de Hahn-Banach	5
2.2	O Teorema da Representação de Riesz	7
2.3	O Teorema de Stone-Weierstrass	8
2.4	Os Harmônicos Esféricos	9
3	A Fundamentalidade de Conjuntos de Funções Contínuas em Esferas	16
3.1	O Método de Somabilidade de Cesàro	16
3.2	A Somabilidade de Cesàro de Séries de Fourier	26
3.3	Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^m)$	33
4	A Fundamentalidade de Certas Classes de Funções Contínuas em Esferas	41
4.1	Funções Integralmente Positivas Definidas em Esferas	41
4.2	Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^m)$ via Funções de Bernstein	46
4.3	Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^\infty)$	52
	Bibliografia	57
	Índice Remissivo	59

Capítulo 1

Introdução

Seja S^m a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$, isto é,

$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle x, x \rangle = 1\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^{m+1}$. Desde a década passada, interpolação de dados arbitrários associados com pontos em S^m , tem sido tema de muitos artigos em Teoria de Aproximação. Isto pode ser constatado consultando [3] e as referências lá incluídas. Nos últimos anos, um método de “interpolação usando funções esfericamente radiais em S^m ”, tornou-se popular. Ele pode ser descrito da seguinte forma: dados $x_1, x_2, \dots, x_n$ em S^m e uma função $\varphi : \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar uma função $\psi : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^n c_j f[d_m(x, x_j)]$$

tal que $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Na expressão acima, d_m é a distância geodésica em S^m , isto é,

$$d_m(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle, \quad x, y \in S^m,$$

e f é uma função sujeita à nossa escolha.

O problema acima tem uma única solução se e somente se a matriz

$$(f[d_m(x_i, x_j)]), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

for não singular. Logo, a escolha da função f pode facilitar ou complicar o problema.

“Funções positivas definidas” e “condicionalmente negativas definidas” em S^m são comprovadamente boas escolhas para f ([3]). Uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **positiva definida** em S^m (p.d.) se para todo $n \geq 1$ e qualquer conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^m$ a forma quadrática

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j f[d_m(x_i, x_j)]$$

é não negativa. A função f é dita ser **condicionalmente negativa definida** em S^m (c.n.d.) se para todo $n \geq 2$ e qualquer conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^m$ a forma quadrática acima é não positiva, quando restrita ao hiperplano

$$\left\{ (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n c_j = 0 \right\}.$$

Se f for p.d. (respectivamente c.n.d.) e a forma quadrática anular-se somente quando $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, então f é dita ser **estritamente positiva definida** (respectivamente **estritamente condicionalmente negativa definida**) em S^m .

As funções p.d. em S^m foram caracterizadas por Schoenberg em 1942 ([15]). Elas são da forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{\lambda}(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad a_k \geq 0, \quad f(0) < \infty. \quad (1.1)$$

Na expressão acima, P_k^{λ} é o **polinômio ultraesférico** de grau k . Tais polinômios são obtidos pela ortogonalização da base $\{1, x, x^2, \dots\}$ do espaço dos polinômios em uma variável com coeficientes reais, via o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx,$$

seguida da normalização

$$P_k^{\lambda}(1) = \frac{2\lambda(2\lambda+1) \cdots (2\lambda+k-1)}{k!}, \quad \lambda \neq 0.$$

Eles também podem ser obtidos através das expansões

$$\frac{1}{(1 - 2ws + w^2)^\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(s) w^k, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq |w| < 1, \quad |s| \leq 1 \quad (1.2)$$

e

$$\frac{1 - ws}{1 - 2ws + w^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2} P_k^0(s) w^k.$$

As funções c.n.d. são, então, da forma ([3]) $h = c - f$, onde c é uma constante e f é uma função p.d. em S^m . Equivalentemente,

$$h(t) = h(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [1 - p_k^\lambda(\cos t)], \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad a_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty, \quad (1.3)$$

onde $p_k^\lambda = P_k^\lambda / P_k^\lambda(1)$. Caracterizações semelhantes para funções estritamente p.d. e estritamente c.n.d. em S^m ainda não foram encontradas. Uma caracterização como acima para as funções p.d. em todas as S^m também foi dada por Schoenberg. Tais funções têm a forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos^k t, \quad a_k \geq 0, \quad f(0) < \infty. \quad (1.4)$$

As funções c.n.d. em todas as S^m são, então, da forma $g = c - f$, com f p.d. em todas as S^m e c uma constante, isto é,

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [1 - \cos^k t], \quad a_k \geq 0, \quad g(\pi/2) < \infty. \quad (1.5)$$

As funções estritamente p.d. em todas as S^m têm a forma (1.4) com $a_k > 0$ para infinitos índices pares e infinitos índices ímpares. Analogamente as funções estritamente c.n.d. em todas as S^m são da forma (1.5) com $a_k > 0$ para infinitos índices pares e infinitos índices ímpares ([11]).

Funções estritamente p.d. e estritamente c.n.d. podem ser utilizadas para interpolar dados arbitrários associados com qualquer número de pontos em S^m ([3]). A referência [3] descreve o estado atual da pesquisa referente ao método de interpolação

aqui descrito.

Neste trabalho, estudamos a possibilidade de utilizar funções (estritamente) positivas definidas e (estritamente) condicionalmente negativas definidas em S^m para produzir aproximações uniformes, com precisão arbitrária, de funções contínuas definidas em S^m . Precisamente, procuramos condições necessárias e suficientes sobre uma função p.d. (respectivamente c.n.d.) f de modo que o espaço gerado pelo conjunto

$$\{x \in S^m \mapsto f[d_m(x, y)] : y \in S^m\} \quad (1.6)$$

seja denso no espaço das funções contínuas definidas em S^m .

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, introduziremos todos os conceitos básicos que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, apresentaremos inicialmente a noção de convergência e somabilidade segundo Cesàro. Posteriormente, utilizando estas noções, obteremos resultados referentes à densidade de conjuntos de funções, como em (1.6), no espaço das funções contínuas definidas em S^m .

No Capítulo 4, exibiremos exemplos concretos de funções aplicáveis à teoria desenvolvida no capítulo anterior. Resultados referentes à densidade no espaço das funções contínuas definidas em S^∞ serão, então, obtidos.

Capítulo 2

Noções Preliminares

2.1 O Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção, destacaremos o Teorema de Hahn-Banach e estudaremos sua aplicação ao problema de aproximação em espaços normados.

Se X é um espaço vetorial normado, escreveremos X^* para denotar o espaço formado por todos os funcionais lineares contínuos sobre X . Se X tem norma $\|\cdot\|$, então X^* também é normado com a norma dada por

$$\|\phi\| = \sup \left\{ \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} : x \in X \text{ e } x \neq 0 \right\}, \quad \phi \in X^*.$$

Na verdade, X^* com a norma acima é um espaço de Banach.

Teorema 2.1.1 (Hahn-Banach) *Sejam V um espaço vetorial normado e W um subespaço de V . Se $\phi \in W^*$, então existe $\psi \in V^*$ tal que*

$$\psi|_W \equiv \phi.$$

Para uma completa discussão do Teorema de Hahn-Banach veja [14].

A seguir, introduziremos o conceito de fundamentalidade de um subconjunto de um espaço normado. Esse conceito foi aparentemente introduzido por N. Dunford e J. T. Schwartz, em [6].

Definição 2.1.1 Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $\mathcal{F} \subset V$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **fundamental** em V se o espaço gerado por $\mathcal{F}$, aqui denotado por $[\mathcal{F}]$, for denso em V . Em símbolos, $\overline{[\mathcal{F}]} = V$.

Exemplo 2.1.1 Se V é um espaço vetorial normado e $\mathcal{F} \subset V$ é uma base de V , então $\mathcal{F}$ é fundamental em V .

Neste trabalho utilizaremos a seguinte consequência do Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.2 Sejam $(V, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $\mathcal{F} \subset V$. Então, são equivalentes:

- (1) $\mathcal{F}$ é fundamental em V ;
- (2) $\mathcal{F}^\perp := \{\psi \in V^* : \psi(s) = 0, \text{ para todo } s \in \mathcal{F}\} = \{0\}$;
- (3) Se $\psi \in V^*$ e $\psi(s) = 0$, para todo $s \in [\mathcal{F}]$, então $\psi \equiv 0$.

Prova: Inicialmente suponhamos que (1) vale e seja $\psi \in \mathcal{F}^\perp$. Segue de (1) que dado $v \in V$, existe uma sequência $\{s_k\}_{k=1}^\infty \subset [\mathcal{F}]$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|s_k - v\| = 0.$$

Como ψ é contínuo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi(s_k) - \psi(v)\| = 0$. A continuidade da norma e a hipótese implicam finalmente que $\psi(v) = 0$. Assim, (1) implica (2).

Se $\psi \in V^*$ e $\psi(s) = 0$, $s \in [\mathcal{F}]$, então obviamente $\psi \in \mathcal{F}^\perp$. Logo, se $\mathcal{F}^\perp = \{0\}$, então $\psi \equiv 0$. Assim, (2) implica (3).

Finalmente provemos que (3) implica (1). Suponhamos que $\overline{[\mathcal{F}]} \neq V$. Então existe $v_0 \in V$ tal que $v_0 \notin \overline{[\mathcal{F}]}$. Daí, existe $\delta > 0$ de modo que $\|v - v_0\| > \delta$, para todo $v \in [\mathcal{F}]$. Seja W o subespaço de V gerado por $\mathcal{F}$ e v_0 , ou seja,

$$W = \{v + \lambda v_0 : v \in \mathcal{F} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definamos o funcional linear $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(v + \lambda v_0) = \lambda.$$

Como $\|v - v_0\| \geq \delta$ para todo $v \in \mathcal{F}$,

$$|\lambda|\delta \leq |\lambda|\|\lambda^{-1}v + v_0\| = \|v + \lambda v_0\|, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Daí,

$$\|\phi\| = \sup \left\{ \frac{|\phi(v + \lambda v_0)|}{\|v + \lambda v_0\|} : v + \lambda v_0 \in W \text{ e } v + \lambda v_0 \neq 0 \right\} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Isto mostra que $\|\phi\|$ é sempre limitado por $1/\delta$. Segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $\psi \in V^*$ tal que $\psi(s) = \phi(s) = 0$, $s \in \mathcal{F}$ e $\psi(v_0) = \phi(v_0) = 1 \neq 0$. Isto completa a prova do teorema. ■

2.2 O Teorema da Representação de Riesz

Nesta seção, introduziremos uma das muitas versões do Teorema da Representação de Riesz. Este teorema é um dos mais famosos e importantes dentro da Análise Moderna.

Se X for um espaço localmente compacto, escreveremos $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ou simplesmente $\mathcal{C}(X)$ para denotar o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas definidas em X . Quando necessário, assumiremos que o espaço $\mathcal{C}(X)$ está munido da topologia da convergência uniforme nas partes compactas de X . Convergência neste espaço é então expressa da seguinte forma: uma sequência $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge para f em $\mathcal{C}(X)$ se para cada compacto $K \subset X$ tivermos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Lembramos que quando X é compacto a topologia descrita acima reduz-se à topologia da convergência uniforme.

A versão mais geral do Teorema da Representação de Riesz estabelece que o conjunto das medidas de Borel, complexas e regulares sobre X formam um espaço de Banach e que tal espaço é isomorfo a $\mathcal{C}(X)^*$. A versão seguinte é suficiente para as nossas necessidades ([14]).

Teorema 2.2.1 (Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Se $\phi \in \mathcal{C}(X)^*$, então existe uma única medida de Borel, complexa e regular μ tal que*

$$\phi(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(X).$$

2.3 O Teorema de Stone-Weierstrass

Aqui, apresentaremos outro resultado bem conhecido da Análise, o Teorema de Stone-Weierstrass. Essencialmente, tal teorema assegura que certos espaços de funções “regulares” são densos no espaço das funções contínuas. A versão que usamos neste trabalho é a seguinte:

Teorema 2.3.1 (Stone-Weierstrass) *Sejam K um espaço compacto e $\mathcal{H}$ um subconjunto de $\mathcal{C}(K)$ satisfazendo:*

- (1) *Se $f, g \in \mathcal{H}$ então $f + g, f \cdot g \in \mathcal{H}$;*
- (2) *Se $x, y \in K$ e $x \neq y$, então existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) \neq f(y)$;*
- (3) *$\mathcal{H}$ contém as funções constantes.*

Então, $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{C}(K)$.

Nós observamos que as condições (2) e (3) podem ser substituídas pela seguinte condição: se $x \in K$ e $x \neq 0$, então existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) \neq 0$. Uma demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass pode ser encontrada em [5]. Mencionamos duas aplicações importantes do teorema acima.

Exemplo 2.3.1 Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f \in \mathcal{C}(K)$, então f é um limite uniforme sobre K de uma sequência de polinômios em n variáveis com coeficientes reais. Isto segue do fato de que o conjunto $\mathcal{H}$ formado pelas restrições de todos os polinômios em n variáveis com coeficientes reais a K , satisfaz as três condições do teorema acima.

Para o segundo exemplo necessitaremos do conceito seguinte.

Definição 2.3.1 Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$ e $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$. Se $|\alpha| := \sum \alpha_j < \infty$, definimos

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{\alpha_i}.$$

Exemplo 2.3.2 Se K é um subconjunto compacto da esfera de Hilbert definida por $S^\infty = \{x \in \ell^2 : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 = 1\}$ e $f \in \mathcal{C}(S^\infty)$, então f é um limite uniforme sobre K de combinações lineares de monômios da forma x^α , $\alpha \in \mathbb{N}^\infty$, $|\alpha| < \infty$. De fato, o conjunto de tais combinações lineares satisfaz as condições (1), (2) e (3) do teorema anterior.

2.4 Os Harmônicos Esféricos

Nesta seção, introduziremos as funções básicas que permitem representar uma função positiva definida em S^m como uma série similar à série de Fourier usual. Denotaremos por w_m a área da superfície de S^m . Então,

$$w_m = \int_{S^m} dw_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^{m+1}}{\Gamma((m+1)/2)},$$

onde Γ denota a função gama usual.

Um **harmônico esférico** em $m+1$ variáveis de grau k é a restrição de um polinômio harmônico, homogêneo de grau k em $m+1$ variáveis à S^m . Lembramos que um polinômio p em $m+1$ variáveis é **homogêneo** de grau k se

$$p(rx) = r^k p(x), \quad r > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1}$$

e uma função $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é **harmônica** se seu Laplaciano for nulo.

Exemplo 2.4.1 Os polinômios $\operatorname{Re}(x+iy)^k$ e $\operatorname{Im}(x+iy)^k$ são harmônicos e homogêneos de grau k em 2 variáveis. Logo, suas restrições a S^1 são harmônicos esféricos em 2 variáveis de grau k .

Propriedades gerais dos harmônicos esféricos podem ser encontradas com provas em [12]. Provaremos somente aquelas que serão utilizadas neste trabalho. Denotaremos por $\mathcal{H}_k^{m+1}$ o espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $m+1$ variáveis. A dimensão de $\mathcal{H}_k^{m+1}$ é obviamente finita e será denotada por D_k^{m+1} . O exemplo anterior implica que $D_k^2 = 2$, $k \geq 1$. A expressão

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} f(x)g(x)dw_m, \quad f, g \in \mathcal{H}_k^{m+1}$$

define um produto interno em $\mathcal{H}_k^{m+1}$, como pode ser facilmente verificado.

Teorema 2.4.1 *Sejam P_k e Q_l harmônicos esféricos em $m+1$ variáveis de graus k e l , respectivamente. Se $k \neq l$, então*

$$\int_{S^m} P_k(x)Q_l(x)dw_m = 0.$$

Prova: Pela Segunda Identidade de Green ([8], pp. 550), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\|x\| \leq 1} [P_k(x)\Delta(Q_l(x)) - Q_l(x)\Delta(P_k(x))] dx \\ &= \int_{S^m} \left[P_k \frac{\partial Q_l}{\partial \vec{n}} - Q_l \frac{\partial P_k}{\partial \vec{n}} \right] dw_m \\ &= \int_{S^m} [lP_kQ_l - kQ_lP_k] dw_m \\ &= (l - k) \int_{S^m} P_kQ_l dw_m. \end{aligned}$$

Na expressão acima, Δ denota o **operador Laplaciano** em $m+1$ variáveis. Note que $\partial Q_l / \partial \vec{n}$ e $\partial P_k / \partial \vec{n}$ são as derivadas direcionais de Q_l e P_k na direção da normal exterior a S^m , denotada por $\vec{n}$. Como $k \neq l$, o resultado segue. ■

Teorema 2.4.2 *Seja $\{Y_k^1, Y_k^2, \dots, Y_k^{D_k^{m+1}}\}$, $k \geq 1$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k^{m+1}$ em relação ao produto interno acima. Então, existe uma constante $c_{k,\lambda} > 0$ tal que*

$$P_k^\lambda(\langle x, y \rangle) = c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} Y_k^j(x)Y_k^j(y), \quad x, y \in S^m.$$

Prova: Primeiramente suponhamos que $\lambda > 0$. Diferenciando a equação (1.2) membro a membro em relação a w e multiplicando por w , obtemos

$$\frac{2ws - 2w^2}{(1 - 2ws + w^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\lambda} P_k^\lambda(s) w^k.$$

Somando-se esta expressão membro a membro com (1.2), vemos que

$$\frac{1 - w^2}{(1 - 2ws + w^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) P_k^\lambda(s) w^k. \quad (2.1)$$

Seja $H : \{z \in \mathbb{R}^{m+1} : \|z\| < 1\} \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(z, y) = \frac{1 - \|z\|^2}{(1 - 2\langle z, y \rangle + \|z\|^2)^{\lambda+1}},$$

onde $\|\cdot\|$ provém do produto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$. Se $\|z\| < 1$, escrevamos $z = wx$, $0 \leq w < 1$, $x \in S^m$. Então,

$$H(z, y) = \frac{1 - w^2}{(1 - 2w \cos t + w^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) P_k^\lambda(\cos t) w^k, \quad (2.2)$$

onde t é o ângulo entre x e y . Observemos que o coeficiente de w^k nesta expansão é um polinômio da forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) P_k^\lambda(\cos t) &= A_0 \cos^k t + A_1 \cos^{k-2} t + A_2 \cos^{k-4} t + \dots \\ &= A_0 \langle x, y \rangle^k + A_1 \langle x, y \rangle^{k-2} + A_2 \langle x, y \rangle^{k-4} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nas notações acima, a função

$$h_k(z, y) := A_0 \langle z, y \rangle^k + A_1 \langle z, y \rangle^{k-2} w^2 + A_2 \langle z, y \rangle^{k-4} w^4 + \dots, \quad w = \|z\|$$

é um polinômio homogêneo de grau k em z . Além disso,

$$h_k(z, y) = h_k(wx, y) = w^k \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) P_k^\lambda(\cos t).$$

Desse modo, a equação (2.2) fica na forma

$$H(z, y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(z, y). \quad (2.4)$$

Como $H(z, y)$ é harmônica em z , $0 = \Delta(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(h_k(z, y))$. Como o k -ésimo termo de $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta(h_k(z, y))$ é um polinômio homogêneo de grau $k - 2$ em z ,

$$\Delta(h_k(z, y)) = 0, \quad k \geq 0.$$

Assim, $h_k(z, y)$ é harmônico em z , $k \geq 0$. Dessa forma,

$$h_k(x, y) = \left(\frac{k}{\lambda} + 1 \right) P_k^\lambda(\cos t)$$

é um harmônico esférico de grau k em x . Pela simetria do produto interno em (2.3), h_k é também um harmônico esférico de grau k em y . Podemos, então, escrever

$$h_k(x, y) = \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} c_j(x) Y_k^j(y).$$

Como a base é ortonormal,

$$c_j(x) = \langle h_k(x, y), Y_k^j(y) \rangle = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} h_k(x, y) Y_k^j(y) dw_m = Y_k^j(x).$$

Justificamos a última igualdade da seguinte forma: considere a seguinte solução do problema de Dirichlet para o disco $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$ ([1], pp. 28):

$$u(z) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) H(z, y) dw_m.$$

Pela unicidade do problema de Dirichlet,

$$u(z) = Y_k^j(z) = Y_k^j(wx) = w^k Y_k^j(x), \quad \|z\| < 1.$$

Portanto,

$$w^k Y_k^j(x) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) H(z, y) dw_m.$$

Usando (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} w^k Y_k^j(x) &= \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) \sum_{i=0}^{\infty} h_i(z, y) dw_m \\ &= \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) \sum_{i=0}^{\infty} w^i h_i(x, y) dw_m. \end{aligned}$$

Como a série em questão converge uniformemente,

$$w^k Y_k^j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) h_i(x, y) dw_m \right] w^i.$$

Pelo teorema anterior,

$$w^k Y_k^j(x) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) h_k(x, y) dw_m w^k.$$

Por conseguinte,

$$Y_k^j(x) = \frac{1}{w_m} \int_{S^m} Y_k^j(y) h_k(x, y) dw_m = c_j(x).$$

Assim,

$$P_k^\lambda(\langle x, y \rangle) = \frac{\lambda}{k + \lambda} h_k(x, y) = \frac{\lambda}{k + \lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} Y_k^j(x) Y_k^j(y). \quad (2.5)$$

Se $\lambda = 0$, notemos inicialmente que $D_k^{m+1} = 2$ e $w_m = 2\pi$. Pelo Exemplo 2.4.1, $\cos k\theta$ e $\sin k\theta$ são harmônicos esféricos em 2 variáveis de grau k . Daí,

$$Y_k^1(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta \text{ e } Y_k^2(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta$$

com $w = (\cos \theta, \sin \theta)$ formam um conjunto ortonormal. Se $x = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $y = (\cos \phi, \sin \phi)$, segue imediatamente que

$$P_k^0(\langle x, y \rangle) = P_k^0(\cos(\theta - \phi)) = \frac{2}{k} \cos k(\theta - \phi) = \frac{2\pi}{k} \sum_{j=1}^2 Y_k^j(x) Y_k^j(y).$$

■

No restante deste trabalho, reservaremos a notação Y_k^l para elementos de bases ortonormais de $\mathcal{H}_k^{m+1}$ como no teorema anterior. Tais bases serão utilizadas sem quaisquer comentários. Os lemas e notações seguintes são preparatórios para a prova do Teorema 2.4.3, o qual será de grande utilidade nos próximos capítulos. Denotaremos por $P_{k,0}^{m+1}$ o espaço vetorial dos polinômios em $m + 1$ variáveis, homogêneos

de grau k e $H_{k,0}^{m+1}$ o subespaço de $P_{k,0}^{m+1}$ constituído pelos polinômios harmônicos. Para um inteiro positivo k , escreveremos Γ^{2k} para denotar o polinômio $(\Gamma^2)^k$, onde $\Gamma^2(x) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Por definição, $\Gamma^0 \equiv 1$. Finalmente, escreveremos $\Gamma^2 P_{k-2,0}^{m+1}$ para denotar o seguinte subespaço de $P_{k,0}^{m+1}$:

$$\{\Gamma^2 p : p \in P_{k-2,0}^{m+1}\}.$$

Lema 2.4.1 *Sejam k e l inteiros satisfazendo $1 \leq k \leq [l/2]$. Se $p \in P_{l-2k,0}^{m+1}$, então*

$$\Delta(\Gamma^{2k} p) = 2k(m + 2l - 2k - 1)\Gamma^{2(k-1)} p + \Gamma^{2k} \Delta(p).$$

Prova: Provemos por indução sobre k . Suponhamos que $l \geq 2$ e $p \in P_{l-2,0}^{m+1}$. A seguinte relação vale:

$$\frac{\partial^2 \Gamma^2 p}{\partial x_j^2} = 2p + 4x_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2}, \quad 1 \leq j \leq m+1.$$

Assim,

$$\Delta(\Gamma^2 p) = 2(m+1)p + 4 \sum_{j=1}^{m+1} x_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \Gamma^2 \Delta(p).$$

Pela Fórmula de Euler ([8], pp. 437), $\Delta(\Gamma^2 p) = 2(m + 2l - 3)p + \Gamma^2 \Delta(p)$, ou seja, a fórmula vale para $k = 1$. Assumamos agora que o resultado vale para $k > 1$. Sejam $l \geq 2(k+1)$ e $p \in P_{l-2k-2,0}^{m+1}$. Definamos $q = \Gamma^2 p$. Como $q \in P_{l-2k,0}^{m+1}$, a hipótese de indução implica que

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma^{2(k+1)} p) &= \Delta(\Gamma^{2k} q) = 2k(m + 2l - 2k - 1)\Gamma^{2(k-1)} q + \Gamma^{2k} \Delta(q). \\ &= 2k(m + 2l - 2k - 1)\Gamma^{2k} p + \Gamma^{2k} \Delta(\Gamma^2 p). \end{aligned}$$

Agora, usando o passo inicial da indução, vemos que

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma^{2(k+1)} p) &= 2k(m + 2l - 2k - 1)\Gamma^{2k} p + \Gamma^{2k} [2(m + 2(l - 2k) - 3)p + \Gamma^2 \Delta(p)] \\ &= 2(k+1)(m + 2l - 2(k+1) - 1)\Gamma^{2k} p + \Gamma^{2(k+1)} \Delta(p). \end{aligned}$$

Assim a prova está completa. ■

Lema 2.4.2 *As seguintes afirmações valem:*

- (1) $P_{l,0}^{m+1} = H_{l,0}^{m+1}$, $l = 0, 1$;
- (2) $P_{l,0}^{m+1} = H_{l,0}^{m+1} \oplus \Gamma^2 P_{l-2,0}^{m+1}$, $l = 2, 3, \dots$.

Prova: A parte (1) é óbvia. Suponhamos, então, que $l \geq 2$ e mostremos inicialmente que $H_{l,0}^{m+1} \cap \Gamma^2 P_{l-2,0}^{m+1} = \{0\}$. Para tanto, basta mostrarmos que $\Delta(\Gamma^2 p) \neq 0$, para todo $p \in P_{l-2,0}^{m+1}$ não nulo. Seja, então, $p \in P_{l-2,0}^{m+1}$ e tomemos o menor inteiro k tal que $\Gamma^2 p$ seja divisível por Γ^{2k} . Então, $1 \leq k \leq [l/2]$ e segue que existe $q \in P_{l-2k,0}^{m+1}$ tal que q não é divisível por Γ^{2k} e $\Gamma^2 p = \Gamma^{2k} q$. Agora, se $\Delta(\Gamma^2 p) = 0$, então pelo Lema 2.4.1,

$$2k(m + 2l - 2k - 1)\Gamma^{2(k-1)}q + \Gamma^{2k}\Delta(q) = 0.$$

Como $c := 2k(m + 2l - 2k - 1) = 2k[(m-1) + l + (l-2k)] > 0$, Γ^{2k} divide $-c\Gamma^{2(k-1)}q$. Como Γ^{2k} não divide $\Gamma^{2(k-1)}q$, q é divisível por Γ^{2k} , contradizendo nossa hipótese sobre q . Consequentemente, $\Delta(\Gamma^2 p) \neq 0$.

Para completar a prova considere a transformação linear $\varphi : P_{l,0}^{m+1} \rightarrow P_{l-2,0}^{m+1}$ dada por $\varphi(p) = \Delta(p)$. Usando a parte anterior e o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim P_{l,0}^{m+1} \leq \dim H_{l,0}^{m+1} + \dim P_{l-2,0}^{m+1}$. Como $\dim P_{l-2,0}^{m+1} = \dim \Gamma^2 P_{l-2,0}^{m+1}$,

$$\dim P_{l,0}^{m+1} \leq \dim H_{l,0}^{m+1} + \dim \Gamma^2 P_{l-2,0}^{m+1}.$$

Finalmente obtemos que $\dim P_{l,0}^{m+1} = \dim H_{l,0}^{m+1} + \dim \Gamma^2 P_{l-2,0}^{m+1}$. Isto completa a prova. ■

Teorema 2.4.3 *O conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^{m+1}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$.*

Prova: Seja $g \in \mathcal{C}(S^m)$. Pelo Exemplo 2.3.1, g é um limite uniforme sobre S^m de uma sequência de polinômios em $m+1$ variáveis com coeficientes reais. Pelo lema anterior, cada polinômio em $m+1$ variáveis pode ser escrito de forma única como $p_l + \Gamma^2 p_{l-2} + \Gamma^4 p_{l-4} + \dots$, onde $p_j \in H_{j,0}^{m+1}$. Logo, a restrição de um polinômio em $m+1$ variáveis à S^m se escreve como uma combinação linear de elementos de $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{H}_k^{m+1}$. ■

Capítulo 3

A Fundamentalidade de Conjuntos de Funções Contínuas em Esferas

3.1 O Método de Somabilidade de Cesàro

Nesta seção, destacaremos alguns aspectos da teoria de somabilidade ([9], [13]). Tal teoria é extensa e por conseguinte somente aspectos estritamente relacionados a este trabalho serão abordados.

Definição 3.1.1 Seja $A = (A_{nk})$ uma matriz infinita com entradas complexas. Dizemos que uma sequência $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números complexos é **A-convergente** se a série $\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}z_k$ for convergente para todo $n \geq 0$. Ela é **A-convergente para L** se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}z_k = L$. Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ é **A-somável** se a sequência das somas parciais da série for A-convergente. Ela é **A-somável para S** se a sequência das somas parciais da série for A-convergente para S .

Exemplo 3.1.1 Se A for a matriz identidade infinita, então o conceito de A-convergência coincide com o conceito de convergência usual. O mesmo aplica-se ao conceito de A-somabilidade.

Outro exemplo é fornecido pela definição seguinte.

Definição 3.1.2 Dizemos que uma sequência $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ é **Cesàro (C,1)-convergente** se ela for A -convergente quando A for da forma:

$$A_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Analogamente definimos **Cesàro (C,1)-somabilidade**.

Cesàro (C,1)-convergência e convergência usual se relacionam da seguinte forma:

Teorema 3.1.1 Se $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge para L , então $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ é Cesàro (C,1)-convergente para L .

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = L$, existe um inteiro positivo K_1 tal que

$$|z_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq K_1. \quad (3.1)$$

Notemos que existe, também, um inteiro positivo K_2 tal que

$$\frac{1}{k} |z_0 + z_1 + \dots + z_{K_1-1} - K_1 L| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq K_2. \quad (3.2)$$

Se $K := \max\{K_1, K_2\}$, então

$$\begin{aligned} D &:= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n z_k - L \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{K_1-1} z_k + \sum_{k=K_1}^n z_k - (n+1)L - K_1 L + K_1 L \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{K_1-1} z_k - K_1 L \right| + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=K_1}^n z_k - (n+1-K_1)L \right|. \end{aligned}$$

Como $(n+1-K_1)L = \sum_{k=K_1}^n L$,

$$\left| \sum_{k=K_1}^n z_k - (n+1-K_1)L \right| \leq \sum_{k=K_1}^n |z_k - L|.$$

Daí usando (3.1), (3.2) e a desigualdade triangular, vemos que

$$D \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=K_1}^n \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n \geq K.$$

Observação 3.1.1 A recíproca do teorema acima é falsa. De fato, seja $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a sequência definida por

$$a_k = 1 + (-1)^k, \quad k \geq 0.$$

É óbvio que a sequência $\{a_k\}$ é divergente. Porém ela é Cesàro (C,1)-convergente para 1. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$. Temos que

$$\sum_{k=0}^n a_k = \begin{cases} n+2 & \text{se } n \text{ é par} \\ n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

para todo $n \geq 0$. Consequentemente tomando-se um natural $N(\varepsilon) > (1 - \varepsilon)/\varepsilon$, obtemos

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - 1 \right| \leq \left(\frac{n+2}{n+1} - 1 \right) = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

decorrendo assim o resultado.

A Definição 3.1.2 pode ser estendida da seguinte forma:

Definição 3.1.3 Fixe um inteiro $m \geq 1$ e seja $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência qualquer. Sejam $\{A_n^m\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{S_n^m\}_{n=0}^{\infty}$ sequências definidas pelas seguintes expansões:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^m x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}, \quad |x| < 1$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^m x^n = \frac{1}{(1-x)^m} \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n, \quad |x| < 1.$$

Dizemos que $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ é Cesàro (C,m)-convergente para y se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^m}{A_n^m} = y.$$

Observação 3.1.2 Pela definição, A_n^m independe da sequência $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Cesàro (C,m) -somabilidade é definida de maneira análoga à $(C,1)$ -somabilidade.

A relação entre o conceito de Cesàro (C,m) -convergência e o conceito de A -convergência introduzido anteriormente é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 3.1.2 *Uma sequência $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ é Cesàro (C,m) -convergente se e somente se ela for A -convergente, onde*

$$A_{nk} = \begin{cases} \binom{n-k+m-1}{m-1} / \binom{n+m}{m} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Prova: Pelo Teorema Binomial temos que

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n, \quad |x| < 1.$$

De acordo com a Definição 3.1.3 segue que

$$A_n^m = \binom{n+m}{m}.$$

Computação direta implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^m x^n = \frac{1}{(1-x)^m} \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+m-1}{m-1} z_k$. Logo,

$$S_n^m = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+m-1}{m-1} z_k.$$

Portanto segue que

$$\frac{S_n^m}{A_n^m} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n-k+m-1}{m-1}}{\binom{n+m}{m}} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} z_k.$$

Assim temos o resultado. ■

Observação 3.1.3 Note que quando $m = 1$,

$$A_{nk} = \frac{\binom{n-k+m-1}{m-1}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n-k}{0}}{\binom{n+1}{1}} = \frac{1}{n+1}, \quad n, k \geq 0$$

e, portanto Cesàro (C,1)-convergência é, de fato, um caso particular de Cesàro (C,m)-convergência.

Definição 3.1.4 Seja A uma matriz infinita. Dizemos que A é **regular** se toda sequência convergente para L for A -convergente para L .

Exemplo 3.1.2 Pelo Teorema 3.1.1, a matriz definindo Cesàro (C,1)-convergência é regular.

O seguinte critério nos permite determinar se uma matriz é regular simplesmente verificando se suas entradas satisfazem certas condições.

Teorema 3.1.3 *Uma matriz A é regular se e somente se*

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk} = 0, \quad k \geq 0;$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} = 1;$
- (3) $\sup \{ \sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| : n = 0, 1, \dots \} \leq M < \infty, \text{ para algum } M > 0.$

Prova: Primeiramente provemos que a regularidade de A implica que (1), (2) e (3) valem. Fixemos $k_0 \geq 0$ e definamos uma sequência $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ por

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = k_0 \\ 0 & \text{se } k \neq k_0. \end{cases}$$

Claramente $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ converge para 0. Como A é regular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0.$$

Isto prova a condição (1).

Para a prova de (2), definamos a sequência $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ por $r_k = 1, k \geq 0$. Como A é regular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 1.$$

Logo a condição (2) vale.

Para a condição (3), primeiro mostremos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| < \infty, \quad n \geq 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que exista N para o qual $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{Nk}| = \infty$. Consequentemente, existem inteiros $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_k < \dots$ tais que

$$\sum_{k=k_{j-1}}^{k_j} |A_{Nk}| > 1, \quad j \geq 1. \quad (3.3)$$

Neste caso, definamos a sequência $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ por

$$s_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \text{ ou } A_{Nk} = 0 \\ \frac{|A_{Nk}|}{j |A_{Nk}|} & \text{se } A_{Nk} \neq 0 \text{ e } k_{j-1} \leq k < k_j. \end{cases}$$

Notemos que $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ converge para 0. No entanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{Nk} s_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=k_{j-1}}^{k_j} \frac{|A_{Nk}|}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=k_{j-1}}^{k_j} |A_{Nk}| \stackrel{(3.3)}{>} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

contradizendo a regularidade de A . Portanto $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}|$ converge, para $n = 0, 1, \dots$. Agora mostremos que $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}|$ é uniformemente limitada em n . Suponhamos, por absurdo, que para todo $G > 0$, exista n , dependendo de G , tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| > G.$$

Vamos construir uma sequência $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k \neq 0,$$

em contradição com a hipótese. Para isso fixemos $p_1 \in \mathbb{N}$ e a partir dele determinemos, por indução, duas sequências crescentes de números naturais, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ da seguinte forma. Suponhamos que já temos

$$n_1, n_2, \dots, n_{r-1} \quad \text{e} \quad p_1, p_2, \dots, p_r$$

e escolhamos n_r e p_{r+1} como segue. Por hipótese, existe n tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| > r^2 + 2r + 2.$$

Se $n > n_{r-1}$, então definamos $n_r = n$. Caso contrário, seja $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que exista $n_r \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{n_r k}| > l(r^2 + 2r + 2) > r^2 + 2r + 2, \quad (3.4)$$

com $n_r > n_{r-1}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p_r} |A_{nk}| = 0$, podemos tomar n_r suficientemente grande de modo que

$$\sum_{k=0}^{p_r} |A_{n_r k}| < 1. \quad (3.5)$$

Como $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p |A_{n_r k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |A_{n_r k}|$, escolhamos $p_{r+1} > p_r$ tal que

$$\sum_{k=p_{r+1}+1}^{\infty} |A_{n_r k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |A_{n_r k}| - \sum_{k=0}^{p_{r+1}} |A_{n_r k}| < 1. \quad (3.6)$$

Notando-se que

$$\sum_{k=p_r+1}^{p_r+1} |A_{n_r k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |A_{n_r k}| - \sum_{k=0}^{p_r} |A_{n_r k}| - \sum_{k=p_r+1+1}^{\infty} |A_{n_r k}|$$

e usando as expressões (3.4), (3.5) e (3.6), segue que

$$\sum_{k=p_r+1}^{p_r+1} |A_{n_r k}| > r^2 + 2r. \quad (3.7)$$

Neste caso definamos

$$s_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq p_1 \text{ ou } A_{n_r k} = 0 \\ \frac{|A_{n_r k}|}{r |A_{n_r k}|} & \text{se } p_r < k \leq p_{r+1} \text{ e } A_{n_r k} \neq 0. \end{cases}$$

Como $|s_k| = 1/r \leq 1$, pelo teste M de Weierstrass e pelas propriedades de limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A_{n_r k}}{r |A_{n_r k}|} = 0.$$

Usando a desigualdade triangular e as desigualdades (3.5), (3.6) e (3.7), finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_{n_r k} s_k \right| &\geq \left| \sum_{k=p_r+1}^{p_r+1} A_{n_r k} s_k \right| - \left| \sum_{k=0}^{p_r} A_{n_r k} s_k \right| - \left| \sum_{k=p_r+1+1}^{\infty} A_{n_r k} s_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=p_r+1}^{p_r+1} \frac{|A_{n_r k}|}{r} \right| - \left| \sum_{k=0}^{p_r} A_{n_r k} s_k \right| - \left| \sum_{k=p_r+1+1}^{\infty} A_{n_r k} s_k \right| \\ &> \frac{1}{r} \sum_{k=p_r+1}^{p_r+1} |A_{n_r k}| - \sum_{k=0}^{p_r} |A_{n_r k}| - \sum_{k=p_r+1+1}^{\infty} |A_{n_r k}| \\ &> \frac{1}{r} (r^2 + 2r) - 1 - 1 = r. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ e, no entanto a sequência $\{\sum_{k=0}^{\infty} A_{n_r k} s_k\}_{n_r=0}^{\infty}$ possui uma subsequência divergente, contrariando a regularidade de A .

Por outro lado mostremos que as condições (1), (2) e (3) implicam que A

é regular. Para tanto tomemos uma sequência $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ e mostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k = s$. Inicialmente provemos que, de fato, tal sequência é convergente. Como $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ é convergente, existe $S > 0$ tal que $|s_k| \leq S$, $k \geq 0$. Deste modo, vemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk} s_k| \leq S \sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}|, \quad n \geq 0.$$

Logo o resultado segue observando-se que, pela condição (3), $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}|$ converge para cada n fixado.

Agora mostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k = s$. Primeiramente suponhamos que $s = 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $K = K(\varepsilon)$ tal que

$$|s_k| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad k > K. \quad (3.8)$$

Notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k = \sum_{k=0}^K A_{nk} s_k + \sum_{k=K+1}^{\infty} A_{nk} s_k.$$

Pela condição (1) e pelo fato que a sequência $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ é limitada, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K A_{nk} s_k = 0.$$

Logo, existe $P(\varepsilon) = P(\varepsilon, K)$ tal que

$$\left| \sum_{k=0}^K A_{nk} s_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq P(\varepsilon). \quad (3.9)$$

Assim, usando a desigualdade triangular, (3.8), (3.9) e a condição (3), vemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^K A_{nk} s_k \right| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |A_{nk}| |s_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon, \quad n \geq P(\varepsilon). \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k = 0.$$

Se $s \neq 0$, definamos a sequência $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ por $w_k = s - s_k$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$, nossa hipótese implica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} (s - w_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} w_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s \stackrel{(2)}{=} s. \end{aligned}$$

Portanto as condições (1), (2) e (3) implicam que A é regular. ■

Observação 3.1.4 Note que, de acordo com a demonstração, quando $s = 0$ as condições (1) e (3) bastam para que A seja regular.

Teorema 3.1.4 Cesàro (C, m) -convergência é regular.

Prova: Usando o Teorema 3.1.2, basta conferirmos as condições (1), (2) e (3) do teorema anterior para a matriz A com entradas

$$A_{nk} = \begin{cases} \binom{n-k+m-1}{m-1} / \binom{n+m}{m} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Para tanto vamos examinar a série $\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} = \sum_{k=0}^n A_{nk}$. Se $n = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} A_{0k} = A_{00} = 1$. Se $n \geq 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} + A_{nn} = \frac{1}{A_n^m} \left(1 + A_n^m \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk} \right),$$

onde $A_{nn} = (A_n^m)^{-1}$. Considerando

$$C_n^m = 1 + A_n^m \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk},$$

temos que $C_n^m = S_n^m$, onde S_n^m é o coeficiente obtido da expansão

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^m x^n = \frac{1}{(1-x)^m} \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n, \quad |x| < 1,$$

quando $z_n = 1$, $n \geq 0$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^m x^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-x)^m} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^m} \frac{1}{(1-x)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m x^n.$$

Assim $C_n^m = A_n^m$, $n \geq 0$ e, por conseguinte

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} = \frac{1}{A_n^m} C_n^m = 1.$$

Isto mostra que as condições (2) e (3) do teorema estão portanto satisfeitas. Para mostrarmos que (1) vale, fixemos k e seja $n \geq k$. Então,

$$A_{nk} = \binom{n-k+m-1}{m-1} \bigg/ \binom{n+m}{m} = \frac{m n (n-1) \cdots (n-k+1)}{(m+n-k) \cdots (m+n)}.$$

Como $n-i \leq n$, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ e $m+n-j \geq n$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0.$$

■

3.2 A Somabilidade de Cesàro de Séries de Fourier

Nesta seção, séries de Fourier formais são consideradas. Discutiremos a somabilidade de tais séries, no sentido visto na seção anterior.

Definição 3.2.1 Dados um conjunto ortonormal $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ em um espaço X com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e x um elemento qualquer de X , a **série de Fourier** de x associada a B é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

As constantes $\langle x, x_n \rangle$ são conhecidas como **coeficientes de Fourier** de x .

Usualmente, escrevemos

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

para denotar a série de Fourier de x .

Exemplo 3.2.1 Tomemos $X = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Em relação ao conjunto ortonormal

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

temos que, para qualquer $f \in X$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

onde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 0.$$

Esta é a série de Fourier usual de um elemento $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ ([13], pp. 99).

Exemplo 3.2.2 Consideremos $X = \mathcal{C}([-1, 1])$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Se $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ denota o polinômio de Tchebyshev de primeira espécie de grau k , então a série de Fourier de $f \in X$ em relação ao conjunto ortonormal

$$B = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_0(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2(x), \dots \right\}$$

é

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x), \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k \geq 0.$$

Esta série é conhecida como a **Série de Tchebyshev-Fourier** de f ([4], pp. 170).

Observação 3.2.1 Considere uma função $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Conforme o exemplo anterior f tem uma série de Tchebyshev-Fourier da forma

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x).$$

Da mesma forma, pelo Exemplo 3.2.1, $f \circ \cos \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ tem uma série de Fourier da forma

$$(f \circ \cos)(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Afirmamos que os coeficientes em ambos os desenvolvimentos acima coincidem. De fato,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^0 \frac{f(\cos t) T_k(\cos t)}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\cos t) T_k(\cos t)}{\sin t} \sin t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos kt dt. \end{aligned}$$

Como $f \circ \cos$ é par,

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos kt dt = a_k, \quad k \geq 0.$$

Este resultado será utilizado no Teorema 3.3.2

Exemplo 3.2.3 Seja $X = \mathcal{C}([-1, 1])$ com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx, \quad \lambda \geq 0.$$

O conjunto

$$B = \left\{ \frac{P_0^{\lambda}(x)}{P_0^{\lambda}(1)}, \frac{P_1^{\lambda}(x)}{P_1^{\lambda}(1)}, \dots \right\}$$

é o conjunto obtido pela ortonormalização de $\{1, x, x^2, \dots\}$ via o processo de Gram-Schmidt como mencionado no final da página 2. A série de Fourier de uma função $f \in X$ associada a B é da forma ([4])

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{\lambda}(x),$$

onde

$$a_k = \frac{1}{P_k^\lambda(1)} \int_{-1}^1 f(x) P_k^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx, \quad k \geq 0.$$

Lema 3.2.1 *Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e considere sua extensão periódica sobre $\mathbb{R}$ (aqui também denotada por f). Considere a série de Fourier de f como no Exemplo 3.2.1. Para $x \in [-\pi, \pi]$ defina*

$$\sigma_n[f(x)] = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_j(x),$$

onde

$$S_j(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^j (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Então, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n[f(x)] - s = \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2s] K_n(u) du,$$

onde K_n é o núcleo de Féjer, isto é,

$$K_n(u) = \frac{\sin^2 nu/2}{2n\pi \sin^2 u/2}.$$

Prova: Como f tem período 2π ,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \cos kt dt, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad k \geq 0.$$

O mesmo vale para b_k . Segue, então, que

$$S_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^j \cos k(t-x) \right] dt. \quad (3.10)$$

Como

$$2 \sin \frac{v}{2} \cos pv = \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) v - \sin \left(p - \frac{1}{2} \right) v, \quad v \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

um cálculo direto mostra que,

$$2 \operatorname{sen} \left(\frac{t-x}{2} \right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^j \cos k(t-x) \right] = \operatorname{sen} \left(j + \frac{1}{2} \right) (t-x).$$

Isto implica que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^j \cos k(t-x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(j+1/2)(t-x)}{2 \operatorname{sen}(t-x)/2} & \text{se } t-x \neq 2m\pi \\ \frac{1}{2} + j & \text{se } t-x = 2m\pi \text{ e } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Segue que a soma parcial (3.10) pode ser escrita como

$$S_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\operatorname{sen}(j+1/2)u}{2 \operatorname{sen} u/2} du,$$

onde $u = x - t$. Daí,

$$\sigma_n[f(x)] = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{[f(x+u) + f(x-u)]}{\operatorname{sen} u/2} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sen} \left(j + \frac{1}{2} \right) u du.$$

Agora, observando-se que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sen} \left(j + \frac{1}{2} \right) u = \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \left(j - \frac{1}{2} \right) u$$

e

$$2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} \left(j - \frac{1}{2} \right) u = \cos(j-1)u - \cos ju,$$

temos que

$$\sigma_n[f(x)] = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\operatorname{sen}^2 nu/2}{\operatorname{sen}^2 u/2} du.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 nu/2}{\operatorname{sen}^2 u/2} du &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(j+1/2)u}{\operatorname{sen} u/2} du \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^j \cos ku \right] du \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \left[u \Big|_0^\pi + 2 \sum_{k=1}^j \frac{\operatorname{sen} ku}{k} \Big|_0^\pi \right] = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalmente para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sigma_n[f(x)] - s &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin^2 nu/2}{\sin^2 u/2} du - 2s \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 nu/2}{\sin^2 u/2} du \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2s] \frac{\sin^2 nu/2}{\sin^2 u/2} du\end{aligned}$$

e portanto temos o resultado. ■

O teorema abaixo mostra que quando f é contínua em $[-\pi, \pi]$, sua série de Fourier em x é Cesàro (C,1)-somável com soma $f(x)$, e tal convergência é “uniforme” em x ([13]).

Teorema 3.2.1 *Seja f uma função como nas hipóteses do Lema 3.2.1. Assuma que f é contínua em $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n[f(x)] = f(x)$ uniformemente em $[a, b]$.*

Prova: Pelo lema anterior,

$$\sigma_n[f(x)] - f(x) = \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] K_n(u) du.$$

Como $K_n(u) \geq 0$, $n \geq 1$, $u \in [0, \pi]$, vemos que

$$|\sigma_n[f(x)] - f(x)| \leq I_1 + I_2,$$

onde

$$I_1 = \int_0^\delta |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| K_n(u) du$$

e

$$I_2 = \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| K_n(u) du, \quad 0 < \delta < \pi. \quad (3.12)$$

Agora observando-se que f é uniformemente contínua em $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq u \leq \delta, \quad x \in [a, b]$$

e, conseqüentemente

$$I_1 \leq \varepsilon \int_0^\delta K_n(u) du \leq \varepsilon \int_0^\pi K_n(u) du \stackrel{(3.11)}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para uma estimativa de I_2 seja $M_n(\delta) = \max\{K_n(u) : \delta \leq u \leq \pi\}$. Então,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq M_n(\delta) \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| du \\ &\leq M_n(\delta) \int_0^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| du \\ &\leq M_n(\delta) \left[\int_0^\pi |f(x+u)| du + \int_0^\pi |f(x-u)| du + 2 \int_0^\pi |f(x)| du \right] \\ &= M_n(\delta) \left[\int_{-\pi}^\pi |f(x+u)| du + 2\pi |f(x)| \right]. \end{aligned}$$

Como f é periódica em $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi}^\pi |f(x+u)| du = \int_{-\pi}^\pi |f(u)| du = K \in \mathbb{R}.$$

Como f é contínua em $[a, b]$, existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Daí,

$$I_2 \leq M_n(\delta)[K + 2\pi M]. \quad (3.13)$$

Finalmente temos que

$$|\sigma_n[f(x)] - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M_n(\delta)[K + 2\pi M].$$

Portanto o resultado segue observando-se que

$$K_n(u) \leq \frac{1}{2n\pi \sin^2 \delta/2}, \quad \delta \leq u \leq \pi.$$

■

Não sabemos se os resultados acima valem para séries de Fourier como no Exemplo 3.2.3.

3.3 Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^m)$

Seja X um espaço de Hausdorff compacto no qual ortogonalidade esteja definida através de uma medida de Borel positiva denotada por dx . Nesta seção, exibiremos um método geral para a construção de funções $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que o conjunto

$$\{x \in X \mapsto f(x, y) : y \in X\}$$

seja fundamental em $\mathcal{C}(X)$ no sentido da Definição 2.1.1. O método em questão, introduzido em [18], baseia-se na pré-existência de um conjunto fundamental em $\mathcal{C}(X)$, da forma $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, onde os V_n são subespaços de $\mathcal{C}(X)$ dois a dois ortogonais e tais que $\dim V_n := D_n < \infty$, para todo n . A construção é, então, feita usando-se um método de somabilidade definida por uma matriz infinita $B = (B_{nk})$ com as seguintes propriedades:

- (1) cada linha de B tem somente um número finito de entradas não nulas;
- (2) para cada k , $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk}$ existe;
- (3) a sequência de funções

$$f_n(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(x) v_{ki}(y),$$

onde $\{v_{ki} : 1 \leq i \leq D_k\}$ é uma base ortonormal de V_k , converge uniformemente em x e em y .

Teorema 3.3.1 *Sejam X , $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ e B como acima. Defina*

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y).$$

Então, $\mathcal{F} = \{x \in X \mapsto f(x, y) : y \in X\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(X)$ se e somente se $c_k := \lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk} \neq 0$, $k \geq 1$.

Prova: Primeiramente suponhamos que $c_m = 0$, para algum m e fixemos $j \in \{1, 2, \dots, D_m\}$. Então, para $y \in X$ fixado

$$I(y) := \int_X f(x, y) v_{mj}(x) dx \stackrel{(3)}{=} \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(x) v_{ki}(y) v_{mj}(x) dx.$$

Como $f_n(\cdot, y)$ converge uniformemente para $f(\cdot, y)$ e a integral é linear,

$$I(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(y) \left[\int_X v_{ki}(x) v_{mj}(x) dx \right].$$

Como V_k é ortogonal a V_m para $k \neq m$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nm} \sum_{i=1}^{D_m} v_{mi}(y) \left[\int_X v_{mi}(x) v_{mj}(x) dx \right] = c_m \sum_{i=1}^{D_m} v_{mi}(y) \left[\int_X v_{mi}(x) v_{mj}(x) dx \right] = 0.$$

Finalmente pelo Teorema 2.1.2, concluímos que $\mathcal{F}$ não é fundamental em $\mathcal{C}(X)$.

Reciprocamente suponhamos que $c_k \neq 0$ para todo k e seja μ uma medida de Borel, com sinal e regular tal que

$$0 = \int_X f(x, y) d\mu(x), \quad y \in X.$$

Vamos mostrar que $\mu \equiv 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$, $x \in X$,

$$0 = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(x) v_{ki}(y) d\mu(x), \quad y \in X.$$

Multiplicando a igualdade acima por $v_{rj}(y)$, com r e j arbitrários, temos que

$$0 = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(x) v_{ki}(y) v_{rj}(y) d\mu(x).$$

Logo,

$$0 = \int_X \left[\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} v_{ki}(x) v_{ki}(y) v_{rj}(y) d\mu(x) \right] dy.$$

Como na primeira parte da prova, temos então que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} \sum_{i=1}^{D_k} \left[\int_X v_{ki}(x) d\mu(x) \right] \left[\int_X v_{ki}(y) v_{rj}(y) dy \right].$$

Como V_k é ortogonal a V_r para $k \neq r$,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{nr} \sum_{i=1}^{D_r} \left[\int_X v_{ri}(x) d\mu(x) \right] \left[\int_X v_{ri}(y) v_{rj}(y) dy \right].$$

Como $\{v_{ri} : i = 1, 2, \dots, D_r\}$ é uma base ortonormal de V_r , concluímos que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{nr} \left[\int_X v_{rj}(x) d\mu(x) \right] = c_r \int_X v_{rj}(x) d\mu(x).$$

Como r e j são arbitrários, a nossa hipótese implica que μ anula o conjunto $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$. Como V é fundamental em $\mathcal{C}(X)$, $\int_X f(x) d\mu(x) = 0$, $f \in \mathcal{C}(X)$. Segue do Teorema da Representação de Riesz que $\mu \equiv 0$. Usando o Teorema 2.1.2, temos portanto que $\mathcal{F}$ é fundamental em $\mathcal{C}(X)$. ■

A seguir, aplicamos esse resultado em duas situações particulares.

Teorema 3.3.2 *Seja $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Então, $\mathcal{F} = \{x \in S^1 \mapsto f(\langle x, y \rangle) : y \in S^1\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^1)$ se e somente se*

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t) P_k^0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Prova: Considere $f_{\text{ocos}} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.2.1, $\sigma_{n+1}[f(\cos t)]$ converge para $f(\cos t)$ uniformemente para $t \in [-\pi, \pi]$. Fazendo $t = d_1(x, y)$ com $x \in S^1$ fixado e $y \in S^1$ variável, vemos que $f(\cos t) = f(\langle x, y \rangle)$ e, portanto $\sigma_{n+1}[f(\langle x, \cdot \rangle)]$ converge uniformemente para $f(\langle x, \cdot \rangle)$. Por simetria o mesmo vale para a outra variável.

Agora pela Observação 3.2.1, os coeficientes de Fourier de f_{ocos} e f são da forma

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad k \geq 0.$$

Como $T_0(t) = 1$ e $T_k(t) = k/2 P_k^0(t)$, $k \geq 1$,

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) (1-t^2)^{-1/2} dt & \text{se } k = 0 \\ \frac{k}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) P_k^0(t) (1-t^2)^{-1/2} dt & \text{se } k \geq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Calculando-se diretamente, vemos que

$$\sigma_{n+1}[f(\cos t)] = \sum_{k=0}^n B_{nk} a_k \cos kt,$$

onde

$$B_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = 0 \text{ e } n \geq 0 \\ \frac{1+n-k}{n+1} & \text{se } 0 < k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Usando-se o fato que $\cos kt = T_k(\cos t)$ e a definição de T_k acima, temos que

$$f(\langle x, y \rangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} a_k \cos k d_1(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} B_{nk} a_k P_k^0(\langle x, y \rangle) \right].$$

Pelo Teorema 2.4.2, $P_k^0(\langle x, y \rangle) = (2\pi/k) \sum_{j=1}^2 Y_k^j(x) Y_k^j(y)$, $k \geq 1$. Assim,

$$f(\langle x, y \rangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \pi B_{nk} a_k \sum_{j=1}^2 Y_k^j(x) Y_k^j(y) \right].$$

Pela forma como desenvolvemos, concluímos que:

- (1) cada linha da matriz B tem finitos elementos não nulos;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n0} = 1/2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+n-k)/(n+1) = 1$, $k \geq 1$;
- (3) a sequência $\{\sigma_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ converge para $f(\langle x, y \rangle)$ uniformemente em x e em y .

Portanto pelo Teorema 3.3.1, $\mathcal{F}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^1)$ se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} a_k \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} = 1$, a última conclusão equivale a $a_k \neq 0$. Usando-se (3.14), obtemos, finalmente, que

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)P_k^0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \neq 0, \quad k \geq 0.$$

■

A versão do resultado acima no caso $m \geq 2$ pode ser escrita da forma seguinte. Escrevemos aqui

$$\tau_{n+1}[\langle x, y \rangle] = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=k}^n A_{nj} \right) a_k P_k^\lambda(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in S^m,$$

onde A_{nj} é como no Teorema 3.1.2 e a_k é como no Exemplo 3.2.3.

Teorema 3.3.3 *Seja $f \in C([-1, 1])$. Assuma que $\tau_{n+1}[f(\langle x, y \rangle)] \rightarrow f(\langle x, y \rangle)$ uniformemente quando uma das variáveis é fixada. Então, $\mathcal{F} = \{x \in S^m \mapsto f(\langle x, y \rangle) : y \in S^m\}$ é fundamental em $C(S^m)$ se e somente se $a_k \neq 0, k \geq 0$.*

Prova: Primeiramente, pelo Teorema 2.4.2

$$\tau_{n+1}[\langle x, y \rangle] = \sum_{k=0}^{\infty} B_{nk} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} Y_k^j(x) Y_k^j(y),$$

onde

$$B_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^n A_{nj} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Observe que na fórmula acima $c_{0,\lambda}$ é uma constante positiva dependendo de $Y_0^1(x)$.

Note agora que as seguintes conclusões valem:

- (1) cada linha de B tem finitos elementos não nulos;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} = 1$, pelo Teorema 3.1.4;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{n+1}[f(\langle x, y \rangle)] = f(\langle x, y \rangle)$ uniformemente em x e em y , devido à hipótese. Assim usando-se o Teorema 3.3.1 com $V_n = \mathcal{H}_n^{m+1}$, vemos que $\mathcal{F}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$ se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} a_k c_{k,\lambda} \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{nk} = 1$ e $c_{k,\lambda} > 0$, $k \geq 0$, $\mathcal{F}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$ se e somente se $a_k \neq 0$, $k \geq 0$, completando a prova do teorema. ■

Assumindo-se hipóteses mais fortes no teorema anterior, podemos obter uma prova mais simples do mesmo, evitando argumentos de somabilidade não usuais ([17]).

Teorema 3.3.4 *Sejam m um inteiro positivo e $g \in \mathcal{C}([0, \pi])$ uma função da forma*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{\lambda}(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad g(0) < \infty.$$

Então, $\mathcal{F} = \{x \in S^m \mapsto g[d_m(x, y)] : y \in S^m\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$ se e somente se $a_k \neq 0$, $k \geq 0$.

Prova: Suponhamos que $a_l = 0$, para algum l e mostremos que $\mathcal{F}$ não é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$. Seja η uma medida não trivial definida nos subconjuntos de Borel de S^m da seguinte forma

$$\eta(E) = \int_E Y_l^1(x) dw_m, \quad E \subset S^m, \quad (3.15)$$

e definamos

$$I(y) = \int_{S^m} g[d_m(x, y)] d\eta(x), \quad y \in S^m.$$

Como a série em questão é uniformemente convergente para cada $y \in S^m$, obtemos

$$I(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\int_{S^m} P_k^{\lambda}(\langle x, y \rangle) d\eta(x) \right] \stackrel{(3.15)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\int_{S^m} P_k^{\lambda}(\langle x, y \rangle) Y_l^1(x) dw_m \right].$$

Pelo Teorema 2.4.2,

$$I(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\int_{S^m} c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} Y_k^j(x) Y_k^j(y) Y_l^1(x) dw_m \right].$$

Como a integral é linear,

$$I(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_k^j(x) Y_l^1(x) dw_m \right] Y_k^j(y).$$

Pelo Teorema 2.4.1,

$$I(y) = a_l c_{l,\lambda} \sum_{j=1}^{D_l^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_l^j(x) Y_l^1(x) dw_m \right] Y_l^j(y) = 0.$$

Portanto, $I(y) = 0$, $y \in S^m$ e o resultado segue do Teorema 2.1.2.

Para a recíproca, suponhamos que $a_k \neq 0, k \geq 0$ e mostremos que $\mathcal{F}$ é fundamental em $C(S^m)$. Pelo Teorema 2.1.2, basta mostrarmos que $\mathcal{F}^\perp = \{0\}$. Seja, então, $\psi \in \mathcal{F}^\perp$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única medida de Borel regular μ tal que

$$\psi(f) = \int_{S^m} f d\mu, \quad f \in C(S^m).$$

Como $\psi \in \mathcal{F}^\perp$, $\psi(f) = 0$, $f \in \mathcal{F}$. Segue daí e da hipótese que

$$0 = \int_{S^m} g[d_m(x, y)] d\mu(x) = \int_{S^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^\lambda(\langle x, y \rangle) d\mu(x), \quad y \in S^m.$$

Como na parte anterior da prova,

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\int_{S^m} P_k^\lambda(\langle x, y \rangle) d\mu(x) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\int_{S^m} c_{k,\lambda} \sum_{j=0}^{D_k^{m+1}} Y_k^j(x) Y_k^j(y) d\mu(x) \right].$$

Pela linearidade da integral,

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=0}^{D_k^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_k^j(x) d\mu(x) \right] Y_k^j(y), \quad y \in S^m.$$

Multiplicando a última expressão por $Y_l^i(y)$, com l e i arbitrários, e em seguida integrando em relação a dw_m , obtemos

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=0}^{D_k^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_k^j(x) d\mu(x) \right] \left[\int_{S^m} Y_k^j(y) Y_l^i(y) dw_m \right].$$

Pelo Teorema 2.4.1,

$$0 = a_l c_{l,\lambda} \sum_{j=1}^{D_l^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_l^j(x) d\mu(x) \right] \left[\int_{S^m} Y_l^j(y) Y_l^i(y) dw_m \right].$$

Como $\{Y_l^j : j = 1, 2, \dots, D_l^{m+1}\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_l^{m+1}$, segue que

$$0 = a_l c_{l,\lambda} w_m \left[\int_{S^m} Y_l^i(x) d\mu(x) \right].$$

Desde que $a_l \neq 0$, $w_m > 0$ e $c_{l,\lambda} > 0$,

$$\int_{S^m} Y_l^i(x) d\mu(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq D_l^{m+1}, \quad l \geq 0.$$

Como l e i são arbitrários, μ anula o conjunto $\mathcal{H} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^{m+1}$. Combinando-se agora o Teorema 2.4.3 e o Teorema da Representação de Riesz concluímos que $\mu \equiv 0$.

Portanto $\psi \equiv 0$. ■

Capítulo 4

A Fundamentalidade de Certas Classes de Funções Contínuas em Esferas

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar exemplos concretos de funções que possam ser usadas nos teoremas da Seção 3.3 ([7]). Aproveitando as idéias deste capítulo e do teorema anterior, provaremos também um resultado referente à fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^\infty)$.

4.1 Funções Integralmente Positivas Definidas em Esferas

Nesta seção, estudaremos em detalhes funções representáveis como em (1.1) que satisfazem $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Tais funções obviamente produzem conjuntos fundamentais como nos teoremas da Seção 3.3. Elas estão relacionadas com o conceito seguinte.

Definição 4.1.1 Uma função contínua $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **integralmente positiva definida** em S^m se

$$\int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\mu(x) d\mu(y) \geq 0,$$

para toda medida de Borel, com sinal e regular em S^m . A função f é dita ser **estritamente integralmente positiva definida** em S^m se a desigualdade acima for estrita quando $\mu \neq 0$.

O conceito acima reduz-se aquele no começo da página 2, quando expressamos μ como uma combinação linear de funcionais lineares pontuais.

Teorema 4.1.1 *Sejam m um inteiro positivo e $f \in C([0, \pi])$. Então, f é estritamente integralmente positiva definida em S^m se e somente se*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^\lambda(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad a_k > 0, \quad f(0) < \infty. \quad (4.1)$$

Prova: Suponhamos que f é estritamente integralmente positiva definida em S^m e mostremos que f tem a forma (4.1). Segue pela hipótese e pela observação após a definição acima que f é positiva definida em S^m . Neste caso, por (1.1),

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^\lambda(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2}, \quad a_k \geq 0, \quad f(0) < \infty. \quad (4.2)$$

Suponhamos, por absurdo, que $a_l = 0$ para algum l e mostremos uma contradição. Considere a medida η definida na primeira parte da prova do Teorema 3.3.4 e defina

$$I(y) = \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x), \quad y \in S^m.$$

Procedendo-se como na prova daquele teorema, vemos que

$$I(y) = a_l c_{l,\lambda} \sum_{j=1}^{D_l^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_l^j(x) Y_l^1(x) dw_m(x) \right] Y_l^j(y) = 0.$$

Portanto,

$$\int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x) d\eta(y) = \int_{S^m} I(y) d\eta(y) = 0,$$

contradizendo nossa hipótese inicial.

Reciprocamente seja μ uma medida de Borel, com sinal e regular em S^m e defina

$$J(y) = \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\mu(x), \quad y \in S^m.$$

Como na prova do Teorema 3.3.4, obtemos que

$$J(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_k^j(x) d\mu(x) \right] Y_k^j(y).$$

Procedendo-se de maneira análoga, vemos que

$$\int_{S^m} J(y) d\mu(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,\lambda} \sum_{j=1}^{D_k^{m+1}} \left[\int_{S^m} Y_k^j(x) d\mu(x) \right]^2 \geq 0.$$

Como $a_k c_{k,\lambda} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\int_{S^m} J(y) d\mu(y) = 0$ se e somente se

$$\int_{S^m} Y_k^j(x) d\mu(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq D_k^{m+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como no final da prova do Teorema 3.3.4, concluímos que $\mu \equiv 0$. ■

A seguir, mostraremos que extensões de funções completamente monotônicas, bem como certas funções construídas a partir delas, são estritamente integralmente positivas definidas em qualquer S^m .

Definição 4.1.2 Uma função $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é dita ser **completamente monotônica** se

$$(-1)^p D^p f \geq 0 \quad \text{para } p = 0, 1, 2, \dots.$$

Um famoso teorema devido a Bernstein ([2]) estabelece que uma função $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é completamente monotônica se e somente se

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-sx} d\nu(s), \quad x > 0,$$

para alguma medida de Borel positiva ν em $[0, \infty[$. Notemos, ainda, que toda função completamente monotônica f é não negativa e decrescente. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existe. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \nu([0, \infty[)$, vemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ se e somente se ν é uma medida limitada. Se este for o caso, f pode ser estendida continuamente na origem, ou seja, podemos assumir que f está definida em $[0, \infty[$. Denotemos por $\mathcal{CM}$ o conjunto de todas as funções completamente monotônicas e não constantes, satisfazendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Exemplos de tais funções são: $1/\sqrt{c+x}$, $\exp(-cx)$, $c > 0$, $\ln(2+x)/(1+x)$, etc.

Lema 4.1.1 *Seja g uma função como em (1.5). Se $g(t) > g(0)$ para $t > 0$, então $\exp(-sg)$, $s > 0$ é estritamente positiva definida em S^m , para todo m .*

Prova: Definindo-se $c = \exp[g(0) + g(\pi/2)]$ e $f(t) = s \sum_{k=0}^\infty a_k \cos^k t$, temos que

$$e^{-sg(t)} = c^{-s} e^{f(t)}.$$

Como $g(t) > g(0)$ para $t > 0$, a série representando g é tal que $a_k > 0$ para pelo menos um k ímpar. Logo, como $c^{-s} > 0$, $s > 0$, $\exp(-sg(t))$ tem evidentemente uma série da forma

$$e^{-sg(t)} = \sum_{k=0}^\infty b_k(s) \cos^k t, \quad b_k(s) > 0.$$

Portanto, pelas afirmações da página 3, $\exp(-sg)$ é estritamente positiva definida em qualquer S^m . ■

Lema 4.1.2 *Seja m um inteiro positivo fixado. Se r é um inteiro não negativo, então*

$$\cos^r t = \sum_{0 \leq 2j \leq r} c(r, \lambda, j) P_{r-2j}^\lambda(\cos t), \quad \lambda = \frac{m-1}{2},$$

com $c(r, \lambda, j) > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Prova: Mostremos por indução sobre r . Para $r = 0$ o resultado é óbvio. Para $r = 1$, $\cos t = c(1, \lambda, 0)P_1^\lambda(\cos t)$, onde

$$c(1, \lambda, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} & \text{se } \lambda > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Suponhamos, então, que o resultado é válido para $r > 1$ e mostremos sua validade para $r + 1$. Usando a hipótese de indução, vemos que

$$\cos^{r+1} t = \sum_{0 \leq 2j \leq r} c(r, \lambda, j) \cos t P_{r-2j}^\lambda(\cos t).$$

Utilizando-se a fórmula de recorrência dos polinômios ultrasféricos ([10], pp. 222), temos que

$$\cos t P_{r-2j}^\lambda(\cos t) = \frac{(r - 2j + 1)P_{r-2j+1}^\lambda(\cos t) + (r - 2j + 2\lambda - 1)P_{r-2j-1}^\lambda(\cos t)}{2(r - 2j + \lambda)}.$$

Daí,

$$\cos^{r+1} t = \sum_{0 \leq 2j \leq r} [d_1(r, \lambda, j)P_{r-2j+1}^\lambda(\cos t) + d_2(r, \lambda, j)P_{r-2j-1}^\lambda(\cos t)],$$

onde

$$d_1(r, \lambda, j) = \frac{c(r, \lambda, j)(r - 2j + 1)}{2(r - 2j + \lambda)} \quad \text{e} \quad d_2(r, \lambda, j) = \frac{c(r, \lambda, j)(r - 2j + 2\lambda - 1)}{2(r - 2j + \lambda)}.$$

Portanto, o resultado segue observando-se que $d_1(r, \lambda, j) > 0$ e $d_2(r, \lambda, j) > 0$, $r - 2j = 1, 2, \dots, r$. ■

Teorema 4.1.2 *Sob as hipóteses do Lema 4.1.1, $\exp(-sg)$ $s > 0$ é estritamente integralmente positiva definida em S^m , para todo m .*

Prova: O resultado segue diretamente do Lema 4.1.1, do Lema 4.1.2 e do Teorema 4.1.1. ■

Teorema 4.1.3 *Sejam $F \in \mathcal{CM}$ e g uma função como em (1.5). Assuma que $g(t) > g(0)$ para $t > 0$. Então, $F \circ g$ é estritamente integralmente positiva definida em S^m , para todo m .*

Prova: Notemos inicialmente que pelo Teorema de Bernstein,

$$(F \circ g)[d_m(x, y)] = \int_0^\infty e^{-sg[d_m(x, y)]} d\nu(s),$$

onde ν é uma medida de Borel positiva em $[0, \infty[$. Agora seja μ uma medida de Borel, com sinal, regular e não trivial em S^m e defina

$$\begin{aligned} I &= \int_{S^m} \int_{S^m} (F \circ g)[d_m(x, y)] d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_{S^m} \int_{S^m} \left[\int_0^\infty e^{-sg[d_m(x, y)]} d\nu(s) \right] d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

Deste modo pelo Teorema de Tonelli ([19], pp. 92),

$$I = \int_0^\infty \left[\int_{S^m} \int_{S^m} e^{-sg[d_m(x, y)]} d\mu(x) d\mu(y) \right] d\nu(s).$$

Pelo Teorema 4.1.2, a integral dupla em $d\mu$ é positiva para todo $s > 0$ e, portanto

$$I = \int_0^\infty r(s) d\nu(s),$$

onde $r(s) > 0$ para $s > 0$. Como F não é constante, ν não pode ter massa concentrada na origem. Por conseguinte, $I > 0$. ■

4.2 Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^m)$ via Funções de Bernstein

Nesta seção, continuaremos com o propósito de encontrar funções que possam ser utilizadas nos teoremas do capítulo anterior. Similarmente ao que fizemos na seção precedente, exibiremos outra classe de funções cujo desenvolvimento em série, como no Exemplo 3.2.3, seja tal que os coeficientes a_k , $k \geq 1$, tenham todos o mesmo sinal.

Definição 4.2.1 Uma função $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é dita ser uma **função de Bernstein** se

$$f \geq 0 \quad \text{e} \quad (-1)^p D^p f \leq 0 \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \dots.$$

Notemos que f é uma função de Bernstein se e somente se $f \geq 0$ e f' é completamente monotônica. Paralelamente ao Teorema de Bernstein, o resultado seguinte mostra que as funções de Bernstein podem ser representadas de forma semelhante às funções completamente monotônicas.

Teorema 4.2.1 Uma função $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Bernstein se e somente se

$$f(x) = a + \int_0^\infty (1 - e^{-sx}) d\mu(s), \quad x > 0,$$

onde $a \geq 0$ e μ é uma medida de Borel positiva em $[0, \infty[$ satisfazendo

$$\int_0^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) < \infty.$$

Prova: Assumamos inicialmente que f é uma função de Bernstein. Pela observação após a definição acima, f' é completamente monotônica. Pelo Teorema de Bernstein, existe uma medida de Borel positiva ν em $[0, \infty[$ tal que

$$f'(u) = \int_0^\infty e^{-su} d\nu(s), \quad u > 0.$$

Como f é não negativa e crescente, $0 \leq a := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f(x) - a = \int_0^x f'(u) du = \int_0^x \left[\int_0^\infty e^{-su} d\nu(s) \right] du.$$

Segue pelo Teorema de Tonelli que,

$$f(x) - a = \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-su} du \right] d\nu(s) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-sx}}{s} d\nu(s).$$

Considere agora a medida μ definida nos subconjuntos mensuráveis de $[0, \infty[$ por

$$\mu(J) = \int_J \frac{d\nu(s)}{s}.$$

Primeiramente mostremos que $\int_0^\infty s(1+s)^{-1} d\mu(s) < \infty$. Como $1-e^{-1} \leq 1-e^{-s}$, $s \geq 1$ e μ é uma medida positiva em $[1, \infty[\subset [0, \infty[$,

$$(1-e^{-1}) \int_1^\infty d\mu(s) \leq \int_1^\infty (1-e^{-s}) d\mu(s) \leq \int_0^\infty (1-e^{-s}) d\mu(s) = f(1) - a \leq f(1)$$

e, portanto

$$\int_1^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) \leq \int_1^\infty d\mu(s) \leq \frac{e}{e-1} f(1) < \infty.$$

Da mesma forma,

$$\int_0^1 \frac{s}{1+s} d\mu(s) \leq \int_0^1 s d\mu(s) \leq \int_0^1 d\mu(s) \leq \int_1^\infty d\mu(s) < \infty.$$

Assim,

$$\int_0^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) = \int_0^1 \frac{s}{1+s} d\mu(s) + \int_1^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) < \infty.$$

Obviamente, temos que

$$f(x) = a + \int_0^\infty (1-e^{-sx}) d\mu(s).$$

Isto conclui a primeira parte da prova.

Reciprocamente suponhamos que

$$f(x) = a + \int_0^\infty (1-e^{-sx}) d\mu(s), \quad x > 0,$$

onde μ é uma medida positiva em $[0, \infty[$, $a \geq 0$ e $\int_0^\infty s(1+s)^{-1} d\mu(s) < \infty$. Afirmamos que $\int_0^1 s d\mu(s) < \infty$ e $\int_1^\infty d\mu(s) < \infty$. De fato, se a primeira integral não for finita, então

$$\int_0^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) \geq \int_0^1 \frac{s}{1+s} d\mu(s) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 s d\mu(s) = \infty,$$

uma contradição. Se a segunda integral não for finita, então

$$\int_0^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) \geq \int_1^\infty \frac{s}{1+s} d\mu(s) \geq \frac{1}{2} \int_1^\infty d\mu(s) = \infty,$$

novamente uma contradição. Temos assim,

$$\begin{aligned} g(x) &:= \int_0^\infty (1 - e^{-sx}) d\mu(s) \\ &= \int_0^1 (1 - e^{-sx}) d\mu(s) + \int_1^\infty (1 - e^{-sx}) d\mu(s) \\ &\leq x \int_0^1 s d\mu(s) + \int_1^\infty d\mu(s) < \infty, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Também,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{h} (1 - e^{-sh}) d\mu(s), \quad x > 0, \quad h > 0.$$

Como

$$\left| \frac{e^{-sx}}{h} (1 - e^{-sh}) \right| = \frac{e^{-sx}}{h} (1 - e^{-sh}) \leq \frac{e^{-sx}}{h} sh = se^{-sx} \leq s,$$

o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([19], pp. 76), implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{h} (1 - e^{-sh}) d\mu(s) = \int_0^\infty se^{-sx} d\mu(s).$$

Um argumento análogo mostra que o mesmo vale para o outro limite lateral. Portanto, g é diferenciável e

$$g'(x) = \int_0^\infty se^{-sx} d\mu(s), \quad x > 0.$$

Segue do Teorema de Bernstein que g' é completamente monotônica. Como $g(x) \geq 0$, g é uma função de Bernstein. Segue que $f(x) = a + g(x)$ é uma função de Bernstein. Assim, a prova do teorema está completa. ■

Denotamos por $\mathcal{BM}$ a classe das funções de Bernstein não lineares. As funções $c - \exp x$, $c \geq 1$, $\sqrt{c+x}$, $c > 0$, etc. são exemplos de funções em $\mathcal{BM}$.

Lema 4.2.1 *Sejam $\psi \in \mathcal{BM}$ e g como em (1.5). Assuma que $g(t) > g(0)$ para todo $t > 0$. Se η é uma medida de Borel, com sinal, regular e não trivial em S^m com $\eta(S^m) \equiv 0$, então*

$$\int_{S^m} \int_{S^m} \psi(g[d_m(x, y)]) d\eta(x) d\eta(y) < 0$$

para todo m .

Prova: Assumamos as hipóteses e consideremos

$$I(y) := \int_{S^m} \psi(g[d_m(x, y)]) d\eta(x) = \int_{S^m} [a + \int_0^\infty (1 - e^{-sg[d_m(x, y)]}) d\nu(s)] d\eta(x), \quad y \in S^m.$$

Como $\eta(S^m) = 0$,

$$I(y) = \int_{S^m} \int_0^\infty (1 - e^{-sg[d_m(x, y)]}) d\nu(s) d\eta(x).$$

Daí, pelo Teorema de Tonelli,

$$I(y) = \int_0^\infty \int_{S^m} (1 - e^{-sg[d_m(x, y)]}) d\eta(x) d\nu(s).$$

Uzando novamente $\eta(S^m) = 0$, vemos que

$$I(y) = - \int_0^\infty \left[\int_{S^m} e^{-sg[d_m(x, y)]} d\eta(x) \right] d\nu(s).$$

Utilizando-se os mesmos argumentos acima,

$$I := \int_{S^m} I(y) d\eta(y) = - \int_0^\infty \left[\int_{S^m} \int_{S^m} e^{-sg[d_m(x, y)]} d\eta(x) d\eta(y) \right] d\nu(s).$$

Pelo Teorema 4.1.2, $\exp(-sg[d_m(x, y)])$ é estritamente integralmente positiva definida em S^m . Como ψ não é constante, ν não pode ter massa concentrada na origem. Isto implica que $I < 0$. ■

Para a prova do teorema abaixo utilizaremos o seguinte lema, cuja prova pode ser encontrada em [19].

Lema 4.2.2 *Sejam X um espaço topológico e $z \in X$. Defina uma medida positiva ν_z sobre os conjuntos E mensuráveis de X por $\nu_z(E) = \chi_E(z)$, onde χ é a função característica usual. Suponha que $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ é uma função ν_z -mensurável. Então,*

$$\int_X f(x) d\nu_z(x) = f(z).$$

Teorema 4.2.2 *Seja $f(t) = (\psi \circ g)(t)$, onde $\psi \in \mathcal{BM}$ e g é como em (1.5). Se $g(t) > g(0) \geq 0$ para $t > 0$, então $\mathcal{F} = \{x \in S^m \mapsto f[d_m(x, y)] : y \in S^m\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^m)$.*

Prova: Consideremos ν uma medida de Borel, com sinal e regular em S^m tal que

$$\int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu(x) = 0, \quad y \in S^m. \quad (4.3)$$

Vamos mostrar que $\nu \equiv 0$. Fixemos $z \in S^m$ e definamos a medida η em S^m por $\eta = \nu - \nu(S^m)\nu_z$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu(x) d\eta(y) \\ &= \int_{S^m} \left[\int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x) + \nu(S^m) \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu_z(x) \right] d\eta(y) \\ &= \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x) d\eta(y) + \nu(S^m) \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu_z(x) d\eta(y). \end{aligned}$$

Pela definição de η e pelo Lema 4.2.2, vemos que

$$\begin{aligned} A &:= \nu(S^m) \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu_z(x) d\eta(y) \\ &= \nu(S^m) \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu_z(x) d\nu(y) - [\nu(S^m)]^2 \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\nu_z(x) d\nu_z(y) \\ &= \nu(S^m) \int_{S^m} f[d_m(z, y)] d\nu(y) - [\nu(S^m)]^2 f(0). \end{aligned}$$

Por (4.3), $A = -[\nu(S^m)]^2 f(0)$. Assim,

$$0 = \int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x) d\eta(y) - [\nu(S^m)]^2 f(0).$$

Notemos que $\eta(S^m) = 0$. Se $\eta \not\equiv 0$, então pelo Lema 4.2.1,

$$\int_{S^m} \int_{S^m} f[d_m(x, y)] d\eta(x) d\eta(y) < 0.$$

Segue que, $[\nu(S^m)]^2 f(0) < 0$ e, portanto $\nu(S^m) \neq 0$ e $f(0) \neq 0$. Como f é não negativa, $f(0) > 0$. Portanto, $0 > [\nu(S^m)]^2 f(0) > 0$, o que é um absurdo. Assim, $\eta \equiv 0$ e $\nu = \nu(S^m)\nu_z$. Pela hipótese inicial e novamente pelo Lema 4.2.2,

$$0 = \int_{S^m} f[d_m(x, y)] \nu(S^m) d\nu_z(x) = \nu(S^m) f[d_m(z, y)], \quad y \in S^m.$$

Afirmamos que $f[d_m(z, y)] \neq 0$, se $y \neq z$. Se este não for o caso, existiria $y \in S^m$, $y \neq z$ tal que

$$0 = f[d_m(z, y)] = (\psi \circ g \circ d_m)(z, y) = a + \int_0^\infty (1 - e^{-sg[d_m(z, y)]}) d\mu(s).$$

Como $a \geq 0$, $1 - \exp(-sg[d_m(z, y)]) \geq 0$ e μ é positiva em $[0, \infty[$,

$$0 \leq \int_0^\infty (1 - e^{-sg[d_m(z, y)]}) d\mu(s) = -a \leq 0.$$

Como ψ não é constante e $s > 0$, μ não pode ter massa concentrada na origem. Portanto, a última conclusão equivaleria a $g[d_m(z, y)] = 0$, ou seja,

$$g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [1 - \cos^k d_m(z, y)] = 0, \quad k \geq 1.$$

Como $g(0) \geq 0$, $a_k \geq 0$ e $\cos^k d_m(z, y) \leq 1$, $k \geq 1$, a série acima é nula se e somente se

$$a_k [1 - \cos^k d_m(z, y)] = 0, \quad k \geq 1. \quad (4.4)$$

Pela hipótese sobre g , $\cos^{2n+1} d_m(z, y) = 1$, para algum n . Como $0 \leq d_m \leq \pi$, a última igualdade implicaria que $z = y$, uma contradição. Deste modo, $\nu(S^m) = 0$ e, portanto $\nu \equiv 0$. ■

4.3 Fundamentalidade em $\mathcal{C}(S^\infty)$

Nesta seção, obteremos obter resultados similares aos anteriores para a esfera de Hilbert S^∞ ([18]). Para isso algumas notações adicionais são necessárias. Lembremos que a dificuldade neste caso é maior, uma vez que S^∞ não é compacta e nem mesmo localmente compacta.

No lema a seguir escreveremos $\alpha!$ para denotar o produto $\prod_{j=1}^\infty \alpha_j$ das coordenadas de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$. Como $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{N}^\infty$, para todo $n \geq 1$, tal notação aplica-se para os elementos de $\mathbb{N}^n$, também.

Lema 4.3.1 Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prova: Vamos usar indução sobre n . Se $n = 1$, então $x = x_1$ e $\alpha = \alpha_1$ implicando que

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha_1=m} \frac{m!}{\alpha_1!} x_1^{\alpha_1} = x_1^m.$$

Se $n = 2$, então $x = (x_1, x_2)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ implicando que

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \sum_{\alpha_1=0}^m \frac{m!}{\alpha_1! (m-\alpha_1)!} x_1^{\alpha_1} x_2^{m-\alpha_1} \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^m \binom{m}{\alpha_1} x_1^{\alpha_1} x_2^{m-\alpha_1} = (x_1 + x_2)^m. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \quad n-1 > 2$$

e provemos o resultado para n .

Sejam, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ e $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^m &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x_n^{m-j} \left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right]^j \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x_n^{m-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} x^\alpha \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \frac{m!}{j! (m-j)!} \frac{j!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{m-j}. \end{aligned}$$

Como $m = |\bar{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = j + \alpha_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^m = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \frac{m!}{\alpha!(m-j)!} \bar{x}^{\bar{\alpha}}.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^m = \sum_{|\bar{\alpha}|=m} \frac{m!}{\bar{\alpha}!} \bar{x}^{\bar{\alpha}}.$$

Lema 4.3.2 *Sejam $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^1$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$. Então,*

$$\left(\sum_{i=1}^\infty x_i \right)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

A série à direita converge absolutamente e, conseqüentemente ela converge em qualquer ordem.

Prova: Fixemos k e definamos

$$J_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^\infty : |\alpha| = n \text{ e } \alpha_i = 0, \text{ para } i > k\}.$$

Como $\alpha_i = 0$, $i > k$ para todo $\alpha \in J_k$, $\prod_{i=1}^\infty x_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$. Usando o Lema 4.3.1, vemos que

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Similarmente para $y = (|x_1|, |x_2|, \dots) \in \ell^1$,

$$\sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} y^\alpha = \left(\sum_{i=1}^k |x_i| \right)^n \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i| \right)^n, \quad \alpha \in J_k.$$

Como $x \in \ell^1$, $(\sum_{i=1}^\infty |x_i|)^n < \infty$. Portanto a série $\sum_{|\alpha|=n} (n!/\alpha!) x^\alpha$ converge absolutamente. Finalmente,

$$\left(\sum_{i=1}^\infty x_i \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Uma consequência imediata do lema anterior pode ser dado pelo:

Corolário 1 *Se $x, y \in \ell^2$, então*

$$\langle x, y \rangle^n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \right)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

Teorema 4.3.1 *Sejam X um espaço de Hausdorff compacto e $f \in \mathcal{C}(X \times X)$. Suponha que f seja estritamente integralmente positiva definida em X , isto é,*

$$\int_X \int_X f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) > 0,$$

para toda medida μ de Borel, com sinal, regular e não trivial em X . Então, o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in X \mapsto f(x, y) : y \in X\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(X)$.

Prova: Pelo Teorema 2.1.2, basta mostrarmos que $\mathcal{A}^\perp = \{0\}$. Seja, então, $\psi \in \mathcal{A}^\perp$. Pelo Teorema da Representação de Riesz existe uma única medida de Borel regular μ tal que

$$\psi(g) = \int_X g d\mu, \quad g \in \mathcal{C}(X).$$

Como $\psi \in \mathcal{A}^\perp$, $\int_X f(x, y) d\mu(x) = 0$, $y \in X$. Daí $\int_X \int_X f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0$. Como f é estritamente integralmente positiva em X , $\mu \equiv 0$ e, portanto $\psi \equiv 0$ completando a prova do teorema. ■

Teorema 4.3.2 *Seja f uma função da forma*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad a_k > 0, \quad f(0) < \infty.$$

Então, $f \circ \langle \cdot, \cdot \rangle$ é estritamente integralmente positiva definida em qualquer compacto K de S^∞ .

Prova: Consideremos K um subconjunto compacto de S^∞ e μ uma medida de Borel, com sinal, regular e não trivial em K . Definamos

$$I = \int_K \int_K f(\langle x, y \rangle) d\mu(x) d\mu(y)$$

Pelo Corolário 1,

$$\begin{aligned} I &= \int_K \int_K \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle x, y \rangle^k d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_K \int_K \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

Como as séries em questão são absolutamente convergentes,

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left[\int_K x^\alpha d\mu(x) \right]^2.$$

Claramente $I \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $I = 0$. Uma vez que $a_k > 0$, $k \geq 0$, $\int_K x^\alpha d\mu(x) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^\infty$. Pelo Exemplo 2.3.2, as funções x^α formam um conjunto fundamental em $\mathcal{C}(K)$. Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, $\mu \equiv 0$, em contradição com a hipótese sobre μ . Assim a prova está completa. ■

Teorema 4.3.3 *Seja f como nas hipóteses do teorema acima. Então, o conjunto $\mathcal{F} = \{x \in S^\infty \mapsto f(\langle x, y \rangle) : y \in S^\infty\}$ é fundamental em $\mathcal{C}(S^\infty)$.*

Prova: Isto segue dos resultados anteriores e da definição da topologia de $\mathcal{C}(S^\infty)$. ■

Bibliografia

- [1] **Akhiezer, N. I.**, *Lectures on Integral Transforms*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 70, Providence, 1980.
- [2] **Berg, C. e G. Forst**, *Potencial Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [3] **Cheney, E.W.**, *Approximation Using Positive Definite Functions*, Approximation Theory 8, C. K. Chui e L. L. Schumaker (eds.), World Scientific Publishing, (1995).
- [4] **Davis, P.**, *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1974.
- [5] **Dixmier, J.**, *General Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] **Dunford, N. e J. T. Schwartz**, *Linear Operators (Part I), General Theory*, Interscience, New York, 1958.
- [7] **Fasshauer, G. E.**, *On the Density of Certain Classes of Radial Basis Functions on Spheres*, preprint.
- [8] **Flanigan, F. J. e J. L. Kazdan**, *Calculus Two: Linear and Nolinear Functions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1971.

- [9] Hardy, G. H., *Divergent Series*, Claredon Press, Oxford, 1949.
- [10] Magnus, W., F. Oberhettinger e R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [11] Menegatto, V. A., *Stricly Positive Define Kernels on the Hilbert Sphere*, Appl. Analysis **55** (1994), 91-101.
- [12] Müller, C., *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [13] Powel, R. E. e S. M. Shah, *Summability Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1972.
- [14] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [15] Schoenberg, I. J., *Positive Definite Functions on Spheres*, Duke Math. J., **9**, (1942), 96-108.
- [16] Stein, E. M. e G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [17] Sun, X., *The Fundamentality of Translates of a Continuous Function on Spheres*, Numerical Algorithms, **8** (1994), 131-134.
- [18] Sun, X. e E. W. Cheney, *Fundamental Sets of Continuous Functions on Spheres*, a aparecer no Constructive Approximation.
- [19] Wheeden, R. L. e A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1977.

Índice Remissivo

Cesàro (C,m) -somabilidade, 19

classe $\mathcal{BM}$, 49

classe $\mathcal{CM}$, 44

coeficientes de Fourier, 26

conjunto fundamental, 6

esfera de Hilbert, 9

função positiva definida, 2

completamente monotônica, 43

condicionalmente negativa definida,
2

de Bernstein, 47

estritamente condicionalmente ne-
gativa definida, 2

estritamente integralmente positiva
definida, 42

gama, 9

harmônica, 9

integralmente positiva definida, 42

Harmônicos Esféricos, 9

Método de Somabilidade de Cesàro, 16

matriz regular, 20

operador Laplaciano, 10

polinômio ultrasférico, 2

de Tchebyshev de primeira espécie,
27

harmônico esférico, 9

homogêneo, 9

regularidade do método (C,m) -conver-
gência de Cesàro, 25

série A-somável, 16

A-somável para S, 16

Cesàro $(C,1)$ -somabilidade, 17

Cesàro (C,m) -convergente, 18

de Fourier, 26

de Tchebyshev-Fourier, 27

sequência A-convergente, 16

A-convergente para L, 16

Cesàro $(C,1)$ -convergente, 17

Teorema de Hahn-Banach, 5

da Representação de Riesz, 7

de Bernstein, 44

de Stone-Weierstrass, 8